Polskie Towarzystwo Statystyczne
Oddział we Wrocławiu

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Silesian Statistical Review

Nr 14 (20)

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2016

Spis treści

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 14 (20)

Summaries

Aims and scope

Aims and scope of this journal were determined already in the period of the historical changes that took place in 1989 in the Europe, which had a great meaning for Poland, especially for the subsequent political and economic transformations. The introduction of the democratic system, and the transition from the state-controlled economy to the free market one were the driving forces behind the new Polish economy.

In the early 1990s, Poland made great progress towards achieving a fully democratic government and a market economy. In November 1990, Lech Wałęsa was elected President for a 5-year term. In 1991 were held the first free parliamentary elections. In the same year, 1991, the first issue of the journal was published under the title *Statistical Review of Lower and Opole Silesia*. In the foreword of that first issue it was stated what follows. "The changes in the socio-economic life of Lower Silesia and Opole region caused the Council of Wrocław Branch of Polish Statistical Society to publish Statistical Review of Lower and Opole Silesia, starting from the year 1991. This idea could come to life thanks to the generous help of directors of Voivodeship Statistical Offices in Jelenia Góra, Legnica, Wałbrzych and Wrocław, with a special involvement of the director of Statistical Office in Wrocław". The initial goal of the founders of the journal was to dedicate the journal to "ecological problems, demographic issues as well as social and economic well-being".

Starting in the year 2002 the journal has been published with a new layout and under a new title: *Silesian Statistical Review*. Together with *Statistical Review* (*Przegląd Statystyczny*) and *Statistical News* (*Wiadomości Statystyczne*), *Silesian Statistical Review* is now one of the three major journals in Poland dedicated to general statistical problems. Special attention has been focused on general methodological issues, as well as on the applications of various statistical methods in solving real social and economic problems. Papers concerning all topics of quality of life are published regularly. Historical essays are included on regular basis.

After 25 years of the existence, by entering in the next quarter of the century of its existence with the issue of 2016, the main scope of journal is amplified. This is again caused by changes which took place on the whole planet. In order to meet the challenge mounted by dramatic consequences of human dominance over the planet the scope of journal has been amplified to include any problems concerning the quality of human life, respecting all other forms of lives and not compromising the possibilities for future generations to live their ways of life.

Starting from the year 2016, *Silesian Statistical Review* is considered as a *Journal of Oikometrics*

The name, derived from Greek words *οικος* and *μετρω*, suggests that the journal focus is upon Nature's house (*oikos*), as a subject matter of a study, and the measurement, as a prevailing methodology of study. The journal is treated as an *interdisciplinary forum on a sustainable livelihood*. Contrary to the inscription on the door of Plato's Academy: *let no one ignorant of geometry enter here*, over the door to *Journal of Oikometrics* there is hanged the signboard with the inscription: *Everyone who cares about, and interested in any issue of sustainable livelihood is welcomed here*.

The Journal welcomes therefore papers from specialists in sustainability science, ecology, ecological economics and any other alternatives to neoclassical economics. It encompasses – but is not limited to – the following topics:

- actuarial methods and their applications,
- social justice, inequality, polarization, and stratification,
- quality of institutional performance,
- social metabolism, its measurement and analysis,
- statistical education,
- sustainable development,
- environmentalism.

As the official journal of the Polish Statistical Society, Branch in Wrocław, it is designed also to attract papers that have direct relation with the activity of the Society, particularly in the field of education, promotion and rising awareness of the statistics role in the civilization development.

Walenty Ostasiewicz

PODSTAWOWE POJĘCIA WOLNEJ PROBABILISTYKI

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 14(20)

ISSN 1644-6739
e-ISSN 2449-9765

Wiktor Ejsmont
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

DOI: 10.15611/sps.2016.14.04

Streszczenie: Teoria Voiculescu dotycząca wolnej probabilistyki, która została wprowadzona w kontekście badań algebr operatorowych, zyskuje dzisiaj coraz wiekszą popularność, zaskakując wielu naukowców swoimi analogiami z klasyczną teorią prawdopodobieństwa. Celami artykułu są krótki opis metod wolnej probabilistyki oraz ukazanie, dlaczego rozkład Wignera o gęstości $\sqrt{4-x^2}\ / \ 2\pi,$ pełni funkcję rozkładu Gaussa w nieprzemiennym kontekście.

Słowa kluczowe: wolna probabilistyka, rozkład Wignera, rozkład Gaussa.

1. Wstęp

Probabilistyka nieprzemienna jest stosunkowo młodą dziedziną matematyki, zyskującą coraz większą popularność. Jej korzeni należy upatrywać w pracach D. Avitzoura [1982] i D.V. Voiculescu [1985], w których zostało sformułowane pojęcie iloczynu wolnego C*-algebr, które dało początek teorii zwanej obecnie wolną probabilistyką. Mówiąc o genezie wolnej probabilistyki, należy wspomnieć o ważnym wyniku M. Bożejki [1975], gdzie pojawiają się liczby Catalana, będące momentami miary Wignera. Następnie okazało się, że był to szczególny przypadek Centralnego Twierdzenia Granicznego dla zmiennych losowych powiązanych z wolną probabilistyką. Jednocześnie zauważono, że teoria ta przypomina klasyczną probabilistykę, jednakże klasyczne pojęcie niezależności zmiennych losowych jest zastąpione wolną niezależnością. Zaobserwowano, że w nieprzemienny kontekst można przenieść twierdzenia znane z klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, takie jak Centralne Twierdzenie Graniczne lub graniczne twierdzenie Poissona.

Wolna probabilistyka nie jest jedyną, na której skupili się naukowcy. Warto w tym miejscu wspomnieć o probabilistyce boolowskiej, która wywodzi się z pojęcia regularnego iloczynu wolnego, badanego w kontekście funkcji określonych na iloczynie wolnym grup przez M. Bożejkę [1986] oraz o warunkowo wolnej probabilistyce wywodzącej się z pracy [Bożejko i in. 1996]. Ważna konstrukcję wprowadził także N. Muraki [2001], który dał początek tak zwanej monotonicznej probabilistyce.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 14(20)

2. Podstawowe pojęcia

W klasycznej probabilistyce fundamentalnym obiektem badanym jest układ (Ω, F, P) składający się z niepustego zbioru Ω nazywanego przestrzenią zdarzeń elementarnych, określonego na nim σ-ciała F nazywanego przestrzenią zdarzeń losowych oraz określonej na F (dodatniej) unormowanej miary P. Zmienne losowe w niekomutatywnej probabilistyce to elementy algebry A stowarzyszone z funkcjonałem liniowym τ. Kluczową rolę w niekomutatywnej probabilistyce odgrywa algebra ze stanem, dlatego też możemy zdefiniować niekomutatywną przestrzeń probabilistyczną jako parę (A, τ), gdzie A jest zespoloną $*$-algebrą z jedynką oraz dodatnim funkcjonałem liniowym tj. $\tau(XX^*) \geq 0$ takim, że $\tau(\mathsf{I}) = 1$. Wówczas ograniczoną niekomutatywną zmienną losową będzie samosprzężony element $X \in \mathsf{A}$. Poprzez rozkład rozumiemy ciąg momentów $\tau(X^n)$, gdzie $n = 0, 1, \ldots$. Wiedząc, że ciąg momentów jest ciągiem dodatnio określonym, możemy określić miarę probabilistyczną na prostej μ taką, że $\tau(X^n) = \int_{\mathsf{R}} x^n \mu(dx)$. W celu *nadania duszy* niekomutatywnej przestrzeni probabilistycznej należy wprowadzić jeszcze pojęcie niezależności. Istnieje wiele możliwości, które zależą od konkretnego modelu, np. klasyczna (tensorowa), wolna, warunkowa, boolowska lub monotoniczna niezależność. W niniejszym artykule skupimy się na wolnej niezależności. W niniejszej pracy miary probabilistyczne na prostej rzeczywistej będziemy oznaczać przez $Prob(\mathsf{R})$.

Wielomiany ortogonalne

Niech $\mu \in Prob(\mathsf{R})$ będzie miarą probabilistyczną mającą wszystkie momenty skończone, tzn. dla wszystkich $k \in \mathsf{N}$ mamy

$$|m_\mu(k)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu(x) \right| < \infty. \tag{1}$$

Rodzinę tych miar probabilistycznych, które mają skończone momenty rzędu k będziemy oznaczali $Prob^{(k)}(\mathsf{R})$. Miary probabilistyczne, mające wszystkie momenty skończone, możemy stowarzyszyć z monicznymi wielomianami ortogonalnymi postaci

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x - \alpha_0$$

$$(x - \alpha_n) p_n(x) = p_{n+1}(x) + \beta_{n-1} p_{n-1}(x), \tag{2}$$

gdzie $\alpha_n, \beta_n \in \mathsf{R}, \beta_n \geq 0$ oraz $n = 1, \ldots$. Wielomiany ortogonalne spełniają zależność

$$\int_{supp(\mu)} p_j(x) p_k(x) d\mu(x) = \delta_{j,k} \beta_0 \beta_1 \ldots \beta_{k-1}. \tag{3}$$

Parametry α_n, β_n są nazywane współczynnikami Jacobiego. Fakt, że α_n, β_n są współczynnikami Jacobiego, będziemy oznaczali

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, & \dots \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Symetryczne miary, mające wszystkie momenty, można scharakteryzować przez warunek $\alpha_n = 0$ dla każdego $n \geq 0$.

Transformata Cauchy'ego

Jednym z najważniejszych pojęć występujących w wolnej probabilistyce jest transformata Cauchy'ego, która zastępuje transformatę Fouriera w klasycznej probabilistyce.

Definicja 1. *Niech $\mu \in Prob(\mathbb{R})$. Wówczas transformatę Cauchy'ego miary μ oznaczymy przez $G_\mu(z)$ oraz zdefiniujemy ją dla $z \in \mathbb{C}^+ = \{s + ti |\, s, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$ jak poniżej*

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - x} d\mu(x). \tag{5}$$

Transformata Cauchy'ego $G_\mu(z)$ jest zdefiniowana w górnej półpłaszczyźnie $\mathbb{C}^+ = \{s + ti |\, s, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$ i przyjmuje wartości w dolnej $\mathbb{C}^- = \{s + ti |\, s, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$. Zachodzi bardzo ważny związek pomiędzy transformatą Cauchy'ego a miarą probabilistyczną mającą wszystkie momenty skończone. Dla $\mu \in Prob(\mathbb{R})$ transformatę Cauchy'ego można przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego postaci

$$G_\mu(z) = \cfrac{1}{z - \alpha_0 - \cfrac{\beta_0}{z - \alpha_1 - \cfrac{\beta_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\beta_2}{\ddots}}}} \tag{6}$$

gdzie współczynniki α_i, β_i są takie, jakie wynikają z wielomianów ortogonalnych opisanych przez równanie (2). W przypadku gdy miara μ ma zwarty nośnik, ułamki łańcuchowe zbiegają do transformaty Cauchy'ego (dowód można znaleźć w [Chihara 1978], podrozdział 4 rozdziału III). Relacja pomiędzy transformatą Cauchy'ego $G_\mu(z)$ a funkcją generującą momenty $M_\mu(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_\mu(i) z^i$ dla $\mu \in Prob(\mathbb{R})$ jest następująca

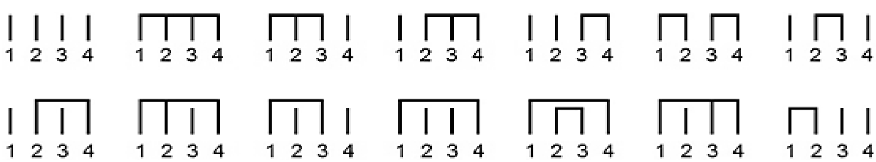
ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 14(20)

$$\frac{1}{z}G_\mu\left(\frac{1}{z}\right) = M_\mu(z) \tag{7}$$

dla z w pewnym otoczeniu zera.

Definicja 2. *Niech $\pi = \{V_1, \ldots, V_p\}$ będzie niepustą partycją zbioru $\{1, \ldots, n\}$, tzn. $V_i \neq \emptyset$ są niepustymi, rozłącznymi zbiorami, których suma mnogościowa daje $\{1, \ldots, n\}$. Wówczas partycję π nazywamy nieprzecinającą się, jeżeli $a, c \in V_i$ oraz $b, d \in V_j$, gdzie $a < b < c < d$ implikuje $i = j$. Zbiór $V_i \in \pi$ nazywamy blokiem partycji π. W nieprzecinających się partycjach π, blok V_i jest wewnętrzny, jeżeli istnieją $a, b \notin V_i$ (gdzie a i b są w pewnym innym bloku partycji π) oraz dla wszystkich $x \in V_i$ mamy $a < x < b$, w przeciwnym razie blok ten jest nazywany blokiem zewnętrznym.*

Wszystkie zbiory zewnętrzne partycji σ będziemy oznaczali przez $Out(\sigma)$, zaś wewnętrzne $Inn(\sigma)$. Rodzinę nieprzecinających się partycji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ oznaczymy za pomocą $NC(n)$. Przez głębokość $d_\pi(V_i)$ bloku V_i w partycji π rozumiemy liczbę jego bloków zewnętrznych wraz z nim samym. W szczególności, jeżeli nie istnieją bloki zewnętrzne względem V_i, *to* $d_\pi(V_i) = 1$. Dla przykładu na rys. 1 zaznaczono wszystkie nieprzecinające się partycje zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.



Rys. 1. Nieprzecinające się partycje zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, tj. $NC(4)$

Źródło: opracowanie własne.

Momenty miary probabilistycznej możemy obliczyć (znając współczynniki Jacobiego), korzystając z poniższego twierdzenia (zobacz Twierdzenie 5.1 z pracy [Accardi, Bożejko 1998]).

Twierdzenie 1. *Dla miary probabilistycznej μ o zwartym nośniku mamy*

$$m_\mu(n) = \sum_{\nu \in NC_{1,2}(n)} \prod_{B_i \in \nu; |B_i|=2} \lambda_{d_\nu(B_i)} \prod_{B_i \in \nu; |B_i|=1} \beta_{d_\nu(B_i)}, \tag{8}$$

gdzie $NC_{1,2}(n)$ jest zbiorem wszystkich nieprzecinających się partycji zbioru $\{1, \ldots, n\}$, takich, że każdy blok partycji ma liczebność jeden bądź dwa, tzn. $|B_i| = 1$ lub $|B_i| = 2$, zaś $d_\nu(B_i)$ jest głębokością bloku B_i w partycji ν.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 14(20)

3. Wolna probabilistyka

Część ta poświęcona jest opisaniu wolnej probabilistyki. Analogicznie jak w klasycznej probabilistyce, istotną rolę odgrywa tutaj pojęcie niezależności.

Definicja 3. *Rodzinę podalgebr* $\mathsf{A}_i \subset \mathsf{A}$ *nazywamy wolnie niezależnymi, jeżeli*

$$\tau(a_1 \cdots a_n) = \tau(a_1) \cdots \tau(a_n) = 0, \tag{9}$$

o ile $\tau(a_j) = 0$, $a_j \in \mathsf{A}_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n$ *oraz* $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$.

Wolny splot jest określony analogicznie jak w klasycznej probabilistyce, z tym wyjątkiem, że pojęcie klasycznej niezależności jest zastąpione wolną niezależnością.

Definicja 4. *Dwie zmienne losowe* X, $Y \in (\mathsf{A}, \tau)$ *są wolnie niezależne, jeżeli generowane przez te zmienne algebry (dwie) są wolnie niezależne. Dla dwóch miar probabilistycznych* μ_X *oraz* ν_Y *o zwartych nośnikach definiujemy ich wolny splot* $\mu_X \oplus \nu_Y$[1] *jako rozkład sumy* $X + Y \in \mathsf{A}$, *gdzie* X, $Y \in \mathsf{A}$ *są wolnie niezależne oraz mają odpowiednio rozkłady* μ_X *i* ν_Y.

Powyższa koncepcja została wprowadzona z idei wolnego produktu niekomutatywnych przestrzeni probabilistycznych. Dla danych dwóch przestrzeni (A_1, τ_1) oraz (A_2, τ_2) definiujemy $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 * \mathsf{A}_2$ jako wolny produkt z amalgamacją jedynek[2], tzn. jest to $*$-algebra generowana przez utożsamione jedynki oraz słowa postaci $a_1^{i_1} b_1^{j_1} \ldots a_n^{i_n} b_n^{k_n}$, gdzie $a_k \in \mathsf{A}_1$, $b_k \in \mathsf{A}_2$, k, i_k, $j_k \in \mathsf{N}$ oraz i_k, $j_k > 0$, i_1, $j_n \geq 0$. Stan $\tau = \tau_1 * \tau_2$ definiujemy jako stan spełniający relację (9). Wówczas mamy $\tau|\tau|_{\mathsf{A}_i} = \tau_i$. Algebry wolnie niezależne A_i są naturalnie włożone w A, ponadto jeśli $X \in \mathsf{A}_1$ oraz $Y \in \mathsf{A}_2$, to $m_{\mu_X \otimes \mu_X}(n) = \tau((X+Y)^n)$. Przykład niech $\mathsf{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ oznacza algebrę wielomianów nieprzemiennych. Niech W będzie dowolnym wielomianem wielu zmiennych, wówczas definiujemy $\tau(w(X_1, \ldots, X_n)) = w(0, \ldots, 0)$ – tj. *stały* współczynnik. *Wówczas podalgebry* $\mathsf{A}_i = \mathsf{C}\langle X_i\rangle$ są wolnie niezależne.

Rolę logarytmu transformaty Fouriera w wolnej probabilistyce odgrywa tak zwana R-transformata zdefiniowana poniżej

$$\mathsf{R}_\mu(z) = G_\mu^{-1}(z) - 1/z. \tag{10}$$

dla z w pewnym otoczeniu zera.

[1] Autor chciałby zaznaczyć, że wolny splot oznaczamy znakiem $\oplus$.

[2] Jedynki są utożsamiane $e_1 = e_2 = e$.

R-transformata linearyzacje wolny splot, tzn. jeżeli μ oraz v są miarami probabilistycznymi (odpowiadających dwóm wolnie niezależnym zmiennym losowym) na R, to mamy

$$\mathsf{R}_{\mu\otimes\nu}(z) = \mathsf{R}_{\mu}(z) + \mathsf{R}_{\nu}(z). \tag{11}$$

Jeżeli zmienna X ma rozkład μ, to stosujemy oznaczenie $\mathsf{R}_X = \mathsf{R}_\mu = \mathsf{R}_{\mu_X}$.

Definicja 5. *Niech* $\mathsf{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ *oznacza algebrę wielomianów nieprzemiennych generowanych przez zmienne* $X_1, \ldots, X_n$. *Wolne kumulanty zmiennych losowych* $X_1, \ldots, X_n$ *są to k-liniowe odwzorowania* $R_k : \mathsf{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to \mathsf{C}$ *zdefiniowane rekurencyjnie*

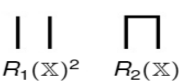
$$\tau(X_1X_2\ldots X_n) = \sum_{\nu\in NC(n)} R_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_n), \tag{12}$$

gdzie

$$R_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \Pi_{B\in\nu} R_{|B|}(X_i : i \in B), \tag{13}$$

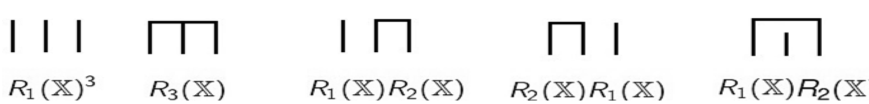
gdzie $|B|$ jest liczbą elementów bloku B. W przypadku ciągów stałych używamy oznaczenia $R_k(X) = R_k(X, \ldots, X)$. Dla przykładu obliczymy pierwsze trzy momenty:

- $\tau(X) = R_1(X)$,
- $\tau(X^2) = R_1(X)^2 + R_2(X)$ – zob. rys. 2,
- $\tau(X^3) = R_1(X)^3 + R_3(X)^3 + 3R_1(X)R_2(X)$ – zob. rys. 3.



Rys. 2. Nieprzecinające się partycje zbioru $\{1, 2\}$ wraz z odpowiadającymi im kumulantami

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Nieprzecinające się partycje zbioru $\{1, 2, 3\}$ wraz z odpowiadającymi im kumulantami

Źródło: opracowanie własne.

Istnieje związek pomiędzy R-transformatą zmiennej X zdefiniowanej w (10) a wolnymi kumulantami miary μ_x, mianowicie mamy

$$\mathsf{R}_{\mu_X}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{i+1}(X) z^i,$$

gdzie $R_i(X)$ jest ciągiem podanym w Definicji 5. W języku kumulant można podać równoważną definicję wolnej niezależności (która jest taka sama jak w przypadku klasycznych kumulant – zob. na przykład [Nica, Speicher 2006]).

Twierdzenie 2. *Zmienne losowe* $X_1, \ldots, X_n$ *są wolnie niezależne, jeżeli dla każdego* $n \geq 2$ *oraz niestałego ciągu* $Y_i \in \{X_1, \ldots, X_n\}$, *gdzie* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *(dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej k dostaniemy* $R_k(Y_1, \ldots, Y_k) = 0$.

Zbieżność względem rozkładu

Aby w pełni móc określić dalsze pojęcia, musimy jeszcze zdefiniować typ zbieżności.

Definicja 6. *Mówimy, że ciąg elementów* $X_i \in (\mathsf{A}, \tau)$ *jest zbieżny względem rozkładu do elementu* $X \in \mathsf{A}$, *jeżeli ciąg momentów* a_i *zbiega do a, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} \tau(X_i^n) = \tau(X^n)$$

dla wszystkich $n \in \mathsf{N}$. Fakt ten będziemy oznaczali $X_i \xrightarrow{d} X$.

4. Rozkład Wignera

Rolę rozkładu Gaussa w wolnej probabilistyce pełni rozkład Wignera, tzn. przy odpowiednim unormowaniu zachodzi wolne Centralne Twierdzenie Graniczne.

Znormalizowanym rozkładem Wignera μ nazywamy rozkład, który można opisać za pomocą transformaty Cauchy'ego-Stieltjesa, postaci

$$G_\mu(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2} = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \ddots}}}, \tag{14}$$

gdzie gałąź pierwiastka kwadratowego powinna być tak wybrana, aby dla $\Im(z) > 0$ było $\Im(G_\mu(z)) < 0$ (zob. [Saitoh, Yoshida 2001]). Równanie (14) opisuje rozkład o średniej zero i wariancji jeden. Gęstość miary μ jest równa

$$\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2\pi} dx, \tag{15}$$

gdzie $-2 \leq x \leq +2$. Przy przyjętej parametryzacji, wielomiany ortogonalne dla miary μ spełniają zależność

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + p_{n-1}(x), n = 2,3,\dots \qquad (16)$$

gdzie $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ lub równoważnie parametry Jacobiego są postaci

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 1, & 1, & 1, & 1, & \dots \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Funkcja generująca momenty odpowiadająca równaniu (14), jest postaci

$$M(z) = \frac{1}{z} G_\mu\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z^2}, \qquad (18)$$

dla $|z|$ wystarczająco małych. R-transformata odpowiadająca $M(z)$ jest równa $\mathsf{R}_\mu(z) = z$.

Artykuł ten chcielibyśmy zakończyć Centralnym Twierdzeniem (zob. na przykład [Nica, Speicher 2006]) w wolnej probabilistyce, które bardzo dobrze pokazuje analogie wolnej probabilistyki z klasyczną.

Twierdzenie 3. *Niech* $X_i \in (\mathsf{A}, \tau)$ *dla* $i \in \{1, \dots, n\}$ *będzie ciągiem zmiennych losowych wolnie niezależnych i o tym samym rozkładzie. Ponadto załóżmy, że* $\tau(X_i) = 0$ *oraz* $\tau(X_i) = 1$ *dla* $i \in \{1, \dots, n\}$*, wówczas*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} s,$$

gdzie s jest znormalizowanym rozkładem Wignera.

Powyższe twierdzenie jest jednym z wielu w wolnej probabilistyce, które w jakimś sensie wywodzi się z klasycznej probabilistki. Zainteresowanym czytelnikom polecam prace [Bożejko, Bryc 2006; Ejsmont 2012, 2013, 2014; Szpojankowski, Wesołowski 2014], gdzie można znaleźć różne regresyjne charakteryzacje wolnych zmiennych losowych, których genezę stanowią twierdzenia z klasycznej statystyki.

Literatura

Accardi L., Bożejko M., 1998, *Interacting Fock spaces and gaussianization of probability measures*, Infinite Dimensional Analysis Quantum Probability and Related Topics, no. 1 (4), s. 663–670.

Avitzour D., 1982, *Free products of C*-algebras*, Transactions of American Mathematical Society, vol. 271, s. 423–465.

Bożejko M., 1975, *Sets with minimal constant in discrete noncommutative groups*, Proceedings American Mathematical Society, vol. 51, s. 407–412.

Bożejko M.,, 1986, *Positive definite functions on the free group and the noncommutative Riesz product*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana A, no. (6) 4, s. 13–21.

Bożejko M., Bryc W., 2006, *On a class of free Lévy laws related to a regression problem*, Journal of Functional Analysis, vol. 236, s. 59–77.

Bożejko M., Leinert M., Speicher R., 1996, *Convolution and limit theorems for conditionally free random variables*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 175 no. 2, s. 357––388.

Chihara T.S., 1978, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and Its Applications, vol. 13, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

Ejsmont W., 2012, *Laha-Lukacs properties of some free processes*, Electronic Communications in Probability, vol. 17, no. 13, s. 1–8.

Ejsmont W., 2013, *Noncommutative characterization of free Meixner processes*, Electronic Communications in Probability, vol. 18 no. 22, s. 1–12.

Ejsmont W., 2014, *Characterizations of some free random variables by properties of conditional moments of third degree*, Journal of Theoretical Probability, vol. 27, no. 3, s. 915–931.

Muraki N., 2001, *Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, vol. 4, no. 1, s. 39–58.

Nica A., Speicher R., 2006, *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 365, Cambridge University Press, Cambridge.

Saitoh N., Yoshida H., 2001, *The infinite divisibility and orthogonal polynomials with a constant recursion formula in free probability theory*, Probability and Mathematical Statistics, vol. 21, no. 1, s. 159–170.

Szpojankowski K., Wesołowski J., 2014, *Dual Lukacs regressions for non-commutative variables*, Journal of Functional Analysis, vol. 266, no. 1, s. 36–54.

Voiculescu D.V., 1985, *Symmetries of some reduced free product *-algebras*, [w:] *Operator Algebras and Their Connections with Topology and Ergodic Theory*, Lecture Notes in Mathematics 1132, Springer, Berlin,, s. 556–588,

BASIC CONCEPTS OF FREE PROBABILITY THEORY

Summary: Free probability theory was created by Dan Voiculescu, motivated by his efforts to understand special classes of von Neumann algebras. In the following we will give, mostly from the probability point of view, a survey on some of the basic ideas and results of free probability theory and show that in free probability theory, the role of Wigner's semicircle distribution is analogous to that of the normal distribution in classical probability theory.

Keywords: free probability theory, Wigner's distribution, Gauss distribution.