

# PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

# RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 446

## Metody i zastosowania badań operacyjnych



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2016

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korlub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korekta: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Myszkowska

Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania  
znajdują się na stronach internetowych

[www.pracnaukowe.ue.wroc.pl](http://www.pracnaukowe.ue.wroc.pl)

[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons

Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska  
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2016

**ISSN 1899-3192**  
**e-ISSN 2392-0041**

**ISBN 978-83-7695-610-7**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana  
Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:  
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław  
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: [econbook@ue.wroc.pl](mailto:econbook@ue.wroc.pl)  
[www.ksiegarnia.ue.wroc.pl](http://www.ksiegarnia.ue.wroc.pl)

Druk i oprawa: TOTEM

## Wstęp

<b>Wstęp</b> .....	7
<b>Krzysztof Echaust:</b> Modelowanie wartości ekstremalnych stóp zwrotu na podstawie danych śróddziennych / Modeling of extreme returns on the basis of intraday data .....	9
<b>Helena Gaspars-Wieloch, Ewa Michalska:</b> On two applications of the Omega ratio: $\max\Omega_{\min}$ and $\Omega(H+B)$ / O dwóch zastosowaniach wskaźnika Omega: $\max\Omega_{\min}$ i $\Omega(H+B)$ .....	21
<b>Agata Gluzicka:</b> Zastosowanie modelu MAD z dodatkowymi warunkami ograniczającymi / Application of the MAD model with additional constraints .....	37
<b>Dorota Górecka, Małgorzata Szalucka:</b> Foreign market entry mode decision – approach based on stochastic dominance rules versus multi-actor multi-criteria analysis / Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny – podejście oparte na dominacjach stochastycznych a wieloaktorska analiza wielokryterialna .....	47
<b>Paweł Hanczar, Dagmara Pisiewicz:</b> Logistyka odzysku – optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej / Reverse logistics – optimization of flows in the system of waste management .....	70
<b>Michał Jakubiak, Paweł Hanczar:</b> Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków / Optimization of municipal solid waste collection and transportation routes on the example of MPO Cracow .....	83
<b>Michał Kameduła:</b> Zastosowanie koewolucyjnego algorytmu genetycznego w rozwiązaniu zadania trójkryterialnego / Application of co-evolutionary genetic algorithm for a three-criterion problem.....	93
<b>Donata Kopańska-Bródka, Renata Dudzińska-Baryła, Ewa Michalska:</b> Zastosowanie funkcji omega w ocenie efektywności portfeli dwuskładnikowych / Two-asset portfolio performance based on the omega function .	106
<b>Marek Kośny, Piotr Peternek:</b> Zagadnienie sposobu definiowania preferencji na przykładzie przydziału uczniów do oddziałów klasowych / Definition of preferences in the context of pupils' allocation to classes .....	115
<b>Wojciech Młynarski, Artur Prędki:</b> Ocena efektywności technicznej i finansowej wybranych nadleśnictw Lasów Państwowych za pomocą metody DEA / Technical and financial efficiency evaluation for selected forestry managements of the State Forests National Forest Holding – the DEA approach.....	126

<b>Piotr Namieciński:</b> Alternatywna metoda określania preferencji decydenta w zagadnieniach wielokryterialnych / Alternative methods of decision-maker preferences identification in multicriteria issues .....	144
<b>Marek Nowiński:</b> Testowanie nieliniowych algorytmów optymalizacyjnych – zestaw funkcji typu <i>benchmark</i> / Testing nonlinear optimization algorithms – set of benchmark type functions .....	159
<b>Agnieszka Przybylska-Mazur:</b> Wybrana metoda analizy długoterminowej stabilności finansów publicznych / The selected method of analysis of the long-term sustainability of public finance .....	173
<b>Ewa Roszkowska, Tomasz Wachowicz, Robert Jankowski:</b> Analiza porozumienia końcowego w negocjacjach elektronicznych w kontekście zgodności systemu oceny ofert negocjatora z informacją preferencyjną/ Analyzing the negotiation agreements in a context of concordance of negotiation offer scoring systems with negotiators' preferential information .....	187
<b>Aleksandra Sabo-Zielonka, Grzegorz Tarczyński:</b> Adaptacja heurystyki <i>s-shape</i> na potrzeby wyznaczenia trasy przejścia w niestandardowym układzie strefy kompletacji zamówień / Adaptation of the s-shape heuristic for the custom layout of the order-picking zone .....	207
<b>Jakub Staniak:</b> Inicjalizacja ukrytych modeli Markowa z wykorzystaniem analizy skupień / Initialization of hidden Markov models by means of clustering analysis.....	224
<b>Paulina Szterlik:</b> Lokalizacja magazynu centralnego z zastosowaniem metod wielokryterialnych / Location of central warehouse using quantitative research .....	237
<b>Grzegorz Tarczyński:</b> Porównanie efektywności kompletacji łączonych zleceń z kompletacją niezależną / An attempt of comparison of order batching with independent order-picking .....	250

## Wstęp

Kolejna, XXXIV Ogólnopolska Konferencja Naukowa im. Profesora Władysława Bukiełyńskiego, organizowana corocznie przez najważniejsze ośrodki naukowe zajmujące się dziedziną badań operacyjnych, w roku 2015 odbyła się w pięknym, zabytkowym i świeżo odremontowanym zespole pałacowo-parkowym w Łagowie koło Zgorzelca. Konferencję zrealizowaną pod nazwą *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* przygotowała Katedra Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu pod kierownictwem dr. hab. Marka Nowińskiego, prof. UE.

Konferencje te mają już długoletnią tradycję – są to coroczne spotkania pracowników nauki specjalizujących się w badaniach operacyjnych. Głównym celem konferencji było, podobnie jak w latach ubiegłych, stworzenie (przede wszystkim dla młodych teoretyków, a także praktyków dyscypliny) forum wymiany myśli na temat najnowszych osiągnięć dotyczących metod ilościowych wykorzystywanych do wspomagania procesów podejmowania decyzji, a także prezentacja nowoczesnych zastosowań badań operacyjnych w różnych dziedzinach gospodarki. Ten cenny dorobek naukowy nie może być zapomniany i jest publikowany po konferencji w postaci przygotowywanego przez organizatorów zeszytu naukowego zawierającego najlepsze referaty na niej zaprezentowane.

W pracach Komitetu Naukowego Konferencji uczestniczyli czołowi przedstawiciele środowisk naukowych z dziedziny badań operacyjnych w Polsce; byli to: prof. Jan B. Gajda (Uniwersytet Łódzki), prof. Stefan Grzesiak (Uniwersytet Szczeciński), prof. Bogumił Kamiński (SGH w Warszawie), prof. Ewa Konarzewska-Gubała (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), prof. Donata Kopańska-Bródka, prof. Maciej Nowak i prof. Tadeusz Trzaskalik (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), prof. Dorota Kuchta (Politechnika Wrocławska), prof. Krzysztof Piasecki (Uniwersytet w Poznaniu) i prof. Józef Stawicki (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu).

Zakres tematyczny konferencji obejmował teoretyczne i praktyczne zagadnienia dotyczące przede wszystkim:

- modelowania i optymalizacji procesów gospodarczych,
- metod wspomagających proces negocjacji,
- metod oceny efektywności i ryzyka na rynku kapitałowym i ubezpieczeniowym,
- metod ilościowych w transporcie i zarządzaniu zapasami,
- metod wielokryterialnych,
- optymalizacji w zarządzaniu projektami oraz analizy ryzyka decyzyjnego.

W konferencji wzięło udział 43 przedstawiciele różnych środowisk naukowych, licznie reprezentujących krajowe ośrodki akademickie. W trakcie sześciu sesji ple-

narych, w tym dwóch sesji równoległych, przedstawiono 27 referatów, których poziom naukowy w przeważającej części był bardzo wysoki. Zaprezentowane referaty, po pozytywnych recenzjach, zostają dziś opublikowane w Pracach Naukowych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu w postaci artykułów naukowych w specjalnie wydany zeszycie konferencyjnym.

Przypominając przebieg konferencji, nie można nie wspomnieć o konkursie zorganizowanym dla autorów referatów niebędących samodzielnymi pracownikami nauki. Dotyczył on prezentacji najciekawszego zastosowania badań operacyjnych w praktyce gospodarczej. Komitet Organizacyjny Konferencji powołał kapitułę konkursu, w której skład weszli: prof. Ewa Konarzewska-Gubała – przewodnicząca, prof. Jan Gajda, prof. Stefan Grzesiak i prof. Donata Kopańska-Bródka. Członkowie Komisji Konkursowej oceniali referaty ze względu na:

- innowacyjność, oryginalność metody będącej przedmiotem zastosowania,
- znaczenie zastosowania dla proponowanego obszaru,
- stopień zaawansowania implementacji metody w praktyce.

Spośród 15 referatów zgłoszonych wyróżniono: 1. miejsce: dr Michał Jakubiak i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków*; 2. miejsce: mgr Dagmara Piesiewicz i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Logistyka odzysku – optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej*; 3. miejsce: dr Dorota Górecka i dr Małgorzata Szałucka (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), *Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny – wieloaktorska analiza wielokryterialna a podejście oparte na dominacjach stochastycznych*.

Przy okazji prezentowania opracowania poświęconego XXXIV Konferencji *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* i jej bardzo wartościowego dorobku nie możemy nie podziękować członkom Komitetu Organizacyjnego Konferencji, w którego skład wchodził młodzi, acz doświadczeni pracownicy Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu: dr Piotr Peternek (sekretarz), dr hab. Marek Kośny, dr Grzegorz Tarczyński oraz mgr Monika Stańczyk (biuro konferencji). Zapewnili oni w sposób profesjonalny sprawne przygotowanie i przeprowadzenie całego przedsięwzięcia oraz zadbali o sprawy administracyjne związane z realizacją konferencji, a także byli odpowiedzialni za dopilnowanie procesu gromadzenia i redakcji naukowych materiałów pokonferencyjnych, które mamy okazję Państwu dziś udostępnić.

Już dzisiaj cieszymy się na nasze kolejne spotkanie w ramach jubileuszowej XXXV Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej im. Profesora Władysława Bukietyńskiego, która tym razem będzie organizowana przez naszych przyjaciół z Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu pod kierownictwem prof. dr. hab. Krzysztofa Piaseckiego.

*Marek Nowiński*

**Michał Kameduła**

Uniwersytet Łódzki  
e-mail: [michal\\_kamedula@o2.pl](mailto:michal_kamedula@o2.pl)

---

## ZASTOSOWANIE KOEWOLUCYJNEGO ALGORYTMU GENETYCZNEGO W ROZWIĄZANIU ZADANIA TRÓJKRYTERIALNEGO

## APPLICATION OF CO-EVOLUTIONARY GENETIC ALGORITHM FOR A THREE-CRITERION PROBLEM

---

DOI: 10.15611/pn.2016.446.07

JEL Classification: C63, G11

**Streszczenie:** Optymalizacja wielokryterialna na zmiennych ciągłych zwykle wykorzystuje jedynie dwa kryteria jednocześnie. Nie jest to jednak wymagane i stosując odpowiednio przystosowane metody, możliwe jest uwzględnienie znacznie większej ich liczby. W pracy przedstawiono metodę pozwalającą rozwiązać zadanie trójkryterialne za pomocą algorytmu genetycznego. Wykorzystano do tego mechanizm koewolucji, czyli jednoczesnego przetwarzania wielu oddzielonych od siebie, ale wciąż powiązanych podpopulacji. Przypisując każdej z nich odmienne wagi kryteriów funkcji celu, możliwe jest uzyskanie zestawu rozwiązań suboptymalnych w sensie Pareto. Do przetestowania zaproponowanej metody wykorzystano algorytm wyboru optymalnego portfela akcji. Jako kryteria zastosowano oczekiwaną stopę zwrotu oraz semiwariancję górną i dolną. Uzyskana funkcja trójkryterialna jest w rezultacie nieciągła i nieróżniczkowalna. Nie można więc znaleźć jej optimum z wykorzystaniem klasycznych algorytmów optymalizacyjnych. Wyniki przeprowadzonych testów potwierdziły techniczną skuteczność proponowanej metody, choć trzeba zaznaczyć, że zwykle do wyboru optymalnego portfela wariant dwukryterialny z odpowiednio dobraną miarą ryzyka powinien być w zupełności wystarczający.

**Słowa kluczowe:** algorytmy genetyczne, wielokryterialność, koewolucja, optymalizacja portfela.

**Summary:** In this work we present a relatively simple method of adapting a genetic algorithm to a triple-criterion problem by using co-evolution. By running the calculations for multiple – distinctly different yet connected, sub-populations we can easily generate a set of Pareto-optimal solution for a multi-criterion problem. The proposed method is tested for a portfolio optimization algorithm using expected returns as well as upper and lower semivariance. The results prove that the proposed method is an effective tool for multi-criteria optimisation of a numerically difficult functions.

**Keywords:** genetic algorithms, multi-criteria optimization, co-evolution.

## 1. Wstęp

Rozważając wielokryterialne zadania optymalizacyjne dla ciągłych zmiennych decyzyjnych, zazwyczaj pod uwagę bierze się najwyżej dwa kryteria wpływające na wartość funkcji celu. Wyznacza się dla nich zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Są to rozwiązania, dla których nie można poprawić wartości jednego kryterium, nie pogarszając przy tym drugiego.

Typowym przykładem takiego zadania jest wybór optymalnego składu portfela inwestycyjnego [Markowitz 1970]. Przyjmuje się, że inwestor dąży do osiągnięcia możliwie najwyższego zysku. Jednakże papiery wartościowe o wysokiej oczekiwanej stopie zwrotu charakteryzują się też dużymi wahaniami swoich cen. Zakupienie tylko pojedynczego aktywu o wysokiej stopie zwrotu wiązałoby się więc również z dużym ryzykiem poniesienia straty. Aby ograniczyć to ryzyko, inwestorzy dokonują dywersyfikacji portfela, godząc się na osiągnięcie niższego, ale przy tym znacznie stabilniejszego zysku. Tak więc optymalizacja składu portfela jest zadaniem dwukryterialnym, w którym jednocześnie maksymalizowany jest oczekiwany zysk i minimalizowane ryzyko inwestycji.

Pojęcie optymalności w sensie Pareto może jednak być z powodzeniem zastosowane także dla większej liczby kryteriów. Optymalne są wówczas takie rozwiązania, dla których wartość żadnego z nich nie może wzrosnąć, nie pogarszając co najmniej jednego z pozostałych. W pracy tej zaproponowana została metoda rozwiązania takiego zadania dla trzech kryteriów z wykorzystaniem algorytmu genetycznego.

## 2. Zadanie optymalizacji portfela

Teoria portfela giełdowego została opracowana w połowie ubiegłego wieku przez amerykańskiego uczonego Harry'ego Markowitza. Przed opublikowaniem jego teorii zakładano, że inwestorzy giełdowi dążą do maksymalizacji oczekiwanego zysku. Nie odpowiadało to jednak giełdowej rzeczywistości. Gdyby inwestorzy dążyli wyłącznie do maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu, to powinni kupować akcje tylko pojedynczej spółki, którą uważają za najbardziej zyskową. Tymczasem zdecydowana większość graczy giełdowych dokonuje dywersyfikacji swoich inwestycji. Markowitz zaproponował więc, żeby zagadnienie wyboru optymalnego portfela traktować jako zadanie dwukryterialne. Pierwszym wskaźnikiem decydującym o wyborze portfela miał być według niego, tak jak wcześniej zakładano, oczekiwany zysk. Drugim z kolei było ryzyko, jakie wiązało się z podjęciem inwestycji.

Oceny oczekiwanego zysku można dokonać za pomocą średnich historycznych stóp zwrotu. Oszacowanie ryzyka jest jednak bardziej skomplikowane. W pierwotnej i najbardziej do dziś rozpowszechnionej wersji swojego modelu Markowitz wykorzystał do tego celu wariancję stopy zwrotu. Miara ta ma jednak dość istotną wadę. Jako jednakowo niekorzystne traktuje ona zarówno odchylenia w dół, jak i w górę od wartości średniej. Tymczasem inwestorzy jako niepożądane w większości traktu-



ją wyłącznie te wahania kursu, które przynoszą im stratę. Takie podejście nazywane jest negatywną koncepcją ryzyka [Jajuga 2007, s. 13].

Właściwszą miarą ryzyka według Markowitza była semiwariancja dolna. W szczególności zaś zalecał on stosowanie semiwariancji dolnej celowej, mierzącej odchylenia nie od średniej, ale od wybranego poziomu stopy zwrotu, który inwestor uznaje za zadowalający [Markowitz 1970, s. 188-201]. Jest to jednak miara nieciągła i nieróżniczkowalna [DeFusco i in. 2013, s. 111]. Tym samym nie można zastosować jej jako kryterium dla klasycznych metod optymalizacji wykorzystujących gradient funkcji celu.

Interesujące wyniki badań dotyczących wykorzystania semiwariancji dla polskiego rynku akcji można znaleźć między innymi w pracach Rutkowskiej-Ziarko [Rutkowska-Ziarko 2003; 2005]. Autorka przedstawia w nich zalety stosowania tej właśnie miary na przykładach empirycznych badań kursów akcji z GPW. Wskazuje też jednak na liczne trudności związane z jej stosowaniem.

Jedną z możliwych metod obejścia problemów wynikających z użycia semiwariancji jest wykorzystanie do obliczeń algorytmu genetycznego. Już w latach 70. ubiegłego stulecia De Jong wykazał, że algorytmy tej klasy potrafią skutecznie znaleźć rozwiązania bliskie optymalnym nawet dla funkcji nieciągłych [Goldberg 2003, s. 122-136].

Zwróćmy w tym miejscu uwagę, że odchylenia stopy zwrotu w górę od oczekiwanego poziomu są w istocie rzeczy korzystne dla inwestorów. Pozwalają one na osiągnięcie dodatkowych zysków. Większość graczy giełdowych nie ma więc nic przeciwko ponoszeniu takiego pozytywnego ryzyka. Tym samym rozsądnym wydaje się uwzględnić je jako dodatkowe kryterium wpływające korzystnie na ocenę portfela. Do ich pomiaru możemy użyć semiwariancji górnej. Rozważana funkcja celu będzie więc miała postać:

$$FP = w_1R + w_2S^+ - w_3S^-$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1,$$

gdzie:  $R$  – stopa zwrotu z portfela,  $S^+$  – semiwariancja celowa górna stopy zwrotu,  $S^-$  – semiwariancja celowa dolna stopy zwrotu,  $w_1, w_2, w_3$  – wagi przypisane poszczególnym kryteriom.

Należy przy tym zachować również warunki dopuszczalności portfeli, czyli:

$$\sum_{i=1}^n u_i = 1$$

$$u_i \in (0,1),$$

gdzie:  $u_i$  – udział  $i$ -tej spółki w portfelu,  $n$  – liczba branych pod uwagę spółek.

Ostatecznie otrzymujemy trójkryterialną funkcję celu, która jednocześnie jako nieciągła i nieróżniczkowalna jest bardzo interesująca od strony numerycznej. Fakt, że nieciągłe funkcje nie mogą być zastosowane w klasycznych metodach optymalizacji, jest tu niezwykle istotny. Algorytmy genetyczne są znacznie kosztowniejsze obliczeniowo, a dodatkowo nie dają gwarancji znalezienia dokładnego rozwiązania. Stosowanie ich w zadaniach, które można łatwo rozwiązać innymi metodami, jest więc zwykle niepraktyczne. W przypadku funkcji nieciągłych wykorzystanie metod heurystycznych staje się jednak koniecznością.

Interesującą kwestią jest też, czy zastosowanie dodatkowego kryterium istotnie zmieni wyznaczone portfele w porównaniu z wynikami uzyskanymi tylko dla zysku i pojedynczej miary ryzyka.

### 3. Algorytmy genetyczne

Algorytmy genetyczne są grupą metod metaheurystycznych wzorowanych na zachodzących w przyrodzie procesach dziedziczenia cech w kolejnych pokoleniach. Są one metodami przybliżonymi, przygotowywanymi według pewnego zbioru ogólnych zasad. W przeciwieństwie do klasycznych metod optymalizacji operują one nie na pojedynczym rozwiązaniu zadania, ale na pewnym ich zbiorze nazywanym populacją. Poszczególne rozwiązania, nazywane też osobnikami, zapisywane są w odpowiednio dobrej dla danego zadania zakodowanej postaci.

W działaniu typowego algorytmu genetycznego wyróżnić można kilka podstawowych etapów. Najpierw należy wyznaczyć początkowy skład populacji. Zwykle dokonuje się tego losowo. Dla każdego utworzonego rozwiązania wyznacza się wartość funkcji przystosowania opisującej jego jakość. Jest ona odpowiednikiem funkcji celu w klasycznych metodach optymalizacyjnych. Na podstawie wartości tej funkcji dokonuje się selekcji osobników, które wezmą udział w krzyżowaniu. Samo krzyżowanie polega na wymianie fragmentów kodów wybranych rozwiązań, najczęściej w parach, pomiędzy nimi. Dokładny sposób przeprowadzenia tej operacji zależy od przyjętego sposobu zapisu kodów rozwiązań. Po jej zakończeniu otrzymuje się nowy zestaw osobników, zastępujących całość lub część starej populacji jako nowe pokolenie. Kolejne pokolenia, dzięki odpowiedniej strukturze selekcji i krzyżowania, powinny w toku działania algorytmu charakteryzować się coraz lepszymi wartościami przystosowania.

Nowe osobniki mogą jeszcze zostać poddane mutacji, czyli niewielkim losowym zaburzeniom ich zapisów kodowych. Wpływ tej operacji bywa różny zależnie od konkretnej implementacji algorytmu. Generalnie służy ona jednak zapobieżeniu blokadzie algorytmu w lokalnym ekstremum funkcji przystosowania lub zwiększeniu efektywności lokalnego przeszukiwania obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

Po utworzeniu nowego pokolenia sprawdzane są warunki zatrzymania obliczeń. Zwykle jest to osiągnięcie odpowiedniej liczby pokoleń lub też zaobserwowanie dostatecznie małych zmian przystosowania rozwiązań w kolejnych iteracjach. Jeśli

warunek zatrzymania jest spełniony, obliczenia zostają zakończone, zaś jeśli nie, wraca się do etapu selekcji.

#### 4. Koewolucja

W przypadku optymalizacji na zmiennych ciągłych znalezienie wszystkich rozwiązań optymalnych w sensie Pareto jest niepraktyczne, gdyż jest ich nieskończenie wiele. Teoretycznie można zbadać preferencje konkretnych decydentów i wyznaczyć jedno tylko rozwiązanie dokładnie odpowiadające ich oczekiwaniom. Precyzyjne przełożenie, często nie do końca nawet uświadomionych, oczekiwań decydenta na wartości liczbowe jest jednak bardzo trudne. Zazwyczaj wyszukuje się więc pewien zestaw rozwiązań optymalnych w sensie Pareto, które równomiernie pokrywają dostępne możliwości i pozostawia dokonanie ostatecznego wyboru samemu decydentowi [Laumans i in. 2001, s. 4-5].

Aby znaleźć taki zestaw za pomocą algorytmu genetycznego, wykorzystuje się mechanizm nisz ewolucyjnych [Goldberg 2003; Arabas 2001]. Polega on na wydzieleniu w populacji pewnych podgrup skupionych w wydzielonych fragmentach przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych. Istnieje wiele różnych technicznych podejść do implementacji tego mechanizmu. Podstawą jego sprawnego działania jest jednak zawsze modyfikacja procesu selekcji osobników do krzyżowania. W klasycznym algorytmie genetycznym, w którym poszukujemy tylko jednego rozwiązania, dobrze przystosowane osobniki szybko skupiają się na niewielkim obszarze. W zadaniach wielokryterialnych rozwiązania optymalne w sensie Pareto będą jednak znacznie bardziej rozproszone. W efekcie powstaje ryzyko, że krzyżując ze sobą dwa dobre rozwiązania, otrzymamy potomków nie przypominających żadnego z rodziców i do tego potencjalnie znacznie słabiej od nich przystosowanych. Dlatego też wskazane jest, aby krzyżowane były tylko osobniki w pewnym stopniu podobne do siebie.

Jednym z prostszych sposobów zaimplementowania nisz jest wykorzystanie koewolucji [Arabas 2001, s. 210, 236-239; Shapcott 1992]. Polega ona na podzieleniu przetwarzanej populacji rozwiązań na kilka mniejszych podzbiorów nazywanych podpopulacjami. Są one od siebie wyraźnie, choć nie całkowicie oddzielone. Dla sprawnego działania algorytmu dopuszczona jest ograniczona wymiana informacji genetycznych pomiędzy poszczególnymi niszami.

Koewolucja została stworzona z myślą o prowadzeniu obliczeń równoległych z wykorzystaniem wielu komputerów na raz. W takim przypadku między podpopulacjami nie występowały żadne istotne różnice i we wszystkich poszukiwano tego samego rozwiązania optymalnego. Szybko zorientowano się jednak, że technikę tę można w łatwy sposób wykorzystać do symulowania ewolucji w odmiennych niszach ekologicznych.

Warunki, w jakich ewoluuje populacja, opisane są wspomnianą już wcześniej funkcją przystosowania. Im lepsza jest wartość tej funkcji dla danego osobnika, tym lepiej dostosował się on do otaczającego go środowiska. Tym samym, jeśli w wy-

dzielonych podpopulacjach wprowadzone zostaną pewne modyfikacje tej funkcji, to należące do nich osobniki ewoluowały będą w odmiennym środowisku.

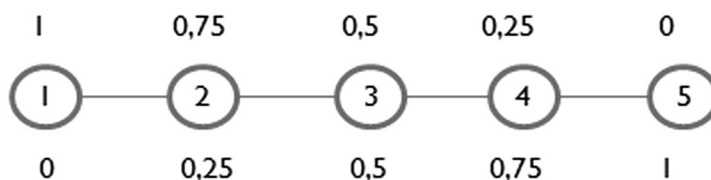
## 5. Koewolucja w zadaniach wielokryterialnych

W zadaniach wielokryterialnych najłatwiej jest zmodyfikować funkcję przystosowania zmieniając wagi, jaki przypisujemy w niej poszczególnym kryteriom. Dla dwóch kryteriów nisze można przedstawić jako ułożone na prostym odcinku. Jeśli rozważymy zadanie optymalizacji portfela inwestycyjnego w którym maksymalizujemy zysk i minimalizujemy ryzyko to układ taki przedstawia rys. 1.

Wagi w sąsiadujących niszach ulegają zmianom według bardzo prostych wzorów. Oznaczmy:

- $w_{zi}$  – waga zysku w  $i$ -tej niszy,
- $w_z^{max}, w_z^{min}$  – maksymalna i minimalna dopuszczalna wartość wagi zysku,
- $w_{ri}$  – waga ryzyka w  $i$ -tej niszy,
- $n_i$  – liczba nisz wydzielonych w populacji,
- $i$  – numer niszy z zakresu od 1 do  $n_i$ .

### Wagi zysku



### Wagi ryzyka

Rys. 1. Układ nisz w zadaniu dwukryterialnym optymalizacji portfela

Źródło: opracowanie własne.

Wartości wag w każdej niszy możemy wyznaczyć jako:

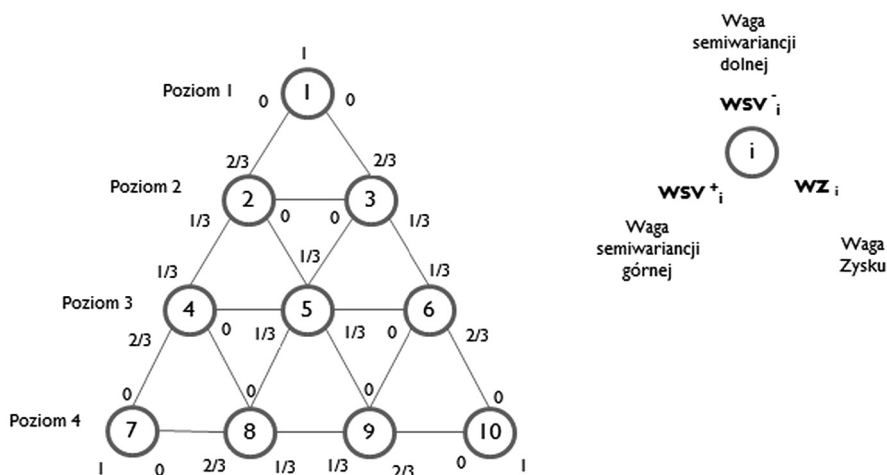
$$w_{zi} = w_z^{max} - \left(\frac{i-1}{n_i-1}\right) (w_z^{max} - w_z^{min}),$$

$$w_{ri} = w_z^{min} + \frac{i-1}{n_i-1} (w_z^{max} - w_z^{min}).$$

W takim przypadku można intuicyjnie przyjąć że jako sąsiadujące traktowane będą nisze o numerach różniących się o 1.

Gdy jednak rozważymy zadanie trójkryterialne, powiązania między podpopulacjami wyraźnie się komplikują. Nisze najłatwiej jest wtedy przedstawić jako ułożone

w obrębie trójkąta. Każda z nich ma przypisane trzy wartości wag. Dla uproszczenia przyjmijmy tym razem, że wagi każdego z kryteriów mogą przyjmować wartości z zakresu od 0 do 1. Przykładową strukturę populacji w zadaniu o trzech kryteriach przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Układ nisz w zadaniu dwukryterialnym

Źródło: opracowanie własne

Zauważmy, że przedstawiony tu trójkąt podzielony został na cztery poziomy. Każdy poziom zawiera liczbę nisz równą jego numerowi. Tak więc poziom pierwszy składa się tylko z jednej niszy, drugi z dwóch itd. Jeśli oznaczymy numery poziomów jako  $P_j$ , a ich łączną liczbę jako  $n_j$ , to łączna liczba nisz w populacji  $n_i$  będzie wynosiła:

$$n_i = \sum_{j=1}^{n_j} P_j.$$

Z tego względu warto jest zaprogramować algorytm w taki sposób, żeby parametrem kontrolującym podział populacji była nie sama liczba nisz, ale właśnie liczba poziomów. Podejście takie jest też bardziej intuicyjne, jeśli przedstawimy je jako wybór liczby wariantów wagi każdego z parametrów.

Pozostaje jeszcze wyjaśnić, jak kształtują się same wagi. Dla pierwszego kryterium, czyli w powyższym przykładzie semiwariancji celowej dolnej, waga zależna jest od poziomu do którego przypisana jest dana nisza:

$$w_{SV^-i} = 1 - \left( \frac{P_j(i) - 1}{n_j - 1} \right).$$

Wyznaczenie wag dwóch pozostałych kryteriów jest nieco bardziej skomplikowane. Ich łączna suma zależna jest od poziomu, ale jednocześnie wartości każdego z nich zależą też od liczby nisz w danym poziomie. Oznaczmy numer nisz w obrębie danego poziomu jako  $k$ . Pamiętajmy przy tym, że zachodzi zawsze  $k \leq P_j$ . Wagi drugiego i trzeciego kryterium, czyli semiwariancji celowej górnej i zysku, można zapisać jako:

$$w_{SV+i} = \left( \frac{P_j(i)-1}{n_j-1} \right) - \left( \frac{k(i)-1}{n_j-1} \right),$$

$$w_{zi} = \left( \frac{k(i)-1}{n_j-1} \right).$$

Zauważmy też, że wcale nie jest konieczne, aby wagi kryteriów przyjmowały zawsze wartości od 0 do 1, choć zwykle rozsądnie jest nie wychodzić poza ten przedział. Można jednak z powodzeniem ograniczyć wartości kryteriów w jego obrębie. Najprostszym sposobem jest przeprowadzenie obliczeń normalnie, a następnie wybranie do analizy wyników tylko z tych nisz, które spełniają narzucone kryteria. Możliwe jest również nałożenie ograniczeń na wartości wag w samym algorytmie, choć może okazać się to dość skomplikowane.

W zadaniach dwukryterialnych zmiana jednego kryterium pociąga za sobą odpowiadającą mu zmianę drugiego. Tak więc gdybyśmy chcieli, aby maksymalna waga zysku wynosiła tylko 0,8 zamiast 1, to jednocześnie musimy przyjąć, że minimalna waga ryzyka wynosi 0,2. Wynika to z faktu, że zwykle przyjmujemy, iż wagi powinny sumować się do jedności. Nie jest to ściśle wymagane do sprawnego działania algorytmu, ale ułatwia interpretację wyników.

W przypadku zadania trójkryterialnego zmiana jednej z wag wpływa równocześnie na dwie pozostałe. Nie jest to problemem, jeśli wszystkie wagi mają przyjmować wartości z tego samego przedziału. Trudności pojawiają się, gdy chcemy nałożyć ograniczenie tylko dla części kryteriów. Na przykład, gdy ponownie przyjmiemy, że maksymalna waga zysku ma wynosić 0,8, możemy ją osiągnąć, gdy waga semiwariancji górnej wyniesie 0,2, a dolnej 0,2, a górnej 0, lub obie ich wagi będą wynosiły 0,1. Jednocześnie nałożenie ograniczenia na wagę jednej z semiwariancji ogranicza też wartości dostępne dla drugiej z nich, gdy waga zysku wynosi 0.

Najłatwiej jest rozwiązać ten problem, usuwając z populacji nisz niepełniające kryteriów. Jest to więc równoznaczne z przeprowadzeniem obliczeń dla pełnej populacji i sprawdzeniem wyników tylko z wybranych nisz. Usunięcie zbędnych podpopulacji już na etapie prowadzenia obliczeń wymaga dodatkowego nakładu pracy podczas pisania programu, ale pozwala za to skrócić same obliczenia. Czy poniesienie dodatkowych nakładów na implementację algorytmu jest uzasadnione od strony kosztowej zależy już od konkretnego problemu i tego ile czasu będą zajmowały prowadzone obliczenia?

Ostatnim problemem, o którym warto wspomnieć, jest ustalenie zasad sąsiedowania nisz. W zadaniu dwukryterialnym było to bardzo proste. Sąsiedowały ze sobą

nisze o numerach różniących się o jeden. Wszystkie podpopulacje poza skrajnymi miały więc dwóch sąsiadów. W zadaniu o trzech kryteriach definicje sąsiedztwa są bardziej skomplikowane, gdyż liczba sąsiadów zależna jest od położenia niszy w obrębie trójkąta. Te podpopulacje, które są na jego rogach, mają dwóch sąsiadów. Nisze z krawędzi, ale nie z rogów, mają sąsiadów czterech. Wreszcie te, które znajdują się we wnętrzu trójkąta, sąsiadują aż z sześcioma innymi. Tak więc definiując w programie powiązania między niszami, należy użyć odpowiednich funkcji warunkowych.

## 6. Uzyskane wyniki

Do testów opisanego mechanizmu koewolucji wykorzystano algorytm genetyczny kodujący rozwiązania w liczbach rzeczywistych. Obliczenia przeprowadzono na danych o kursach spółek z indeksu WIG20 za okres od czerwca 27.06.2013 do 3.01.2014.

Rozwiązania składały się z 20 genów. Każdy z nich zawierał liczbę rzeczywistą z określonego z góry przedziału i odpowiadał jednej ze spółek z indeksu. Skład portfela był ustalany na podstawie udziału wartości genów poszczególnych spółek w sumie wszystkich genów osobnika. Krzyżowanie polegało na przeniesieniu wartości genu losowo wybranego rodzica i jej korekcie ze względu na sumę genów obu rodziców. Dokonując wyboru rodziców, algorytm losowo ustalał też, czy powinni oni pochodzić z tej samej niszy, czy z dwóch sąsiednich. Mutacja prowadzona była poprzez niewielką losową zmianę wartości wybranych genów w górę lub w dół. Dokładny opis dwukryterialnej wersji zastosowanego algorytmu można znaleźć w artykule autora niniejszego tekstu opublikowanym w 2015 r. [Kameduła 2015]. Ponieważ koewolucja modyfikuje jedynie procedurę selekcji rozwiązań do krzyżowania, pozostałe mechanizmy genetyczne pozostały niezmienione w wersji dla trzech kryteriów.

Wykorzystano populację złożoną z pięciu poziomów, czyli łącznie z piętnastu nisz. Wagi poszczególnych kryteriów przyjmowały wartości z przedziału od 0 do 1 i zmieniały się o 0,25. W końcowych rozwiązaniach znalazły się akcje dziesięciu z spośród dwudziestu analizowanych spółek. Zestawienie uzyskanych portfeli przedstawia tab. 1.

Możemy wyróżnić dwie grupy rozwiązań. W pierwszej z nich uzyskano w różnym stopniu zdywersyfikowane portfele. Te rozwiązania były bardzo stabilne w kolejnych przebiegach obliczeń. Drugą grupę stanowiły rozwiązania złożone z akcji tylko pojedynczej spółki. Ich znalezienie sprawiało znacznie więcej problemów. Trudności te były jednak spowodowane przede wszystkim działaniem mechanizmów krzyżowania i mutacji.

Zauważmy, że pełna koncentracja portfela oznacza konieczność wyzerowania wszystkich poza jedną zmiennych danego rozwiązania. Tymczasem, przenosząc wartości genów od wybranego rodzica, zero w procesie krzyżowania możemy uzyskać tylko, gdy występowało ono już w poprzednim pokoleniu. Krzyżowanie samo



**Tabela 1.** Portfele uzyskane w testach algorytmu

Wagi kryteriów			Portfele										Wartości kryteriów			FP
R	SV+	SV-	MBANK	BOR.	SYNTHOS	EUROC.	BOGD.	PEKAO	PKOBP	ASSECO	TAURON	TPSA	R	SV+	SV-	
0	0	1	0	0,1974	0,1216	0,0285	0,1365	0,0859	0,0893	0,0260	0,0745	0,2404	0,17469	0,60182	0,29102	-0,29102
0	0,25	0,75	0	0,1126	0,3087	0,0008	0,1143	0,0285	0,1097	0	0,0521	0,2732	0,19701	0,88239	0,35087	-0,04255
0,25	0	0,75	0	0,2065	0,1354	0,0109	0,1507	0,0986	0,0680	0,0212	0,0533	0,2555	0,18584	0,62264	0,29285	-0,17318
0	0,5	0,5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,24128	3,14080	1,42741	0,85669
0,25	0,25	0,5	0	0	0,7645	0	0	0	0	0	0	0,2355	0,23672	2,18323	0,89731	0,15633
0,5	0	0,5	0,0104	0,2205	0,1565	0	0,1748	0,1160	0,0265	0,0104	0,0016	0,2834	0,20302	0,66475	0,30382	-0,05040
0	0,75	0,25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,23612	3,60747	1,89994	2,23061
0,25	0,5	0,25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,23612	3,60747	1,89994	1,38778
0,5	0,25	0,25	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,24128	3,14080	1,42741	0,54899
0,75	0	0,25	0,0400	0,2058	0,1888	0	0,1847	0,0737	0	0	0	0,3069	0,21107	0,72055	0,31648	0,07918
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,23612	3,60747	1,89994	3,60747
0,25	0,75	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,23612	3,60747	1,89994	2,76463
0,5	0,5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,23612	3,60747	1,89994	1,92179
0,75	0,25	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,23612	3,60747	1,89994	1,07896
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,24128	3,14080	1,42741	0,24128

Źródło: opracowanie własne.



w sobie pozwalało wprawdzie uzyskać bardzo niskie udziały poszczególnych spółek, ale ich kompletne wyzerowanie zależne było od sprawnego działania znacznie powolniejszego mechanizmu mutacji.

Problem stanowił też wybrany do testów zestaw danych, w którym wyniki Synthosu i MBanku były bardzo podobne. Synthos charakteryzował się minimalnie większym oczekiwanym zyskiem i nieco mniejszymi wahaniami kursu. Mimo tego rozwiązania dla większości silnie skoncentrowanych portfeli również były stabilne w kolejnych przebiegach algorytmu. Tylko pojedyncze nisze wskazywały jako lepsze raz akcje jednej, a raz drugiej z tych spółek.

Z technicznego punktu widzenia dobrze by było, gdyby algorytm potrafił skutecznie wygenerować takie skoncentrowane rozwiązania. W zadaniu optymalizacji portfela nie są one jednak zazwyczaj interesujące. Dokonując analizy portfelowej, inwestor zwykle chce zdywersyfikować swoją inwestycję. Korzystne może więc okazać się ograniczenie dopuszczalnego przedziału wag do nieco węższego zakresu niż 0 do 1, lub przynajmniej przyjęcie minimalnej wartości wagi semiwariancji dolnej na poziomie powyżej zera.

Pomijając wskazane problemy, trzeba jednak przyznać, że pod względem samego rozwiązania problemu trójkryterialnego testowany algorytm spisał się bardzo dobrze. Skutecznie znalazł on rozwiązania, które możemy bezpiecznie uznać za bliskie optymalnym dla większości badanych kombinacji wag.

Pozostaje jeszcze kwestia tego, czy dodanie semiwariancji górnej jako trzeciego kryterium dała jakieś praktyczne korzyści z punktu widzenia analizy portfelowej? Analizując uzyskane wyniki, trzeba przyjąć, że jest to interesująca koncepcja, ale jednak niezbyt przydana w rzeczywistych zastosowaniach. Większość wyznaczonych portfeli składała się z akcji jednej tylko spółki. Dzieje się tak, gdyż zarówno oczekiwany zysk, jak i semiwariancja górna preferują portfele bardzo agresywne, nastawione na uzyskanie wysokiej stopy zwrotu. Wprawdzie między tymi miarami występują pewne różnice, jednak w większości przypadków nie przekładają się one na istotnie różne składy portfela. Trzeba jednak przyznać, że akcje MBanku, które były preferowane przy najwyższych wagach przypisanych semiwariancji górnej, okazały się zachowywać wyraźnie lepiej poza próbą testową niż wskazywanego ze względu na zysk Synthosu. Na oczekiwaną stopę zwrotu drugiej z tych spółek silnie wpłynęły bardzo dobre wyniki na początku okresu testowego. Przesunięcie danych około tydzień do przodu powodowało jednak, że również pod względem oczekiwanego zysku lepszy okazywał się MBank.

Dla potencjalnego inwestora istotne jest, jak wygenerowane przez algorytm portfele zachowywały się poza próbą testową. Stopy zwrotu uzyskane w ciągu kolejnego miesiąca, czyli do lutego 2014, przedstawia tab. 2.

W okresie tym stopa zwrotu z indeksu WIG 20 wyniosła  $-1,482\%$ . Należy tu zaznaczyć, że na początku roku 2014 nastąpiła dość wyraźna korekta wcześniejszego trendu wzrostowego. Szczególnie silnie dotknęła ona kurs Synthosu. Wpłynęło to bardzo negatywnie na wyniki części portfeli kładących nacisk na obie semiwarian-

Tabela 2. Stopy zwrotu uzyskane od stycznia do lutego 2014

Portfele										Stopa zwrotu (%) 03.01.2014- -01.02.2014
MBANK	BOR.	SYNTHOS	EUROC.	BOGD.	PEKAO	PKOBP	ASSECO	TAURON	TPSA	
0	0,1974	0,1216	0,0285	0,1365	0,0859	0,0893	0,026	0,0745	0,2403	0,101
0	0,1126	0,3087	0,0008	0,1143	0,0285	0,1097	0	0,0521	0,2733	-1,635
0	0,2065	0,1354	0,0109	0,1507	0,0986	0,068	0,0212	0,0533	0,2554	0,155
0	0	0,7645	0	0	0	0	0	0	0,2355	-7,690
0,0104	0,2205	0,1565	0	0,1748	0,116	0,0265	0,0104	0,0016	0,2833	0,107
0,04	0,2058	0,1888	0	0,1847	0,0737	0	0	0	0,307	-0,278
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,071
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-12,127

Źródło: opracowanie własne.

cje na raz. Jednakże, pomimo spadków na rynku, wygenerowane przez algorytm portfele bezpieczne wciąż pozwalały osiągnąć niewielkie zyski. Wydaje się więc, że zastosowanie wszystkich trzech kryteriów pozwoliło algorytmowi uchwycić pewne wstępne sygnały zmiany sytuacji rynkowej. Jest to informacja przydatna, choć bardziej praktycznym rozwiązaniem by było raczej przeprowadzenie kilku dodatkowych serii obliczeń dla nieco przesuniętych w czasie zestawów danych i sprawdzenie, czy uzyskane wyniki są stabilne. Jest to już jednak obserwacja związana raczej z problemem doboru danych wejściowych do analizy portfelowej, a nie z kwestią zastosowania algorytmów genetycznych w zadaniach wielokryterialnych

## 7. Zakończenie

Podsumowując, należy stwierdzić, że zaprezentowana metoda dostosowania algorytmu koewolucyjnego dla zadań o więcej niż dwóch kryteriach okazała się skuteczna. Udało się w dzięki niej wyznaczyć zestaw rozwiązań bliskich optymalnym w sensie Pareto pod względem trzech różnych kryteriów. Jest ona też stosunkowo prosta w implementacji. Oczywiście, wymaga dodatkowego nakładu pracy w porównaniu z przygotowaniem prostego algorytmu genetycznego dla zadania jednokryterialnego. Koewolucja wymaga jednak zmodyfikowania wyłącznie sposobu selekcji osobników do krzyżowania. Pozostałe operacje genetyczne mogą pozostać niezmiennione.

Z punktu widzenia zastosowania w analizie portfelowej okazało się, że choć potraktowanie problemu wyboru portfela jako zadania trójkryterialnego może przynieść pewne dodatkowe informacje o rynku, to jednak nie wydaje się ono praktyczne. Nie znaczy to jednak, że wybór testowego zadania był zły. Semiwariancja jako miara ryzyka ma bardzo interesujące własności, które powodują że funkcja celu staje się trudna numerycznie. Tym samym jest ona bardzo dobrym materiałem do zbadania technicznych właściwości elementów algorytmu genetycznego.

Technikę koewolucji można jednak z powodzeniem stosować dla dowolnych algorytmów genetycznych. Struktura badanego problemu nie ma tu istotnego znaczenia. Dlatego też jest szansa, że jej rozwinięcie na przypadek trzech kryteriów okaże się przydatne w innych zastosowaniach, także spoza kręgu analizy finansowej.

Na koniec zwróćmy też uwagę, że podobne postępowanie zastosować można także dla większej liczby kryteriów. Postępując analogicznie jak w opisanym przykładzie, możemy dalej dodawać do funkcji celu kolejne składowe. Każda taka modyfikacja będzie coraz bardziej komplikowała strukturę populacji i definicje sąsiedztwa między niszami, ale jest jak najbardziej możliwa do wykonania.

## Literatura

- Arabas J., 2001, *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- DeFusco R., McLeavey D., Pinto J., Runkle D., 2013, *Quantitative Investment Analysis*, Wiley, Hoboken N.J.
- Goldberg D., 2003, *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Jajuga K., 2007, *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kameduła M., 2015, *Zastosowanie koewolucyjnego algorytmu genetycznego do wyboru optymalnego składu portfela funduszy inwestycyjnych*, [w:] *Badania operacyjne – przykłady zastosowań*, Gajda J., Jadczyk R. (red.), Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Laumans M., Thiele L., Deb K., Zitzler E. 2001, *On the Convergence and Diversity Preservation of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*, TIK Report No. 108, Institut für Technische Informatik und Kommunikationsnetze, Zürich.
- Markowitz H., 1970, *Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments*, Cowles Foundation Monograph 16, Yale University Press, New Heaven and London.
- Rutkowska-Ziarko A., 2003, *Rozkład stop zwrotu portfeli akcji zbudowanych w oparciu o semiwariancję*, *Folia Oeconomica*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Rutkowska-Ziarko A., 2005, *Metody znajdowania portfela efektywnego dla semiwariancji*, *Badania Operacyjne i Decyzje*, nr 3-4, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Shapcott J., 1992, *Index Tracking: Genetic Algorithms for Efficient Portfolio Selection*, Technical Report EPCC-SS92-24, Edinburgh Parallel Computing Center.