DIDACTICS
OF
MATHEMATICS

7(11)

The Publishing House
of the Wrocław University of Economics
Wrocław 2010

Editors
Janusz Łyko
Antoni Smoluk

Referee
Marian Matłoka
(Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu)

Proof reading
Agnieszka Flasińska

Setting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, *Sower*
(private collection)

PL ISSN 1733-7941

Print run: 200 copies

TABLE OF CONTENTS

D I D A C T I C S   O F   M A T H E M A T I C S

No. 7 (11) 2010

ALGEBRAICZNE ASPEKTY PROCESÓW EKONOMICZNYCH

Beata Fałda, Józef Zając

Abstract. Precise studying of economic processes, with the help of advanced mathematical tools, shows that parameters describing these processes possess their natural algebraic structure. It is important to notice that its recognition guarantee correctness of the analysis and conclusions. In this paper the authors construct an algorithm of algebraic procedure, which can be applied in order to classify some basic economic parameters. As a consequence there will be pointed out certain mathematical and probabilistic structures, on the ground of which one may proceed, algebraically correct, calculations of the considered parameters characterizing the economics processes. As an example illustrating the procedure will be presented a direct construction of some algebraic structures and the attached types of nonlinear probabilistic spaces.

Keywords: algebraic structures, expected value, means, variance.

1. Wstęp

Podstawa metodyczna analizy procesów ekonomicznych opiera się głównie na pojęciach i twierdzeniach statystyki matematycznej oraz teorii rachunku prawdopodobieństwa. W następnej kolejności wykorzystuje się pojęcia struktur algebraicznych, wywodzących się z algebry liniowej. W konsekwencji analiza ta opiera się na założeniu liniowości strukturalnej procesów ekonomicznych. Taki sposób postępowania narzuca arytmetyczny charakter parametrów, za pomocą których procesy te są opisywane. Bardziej wnikliwa analiza tych parametrów, a zwłaszcza ich mian, czyli jednostek, w których są one wyrażane, pokazuje, że mają one na ogół struktury niearytmetyczne. Rodzi to problem znalezienia tych struktur oraz ustalenia grup parametrów należących do tego samego typu struktur algebraicznych. Dopiero wtedy możemy mówić o prawidłowo wykonywanym rachunku, przeprowadzanym na interesujących nas parametrach (Smoluk 2000, str. 39; Stachak 2006, str. 200-205).

Beata Fałda, Józef Zając
Department of Mathematics Application in Economics, The John Paul II Catholic University of Lublin, Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin, Poland.
e-mail: bfalda@kul.lublin.pl, jzajac@kul.lublin.pl

Wartość oczekiwana, będąca podstawowym pojęciem rachunku prawdopodobieństwa, jest uogólnieniem średniej arytmetycznej, zatem należy pamiętać, że dotyczy ona takich wartości liczbowych, których miana jednoznacznie wskazują na to, iż wielkości te tworzą grupę przemienną z dodawaniem jako działaniem wewnętrznym, a ponadto, po wprowadzeniu współczynników liczbowych, tworzą strukturę algebraiczną nad ciałem współczynników. W takim przypadku analiza elementów wymienionej grupy, prowadzona za pomocą metod klasycznej statystyki, jest w pełni uzasadniona. Jeżeli natomiast wielkości te tworzą grupę z innym rodzajem „dodawania", to należy ustalić odpowiedni rodzaj wartości średniej w grupie, a także sposób „mnożenia" rozważanych wartości przez liczby.

2. Strukturalne wartości oczekiwane

Założmy, że X jest zmienną losową o wartościach rzeczywistych, określoną na przestrzeni prawdopodobieństwa $\{\Omega, \mathcal{A}, p\}$. Wtedy wyrażenie

$$E_{\mathrm{A}}X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \text{dla dyskretnej zmiennej losowej } X, \\ \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx, \text{dla ciągłej zmiennej losowej } X. \end{cases} \tag{2.1}$$

jest klasyczną wartością oczekiwaną zmiennej losowej X, oznaczaną symbolem EX.

Algebraiczna i fizyczna interpretacja tak określonej wartości oczekiwanej $E_A X$ wskazuje, iż należy ją utożsamiać ze średnią arytmetyczną ważoną wartości $\{x_i\}$ z wagami, odpowiednio $\{p_i\}$ w przypadku dyskretnym i $f(x)$ w przypadku rozkładu ciągłego zmiennej losowej X.

Z algebraicznego punktu widzenia $E_A X$ jest średnią ważoną nad ciałem $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ i jest jego elementem. Takie podejście prowadzi do uogólnienia pojęcia średniej arytmetycznej.

W przypadku gdy zmienna losowa X przybiera wartości mianowane, formuła (2.1), definiująca średnią arytmetyczną ważoną, w sensie dyskretnym lub ciągłym, traci na ogół znaczenie, stając się swego rodzaju zapisem formalnym. Jako przykład można tu podać zmienną losową X, której wielkości możemy określić mianem „prędkość" lub „indeks". Zastosowanie w takiej sytuacji formuły (2.1) ma charakter mnemotechniczny, w którym nie jest brana pod uwagę struktura algebraiczna wartości takich zmiennych losowych.

Z rozważań opartych na fizycznych lub ekonomicznych interpretacjach parametrów opisujących procesy i zjawiska wynika, że wartość oczekiwana przebiegających w czasie, mianowanych liczb rzeczywistych wyrażona jest wzorem (Ostasiewicz i in. 2006, str. 62-64)

$$E_{\mathrm{H}}X = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{p_i}{x_i}}, & \text{dla dyskretnej zmiennej losowej } X, \\ \dfrac{1}{\int_{\mathbb{R}} \dfrac{f(x)}{x} dx}, & \text{dla ciągłej zmiennej losowej } X. \end{cases} \tag{2.2}$$

W przypadku gdy zmienna losowa X jest wyrażona za pomocą wartości różnego typu indeksów, do obliczenia właściwej wartości oczekiwanej stosuje się ważoną średnią geometryczną (Ostasiewicz i in. 2006, str. 64-65):

$$E_{\mathrm{G}}X = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i}, & \text{dla dyskretnej zmiennej losowej } X, \\ e^{\int_{\mathbb{R}} \ln x f(x) dx}, & \text{dla ciągłej zmiennej losowej } X. \end{cases} \tag{2.3}$$

Niech α będzie liczbą rzeczywistą, taką, że $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dla zadanej zmiennej losowej $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, z dodatnim x_i i prawdopodobieństwem $P[X = x_i] = p_i,\ i = 1, 2, ..., n,$ zdefiniujemy $E_\alpha X$ jako (Mitrinović 1972, str. 19-29)

$$E_\alpha X = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{dla } \alpha \neq 0, |\alpha| < +\infty, \\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}, & \text{dla } \alpha \neq 0, \\ \min(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{dla } \alpha = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{dla } \alpha = +\infty; \end{cases} \tag{2.4}$$

Można zauważyć, że

$$E_{-1}X = E_{\mathrm{H}}X, \quad E_1 X = E_{\mathrm{A}}X = EX \quad \text{i} \quad E_0 X = \lim_{\alpha \to \infty} E_\alpha X = E_{\mathrm{G}}X,$$

a ponadto łatwo udowodnić, iż

$$E_\alpha X < E_\beta X \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

W podobny sposób definiuje się $E_\alpha X$ w przypadku ciągłej zmiennej losowej. Otrzymujemy wtedy tożsamości

$$E_{\mathrm{G}} X = e^{E_{\mathrm{A}} X \ln X},$$

$$\left[E_{\mathrm{H}} X\right]^{-1} = E_{\mathrm{A}}\left[X^{-1}\right].$$

Dokonując analizy wspomnianych średnich, łatwo zauważyć, że używając klasycznych metod statystycznych opartych na średniej arytmetycznej, wykonujemy obliczenia, które w wielu przypadkach są dokonywane w sposób nie mający żadnego uzasadnienia. W konsekwencji prowadzi to do niczym nieuzasadnionych wyników.

Aby otrzymać ilustrację funkcjonowania przedstawionych średnich rozważmy zmienną losową $X = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$, dla której

$$E_{\mathrm{H}} X = 11{,}11, \quad E_{\mathrm{G}} X = 19{,}48, \quad E_{\mathrm{A}} X = 25{,}5.$$

Rozszerzając zakres średnich ze względu na parametr α (zob. (2.4)), otrzymujemy

$$E_{-2} X = 6{,}79, \quad E_{-1} X = E_{\mathrm{H}} X = 11{,}11, \quad E_0 X = E_{\mathrm{G}} X = 19{,}48,$$
$$E_1 X = E_A X = 25{,}5, \quad E_2 X = 29{,}30.$$

3. Strukturalne podejście do wartości oczekiwanej

Rozważmy n-wymiarową przestrzeń liniową $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ nad ciałem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Niech

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^n$$

będzie wektorem i niech

$$p = \{p_i\} \in \mathbb{R}^n$$

będzie ciągiem liczb nieujemnych, takich że $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Z danym wektorem X oraz ciągiem $\{p_i\}$ rozkładu jedynki możemy połączyć wyrażenie $E(X, p) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, które jest identyczne z klasyczną wartością oczekiwaną zmiennej losowej X.

Załóżmy teraz, że $\mathbf{h}:\mathbb{V}\leftrightarrow\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ jest bijekcją przestrzeni wektorowej $(\mathbb{V},+,\cdot)$ na $(\mathbb{V}_{\mathbf{h}},+_{\mathbf{h}},\cdot_{\mathbf{h}})$, rozważanej jako *n*-wymiarowa przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych. Wówczas dla dowolnego

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

mamy

$$Y=(y_1,y_2,...,y_n)=\mathbf{h}(X):=(\mathbf{h}(x_1),\mathbf{h}(x_2),...,\mathbf{h}(x_n)),$$

co daje

$$Y+_{\mathbf{h}}Z:=\mathbf{h}\left(\mathbf{h}^{-1}(Y)+\mathbf{h}^{-1}(Z)\right)\in\zeta_{\mathbf{h}}, \tag{3.1}$$

i

$$\lambda\cdot_{\mathbf{h}}Y:=\mathbf{h}\left(\lambda\cdot\mathbf{h}^{-1}(Y)\right)\in\zeta_{\mathbf{h}}, \tag{3.2}$$

dla $X,Z\in\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ i $\lambda\in\mathbb{R}$, gdzie $X=\mathbf{h}^{-1}(Y)=\left(\mathbf{h}^{-1}(y_1),\mathbf{h}^{-1}(y_2),...,\mathbf{h}^{-1}(y_n)\right)$.

Jeśli ponadto ρ jest metryką na $\mathbb{V}$, to $\rho(0,X)=\|X\|$ jest normą na ζ i metryka $\rho_{\mathbf{h}}$, otrzymana przez bijekcję **h**, jest dana formułą:

$$\rho_{\mathbf{h}}(Y,Z):=\rho\left(\mathbf{h}^{-1}(Y),\mathbf{h}^{-1}(Z)\right) \tag{3.3}$$

dla dowolnego $Y,Z\in\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$. Widzimy zatem, że $(\mathbb{V}_{\mathbf{h}},\rho_{\mathbf{h}})$ jest liniową przestrzenią metryczną.

Bijekcja $\mathbf{h}:\mathbb{V}\leftrightarrow\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ pozwala na zdefiniowanie

$$E_{\mathrm{h}}(Y,p):=\sum_{i=1}^{n}{}^{\mathrm{h}}p_i\cdot_{\mathrm{h}}y_i=\sum_{i=1}^{n}{}^{\mathrm{h}}\mathrm{h}\left(p_i\cdot h^{-1}(y_i)\right)=$$

$$=\mathrm{h}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{h}^{-1}\mathrm{h}\left(p_i\cdot\mathrm{h}^{-1}(y_i)\right)\right)=\mathrm{h}\left(\sum_{i=1}^{n}p_ih^{-1}(y_i)\right)=\mathrm{h}\left(E\left(\mathbf{h}^{-1}(Y),\mathrm{p}\right)\right), \tag{3.4}$$

gdzie

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{h}y_i=y_1+_h y_2+_h\ldots+_h y_n=\mathrm{h}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{h}^{-1}(y_i)\right). \tag{3.5}$$

4. Przykłady i zastosowania

W klasycznej statystyce wartość oczekiwana zmiennej losowej $(X-EX)^2$ jest nazywana wariancją. Odchylenie standardowe, będące pierwiastkiem kwadratowym wariancji, spełnia własności miary i jest powszechnie stosowane do określenia stopnia odchylenia wartościami zmiennej losowej X od jej wartości oczekiwanej EX.

W celu przedstawienia tego pojęcia w ujęciu bardziej ogólnym zauważmy, że pojęciem równoważnym dla odchylenia standardowego może być funkcja $\rho_{\mathbf{h}}(Y, E_{\mathrm{h}}Y)$, gdzie $\rho_{\mathbf{h}}$ jest metryką na przestrzeni $\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ generowanej przez bijekcję **h**, odwzorowującą przestrzeń ς wyposażoną w metrykę ρ na $\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ z metryką indukowaną $\rho_{\mathbf{h}}$.

Wówczas wyrażenie

$$\sigma_{\mathrm{h}}^2(Y,p) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{\mathbf{h}}\left(y_i, E_{\mathrm{h}}(Y,p)\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{h}^{-1}(y_i)^2 p_i - \left[h^{-1}\left(E_{\mathrm{h}}(Y,p)\right)\right]^2 \quad (4.1)$$

nazywać będziemy h-wariancją zmiennej losowej Y, której wartości należą do przestrzeni $\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ w związku z metryką $\rho_{\mathbf{h}}$. Ponadto

$$\sigma_{\mathrm{h}}(Y,p) = \sqrt{\sigma_{\mathrm{h}}^2(Y,p)}$$

będziemy nazywać h-odchyleniem standardowym.

Przykład 1.

Niech $\mathbb{V} := \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ oraz $\mathbb{V}_{\mathbf{h}} := \mathbb{R}_{+}^{\mathrm{n}}$. Załóżmy, że a jest daną liczbą dodatnią, $a \neq 1$. Rozważmy bijekcję h zdefiniowaną formułą $y = \mathrm{h}(x) := a^x$, która tworzy odwzorowanie $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}_{+}$ i $x = \mathrm{h}^{-1}(y) = \log_a y$. Wówczas

$$y_1 +_{\mathrm{h}} y_2 = \mathrm{h}(\log_{\mathrm{a}} \mathrm{y}_1 + \log_{\mathrm{a}} \mathrm{y}_2) = \mathrm{h}(\log_{\mathrm{a}} \mathrm{y}_1\mathrm{y}_2) = \mathrm{y}_1 \cdot \mathrm{y}_2 \quad (4.2)$$

$$\lambda \cdot_{\mathrm{h}} y = \mathrm{h}(\lambda \log_{\mathrm{a}} \mathrm{y}) = \mathrm{h}\left(\log_{\mathrm{a}} \mathrm{y}^{\lambda}\right) = \mathrm{y}^{\lambda} \quad (4.3)$$

zachodzi dla dowolnych $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{+}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Oczywiście bijekcja $\mathbf{h} := \underbrace{(\mathrm{h}, \mathrm{h}, \ldots, \mathrm{h})}_{n}$ odwzorowuje $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}_{+}^n$.

Jeżeli $\rho(a,b) := |a-b|$ na $\mathbb{R}^2$, to

$$\rho_{\mathrm{h}}(y_1, y_2) = |\log_a y_1 - \log_a y_2| = \left|\log_{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{y}_1}{\mathrm{y}_2}\right|. \quad (4.4)$$

Z powyższego wynika, że jeżeli $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$, gdzie y_i > 0 dla $i=1,2,...,n,$ a ponadto $p=(p_1,p_2,...,p_n)$ jest nieujemnym rozkładem jedynki, to

$$E_{\mathrm{h}}(Y,p)=\mathrm{h}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\log_a y_i\right)=\prod_{i=1}^{n}a^{p_i\log_a y_i}=\prod_{i=1}^{n}y_i^{p_i}=h(E(h^{-1}(Y),p)),\quad(4.5)$$

gdzie

$$\mathbf{h}^{-1}(Y)=\left(\log_a y_1,\log_a y_2,\ldots,\log_a y_n\right).$$

Uwaga 4.1. Warto zauważyć, że transformacja, która przekształca klasyczną (arytmetyczną) wartość oczekiwaną w wartość oczekiwaną typu geometrycznego, nie zależy od wyboru podstawy a logarytmu.

Ponadto

$$\sigma_h^2(Y,p)=\sum_{i=1}^{n}\rho_h\left(y_i,\prod_{j=1}^{n}y_j^{p_j}\right)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}\left|\log_a\frac{\prod_{j=1}^{n}y_j^{p_j}}{y_i}\right|^2p_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}p_j\log_a y_j-\log_a y_j\right|^2p_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\log_a y_j\right)^2-2\sum_{j=1}^{n}p_i\log_a y_j\cdot\log_a y_i+\left(\log_a y_i\right)^2\right]p_i=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\log_a y_i\right)^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\log_a y_i\right)^2+\quad(4.6)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\log_a y_i\right)^2p_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\log_a y_i\right)^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\log_a y_i\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}h^{-1}\left(y_i\right)^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}h^{-1}\left(y_i\right)p_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\log_a y_i\right)^2p_i-\left(\log_a\prod_{i=1}^{n}y_i^{p_i}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\log_a y_i\right)p_i-\left[\log_a E_h\left(Y,p\right)\right]^2.$$

□

Uwaga 4.2. Wariancja zależy od wyboru a.

Przykład 2.

Niech $\mathbb{V} := \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

oraz

$$\mathbb{V} \ni x \to y = \mathrm{h}(x) := x|x|^{\alpha-1} = \begin{cases} x^{\alpha}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0, \\ -(-x)^{\alpha}, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wówczas $\mathrm{h} : \mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{V}_{\mathrm{h}} = \mathbb{R}$, zaś $h^{-1}(y) = y\,|\,y\,|^{\frac{1}{\alpha}-1}$.

Ponadto

$$y_1 +_{\mathrm{h}} y_2 = \mathrm{h}\left(\mathrm{h}^{-1}(y_1) + \mathrm{h}^{-1}(y_2)\right) = \mathrm{h}\left(y_1|y_1|^{\frac{1}{\alpha}-1} + y_2|y_2|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right) =$$

$$= \left(y_1|y_1|^{\frac{1}{\alpha}-1} + y_2|y_2|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right) \cdot \left| y_1|y_1|^{\frac{1}{\alpha}-1} + y_2|y_2|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right|^{\alpha-1},$$

a także

$$\lambda \cdot_{\mathrm{h}} y = \mathrm{h}\left(\lambda \cdot \mathrm{h}^{-1}(y)\right) = \mathrm{h}\left(\lambda \cdot y|y|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right) = \lambda \cdot y|y|^{\frac{1}{\alpha}-1} \left| \lambda \cdot y|y|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right|^{\alpha-1} = \lambda|\lambda|^{\alpha-1} y.$$

Przyjmując $\alpha = -1$, otrzymujemy przeniesienia struktury arytmetycznej na strukturę hiperboliczną.

W tym przypadku, podstawiając $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ oraz oznaczając przez $p = \{p_1\}$ rozkład jedynki, widzimy, że

$$E_{\mathrm{h}}(Y, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot_{\mathrm{h}} y_i = \sum_{i=1}^{n}{}^{\mathrm{h}} p_i|p_i|^{\alpha-1} y_i = \mathrm{h}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{h}^{-1}\left(p_i|p_i|^{\alpha-1} y_i \right) \right] =$$

$$= \mathrm{h}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i y_i |y_i|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right] = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i |y_i|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right) \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} p_i y_i |y_i|^{\frac{1}{\alpha}-1} \right|^{\alpha-1}.$$

□

W przypadku gdy $\alpha = 1$ otrzymujemy wariancję arytmetyczną, tzn.

$$\sigma^2(Y, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \right)^2,$$

w przypadku $\alpha = 2$ wariancja kwadratowa wynosi

$$\sigma^2(Y,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i^4 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i^2\right)^2,$$

a w przypadku $\alpha = -1$ wariancja harmoniczna wynosi

$$\sigma^2(Y,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i^{-2} - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i^{-1}\right)^2.$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $(\mathbb{V},\rho)$ posiada metrykę ρ przestrzeni euklidesowej, wtedy

$$\sigma^2(X,p) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X,p))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, E(X,p))^2 p_i,$$

a ponadto

$$\sigma_{\mathrm{h}}^2(Y,p) := \sum_{i=1}^{n} \rho_{\mathrm{h}}(y_i, E_{\mathrm{h}}(Y,p))^2 p_i.$$

Wynika stąd, że

$$\sigma_{\mathrm{h}}(Y,p) = \sqrt{\sigma_{\mathrm{h}}^2(Y,p)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_{\mathrm{h}}(y_i, E_{\mathrm{h}}(Y,p))^2 p_i\right)^{\frac{1}{2}} = E_{\mathrm{g}}\left(\rho_{\mathrm{h}}(Y, E_{\mathrm{h}}(Y,p))\, p\right)$$

dla $\mathrm{g}(t) = t^{\frac{1}{2}}$.

Uogólniając, widzimy, że jeśli

$$\mathrm{h}:(\mathbb{V},\rho) \leftrightarrow (\mathbb{V}_{\mathrm{h}}, \rho_{\mathrm{h}}) \quad \text{oraz} \quad \mathrm{g}: \mathbb{R}_+^0 \leftrightarrow \mathbb{R}_+^0 = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$$

są bijekcjami, wtedy dla $\rho(x,y) = \| x - y \|$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{h/g}}(Y,p) &:= E_{\mathrm{g}}\left(\rho_{\mathrm{h}}(Y, E_{\mathrm{h}}(Y,p)), p\right) = \\
&= \mathrm{g}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{g}^{-1}\left(\rho\left(\mathrm{h}^{-1}(y_i), \sum_{k=1}^{n} p_k h^{-1}(y_k)\right)\right)\right) = \\
&= \mathrm{g}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{g}^{-1}\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\mathrm{h}^{-1}(y_i) - \mathrm{h}^{-1}(y_k)\right) \right\|\right)\right) \\
&\leq \mathrm{g}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{g}^{-1} \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{h}^{-1}(y_i) - \mathrm{h}^{-1}(y_k)\right).
\end{aligned}$$

W przypadku, gdy $\mathrm{g}(t)=t^{\frac{1}{\alpha}},\ \alpha\geq 1$ wówczas

$$\sigma_{\mathrm{h/g}}(Y,p)\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_i p_k \left|\mathrm{h}^{-1}(y_i)-\mathrm{h}^{-1}(y_k)\right|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

co dla $\alpha=1$ daje

$$\sigma_{\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{g}}}(Y,p)=\mathrm{g}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i \mathrm{g}^{-1}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}p_k\left(\mathrm{h}^{-1}(y_i)-\mathrm{h}^{-1}(y_k)\right)\right|\right)\right)$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_i p_k\left|\mathrm{h}^{-1}(y_i)-\mathrm{h}^{-1}(y_k)\right|.$$

Ostatnie wyrażenie sugeruje, aby wprowadzić do rozważań funkcję

$$r_{\mathrm{h}}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\left|h^{-1}(x_i)-h^{-1}(y_j)\right|$$

i nazwać ją miarą rozproszenia, która szacuje od góry odchylenie standardowe.

5. Podsumowanie

Przedstawiona teoria pokazuje, w jaki sposób możemy skonstruować żądany typ statystyki, który wyznaczany jest w sposób jednoznaczny po ustaleniu struktury algebraicznej badanych parametrów. Trudności techniczne może sprawić jedynie znalezienie odpowiedniej bijekcji.

Literatura

Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U. (2006). *Statystyka. Elementy teorii i zadania*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej. Wrocław.

Mitrinović D.S. (1972). *Elementarne nierówności*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa 1972.

Smoluk A. (red.) (2000). *Elementy metrologii ekonomicznej*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej. Wrocław 2000.

Stachak S. (2006). *Podstawy metodologii nauk ekonomicznych*. Książka i Wiedza. Warszawa.