KOMERCYJNE UBEZPIECZENIE OD RYZYKA UTRATY PRACY – ANALIZA REZERWY SKŁADKI NETTO*

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

Joanna Dębicka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

1. Wprowadzenie

Zasiłki dla bezrobotnych zazwyczaj mają charakter okresowego świadczenia o ustalonej wysokości, dlatego w krajach zachodnich oprócz obowiązkowych ubezpieczeń od ryzyka utraty pracy (prowadzonych w ramach systemu zabezpieczeń socjalnych) istnieją dobrowolne ubezpieczenia. W artykule zaproponowano, aby w sposób podobny do zastosowanego w pracy J. Dębickiej i E. Mazurek [2008], określić ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy. Dlatego sposób wyznaczania składek (a w konsekwencji rezerw ubezpieczeniowych) jest analogiczny jak w ubezpieczeniach zdrowotnych i wypadkowych.

W ogólnym znaczeniu rezerwa to zatrzymana część wygospodarowanego przyrostu środków na pokrycie przewidywanych kosztów i strat. System finansowy ubezpieczeń przewiduje między innymi tworzenie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych, które są funduszem powstałym z nadwyżki składek netto nad sumą roszczeń w danym roku. Fundusz ten jest przeznaczony na pokrycie bieżących i przyszłych zobowiązań, jakie mogą wyniknąć z zawartych umów ubezpieczenia. Bez dokonywania bilansu między strumieniami składek i świadczeń w czasie trwania umowy ubezpieczenia ubezpieczyciel nie mógłby ustalić, czy właściwie wyznaczył składkę ubezpieczeniową w stosunku do przyjętego ryzyka (określonego sumą świadczeń), a zatem czy jest wypłacalny.

Ideę tworzenia **rezerwy składki netto** najprościej wyjaśnić na przykładzie ubezpieczeń, w których składka płacona jest sukcesywnie

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy nr 2293/B/H03/2009/36.

w jednakowej wysokości, podczas całego okresu ubezpieczenia. Mianowicie, wysokość składki jest ustalana w ten sposób, aby w początkowym okresie trwania ubezpieczenia następowała „nadpłata" pewnej części składki w stosunku do ubezpieczanego ryzyka. Powstaje wtedy zamierzona oszczędność, która w późniejszym okresie pozwala na opłacanie składki w niezmienionej wysokości, mimo że może wzrosnąć ryzyko wystąpienia zdarzenia ubezpieczeniowego objętego warunkami umowy. Zaoszczędzone i odkładane „nadpłaty" dodatkowo inwestowane przez ubezpieczyciela (jedynie w bezpieczne instrumenty finansowe) tworzą rezerwę na pokrycie świadczeń w przyszłości.

Celem artykułu jest analiza rezerw składki netto (a pośrednio także składek netto) komercyjnego ubezpieczenia od finansowych skutków utraty pracy. Ze względu na krótki okres ubezpieczenia (1 rok) obliczenia wykonane zostały przy założeniu stałej stopy procentowej. Analiza dokonana została na podstawie rzeczywistych danych, dotyczących osób zarejestrowanych w jednym z dolnośląskich miast.

W rozdziale 2 przedstawiona została koncepcja ubezpieczenia od bezrobocia, wprowadzono też model wielostanowy i jego probabilistyczną strukturę, określone dla komercyjnego ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy. Następnie w rozdziale 3 przedstawiono sposób liczenia składek i rezerw oparty na reprezentacji macierzowej uzyskanej w pracach [Dębicka 2006; Dębicka, *Macierzowa reprezentacja rezerw...*]. W rozdziale 4 dokonana została analiza wysokości składki ubezpieczeniowej oraz rezerw składki netto w przypadku indywidualnego ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy. Obliczenia numeryczne wykonano na podstawie danych dotyczących osób zarejestrowanych jako bezrobotne w 2004 r., zamieszkujących Jelenią Górę i powiat jeleniogórski[1].

[1] Pragnę podziękować Dyrekcji Powiatowego Urzędu Pracy w Jeleniej Górze za wyrażenie zgody na udostępnienie danych dotyczących osób zarejestrowanych jako bezrobotne w powiecie jeleniogórskim i Jeleniej Górze oraz Panu Erykowi Łukaszewiczowi za przygotowanie bazy umożliwiającej wykorzystanie danych zgodnie z ustawą o ochronie danych osobowych.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

2. Ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy

2.1. Ogólna koncepcja ubezpieczenia

Idea dobrowolnego ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy polega na tym, że osoba pracująca, chcąca dodatkowo (poza świadczeniami otrzymywanymi z Funduszu Pracy) zabezpieczyć się finansowo od skutków utraty pracy, może zawrzeć umowę z firmą ubezpieczeniową. W wyniku takiej umowy ubezpieczyciel, w zamian za otrzymywane składki, zobowiązuje się w okresie, kiedy ubezpieczony będzie bezrobotny, wypłacać miesięcznie ustalone kwoty osobie ubezpieczonej.

Ważnym punktem warunków ogólnych ubezpieczenia jest zdefiniowanie sytuacji, w jakiej następuje wypłata świadczenia ubezpieczeniowego. W artykule przyjęto, że ogólna koncepcja ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy polega na tym, że wobec osoby ubezpieczonej posiadającej status bezrobotnej ubezpieczyciel zobowiązany jest do wypłaty świadczenia do momentu ponownego podjęcia pracy przez ubezpieczonego, jednak nie dłużej niż do końca trwania okresu ubezpieczenia (por. [Dębicka, Mazurek 2008]).

Zakładamy, że wysokość świadczenia w ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy ustalana jest przez ubezpieczonego. Renta miesięczna może być równa miesięcznemu zarobkowi ubezpieczonego lub jego części. Ponadto wysokości świadczeń mogą się różnić w kolejnych miesiącach trwania bezrobocia (renta malejąca lub rosnąca), a ubezpieczony ma prawo do powtórnego świadczenia, jeżeli ponownie (w czasie trwania okresu ubezpieczenia) uzyska status bezrobotnego, niezależnie od tego, ile miesięcy trwała aktywność zawodowa między okresami braku zatrudnienia.

Ubezpieczony jest zobowiązany do opłaty składek. Częstotliwość opłaty składek zależy od warunków umowy ubezpieczenia. Rozpatrzone zostaną dwie możliwości. Składka jednorazowa płatna w momencie zawarcia ubezpieczenia i składka okresowa płacona w równych odstępach czasu podczas trwania umowy ubezpieczenia, gdy ubezpieczony jest zatrudniony.

Umowa ubezpieczenia zawierana jest na okres jednego roku (12 miesięcy). Po upływie tego czasu może być odnowiona.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 8(14)

2.2. Model wielostanowy i jego struktura probabilistyczna

W teorii ubezpieczeń wielostanowych (np. [Haberman, Pitacco 1999; Ostasiewicz 2004; Pitacco 1995]) każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy umowa ubezpieczenia (np. ubezpieczony stracił pracę), odpowiada stan, w jakim znalazł się ubezpieczony. Zbiór wszystkich N możliwych stanów nazywa się **przestrzenią stanów** i oznacza się przez $S=\{1, 2, ..., N\}$. Ponadto para (i, j), gdzie $i \neq j$ oraz $i, j \in S$, oznacza bezpośrednie przejście ze stanu i do stanu j, natomiast T jest **zbiorem** wszystkich możliwych **bezpośrednich przejść między stanami**. Wówczas para (S,T), opisująca wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w życiu ubezpieczonego w okresie objętym umową ubezpieczenia, nazywana jest **modelem wielostanowym**.

W ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy model wielostanowy jest postaci:

$$(S,T)=(\{1,2,3\},\{(1,2);(2,1);(1,3);(2,3)\}), \tag{1}$$

gdzie elementy przestrzeni stanów S określone są następująco:

1 – stan oznaczający, że ubezpieczony żyje i pracuje,
2 – stan oznaczający, że ubezpieczony żyje i nie pracuje,
3 – stan oznaczający śmierć ubezpieczonego.

Analogiczny opis takiego ubezpieczenia wraz z graficzną ilustracją przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi można znaleźć w literaturze [Dębicka 2006; Ostasiewicz 2002; Ostasiewicz 2004].

Przez $X(t)$ oznaczać będziemy stan polisy w chwili t trwania ubezpieczenia, gdzie t oznacza miesiąc trwania ubezpieczenia. Przyjmujemy, że $\{X(t): t=0, 1, 2, 3, ...\}$ jest dyskretnym procesem stochastycznym, dla którego zakładamy, że $X(0)=1$ (tzn. w momencie przystąpienia do ubezpieczenia ubezpieczony pracuje). Ponadto przyjmuje się, że $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym łańcuchem Markowa[2].

Jednak analizy czasu pozostawania bez pracy dowodzą, że szansa znalezienia zatrudnienia zależy od czasu utrzymywania się statusu

[2] Por. [Hoem 1969; Hoem 1988; Norberg 1991; Waters 1984; Wolthuis 1994a; Wolthuis 1994b].

bezrobotnego (por. [Belzil 2001; Mazurek 2000]). Dlatego przyjęcie modelu (1) prowadzi do znacznych uproszczeń. W praktyce okazuje się, że im dłużej bezrobotny nie może znaleźć pracy, tym jego szanse na zatrudnienie maleją. Problem uwzględnienia tej prawidłowości w analizie został rozwiązany[3] przez podzielenie stanu 2.

Ponieważ znalezienie pracy wiąże się z czasem utrzymywania statusu bezrobotnego, to prawdopodobieństwa przejścia procesu $\{X(t)\}$ zależą od czasu trwania stanu 2, i z tym stanem związane jest rozszerzenie przestrzeni stanów. Rozszerzona (14-elementowa) przestrzeń stanów S^R jest postaci:

$$S^R = \{1, 2^{(1)}, 2^{(2)}, \dots, 2^{(12)}, 3\}, \tag{2}$$

gdzie: $2^{(1)}$ – oznacza, że proces $\{X(t)\}$ jest w stanie $2 \in S$ i trwa w tym stanie 1. miesiąc,

$2^{(2)}$ – oznacza, że proces $\{X(t)\}$ jest w stanie $2 \in S$ i trwa w tym stanie 2. miesiąc,

...

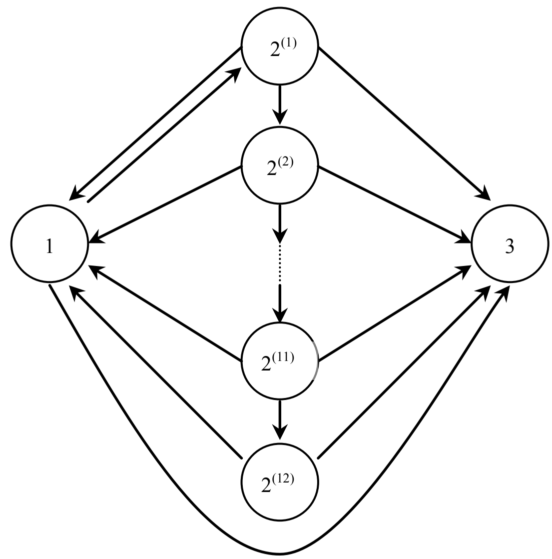
$2^{(12)}$ – oznacza, że proces $\{X(t)\}$ jest w stanie $2 \in S$ i trwa w tym stanie 12. miesiąc.

Zmianie ulega także zbiór T. Okazuje się, że w nowym zbiorze T^R dużo bezpośrednich przejść między stanami jest niemożliwych, np. jeżeli $\mathrm{P}_{1,2^{(1)}}(t,t+1) > 0$, wtedy $\mathrm{P}_{1,2^{(h)}}(t,t+1) = 0$ dla każdego $h = 2, 3, \dots, 12$ oraz $t \geq 0$. Jednocześnie jest to warunek tego, aby każdy ze stanów $2^{(h)}$ był dla procesu opisującego zmiany stanów osiągalny.

Z nową przestrzenią stanów związane jest zdefiniowanie nowego procesu $\{X^R(t)\}$, który przyjmuje wartości z rozszerzonej przestrzeni stanów S^R. O procesie $\{X^R(t)\}$ zakłada się, że jest łańcuchem Markowa.

[3] Idea takiego postępowania przedstawiona została w pracach [Amsler 1968; Haberman, Pitacco 1999; Pitacco 1995], a w stosunku do ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy w [Dębicka 2006; Dębicka, Mazurek 2007b].

Ilustracją rozszerzonej przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi dla ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy jest rys. 1.



Rys. 1. Schemat modelu wielostanowego (S^R, T^R) dla ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy

Źródło: [Dębicka, Mazurek 2008].

Podstawowymi wielkościami opisującymi ewolucję procesu $\left\{X^R(t)\right\}$ są rozkłady skończenie wymiarowe. Przy założeniu, że $\left\{X^R(t)\right\}$ jest niejednorodnym łańcuchem Markowa, do określenia jedno- i dwuwymiarowych rozkładów wystarczy znajomość wektora rozkładu początkowego $\mathbf{P}(0) = (1, 0, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^{1\times 14}$ oraz ciągu macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}(0), \mathbf{Q}(1), ..., \mathbf{Q}(11)$, gdzie $\mathbf{Q}(t) = \left(q_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{N}$, a $q_{ij}(k) = P(X(t+1) = j \mid X(t) = i)$. Dla danej chwili t macierz $\mathbf{Q}(t)$ w przypadku rozszerzonej przestrzeni stanów w ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy określona jest następująco:

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

$$\mathbf{Q}(t)=\begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12(1)}(t) & 0 & \cdots & 0 & q_{13}(t) \\ q_{2(1)_1}(t) & 0 & q_{2(1)_{2(2)}}(t) & \cdots & 0 & q_{2(1)_3}(t) \\ q_{2(2)_1}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_{2(2)_3}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{2(11)_1}(t) & 0 & 0 & \cdots & q_{2(11)_{2(12)}}(t) & q_{2(11)_3}(t) \\ q_{2(12)_1}(t) & 0 & 0 & \cdots & q_{2(12)_{2(12)}}(t) & q_{2(12)_3}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Zakładamy, że w jednej jednostce czasu proces $\{X^R(t)\}$ może zmienić stan tylko jeden raz (może zajść tylko jedno zdarzenie losowe).

2.3. Przepływy pieniężne

W wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia powstają dwa strumienie przepływów pieniężnych, których wysokość i moment wypłaty określają warunki umowy ubezpieczenia. Strumień składek skierowany jest od ubezpieczonego do ubezpieczyciela. Natomiast strumień świadczeń ubezpieczeniowych (np. sumy ubezpieczenia wypłacane w wyniku śmierci lub dożycia oraz różnego typu renty) skierowany jest od ubezpieczyciela do ubezpieczonego.

W wyniku realizacji umowy ubezpieczenia wielostanowego mogą pojawić się następujące typy przepływów pieniężnych [Haberman, Pitacco 1999; Ostasiewicz 2004]:

$p_j(t)$ – składka płacona w momencie *t*, gdy $X^R(t)=j$,

$\pi_j(t)$ – jednorazowa składka płacona w ustalonym momencie *t*, gdy $X^R(t)=j$,

$b_j(t)$ – renta płacona w momencie *t*, gdy $X^R(t)=j$,

$d_j(t)$ – jednorazowe świadczenie płacone w ustalonym momencie *t*, gdy $X^R(t)=j$,

$c_{ij}(t)$ – jednorazowe świadczenie płacone w chwili t, gdy $X^R(t) = j$, a $X^R(t-1) = i$.

Strumień składek tworzą przepływy pieniężne typu $p_j(t)$ oraz $\pi_j(t)$. Natomiast strumień świadczeń tworzą przepływy pieniężne typu $b_j(t)$, $d_j(t)$, $c_{ij}(t)$. Rodzaj przepływów pieniężnych określonych w warunkach umowy ubezpieczenia determinuje wysokość składek, a w rezultacie określa także rezerwy ubezpieczeniowe, które musi zgromadzić ubezpieczyciel, aby móc zabezpieczyć wypłatę świadczeń.

Poniżej scharakteryzowane zostały przykłady ubezpieczeń od ryzyka utraty pracy (RUP), różniące się rodzajem świadczeń ubezpieczeniowych, dla których model wielostanowy dany jest przez (1). Przykłady tych ubezpieczeń zostały poddane analizie numerycznej w następnych rozdziałach.

Przykład 1 (RUP – renta stała)

Rozważmy 12-miesięczne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy, w którym to ubezpieczeniu renta w stałej wysokości b płacona jest w okresie bezrobocia przez cały czas jego trwania, jednak nie dłużej niż do końca okresu ubezpieczenia.

W opisanym ubezpieczeniu strumień świadczeń określony jest następująco $\left(j \in \{1, 2^{(1)}, ..., 2^{(12)}, 3\},\ t = 0, 1, 2, ..., 12\right)$:

$$b_j(t) = \begin{cases} b & \text{dla} \quad j = 2^{(k)} \ \text{ oraz } \ k \le t \le 12 \ \text{ i } \ k \in \{1, 2, ..., 12\} \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

$$d_j(t) = 0,$$

$$c_{ij}(t) = 0,$$

Przykład 2 (RUP – renta malejąca)

Rozważmy takie 12-miesięczne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy, w którym renta płacona jest w czasie bezrobocia przez cały okres jego trwania, jednak nie dłużej niż do końca okresu ubezpieczenia. Ponieważ okazuje się, że największą intensywnością poszukiwania nowej pracy wykazują się osoby bezrobotne w początkowym okresie bezrobocia, to aby wzmocnić ten efekt, przyjęto, że wysokość renty maleje wraz z czasem pozostawania na bezrobociu tzn. wysokość renty zależy od stanu, w którym znajduje się proces $\{X^R(t)\}$ w danym momencie. Oznacza to, że strumień świadczeń określony jest następująco $\left(j \in \{1, 2^{(1)}, ..., 2^{(12)}, 3\}, t = 0, 1, 2, ..., 12\right)$:

$$\begin{aligned} b_j(t) &= \begin{cases} b_j & \text{dla} \quad j = 2^{(k)} \text{ oraz } k \le t \le 12 \text{ i } k \in \{1, 2, ..., 12\} \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases} \\ d_j(t) &= 0, \\ c_{ij}(t) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $b_{2^{(1)}} \ge b_{2^{(2)}} \ge ... \ge b_{2^{(12)}} > 0$.

Przykład 3 (RUP – renta + świadczenie na przekwalifikowanie)

Rozważmy takie 12-miesięczne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy, w którym malejąca renta płacona jest w czasie bezrobocia przez cały okres jego trwania, jednak nie dłużej niż do końca okresu ubezpieczenia. Dodatkowo ubezpieczony w momencie utraty pracy otrzymuje świadczenie jednorazowe przeznaczone na przekwalifikowanie się (zmianę zawodu lub założenie własnej firmy). Wysokość tego świadczenia może zależeć od momentu, w którym ubezpieczony stracił pracę. Dla takich warunków ubezpieczenia strumień świadczeń określony jest następująco $\left(j \in \{1, 2^{(1)}, ..., 2^{(12)}, 3\}, t = 0, 1, 2, ..., 12\right)$:

$$\begin{aligned} b_j(t) &= \begin{cases} b_j & \text{dla} \quad j = 2^{(k)} \text{ oraz } k \le t \le 12 \text{ i } k \in \{1, 2, ..., 12\} \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases} \\ d_j(t) &= 0, \\ c_{ij}(t) &= \begin{cases} c(t) & \text{dla} \quad i = 1, j = 2^{(1)} \text{ oraz } 1 \le t \le 12 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \end{aligned}$$

We wszystkich trzech przykładach strumień składek określony jest w zależności od przyjętej formy opłaty składek. Przyjmijmy, że składka płacona jest jednorazowo na początku ubezpieczenia. Oznacza to, że strumień składek składa się z następujących przepływów pieniężnych $\left(j \in \left\{1, 2^{(1)}, ..., 2^{(12)}, 3\right\},\ t = 0, 1, 2, ..., 12\right)$:

$$p_j(t) = 0,$$
$$\pi_j(t) = \begin{cases} \pi & \text{dla} \quad j = 1 \text{ oraz } t = 0 \\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym.} \end{cases}$$

Jeżeli za ubezpieczenie płacona jest składka okresowa o stałej wysokości (przez pierwszych m miesięcy trwania okresu ubezpieczenia; $0 < m \leq n$), to wówczas strumień składek tworzą przepływy pieniężne postaci $\left(j \in \left\{1, 2^{(1)}, ..., 2^{(12)}, 3\right\},\ t = 0, 1, 2, ..., 12\right)$:

$$p_j(t) = \begin{cases} p & \text{dla} \quad j = 1 \text{ oraz } 0 \leq t \leq m-1 \\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym,} \end{cases} .$$
$$\pi_j(t) = 0.$$

3. Rezerwy prospektywne netto

3.1. Notacja macierzowa

Do obliczenia składek i rezerw ubezpieczeniowych netto w ubezpieczeniach od ryzyka utraty pracy wykorzystana zostanie macierzowa reprezentacja modelu ubezpieczenia wielostanowego[4], której zastosowanie stało się możliwe, gdyż opisane w przykładach 1-3 ubezpieczenia spełniają wymagane założenia (tzn. mamy, że $\left(S^R, T^R\right) = \left(S^*, T^*\right)$, $N = N^* = 14$, $\left\{X^R(t)\right\} \equiv \left\{X^*(t)\right\}$, gdzie $\left(S^*, T^*\right)$ jest takim rozbudowanym modelem wielostanowym o N^*-elementowej przestrzeni sta-

[4] Wprowadzona w pracach [Dębicka 2006; Dębicka, *Macierzowa reprezentacja rezerw*...].

nów, którego ewolucja w czasie trwania okresu ubezpieczenia modelowana jest przez proces $\left\{X^*(t)\right\}$).

Wprowadźmy oznaczenia niezbędne do przedstawienia składek i rezerw w formie macierzowej.

W pierwszej kolejności zdefiniowane zostaną wektory i macierze pomocnicze. Niech $\mathbf{S}=(1,1,...,1)^T \in R^{n+1}$. Ponadto dla każdego $t=1,2,...,n+1$ niech $\mathbf{I}_t=\Big(0,...,0,\underset{t}{1},0,...,0\Big)^T \in R^{n+1}$, a dla każdego $i=1,2,...,N^*$ niech dany będzie wektor $\mathbf{J}_i=\Big(0,...,0,\underset{i}{1},0,...,0\Big)^T \in R^{N^*}$. Natomiast dla dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ macierz $Diag(\mathbf{A})$ jest macierzą diagonalną, której elementami przekątnej są elementy przekątnej macierzy $\mathbf{A}$

$$Diag(\mathbf{A})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dla dowolnej chwili t niech dany będzie wektor $\mathbf{P}(t)=(\mathrm{P}_1(t),\mathrm{P}_2(t),...,\mathrm{P}_{N^*}(t))^T$ prawdopodobieństw bycia procesu $\left\{X^*(t)\right\}$ w określonym stanie, gdzie $\mathrm{P}_i(t)=\mathrm{P}\left(X(t)=i\right)$. Ponadto niech

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} \mathbf{P}^T(0) \\ \mathbf{P}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}^T(n) \end{pmatrix} \in R^{(n+1)\times N^*}.$$

Przy założeniu, że proces $\left\{X^*(t)\right\}$ jest niejednorodnym łańcuchem Markowa, macierz $\mathbf{P}(t)$ można wyrazić za pomocą wektora rozkładu

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 8(14)

początkowego $\mathbf{P}(0)=(1,0,0,...,0)^T \in R^{N^*}$ oraz ciągu macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}^*(0),\mathbf{Q}^*(1),...,\mathbf{Q}^*(n-1)$ określonych dla procesu $\{X^*(t)\}$ w następujący sposób (por. [Dębicka 2006]):

$$\mathbf{P}^T(t)=\mathbf{P}^T(0)\prod_{k=0}^{t-1}\mathbf{Q}^*(k).$$

Ze stopą procentową związana jest macierz $\mathbf{\Lambda}=\left(\lambda_{t_1t_2}\right)_{t_1,t_2=0}^{n}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, której elementy zawierają czynniki dyskontujące $\upsilon(t_1,t_2)$ i akumulujące $r(t_1,t_2)$. Ponieważ ubezpieczenie jest krótkoterminowe (trwa jeden rok) przyjmijmy, że stopa procentowa jest stała w trakcie całego okresu ubezpieczenia, a wtedy macierz $\mathbf{\Lambda}$ jest następująca:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & \upsilon & \upsilon^2 & \upsilon^3 & \cdots & \upsilon^n \\ \upsilon^{-1} & 1 & \upsilon & \upsilon^2 & \cdots & \upsilon^{n-1} \\ \upsilon^{-2} & \upsilon^{-1} & 1 & \upsilon & \cdots & \upsilon^{n-2} \\ \upsilon^{-3} & \upsilon^{-2} & \upsilon^{-1} & 1 & \cdots & \upsilon^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \upsilon^{-n} & \upsilon^{-(n-1)} & \upsilon^{-(n-2)} & \upsilon^{-(n-3)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Przepływy pieniężne tworzą następującą macierz przepływów pieniężnych:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} cf_1^*(0) & cf_2^*(0) & \cdots & cf_{N^*}^*(0) \\ cf_1^*(1) & cf_2^*(1) & \cdots & cf_{N^*}^*(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cf_1^*(n) & cf_2^*(n) & \cdots & cf_{N^*}^*(n) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times N^*}. \tag{5}$$

Z finansowego punktu widzenia każdy przepływ pieniężny jest sumą wpływów (*inflows*) reprezentujących wpłaty, które zasilają dany fundusz, oraz wydatków (*outgo*), które pomniejszają dany fundusz. Dlatego też $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{in} + \mathbf{C}_{out}$, gdzie macierz $\mathbf{C}_{in} = \left(cf_j^{in}(t) \right) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times N^*}$ zawiera jedynie wpływy do danego funduszu, natomiast $\mathbf{C}_{out} = \left(cf_j^{out}(t) \right) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times N^*}$ zawiera jedynie wydatki pomniejszające dany fundusz. Zauważmy, że dla funduszu strat ubezpieczyciela mamy, że

$$\begin{aligned} cf_j^{in}(t) &= b_j(t) + d_j(t) + c_j(t), \\ cf_j^{out}(t) &= -(p_j(t) + \pi_j(t)). \end{aligned}$$

Niech $\mathbf{V}(t) = (V_1(t), V_2(t), ..., V_{N^*}(t))^T$ będzie wektorem rezerw prospektywnych w ustalonym momencie t dla wszystkich stanów przestrzeni stanów S^*. Wtedy $\mathbf{V}$, macierz rezerw prospektywnych określonych w całym okresie ubezpieczenia, jest postaci:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T(0) \\ \mathbf{V}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}^T(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times N^*}. \tag{6}$$

Ponieważ przedmiotem analizy jest rezerwa składki netto, to interesować nas będzie jedynie pierwsza kolumna macierzy $\mathbf{V}$, czyli

$$\mathbf{V}\mathbf{J}_1 = (V_1(0), V_1(1), ..., V_1(n))^T. \tag{7}$$

Wprowadzone w podrozdziale 3.1 macierze służą do przedstawienia wektora $\mathbf{V}(t)$ w formie macierzowej.

3.2. Macierzowa reprezentacja składek i rezerw

Pierwszym krokiem do wyznaczenia rezerw jest określenie wysokości składki ubezpieczeniowej.

Dla ubezpieczenia wielostanowego jednorazowa składka netto płatna z góry na początku okresu ubezpieczenia spełnia następujące równanie:

$$\pi_1(0) = \mathbf{S}^T Diag\left(\mathbf{C}_{in} \mathbf{D}^T \right) \mathbf{\Lambda} \mathbf{I}_1. \tag{8}$$

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 8(14)

Natomiast stała składka netto płatna przez pierwszych m jednostek czasu, na jakie został podzielony okres ubezpieczenia ($m \leq n$), spełnia następujące równanie:

$$p = \frac{\mathbf{S}^T Diag\left(\mathbf{C}_{in}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{\Lambda I}_1}{\mathbf{I}_1^T \mathbf{\Lambda}^T \left[\mathbf{I} - \sum_{k=m}^{n} \mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T\right]\mathbf{DI}_1}. \tag{9}$$

Wyznaczenie składek ubezpieczeniowych umożliwia określenie macierzy $\mathbf{C}_{out}$, a wtedy dla ubezpieczenia wielostanowego wektor rezerw prospektywnych w ustalonym momencie t trwania okresu ubezpieczenia jest następującej postaci[5]:

$$\mathbf{V}(t) = \left(\mathbf{C}_{out}^T + \sum_{k=t+1}^{n} \prod_{u=t}^{k-1} \mathbf{Q}^*(u)\mathbf{C}^T \mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T \mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{I}_{t+1}. \tag{10}$$

Reprezentacja macierzowa wzorów na rezerwy i składki znacznie ułatwia obliczenia numeryczne. Zauważmy, że w celu wyznaczenia macierzy (6) dla przykładów 1-3 w przypadku konkretnej osoby wystarczy raz określić macierze $\mathbf{Q}^*(0), \mathbf{Q}^*(1), ..., \mathbf{Q}^*(n-1), \mathbf{D}, \mathbf{\Lambda}$, a następnie w zależności od przykładu macierz $\mathbf{C}_{in}$. Wtedy można wyznaczyć składkę – jednorazową ze wzoru (8) lub okresową ze wzoru (9) – oraz określić macierz $\mathbf{C}_{out}$. Następnie w celu wyznaczenia rezerw w momencie t trwania okresu ubezpieczenia określone macierze podstawia się do wzoru (10).

Macierzowa reprezentacja składek i rezerw została wykorzystana w rozdziale 4 do obliczenia tych wielkości dla przykładów 1-3.

4. Analiza wysokości rezerw składki netto

4.1. Opis danych i stosowanych macierzy

Na potrzeby tego podrozdziału dokonano obliczeń w celu zbadania zależności wysokości rezerw składki netto od możliwych cech opisu-

[5] Dowody wzorów (8) i (9) znajdują się w pracy [Dębicka 2006]. Natomiast dowód (10) znajduje się w pracy [Dębicka, *Macierzowa reprezentacja rezerw*…].

jących potencjalnych ubezpieczonych. Ze względu na obszerny materiał w artykule zamieszczone zostały tylko najbardziej interesujące przykłady, które obrazują pewne zależności.

Analizie poddano osoby w wieku 20-60 lat, posiadające prawo do zasiłku dla bezrobotnych (tylko te osoby mogą wykupić komercyjne ubezpieczenie). Ponadto badana kohorta charakteryzowana jest przez następujące cechy: płeć (mężczyzna, kobieta), znajomość języków obcych, miejsce zamieszkania (miasto, wieś), wykształcenie (podstawowe, zawodowe, średnie, wyższe), liczbę dzieci (co najwyżej dwoje, minimum troje), stan zdrowia (inwalida bądź nie), sekcję zatrudnienia (według PKD). Cechy te były brane pod uwagę przy określaniu prawdopodobieństw w macierzy $\mathbf{Q}(t)$ danej wzorem (3)[6]. W przykładach wykorzystane zostały prawdopodobieństwa znalezienia pracy oszacowane na podstawie danych dotyczących osób bezrobotnych zamieszkujących w Jeleniej Górze i powiecie jeleniogórskim w 2004 roku. Natomiast prawdopodobieństwa straty pracy wyznaczono w oparciu o dane z rocznika statystycznego z 2004 r. ze względu na klasyfikację wykonywanego zawodu. Do analizy wybrana została sekcja M – edukacja (według PKD). Obliczeń dokonano dla ubezpieczeń scharakteryzowanych w przykładach 1-3. Ponadto przyjęto, że składki obliczane są dla ubezpieczeń zawartych w styczniu 2004 roku.

W celu wyznaczenia macierzy $\mathbf{\Lambda}$ danej wzorem (4) przyjęto, że miesięczna stopa procentowa $\mathbf{i}$ (w trakcie całego okresu ubezpieczenia) jest stała, a wtedy $\upsilon(k) = \upsilon^k = (1+\mathbf{i})^{-k}$. W przykładach numerycznych przyjęto, że $\mathbf{i} = 0{,}003274$. Daje to roczną stopę procentową w wysokości 4%; macierz $\mathbf{\Lambda}$ ma wtedy następującą postać:

[6] Pragnę podziękować dr Edycie Mazurek, gdyż wyznaczenie macierzy $\mathbf{Q}(t)$ w tej pracy było możliwe dzięki analizie danych rzeczywistych, przeprowadzonej przez E. Mazurek przy powstawaniu artykułów [Dębicka, Mazurek 2007b; Dębicka, Mazurek 2008].

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}
1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016 & 1{,}020 & 1{,}023 & 1{,}026 & 1{,}030 & 1{,}033 & 1{,}037 & 1{,}040\\
0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016 & 1{,}020 & 1{,}023 & 1{,}026 & 1{,}030 & 1{,}033 & 1{,}037\\
0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016 & 1{,}020 & 1{,}023 & 1{,}026 & 1{,}030 & 1{,}033\\
0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016 & 1{,}020 & 1{,}023 & 1{,}026 & 1{,}030\\
0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016 & 1{,}020 & 1{,}023 & 1{,}026\\
0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016 & 1{,}020 & 1{,}023\\
0{,}981 & 0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016 & 1{,}020\\
0{,}977 & 0{,}981 & 0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013 & 1{,}016\\
0{,}974 & 0{,}977 & 0{,}981 & 0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010 & 1{,}013\\
0{,}971 & 0{,}974 & 0{,}977 & 0{,}981 & 0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007 & 1{,}010\\
0{,}968 & 0{,}971 & 0{,}974 & 0{,}977 & 0{,}981 & 0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003 & 1{,}007\\
0{,}965 & 0{,}968 & 0{,}971 & 0{,}974 & 0{,}977 & 0{,}981 & 0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1 & 1{,}003\\
0{,}962 & 0{,}965 & 0{,}968 & 0{,}971 & 0{,}974 & 0{,}977 & 0{,}981 & 0{,}984 & 0{,}987 & 0{,}990 & 0{,}993 & 0{,}997 & 1
\end{pmatrix}.$$

Postacie macierzy $\mathbf{C}_{in}$, dla przykładów 1-3 oznaczone zostały odpowiednio $\mathbf{C}_{in}^{1}$, $\mathbf{C}_{in}^{2}$, $\mathbf{C}_{in}^{3}$, a ich postać przedstawiona została poniżej.

Przykład 1 (RUP – renta stała) – obliczenia numeryczne

Do analizy numerycznej przyjęto, że przez cały czas pozostawania na bezrobociu ubezpieczony będzie otrzymywał rentę jednostkową. Oznacza to, że

$$b_j(t)=\begin{cases}
1 & \text{dla} \quad j=2^{(1)} \text{ i } 1\le t\le 12 \text{ oraz}\\
 & \phantom{\text{dla}} \quad j=2^{(2)} \text{ i } 2\le t\le 12 \text{ oraz}\\
 & \phantom{\text{dla}} \quad \vdots\\
 & \phantom{\text{dla}} \quad j=2^{(9)} \text{ i } 9\le t\le 12 \text{ oraz}\\
 & \phantom{\text{dla}} \quad j=2^{(10)} \text{ i } 10\le t\le 12 \text{ oraz}\\
 & \phantom{\text{dla}} \quad j=2^{(11)} \text{ i } 11\le t\le 12 \text{ oraz}\\
 & \phantom{\text{dla}} \quad j=2^{(12)} \text{ i } t=12\\
0 & \text{poza} \quad \text{tym,}
\end{cases}$$

natomiast macierz przepływów pieniężnych jest postaci:

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

$$C_{in}^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & b & \cdots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & \cdots & b & b & 0 & 0 \\ 0 & b & b & \cdots & b & b & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{13\times 14}.$$

Przykład 2 (RUP – renta malejąca) – obliczenia numeryczne

Do analizy numerycznej przyjęto, że renta maleje co miesiąc o 0,1, począwszy od pierwszej wypłaconej renty w wysokości 1 jednostki. Jeżeli ubezpieczenie trwa 10, 11, 12 miesięcy, to wtedy renta jest równa 0,1. Oznacza to, że

$$b_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad j = 2^{(1)} \text{ i } 1 \le t \le 12 \\ 0{,}9 & \text{dla} \quad j = 2^{(2)} \text{ i } 2 \le t \le 12 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0{,}2 & \text{dla} \quad j = 2^{(9)} \text{ i } 9 \le t \le 12 \\ 0{,}1 & \text{dla} \quad j = 2^{(10)} \text{ i } 10 \le t \le 12 \\ 0{,}1 & \text{dla} \quad j = 2^{(11)} \text{ i } 11 \le t \le 12 \\ 0{,}1 & \text{dla} \quad j = 2^{(12)} \text{ i } t = 12 \\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym,} \end{cases}$$

natomiast macierz przepływów pieniężnych jest postaci:

$$\mathbf{C}_{in}^{2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{10} & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{10} & b_{11} & 0 & 0\\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{10} & b_{11} & b_{12} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0,9 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & 0,9 & \cdots & 0,1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0,9 & \cdots & 0,1 & 0,1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0,9 & \cdots & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}\in R^{13\times 14}.$$

Przykład 3 (RUP – renta + świadczenie na przekwalifikowanie)
– obliczenia numeryczne

Do analizy numerycznej przyjęto rentę malejąca, taką jak opisana w przykładzie 2. Natomiast wartość świadczenia jednostkowego określono na poziomie 10 jednostek. Oznacza to, że

$$b_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad j=2^{(1)} \ \text{oraz} \ 1\le t\le 12\\ 0,9 & \text{dla} \quad j=2^{(2)} \ \text{oraz} \ 2\le t\le 12\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots\\ 0,2 & \text{dla} \quad j=2^{(9)} \ \text{oraz} \ 9\le t\le 12\\ 0,1 & \text{dla} \quad j=2^{(10)} \ \text{oraz} \ 10\le t\le 12\\ 0,1 & \text{dla} \quad j=2^{(11)} \ \text{oraz} \ 11\le t\le 12\\ 0,1 & \text{dla} \quad j=2^{(12)} \ \text{oraz} \ 10\le t\le 12\\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} 10 & \text{dla} \quad i=1, j=2^{(1)} \ \text{oraz} \ 1\le t\le 12\\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Dla tak określonego strumienia świadczeń macierz przepływów pieniężnych jest następującej postaci:

$$\mathbf{C}_{in}^{3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1+c(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1+c(2) & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & b_1+c(10) & b_2 & \cdots & b_{10} & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1+c(11) & b_2 & \cdots & b_{10} & b_{11} & 0 & 0\\ 0 & b_1+c(12) & b_2 & \cdots & b_{10} & b_{11} & b_{12} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0{,}9 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 11 & 0{,}9 & \cdots & 0{,}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0{,}9 & \cdots & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0{,}9 & \cdots & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0\end{pmatrix}\in R^{13\times 14}.$$

Postać macierzy przepływów pieniężnych dla strumienia składek zależy od formy składek. Jeżeli składka płacona jest jednorazowo na początku ubezpieczenia, to dla ubezpieczeń z przykładów 1-3 mamy, że

$$\mathbf{C}_{out}=\begin{pmatrix}-\pi(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in R^{13\times 14},$$

gdzie wielkość π dla danego ubezpieczenia jest liczona ze wzoru (8).

Jeżeli za ubezpieczenie płacona jest składka okresowa o stałej wysokości (przez cały okres ubezpieczenia), to dla ubezpieczeń z przykładów 1-3 mamy, że

$$\mathbf{C}_{out}=\begin{pmatrix}-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in R^{13\times 14},$$

gdzie wielkość p dla danego ubezpieczenia jest liczona ze wzoru (9).

4.2. Zakres wysokości rezerw składki netto

Z badań (np. [Belzil 2001; Dębicka, Mazurek 2007b; Mazurek 2000]) wynika, że ryzyko utraty pracy i szansa ponownego znalezienia zatrudnienia zależy nie tylko od wykonywanego zawodu, ale także od innych cech charakteryzujących ubezpieczonego, takich jak: wiek, płeć, wykształcenie, liczba dzieci na utrzymaniu itp. Z innych badań [Dębicka, Mazurek 2008] wynika, że wpływ badanych cech na wysokość składki jest bardzo zróżnicowany i niejednorodny, np. ustalona cecha może mieć odmienny wpływ na wysokość składki w dwóch grupach zatrudnionych w różnych sekcjach PKD. Badania wykazały, że pomijając wiek, płeć oraz sekcję PKD, na najniższą i najwyższą składkę mogłyby liczyć osoby o określonych cechach. W tabeli 1 cechy te zostały opisane dla roku 2004 (w którym zostały zawarte hipotetyczne ubezpieczenia). Ponieważ cechy określające osobę, dla której składka jest minimalna bądź maksymalna, nie odpowiadają wyobrażeniom o typowym nauczycielu akademickim, dlatego do analizy wybrano pośredni zespół cech charakteryzujący **typowego nauczyciela**. Zauważmy, że zespół cech zawiera po 2 cechy charakteryzujące osoby o najniższej i najwyższej składce i jedynie cecha określająca wykształcenie nie odpowiada wykształceniu osoby o najniższej bądź najwyższej składce.

Tabela 1. Cechy charakteryzujące ubezpieczonych z najniższą i najwyższą składką w 2004 roku

Cechy ubezpieczonego	Składka minimalna	Typowy nauczyciel	Składka maksymalna
Znajomość języka obcego	nie zna żadnego	zna co najmniej jeden	zna co najmniej jeden
Miejsce zamieszkania	miasto	miasto	wieś
Wykształcenie	średnie	wyższe	zawodowe
Liczba dzieci	0-2	0-2	3 i więcej
Inwalida	tak	nie	nie

Źródło: na podstawie [Dębicka, Mazurek 2008].

W tabeli 2 przedstawiony został (odpowiednio dla kobiet i mężczyzn) możliwy zakres składek jednorazowych i okresowych płatnych przez cały czas trwania okresu ubezpieczenia (dla $m = n = 12$) dla osób w wieku 30 i 50 lat z podziałem na typy ubezpie-

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

czeń opisanych w przykładach 1-3. Okazuje się, że niezależnie od wieku, płci i typu ubezpieczenia składka obliczona dla kobiety jest prawie trzy razy wyższa niż składka obliczona dla mężczyzny. Najniższymi składkami charakteryzują się ubezpieczenia z przykładu 2 (gdyż tam są najniższe świadczenia), a najwyższymi ubezpieczenia z przykładu 3 (ze względu na relatywnie wysokie świadczenia).

Tabela 2. Możliwy zakres wysokości składek jednorazowych i okresowych

Rok 2004		Składka minimalna					
		okresowa			jednorazowa		
Wiek wstępu	płeć	przykład 1	przykład 2	przykład 3	przykład 1	przykład 2	przykład 3
30	K	0,0185	0,0141	0,0642	0,2143	0,1630	0,7445
	M	0,0063	0,0049	0,0237	0,0741	0,0579	0,2771
50	K	0,0216	0,0158	0,0659	0,2489	0,1824	0,7613
	M	0,0075	0,0056	0,0243	0,0873	0,0655	0,2835
		Składka dla „typowego” nauczyciela					
		okresowa			jednorazowa		
Wiek wstępu	płeć	przykład 1	przykład 2	przykład 3	przykład 1	przykład 2	przykład 3
30	K	0,0201	0,0151	0,0652	0,2328	0,1748	0,7554
	M	0,0070	0,0053	0,0241	0,0814	0,0626	0,2816
50	K	0,0229	0,0166	0,0667	0,2637	0,1916	0,7700
	M	0,0080	0,0059	0,0246	0,0934	0,0693	0,2872
		Składka maksymalna					
		okresowa			jednorazowa		
Wiek wstępu	płeć	przykład 1	przykład 2	przykład 3	przykład 1	przykład 2	przykład 3
30	K	0,0223	0,0165	0,0666	0,2580	0,1904	0,7699
	M	0,0078	0,0059	0,0246	0,0915	0,0690	0,2879
50	K	0,0246	0,0177	0,0678	0,2835	0,2034	0,7809
	M	0,0087	0,0064	0,0251	0,1015	0,0743	0,2921

Źródło: opracowanie własne.

Największy wpływ na wysokość składki ma wiek: osoby starsze płacą wyższą składkę niż osoby młodsze. W przykładzie 1 (składki minimalne) kobiety 50-letnie płacą około 16% większą składkę niż kobiety 30-letnie, w przypadku mężczyzn różnica ta wynosi 18%. Przy tym im wyższa składka, tym różnica staje się mniejsza i dla osób o cechach odpowiadających składce maksymalnej wynosi ona odpowiednio dla kobiet 10%, a dla mężczyzn 11%. Ponadto składki obliczone dla typowego nauczyciela są nieco bliższe składce minimalnej niż maksymalnej.

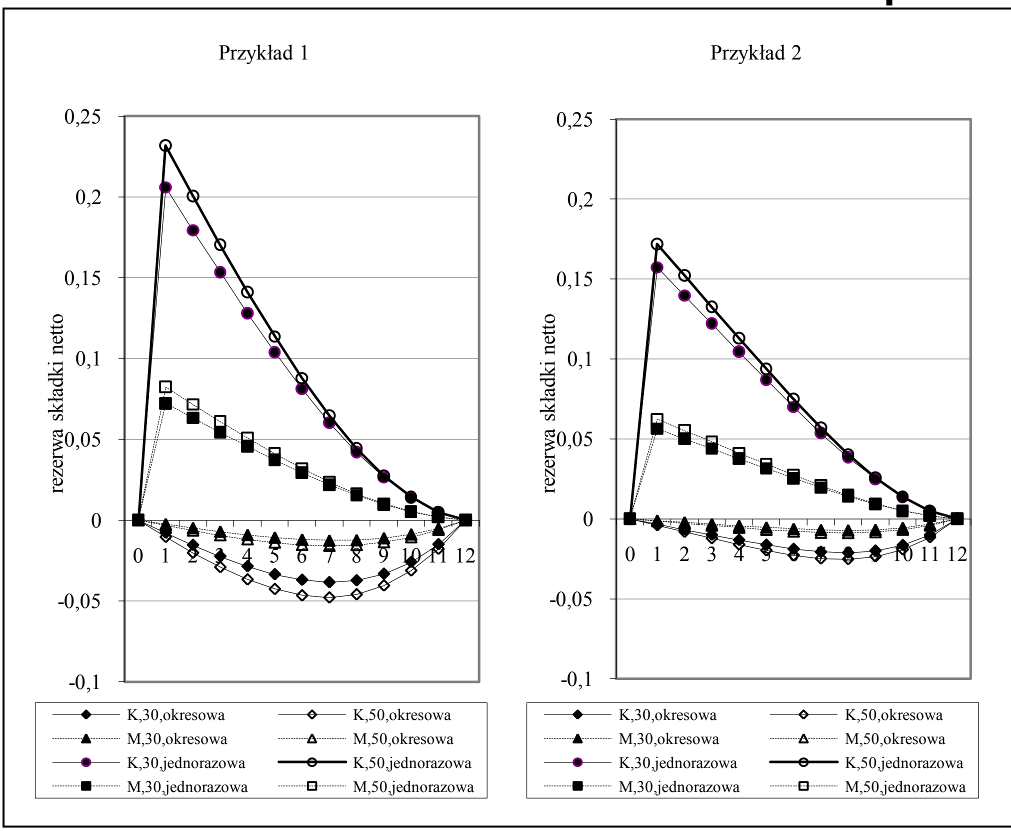
Wyznaczone w tab. 2 składki dla typowego nauczyciela wykorzystane zostały do obliczenia rezerw składki netto. Analiza rezerw składki netto dotyczy typowego nauczyciela, gdyż ze sposobu określania rezerw wynika, że dla danego strumienia świadczeń im składka jest wyższa, tym rezerwa składki netto jest niższa.

Na rysunkach 2 i 3 przedstawione zostały rezerwy składki netto dla każdego miesiąca trwania ubezpieczenia w zależności od płci (K, M), wieku (30 lat, 50 lat) i typu składki (jednorazowa, okresowa) dla ubezpieczeń opisanych w przykładach 1-3.

Okazuje się, że niezależnie od wysokości świadczenia rezerwy składki netto określone dla składki jednorazowej są dodatnie oraz wyższe niż te określone dla składki okresowej, które są ujemne. Ponadto $V_1(0)=0$, gdyż w momencie zawierania ubezpieczenia składka netto jest tak ustalana, aby aktuarialna wartość strumienia przyszłych składek równoważyła aktuarialną wartość strumienia przyszłych świadczeń.

W przypadku ubezpieczeń ze składką jednorazową cały strumień składek przypada na moment rozpoczęcia ubezpieczenia, a więc dla $t>0$ mamy, że $V_1(t)>0$. Ponieważ zobowiązanie ubezpieczyciela należy do aktywów ubezpieczonego, to można powiedzieć, że $V_1(t)$ jest wartością netto umowy, która może być podstawą zmiany warunków (w tym przypadku wykupu ubezpieczenia). Ponadto $V_1(12)=0$, gdyż jest to rezerwa liczona w momencie wygaśnięcia umowy ubezpieczenia i po tym momencie żadne składki i świadczenia nie są już realizowane.

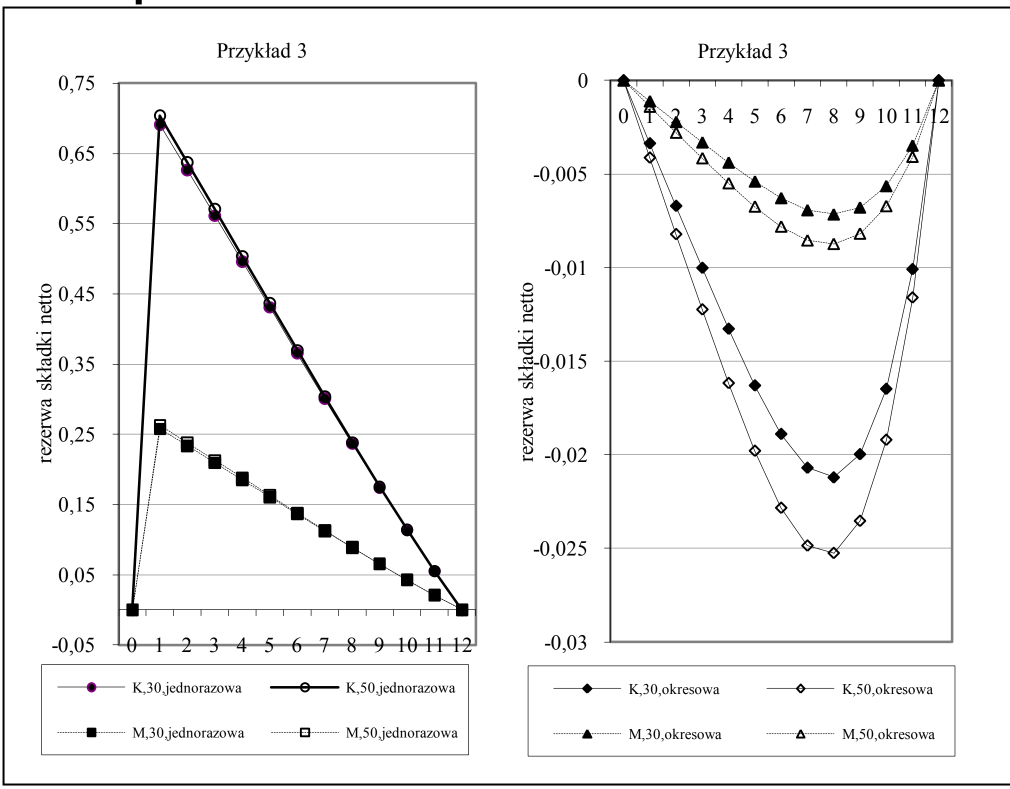
ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)



Rys. 2. Rezerwy składki netto dla przykładu 1 i przykładu 2

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku ubezpieczeń, w których okres składkowy jest równy całemu okresowi ubezpieczenia, rezerwa składki netto może być ujemna przez cały czas trwania umowy, jak to można zauważyć na rysunkach 2 i 3.

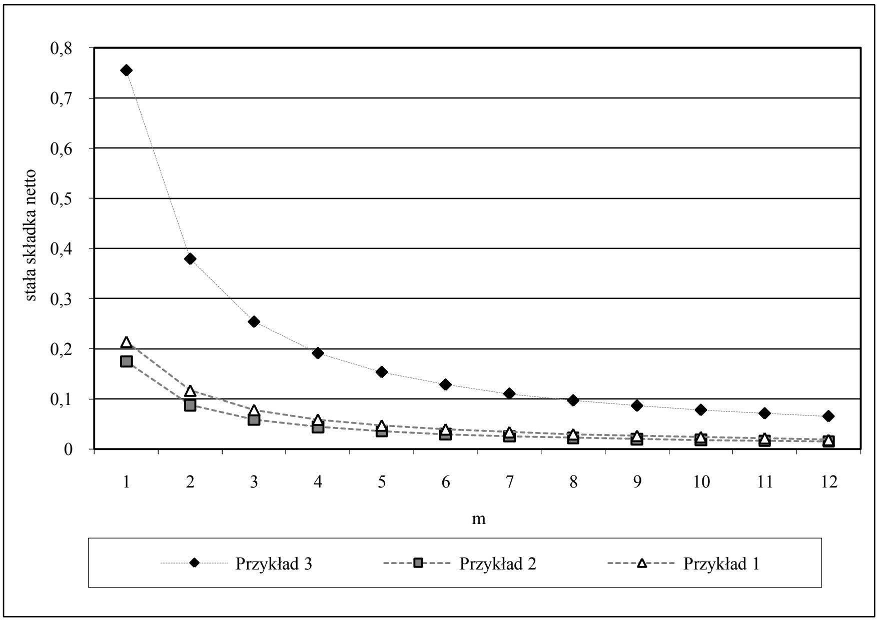


Rys. 3. Rezerwy składki netto dla przykładu 3

Źródło: opracowanie własne.

Ponieważ rezerwa składki netto jest własnością ubezpieczonego, to zazwyczaj ubezpieczyciel stara się, aby była ona dodatnia, żeby motywować ubezpieczonego do kontynuowania ubezpieczenia. W takich sytuacjach, w celu uzyskania dodatniej rezerwy składki netto, rozwiązaniem jest skrócenie okresu opłaty składek. Zauważmy, że skrócenie opłaty składek jednocześnie wpływa na ich zwiększenie. Rysunek 4 jest ilustracją wysokości składek w zależności od ich liczby (m), obliczonych dla przykładów 1-3 w przypadku trzydziestoletniej kobiety. Dla kobiety w wieku 50 lat i mężczyzn zależności te są podobne.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

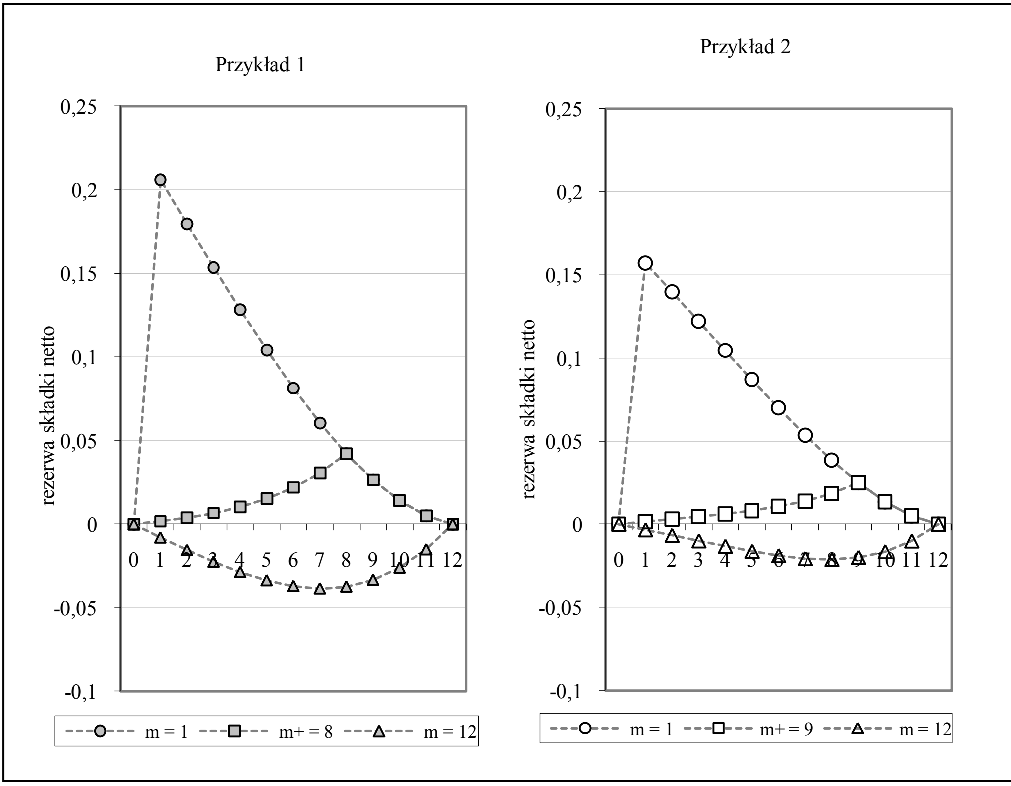


Rys. 4. Składka netto a częstość opłacania składek (dla kobiety w wieku 30 lat)

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunkach 5 i 6 przedstawione zostały rezerwy składki netto w przypadku składki jednorazowej, okresowej płatnej przez cały okres ubezpieczenia i składki płatnej m^+ razy $\left(1 < m^+ < 12\right)$, dla której po raz pierwszy rezerwy obliczone dla każdego momentu trwania okresu ubezpieczenia są nieujemne.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

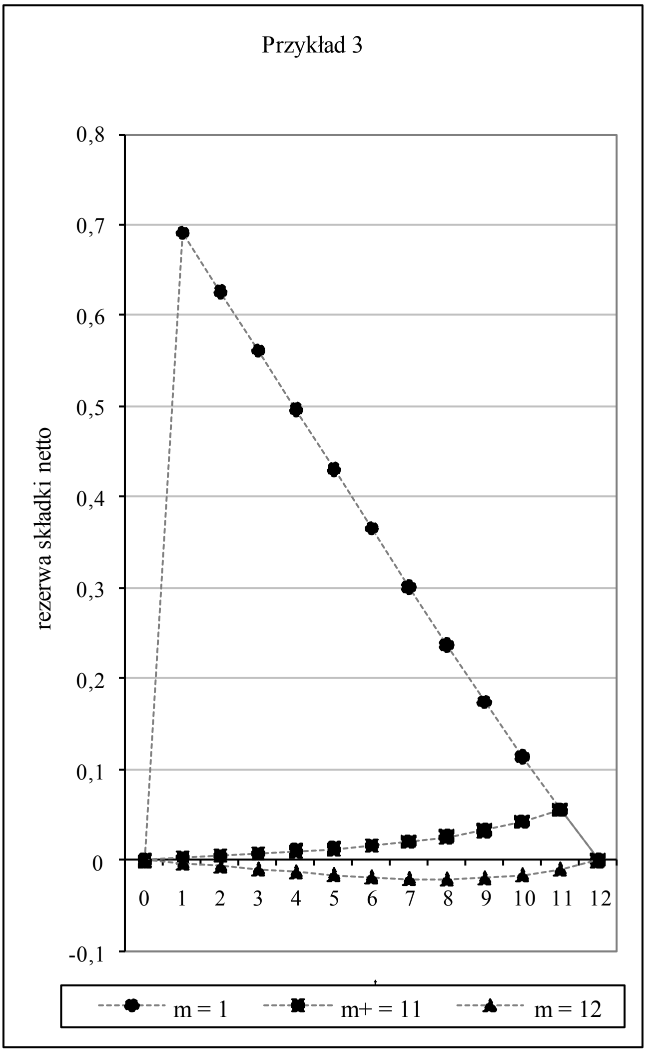


Rys. 5. Rezerwy składki netto a częstość opłacania składek w przykładzie 1 i przykładzie 2 (dla kobiety w wieku 30 lat)

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że ograniczenie czasu opłaty składek do 8 miesięcy w przykładzie 1 i do 9 miesięcy w przykładzie 2 pozwala na uzyskanie dodatnich rezerw składki netto. Natomiast w przykładzie 3 wystarczy zmniejszyć czas opłaty składek o jeden miesiąc, aby wszystkie rezerwy składki netto były nieujemne.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)



Rys. 6. Rezerwy składki netto a częstość opłacania składek w przykładzie 3 (dla kobiety w wieku 30 lat)

Źródło: opracowanie własne.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

Literatura

Amsler M.H., *Sur la modélisation des risques vie par les chaênes de Markov*, Transactions of the 18th International Congress of Actuaries vol. 5, München 1968.

Belzil Ch., *Unemployment insurance and subsequent job duration: Job matching vs unobserved heterogonity*, „Journal of Applied Econometrics" 2001, September – October.

Dębicka J., *Macierzowa reprezentacja ubezpieczenia wielostanowego z niejednorodnym łańcuchem Markowa*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1108, AE, Wrocław 2006.

Dębicka J., *Macierzowa reprezentacja rezerw w ubezpieczeniach wielostanowych* (w druku).

Dębicka J., Mazurek E., *Optymalne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy z elementami ubezpieczenia socjalnego i dobrowolnego*, „Śląski Przegląd Statystyczny" 2007a, nr 6.

Dębicka J., Mazurek E., *Analiza ryzyka utraty pracy oraz szansy ponownego zatrudnienia na polskim rynku pracy*, „Ekonomista" 2007b, nr 3.

Dębicka J., Mazurek E., *Komercyjne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy – analiza składki na polskim rynku zatrudnienia*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka*, UE, Wrocław, 2008.

Gerber H.U., *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Zurich 1990.

Haberman S., Pitacco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall /CRC, 1999.

Hoem J.M., *Markov chain models in life insurance*, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik Vol. IX, 1969.

Hoem J.M., *The versality of the Markov chain as a tool in the mathematics of life insurance*, Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries vol. R, Helsinki 1988.

Mazurek E., *Statystyczna analiza czasu trwania bezrobocia i optymalnego wyboru oferty pracy*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, rozprawa doktorska, Wrocław 2000.

Norberg R., *Reserves in life and pension insurance*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1991, vol. 74, no. 1.

Ostasiewicz W. (red.), *Metodologia pomiaru jakości życia*, AE, Wrocław 2002.

Ostasiewicz W. (red), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, AE, Wrocław 2004.

Pitacco E., *Actuarial models for princing disability benefits: Towards a unifying approach*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1995, vol. 16.

Waters H.R., *An approach to the study of multiple state models*, „Journal Institute of Actuaries" 1984, vol. 111, part II, no. 448.

Wolthuis H., *Life insurance mathematics (The Markovian model)*, CAIRE Education Series no. 2, Bruxelles 1994a.

Wolthuis H., *Actuarial equivalence*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1994b, no. 15.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 8(14)

Individual unemployment insurance – the analysis of net premium reserves

Summary: The insurance reserve for an insurance contract is a difference between the actuarial value of future benefits and net premium. One of the ways of calculation of reserves is the prospective method.

In the article a model for an individual insurance for financial consequences of unemployment is proposed. Net premiums and insurance reserves are calculated according to the method used in life insurances. In order to simplify the form of formulas, we use matrix notation introduced in [Dębicka, Mazurek 2008; Dębicka, *Macierzowa reprezentacja*…]. This approach enables us to give a flexible tool for the analysis of profits of multistate insurance contracts and makes the numerical procedures to be implemented easier.

The aim of this paper is to analyze net premium reserves for unemployment insurances. Numerical examples are based on data taken from Labour Department in Jelenia Góra for 2004.