DIDACTICS
OF
MATHEMATICS

7(11)

The Publishing House
of the Wrocław University of Economics
Wrocław 2010

Editors
Janusz Łyko
Antoni Smoluk

Referee
Marian Matłoka
(Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu)

Proof reading
Agnieszka Flasińska

Setting
Elżbieta Szlachcic

Cover design
Robert Mazurczyk

Front cover painting: W. Tank, *Sower*
(private collection)

PL ISSN 1733-7941

Print run: 200 copies

TABLE OF CONTENTS

DIDACTICS OF MATHEMATICS

No. 7 (11) 2010

MATHEMATICA® NA USŁUGACH EKONOMII

Henryk Zawadzki

Abstract. Delay differential equations (DDEs) appeared in economic scientific papers in yearly thirties of the 20th century among others in works of R. Frisch, M. Kalecki and (slightly later) in works of J. Tinbergen and R.M. Goodwin. Some models considered in these works and some new models of this kind are sometimes presented on the lectures on mathematical economics. The purpose of this article is to present (on example of M. Kalecki's business cycle model) some capabilities of computer algebra system Mathematica® in solving of DDEs and graphic presentation of solutions.

Keywords: computer algebra systems, delay differentia equations, Kalecki's business cycle model, Mathematica®.

1. Równania różniczkowe z opóźnionym argumentem w ekonomii

Równania różniczkowe z opóźnionym argumentem, czyli równania postaci

$$\begin{aligned} &x'(t) = F(t, x(t), x(t-\theta_1), ..., x(t-\theta_n), x'(t-\tau_1), ..., x'(t-\tau_m)); \ t \ge t_0 \\ &x(t) = \varphi(t); \ t \le t_0 \end{aligned} \tag{1}$$

w których $\theta_i \ge 0,$ oraz $i = 1, \dots, n$ $\tau_j \ge 0,$ $j = 1, \dots, m$ są opóźnieniami[1], a ϕ jest tzw. funkcją początkową, pojawiły się w literaturze ekonomicznej w latach trzydziestych XX w. między innymi w pracach Frischa i Kaleckiego oraz nieco później w pracach Tinbergena oraz Goodwina. Od tamtej pory znacznie rozwinęła się zarówno teoria tego typu równań, jak i zakres ich zastosowań, w tym zastosowań w ekonomii (Bellen, Zennaro 2003; Balachandran i in. 2009; Erneux 2009; Krawiec, Szydłowski 1999; Szydłowski,

Henryk Zawadzki
Department of Mathematics, University of Economics in Katowice, ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, Poland.
e-mail: henryk.zawadzki@ue.katowice.pl

[1] Rozważa się również równania, w których opóźnienia θ oraz τ zależą od czasu t lub (oraz) stanu $x(t)$.

Krawiec 2004, 2005). Rozwój aplikacji stał się możliwy dzięki pojawieniu się programów komputerowych, zwanych systemami algebry komputerowej[2] (*Computer Algebra Systems*, *CAS*) umożliwiających otrzymanie numerycznych rozwiązań takich równań, a w niektórych przypadkach otrzymanie rozwiązań dokładnych, za pomocą metody kroków (metody kolejnego całkowania). W artykule pokażemy (na przykładzie modelu cyklu koniunkturalnego M. Kaleckiego) pewne możliwości systemu algebry komputerowej Mathematica w zakresie rozwiązywania równań różniczkowych z opóźnionym (stałym) argumentem oraz graficznej prezentacji tych rozwiązań.

2. Rozwiązywanie równań z opóźnionym argumentem za pomocą Mathematica®

Systemy algebry komputerowej są oprogramowaniem stworzonym przede wszystkim w celu manipulacji formułami matematycznymi i zautomatyzowania trudnych, niejednokrotnie nużących algebraicznych przekształceń. Pierwszy program komputerowy tego typu stworzył we wczesnych latach sześćdziesiątych XX w. M.J.G. Veltman (laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w 1999 r.). Program ten nazywał się SCHOONSCHIP i został stworzony jako narzędzie wspomagające prace zespołu fizyków[3]. Nowoczesne i ogólnodostępne systemy algebry komputerowej pojawiły się na początku lat osiemdziesiątych XX w. Nowa generacja CAS oprócz wykonywania obliczeń numerycznych i symbolicznych umożliwia również sporządzanie wyrafinowanej grafiki, edycję tekstów oraz tworzenie multimedialnych prezentacji. CAS zawierają także język programowania umożliwiający użytkownikom pisanie własnych procedur.

Dzisiaj CAS są nie tylko narzędziem służącym do wykonywania obliczeń naukowych i technicznych; zmieniły one również sposób nauczania matematyki oraz innych, ilościowych przedmiotów w wyższych uczelniach.

Do najbardziej znanych systemów algebry komputerowej ogólnego przeznaczenia (*general purpose CAS*) obecnych dzisiaj na rynku należą (w kolejności alfabetycznej): Maple, Mathcad, Mathematica oraz Matlab. Wydaje się, że dominującą pozycję na rynku edukacyjnym (przede wszystkim w USA) mają Maple oraz Mathematica.

[2] W literaturze można również spotkać nazwy: komputerowe systemy algebraiczne oraz komputerowe systemy obliczeń symbolicznych.

[3] Z doświadczeń Veltmana przy pracy nad SCHOONSCHIP korzystał m.in. S. Wolfram (twórca programu Mathematica), gdy w 1979 r. rozpoczynał pracę nad programem SMP – pierwszym nowoczesnym systemem algebry komputerowej.

2.1. Kilka zdań o Mathematica®

Twórcą programu Mathematica, a dokładniej – jego pierwszej wersji, która ukazała się 23 kwietnia 1988 r., jest Stephen Wolfram. Kolejne, udoskonalone wersje programu, pisane już przy współudziale licznego grona programistów oraz naukowców różnych specjalności i sprzedawane jako produkt firmy Wolfram Research Inc. z siedzibą w Champaign, IL, USA, stały się światowym standardem w dziedzinie obliczeń naukowych. Dla użytkowników programu organizowana jest co roku konferencja (obecnie pod nazwą Wolfram Technology Conference) stanowiąca forum wymiany doświadczeń między użytkownikami a pracownikami (programistami) z firmy Wolfram Research Inc.

Najnowszą wersją programu jest Mathematica 8.0.1. Kompletna dokumentacja programu jest dostępna na stronie producenta www.wolfram.com. W dokumentacji można m.in. znaleźć pełny opis wszystkich instrukcji programu, które pojawiają się w niniejszym tekście. Na tejże stronie można również znaleźć obszerną listę książek i publikacji poświęconych temu programowi i jego aplikacjom. Spośród książek wydanych w języku polskim godna polecenia jest pozycja Drwala i in. (2004).

2.2. Symulacja rozwiązań równania Kaleckiego za pomocą instrukcji NDSolve oraz Manipulate

W modelu koniunktury Kaleckiego[4] występują cztery powiązane ze sobą zmienne: dochód narodowy Y, inwestycje I, kapitał K, decyzje inwestycyjne B oraz parametry $a \in (0,1)$, $A > 0$, $\varepsilon > 0$ i $k > 0$. Zmienne Y, I, K, B powiązane są równaniami:

$$Y(t) = \frac{K(t+\theta) - K(t)}{\theta(1-c)}, \quad I(t) = \frac{K(t+\theta) - K(t)}{\theta}, \quad B(t) = K'(t+\theta), \tag{2}$$

w których $\theta > 0$ jest odstępem czasu między zamówieniem a dostawą dóbr (okresem realizacji inwestycji). Dynamika kapitału, a dokładnie dynamika odchylenia kapitału K od poziomu równowagi

$$\overline{K} = \frac{aA + \varepsilon}{k}$$

opisana jest równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem

$$K'(t) = \frac{a}{\theta} K(t) - \left(k + \frac{a}{\theta} \right) K(t-\theta). \tag{3}$$

[4] W wersji modelu opisanej m.in. w (Allen 1961; Gandolfo 1996).

Aby otrzymać przybliżone, numeryczne rozwiązanie powyższego równania (zwanego dalej równaniem Kaleckiego), można zastosować instrukcję **NDSolve**, a dokładniej **NDSolve[eqn,** ***y*****, {*****x*****,** $\boldsymbol{x_{min}}$**,** $\boldsymbol{x_{max}}$**}]**. Choć instrukcja ta jest służy przede wszystkim do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, można ją również zastosować do równań z opóźnionym argumentem. W przypadku równań różniczkowych zwyczajnych instrukcja **NDSolve** daje numeryczne rozwiązanie równania **eqn** ze względu na zmienną *y*, dla zmiennej niezależnej *x* zmieniającej się w przedziale $\{x_{\min}, x_{\max}\}$. Rozwiązanie to przedstawione jest za pomocą tzw. funkcji aproksymacji, jako obiekt typu **InterpolatingFunction**[5].

Rozwiążmy równanie Kaleckiego dla parametrów przybierających wartości

$$a = 0.05,\ \ A = 1,\ \ c = 0.5,\ \ \varepsilon = 1,\ \ k = 1,\ \ \theta = 1$$

oraz funkcji początkowej $\phi(t) = 1$, określonej w przedziale $(-\theta, 0)$.

Wprowadźmy powyższe wartości parametrów oraz funkcję początkową ϕ.

```
In[1]:= a := 0.05; A := 1; c := 0.5; ϵ := 1; k := 1; θ := 1; ϕ[t_] := 1
```

Oznaczmy rozwiązanie równania Kaleckiego przez „Kapitał” i znajdźmy je za pomocą **NDSolve**.

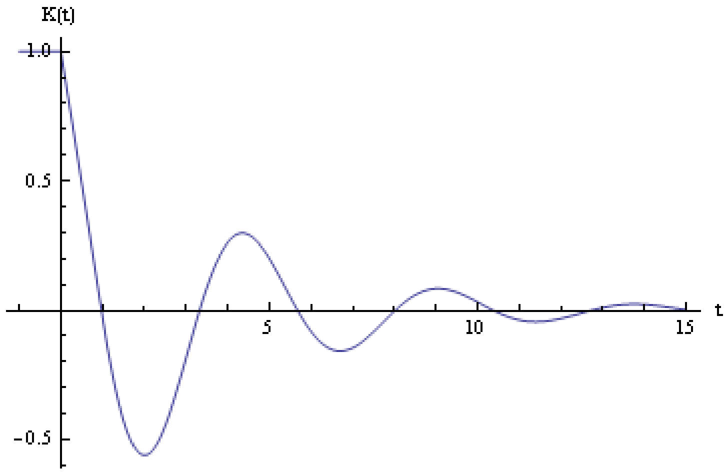
```
In[2]:= Kapitał = NDSolve[{K'[t] == a/θ * K[t] - (k + a/θ) * K[t - θ],
            K[t /; t ≤ 0] == ϕ[t]}, K, {t, -θ, 15}]

Out[2]= {{K → InterpolatingFunction[{{-1., 15.}}, <>]}}
```

Za pomocą instrukcji **Plot** narysujmy wykres otrzymanego rozwiązania, czyli krzywą całkową w przedziale $[-1, 15)$.

```
In[3]:= Plot[Evaluate[K[t] /. First[Kapitał]], {t, -θ, 15},
          PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "K(t)"}]
```

[5] Zob. Drwal i in. 2004, s. 238.

Out[3]=



Chcąc obliczyć wartość kapitału K dla dowolnej wartości $t \in [-1, 15)$ (na przykład $t = 10$), wystarczy zastosować instrukcję

```
In[4]:= Evaluate[K[t] /. First[Kapitał] /. {t → 10}]

Out[4]= 0.0317966
```

Korzystając z równań (2), możemy obliczyć wartość zmiennych Y, I oraz B dla dowolnego $t \in [-1, 15)$ i narysować, jak zmieniają się te zmienne w czasie.

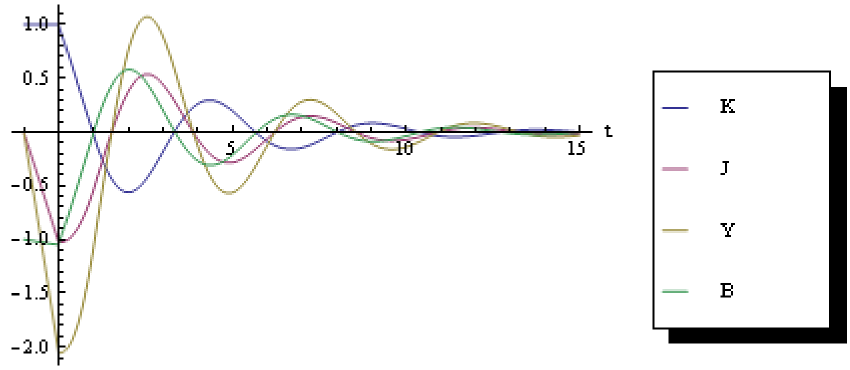
```
In[5]:= J[t_] := 1/θ (K[t + θ] - K[t]);
        Y[t_] := (K[t + θ] - K[t])/(θ * (1 - c));
        B[t_] := K'[t + θ];
```

Wczytanie pakietu **PlotLegends** za pomocą instrukcji **Needs** umożliwi dodanie do wykresu legendy.

```
In[8]:= Needs["PlotLegends`"]
```

```
In[9]:= Plot[{Evaluate[K[t] /. First[Kapitał]],
          Evaluate[J[t] /. First[Kapitał]],
          Evaluate[Y[t] /. First[Kapitał]],
          Evaluate[B[t] /. First[Kapitał]]},
         {t, -θ, 15}, PlotLegend → {"K", "J", "Y", "B"},
         LegendPosition → {1, -0.5}, PlotRange → All,
         AxesLabel → {"t", ""}]
```

Out[9]=



Instrukcja **Manipulate** umożliwia badanie wpływu, jaki na przebieg zmienności kapitału K (lub innej zmiennej) mają zmiany występujących w modelu Kaleckiego parametrów (np. a, k oraz θ) oraz funkcji początkowej ϕ. Poniżej, jako zakres zmienności parametru a wybrano przedział $[0, 1]$ (parametr zmienia się skokowo, co 0,05). Zakresem zmienności k jest przedział $[0, 5]$ (skok jednostkowy), a opóźnienie czasowe zmienia się od 0,5 do 5 ze skokiem 0,5. Przyjęto również, że funkcja początkowa może mieć jedną z następujących postaci

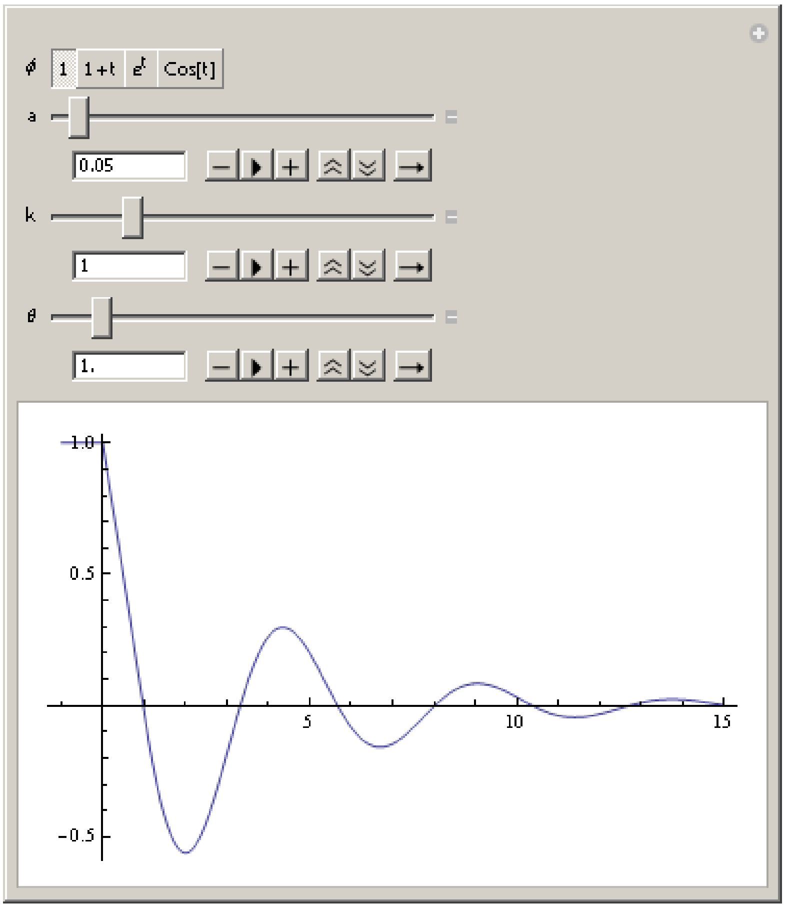
$$\phi(t) = 1, \quad \phi(t) = t + 1, \quad \phi(t) = \exp(t), \quad \phi(t) = \cos t.$$

Instrukcja **Clear** powoduje, że Mathematica „zapomina" o tym, jakie znaczenie miały i jakie wartości przybierały dotychczas a, k, θ oraz ϕ.

```
In[10]:= Clear[a]; Clear[k]; Clear[θ]; Clear[ϕ];
```

```
In[11]:= Manipulate[
  Module[{Kapitał = NDSolve[{K'[t] ==
        a/θ * K[t] - (k + a/θ) * K[t - θ], K[t /; t ≤ 0] == ϕ}
      , K, {t, -θ, 15}]}, Plot[Evaluate[K[t] /. First[Kapitał]],
    {t, -θ, 15}]], {ϕ, {1, t + 1, Exp[t], Cos[t]}},
  {a, 0, 1, 0.05}, {k, 0, 5, 1}, {θ, 0.5, 5, 0.5}]
```

Out[11]=



Zmieniając (za pomocą myszy) położenie widocznych na powyższym rysunku suwaków, można obserwować, jak zmienia się wykres kapitału K .

3. Uwagi końcowe

Przedstawiony w powyższym punkcie przykład zastosowania programu Mathematica jest bardzo prosty i ma charakter czysto ilustracyjny. W analogiczny sposób można jednak otrzymać numeryczne rozwiązania bardziej złożonych, nieliniowych równań różniczkowych z opóźnionym argumentem pojawiających się w teoriach wzrostu i cyklu gospodarczego, takich np. jak model Solowa

$$k'(t) = sf(k(t-\theta)) - \delta k(t-\theta),$$

(k – kapitał na jednostkę siły roboczej, f – neoklasyczna funkcja produkcji, $s \in (0, 1)$ – stopa oszczędności, $\delta > 0$ – stopa deprecjacji kapitału)
czy model Kaldora-Kaleckiego

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \alpha(I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))) \\ K'(t) &= I(Y(t-\theta), K(t)) - \delta K(t) \end{aligned}$$

w którym Y oznacza produkcję, K – kapitał, I – inwestycje, S – oszczędności, a $\alpha, \delta > 0$ są parametrami.

Literatura

Allen R.G.D. (1961). *Ekonomia matematyczna*. PWN. Warszawa.

Balachandran B., Kalmár-Nagy T., Gilsinn D.E. (Eds.) (2009). *Delay Differential Equations (Recent Advances and New Directions)*. Springer. New York.

Bellen A., Zennaro M. (2003). *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford Science Publications, Clarendon Press. Oxford.

Drwal G., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D. (2004). *Mathematica 5*. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego. Gliwice.

Erneux T. (2009). *Applied Delay Differentia Equations*. Springer. New York.

Gandolfo G. (1996). *Economic Dynamics*. Springer. New York.

Krawiec A., Szydłowski M. (1999). *The Kaldor-Kalecki business cycle model*. „Annals of Operations Research". Vol. 89. Str. 89-100.

Szydłowski M., Krawiec A. (2004). *A Note on Kaleckian Lags in the Solow Model*. „Review of Political Economy". Vol. 16. Str. 501-506.

Szydłowski M., Krawiec A. (2005). *The stability problem in the Kaldor-Kalecki business cycle model*. „Chaos, Solitons & Fractals". Vol. 25. Str. 299-305.