ZASTOSOWANIE MODELU RASCHA DO ANALIZY STRESORÓW SPOŁECZNYCH

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 7 (13)

PL ISSN 1644-6739

Anna Zięba, Beata Zmyślona

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

1. Wstęp

Przedmiotem badań w naukach psychologicznych są zdarzenia lub bodźce powodujące stres. Czynniki wywołujące stres nazywane są stresorami, należą do nich m.in. trudności lub zmiany w życiu społecznym, zawodowym oraz rodzinnym. Ze względu na to, że każdy inaczej reaguje na określone bodźce, niezbędne jest ustalenie względnej siły oddziaływania stresujących wydarzeń na badane osoby. W ustalaniu tej siły należy uwzględnić indywidualne różnice poszczególnych osób w sposobie postrzegania stresowych sytuacji oraz zachowywania się w razie ich wystąpienia. Zróżnicowane reakcje wynikają m.in. z odmiennych cech charakteru, różnego wychowania, wykształcenia, posiadanych doświadczeń. Czynniki, które u jednych osób wywołują stres, zdenerwowanie, niezadowolenie, dla drugich nie będą miały żadnego znaczenia. Są osoby, które bardzo emocjonalnie reagują na różnego rodzaju niepowodzenia, niesprawiedliwość, zło społeczne. Ale są też tacy, których trudno jest zdenerwować, wyprowadzić z równowagi.

Cechy psychologiczne, zarówno emocjonalne, jak i racjonalne, nie są bezpośrednio obserwowalne, dlatego ich pomiar jest trudny. Cechy nieobserwowalne, inaczej nazywane cechami latentnymi, mogą być mierzone jedynie za pomocą pewnych bezpośrednio obserwowalnych wskaźników. Do najczęściej wykorzystywanych zalicza się wskaźniki behawioralne (tzn. habituację, preferencje wzrokowe), wykonaniowe (czyli np. czas reakcji na określony bodziec, liczba poprawnych odpowiedzi, liczba odpowiedzi zgodna z wyróżnioną kategorią), psychofizyczne (np. reakcję na określone właściwości fizyczne bodźca), fizjologiczne (np. pomiar EKG) itd. (por. np. [Konarski 2004; Ostasiewicz 2007]).

Do badania postaw wobec sytuacji stresowych najczęściej wykorzystuje się badania ankietowe, w których wskaźnikiem jest liczba odpowiedzi zgodna z wyróżnioną kategorią. Dogodnym narzędziem wykorzystywanym do pomiaru cech latentnych za pomocą wymienionego wskaźnika jest model wyniku zadania testowego, zwany w skrócie modelem IRT (od skrótu angielskiej nazwy *Item Response Theory*). W modelu IRT przyjmuje się, że prawdopodobieństwo uzyskania określonej kategorii odpowiedzi na postawione w ankiecie pytanie zależy od cechy psychologicznej związanej z respondentem oraz od cechy związanej z pytaniem ankietowym. Najistotniejsze założenie wyróżniające model IRT z całej klasy modeli analizy cech latentnych dotyczy postaci cech. Przyjmuje się, że cechy bezpośrednio obserwowalne, czyli wskaźniki, są typu dyskretnego, natomiast cechy latentne są typu ciągłego. Rozróżnia się kilka typów modeli IRT w zależności od przyjętej funkcji matematycznej, która wyjaśnia prawdopodobieństwo uzyskania szczególnej kategorii odpowiedzi na zadane pytanie (por. np. [De Boeck, Wilson 2004; Van der Linden 2005]).

Celem artykułu będzie przedstawienie zastosowania modelu Rascha do określania względnej siły stresujących czynników oddziałującej na poszczególne osoby. Parametry modelu szacowane będą klasyczną metodą największej wiarogodności oraz metodą bayesowską. Szczegółowo będzie tu rozpatrywana cecha dotycząca niezadowolenia studentów z funkcjonowania uczelni, na której studiują.

2. Badanie stopnia niezadowolenia studentów z funkcjonowania uczelni

Celem badania jest określenie, jakie aspekty funkcjonowania uczelni nie odpowiadają studentom, czyli z czego studenci są najbardziej niezadowoleni oraz jaki jest stopień tego niezadowolenia. W tym celu przeprowadzono ankietę, w której wzięło udział 110 studentów Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. Studenci odpowiadali na cztery następujące pytania:

1. Czy uważasz, że po zakończeniu studiów będziesz miał trudności ze znalezieniem dobrej pracy?
2. Czy uważasz, że uczelnia w zbyt małym stopniu pomaga w znalezieniu praktyki?
3. Czy wśród przedmiotów w Twoim programie studiów jest wiele przedmiotów niepotrzebnych?
4. Czy wśród przedmiotów programu studiów jest zbyt mała liczba zajęć praktycznych?

Istniały jedynie dwa warianty odpowiedzi na postawione pytania: „tak” lub „nie”.

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że odpowiedź *i*-tego respondenta na *j*-te pytanie ankietowe jest realizacją zmiennej losowej X_{ij}. Zmienna X_{ij} może przyjmować wartość 1, jeżeli respondent odpowie „tak", lub 0, gdy respondent udzieli odpowiedzi „nie". Zakłada się, że udzielenie przez respondenta odpowiedzi twierdzącej bądź negatywnej zależy od indywidualnych psychologicznych cech respondenta (wrażliwości, skłonności do określonych zachowań) oraz od ładunku emocjonalnego lub intencjonalnego sformułowania użytego w ankiecie. Na przykład stopień szczegółowości lub wyrazistość sformułowania może mieć wpływ na to, czy respondent udzieli twierdzącej odpowiedzi. Cechę psychologiczną określającą indywidualną wrażliwość respondenta oznacza się symbolem θ, natomiast ładunek stwierdzenia – jako α. Prawdopodobieństwo, że respondent udzieli twierdzącej odpowiedzi wyraża się w następujący sposób ([Andersen 1980; Fischer, Molenaar 1994]).

$$p_j(\theta_i) = P(X_{ij} = 1|\theta_i, \alpha_j) \text{ dla } i = 1, 2, ..., n, \ j = 1, 2, ..., k, \quad (1)$$

gdzie *n* oznacza liczebność próby, a *k* jest liczbą pytań w ankiecie.

Prawdopodobieństwo (1) jest pewną funkcją cech latentnych. W modelu Rascha do wyrażenia prawdopodobieństwa (1) wykorzystuje się przekształcenie logitowe. Iloraz prawdopodobieństw $p_j(\theta_i)/(1 - p_j(\theta_i))$ jest określany jako szansa udzielenia przez *i*-tego respondenta pozytywnej odpowiedzi na *j*-te pytanie. Logarytm tego ilorazu jest oznaczany symbolem η_{ij}. Logarytm ilorazu szans wyraża się za pomocą modelu logitowego ([De Boeck, Wilson 2004; Fischer, Molenaar 1994]).

$$\eta_{ij} = \log\left(\frac{p_j(\theta_i)}{1 - p_j(\theta_i)}\right) = \theta_i - \alpha_j. \quad (2)$$

Przekształcając wyrażenie (2), otrzymuje się wzór na prawdopodobieństwo sukcesu

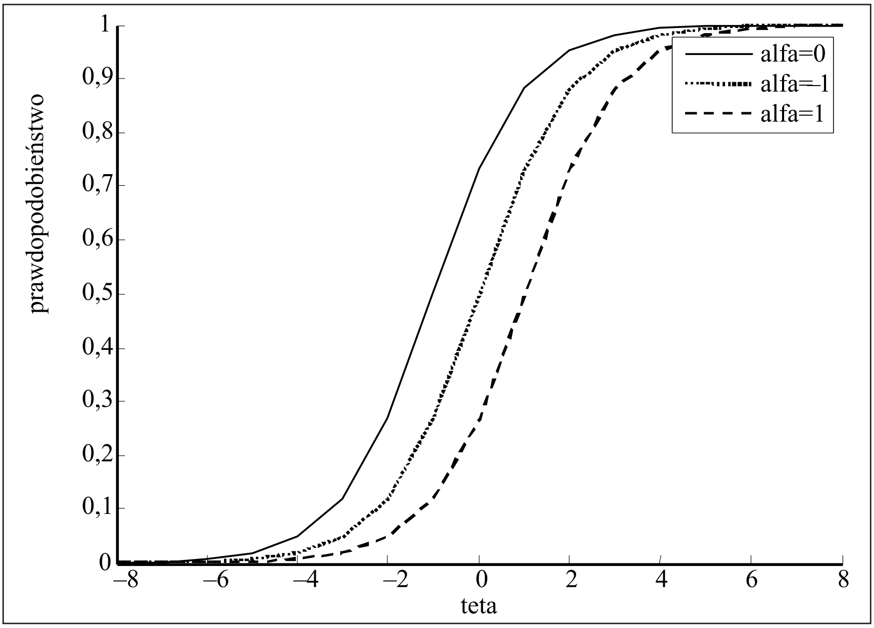
$$p_j(\theta_i) = P(X_{ij} = 1|\theta_i, \alpha_j) = \frac{\exp(\theta_i - \alpha_j)}{1 + \exp(\theta_i - \alpha_j)} \quad (3)$$

rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X_{ij}.

W dalszych rozważaniach przyjęto pięć założeń. Po pierwsze, że różne aspekty życia społecznego, z których respondenci nie są zadowoleni, można przedstawić w postaci pytań, które odzwierciedlają czynniki wywołujące stres. Czynniki te nazywane są stresorami. Po drugie, każdy stresor może być scharakteryzowany za pomocą parametru α_j, który można interpretować jako siłę wpływu tego stresora na respondentów. Po trzecie, reakcja ludzi na różne przejawy zła społecznego zależy od ich indywidualnej cechy psychologicznej. Z każdym respondentem jest zatem związany parametr θ_i charakteryzujący jego stopień niezadowolenia z istniejącej sytuacji. Po czwarte, przyjmuje się założenie o niezależności odpowiedzi respondenta (odpowiedź na jedno pytanie nie ma wpływu na odpowiedź na inne pytanie). Ostatnie założenie dotyczy monotoniczności funkcji opisującej prawdopodobieństwo udzielenia pozytywnej odpowiedzi przez respondenta. Zakłada się, że jest to funkcja rosnąca zależna od parametru θ. Respondenci o większym stopniu niezadowolenia są bardziej skłonni do udzielenia odpowiedzi „tak" niż respondenci o mniejszym nasileniu tej cechy [Ostasiewicz 2007].

Na rysunku 1 przedstawione są przykładowe wykresy funkcji charakterystycznych trzech pytań o różnych wartościach parametru α.

Z założenia monotoniczności wynika, że funkcja opisująca prawdopodobieństwo udzielenia pozytywnej odpowiedzi $p_j(\theta)$ jest funkcją rosnącą parametru θ, co oznacza, że im większy jest stopień niezadowolenia z funkcjonowania uczelni (im większa wartość parametru θ), tym większe jest prawdopodobieństwo udzielenia odpowiedzi twierdzącej na zadawane pytania (por. np. [Agrestii 1990; Andersen 1980]).



Rys. 1. Krzywa charakterystyczna pytania

ródło: opracowanie własne.

Jak już wspomniano, parametr α_j jest to parametr opisujący siłę wpływu *j*-tego stresora na respondentów. Parametr α_j może być nazywany „punktem obojętności" respondenta, gdyż udzielenie pozytywnej oraz negatywnej odpowiedzi z takim samym prawdopodobieństwem równym 0,5 oznacza, że postawa respondenta wobec badanego problemu jest obojętna (por. np. [De Boeck, Wilson 2004]).

W artykule model Rascha zastosowano do analizy poziomu niezadowolenia studentów. Interpretacja związana z parametrem α jest następująca. Jeżeli pytanie *j* w większym stopniu denerwuje respondentów niż pytanie *k*, czyli $\alpha_j > \alpha_k$, to prawdopodobieństwo udzielenia pozytywnej odpowiedzi na *j*-te pytanie jest większe niż na *k*-te pytanie, czyli $p_j(\theta) > p_k(\theta)$ dla wszystkich wartości parametru θ.

3. Estymacja metodą największej wiarogodności (NW) parametrów modelu Rascha

Estymacja metodą największej wiarogodności bazuje na statystyce dostatecznej *T* dla parametru θ, która jest liczbą pozytywnych odpowiedzi na *j*-te pytanie, czyli $T = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$ [De Boeck, Wilson 2004]. Oznacza to, że estymatory parametrów θ wyznaczane są wspólnie dla wszystkich osób, które odpowiedziały pozytywnie na zero pytań, jedno pytanie, dwa, trzy oraz cztery pytania, a nie indywidualnie dla poszczególnych respondentów. Celem analizy będzie oszacowanie poziomu niezadowolenia respondentów oraz znalezienie stresora o największej sile.

Należy zaznaczyć w tym momencie, iż metoda NW jest oparta na założeniu, że próba będąca źródłem informacji o populacji jest próbą losową. Jeżeli dane pochodzą z próby losowej, to odpowiedzi *i*-tego respondenta na *k* pytań są traktowane jako realizacje zmiennych losowych. W analizowanym przypadku $X_{i1}, \ldots, X_{ik}$ są to zmienne losowe o rozkładzie zero-jedynkowym. Prawdopodobieństwo udzielenia pozytywnej odpowiedzi wyraża się za pomocą funkcji logistycznej [De Boeck, Wilson 2004]

$$p_j(\theta_i) = \frac{\exp(\theta_i - \alpha_j)}{1 + \exp(\theta_i - \alpha_j)}.$$

Odpowiedzi na pytania dla *i*-tego respondenta można przedstawić za pomocą wektora $\mathbf{X}_i = \left(X_{i1}, \ldots, X_{ik}\right)$, którego składowe są niezależnymi zmiennymi losowymi (wynika to z czwartego założenia przyjętego w modelu).

Funkcja wiarogodności (zależna od dwóch rodzajów parametrów) jest postaci [Andersen 1980]:

$$L\left(\theta_1, \ldots, \theta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\right) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \left\{ p_j(\theta_i)^{x_{ij}} (1 - p_j(\theta_i))^{1-x_{ij}} \right\} = \\ = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\exp(\theta_i x_{ij} - \alpha_j x_{ij})}{\left(1 + \exp(\theta_i - \alpha_j)\right)}. \tag{4}$$

Estymatory największej wiarogodności otrzymuje się przez rozwiązanie następującego układu równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial a_i} = 0 \end{cases} \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{5}$$

Estymatory uzyskane przez rozwiązanie układu równań (5) są obciążone. Obciążenie estymatorów wynosi $\frac{\alpha_j}{k}$. Jest ono nieistotne w przypadku dużych wartości k, czyli dla dużej liczby pytań. Jednak w przypadku mniejszej liczby pytań, aby wyeliminować obciążenie, należy wyznaczyć estymatory parametrów α_j, bazując na warunkowej funkcji wiarogodności [Andersen 1980]. Wyznaczając warunkową funkcję wiarogodności, wykorzystuje się to, że liczba pytań, na które i-ty respondent odpowiedział twierdząco ($t_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ik}$), jest statystyką dostateczną dla parametru θ_i, co implikuje, że rozkład warunkowy odpowiedzi i-tego respondenta $f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik} \mid t_i)$ jest niezależny od parametru θ_i. Warunkową funkcję wiarogodności wyraża się następującym wzorem (por. np. [Andersen 2004])

$$L_C = \prod_{i=1}^{110} f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik} \mid t_i) = \\ = \exp\left\{-\sum_j \alpha_j x_{\bullet j}\right\} \Big/ \prod_{r=0}^{4} \left[\sum_{x_{i\bullet} = t_i} \exp\left\{-\sum_j \alpha_j x_{ij}\right\}\right]^{n_r}, \tag{6}$$

gdzie: r – liczba pytań, na które respondent może odpowiedzieć pozytywnie,

x_{ij} – odpowiedź udzielona przez i-tego respondenta na j-te pytanie,

$t_i = \sum_j x_{ij} = r$ – liczba pozytywnych odpowiedzi udzielonych przez i-tego respondenta,

$x_{\bullet j}$ – liczba studentów, którzy odpowiedzieli pozytywnie na j-te pytanie,

n_r – liczba osób, które odpowiedziały pozytywnie na r pytań.

Estymatory parametrów α_j wyznaczane są przy założeniu, że $\sum_j \alpha_j = 0.$ Założenie to gwarantuje jednoznaczność uzyskanych rozwiązań.

W próbie losowej 110 studentów na pierwsze pytanie pozytywnie odpowiedziało 76 studentów, na drugie – 21 studentów, na trzecie – 97 studentów, a na pytanie czwarte – 28 studentów. Bazując na warunkowej funkcji wiarogodności (6), wyznaczono oceny estymatorów parametrów $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. Wartości estymatorów wynoszą odpowiednio: $\alpha_1 = 0{,}85$, $\alpha_2 = -1{,}6$, $\alpha_3 = 1{,}96$ oraz $\alpha_4 = -1{,}21$.

Kolejnym krokiem, po wyznaczeniu estymatorów parametrów α_j, jest oszacowanie stopnia niezadowolenia respondentów z funkcjonowania uczelni, na której studiują. Estymatory parametrów $\theta_1, \ldots, \theta_n$ wyznaczane są na bazie następującej funkcji wiarogodności [Andersen 1980]:

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{110}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4) = \prod_{i=1}^{110} \prod_{j=1}^{4} p_j(\theta_i)^{x_{ij}} \left[1 - p_j(\theta_i)\right]^{1-x_{ij}} =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{110} \sum_{j=1}^{4} \theta_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{110} \sum_{j=1}^{4} \hat{a}_j x_{ij} \right) \left(\prod_{i=1}^{110} \prod_{j=1}^{4} (1 + e^{\theta_i - \hat{\alpha}_j}) \right)^{-1} = \qquad (7)$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{110} \theta_i t_i - \sum_{j=1}^{4} \hat{a}_j q_j \right) \left(\prod_{i=1}^{110} \prod_{j=1}^{4} (1 + \exp(\theta_i - \hat{\alpha}_j)) \right)^{-1}.$$

gdzie q_j oznacza liczbę osób, które pozytywnie odpowiedziały na j-te pytanie, t_i zaś oznacza liczbę pytań, na które i-ty respondent odpowiedział pozytywnie. Funkcja (7) jest funkcją zależną tylko od parametrów θ. Estymatory otrzymywane są przez rozwiązanie następującego układu równań:
$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0 \;\; i = 1, \ldots, 110.$

Otrzymano sto dziesięć wartości parametrów θ, jednak wartości te były wspólne dla osób, które nie zgodziły się z żadnym stwierdzeniem, oraz dla tych, które odpowiedziały pozytywnie na jedno pytanie, dwa, trzy oraz cztery pytania. Zatem ostatecznie otrzymano pięć różnych wartości parametru θ:

– dla osób, które nie odpowiedziały pozytywnie na żadne pytanie: $\theta = -39,59$,
– dla osób, które na jedno pytanie odpowiedziały „tak”: $\theta = -1,62$,
– dla osób, które na dwa pytania odpowiedziały „tak”: $\theta = -0,04$,
– dla osób, które na trzy pytania odpowiedziały „tak”: $\theta = 1,61$,
– dla osób, które na wszystkie pytania odpowiedziały „tak”: $\theta = 38,71$.

Jest to wynikiem wspomnianego już wcześniej faktu, iż statystyką dostateczną parametru θ jest $\sum_{j=1}^{k} x_{ij}$ (liczba pytań , na które student odpowiedział pozytywnie).

Na bazie wartości estymatorów parametrów θ_ι oraz α_j szacuje się prawdopodobieństwa udzielenia pozytywnej odpowiedzi na poszczególne pytania przez grupy osób o różnych poziomach niezadowolenia zgodnie ze wzorem:

$$\hat{p}_j(\theta) = \frac{\exp(\hat{\theta} - \hat{\alpha}_j)}{1 + \exp(\hat{\theta} - \hat{\alpha}_j)}. \tag{8}$$

Oszacowane wartości tych prawdopodobieństw umieszczone są w tab. 1.

Analizując wartości prawdopodobieństw udzielania pozytywnej odpowiedzi przedstawione w tab. 1, można zauważyć, że im większy jest poziom niezadowolenia respondenta, tym większe prawdopodobieństwa udzielenia pozytywnej odpowiedzi na poszczególne pytania. Dodatkowo prawdopodobieństwa te są tym większe, im większy jest parametr α związany z danym pytaniem. Największą wartością parametru α charakteryzowało się pytanie 3, dlatego w tym przypadku prawdopodobieństwa udzielenia pozytywnej odpowiedzi są największe.

Tabela 1. Prawdopodobieństwa udzielenia pozytywnej odpowiedzi

	$\theta = -1,62$	$\theta = -0,04$	$\theta = 1,61$	$\theta = 38,71$
$p_1(\theta)$	0,32	0,69	0,92	1
$p_2(\theta)$	0,04	0,16	0,5	1
$p_3(\theta)$	0,58	0,87	0,97	1
$p_4(\theta)$	0,06	0,22	0,6	1

ródło: opracowanie własne.

4. Estymacja metodą bayesowską parametrów modelu Rascha

W bayesowskim podejściu cechy ukryte określające cechę psychologiczną respondenta oraz cechę związaną z danym pytaniem traktuje się jak zmienne losowe o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa. Dla tych zmiennych przyjmuje się pewne rozkłady *a priori* $p(\theta_i)$ oraz $p(\alpha_j)$ zależne odpowiednio od wektorów parametrów $\boldsymbol{\lambda}$ oraz $\boldsymbol{\kappa}$.

Bayesowskie wnioskowanie bazuje na brzegowym rozkładzie prawdopodobieństwa wektorów odpowiedzi *i*-tego respondenta na cztery pytania, które oznacza się przez $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$ (dla $i = 1, 2, \ldots, n$). Brzegowy rozkład prawdopodobieństwa wektora $\mathbf{X}$ wyraża się w następujący sposób [De Boeck, Wilson 2004]:

$$P(\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i) \equiv p(\mathbf{x}_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{x}_i | \theta_i) p(\theta_i | \boldsymbol{\lambda}) d\theta_i. \tag{9}$$

Do wyznaczania estymatorów parametrów związanych z cechą psychologiczną poszczególnych respondentów wykorzystuje się bayesowskie modele hierarchiczne. Łączny rozkład *a posteriori* wszystkich nieobserwowanych wielkości jest proporcjonalny do brzegowych rozkładów wektorów odpowiedzi oraz rozkładów *a priori* parametrów, co można symbolicznie zapisać w następujący sposób (por. np. [Congdon 2003; De Boeck, Wilson 2004]):

$$\begin{aligned} & p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{110}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_4, \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{110}) \\ & \propto \prod_{i=1}^{110} \prod_{j=1}^{4} p(x_{ij} | \theta_i, \alpha_j, \boldsymbol{\lambda}) \prod_{i=1}^{n} p(\theta_i | \boldsymbol{\lambda}) p(\boldsymbol{\lambda}) p(\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} . \tag{10}$$

W ogólnym przypadku nie jest możliwe wyznaczenie analitycznie rozkładu *a posteriori* (10), stosuje się zatem pewne metody numeryczne, np. metody Monte Carlo bazujące na łańcuchach Markowa (MCMC). W omawianym przypadku charakterystyki rozkładów *a posteriori* wyznaczane są za pomocą algorytmu Gibssa. Na podstawie wartości estymatorów respondenci dzieleni są na grupy osób o podobnej skłonności do odpowiedzi, czyli odpowiadających zgodnie z tym samym wzorcem odpowiedzi.

Dla każdego wzorca odpowiedzi szacuje się prawdopodobieństwo udzielenia pozytywnej odpowiedzi na *j*-te pytanie przez *i*-tego respondenta za pomocą modelu regresji logistycznej. Model jest wyrażony następującym wzorem:

$$\eta_{ij} = \beta\theta_i - \alpha_j. \tag{11}$$

W modelu oprócz parametru określającego cechę psychologiczną respondenta θ_i oraz parametru związanego z danym pytaniem α_j uwzględnia się dodatkowo parametr β. Wartość tego parametru wpływa na kształt krzywej opisującej skłonność do uzyskania odpowiedzi. Parametr β może być interpretowany jako parametr skali rozkładu zmiennej θ_ι.

W tabeli 2 przedstawiono liczebności respondentów odpowiadających zgodnie z określonym wzorcem odpowiedzi.

Tabela 2. Liczebności respondentów odpowiadających zgodnie z określonym wzorcem

Wzorzec odpowiedzi	Liczba respondentów	Wzorzec odpowiedzi	Liczba respondentów
(0,0,0,0)	5	(0,1,1,0)	2
(0,0,0,1)	9	(1,0,1,0)	1
(0,0,1,0)	2	(1,1,0,0)	3
(0,1,0,0)	11	(0,1,1,1)	6
(1,0,0,0)	3	(1,1,0,1)	24
(0,0,1,1)	1	(1,1,1,0)	1
(0,1,0,1)	40	(1,1,1,1)	1
(1,0,0,1)	1		

ródło: opracowanie własne.

Ze względu na brak jakiejkolwiek informacji o skłonnościach do niezadowolenia studentów przyjmuje się nieinformacyjne rozkłady *a priori* (por. np. [Congdon 2003; De Boeck, Wilson 2004]). Dla parametrów θ_i przyjmuje się standaryzowany rozkład normalny ($\theta_i \sim N(0{,}1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, 110$). Zakłada się, że parametry $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_4$, charakteryzujące pytania mają taki sam rozkład, co oznacza, że te pytania zawierają podobny ładunek intencjonalny. Dla tych parametrów zakłada się również rozkład normalny z zerową wartością oczekiwaną oraz wariancją 0,1 ($\alpha_j \sim N(0; 0{,}1)$ dla $j = 1, \ldots, 4$). Istnieje możliwość zróżnicowania ładunku emocjonalnego i intencjonalnego poszczególnych pytań przez przyjęcie różnych rozkładów *a priori*. Parametr β jest interpretowany jako parametr skali zmiennej θ_i. Interpretacja ta ogranicza nośnik funkcji gęstości rozkładu *a priori* tylko do dodatnich wartości. W analizowanym przypadku przyjmuje się dla parametru β rozkład seminormalny z bardzo małą wariancją równą 0,0001.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

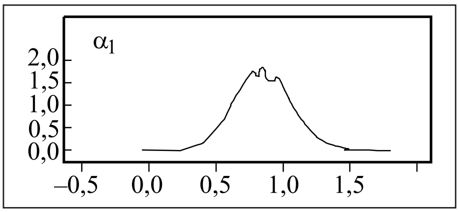
Nr 7 (13)

Łączny rozkład *a posteriori* parametrów jest proporcjonalny do iloczynów rozkładów *a priori* oraz funkcji wiarygodności, co można zapisać w następujący sposób (por. np. [De Boeck, Wilson 2004]):

$$p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \alpha_1, \ \ldots \alpha_2 | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{110}) \propto$$
$$\propto p(\beta) \prod_{i=1}^{110} p(\beta_i) \prod_{j=1}^{4} p(\delta_j) \times \tag{12}$$
$$\times \prod_{i=1}^{110} \prod_{j=1}^{4} P(X_{ij} = 1 | \theta_i, \alpha_j, \beta)^{x_{ij}} P(X_{ij} = 0 | \theta_i, \alpha_j, \beta)^{1-x_{ij}}.$$

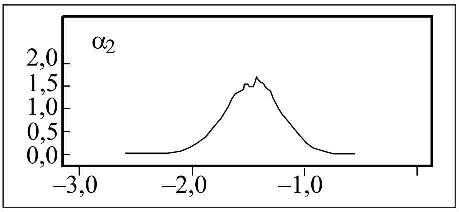
Rozkłady *a posteriori* są wyznaczane metodami numerycznymi na bazie 10 000-elementowych próbek pseudolosowych generowanych z wykorzystaniem algorytmu Gibbsa za pomocą programu WINBUGS. Na początku przeprowadza się 10 000 iteracji wstępnych, po których przyjmuje się, że została osiągnięta zbieżność do brzegowych rozkładów parametrów (por. np. [Congdon 2003]).

Na rysunkach od 2 do 6 przedstawiono funkcje gęstości rozkładów *a posteriori* parametrów $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ oraz β wyznaczone na bazie pseudolosowych próbek za pomocą algorytmu Gibbsa.



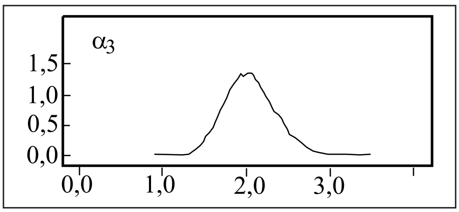
Rys. 2. Wykres funkcji gęstości rozkładu *a posteriori* parametru α_1

ródło: opracowanie własne.



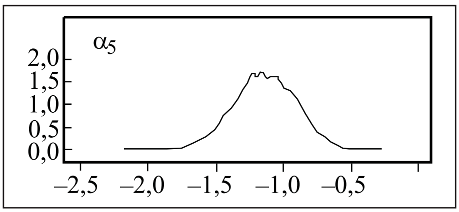
Rys. 3. Wykres funkcji gęstości rozkładu *a posteriori* parametru α_2

ródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Wykres funkcji gęstości rozkładu *a posteriori* parametru α_3

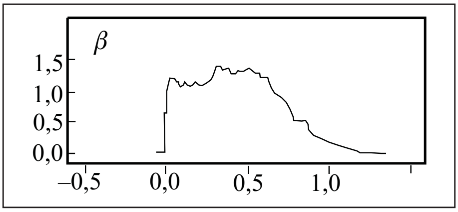
ródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Wykres funkcji gęstości rozkładu *a posteriori* parametru α_4

ródło: opracowanie własne.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 7 (13)



Rys. 6. Wykres funkcji gęstości rozkładu *a posteriori* parametru β

ródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 przedstawiono charakterystyki rozkładów *a posteriori* parametrów $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, oraz β. Za wartości estymatorów bayesowskich przyjmuje się oszacowane wartości oczekiwane rozkładów *a posteriori*, przedstawione w drugiej kolumnie tab. 3.

Tabela 3. Charakterystyki rozkładów *a posteriori*

Parametr	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Mediana	Kwantyl rzędu 0,025	Kwantyl rzędu 0,975
α_1	0,8556	0,2218	0,8509	0,4264	1,3030
α_2	–1,4740	0,2568	–1,4650	–2,0010	–0,9922
α_3	2,0410	0,3111	2,026	1,4710	2,6820
α_4	–1,144	0,2350	–1,1400	–1,6210	–0,7003
β	0,4285	0,2569	0,4177	0,0210	0,9588

ródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Zakres wartości estymatorów bayesowskich stopnia niezadowolenia z funkcjonowania uczelni dla poszczególnych wzorców odpowiedzi

Wzorzec odpowiedzi	Zakres wartości estymatorów bayesowskich	Wzorzec odpowiedzi	Zakres wartości estymatorów bayesowskich
(0,0,0,0)	[–0,6981; –0,6836]	(0,1,1,0)	0,0023; 0,0053
(0,0,0,1)	[–0,3715; –0,3264]	(1,0,1,0)	0,0104
(0,0,1,0)	–0,3498; –0,3311	(1,1,0,0)	[0,0030; 0,0203]
(0,1,0,0)	[–0,3559; –0,3280]	(0,1,1,1)	[0,3441; 0,3673]
(1,0,0,0)	[–0,3316; –0,3443]	(1,1,0,1)	[0,3350; 0,3677]
(0,0,1,1)	0,0083	(1,1,1,0)	0,3455
(0,1,0,1)	[–0,0208; 0,0233]	(1,1,1,1)	0,7041
(1,0,0,1)	–0,0053		

ródło: opracowanie własne.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 7 (13)

Dla każdego respondenta wyznacza się także rozkład *a posteriori* parametru θ_i. Wartość oczekiwana tego rozkładu jest przyjmowana jako oszacowanie stopnia niezadowolenia z funkcjonowania uczelni *i*-tego respondenta. W tabeli 4 przedstawiono zakres wartości estymatorów otrzymanych dla próby stu dziesięciu respondentów podzielonych zgodnie z piętnastoma wzorcami odpowiedzi. Jeżeli tylko jeden respondent lub dwóch respondentów odpowiadało zgodnie z określonym wzorcem, w tabeli przedstawiono wartości estymatora bayesowskiego dla tych respondentów.

Wartości estymatorów bayesowskich stopnia niezadowolenia zależą od liczby pytań, na które respondent odpowiedział pozytywnie. Ponieważ w modelu nie różnicowano ładunku emocjonalnego oraz intencjonalnego poszczególnych pytań, można zauważyć, że wartości estymatorów są zbliżone dla wzorców, w których na jedno pytanie respondent odpowiedział pozytywnie (jest to wartość ok. –0,35), podobnie na dwa pytania (jest to wartość zbliżona do zera) oraz na trzy (wartość ok. 0,35). Zróżnicowanie wartości estymatorów stopnia niezadowolenia z funkcjonowania uczelni w obrębie wzorców z taką samą liczbą pozytywnych odpowiedzi byłaby możliwa jedynie przez przyjęcie pewnych informacyjnych rozkładów *a priori* dla parametrów $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$.

Kolejnym etapem analizy jest wyznaczenie prawdopodobieństwa udzielenia odpowiedzi zgodnie z wzorcami podanymi w tab. 2. W podejściu bayesowskim jest to równoznaczne z wyznaczeniem rozkładu brzegowego (9). Wyznaczenie tego rozkładu w sposób analityczny jest skomplikowane, dlatego oszacowuje się go za pomocą metod numerycznych. W omawianym przypadku rozkład *a posteriori* prawdopodobieństwa udzielenia odpowiedzi zgodnie z określonym wzorcem wyznacza się jako średnią arytmetyczną z prawdopodobieństw warunkowych uzyskanych w *m* iteracjach algorytmu Gibbsa (por. np. [Congdon 2003])

$$\hat{p}(\mathbf{x}_i) \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} p^{(k)}(\mathbf{x}_i|\theta_i^{(k)}, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}) \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, 15, \ m = 10\,000, \quad (13)$$

gdzie $p^{(k)}(\mathbf{x}_i|\theta_i^{(k)}, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}) = \prod_{j=1}^{4} p(x_{kj}|\theta_i^{(k)}, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta})$, k, oznacza numer iteracji.

Warunkowe prawdopodobieństwa wyznaczane są na bazie estymatorów bayesowskich parametrów $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_4$ oraz $\hat{\beta}$. Wartości $\theta_i^{(k)}$ są generowane w każdej iteracji ze standardowego rozkładu normalnego.

Średnią (13) przyjmuje się jako oszacowanie brzegowego rozkładu wektora **X**, którego rozkład wyznaczany jest nie dla każdego respondenta osobno, ale dla poszczególnych wzorców odpowiedzi przedstawionych w tab. 2. Ze względu na to, że studenci odpowiadali zgodnie z piętnastoma wzorcami odpowiedzi, wyznaczono piętnaście rozkładów (13).

W tab. 5 przedstawiono charakterystyki rozkładów *a posteriori* prawdopodobieństw (13) dla poszczególnych wzorców odpowiedzi. Ostatecznie jako estymator prawdopodobieństwa uzyskania odpowiedzi zgodnie z wyróżnionym wzorcem przyjmuje się wartość oczekiwaną rozkładu (13).

Tabela 5. Charakterystyki rozkładów *a posteriori* odpowiedzi zgodnie z wzorcami odpowiedzi

Wzorzec odpowiedzi	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Mediana	Kwantyl rzędu 0,025	Kwantyl rzędu 0,975
(0,0,0,0)	0,0392	0,0440	0,0283	0,0021	0,1586
(0,0,0,1)	0,0899	0,0402	0,0863	0,0198	0,1824
(0,0,1,0)	0,0039	0,0021	0,0036	0,0006	0,0090
(0,1,0,0)	0,1246	0,0548	0,1205	0,0284	0,2513
(1,0,0,0)	0,0125	0,0061	0,0119	0,0023	0,0263
(0,0,1,1)	0,0112	0,0042	0,0107	0,0043	0,0207
(0,1,0,1)	0,3534	0,0550	0,3576	0,2250	0,4458
(1,0,0,1)	0,0356	0,0106	0,0349	0,0167	0,0584
(0,1,1,0)	0,0154	0,0056	0,0148	0,0061	0,0281
(1,0,1,0)	0,0016	0,0007	0,0015	0,0005	0,0033
(1,1,0,0)	0,0491	0,0133	0,0484	0,0242	0,0771
(0,1,1,1)	0,0525	0,0256	0,0495	0,0105	0,1126
(1,1,0,1)	0,1679	0,0747	0,1597	0,0358	0,3434
(1,1,1,0)	0,0073	0,0038	0,0068	0,0012	0,0162
(1,1,1,1)	0,0306	0,0353	0,0218	0,0015	0,1225

ródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono zastosowanie modelu Rascha do analizy stresorów społecznych. Model Rascha może być wykorzystany do określania stresorów oraz ich względnej siły oddziaływania na poszczególnych respondentów. Analiza stresorów społecznych może okazać się użytecznym narzędziem wykorzystywanym w naukach społeczno-psychologicznych. Pozwala bowiem określać, które nieobserwowane czynniki wpływają na poszczególne jednostki oraz jaka jest siła tego wpływu.

Parametry rozpatrywanego modelu oszacowano dwiema metodami, a mianowicie metodą największej wiarygodności oraz metodą bayesowską. Ponieważ w metodzie bayesowskiej użyto nieinformacyjnych rozkładów *a priori*, za pomocą obu metod estymacji otrzymano zbliżone wielkości estymatorów parametrów charakteryzujących stopień niezadowolenia z funkcjonowania uczelni oraz parametrów opisujących ładunek zawarty w poszczególnych pytaniach ankietowych.

Interpretacja otrzymanych wielkości jest podobna w przypadku zastosowania obu metod. Jednakże metody bayesowskie wydają się bardziej użyteczne w przypadku analizy cech psychologicznych. Po pierwsze, bayesowskie podejście umożliwia wykorzystanie dodatkowych informacji, bowiem jego naturalnym założeniem jest traktowanie wszystkich nieobserwowalnych wielkości jak zmiennych losowych o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Jeżeli badacz dysponuje pewną wiedzą dotyczącą rozpatrywanego zjawiska, może uzupełnić informacje z próby, wykorzystując informacyjne rozkłady *a priori*. Wszelkie dodatkowe informacje mogą być ważnym uzupełnieniem, szczególnie w przypadku małej liczby obserwacji w próbie. Po drugie, numeryczne metody znajdowania charakterystyk rozkładów *a posteriori* parametrów wydają się bardziej elastycznym narzędziem estymacji w stosunku do metody największej wiarogodności, albowiem mogą być stosowane do analizy odpowiedzi respondentów udzielanych zgodnie z dowolnymi wzorcami odpowiedzi.

Literatura

Agresti A., *Categorical Data Analysis*, Wiley, New York 1990.

Andersen E.B., *Discrete Statistical Models with Social Science Applications*, NHCP, Amsterdam 1980.

Bartholomew D.J., Stelle F., Moustaki I., Galbraith J.I., *The Analysis and Interpretation of Multivariate Data for Social Scientists*, Chapman & Hall/CRC, London 2002.

Congdon P., *Applied Bayesian Modelling*, Wiley 2003.

De Boeck P., Wilson M. (red.), *Explanatory Item Response Models*, Springer-Verlag, New York 2004.

Fischer G.H., Molenaar I.W., *Rasch Models. Foundations, Recent Developmenst and Applications*, Springer-Verlag 1994.

Konarski R., *Model cechy latentnej w analizie psychometrycznej testów i pozycji testowych*, [w:] B. Niemiecko, H. Szaleniec (red.), *Standardy wymagań i normy testowe w diagnostyce edukacyjnej*, Polskie Towarzystwo Diagnostyki Edukacyjne, Kraków, 2004.

Ostasiewicz W., *Modele statystyczne badań sondażowych*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1163, AE, Wrocław 2007, s. 208-229.

Van der Linden W.J., *Item Response Theory, Encyclopedia of Social Measurement*, Tom 2, 2005.