

# PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

# RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 446

## Metody i zastosowania badań operacyjnych



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2016

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korlub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korekta: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Myszkowska

Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania  
znajdują się na stronach internetowych

[www.pracnaukowe.ue.wroc.pl](http://www.pracnaukowe.ue.wroc.pl)

[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons

Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska  
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2016

**ISSN 1899-3192**  
**e-ISSN 2392-0041**

**ISBN 978-83-7695-610-7**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław

tel./fax 71 36 80 602; e-mail: [econbook@ue.wroc.pl](mailto:econbook@ue.wroc.pl)

[www.ksiegarnia.ue.wroc.pl](http://www.ksiegarnia.ue.wroc.pl)

Druk i oprawa: TOTEM

## Wstęp

<b>Wstęp</b> .....	7
<b>Krzysztof Echaust:</b> Modelowanie wartości ekstremalnych stóp zwrotu na podstawie danych śróddziennych / Modeling of extreme returns on the basis of intraday data .....	9
<b>Helena Gaspars-Wieloch, Ewa Michalska:</b> On two applications of the Omega ratio: $\max\Omega_{\min}$ and $\Omega(H+B)$ / O dwóch zastosowaniach wskaźnika Omega: $\max\Omega_{\min}$ i $\Omega(H+B)$ .....	21
<b>Agata Gluzicka:</b> Zastosowanie modelu MAD z dodatkowymi warunkami ograniczającymi / Application of the MAD model with additional constraints .....	37
<b>Dorota Górecka, Małgorzata Szalucka:</b> Foreign market entry mode decision – approach based on stochastic dominance rules versus multi-actor multi-criteria analysis / Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny – podejście oparte na dominacjach stochastycznych a wieloaktorska analiza wielokryterialna .....	47
<b>Paweł Hanczar, Dagmara Pisiewicz:</b> Logistyka odzysku – optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej / Reverse logistics – optimization of flows in the system of waste management .....	70
<b>Michał Jakubiak, Paweł Hanczar:</b> Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków / Optimization of municipal solid waste collection and transportation routes on the example of MPO Cracow .....	83
<b>Michał Kameduła:</b> Zastosowanie koewolucyjnego algorytmu genetycznego w rozwiązaniu zadania trójkryterialnego / Application of co-evolutionary genetic algorithm for a three-criterion problem.....	93
<b>Donata Kopańska-Bródka, Renata Dudzińska-Baryła, Ewa Michalska:</b> Zastosowanie funkcji omega w ocenie efektywności portfeli dwuskładnikowych / Two-asset portfolio performance based on the omega function .	106
<b>Marek Kośny, Piotr Peternek:</b> Zagadnienie sposobu definiowania preferencji na przykładzie przydziału uczniów do oddziałów klasowych / Definition of preferences in the context of pupils' allocation to classes .....	115
<b>Wojciech Młynarski, Artur Prędki:</b> Ocena efektywności technicznej i finansowej wybranych nadleśnictw Lasów Państwowych za pomocą metody DEA / Technical and financial efficiency evaluation for selected forestry managements of the State Forests National Forest Holding – the DEA approach.....	126

<b>Piotr Namieciński:</b> Alternatywna metoda określania preferencji decydenta w zagadnieniach wielokryterialnych / Alternative methods of decision-maker preferences identification in multicriteria issues .....	144
<b>Marek Nowiński:</b> Testowanie nieliniowych algorytmów optymalizacyjnych – zestaw funkcji typu <i>benchmark</i> / Testing nonlinear optimization algorithms – set of benchmark type functions .....	159
<b>Agnieszka Przybylska-Mazur:</b> Wybrana metoda analizy długoterminowej stabilności finansów publicznych / The selected method of analysis of the long-term sustainability of public finance .....	173
<b>Ewa Roszkowska, Tomasz Wachowicz, Robert Jankowski:</b> Analiza porozumienia końcowego w negocjacjach elektronicznych w kontekście zgodności systemu oceny ofert negocjatora z informacją preferencyjną/ Analyzing the negotiation agreements in a context of concordance of negotiation offer scoring systems with negotiators' preferential information .....	187
<b>Aleksandra Sabo-Zielonka, Grzegorz Tarczyński:</b> Adaptacja heurystyki <i>s-shape</i> na potrzeby wyznaczenia trasy przejścia w niestandardowym układzie strefy kompletacji zamówień / Adaptation of the s-shape heuristic for the custom layout of the order-picking zone .....	207
<b>Jakub Staniak:</b> Inicjalizacja ukrytych modeli Markowa z wykorzystaniem analizy skupień / Initialization of hidden Markov models by means of clustering analysis.....	224
<b>Paulina Szterlik:</b> Lokalizacja magazynu centralnego z zastosowaniem metod wielokryterialnych / Location of central warehouse using quantitative research .....	237
<b>Grzegorz Tarczyński:</b> Porównanie efektywności kompletacji łączonych zleceń z kompletacją niezależną / An attempt of comparison of order batching with independent order-picking .....	250

## Wstęp

Kolejna, XXXIV Ogólnopolska Konferencja Naukowa im. Profesora Władysława Bukietyńskiego, organizowana corocznie przez najważniejsze ośrodki naukowe zajmujące się dziedziną badań operacyjnych, w roku 2015 odbyła się w pięknym, zabytkowym i świeżo odremontowanym zespole pałacowo-parkowym w Łagowie koło Zgorzelca. Konferencję zrealizowaną pod nazwą *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* przygotowała Katedra Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu pod kierownictwem dr. hab. Marka Nowińskiego, prof. UE.

Konferencje te mają już długoletnią tradycję – są to coroczne spotkania pracowników nauki specjalizujących się w badaniach operacyjnych. Głównym celem konferencji było, podobnie jak w latach ubiegłych, stworzenie (przede wszystkim dla młodych teoretyków, a także praktyków dyscypliny) forum wymiany myśli na temat najnowszych osiągnięć dotyczących metod ilościowych wykorzystywanych do wspomagania procesów podejmowania decyzji, a także prezentacja nowoczesnych zastosowań badań operacyjnych w różnych dziedzinach gospodarki. Ten cenny dorobek naukowy nie może być zapomniany i jest publikowany po konferencji w postaci przygotowywanego przez organizatorów zeszytu naukowego zawierającego najlepsze referaty na niej zaprezentowane.

W pracach Komitetu Naukowego Konferencji uczestniczyli czołowi przedstawiciele środowisk naukowych z dziedziny badań operacyjnych w Polsce; byli to: prof. Jan B. Gajda (Uniwersytet Łódzki), prof. Stefan Grzesiak (Uniwersytet Szczeciński), prof. Bogumił Kamiński (SGH w Warszawie), prof. Ewa Konarzewska-Gubała (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), prof. Donata Kopańska-Bródka, prof. Maciej Nowak i prof. Tadeusz Trzaskalik (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), prof. Dorota Kuchta (Politechnika Wrocławska), prof. Krzysztof Piasecki (Uniwersytet w Poznaniu) i prof. Józef Stawicki (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu).

Zakres tematyczny konferencji obejmował teoretyczne i praktyczne zagadnienia dotyczące przede wszystkim:

- modelowania i optymalizacji procesów gospodarczych,
- metod wspomagających proces negocjacji,
- metod oceny efektywności i ryzyka na rynku kapitałowym i ubezpieczeniowym,
- metod ilościowych w transporcie i zarządzaniu zapasami,
- metod wielokryterialnych,
- optymalizacji w zarządzaniu projektami oraz analizy ryzyka decyzyjnego.

W konferencji wzięło udział 43 przedstawiciele różnych środowisk naukowych, licznie reprezentujących krajowe ośrodki akademickie. W trakcie sześciu sesji ple-

narych, w tym dwóch sesji równoległych, przedstawiono 27 referatów, których poziom naukowy w przeważającej części był bardzo wysoki. Zaprezentowane referaty, po pozytywnych recenzjach, zostają dziś opublikowane w Pracach Naukowych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu w postaci artykułów naukowych w specjalnie wydany zeszycie konferencyjnym.

Przypominając przebieg konferencji, nie można nie wspomnieć o konkursie zorganizowanym dla autorów referatów niebędących samodzielnymi pracownikami nauki. Dotyczył on prezentacji najciekawszego zastosowania badań operacyjnych w praktyce gospodarczej. Komitet Organizacyjny Konferencji powołał kapitułę konkursu, w której skład weszli: prof. Ewa Konarzewska-Gubała – przewodnicząca, prof. Jan Gajda, prof. Stefan Grzesiak i prof. Donata Kopańska-Bródka. Członkowie Komisji Konkursowej oceniali referaty ze względu na:

- innowacyjność, oryginalność metody będącej przedmiotem zastosowania,
- znaczenie zastosowania dla proponowanego obszaru,
- stopień zaawansowania implementacji metody w praktyce.

Spośród 15 referatów zgłoszonych wyróżniono: 1. miejsce: dr Michał Jakubiak i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków*; 2. miejsce: mgr Dagmara Piesiewicz i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Logistyka odzysku – optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej*; 3. miejsce: dr Dorota Górecka i dr Małgorzata Szałucka (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), *Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny – wieloaktorska analiza wielokryterialna a podejście oparte na dominacjach stochastycznych*.

Przy okazji prezentowania opracowania poświęconego XXXIV Konferencji *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* i jej bardzo wartościowego dorobku nie możemy nie podziękować członkom Komitetu Organizacyjnego Konferencji, w którego skład wchodził młodzi, acz doświadczeni pracownicy Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu: dr Piotr Peternek (sekretarz), dr hab. Marek Kośny, dr Grzegorz Tarczyński oraz mgr Monika Stańczyk (biuro konferencji). Zapewnili oni w sposób profesjonalny sprawne przygotowanie i przeprowadzenie całego przedsięwzięcia oraz zadbał o sprawy administracyjne związane z realizacją konferencji, a także byli odpowiedzialni za dopilnowanie procesu gromadzenia i redakcji naukowych materiałów pokonferencyjnych, które mamy okazję Państwu dziś udostępnić.

Już dzisiaj cieszymy się na nasze kolejne spotkanie w ramach jubileuszowej XXXV Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej im. Profesora Władysława Bukietyńskiego, która tym razem będzie organizowana przez naszych przyjaciół z Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu pod kierownictwem prof. dr. hab. Krzysztofa Piaseckiego.

*Marek Nowiński*

**Krzysztof Echaust**

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
e-mail: k.echaust@ue.poznan.pl

---

## **MODELOWANIE WARTOŚCI EKSTREMALNYCH STÓP ZWROTU NA PODSTAWIE DANYCH ŚRÓDDZIENNYCH**

---

### **MODELING OF EXTREME RETURNS ON THE BASIS OF INTRADAY DATA**

---

DOI: 10.15611/pn.2016.446.01

JEL Classification: C02, C14

**Streszczenie:** Niepodważalne jest, że rozkłady stóp zwrotu z instrumentów finansowych na dziennym lub krótszym odcinku czasowym odbiegają od rozkładu normalnego, charakteryzując się grubymi ogonami. Oznacza to, że inwestorzy w swoich codziennych decyzjach inwestycyjnych muszą uwzględniać wartości ekstremalne. Szczególnie istotne konsekwencje pojawienia się tych wartości mogą być odczuwalne przez zwolenników częstego inwestowania, tzw. day-traderów. W niniejszej pracy przedstawiono wyniki badań empirycznych nad własnościami ogonów rozkładu stóp zwrotu. Porównane zostały lewe i prawe ogony rozkładów zwrotów śróddziennych, uwzględniając kilka skal czasowych. Zastosowano model przekroczeń wartości progowej do oceny grubości ogona i indeks ekstremalny Ferro-Segersa do oceny grupowania wartości ekstremalnych. Badania przeprowadzone zostały na podstawie szeregów walutowych USD/PLN i EUR/PLN w latach 2010-2014. Wykazana została znaczna różnica między ogonami rozkładów w zależności od przyjętej skali czasowej i uwzględnienia lewego bądź prawego ogona rozkładu.

**Słowa kluczowe:** grube ogony, teoria wartości ekstremalnych, dane śróddzienne.

**Summary:** The undeniable fact is that the distributions of returns of financial instruments, on a daily or shorter period of time, differ from the normal distribution because they are characterized by fat tails. This paper presents the results of empirical research on the properties of the returns distribution tails and compares left and right distribution tails of the intraday returns in several time scales. Peaks Over Threshold Model for assessing the tail thickness and Ferro-Segers extremal index to evaluate clustering extreme values are used. The study was carried out based on the exchange rates of USD/PLN and EUR/PLN in 2010-2014. It shows the difference between the tails of distributions depending on a time scale and taking into account the left or right tail of the distribution.

**Keywords:** fat tails, intraday returns, extreme value theory, dependence.

## 1. Wstęp

Już w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku Mandelbrot [1963] i Fama [1965] odrzucili hipotezę o normalności rozkładu stóp zwrotu, kierując swoją uwagę w stronę rozkładów Lévy'ego. Wiele późniejszych badań potwierdziło istnienie ogonów grubszych niż w rozkładzie normalnym, jeśli analizowane są stopy zwrotu z częstotliwością próbkowania dzienną lub częstszą. Grube, inaczej ciężkie (*fat tails, heavy tails*), ogony rozkładu stóp zwrotu oznaczają większe niż w rozkładzie normalnym prawdopodobieństwo wystąpienia skrajnie wysokich (gruby prawy ogon) lub skrajnie niskich (gruby lewy ogon) stóp zwrotu. Rozkłady takie charakteryzują się podwyższoną w stosunku do rozkładu normalnego kurtozą. Według Petersa [1997] przyczyną leptokurtycznego kształtu rozkładu jest fakt, iż informacje nie docierają na rynek w postaci ciągłych, gładkich serii, lecz pojawiają się nieregularnie. Informacje mają więc charakter leptokurtyczny, a w konsekwencji gwałtowne reakcje rynku powodują powstanie grubych ogonów rozkładów. Szczególnie istotne konsekwencje pojawienia się stóp zwrotu z ogonów rozkładów mogą być odczuwalne przez zwolenników częstego inwestowania, tak zwanych day-traderów. W przeciwieństwie do inwestorów średnio- i długoterminowych akumulują oni wszystkie napływające na rynek informacje, biorąc na siebie ryzyko doświadczania ekstremalnych zmian cen. Dlatego analiza własności ogonów rozkładów stóp zwrotu śróddziennych wydaje się ważna z poznawczego punktu widzenia.

Pierwszym celem pracy jest porównanie grubości ogonów rozkładów w zależności od przyjętej skali czasowej i uwzględnienia lewego bądź prawego ogona rozkładu. Choć intuicyjnie wydaje się oczywiste, że lewe ogony dla rozkładów stóp zwrotu z akcji i indeksów giełdowych powinny być grubsze niż prawe, jako wynik bardziej burzliwego przebiegu spadków giełdowych niż wzrostów, nie jest to uniwersalną prawidłowością ze statystycznego punktu widzenia. Istnieją prace potwierdzające to zjawisko dla danych dziennych m.in. [LeBaron, Ritirupa 2005; Cotter 2006; Echaust 2014a], ale z drugiej strony wiele innych prac nie potwierdziło asymetrii w grubości ogonów lewych i prawych rozkładu, m.in. [Longin 1996; Longin 2001; Jondeau, Rockinger 2003; Francq, Zakoïan 2013]. Innym powodem odmiennego postrzegania przez inwestorów okresów boomu i krachów jest zależność wartości ekstremalnych odzwierciedlona w ich grupowaniu. Jondeau i Rockinger [2003] wskazali, że grupowanie ekstremalnych zwrotów nie może być powodem postrzegania przez inwestorów lewych ogonów jako grubsze niż prawe. Z kolei w pracy [Echaust 2014b] taką zależność udało się pokazać. Sprawdzenie tej własności jest drugim celem tej pracy. Dodajmy, że dotychczasowe badania podejmujące te zagadnienia były przeprowadzone jedynie na danych dziennych, natomiast w niniejszym artykule analizowane są dane śróddzienne.

Jako narzędzie analizy wykorzystano model przekroczeń wartości progowej (*Peaks Over Threshold, POT*) wywodzący się z teorii wartości ekstremalnych (*Extreme Value Theory, EVT*) do oceny grubości ogona i indeks ekstremalny (*Extremal Index*)



Ferro-Segersa do oceny grupowania wartości ekstremalnych. Badania przeprowadzone zostały na podstawie szeregów walutowych USD/PLN i EUR/PLN w latach 2010-2014.

W punkcie drugim artykułu przedstawiono podstawy teorii wartości ekstremalnych, w trzecim indeks ekstremalny jako narzędzia analizy grupowania ekstremów. W punkcie czwartym omówiono metodologię badań, natomiast wyniki badania przedstawiono punkcie piątym. Na koniec syntetycznie zebrano wnioski z przeprowadzonego badania.

## 2. Teoria wartości ekstremalnych i model przekroczeń wartości progowej

Teoria wartości ekstremalnych jest gałęzią statystyki koncentrującą się na modelowaniu wartości ekstremalnych zmiennych losowych. Powstała na gruncie twierdzeń Fishera-Tippetta [1928] i Gnedenki [1948], które określają zbieżność asymptotyczną ciągu znormalizowanych maksimów zmiennej losowej do jednej z trzech klas rozkładów: Weibulla w przypadku rozkładów z zanikającym ogonem, Gumbela z cieniłym i Fréchéta z ogonem grubym. Drugie ujęcie EVT dotyczy zbieżności wartości z ogona rozkładu zamiast samych maksimów. Model przekroczeń wartości progowej (*Peaks Over Threshold*, POT) jest podstawowym modelem analizy wartości pochodzących z ogona rozkładu. Model oparty jest na twierdzeniu Pickandsa-Balkemeyde Haana (1974). Punktem wyjścia jest tu warunkowy rozkład przekroczeń zmiennej losowej  $X$  (np. strat portfela) pewnej progowej wartości  $u$ :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad (1)$$

gdzie  $y = x - u > 0$ ,  $F$  jest zaś nieznaną dystrybuantą zmiennej losowej  $X$ . Twierdzenie Pickandsa-Balkemeyde Haana stanowi, że dla wystarczająco dużego  $u$  dystrybuanta warunkowa  $F_u(x)$  ma rozkład graniczny, który jest uogólnionym rozkładem Pareto (*Generalized Pareto Distribution*, GPD) z dystrybuantą:

$$G_{\xi, \beta}(y) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad (2)$$

gdzie:  $1 + \xi \frac{y}{\beta} > 0$ , oraz  $\beta > 0$ ,  $y \geq 0$  dla  $\xi \geq 0$  i  $0 \leq y \leq -\beta/\xi$  dla  $\xi < 0$ .

Kluczowym parametrem tego rozkładu jest parametr kształtu  $\xi \in \mathbb{R}$ , który określa przynależność rozkładu do którejś z trzech wspomnianych klas rozkładów asymptotycznych. Jeśli  $\xi > 0$ , to rozkład asymptotyczny jest rozkładem Fréchéta. Dla  $\xi < 0$  jest rozkładem Weibulla, zaś dla  $\xi \rightarrow 0$  rozkładem granicznym staje się rozkład Gumbela. Najbardziej interesującym w praktycznych zastosowaniach finansów są rozkłady z ciężkimi ogonami. Dla takich rozkładów parametr  $\xi$  określa grubość ogona: tym jest on grubszy, im większa wartość parametru.

Podstawiając  $x = y + u$  do (1) i obliczając  $F(x)$ , otrzymujemy

$$F(x) = F_u(x - u)(1 - F(u)) + F(u). \quad (3)$$

Jeśli zastąpimy dystrybuantę warunkową  $F_u$  dystrybuantą uogólnionego rozkładu Pareto, otrzymamy

$$F(x) = G_{\xi, \beta}(x - u)(1 - F(u)) + F(u). \quad (4)$$

Aby móc korzystać z (4), należy jeszcze oszacować wartość  $F(u)$ . Naturalnym estymatorem tej wielkości jest estymator empiryczny liczby obserwacji, które nie przekraczają progu  $u$  do wszystkich obserwacji. Zastępujemy w (4)  $F(u)$  poprzez  $(n - N_u)/n$ , gdzie  $n$  jest liczbą obserwacji, zaś  $N_u$  jest liczbą przekroczeń progu  $u$ . Po podstawieniu i niewielkich przekształceniach otrzymujemy ostatecznie:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \xi \frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \frac{N_u}{n} \exp\left(\frac{x-u}{\hat{\beta}}\right), & \xi = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Estymacji parametrów uogólnionego rozkładu Pareto dokonuje się najczęściej metodą największej wiarygodności, co pozwala otrzymywać estymatory asymptotycznie normalne i efektywne. Zakładamy, że zmienne losowe (przekroczenia progu  $u$ )  $Y_1, \dots, Y_{N_u}$  są niezależne. Wówczas logarytm funkcji wiarygodności dla  $\xi \neq 0$  ma postać:

$$\ell(\xi, \beta) = -N_u \ln \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{N_u} \ln \left[1 + \xi \frac{y_i}{\beta}\right], \quad (6)$$

pod warunkiem że  $1 + \xi \frac{y_i}{\beta} > 0$  dla  $i = 1, \dots, N_u$  i  $\beta > 0$ .

Nadrzędnym problemem w stosowaniu modelu przekroczeń jest odpowiedni wybór *a priori* progu  $u$ . Wyniki estymacji parametrów modelu bowiem w znacznej mierze zależą od wyboru tej wartości. Powinien być to wysoki kwantyl rozkładu, aby wyniki oszacowań były stabilne. Wybór wartości progowej  $u$  jest zawsze kompromisem pomiędzy dużą wariancją dla konserwatywnie wybranego progu ogona, a obciążeniem, gdy również wartości z centralnej części rozkładu są brane pod uwagę. Nie istnieje jedno rozwiązanie tego problemu. McNeil i Frey [2000], LeBaron i Riturupa [2005] czy Gavin [2000] przyjmują 10% skrajnych obserwacji dla ogona dla danych dziennych. Hull [2011, s. 348] wskazuje, że wartość progowa  $u$  powinna mniej więcej odpowiadać 95-percentylowi rozkładu empirycznego dla górnego ogona. Taki próg stosują m.in. Neftci [2000] i Sarma [2002]. Francq i Zakoian [2013] wykorzystują 12,5% najwyższych zwrotów do szacowania parametrów rozkładu GP. W rzeczywistości wybór ten powinien zależeć od specyfiki rozważanych szeregów, a szczególnie od ich liczebności. Dla danych wysokiej częstotliwości ze względu na wielość danych można stosować wyższą wartość progową. Istnieje również szereg graficznych metod wyboru progu  $u$  [Coles 2001]. Takie podejście stosuje m.in. McNeil w pracach [McNeil 1997; McNeil 1999].

### 3. Indeks ekstremalny

Naturalnym narzędziem badania struktury zależności wartości ekstremalnych jest wywodzący się z teorii wartości ekstremalnych indeks ekstremalny. Indeks ekstremalny można interpretować na kilka sposobów. W przypadku tu wykorzystywanym najwygodniej jest przyjąć, że jest on prawdopodobieństwem, że przekroczenie wartości progowej  $u_n$  jest ostatnim przekroczeniem w pewnym bloku obserwacji [Chavez-Demoulin, Davison 2012]:

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max\{X_2, \dots, X_{k(n)}\} \leq u_n \mid X_1 \geq u_n). \quad (7)$$

Precyzyjne wyjaśnienie tej wielkości można znaleźć m.in. w pracach [Beirlant i in. 2004; Embrechts, Klüppelberg, Mikosch 1999]. Im wyższa wartość  $\theta \in [0,1)$ , tym mniejsza zależność w szeregu czasowym. Graniczny przypadek  $\theta = 1$  oznacza asymptotyczną niezależność (*asymptotic independence*) w szeregu. Jest on prawdziwy dla szeregów zarówno zmiennych niezależnych, jak i zależnych [Coles 2001, s. 97]. Jednak dla takich szeregów stacjonarnych zależności te zanikają na asymptotycznie wysokim poziomie progę  $u_n$ . W uproszczeniu można powiedzieć, że  $\theta = 1$  oznacza, że prawdopodobieństwo zaobserwowania więcej niż jednego przekroczenia w bloku jest równe zero. W modelu przekroczeń POT najbardziej popularnym estymatorem indeksu ekstremalnego jest estymator Ferro-Segersa [Ferro, Segers 2003]. Bazuje on na analizie czasu między poszczególnymi przekroczeniami wartości progowej  $u$ . Niech

$$N = N(u) = \sum_{i=1}^n I(X_i > u) \quad (8)$$

będzie liczbą przekroczeń wartości  $u$ . Dalej założmy, że  $1 \leq S_1 < \dots < S_N \leq n$  są momentami pojawiania się przekroczeń, wówczas czas między przekroczeniami jest równy:

$$T_i = S_{i+1} - S_i, \text{ dla } i = 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

Estymator interwałowy Ferro-Segersa indeksu ekstremalnego ma postać:

$$\hat{\theta}_n(u) = \frac{2\{\sum_{i=1}^{N-1}(T_i-1)\}^2}{(N-1)\sum_{i=1}^{N-1}(T_i-1)(T_i-2)}. \quad (10)$$

Estymator (10) może przyjmować wartości większe niż 1 i jest nieokreślony, jeśli największy odstęp między poszczególnymi przekroczeniami wynosi 2. Dlatego autorzy ostatecznie definiują estymator interwałowy indeksu ekstremalnego w następujący sposób:

$$\tilde{\theta}_n(u) = \begin{cases} 1 \wedge \hat{\theta}_n(u) & \text{gd}y \max\{T_i: 1 \leq i \leq N-1\} > 2 \\ 1 \wedge \frac{2\{\sum_{i=1}^{N-1}(T_i-1)\}^2}{(N-1)\sum_{i=1}^{N-1}(T_i-1)(T_i-2)} & \text{gd}y \max\{T_i: 1 \leq i \leq N-1\} \leq 2. \end{cases} \quad (11)$$

## 4. Dane empiryczne

W niniejszej pracy analizie empirycznej poddane zostaną szeregi logarytmicznych stóp zwrotu EURPLN i USDPLN. Szeregi pochodzą z prawie pięcioletniego okresu: 01.10. 2010 – 30.09.2014, tak więc obejmują wszystkie stany rynku finansowego. Dane pochodzą z rynku FOREX, a ich źródłem jest platforma Dukascopy. Ceny są kwotowane jako pary bid/ask w odstępach pięciominutowych, a jako ceny quasi-transakcyjne, wykorzystywane w obliczeniach, przyjęto ich średnią geometryczną, zgodnie z procedurą przedstawioną w książce [Daçorogna i in. 2001]. Zwroty częstotliwości niższej niż pięciominutowa uzyskano przez agregację uśrednionych stóp zwrotu. Wszystkie obliczenia zostały przeprowadzone zarówno dla prawych, jak i lewych ogonów rozkładu.

W tabeli 1 przedstawiono statystyki opisowe analizowanych szeregów.

**Tabela 1.** Statystyki opisowe zwrotów w wybranych częstotliwościach

Częstotliwość próbkowania	Liczba obserwacji	Średnia	Odchylenie standardowe	Minimum	Maksimum	Skośność	Nadwyżkowa kurtoza
EURPLN							
5 min	298 615	0,0001	0,0336	-0,6843	0,6942	-0,0522	17,8933
10 min	149 307	0,0001	0,0439	-0,8189	0,6942	-0,0823	15,5588
15 min	99 538	0,0002	0,0517	-0,8493	1,0404	-0,0116	15,1627
30 min	49 769	0,0003	0,0698	-0,8911	0,8850	-0,0256	14,2428
1 h	24 884	0,0006	0,0952	-1,1768	1,1052	0,0875	12,8371
2 h	12 442	0,0013	0,1314	-1,4282	1,1459	0,0720	11,0570
3 h	8 294	0,0019	0,1592	-1,2018	1,2951	0,2431	8,9892
USDPLN							
5 min	299 310	0,0001	0,0525	-3,4484	3,6361	0,1431	232,9361
10 min	14 9655	0,0002	0,0693	-0,0194	0,0196	0,0203	20,2639
15 min	99 770	0,0003	0,0850	-3,5865	3,6980	0,1164	111,8172
30 min	49 885	0,0006	0,1137	-1,6497	1,5613	0,0998	11,9119
1 h	24 942	0,0012	0,1579	-2,0591	1,4712	-0,0293	10,5424
2 h	12 471	0,0024	0,2197	-2,2908	1,8460	0,1649	8,8906
3 h	8 314	0,0036	0,2705	-2,6014	2,3659	0,1197	8,2934

Źródło: opracowanie własne.

Wraz ze zwiększeniem częstości próbkowania zwiększają się, w wartościach bezwzględnych, średnia i odchylenie standardowe oraz wartości ekstremalne. Nadwyżkowa kurtoza maleje z wysokich poziomów dla zwrotów pięciominutowych, szczególnie dla szeregu USDPLN, do relatywnie niskich wartości w przypadku

zwrotów trzygodzinnych. Skośność rozkładu nie wykazuje żadnych stałych zależności dla badanych szeregów, dlatego trudno na podstawie statystyk opisowych porównać grubości lewych i prawych ogonów rozkładu. Przedstawione własności szeregów zwrotów wysokiej częstotliwości pokrywają się z opisanymi w literaturze, m.in. w pracach [Kliber 2013; Będowska-Sójka 2014].

## 5. Grubość ogonów i zależność w ogonach rozkładu – wyniki badań empirycznych

Pierwszym krokiem w stosowaniu modelu POT jest wybór wartości progowej  $u$ . Jak wcześniej wspomniano, nie ma uniwersalnego sposobu na dokonanie tego wyboru. Ze względu na dużą próbę, którą dysponujemy, wartość tę ustalono arbitralnie na poziomie kwantyla 99%. To oznacza, że tylko 1% wszystkich stóp zwrotu jest traktowana jako wartości ekstremalne, leżące w prawym ogonie rozkładu. Analizy ekstremalnych, ujemnych zwrotów dokonuje się podobnie jak dla zwrotów dodatnich, ale po uprzednim pomnożeniu przez  $-1$ . Oszacowania parametrów uogólnionego rozkładu Pareto i błędów standardowych tych oszacowań dla poszczególnych szeregów przedstawiono w tab. 2 dla EURPLN i w tab. 3 dla USDPLN.

**Tabela 2.** Oszacowania parametrów uogólnionego rozkładu Pareto dla EURPLN

Częstotliwość	Lewy		Prawy	
	$\xi$	$\beta$	$\xi$	$\beta$
5 min	***0,208 (0,022)	0,031 (0,001)	***0,169 (0,021)	0,034 (0,001)
10 min	***0,202 (0,032)	0,043 (0,002)	***0,144 (0,029)	0,046 (0,002)
15 min	***0,171 (0,038)	0,053 (0,003)	***0,157 (0,037)	0,052 (0,003)
30 min	***0,162 (0,054)	0,076 (0,005)	***0,151 (0,053)	0,072 (0,005)
1 h	**0,174 (0,085)	0,100 (0,010)	*0,116 (0,076)	0,105 (0,010)
2 h	0,111 (0,121)	0,145 (0,022)	0,025 (0,108)	0,152 (0,021)
3 h	-0,106 (0,113)	0,195 (0,031)	-0,082 (0,135)	0,199 (0,035)

Błędy standardowe umieszczono w nawiasach. Przypadek odrzucenia  $H_0$  w teście ilorazu wiarygodności \* na poziomie istotności 0,1, \*\* na poziomie istotności 0,05 i \*\*\* na poziomie istotności 0,01.

Źródło: opracowanie własne.

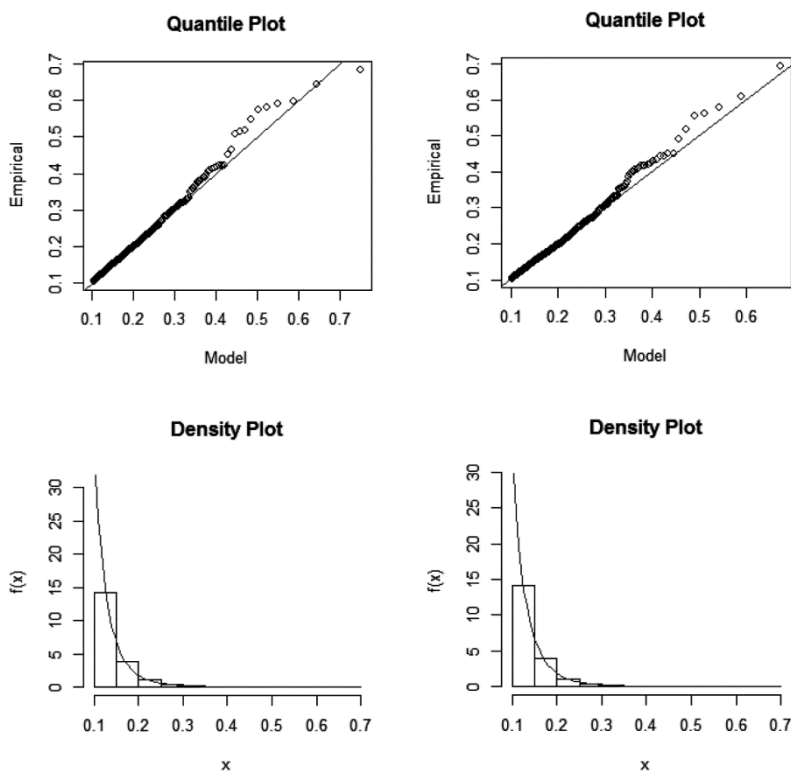
Jakość dopasowania rozkładu GP do danych dla szeregu EURPLN i zwrotów 5-minutowych i 3-godzinnych możemy ocenić, analizując rys. 1 i 2, przedstawiające wykresy kwantylowe i histogramy. Dla ogonów zarówno lewych, jak i prawych dopasowanie charakteryzuje się dużą dokładnością i możemy mówić o zgodności rozkładu teoretycznego i empirycznego. Interpretacji wyników dokonuje

**Tabela 3.** Oszacowania parametrów uogólnionego rozkładu Pareto dla USDPLN

Częstotliwość	Lewy		Prawy	
	$\xi$	$\beta$	$\xi$	$\beta$
5 min	***0,237 (0,021)	0,048 (0,001)	***0,234 (0,021)	0,047 (0,001)
10 min	***0,177 (0,029)	0,068 (0,003)	***0,158 (0,028)	0,069 (0,003)
15 min	***0,219 (0,034)	0,075 (0,003)	***0,192 (0,033)	0,079 (0,004)
30 min	***0,120 (0,049)	0,113 (0,007)	*0,086 (0,049)	0,120 (0,008)
1 h	**0,165 (0,079)	0,153 (0,015)	0,047 (0,084)	0,158 (0,017)
2 h	0,130 (0,114)	0,209 (0,030)	0,029 (0,103)	0,221 (0,030)
3 h	0,092 (0,126)	0,272 (0,045)	0,098 (0,132)	0,226 (0,038)

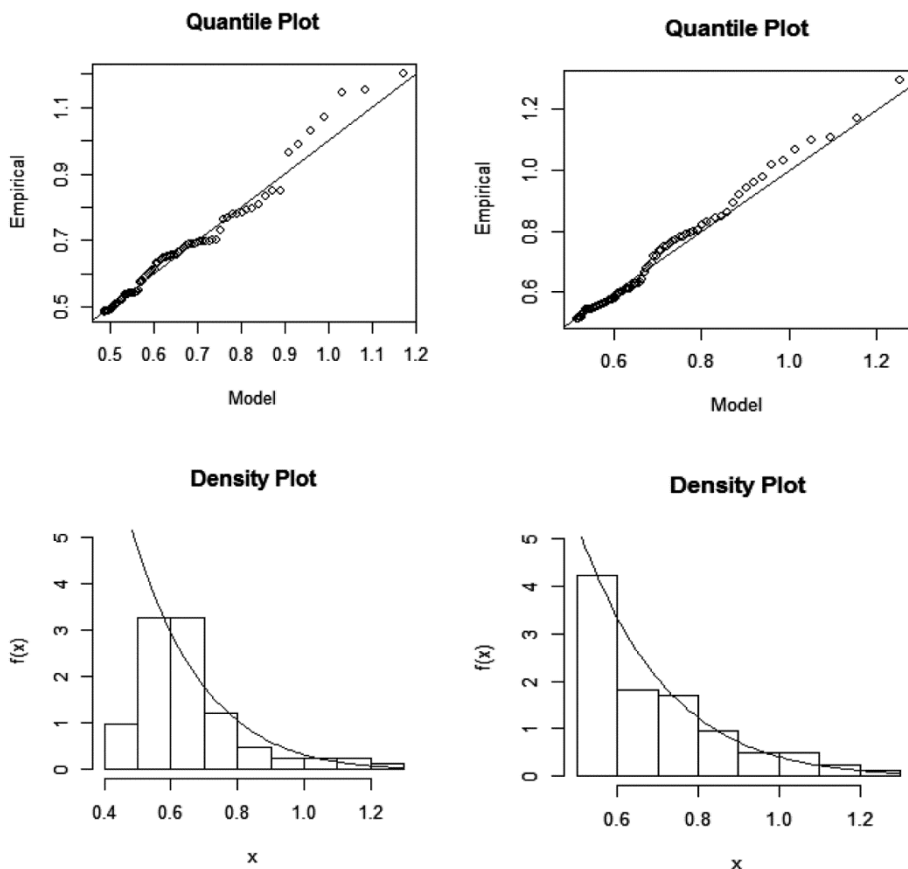
Błędy standardowe umieszczono w nawiasach. Przypadek odrzucenia  $H_0$  w teście ilorazu wiarygodności \* na poziomie istotności 0,1, \*\* na poziomie istotności 0,05 i \*\*\* na poziomie istotności 0,01.

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 1.** Ocena dopasowania uogólnionego rozkładu Pareto do szeregu 5-minutowych zwrotów EURPLN (lewy i prawy ogon)

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 2.** Ocena dopasowania uogólnionego rozkładu Pareto do szeregu 3-godzinnych zwrotów EURPLN (lewy i prawy ogon)

Źródło: opracowanie własne.

my poprzez analizę parametru kształtu. Wspólną cechą obu szeregów są grubsze ogony dla szeregu stóp zwrotu w wyższą częstotliwością, odzwierciedlone w wyższej wartości parametru kształtu (tab. 1 i 2). Ogony dla zwrotów z częstotliwością 5-minutową do 30-minutowej są grube, klasy Fréchet'a. Wraz z coraz większą agregacją zwrotów stają się coraz cieńsze. Parametr kształtu dla zwrotów 3-godzinnych dla EURPLN przyjmuje wartości ujemne, sugerując rozkład klasy Weibulla. Przeprowadzony test ilorazu wiarygodności, będący testem istotności parametru kształtu, wskazuje, że rozkłady stóp zwrotu 2-godzinnych i 3-godzinnych mają ogony cienkie są klasy Gumbela. Jeśli chodzi o porównanie lewych i prawych ogonów, to widoczna jest niewielka asymetria. Ogony lewe są nieco cięższe od prawych dla obu analizowanych kursów walutowych. Biorąc pod uwagę, że analizowane są tu kursy walutowe, należy stwierdzić, że wynik taki jest niespodzianką. Zupełnie odwrotne wyni-

ki uzyskano w pracy [Echaust 2014a], w których analizowano szeregi dziennych stóp zwrotu zrealizowanych na inwestycji w walutowe kontrakty futures. Otrzymany wynik świadczy o tym, że w inwestycjach z kilku- czy kilkunastominutowym horyzontem czasowym większe zmiany ekstremalne na rynku pojawiają się podczas spadków kursów walut EUR i USD.

**Tabela 4.** Oszacowania indeksu ekstremalnego Ferro-Segersa dla EURPLN i USDPLN

Częstotliwość	EURPLN		USDPLN	
	lewy	prawy	lewy	prawy
5 min	0,182	0,175	0,182	0,232
10 min	0,249	0,200	0,177	0,278
15 min	0,221	0,273	0,245	0,284
30 min	0,296	0,263	0,189	0,277
1 h	0,373	0,390	0,395	0,302
2 h	0,327	0,612	0,297	0,401
3h	0,439	0,601	0,304	0,385

Źródło: opracowanie własne.

Oszacowania indeksu ekstremalnego przedstawiono w tab. 4. Im niższa jego wartość, tym większą tendencję wykazuje proces do grupowania wartości ekstremalnych. Stopom zwrotu wyższej częstotliwości odpowiadają niższe wartości indeksu ekstremalnego. W krótkich okresach inwestowania wartości ekstremalne zwrotów pojawiają się w seriach. We wszystkich przypadkach wartości tego indeksu są dalekie od jedności wskazującej na niezależność wartości ekstremalnych. We wszystkich też odbiegają znacznie od wartości uzyskiwanych dla zwrotów dziennych oscylujących w przedziale  $[0,8, 1]$  dla kwantyla rzędu 99% [Echaust 2014b]. To wskazuje na znacznie częstsze grupowanie ekstremalnych zwrotów śróddziennych niż dziennych. Zjawisko to można rozumieć jako bezpośrednią reakcję rynku na docierające informacje opisane przez Petersa [1997]. Reakcja rynku na ogłoszenia makroekonomiczne jest obserwowalna już w 5-minutowym interwale [Będowska-Sójka 2014, s. 71], dlatego rozkłady stóp zwrotu z tak dużą częstotliwością będą miały grube ogony i dużą zależność wartości leżących w ogonach.

## 6. Zakończenie

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki badania własności ogonów rozkładów stóp zwrotu z częstotliwością śróddzienną. Uwzględnione zostały stopy zwrotu 5-, 10-, 15-, 30-minutowe oraz 1-, 2- i 3-godzinne z inwestycji w pary walutowe EURPLN i USDPLN na rynku Forex.



Wyniki badań pokazują, że inwestorzy nazywani day-traderami podejmują tym wyższe ryzyko związane z ekstremalnie wysokimi zmianami cen na rynku walutowym, im krótszy horyzont czasowy inwestycji przyjmują. Rozkłady stóp zwrotu z inwestycji 5-minutowych do 30-minutowych charakteryzują się grubymi ogonami – są klasy Fréchet’a, i wraz z wydłużaniem horyzontu czasowego inwestycji stają się cienkie – klasy Weibulla. Różnice pomiędzy grubością ogonów lewych i prawych są niewielkie, ale to lewe ogony są grubsze, co sugeruje wyższy poziom ryzyka ekstremalnego dla spadków niż dla wzrostów kursu analizowanych walut. Dodatkowo ekstremalne stopy zwrotu wyższej częstotliwości charakteryzują się wyższą zależnością, mają więc większą tendencję do grupowania. Wynik ten oznacza, że inwestorzy podejmujący takie inwestycje muszą mieć świadomość, że potencjalne wysokie straty nie są niezależne i pojawiać się mogą sekwencyjnie.

## Literatura

- Balkema A.A., de Haan L., 1974, *Residual life time at great age*, Annals of Probability, 2(5).
- Beirlant J., Goegebeur Y., Segers J., Teugels J., 2004, *Statistics of Extremes. Theory and Applications*, Wiley, England.
- Będowska-Sójka B., 2014, *Wpływ informacji na ceny instrumentów finansowych. Analiza danych śróddziennych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Chavez-Demoulin V., Davison A.C., 2012, *Modelling time series extremes*, Revstat – Statistical Journal, 10 (1), s. 109-133.
- Coles S.G., 2001, *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer, London.
- Cotter J., 2006, *Extreme value estimation of boom and crash statistics*, The European Journal of Finance, 12 (6-7), s. 553-566.
- Dačorogna M.M., Gencay R., Müller U., Olsen R., Pictet O., 2001, *An Introduction to High Frequency Finance*, Academic Press, London.
- Echaust K., 2014a, *Ryzyko zdarzeń ekstremalnych na rynku kontraktów futures w Polsce*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Echaust K., 2014b, *A comparison of tail behavior of stock market returns*, Folia Oeconomica Stetinensia, 14(22).
- Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T., 1999, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, New York.
- Embrechts P., Sidney I., Resnick S.I., Samorodnitsky G., 1999, *Extreme Value theory as a risk management tool*, North American Actuarial Journal, 3(2).
- Fama E., 1965, *The behavior of stock market prices*, Journal of Business, 38, s. 34-105.
- Ferro C.A.T., Segers J., 2003, *Inference for clusters of extreme values*, Journal of the Royal Statistical Society B, 65(2), s. 545-556.
- Fisher R.A., Tippett L.H.C., 1928, *On the estimation of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, s. 180-190.
- Francq C., Zakořan J.M., 2013, *Estimating the marginal law of a time series with applications to heavy tailed distributions*, artykuł w przygotowaniu do druku w Journal of Business & Economic Statistics.
- Gavin J., 2000, *Extreme value theory – an empirical analysis of equity risk*, UBS Warburg working paper.

- Gnedenko B.V., 1943, *Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire*, Annals of Mathematics, 44, s. s. 423-453.
- Jondeau E., Rockinger M., 2003, *Testing for differences in the tails of stock-market returns*, Journal of Empirical Finance, 10, s. 559-581.
- Kliber P., 2013, *Zastosowanie procesów dyfuzji ze skokami do modelowania polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- LeBaron B., Ritirupa S., 2005, *Extreme value theory and fat tails in equity markets*, Computing in Economics and Finance, 140.
- Longin F.M., 1996, *The asymptotic distribution of extreme stock market returns*, Journal of Business, 69, s. 383-408.
- Longin F., 2001, *Stock market crashes: Some quantitative results based on extreme value theory*, Derivatives Use, Trading and Regulation, 7, s. 197-205.
- Mandelbrot B., 1963, *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business, 36, s. 394-419.
- McNeil A.J., 1997, *Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory*, ASTIN Bulletin, 27, 117-137.
- McNeil A.J., 1999, *Extreme value theory for risk managers. Internal Modelling and CADII*, RISK Books, s. 93-113.
- McNeil A.J., Frey R., 2000, *Estimation of tail – related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach*, Journal of Empirical Finance, 7(3-4), 271-300.
- Neftci S.N., 2000, *Value at Risk calculations, extreme events, and tail estimation*, The Journal of Derivatives, Spring, 1-15.
- Peters E.E., 1997, *Teoria chaosu a rynki kapitalowe*, WIG Press, Warszawa.
- Sarma M., 2002, *Extreme Value Theory and Financial Risk Management*, Fifth Capital Markets Conference at UTI Institute of Capital Markets, Murnbai, India.