

DIDACTICS OF MATHEMATICS

7(11)



The Publishing House
of the Wrocław University of Economics
Wrocław 2010

Editors
Janusz Łyko
Antoni Smoluk

Referee
Marian Matłoka
(Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu)

Proof reading
Agnieszka Flasińska

Setting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, *Sower*
(private collection)

© Copyright by the Wrocław University of Economics
Wrocław 2010

PL ISSN 1733-7941

Print run: 200 copies

TABLE OF CONTENTS

MAREK BIERNACKI <i>Applications of the integral in economics. A few simple examples for first-year students [Zastosowania całki w ekonomii].....</i>	5
PIOTR CHRZAN, EWA DZIWOK <i>Matematyka jako fundament nowoczesnych finansów. Analiza problemu na podstawie doświadczeń związanych z uruchomieniem specjalności Master Program Quantitative Asset and Risk Management (ARIMA) [Mathematics as a foundation of modern finance]</i>	15
BEATA FAŁDA, JÓZEF ZAJĄC <i>Algebraiczne aspekty procesów ekonomicznych [Algebraical aspects of economics processes].....</i>	23
HELENA GASPARS-WIELOCH <i>How to teach quantitative subjects at universities of economics in a comprehensible and pleasant way? [Jak uczyć ilościowych przedmiotów na uczelniach ekonomicznych w zrozumiały i przyjemny sposób?]</i>	33
DONATA KOPAŃSKA-BRÓDKA <i>Wspomaganie dydaktyki matematyki narzędziami informatyki [Information technology supporting mathematical education].....</i>	49
PATRYCJA KOWALCZYK, WANDA RONKA-CHMIELOWIEC <i>Metody matematyczne w dydaktyce ubezpieczeń na studiach ekonomicznych [Mathematical methods in the didactics of insurance on economic studies].....</i>	59
LUDOMIR LAUDAŃSKI <i>The art of conjecturing (Ars Conjectandi). On the historical origin of normal distribution [Rodowód rozkładu normalnego].....</i>	67
JANUSZ ŁYKO, ANDRZEJ MISZTAŁ <i>Wpływ zmiany liczby godzin zajęć na wyniki egzaminu z matematyki na kierunkach ekonomicznych [The impact of changes in the number of hours of classes on exam results in mathematics at the economic faculties].....</i>	81
KRZYSZTOF MAŁAGA <i>Matematyka na usługach mikroekonomii [Mathematics on microeconomics services]</i>	93
WOJCIECH RYBICKI <i>Kilka powodów, dla których opowiadamy studentom ekonomii o macierzach [Some reasons for which we tell students of economics about matrices]</i>	109
ANDRZEJ WILKOWSKI <i>On changing money and the birthday paradox [O rozmiennianiu pieniędzy i paradoksie urodzin]</i>	127
HENRYK ZAWADZKI <i>Mathematica® na usługach ekonomii [Mathematica® at economics service]</i>	135

**METODY MATEMATYCZNE
W DYDAKTYCE UBEZPIECZEŃ
NA STUDIACH EKONOMICZNYCH**

Patrycja Kowalczyk, Wanda Ronka-Chmielowiec

Abstract: In universities economics the issues associated with functioning of insurance institutions are a part of the curricula in courses of finance and accounting. The authors present curricula of lectures which contain applying mathematics in insurance. The authors discuss issues in the curriculum of financial mathematics and insurance for the courses of the computer science and econometrics and computer science in the business. The authors also present models of the capitalization of money and other models which can be used in life insurance and superannuation plan.

Keywords: actuarial methods, financial and insurance mathematics, insurance, risk management.

1. Wstęp

W artykule przedstawiona zostanie problematyka dotycząca kształcenia studentów studiów ekonomicznych w zakresie zastosowań metod matematycznych w obszarze ubezpieczeń. Specjalistów w zakresie funkcjonowania instytucji ubezpieczenia kształci się przede wszystkim na kierunku finanse i rachunkowość. W artykule najpierw zaprezentowana zostanie problematyka ubezpieczeniowa zawarta w programach przedmiotów standardowych dla kierunków studiów ekonomicznych. Następnie na tym tle skoncentrowano się na programach trzech przedmiotów, zawierających treści o charakterze matematycznym, które są albo kierunkowe, albo specjalnościowe, a które są w ofercie Wydziału Zarządzania, Informatyki i Finansów Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. Przedmiotami tymi są: metody aktuarialne, zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń, matematyka finansowa i ubezpieczeniowa. Artykuł kończą pewne rozważania dyskusyjne związane z realizacją tych programów.

Patrycja Kowalczyk, Wanda Ronka-Chmielowiec

Department of Insurance, Wrocław University of Economics, Komandorska Street 118/120,
53-345 Wrocław, Poland.

e-mail: patrycja.kowalczyk@ue.wroc.pl, wanda.ronka-chmielowiec@ue.wroc.pl

2. Problematyka ubezpieczeniowa w treści programowej przedmiotów z listy ministerialnych standardów dla kierunków studiów ekonomicznych

Kierunek studiów: *ekonomia*

Stopień studiów	Przedmiot kierunkowy	W tym problematyka ubezpieczeniowa
I	1. Polityka społeczna	ubezpieczenia społeczne
I	2. Finanse publiczne i rynki finansowe	fundusze inwestycyjne i emerytalne
II	1. Rynek kapitałowy i finansowy	system ubezpieczeniowy

Kierunek studiów: *informatyka i ekonometria*

Stopień studiów	Przedmiot podstawowy lub kierunkowy	W tym problematyka ubezpieczeniowa
I	1. Finanse	ubezpieczenia majątkowe i osobowe, ubezpieczenia na życie, system emerytalny
I	2. Matematyka finansowa i ubezpieczeniowa	rachunek rent, tworzenie funduszu emerytalnego, określanie składki jednorazowej netto i składki bieżącej w ubezpieczeniach na życie
II	1. Metody aktuarialne	modele ryzyka ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach majątkowych i osobowych, rozkłady prawdopodobieństwa stosowane do opisu liczby szkód i wartości odszkodowań, ryzyko w ubezpieczeniach na życie i konstrukcja tablic trwania życia, kalkulacja składki ubezpieczeniowej netto, rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe – metody tworzenia, proces ryzyka w działalności ubezpieczeniowej – teoria ruiny, reasekuracja i ustalanie udziału własnego

Kierunek studiów: *stosunki międzynarodowe*

Stopień studiów	Przedmiot kierunkowy	W tym problematyka ubezpieczeniowa
II	1. Międzynarodowa polityka społeczna	ubezpieczenia emerytalne i zdrowotne w krajach UE

Kierunek studiów: *zarządzanie*

W standardach ministerialnych kierunku zarządzanie nie występuje żaden przedmiot, który zawierałby w treści programowej problematykę ubezpieczeniową.

Jak widać z powyższego zestawienia, problematyka związana z działalnością i funkcjonowaniem instytucji ubezpieczeń gospodarczych oraz dotycząca funkcjonowania systemów emerytalnych, ubezpieczeń społecznych oraz ubezpieczeń na życie została bardzo słabo uwzględniona w konstrukcji standardów programowych.

Obecnie szerzej omówimy standardy programowe na kierunku finanse i rachunkowość ze względu na kształcenie w zakresie ubezpieczeń.

Kierunek studiów: *finanse i rachunkowość*

Stopień studiów	Przedmiot podstawowy lub kierunkowy	W tym problematyka ubezpieczeniowa
I	1. Finanse	finanse ubezpieczeń społecznych i gospodarczych – zasady działalności ubezpieczeniowej, klasyfikacja ubezpieczeń, gospodarka finansowa zakładów ubezpieczeń
I	2. Matematyka finansowa	rachunek rent, składki jednorazowe i składki bieżące w ubezpieczeniach na życie
I	3. Finanse publiczne	ubezpieczenia społeczne
I	4. Ubezpieczenia	definicje i cechy ubezpieczeń; ubezpieczenia gospodarcze i społeczne; funkcje i znaczenie ubezpieczeń w gospodarce; otoczenie instytucjonalne ubezpieczeń – podstawy prawne, koncesje, nadzór; zasady funkcjonowania ubezpieczeń gospodarczych – elementy stosunku ubezpieczenia, umowa ubezpieczenia, gospodarka finansowa, działalność marketingowa, zarządzanie ryzykiem; formy ubezpieczeń, produkty ubezpieczeniowe; ubezpieczenia na życie; otwarte fundusze emerytalne; rozwój polskiego rynku ubezpieczeń na tle rynku międzynarodowego
II	Prawo finansowe	prawne podstawy działalności ubezpieczeniowej – nadzoru ubezpieczeniowego, funduszu gwarancyjnego, rzecznika ubezpieczonych, zakładów ubezpieczeń, towarzystw ubezpieczeń wzajemnych, pośredników ubezpieczeniowych, agentów ubezpieczeniowych i brokerów; rodzaje i klasyfikacje ubezpieczeń – ubezpieczenia majątkowe i osobowe, ubezpieczenia dobrowolne i obowiązkowe; umowa ubezpieczenia – strony umowy, ogólne warunki umów, regulaminy, wzory umów, zdarzenia losowe, ryzyka ubezpieczeniowe, prawa i obowiązki stron umowy ubezpieczenia, zawarcie umowy, zmiana i odstąpienie od umowy ubezpieczenia

Jak widać z powyższych programów, metod matematycznych stosowanych w działalności ubezpieczeniowej nie uwzględniono w ogóle, lub uwzględniono je w małym zakresie.

Wobec takiej sytuacji Katedra Ubezpieczeń Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu zaproponowała takie przedmioty jak: „metody aktuarialne”, „zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń” oraz „matematyka finansowa i ubezpieczeniowa”. Na kierunku informatyka i ekonometria „metody aktuarialne” oraz „matematyka finansowa i ubezpieczeniowa” należą do minimum programowego. Analogicznie przedmiot „matematyka finansowa i ubezpieczeniowa” na unikatowym kierunku informatyka w biznesie również stanowi minimum programowe w wymiarze 30 godzin na studiach stacjonarnych. Natomiast na kierunku finanse i rachunkowość do minimum programowego należy przedmiot „matematyka finansowa” oraz jako przedmioty kierunkowe i specjalnościowe występują „metody aktuarialne” i „zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń”.

3. Metody aktuarialne – treści programowe wykładu i ćwiczeń

W ramach tego przedmiotu, który ma formę wykładu i ćwiczeń, studenci poznają następujące zagadnienia:

Probabilistyczne modele ryzyka ubezpieczeniowego, w tym przybliżona jest problematyka ryzyka jako przedmiotu ubezpieczenia i jego rola w działalności ubezpieczeniowej. Tutaj oddzielnie charakteryzowane jest ryzyko ubezpieczeniowe w ubezpieczeniach typu *non-life* i typu *life*. Omawiane są modele dyskretne liczby szkód oraz modele wartości odszkodowań, z uwzględnieniem ryzyka katastrofalnego. Ponadto w tej części prezentowane są modele czasu trwania życia, które mają zastosowanie w ubezpieczeniach na życie i ubezpieczeniach emerytalnych.

Modelowanie ryzyka ubezpieczeniowego w portfelach. W tej części wykładu charakteryzuje się portfele ubezpieczeniowe i ich rolę w obliczeniach aktuarialnych do celów praktyki ubezpieczeniowej. Szczegółowo wyróżnia się tutaj model indywidualnego ryzyka, który ma przede wszystkim zastosowanie w ubezpieczeniach osobowych, i model kolektywnego ryzyka mający zastosowanie w ubezpieczeniach majątkowych.

Proces ryzyka w działalności ubezpieczeniowej i elementy teorii ruiny. Przedstawiony jest tutaj proces opisujący nadwyżkę finansową w zakładzie ubezpieczeń i szacowanie prawdopodobieństwa ruiny oraz zastosowanie tego podejścia w pomiarze ryzyka zakładu ubezpieczeń ze szczególnym uwzględnieniem działalności techniczno-ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej.

Metody kalkulacji składki w ubezpieczeniach typu *non-life*. W ramach tej części wykładu wyróżnia się i definiuje składkę ubezpieczeniową netto i brutto. Przedstawia się podstawowe zasady ustalania wysokości składki stosowane w praktyce. Ostatecznie podaje się trzy podstawowe podejścia stosowane do kalkulacji składki ubezpieczeniowej netto: metody oparte na parametrach statystycznych, metody wykorzystujące funkcję użyteczności oraz metodę wykorzystującą teorię wiarygodności.

Metody kalkulacji składki w ubezpieczeniach typu *life*. Najpierw identyfikuje się czynniki wpływające na budowę składki w ubezpieczeniach na życie oraz podaje się zasady konstrukcji tablic trwania życia. Następnie prezentowane są metody kalkulacji jednorazowej składki netto w różnych podstawowych typach ubezpieczeń na życie, a ostatecznie podawane są wzory obliczania okresowej składki netto.

Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe i metody ich tworzenia. Ta część wykładu zawiera takie zagadnienia, jak: rodzaje rezerw techniczno-ubezpieczeniowych i ich znaczenie w działalności zakładu ubezpieczeń, metody tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych ze szczególnym wyróżnieniem rezerwy składki i rezerwy szkód, wyznaczanie rezerwy matematycznej w zakładach ubezpieczeń na życie (metoda prospektywna i metoda retrospektywna).

Reasekuracja – istota i jej znaczenie w funkcjonowaniu zakładu ubezpieczeń. Omawia się tutaj ideę i zasady funkcjonowania reasekuracji z podziałem na bierną i czynną. Charakteryzowane są tutaj poszczególne rodzaje umów reasekuracyjnych z uwzględnieniem podziału według różnych kryteriów. Wyróżnia się tutaj reasekurację klasyczną i reasekurację finansową. Przedstawiony jest również problem wyznaczania udziału własnego w poszczególnych rodzajach reasekuracji.

4. Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń – program wykładu i ćwiczeń

W ramach tego przedmiotu, który ma formę wykładu i ćwiczeń, studenci poznają następujące zagadnienia:

Rodzaje i czynniki ryzyka w zakładzie ubezpieczeń, ze szczególnym uwzględnieniem omówienia problematyki ryzyka w działalności ubezpieczeniowej, dokonaniem przeglądu literaturowego podziału różnych kategorii ryzyka występującego w zakładzie ubezpieczeń oraz towarzyszących im czynników.

Proces zarządzania ryzykiem i pomiar ryzyka zakładu ubezpieczeń, w tym scharakteryzowane są obszary zarządzania ryzykiem zakładu ubezpieczeń oraz omówiona jest reasekuracja bierna jako metoda zarządzania ryzykiem w zakładzie ubezpieczeń. W tej części wykładu zaprezentowane są miary ryzyka zakładu ubezpieczeń, które mogą mieć zastosowanie w praktyce. Miary te wykorzystywane są do oceny i monitorowania wypłacalności. Stosowane są dwa podejścia. Pierwsze podejście pochodzi ze Stanów Zjednoczonych i oparte jest na koncepcji kapitału obciążonego ryzykiem. Szacuje się tutaj całkowite hipotetyczne i faktyczne zapotrzebowanie na kapitał na podstawie oceny przyjętego ryzyka. Drugie podejście oparte jest na pojęciu kwantyla i wykorzystywane jest do szacowania maksymalnej straty przy przyjętym poziomie ufności. Do grupy tej należą takie miary, jak:

- *VaR (Value at Risk)*,
- *TVaR (Tail VaR)*,
- *ES (Expected Shortfall)*,
- spektralna miara ryzyka wykorzystująca funkcję awersji do ryzyka.

Regulacje ustawowe dotyczące zarządzania ryzykiem w zakładzie ubezpieczeń, w tym aktualne i przyszłe ze szczególnym uwzględnieniem Solvency II.

Zarządzanie ryzykiem ubezpieczeniowym w zakładzie ubezpieczeń, w tym omówione są takie problemy, jak: identyfikacja i klasyfikacja ryzyka ubezpieczeniowego, pomiar i modelowanie ryzyka ubezpieczeniowego, kalkulacja składki ubezpieczeniowej jako podstawa finansowania ryzyka ubezpieczeniowego, reasekuracja jako narzędzie transferu ryzyka ubezpieczeniowego oraz zastosowanie teorii ruiny do pomiaru ryzyka działalności ubezpieczeniowej.

Zarządzanie ryzykiem kredytowym, rynkowym i operacyjnym zakładu ubezpieczeń. Tutaj szczegółowo zostaną scharakteryzowane te trzy ryzyka zakładu ubezpieczeń oraz omówiona jest problematyka ich pomiaru, szczególnie dla ryzyka kredytowego i rynkowego. Ponadto w tej części wykładu szczególną uwagę zwraca się na ryzyko niewypłacalności i utraty płynności. Na zakończenie przedstawiana jest analiza wskaźnikowa oparta na sprawozdaniach finansowych, która ma ogromne zastosowanie w praktyce ubezpieczeniowej.

5. Matematyka finansowa i ubezpieczeniowa – program wykładu

W ramach tego przedmiotu, który obecnie ma formę tylko wykładu, studenci zapoznają się z poniższymi zagadnieniami.

Wartość obecna i przyszła kapitału. Tutaj omawia się wyznaczanie obecnej i przyszłej wartości kapitału z uwzględnieniem kapitalizacji prostej i złożonej, a w przypadku kapitalizacji złożonej dodatkowo jeszcze zgodnej oraz niezgodnej. W przypadku kapitalizacji złożonej – gdzie wykorzystuje się różne rodzaje kapitalizacji (m.in. miesięczną, kwartalną, półroczną, roczną) wprowadza się pojęcia: stopa względna, stopa równoważna oraz stopa efektywna. Wyznacza się wartości kapitału z uwzględnieniem tych stóp. Ponadto definiuje się pojęcie stopy przeciętnej w zależności od rodzaju kapitalizacji (prosta, złożona), a także pojęcie stopy realnej (uwzględniającej inflację).

Dyskonto, w tym przedstawione są: dyskonto matematyczne oraz dyskonto handlowe i ich zastosowania.

Wkłady oszczędnościowe. W tej części wykładu omawia się problem gromadzenia funduszy celowych na przyszłość (np. funduszu emerytalnego). Wyznacza się wartości przyszłe oraz obecne regularnych wpłat w zależności od rodzaju kapitalizacji (prosta i złożona). Przy pojęciu kapitalizacji złożonej (która dzieli się na zgodną i niezgodną), w zależności od okresu kapitalizacji, okresu stopy procentowej i okresu wpłat, wykorzystuje się stopę równoważną, stopę względną oraz stopę efektywną.

Renta kapitałowa. Przedstawiając to zagadnienie, porusza się problem wysokości wypłat regularnych z powstałego wcześniej kapitału. W zależności od okresu wypłat, okresu kapitalizacji i okresu stopy procentowej wykorzystuje się stopę równoważną, stopę względną oraz stopę efektywną.

Kapitał rentowy. Tutaj omawia się tworzenie i proces wyczerpywania się kapitału rentowego oraz wyznacza się wysokość kapitału po n wypłatach.

Renta wieczysta, w tym maksymalna renta wieczysta z dołu i z góry. Przedstawione zostają różnice między rentą pewną a rentą wieczystą.

Kredyty. W tej części wykładu analizowany jest proces spłaty zadłużenia w stałych kwotach płatności oraz w ratach malejących (równych ratach kapitałowych). Uwzględnia się tutaj odpowiednie prowizje bankowe i oprocentowanie (zmiennie lub stałe). Wyznacza się także efektywny koszt kredytu.

Tablice trwania życia. Omawia się tutaj następujące pojęcia: prawdopodobieństwo zgonu, prawdopodobieństwo przeżycia, liczbę zmarłych w danym wieku, przeciętne dalsze trwanie życia.

Składka jednorazowa netto w ubezpieczeniach na życie. W tej części wykładu wyznacza się wysokość składki jednorazowej netto dla takich produktów ubezpieczeń, jak: terminowe ubezpieczenie na wypadek śmierci, ubezpieczenie na całe życie, ubezpieczenia na dożycie, ubezpieczenie mie-

szane, ubezpieczenie na dożycie odroczone o m lat, ubezpieczenie terminowe na wypadek śmierci o malejącej sumie ubezpieczenia, ubezpieczenie na wypadek śmierci o rosnącej rocznie sumie ubezpieczenia.

Składka okresowa netto w ubezpieczeniach na życie. Tutaj pokazuje się sposoby wyznaczania składki okresowej, jednak ostatecznie korzysta się głównie z liczb komutacyjnych oraz z tablic tych liczb, które też omawia się na wykładzie.

6. Podsumowanie

Na zakończenie można sformułować pewne uwagi ogólne.

1. W ministerialnych programach studiów bardzo słabo potraktowana została problematyka dotycząca ubezpieczeń na życie oraz ubezpieczeń emerytalnych, gdzie powinno się studentom przybliżyć funkcjonowanie systemów emerytalnych we współczesnym świecie oraz zagadnienia szacowania korzyści z korzystania z dodatkowych zabezpieczeń na starość, co stanowi element finansów osobistych.

2. Zauważyć można również, że w programie studiów pominięte zostały całkowicie wszystkie zagadnienia związane z rachunkiem aktuarialnym, czyli związane z oceną ryzyka ubezpieczeniowego, kalkulacją składek ubezpieczeniowych i innych decyzji ubezpieczeniowych, które mają ogromne znaczenie dla prawidłowego funkcjonowania zakładu ubezpieczeń.

3. Na przedmiot matematyka finansowa i ubezpieczeniowa powinny składać się zarówno wykład oraz ćwiczenia, jak i laboratoria, a nie tylko wykład. Zagadnienia omawiane w programie tego przedmiotu są bardziej praktyczne niż teoretyczne.