DIDACTICS
OF
MATHEMATICS

7(11)

The Publishing House
of the Wrocław University of Economics
Wrocław 2010

Editors
Janusz Łyko
Antoni Smoluk

Referee
Marian Matłoka
(Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu)

Proof reading
Agnieszka Flasińska

Setting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, *Sower*
(private collection)

PL ISSN 1733-7941

Print run: 200 copies

TABLE OF CONTENTS

D I D A C T I C S O F M A T H E M A T I C S

No. 7 (11) 2010

KILKA POWODÓW, DLA KTÓRYCH OPOWIADAMY STUDENTOM EKONOMII O MACIERZACH

Wojciech Rybicki

Abstract. In the paper we consider a role which a matrix plays in the educational process of students of economics (as a notion, a symbol of a mathematical operation as well as a numerical tool). We remind that matrices and determinants appear systematically in courses of mathematics and related subjects. They help to model and solve various significant problems of econometrics (wide sense) and operation researches. It is worth noting, however, that we make use of matrix notation in our lectures on microeconomics and macroeconomics. The paper initiates the series of three "didactical" articles devoted to matrices. So it also plays a role of some kind of introduction to the subject. The article may be divided, in a natural way, into two parts, different in character. At the beginning we show and shortly discuss – in an informal manner – selected problems in which matrices "work". The second part is quite different: it is much more formalized. The examples we describe in that segment are formulated in the mathematical language. Intentionally, we have chosen elementary facts taken from standard programmes of "math" for students of economics. According to the plan, we collect them and place under unified label "Matrices". We also have announced some themes which will be considered in the following articles of the series.

Keywords: determinant, econometrics, matrix, micro economics, representation, theory of games.

1. „Macierz jaka jest, każdy widzi!" – można strawestować słynną definicję konia z encyklopedii księdza Chmielewskiego. „Naiwne tabelki" nie mogą stanowić – same w sobie – obiektu fascynacji. Wiadomo jednak, że rachunek macierzowy towarzyszy słuchaczom studiów ekonomicznych od początku cyklu kształcenia (na niektórych specjalnościach – przez cały okres studiów). Z pojęciem macierzy spotykają się oni najpierw, w naturalny sposób, w kursie algebry liniowej (na ogół – w pierwszym semestrze nauki). Macierze i wyznaczniki pojawiają się (także na pierwszym roku studiów) w kontekście analizy matematycznej: od macierzy Hessego i Jacobiego (wraz z hesjanem i jakobianem), po macierze wielowskaźnikowe,

Wojciech Rybicki
Department of Mathematics, Wrocław University of Economics, Komandorska Street 118/120, 53-345 Wrocław, Poland.
e-mail: wojciech.rybicki@ue.wroc.pl

reprezentujące różniczki wyższych rzędów. Zanim przejdziemy do dalszego ciągu „katalogowania" sytuacji, w których stosuje się formalizm (i aparat) macierzowy, odnotujmy „na gorąco", że „coś musi być na rzeczy" – skoro na całym świecie się tego uczy...

„Naiwne tabelki", o których mowa, mają zaskakująco duży potencjał informacyjny, są nośnikami głębokich idei metodologicznych. Służą prezentacji – odpowiednio uporządkowanych – struktur zjawisk ze sfery nauk przyrodniczych i społecznych. Stanowią zarazem „kanoniczny" przykład funkcjonowania teorii reprezentacji (szerszych, ogólniejszych kategorii obiektów – przez ich wyspecyfikowane desygnaty). Odnosi się to, po pierwsze, do kategorii „wewnątrzmatematycznych": zbiorów, relacji, procesów czy operacji (podobnie jak przestrzenie funkcyjne typu L^2 reprezentują ośrodkowe przestrzenie Hilberta, a Cantorowska teoria mnogości – algebry Boole'a). Ale nie tylko. Macierze znakomicie ułatwiają (czasami wręcz umożliwiają) modelowanie obiektów i procesów, pojawiających się „poza czystą matematyką". Znamienna jest dwoistość ról, jakie w procesie badawczym spełniają macierze: z jednej strony stanowią swoistą szkołę abstrahowania, z drugiej – przeciwnie, umożliwiają wizualizację i „materializację" konstrukcji ogólniejszych.

Powyższe uwagi natury ogólnej są hasłami wywoławczymi, wymagającymi uzasadnienia poprzez przywołanie konkretnych klas przypadków i wypunktowanie istoty „mechaniki" funkcjonowania modeli macierzowych. Właśnie dostrzeżenie – w kontekście długoletniego nauczania tzw. przedmiotów ilościowych – różnorodności sytuacji, w których, w naturalny sposób, operuje się językiem macierzy, doprowadziło autora niniejszego artykułu do konstatacji o uniwersalnych walorach tego języka (czego spektakularnym odzwierciedleniem jest także wykreowanie środowiska Matlab w informatyce). W konsekwencji pojawiła się pokusa zidentyfikowania, „zinwentaryzowania" i częściowego usystematyzowania tych „zasobów", w formie serii trzech artykułów z zakresu dydaktyki matematyki. Podkreślmy, że strategicznym adresatem prezentowanych przemyśleń jest tu student ekonomii, będący skądinąd „obiektem obróbki dydaktycznej". Tak więc za duchowych patronów niniejszej misji można uznać fizjokratę François Quesnay'a (twórcę słynnej „tablicy ekonomicznej", stanowiącej pierwowzór macierzy przepływów międzygałęziowych – Tableau Èconomique, 1758), a także prekursora rachunkowości, Lucę Pacciolego (który, 100 lat wcześniej, „wylansował" dla pokoleń księgowych dwukolumnową bilansową macierz „winien-ma").

2. Niniejsza, pierwsza część zaprojektowanego tryptyku ma, z natury rzeczy, charakter wprowadzający. Jest to esej, który zaczyna się od przeglądu i niesformalizowanego opisu zagadnień, w których pojawiają się macierze. Zaanonsowano tu również, w krótkiej formie tematy poruszane w kolejnych artykułach. Drugi człon tej pracy jest bardziej sformalizowany – przykłady prezentowane są w języku matematycznym. Są to fakty, programowo zaczerpnięte z tzw. folkloru matematycznego – chodzi bowiem właśnie o ich „umieszczenie pod jednym szyldem" (klucz do tej kompozycji stanowią, oczywiście, konotacje macierzowe tych faktów).

Do zeszytu „Dydaktyki Matematycznej" przygotowany też został drugi artykuł na temat zastosowań macierzy do modelowania i pomiaru zjawisk ekonomicznych (i nie tylko). Jest on zatytułowany *O macierzach, porządkach stochastycznych i realokacji koszyków dóbr*. Właśnie ta tematyka dostarczyła bezpośredniego impulsu do przyjrzenia się licznym, nie zawsze trywialnym, zastosowaniom modeli macierzowych. Macierze występują tu jako jądra operatorów całkowych określonych na rodzinach miar probabilistycznych. Stanowią część instrumentarium pomiaru stopnia nierównomierności rozkładu bogactwa, porównywania zmienności i ryzyka (porządki wypukłe, Lorenza, Schura, martyngałowe), służą – *ex definitione* – do konstrukcji mieszanek miar probabilistycznych; także – do wyznaczania dynamiki procesów Markowa. Stanowią dogodny język dla klasyfikacji stanów tych procesów, a w konsekwencji – samych procesów.

Omawiane prace powstały na kanwie referatu (nieopublikowanego) wygłoszonego przez autora na środowiskowej konferencji dydaktycznej w Łodzi, w maju 2008 r. oraz referatu przygotowanego na konferencję „Nauczanie matematyki i przedmiotów pokrewnych na studiach ekonomicznych", zorganizowaną przez Katedrę Matematyki i Cybernetyki Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu w dniach 14-17.09.2010 we Wrocławiu.

W trzecim, nie zredagowanym jeszcze do końca, artykule serii spróbujemy poszerzyć zakres dostrzeżonych zastosowań oraz pogłębić studia niektórych zagadnień, sygnalizowanych wcześniej. Chodzi tu bardziej o stworzenie dystansu intelektualnego poprawiającego perspektywę spojrzenia niż o uogólnienia *stricte* matematyczne (wszystkie „rozsądne i naturalne" uogólnienia zostały już zasygnalizowane i „domknięte" przez matematyków). Dystans intelektualny, o którym wspomniano wyżej, można osiągnąć, dysponując znaczącą mnogością „submodeli", powiązanych relacjami równoważności lub implikacji. Pojawi się więc model równowagi w ekonomii Arrowa–Debreu i jego odpowiednik w teorii finansów (liniowe warunki braku możliwości arbitrażowych). Pokaże się możliwość jednolitego –

macierzowego – opisu części teorii grafów, sieci i łańcuchów Markowa o skończonej liczbie stanów. Będą też podane informacje o zastosowaniach macierzy Gramma w ekonomii, o macierzowych grach stochastycznych i ewolucyjnych modelach w biologii modelowanych macierzami losowymi. Formalne założenia licznych mutacji Centralnego Twierdzenia Granicznego, w którym „tworzywem" są tzw. serie małych zmiennych losowych – można graficznie to przedstawić w postaci quasi-trójkątnej, nieskończonej macierzy, której elementami są odpowiednio zaaranżowane zmienne losowe – o tym także będzie mowa w anonsowanej pracy.

3. Zgodnie z zapowiedzią przejdziemy teraz do dalszego ciągu „opowiadania" o macierzach w konwencji niesformalizowanej. Przypomnijmy najpierw kilka kolejnych wzorców z kręgu samej matematyki. Dowolne działanie dwuargumentowe w zbiorze skończonym można określić za pomocą tablicy Cayleya – czyli macierzy kwadratowej. Produkt kartezjański zbiorów skończonych można utożsamiać ze „zwykłą" macierzą (ogólnie, prostokątną, o odpowiednich wymiarach). W konsekwencji, dowolna relacja wiążąca elementy tych zbiorów też jest macierzą – umownie: zerojedynkową. Oczywiście matryce te mogą być ogólniejsze, a ich „boki" mogą stanowić zbiory dowolnej natury i mocy. Zatem z takimi uogólnionymi macierzami można utożsamiać multifunkcje (korespondencje), czyli relacje lub ich „wykresy".

Uogólnienie może pójść również w nieco innym kierunku: dowolną funkcję dwóch dowolnych zmiennych można traktować jako macierz. W praktyce owa funkcja podlega zawsze pewnym – wyspecyfikowanym – warunkom regularności. Interesującą, bogatą w zastosowania klasę takich funkcji stanowią jądra operatorów przejścia (markowowskie), w których jeden argument przebiega ustalony podzbiór osi rzeczywistej, drugi – odpowiednią rodzinę podzbiorów, a wartości należą do przedziału $\langle 0; 1\rangle$ Szczególnym przypadkiem są tu elementarne macierze przejścia jednorodnych łańcuchów Markowa, o – co najwyżej – przeliczalnej liczbie tanów, a także, związane z nimi, macierze intensywności przejść. W ogólnym przypadku reprezentują one tzw. infinitezymalne generatory półgrup fellerowskich, determinujących całą probabilistyczną strukturę procesu Markowa.

W latach dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia zainicjowano badania nad tzw. macierzami monotonicznymi i związanymi z nimi monotonicznymi procesami Markowa. Umożliwiło to porównywanie tych procesów pod kątem konfrontacji poziomów przebiegów oraz zmienności (stochastycznej). Techniki te wpisują się w ogólny nurt tzw. jądrowych dominacji stochastycznych. Dla tego – interesującego sam w sobie – działu probabilistyk, znaleziono rozległe zastosowania w stochastycznej matematyce finansowej, inżynierii finansowej, teorii masowej obsługi oraz teorii ryzyka ubezpieczeniowego (porównywanie procesów ryzyka, porównywanie stochastycznej wielkości kontraktów).

4. Jednymi z ważniejszych obiektów badań statystyki „wielowymiarowej" są, jak powszechnie wiadomo, macierze kowariancyjne (i korelacyjne). Stanowią one klasyczne źródło informacji o liniowych zależnościach stochastycznych, zachodzących między zmiennymi jednowymiarowymi. Szczególnymi (ważnymi) przypadkami są tutaj macierze autokorelacyjne, wykorzystywane w analizie szeregów czasowych, a także tzw. macierze wariancji-kowariancji, które pojawiają się w inżynierii finansów.

Analogicznie, w wielorównaniowych liniowych modelach ekonometrycznych „macierzowe rusztowanie" współczynników określa mechanizm objaśniania zmian i współzależności zmiennych modelu (pojawiają się w tym kontekście także tzw. macierze koincydencji oraz pojemności informacyjnych). Z kolei, w zadaniach optymalizacyjnych kluczową rolę odgrywają macierze ograniczeń liniowych (nie tylko w przypadku liniowych funkcji celu).

Macierze (i ich uogólnione wersje – wektorowe funkcje dwóch zmiennych) służą do formalnej reprezentacji gier dwuosobowych (postać normalna). Elementy teorii gier (także – statystycznych), zaliczane są do kanonu edukacyjnego na kierunkach informatyczno-ekonometrycznych. Elementarne modele teorio-growe (a wraz z nimi – macierzowe) pojawiają się również w każdym „przyzwoitym" kursie mikroekonomii, na pierwszym roku studiów (równowaga Nasha, Stackelberga, dylemat więźnia). Z macierzową formą prezentacji zjawisk ekonomicznych spotyka się student także w innych kontekstach mikroekonomicznych i makroekonomicznych: schemat Marksa, modele Leontiefa, von Neumanna czy Gale'a (problematyka ta jest rozwijana, ewentualnie, na kursie ekonomii matematycznej).

Wybrane „wątki stochastyczne" będą – jak już wspomniano – rozwijane w drugim z serii artykułów. Warto jednak już teraz przypomnieć o szczególnej roli, jaką odgrywają macierze w analizie regresji i analizie wariancji (na różnych szczeblach ogólności) oraz planowaniu doświadczeń (macierz planowania). Wszelkie „bloki", kwadraty łacińskie czy grecko-łacińskie są oczywiście macierzami. Pojawiają się także, naturalną koleją rzeczy, w analizie czynnikowej. O układzie równań normalnym, kluczowym elemencie, gaussowskiej procedury najmniejszych kwadratów powiemy dalej w tej pracy. Już w „zwykłej" statystyce opisowej pojawiają się tzw. tablice dwudzielne, wielodzielne i korelacyjne – jako macierzowe uogólnienia szeregów rozdzielczych (na przypadek więcej niż jednej cechy). Podkreślmy, że wszystkie te pojęcia i narzędzia omawia się w ramach takich przedmiotów, jak: statystyka (opisowa i matematyczna), ekonometria oraz statystyczna analiza danych czy prognozowanie. Zauważmy też, że w gruncie rzeczy wszelkie tablice: logarytmiczne, trygonometryczne, statystyczne, finansowe czy ubezpieczeniowe (np. liczb komutacyjnych) są formalnie macierzami.

5. Narażając się (świadomie) na zarzut amatorskiego poziomu wywodów, autor nie może oprzeć się pokusie sformułowania sugestii o dominacji postrzegania planarnego jako właściwości percepcyjnej człowieka. Płaskie są rysunki obiektów przestrzennych, wykonane w czasach prehistorycznych na skałach, później – malowidła na wazach czy ścianach grobowców. Płaskie są obrazy – o wielkiej głębi perspektywy – wykonane przez mistrzów pędzla od renesansu po wiek dwudziesty. Płaskie jest lustro, zwierciadło tafli wody, ekran monitora. Płaskie były wszelkie tablice o przełomowej roli w historii kultur i religii ludzkości, a także – wszelkie matryce! Ukoronowanie stanowi chyba genialne „oszustwo" kartografów, którzy na płaskich mapach oddają wiernie przestrzenne kształty (oczywiście, naprawdę, jest to transformacja rozmaitości tego samego wymiaru – dlatego możliwy jest efekt odwzorowania wzajemnie jednoznacznego). Płaska, wreszcie, jest Ziemia (lokalnie!). „Skok repertuarowy" przy przejściu od „płócien" jednowymiarowych do tych, osadzanych w klasycznych sztalugach wydaje się być ieporównanie większy od przejścia z dwóch do trzech wymiarów. Dla wyższych wymiarów nie ma już – z punktu widzenia możliwości percepcyjnych człowieka – żadnych różnic (równie dobrze „widzimy" obrazy 6-wymiarowe jak 10-wymiarowe!). Tak więc nawet „rysując" wykres funkcji rzeczywistej 100 zmiennych, stuwymiarowy argument sytuujemy na płaszczyźnie dwuwymiarowej, a oś wartości „strzela" prostopadle w górę. Tak czyni ekonomista badający cząstkowy wpływ danego czynnika na jakąś wielkość czy proces ekonomiczny, pozostałe zmienne „pakuje *ceteris paribus* do jednowymiarowego worka" – umożliwia to geometryczną ilustrację analizy zależności na płaszczyźnie lub w przestrzeni trójwymiarowej (jeśli pójdziemy o krok dalej i „zakodujemy" argumenty jako punkty prostej – otrzymamy płaski grafik).

Na zakończenie części niesformalizowanej wypada „wytłumaczyć się" z zamiaru umieszczenia w trzecim artykule informacji o modelowaniu procesów biologicznych oraz o planowaniu eksperymentów. Od co najmniej

20 lat dynamicznie rozwija się tzw. nurt ekonomii eksperymentalnej. Ważną okolicznością okazał się fakt przyznania w 1994 r. Nagrody Nobla w zakresie ekonomii Richardowi Seltenowi (razem z J. Nashem i J. Harsanyim), który – między innymi – stworzył w Bonn szkołę naukową ekonomii eksperymentalnej (symbioza odpowiednich symulacji z modelowaniem teoriogrowym owocuje bardzo ciekawymi spostrzeżeniami). Nieco dłuższą tradycję ma modelowanie wzorcami biologicznymi procesów i zachowań ekonomicznych: spotykamy tu modele gier konkurencyjnych i kooperacyjnych, subiektywną ewaluację projektów i procesów – interakcję z psychologią walki o przetrwanie jednostek, grup, dynastii (naturalne modele wyboru międzyokresowego, gier międzypokoleniowych i sprawiedliwości międzypokoleniowej). Macierze stochastyczne, należące do instrumentarium modelowania ewolucji biologicznych, mogą tę funkcję spełniać w analogicznych zadaniach formułowych przez ekonomię (np. mutacje właściwości stacjonarnej czy ergodyczności mogą mieć sens w kontekście modelowania zrównoważonego rozwoju).

6. Czas na bardziej sformalizowaną agitację za znaczeniem notacji macierzowej i samego pojęcia macierzy jako obiektu matematycznego. Zacznijmy od najbardziej „naturalnego środowiska”, w którym funkcjonują macierze czyli od algebry liniowej.

Jaka jest praktyczna „bezpośrednia” korzyść z informacji o linowości funkcji

$$l : R^n \to R^m \tag{1}$$

bez jej reprezentacji macierzowej? Spójrzmy teraz na to zagadnienie od strony rachunkowej. Dla dowolnych wektorów $x = (x_1, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, \ldots, y_m)$ informacja o liniowej zależności funkcyjnej (konkretny wzór)

$$y = l(x) \tag{2}$$

jest równoważna z algorytmiczną instrukcją

$$y^T = \mathrm{A} \cdot x^T, \tag{3}$$

gdzie A jest macierzą

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dla numerycznej realizacji polecenia (3) nie jest nawet niezbędna świadomość natury wyrazów macierzy. To, że liczba a_{ij} jest wartością i-tej współrzędnej (w ustalonej bazie w R^m), obrazu przez funkcję l j-tego wektora ustalonej bazy w R^n „wyjdzie" samo w rachunku. Nie trzeba nawet (o zgrozo!) wiedzieć, co to jest operator liniowy...

Zbiór ograniczeń liniowych w zagadnieniach optymalizacyjnych służy do określania dziedziny funkcji celu w postaci wielościanu w przestrzeni n-wymiarowej (najczęściej – w dodatnim orthancie tej przestrzeni). Koniunkcję wyznaczającą część wspólną m-półprzestrzeni (pod lub nad hiperpłaszczyznami), czyli wspomniany wielościan można syntetycznie zapisać w formie jednego warunku

$$\mathrm{A} \cdot x^T \leq b^T, \tag{5}$$

gdzie: A – macierz współczynników w równaniach hiperpłaszczyzn (taka jak w (4)), $x \in R^n$, $x \geq 0, b \in R^n$.

7. Rolę analogiczną do roli macierzy operatorów liniowych spełniają, w odniesieniu do form dwuliniowych i kwadratowych macierze tych form. Dla formy dwuliniowej

$$b : R^n \times R^n \to R \tag{6}$$

i dwóch dowolnych wektorów $x, y \in R^n$ i liczby $w \in R$ specyfikacja definicji

$$w = b(x, y) \tag{7}$$

polega na wskazaniu macierzy tej formy

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Otrzymujemy wówczas

$$b(x, y) = xBy^T = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \,. \tag{9}$$

Dla formy kwadratowej s odpowiadającej formie b

$$s: R^n \to R, \quad s(x) = b(x, x), \quad x \in R^n,$$

otrzymujemy

$$s(x) = x\mathrm{B}^s x^T = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^s x_i x_j, \tag{9'}$$

gdzie macierz B^s powstaje przez symetryzację macierzy

$$\mathrm{B}: \; b_{ij}^s = b_{ji}^s = \frac{1}{2}\left(b_{ij} + b_{ji}\right).$$

To samo dotyczy form wieloliniowych oraz jednorodnych form wyższych stopni – temat ten powróci w kontekście rachunku różniczkowego. Wszystko też jest, oczywiście, prawdziwe również dla przestrzeni „brzegowych” ogólniejszych niż R^n – specyfika naszych ilustracji macierzowych wyraża się tylko w tym, że współrzędne wektorów i wyrazy macierzy są skalarami z ciała liczb rzeczywistych.

8. Macierze spełniają niezwykle ważną funkcję w badaniu zależności liniowych „wewnątrz” podzbiorów (skończonych, policzalnych) przestrzeni liniowych z zadanym iloczynem skalarnym. Kanoniczną przestrzeń stanowi tu przestrzeń Hilberta H z iloczynem skalarnym $(x\,|\,y)$. Dla ustalonego podzbioru $\mathrm{K} = \{k_1, ..., k_m\}$ tej przestrzeni określa się macierz G zależności liniowych (macierz Gramma, macierz uogólnionych cosinusów)

$$\mathrm{G} = \left(g_{ij}\right) = \left(k_i \middle| k_j\right); \quad i, j = 1, ..., m. \tag{10}$$

W najprostszym przypadku, kiedy $\mathrm{H} = R^n$, g_{ij} są „zwykłymi” iloczynami skalarnymi, *n*-wymiarowych wektorów o współrzędnych rzeczywistych.

Szczególny (ważny) przypadek stanowi przestrzeń rzeczywistych (zespolonych) zmiennych losowych o skończonych drugich momentach – $L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$. Niech $X = \{X_1, ..., Xm\} \subset L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$. Wówczas

$$\mathrm{G} = \mathbf{\Sigma} = \left(\mathrm{cov}\left(X_1, X_j\right)\right); \quad i, j = 1, ..., m \tag{11}$$

jest macierzą kowariancyjną układu X .

Do „pokrewnych” obiektów: funkcji kowariancyjnej, macierzy korelacyjnej, autokorelacyjnej itp. wrócimy w kolejnym artykule.

9. Zatrzymajmy się teraz na chwilę nad jednym z najprostszych zadań z teorii reprezentacji grup. Rozpatrzmy grupę symetryczną S_n, czyli grupę permutacji zbioru n-elementowego $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$.

$$p \in S_n \Leftrightarrow p : \{z_1, ..., z_n\} \xleftrightarrow{1-1} \{z_1, ..., z_n\}. \tag{12}$$

Równoważnie, można tę definicję zapisać „wektorowo”

$$\overline{p}(z_1, ..., z_n) = (p(z_1), p(z_2), ..., p(z_n))$$

lub jeszcze krócej

$$\overline{p}(z_1, ..., z_n) = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n), \tag{13}$$

gdzie $\underset{k\in\{1,...,n\}}{\forall} \overline{p}_k \in Z$ oraz $\underset{k,l\in\{1,...,n\}}{\forall} k \neq l \Rightarrow \overline{p}_k \neq \overline{p}_l$.

(Na przykład $\overline{p}(z_1, ..., z_n) = (z_2, z_1, z_n, ..., z_3)$).

Utwórzmy macierz zerojedynkową (boolowską) zawierającą dokładnie jedną jedynkę w każdym wierszu i w każdej kolumnie

$$\overline{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

(Zbiór takich macierzy oznaczamy symbolem $\mathbf{P}_{B,ST}$). Zachodzi oczywista równoważność

$$\begin{aligned} \overline{p}(z_1, ..., z_n) = (z_2, z_1, z_4, ..., z_3) &\Leftrightarrow (z_2, z_1, z_4, ..., z_3) \\ &= \overline{P} : (z_1, z_{2n}, ..., z_n)^T. \end{aligned} \tag{15}$$

Ogólnie

$$\forall (z_{p_1}, ..., z_{p_n}) \in S_n \;\; \exists \mathrm{P} \in \mathbf{P}_{B,ST} \, (z_{p_1}, ..., z_{p_n}) = \mathrm{P} \cdot (z_1, z_2, ..., z_n)^T, \tag{16}$$

dlatego też macierze ze zbioru $\mathbf{P}_{B,ST}$ nazywa się często permutacyjnymi.

Uogólnienie macierzy z rodziny $\mathbf{P}_{B,ST}$ otrzymuje się, rozszerzając ten zbiór do rodziny wszystkich macierzy o wyrazach nieujemnych, w których elementy każdego wiersza oraz każdej kolumny sumuje się do jedności. Są to tzw. macierze podwójnie stochastyczne. Oznaczmy tę rodzinę symbolem $\mathbf{P}_{ST}$, a jej typowy element symbolem $\mathbf{\Pi}$. Wówczas macierz $\mathbf{\Pi} = (\pi_{ij});\ \ i,\ j = 1, ..., n$, przy czym

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} \quad \pi_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 1. \tag{17}$$

Słynne twierdzenie Birkhoffa charakteryzuje rodzinę macierzy podwójnie stochastycznych stopnia *n* jako wypukłą otoczkę zbioru macierzy permutacyjnych. Do kwestii tych powrócimy w następnym artykule – przy omawianiu tzw. realokacji wyrównujących.

10. Rozważmy (dowolną) relację *T* w zbiorze skończonym *X*. Niech zatem $X = \{x_1, ..., x_n\},\ \ T \subset X \times X$. Na najprostszą tabelkę, jednoznacznie określającą tę relację, można spojrzeć jak na macierz boolowską T, taką, że

$$\mathrm{T} = (t_{ij});\ \ i,\ j = 1, ..., n, \tag{18}$$

przy czym

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } & x_i T x_j, \qquad\qquad ((x_i, x_j) \in T), \\ 0 \text{ jeśli } & \sim (x_i T x_j), \qquad ((x_i, x_j) \in T). \end{cases}$$

Inaczej mówiąc, funkcja dwóch zmiennych $t : \{1, 2, ..., n\}^2 \to \{0, 1\}$ jest indykatorem zbioru *T*

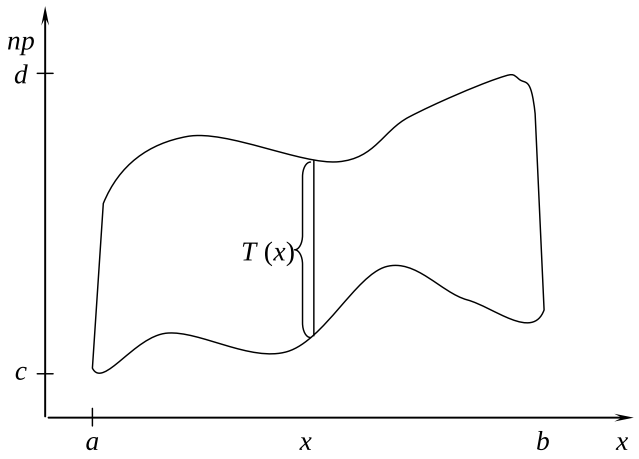
$$t_{ij} = t(i, j) = \mathrm{I}_T((i, j)). \tag{19}$$

Uogólnienie powyższej elementarnej sytuacji ma charakter „quasi--graficzny" i ogranicza się (w zakresie symboliki – czyli w warstwie interesującej nas w tej pracy) do retuszy reinterpretacyjnych. Tak więc, dla ożywienia narracji, prezentację ogólnego przypadku przeprowadzimy w języku odwzorowań wielowartościowych. Relację pomiędzy elementami zbioru *X* i zbioru *Y* utożsamimy w związku z tym z funkcją

$$T : X \to 2^Y. \tag{20}$$

T jest więc odwzorowaniem wielowartościowym, czyli multifunkcją (w kontekście ekonomii matematycznej, zgodnie z tradycją G. Debreu oraz R. Aumanna funkcjonuje również w tym znaczeniu termin „korespondencja”. Wygodnie jest wykres multifunkcji utożsamić z nią samą.

Na rysunku 1 osie są dowolnymi zbiorami, a przedziały symbolizują dziedzinę oraz przeciwdziedzinę (ściślej mówiąc: przedział $\langle c, d \rangle$ oznacza „najmniejszy nadzbiór wszystkich elementów zbioru wartości, czyli podzbiorów należących do przeciwdziedziny rozważanej korespondencji). Zaznaczmy, że dla tej formalizacji rysunek nie jest najszczęśliwszą ilustracją – „za to” idealnie ilustruje relację *T*, jako podzbiór produktu $X \times Y$, stanowiący uogólnioną macierz.



Rys. 1. Relacja $T \subset X \times Y$ jako multifunkcja $T: X \to 2^Y$

$$T = \left(t(x, y)\right) \qquad t\left(x, y\right) = \begin{cases} 1 & y \in T(x) \\ 0 & y \notin T(x) \end{cases}. \tag{21}$$

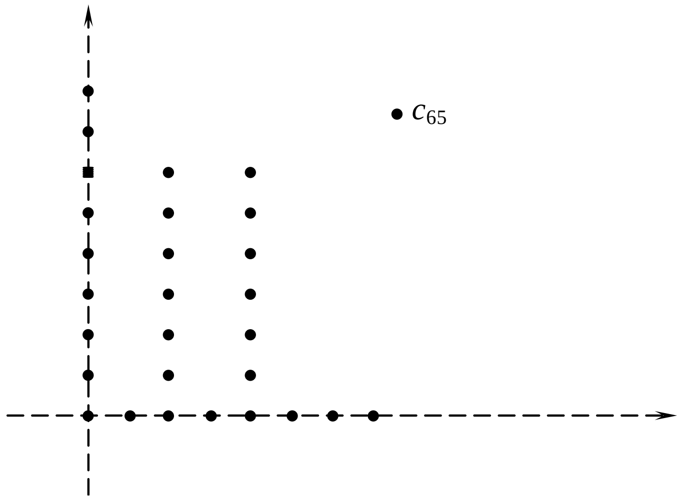
11. Przejdźmy teraz do omówienia kilku wzorcowych przykładów aplikacji modeli macierzowych w analizie matematycznej.

Nieujemne punkty kratowe płaszczyzny o współrzędnych całkowitych tworzą zbiór częściowo uporządkowany K_+, skierowany (w prawo) – z porządkiem produktowym (Pareta)

$$\left(k, l\right) \preceq \left(m, n\right) \Leftrightarrow k \leq m \wedge l \leq n .$$

Jest to zarazem uogólniona „macierz kwadratowa”, podobnie jak każda funkcja

$$c : N_+ \times N_+ \to R \quad c_{kl} \overset{\text{ozn}}{=} c(k, l)$$
$$(c : \mathbf{K}_+ \to R)$$



Rys. 2. Ciąg uogólniony indeksowany punktami kratowymi $\mathbf{K}_+$

Dla „zwykłego” ciągu liczbowego $a = (a_0, a_1, a_2, ...)$ zdefiniujmy $c_{kl} = a_k - a_l$. Przypomnijmy, że jeśli S jest skierowanym zbiorem indeksów, to

$$g = \lim_{s \in S} c_s \Leftrightarrow \underset{\in > 0}{\forall} \ \underset{s_0 \in S}{\exists} \ \underset{s \in S}{\forall} \left[(s_0 \preceq s) \Rightarrow \left(|a_s - g| < \in \right) \right]. \tag{22}$$

(jest to oczywiście ciąg uogólniony).

„U nas” $\lim_{s \in \mathrm{K}_+} c_s = 0$ znaczy, że ciąg a spełnia warunek Cauchy'ego.

Przywołamy teraz kilka klasycznych, niezwykle ważnych macierzy i wyznaczników, których uczymy w kursie analizy matematycznej. Zacznijmy od macierzy Jacobiego i jej wyznacznika – jakobianu.

Niech f będzie funkcją wektorową n zmiennych rzeczywistych

$$\begin{gathered} f = R^n \to R^n \quad y = f(x), \\ y = \left(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n) \right). \end{gathered} \tag{23}$$

Jeśli funkcja ta jest odpowiednio gładka, to jej macierz Jacobiego zdefiniowana jest wzorem

$$J = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right); \quad i, k = 1, ..., n \tag{24}$$

Macierz ta odgrywa, jak wiadomo, podstawową rolę w określeniu (i wyznaczaniu) pochodnej funkcji złożonej („reguła łańcucha”).

Wyznacznik macierzy J pojawia się „wszędzie”. Jakobian $|J|$ ma zastosowanie, między innymi, w całkowaniu przez zamianę zmiennych, np. w obliczaniu gęstości funkcji wielowymiarowych zmiennych losowych.

Załóżmy, że f przekształca wektor losowy $(X_1, ..., X_n)$ w wektor losowy $(U_1, ..., U_n)$. $f = (f_1, ..., f_n)$, gdzie

$$U_i = f_i(X_1, ..., X_n) \quad i = 1, ..., n.$$

$$(X_1, ..., X_n) \sim \varphi(x_1, ..., x_n).$$

Załóżmy również, że funkcja f jest różnowartościowa i h niech oznacza funkcję odwrotną do f $\left(x_i = h_i(u_1, ..., u_n), \ \ i = 1, 2, ..., n\right)$. Wówczas

$$(U_1, ..., U_n) \sim \psi(u_1, ..., u_n) = \varphi\big(h_1(u_1, ..., u_n), ..., h_n(u_1, ..., u_n)\big) \cdot |J| \tag{25}$$

gdzie ψ jest gęstością (rozkładu) wektora losowego $(U_1, ..., U_n)$.

Przypomnijmy definicję macierzy drugich pochodnych cząstkowych funkcji rzeczywistej n zmiennych rzeczywistych czyli macierzy Hessego (hesjanu) H

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad i, j = 1, ..., n; \quad \left(f : R^n \to R \right). \tag{26}$$

W standardowym kursie matematyki dla ekonomistów hesjan jest „stałym punktem programu” – określoność tej macierzy decyduje wszak o istnienie (i rodzaju) ekstremów. W naturalny sposób macierz Hessego pojawia się także w kursach badań operacyjnych.

Z kolei w teorii równań różniczkowych zwyczajnych mamy do czynienia z macierzą Wrońskiego i jej wyznacznikiem – wrońskianem. Niech dany będzie układ n funkcji klasy $C^{(n-1)}$, oznaczonych krótko symbolami: $y_1, y_2, ..., y_n$. Macierzą Wrońskiego nazywa się macierz kwadratową utworzoną z tych funkcji i ich wszystkich istniejących pochodnych

$$W[y_1, ..., y_n] = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Wrońskianem jest wyznacznik

$$\det W[y_1, ..., y_2], \tag{28}$$

który z kolei ma pierwszorzędne znaczenie dla rozwiązywania liniowych, jednorodnych równań różniczkowych postaci

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \tag{29}$$

Nieosobliwość macierzy Wrońskiego – w ustalonym przedziale (a, b) – rozstrzyga (pozytywnie) kwestię istnienia fundamentalnego (niezależnego liniowo) układu rozwiązań równania (29) w tym przedziale.

12. Przypomnijmy teraz wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych, nieodłączny element każdego kursu analizy matematycznej, prowadzonego na uczelniach i kierunkach ekonomicznych. Jego olbrzymia nośność teoretyczna (zaliczany jest do umownej „grupy trzech filarów podtrzymujących sklepienie analizy matematycznej" – wraz z zasadniczym twierdzeniem rachunku różniczkowego oraz twierdzeniem Stokesa) przekłada się w naturalny sposób na wartość aplikacyjną (m.in. w rozmaitych modelach ekonomiczno-matematycznych). Przy odpowiednich założeniach regularności funkcji $f : R^n \to R$, w otoczeniu punktu $a \in R^n$, zachodzi, jak wiadomo, relacja (dla „małych" $h \in R$)

$$f(a+h) = (T_n(f, a))(h) + o(h), \tag{30}$$

gdzie symbolem $T_n(f, a)$ oznaczono wielomian Taylora stopnia n funkcji f w otoczeniu punktu a. Z definicji

$$(T_n(f, a))(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(d^{(k)} f(a)\right)(h)}{k!}, \tag{31}$$

gdzie $d^{(k)} f(a)$ oznacza, oczywiście, różniczkę k-tego rzędu funkcji f w punkcie (a). Na przykład:

$$\left(d^2 f(a)(h)\right) = h \cdot H_f(a)h^T = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j \tag{32}$$

($H_f(a)$ jest hesjanem funkcji f w punkcie a).

Podobnie dla $n = 3$

$$H_f = \left(h_{ij}\right),\ h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., n.$$

$$\left(d^3 f(a)\right)(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(a)h_i\, h_j\, h_l. \tag{33}$$

W tym przypadku „macierz" formy jednorodnej (różniczkowej, stopnia trzeciego) jest macierzą trójwskaźnikową (kubiczną)

$$K_f = \left[k_{ijl}\right],\quad k_{ijl} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(a),\ i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., n;\ k = 1, ..., n. \tag{34}$$

13. Poniżej podamy szkic „jednego z nieskończenie wielu" zastosowań macierzowych modeli różniczkowych w zagadnieniach ekonomicznych – przykład z zakresu tzw. teorii awersji do ryzyka. Jest to koncepcja Kennetha J. Arrowa i Johna Pratta, wyrosła na gruncie rozważań dotyczących właściwej ewaluacji deterministycznych ekwiwalentów tzw. ryzykownych projektów losowych (np. w ubezpieczeniach czy finansach).

Dla podmiotu decyzyjnego (gospodarczego) o preferencjach reprezentowanych przez jednowymiarową kardynalną funkcję użyteczności (jądro całkowe $u(x)$, występujące w określeniu funkcjonału oczekiwanej użyteczności), premia π za podjęcie ryzyka Z (rzeczywista zmienna losowa), wyznaczana jest – *implicite* – z równania

$$u\left(x - \pi\right) = E\left[u\left(x + Z\right)\right], \tag{35}$$

gdzie x jest kapitałem początkowym podmiotu.

Porównanie rozwinięć Taylora obydwu stron równości (35) prowadzi do „ujawnienia" tzw. miary absolutnej niechęci do ryzyka (Arrowa-Pratta)

$$r_u = -\frac{u''}{u'}. \tag{36}$$

Jest to miara „lokalna” (dla zadanego kapitału x) – należałoby więc pisać $r_u(x)$, zapis (36) jest skrótowy.

Analogiczna „graficznie” procedura prowadzi w tzw. przypadku wielowymiarowym (Z jest wektorem losowym) do macierzy absolutnej awersji do ryzyka

$$\mathrm{R}_u = \left[\frac{-u_{ij}}{u_i}\right], \quad i, j = 1, ..., n. \tag{37}$$

Elementami tej macierzy są ilorazy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (funkcji u w punkcie $x = (x_1, ..., x_n)$ przez odpowiednie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Uogólnienie to jest rezultatem prac Kilhstroma-Duncana-Karniego (por. cytowana literatura)[1].

14. Na zakończenie tego fragmentu artykułu warto wspomnieć o ważnym i popularnym narzędziu matematycznym, które również pojawia się w kursach statystyki, ekonometrii i innych przedmiotów ilościowych. Jest nim tzw. macierz odległości, której podstawowym obszarem zastosowań są metody taksonomiczne. Jest to obiekt elementarny i klarowny intuicyjnie.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną (z metryką d). Rozważmy podzbiór $X^* = \{x_1, ..., x_n\} \subset X$. Macierzą odległości (wzajemnych) punktów zbioru X^* jest – po prostu – macierz

$$\mathrm{D} = \left[d_{ij}\right], \quad i, j = 1, ..., n, \tag{38}$$

gdzie $d_{ij} = (x_i, x_j)$ Oczywiście, jest to macierz symetryczna, której główna przekątna składa się z samych zer: $d_{ij} = d_{ji}$; $d_{ii} = 0$, $i = 1, ..., n$; $j = 1, \ldots, n$.

W kolejnym artykule opisane będą niektóre zastosowania macierzy w teorii gier, w rachunku prawdopodobieństwa, ekonomii matematycznej oraz w porównywaniu stopnia nierówności rozkładów dochodów w społeczeństwach lub dowolnej „masy” w zbiorach skończonych.

---

[1] Prezentowany artykuł ma z założenia charakter dydaktyczno-informacyjny. Wiele spostrzeżeń i przykładów należy do tzw. folkloru matematycznego lub *common knowledge* pewnych wyspecyfikowanych gałęzi matematyki „czystej” oraz modeli matematycznych (występujących głównie w ilościowych zagadnieniach ekonomicznych). W związku z tym autor czuje się zwolniony z obowiązku odwoływania się – na bieżąco, w tekście – do konkretnych pozycji literatury odnoszącej. W wielu przypadkach niezbędne informacje można w naturalny sposób odnaleźć się w cytowanej w końcowym fragmencie artykułu bibliografii. Wydaje się, że jest ona w miarę reprezentatywna – podane są w niej m.in. popularne (i sprawdzone w praktyce) podręczniki akademickie dla studentów ekonomii.

Literatura

Antoniewicz R., Misztal A. (2005). *Matematyka dla studentów ekonomii. Wykłady z ćwiczeniami*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

Arrow K.J. (1979). *Eseje z teorii ryzyka*. PWN. Warszawa.

Drabik E. (1998). *Elementy teorii gier dla ekonomistów*. Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku. Białystok.

Duncan G.T. (1977). *A Matrix Measure of Multivariate Local Risk Aversion*. „Econometrica". Vol. 45. Str. 895-903.

Everit B.S., Hand D.J. (1981). *Finite mixture Distributions*. Chapman and Hall. London.

Feller W. (1966). *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. T. 1. PWN. Warszawa.

Feller W. (1969). *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. T. 2. PWN. Warszawa.

Fisz M. (1967). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. PWN. Warszawa.

Goldberger A. (1972). *Teoria ekonometrii*. PWE. Warszawa.

Hellwig Z. (1969). *Problem optymalnego wyboru predykant*. „Przegląd Statystyczny". Nr 3-4.

Karni E. (1979). *On Multivariate Risk Aversion*, „Econometrica". Vol. 47. Str. 1391-1401.

Kilhstrom R.E., Mirman L.J. (1974). *Risk Aversion with Many Commodities*. „Journal of Economic Theory". Vol. 8. Str. 361-388.

Lange O. (1967). *Wstęp do ekonometrii*. PWN. Warszawa.

Leja F. (1963). *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN. Warszawa.

Malawski M., Wieczorek A., Sosnowska H. (1997). *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

Matłoka M. (2000). *Matematyka dla ekonomistów*. Wydawnictwo AE w Poznaniu. Poznań.

Pratt J. (1964). *Risk Aversion in the Small and in the Large*. „Econometrica". Vol. 32. Str. 315-335.

Rudin W. (1982). *Postawy analizy matematycznej*. PWN. Warszawa.

Rybicki W., Szulga A. (1987). *Mieszane procesy losowe*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 575. Wydawnictwo AE. Wrocław. Str. 25-39.

Smoluk A. (2007). *Podstawy algebry liniowej*. Wydawnictwo AE. Wrocław.

Smoluk A. (2007). *Podstawy analizy matematycznej*. Wydawnictwo AE. Wrocław.

Stiepanow W.W. (1964). *Równania różniczkowe*. PWN. Warszawa.

Stolarska E. (1979). *Algebra liniowa dla ekonometryków*. PWN. Warszawa.

Taylor E. (1991). *Historia rozwoju ekonomiki*. T. 1. Wydawnictwo „Delfin". Lublin.

Varian H.R. (2005). *Mikroekonomia. Kurs średni – ujęcie zaawansowane*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.