

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 446

Metody i zastosowania badań operacyjnych



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2016

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korlub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korekta: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Myszkowska

Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronach internetowych

www.pracnaukowe.ue.wroc.pl

www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons

Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2016

ISSN 1899-3192
e-ISSN 2392-0041

ISBN 978-83-7695-610-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana
Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław
tel./fax 71 36 80 602; e-mail:econbook@ue.wroc.pl
www.ksiegarnia.ue.wroc.pl

Druk i oprawa: TOTEM

Wstęp

Wstęp	7
Krzysztof Echaust: Modelowanie wartości ekstremalnych stóp zwrotu na podstawie danych śróddziennych / Modeling of extreme returns on the basis of intraday data	9
Helena Gaspars-Wieloch, Ewa Michalska: On two applications of the Omega ratio: $\max\Omega_{\min}$ and $\Omega(H+B)$ / O dwóch zastosowaniach wskaźnika Omega: $\max\Omega_{\min}$ i $\Omega(H+B)$	21
Agata Gluzicka: Zastosowanie modelu MAD z dodatkowymi warunkami ograniczającymi / Application of the MAD model with additional constraints	37
Dorota Górecka, Małgorzata Szalucka: Foreign market entry mode decision – approach based on stochastic dominance rules versus multi-actor multi-criteria analysis / Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny – podejście oparte na dominacjach stochastycznych a wieloaktorska analiza wielokryterialna	47
Paweł Hanczar, Dagmara Pisiewicz: Logistyka odzysku – optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej / Reverse logistics – optimization of flows in the system of waste management	70
Michał Jakubiak, Paweł Hanczar: Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków / Optimization of municipal solid waste collection and transportation routes on the example of MPO Cracow	83
Michał Kameduła: Zastosowanie koewolucyjnego algorytmu genetycznego w rozwiązaniu zadania trójkryterialnego / Application of co-evolutionary genetic algorithm for a three-criterion problem.....	93
Donata Kopańska-Bródka, Renata Dudzińska-Baryła, Ewa Michalska: Zastosowanie funkcji omega w ocenie efektywności portfeli dwuskładnikowych / Two-asset portfolio performance based on the omega function .	106
Marek Kośny, Piotr Peternek: Zagadnienie sposobu definiowania preferencji na przykładzie przydziału uczniów do oddziałów klasowych / Definition of preferences in the context of pupils' allocation to classes	115
Wojciech Młynarski, Artur Prędki: Ocena efektywności technicznej i finansowej wybranych nadleśnictw Lasów Państwowych za pomocą metody DEA / Technical and financial efficiency evaluation for selected forestry managements of the State Forests National Forest Holding – the DEA approach.....	126

Piotr Namieciński: Alternatywna metoda określania preferencji decydenta w zagadnieniach wielokryterialnych / Alternative methods of decision-maker preferences identification in multicriteria issues	144
Marek Nowiński: Testowanie nieliniowych algorytmów optymalizacyjnych – zestaw funkcji typu <i>benchmark</i> / Testing nonlinear optimization algorithms – set of benchmark type functions	159
Agnieszka Przybylska-Mazur: Wybrana metoda analizy długoterminowej stabilności finansów publicznych / The selected method of analysis of the long-term sustainability of public finance	173
Ewa Roszkowska, Tomasz Wachowicz, Robert Jankowski: Analiza porozumienia końcowego w negocjacjach elektronicznych w kontekście zgodności systemu oceny ofert negocjatora z informacją preferencyjną/ Analyzing the negotiation agreements in a context of concordance of negotiation offer scoring systems with negotiators' preferential information	187
Aleksandra Sabo-Zielonka, Grzegorz Tarczyński: Adaptacja heurystyki <i>s-shape</i> na potrzeby wyznaczenia trasy przejścia w niestandardowym układzie strefy kompletacji zamówień / Adaptation of the s-shape heuristic for the custom layout of the order-picking zone	207
Jakub Staniak: Inicjalizacja ukrytych modeli Markowa z wykorzystaniem analizy skupień / Initialization of hidden Markov models by means of clustering analysis.....	224
Paulina Szterlik: Lokalizacja magazynu centralnego z zastosowaniem metod wielokryterialnych / Location of central warehouse using quantitative research	237
Grzegorz Tarczyński: Porównanie efektywności kompletacji łączonych zleceń z kompletacją niezależną / An attempt of comparison of order batching with independent order-picking	250

Wstęp

Kolejna, XXXIV Ogólnopolska Konferencja Naukowa im. Profesora Władysława Bukietyńskiego, organizowana corocznie przez najważniejsze ośrodki naukowe zajmujące się dziedziną badań operacyjnych, w roku 2015 odbyła się w pięknym, zabytkowym i świeżo odremontowanym zespole pałacowo-parkowym w Łagowie koło Zgorzelca. Konferencję zrealizowaną pod nazwą *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* przygotowała Katedra Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu pod kierownictwem dr. hab. Marka Nowińskiego, prof. UE.

Konferencje te mają już długoletnią tradycję – są to coroczne spotkania pracowników nauki specjalizujących się w badaniach operacyjnych. Głównym celem konferencji było, podobnie jak w latach ubiegłych, stworzenie (przede wszystkim dla młodych teoretyków, a także praktyków dyscypliny) forum wymiany myśli na temat najnowszych osiągnięć dotyczących metod ilościowych wykorzystywanych do wspomagania procesów podejmowania decyzji, a także prezentacja nowoczesnych zastosowań badań operacyjnych w różnych dziedzinach gospodarki. Ten cenny dorobek naukowy nie może być zapomniany i jest publikowany po konferencji w postaci przygotowywanego przez organizatorów zeszytu naukowego zawierającego najlepsze referaty na niej zaprezentowane.

W pracach Komitetu Naukowego Konferencji uczestniczyli czołowi przedstawiciele środowisk naukowych z dziedziny badań operacyjnych w Polsce; byli to: prof. Jan B. Gajda (Uniwersytet Łódzki), prof. Stefan Grzesiak (Uniwersytet Szczeciński), prof. Bogumił Kamiński (SGH w Warszawie), prof. Ewa Konarzewska-Gubała (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), prof. Donata Kopańska-Bródka, prof. Maciej Nowak i prof. Tadeusz Trzaskalik (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach), prof. Dorota Kuchta (Politechnika Wrocławska), prof. Krzysztof Piasecki (Uniwersytet w Poznaniu) i prof. Józef Stawicki (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu).

Zakres tematyczny konferencji obejmował teoretyczne i praktyczne zagadnienia dotyczące przede wszystkim:

- modelowania i optymalizacji procesów gospodarczych,
- metod wspomagających proces negocjacji,
- metod oceny efektywności i ryzyka na rynku kapitałowym i ubezpieczeniowym,
- metod ilościowych w transporcie i zarządzaniu zapasami,
- metod wielokryterialnych,
- optymalizacji w zarządzaniu projektami oraz analizy ryzyka decyzyjnego.

W konferencji wzięło udział 43 przedstawiciele różnych środowisk naukowych, licznie reprezentujących krajowe ośrodki akademickie. W trakcie sześciu sesji ple-

narych, w tym dwóch sesji równoległych, przedstawiono 27 referatów, których poziom naukowy w przeważającej części był bardzo wysoki. Zaprezentowane referaty, po pozytywnych recenzjach, zostają dziś opublikowane w Pracach Naukowych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu w postaci artykułów naukowych w specjalnie wydany zeszycie konferencyjnym.

Przypominając przebieg konferencji, nie można nie wspomnieć o konkursie zorganizowanym dla autorów referatów niebędących samodzielnymi pracownikami nauki. Dotyczył on prezentacji najciekawszego zastosowania badań operacyjnych w praktyce gospodarczej. Komitet Organizacyjny Konferencji powołał kapitułę konkursu, w której skład weszli: prof. Ewa Konarzewska-Gubała – przewodnicząca, prof. Jan Gajda, prof. Stefan Grzesiak i prof. Donata Kopańska-Bródka. Członkowie Komisji Konkursowej oceniali referaty ze względu na:

- innowacyjność, oryginalność metody będącej przedmiotem zastosowania,
- znaczenie zastosowania dla proponowanego obszaru,
- stopień zaawansowania implementacji metody w praktyce.

Spośród 15 referatów zgłoszonych wyróżniono: 1. miejsce: dr Michał Jakubiak i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Optymalizacja tras zbiórki odpadów komunalnych na przykładzie MPO Kraków*; 2. miejsce: mgr Dagmara Piesiewicz i dr hab. Paweł Hanczar (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu), *Logistyka odzysku – optymalizacja przepływów w systemie gospodarki komunalnej*; 3. miejsce: dr Dorota Górecka i dr Małgorzata Szałucka (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), *Wybór sposobu wejścia na rynek zagraniczny – wieloaktorska analiza wielokryterialna a podejście oparte na dominacjach stochastycznych*.

Przy okazji prezentowania opracowania poświęconego XXXIV Konferencji *Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych* i jej bardzo wartościowego dorobku nie możemy nie podziękować członkom Komitetu Organizacyjnego Konferencji, w którego skład wchodził młodzi, acz doświadczeni pracownicy Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu: dr Piotr Peternek (sekretarz), dr hab. Marek Kośny, dr Grzegorz Tarczyński oraz mgr Monika Stańczyk (biuro konferencji). Zapewnili oni w sposób profesjonalny sprawne przygotowanie i przeprowadzenie całego przedsięwzięcia oraz zadbali o sprawy administracyjne związane z realizacją konferencji, a także byli odpowiedzialni za dopilnowanie procesu gromadzenia i redakcji naukowych materiałów pokonferencyjnych, które mamy okazję Państwu dziś udostępnić.

Już dzisiaj cieszymy się na nasze kolejne spotkanie w ramach jubileuszowej XXXV Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej im. Profesora Władysława Bukietyńskiego, która tym razem będzie organizowana przez naszych przyjaciół z Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu pod kierownictwem prof. dr. hab. Krzysztofa Piaseckiego.

Marek Nowiński

Marek Kośny, Piotr Peternek

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
e-mail: piotr.peternek@ue.wroc.pl

ZAGADNIENIE SPOSOBU DEFINIOWANIA PREFERENCJI NA PRZYKŁADZIE PRZYDZIAŁU UCZNIÓW DO ODDZIAŁÓW KLASOWYCH

DEFINITION OF PREFERENCES IN THE CONTEXT OF PUPILS' ALLOCATION TO CLASSES

DOI: 10.15611/pn.2016.446.09

JEL Classification: C44, C61

Streszczenie: Kluczowym zagadnieniem w procesie podejmowania decyzji jest sposób odzwierciedlenia preferencji interesariuszy oraz ich agregacji. Brak jednoznacznych wskazań teoretycznych dotyczących tego zagadnienia powoduje, że nie jest możliwa jednoznaczna identyfikacja optymalnego rozwiązania, a próby rozwiązania wskazanego problemu wymagają przyjęcia szeregu arbitralnych założeń. Przykładem tego typu problemu jest przydział uczniów do klas z uwzględnieniem preferencji dotyczących nauczyciela oraz pozostałych uczniów. Celem niniejszego artykułu jest prezentacja możliwości wykorzystania modelowania matematycznego do rozwiązania takiego zadania przydziału oraz ocena, w jaki sposób uzyskany wynik jest uzależniony od sposobu definiowania preferencji.

Słowa kluczowe: optymalizacja, modelowanie preferencji, badanie operacyjne.

Summary: The key issue in the group decision making process is a way of reflecting the preferences of partakers and aggregation of these preferences. Lack of clear, theoretical indications in this area makes it impossible to clearly identify the optimal solution. Thus, as a consequence, trials to solve these problems require the adoption of a number of arbitrary assumptions. An example of this type of problems is the allocation of pupils to classes, taking into account the preferences in relation to teacher and other pupils. The purpose of this article is to present the possibilities of using mathematical modeling to solve such a problem and to assess how the result depends on the method of defining preferences.

Keywords: optimization, preferences modeling, operations research.

1. Wstęp

Rozwój technik informatycznych i związanych z nimi metod gromadzenia przetwarzania danych pociąga za sobą możliwości wykorzystania sformalizowanych modeli

wspomagania decyzji w obszarach, w których dotychczas było to niemożliwe ze względu na koszty gromadzenia danych lub złożoność modelu (por. [Hanczar, Peternek 2015; Alonso-Ayuso i in. 2012]). Szczególnym obszarem tego rodzaju zastosowań jest modelowanie wyborów grupowych, w których członkowie zdefiniowanej populacji mają podjąć decyzję odnośnie do zdefiniowanego problemu (por. [Hołubiec i in. 2001]). Z najprostszą tego typu sytuacją mamy do czynienia, gdy konieczne jest ustalenie wyniku głosowania, w którym wybór dokonywany jest pomiędzy dwoma wykluczającymi się wariantami. Procedura postępowania obejmuje w takiej sytuacji jedynie zliczenie głosów wskazujących na poszczególne warianty. Złożoność modelowania rośnie, gdy liczba dostępnych wariantów jest większa, a osoby dokonujące wyboru – na podstawie swoich deklaracji – przypisywane są do najbardziej preferowanego wariantu. Z sytuacją taką mamy do czynienia na przykład podczas wyboru przez studentów specjalności w ramach studiowanych kierunków (temat ten był rozważany w [Kośny, Peternek 2010]). W takiej sytuacji kluczowe znaczenie ma sposób modelowania rozkładu preferencji oraz to, w jaki sposób preferencje te są agregowane. W istocie bowiem rozwiązanie modelu opisującego tak zdefiniowany problem decyzyjny polega na maksymalizacji odpowiednio zdefiniowanej funkcji użyteczności – w odniesieniu do poszczególnych osób, zaangażowanych w proces decyzyjny, ale przede wszystkim w odniesieniu do całej populacji (grupy dokonującej wyboru).

Intuicyjnym rozszerzeniem tak zdefiniowanego problemu decyzyjnego jest uwzględnienie dodatkowych wymagań. Z sytuacją taką mamy do czynienia podczas zapisów do szkoły. Celem jest wtedy nie tylko zapisanie dziecka do konkretnego oddziału klasowego, ale także np. uwzględnienie w przydziale innych czynników, jak choćby chęć uczęszczania do jednej klasy z innymi, zaprzyjaźnionymi dziećmi. Oznacza to faktycznie określenie preferencji w kilku obszarach – odnośnie do preferowanego nauczyciela, dzieci, z którymi dziecko miałoby być w tej samej klasie, czy też nauczanych przedmiotów (zwłaszcza w odniesieniu do języków obcych). Konstrukcja systemu wspomagającego przydział uczniów do oddziałów klasowych na podstawie zadeklarowanych preferencji pomogłaby zobiektywizować proces tworzenia tych oddziałów. Budowa modelu formalnego pozwoliłaby bowiem w jasny sposób zdefiniować kryteria, według jakich decyzja ta zostanie podjęta.

Stworzenie formalnego modelu wspomagającego przydział uczniów do poszczególnych oddziałów klasowych wymaga zdefiniowania kilku kluczowych elementów. Po pierwsze, określenia wymaga sposób, w jaki uczniowie (lub ich rodzice – w dalszej części tekstu używane będzie określenie „uczniowie”) deklarują preferencje. Po drugie, w jaki sposób preferencje te są agregowane w celu umożliwienia oceny stopnia spełnienia zdefiniowanych przez uczniów wymagań. Po trzecie wreszcie, które z wyrażonych oczekiwań (odnośnie do nauczycieli, uczniów itp.) mają największe znaczenie.

W kolejnym punkcie przedstawiony zostanie model stanowiący próbę konkretnej odpowiedzi na pytanie o sposób sformułowania tego typu zadania. Zaprezentowane zostaną rozwiązania omówionych wcześniej wariantów modelu. W ostatniej

części przedstawione zostaną najważniejsze wnioski oraz wskazane zostaną kierunki dalszych analiz.

2. Sformułowanie modelu

Jak już wcześniej wspomniano, rozważany w niniejszym artykule problem dotyczy możliwości skonstruowania modelu, który mógłby stanowić wsparcie w procesie przydziału uczniów do oddziałów klasowych w trakcie rekrutacji do klasy I szkoły podstawowej. Jak pokazuje analiza tego zagadnienia, w procesie tym pojawiają się najczęściej dwa kluczowe czynniki. Pierwszym z nich jest wskazanie preferowanego wychowawcy klasy, który w dalszej części utożsamiany będzie z oddziałem klasowym. Drugim elementem, uwzględnianym w analizowanym procesie, są preferencje odnośnie do innych uczniów, z którymi dany uczeń chciałby być w tym samym oddziale klasowym. Zakres faktycznego uwzględnienia tych elementów w procesie formowania oddziałów klasowych zależy zasadniczo od dyrekcji szkoły.

W wyniku analizy przedstawionego problemu zidentyfikowano kilka ograniczeń, które muszą posiadać odzwierciedlenie w modelu. Podstawowymi założeniami, odzwierciedlającymi rzeczywistą sytuację i zaimplementowanymi w modelu, jest objęcie przez określonego nauczyciela opieki (wychowawstwa) nad jedną klasą oraz przypisanie ucznia do jednego oddziału klasowego. Niezbędne wydaje się też określenie minimalnej i maksymalnej liczby uczniów w klasie. O ile dolna granica liczby uczniów dobrana została arbitralnie i ma na celu uwzględnienie ekonomicznej opłacalności otworzenia oddziału klasowego, o tyle górne ograniczenie wynika z zasad obowiązujących w szkole, wedle których liczba uczniów w nowo tworzonych klasach nie może przekroczyć 25 osób. Wartością dodatkową, uwzględnianą w modelu, są preferencje uczniów. Mogą bowiem oni zadeklarować chęć bycia w jednej klasie z innym uczniem (innymi uczniami). Dla tak określonego problemu przedstawiono model liniowy, w którym określono dwie funkcję celu:

$FC_1 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$, agregującą preferencje indywidualne w stosunku do nauczycieli, oraz $FC_2 = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^J x_{kj} w_{ik} x_{ij} \rightarrow \max$, agregującą preferencje indywidualne w stosunku do uczniów.

Obydwie funkcje celu wykorzystują sposób agregacji charakterystyczny dla utylitarystycznych funkcji użyteczności. Możliwe są oczywiście alternatywne sformułowania, odzwierciedlające np. minimalizację nierówności w poziomie spełnienia oczekiwań poszczególnych uczniów lub uwzględniające sytuację najmniej usatysfakcjonowanych uczniów (odpowiednik kryterium Rawlsa – por. [Rawls 1994]). Niemniej jednak w kontekście analizowanego problemu te alternatywne sformułowania wydają się mieć charakter teoretyczny – ze względu oczekiwaną prostotę i intuicyjność rozwiązania.

W modelu zdefiniowano następujące zbiory, parametry i ograniczenia:

I – zbiór uczniów ($i, k = 1, \dots, I$),

J – zbiór nauczycieli ($j = 1, \dots, J$),
 p_{ij} – preferencje i -tego ucznia względem j -tego nauczyciela,
 w_{ik} – preferencje względem uczniów, $w_{ik} \in \{0; 1\}$; $w_{ik} = 1$, jeżeli i -ty uczeń chce być w klasie z k -tym uczniem,

x_{ij} – zmienne $x_{ij} \in \{0; 1\}$: $x_{ij} = 1$, jeżeli i -ty uczeń jest w klasie j -tego nauczyciela.

Zbiór ograniczeń ma następującą postać:

$\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, I$ – gwarantuje, że każdy uczeń przypisany jest do jednego nauczyciela,

$\sum_{i=1}^I x_{ij} \leq 25 \quad j = 1, 2, \dots, J$ – określa maksymalną liczbę uczniów w klasie (maksymalna liczba uczniów przypisana do danego nauczyciela),

$\sum_{i=1}^I x_{ij} \geq 12 \quad j = 1, 2, \dots, J$ – określa minimalną liczbę uczniów w klasie (minimalna liczba uczniów przypisana do danego nauczyciela).

W celu weryfikacji możliwości zastosowanie modelu zdecydowano się przeprowadzić symulacje zgodnie z następującym schematem. Przyjęto występowanie w modelu 120 uczniów oraz 6 nauczycieli. W pierwszym etapie model rozwiązywany był dla funkcji celu uwzględniającej jedynie preferencje uczniów w stosunku do nauczyciela. Następnie rozwiązaniu poddano model, w którym funkcja celu dotyczyła preferencji w stosunku do innych uczniów. Etap trzeci polegał na stworzeniu funkcji użyteczności łączącej w sobie preferencje zarówno w stosunku do uczniów, jak i nauczycieli. W ostatnim etapie podjęto próbę zastosowania podejścia iteracyjnego, w którym to uzyskane rozwiązanie optymalne stawało się ograniczeniem, które realizowane miało być w 100%, 90% lub 75%.

W symulacjach rozpatrywano 3 rodzaje macierzy preferencji uczniów w stosunku do nauczyciela. Macierze te były ze sobą powiązane. Podstawowa macierz preferencji zbudowana została z wartości wygenerowanych z rozkładu normalnego. Wartości tej macierzy (preferencje ucznia do nauczycieli) zostały przeskalowane tak, aby ich suma była równa 1. Druga tablica preferencji to tablica zero-jedynkowa, która uzyskana została przez zamianę najwyższej wartości z pierwotnej tablicy preferencji dla danego ucznia na liczbę 1, a pozostałe zamieniono na 0. Trzecia macierz preferencji powstała w wyniku zamiany, która polegała na tym, że trzy najwyższe wartości preferencji (z pierwotnej macierzy preferencji) dla danego ucznia zostały zamienione, odpowiednio, na wartości 0,5, 0,3 oraz 0,2.

Wszystkie przeprowadzone obliczenia wykonywano w pakiecie AIMMS z wykorzystaniem solwera CPLEX.

3. Wyniki symulacji

W wyniku wygenerowania macierzy preferencji w stosunku do nauczycieli otrzymano macierz, w której rozkład liczby uczniów, wskazujących danego nauczyciela jako najbardziej preferowanego, przedstawia tab. 1. Jednocześnie wygenerowana

losowo macierz preferencji w stosunku do uczniów zawierała 268 pól o wartości 1, czyli 268 wskazań.

Tabela 1. Rozkład liczby uczniów w zależności od najbardziej preferowanego nauczyciela

Identyfikator nauczyciela	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów preferujących danego nauczyciela	15	26	17	17	24	21

Źródło: opracowanie własne.

Względnie równomierny rozkład liczby uczniów wskazujących na poszczególnych nauczycieli sugeruje, że przyporządkowanie uczniów do poszczególnych oddziałów klasowych nie powinno stanowić problemu. Łatwo zauważyć, że jedynie w przypadku nauczyciela 2 nie jest możliwe spełnienie wszystkich preferencji przedstawionych przez uczniów (klasa może liczyć maksymalnie 25 uczniów). W tabeli 2 przedstawiono wyniki uzyskane po rozwiązaniu modelu, w którym maksymalizowana była wartość pierwszej funkcji celu (FC_1) z uwzględnieniem wszystkich trzech sposobów reprezentowania preferencji. Oprócz rozkładu uczniów przypisanych do poszczególnych nauczycieli, w tab. 2 zaprezentowano także wartości funkcji celu oraz liczbę uczniów przypisanych do najbardziej preferowanego nauczyciela.

Tabela 2. Wyniki optymalizacji funkcji celu FC_1 przy względnie równomiernym rozkładzie wskazań najbardziej preferowanych nauczycieli

Macierz preferencji	Rozkład liczby uczniów przyporządkowanych do poszczególnych nauczycieli						Wartości FC_1	Liczba uczniów przyporządkowanych do najbardziej preferowanego nauczyciela
	1	2	3	4	5	6		
Pełna relacja preferencji	15	25	17	17	24	22	27,5	119
3 najbardziej preferowanych nauczycieli	15	25	18	17	24	21	59,8	119
1 najbardziej preferowany nauczyciel	15	25	18	17	24	21	119,0	119

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z przewidywaniami, niezależnie od sposobu reprezentacji preferencji, uzyskano zbliżone wyniki gwarantujące wybór 119 najbardziej preferowanych nauczycieli.

Badanie powtórzono, zmieniając funkcję celu na maksymalizującą spełnienie oczekiwań dotyczących innych uczniów (nie brano pod uwagę preferencji w odniesieniu do nauczycieli). Wartość funkcji celu wynosiła 240. Oznacza to, że oczekiwania 90% uczniów, przedstawione w macierzy preferencji, zostały spełnione.

W kolejnym kroku skonstruowano funkcję celu łączącą oba przedstawione wcześniej podejścia. Jako że na tym etapie nie zdefiniowano ważności żadnej z funkcji celu, uznano, że obie funkcje celu są równorzędne. Dodatkowo, aby zapewnić porównywalność obu funkcji celu, przeskalowano je, wykorzystując maksymalne wartości obu funkcji celu osiągnięte w poprzednich etapach symulacji. Tak skonstruowana funkcja celu przyjęła postać:

$$FC_3 = 0,5 \frac{FC_1}{\max FC_1} + 0,5 \frac{FC_2}{\max FC_2} \rightarrow \max.$$

Wynik przypisania uczniów do poszczególnych nauczycieli prezentuje tab. 3. W tabeli 4 zaprezentowano wyniki optymalizacji modelu w sytuacji, gdy za funkcję celu przyjęte zostały formuły FC_1 , FC_2 oraz FC_3 . W tabeli przedstawiono także porównanie, jaki odsetek uczniów został przypisany podczas rozwiązania zadania z funkcją celu FC_3 w stosunku do rozwiązania tego samego zadania przy wykorzystaniu funkcji celu FC_1 oraz FC_2 .

Najlepszy wynik wartości z punktu widzenia wartości funkcji celu uzyskano dla macierzy, w której określone zostały preferencje pełne, czyli preferencje dla każdego nauczyciela. Niestety takie określenie preferencji oznacza także, że wybrana zostanie najmniejsza liczba najbardziej preferowanych nauczycieli (por. tab. 4).

Tabela 3. Rozkład liczby uczniów w zależności od najbardziej preferowanego nauczyciela dla poszczególnych sposobów deklarowania preferencji w odniesieniu do nauczycieli

Sposób deklarowania preferencji w odniesieniu do nauczycieli	Rozkład liczby uczniów przyporządkowanych do poszczególnych nauczycieli					
	1	2	3	4	5	6
Pełna relacja preferencji	12	25	17	18	23	25
3 najbardziej preferowanych nauczycieli	12	25	17	18	23	25
1 najbardziej preferowany nauczyciel	14	25	17	17	24	23

Źródło: opracowanie własne.

W drugiej części symulacji zdecydowano się zmienić macierz preferencji w odniesieniu do nauczycieli. Tym razem macierz odpowiada rzeczywistym problemom pojawiającym się w sytuacji przypisywania uczniów do klas, kiedy część nauczycieli jest znacznie bardziej preferowana niż inni pedagodzy. Macierz preferencji staje się w takiej sytuacji asymetryczna. Skorygowano zatem prezentowaną wcześniej

Tabela 4. Wyniki optymalizacji w sytuacji względnie równomiernego rozkładu wskazań najbardziej preferowanych nauczycieli

Wyszczególnienie	Sposób deklarowania preferencji w odniesieniu do nauczycieli		
	pełna relacja preferencji	3 najbardziej preferowanych nauczycieli	1 najbardziej preferowany nauczyciel
Wartość FC_3	0,91	0,83	0,81
$FC_1/\max(FC_1)$	91%	85%	95%
$FC_2/\max(FC_2)$	91%	81%	67%
Liczba uczniów przypisanych do najbardziej preferowanych nauczycieli	53	89	113

Źródło: opracowanie własne.

macierz tak, aby występowało trzech najbardziej preferowanych nauczycieli. Rozkład liczby uczniów wskazujących określonego nauczyciela jako najbardziej preferowanego prezentuje tab. 5.

Tabela 5. Rozkład liczby uczniów w zależności od najbardziej preferowanego nauczyciela

Identyfikator nauczyciela	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów preferujących danego nauczyciela	0	0	0	18	22	80

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Wyniki optymalizacji funkcji celu FC_1 przy asymetrycznym rozkładzie wskazań najbardziej preferowanych nauczycieli

Macierz preferencji	Rozkład liczby uczniów przyporządkowanych do poszczególnych nauczycieli						Wartości FC_1	Liczba uczniów przyporządkowanych do najbardziej preferowanego nauczyciela
	1	2	3	4	5	6		
Pełna relacja preferencji	12	19	14	25	25	25	26,4	54
3 najbardziej preferowanych nauczycieli	14	18	13	25	25	25	35,7	65
1 najbardziej preferowany nauczyciel	13	25	12	20	25	25	65,0	65

Źródło: opracowanie własne.

Dla tak zmienionej macierzy preferencji przeprowadzono analogiczne procedury optymalizacyjne (z wyłączeniem optymalizacji funkcji FC_2 , albowiem nie uległa ona zmianie). Wyniki rozwiązania poszczególnych zadań prezentuje tab. 6.

Jak można zauważyć, w sytuacji gdy deklaracja preferencji polega na wskazaniu jednego lub trzech preferowanych nauczycieli, przypisanie ucznia do nauczyciela wskazanego na pierwszym miejscu miało miejsce w wypadku 65 uczniów. Takiego wyniku nie osiągnięto, gdy preferencje określone były na całym zbiorze nauczycieli (w tym wypadku najbardziej preferowany nauczyciel został przyporządkowany jedynie dla 54 uczniów).

Drugi etap symulacji obejmował konstrukcję funkcji kompromisu. W tabelach 7 i 8 zaprezentowano wyniki optymalizacji, które pozwalają sformułować analogiczny wniosek jak w przypadku macierzy preferencji o względnie równomiernym rozkładzie wskazywanych nauczycieli. Zatem najwyższa wartość funkcji celu, odzwierciedlająca satysfakcję całej społeczności uczniów z dokonanego przydziału,

Tabela 7. Rozkład liczby uczniów w zależności od najbardziej preferowanego nauczyciela dla poszczególnych sposobów deklarowania preferencji w odniesieniu do nauczycieli

Sposób deklarowania preferencji w odniesieniu do nauczycieli	Rozkład liczby uczniów przyporządkowanych do poszczególnych nauczycieli					
	1	2	3	4	5	6
Pełna relacja preferencji	12	19	14	25	25	25
3 najbardziej preferowanych nauczycieli	12	12	21	25	25	25
1 najbardziej preferowany nauczyciel	21	12	12	25	25	25

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8. Wyniki optymalizacji w sytuacji asymetrycznego rozkładu wskazań najbardziej preferowanych nauczycieli

Wyszczególnienie	Sposób deklarowania preferencji w odniesieniu do nauczycieli		
	pełna relacja preferencji	3 najbardziej preferowanych nauczycieli	1 najbardziej preferowany nauczyciel
Wartość FC_3	0,94	0,92	0,91
$FC_1/\max(FC_1)$	90%	96%	98%
$FC_2/\max(FC_2)$	98%	88%	83%
Liczba uczniów przypisanych do najbardziej preferowanych nauczycieli	31	59	64

Źródło: opracowanie własne.

uzyskana została dla macierzy preferencji określonej na pełnym zbiorze nauczycieli. Jednocześnie jednak liczba uczniów przydzielonych do najbardziej preferowanych nauczycieli jest dla tej macierzy najmniejsza.

Zdecydowano się wobec takich wyników na konstrukcję dodatkowego modelu iteracyjnego, umożliwiającego zapewnienie ustalonego poziomu realizacji funkcji celu. Dla tego podejścia zaproponowano następujący model:

$$\begin{aligned}
 FC_2 &= \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J x_{kj} w_{ik} x_{ij} \rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^J x_{ij} &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, I, \\
 \sum_{i=1}^I x_{ij} &\leq 25 \quad j = 1, 2, \dots, J, \\
 \sum_{i=1}^I x_{ij} &\geq 12 \quad j = 1, 2, \dots, J, \\
 FC_1 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} x_{ij} \geq n\% \max FC_1 \quad \text{dla } n = 100; 90; 75,
 \end{aligned}$$

Tabela 9. Wyniki optymalizacji funkcji celu w podejściu iteracyjnym w zależności od poziomu FC_1 przy asymetrycznym rozkładzie preferencji względem nauczycieli

Modele decyzyjne i rodzaje preferencji		100% realizacji FC_1	90% realizacji FC_1	75% realizacji FC_1
Pełna relacja preferencji	Wartość FC_1	26,4	24,0	19,8
	Wartość FC_2	150	233	240
$FC_2/\max(FC_2)$		63%	97%	100%
Liczba uczniów przypisanych do najbardziej preferowanych nauczycieli		54	32	20
3 najbardziej preferowanych nauczycieli	Wartość FC_1	35,7	32,0	27,0
	Wartość FC_2	190	226	240
$FC_2/\max(FC_2)$		79%	94%	100%
Liczba uczniów przypisanych do najbardziej preferowanych nauczycieli		65	50	32
1 najbardziej preferowany nauczyciel	Wartość FC_1	65	59	49
	Wartość FC_2	197	215	229
$FC_2/\max(FC_2)$		82%	90%	95%
Liczba uczniów przypisanych do najbardziej preferowanych nauczycieli		65	59	49

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione wyniki wskazują, że możliwość opisu pełnej relacji preferencji prowadzi do zmniejszenia liczby uczniów przypisanych do najbardziej preferowanego nauczyciela. Rozsądnym kompromisem, łatwym do zastosowania w praktyce, jest wskazywanie przez uczniów 3 najbardziej preferowanych nauczycieli.

4. Zakończenie

Przedstawione w artykule rozważania sygnalizują podstawowe problemy, pojawiającymi się podczas próby budowy modelu programowania liniowego, mającego za zadanie przydział uczniów do oddziałów klasowych na podstawie zadeklarowanych preferencji. Po pierwsze, w zależności od zadeklarowanych preferencji odnośnie do nauczycieli i innych uczniów, może się pojawić problem alternatywnych rozwiązań. Przyjmując najprostszy możliwy – ale jednocześnie najczęściej spotykany w praktyce scenariusz – w którym uczeń wybiera jednego, najbardziej preferowanego nauczyciela. Taki opis preferencji, oparty na zasadzie większości pierwszeństwa, pozwala na maksymalizację liczby uczniów przypisanych do najbardziej preferowanego nauczyciela. W wypadku asymetrycznego rozkładu uczniów preferujących poszczególnych nauczycieli, tak wyrażone preferencje nie stanowią wystarczającej informacji, aby uniknąć arbitralności dokonanego wyboru. Wybór uczniów, którzy zostaną przypisani do najbardziej preferowanego nauczyciela, będzie więc w zasadzie losowy.

Pewnym rozwiązaniem tego problemu jest bardziej złożony sposób opisu preferencji – poprzez wskazanie 3 najbardziej preferowanych nauczycieli lub opisanie pełnej relacji preferencji. Opis taki wpływa na ograniczenie arbitralności dokonanego wyboru. Jak jednak pokazały przeprowadzone symulacje, może doprowadzić do sytuacji, w której liczba uczniów przypisanych do najbardziej preferowanego nauczyciela będzie znacznie niższa niż w wypadku deklaracji tylko jednego nauczyciela. W tym kontekście możliwość wskazania 3 najbardziej preferowanych nauczycieli wydaje się akceptowalnym kompromisem.

Dodatkowym czynnikiem, który coraz częściej jest także brany pod uwagę przy tworzeniu oddziałów klasowych, jest umożliwienie uczniom deklarowania preferencji w odniesieniu do uczniów, z którymi chcieliby się znaleźć w jednym oddziale klasowym. Uwzględnienie tego dodatkowego czynnika prowadzi do zadania wielokryterialnego. W wypadku tego typu sformułowania modelu uwzględnienie w funkcji celu dodatkowych preferencji może doprowadzić (i zazwyczaj prowadzi) do zmniejszenia stopnia osiągnięcia pierwotnego celu, jakim było przypisanie uczniów do najbardziej preferowanych nauczycieli. W szczególności może to prowadzić do prób stosowania określonych strategii podczas deklaracji preferencji. Strategie tego typu polegać mogą na przykład na deklarowaniu preferencji wyłącznie odnośnie do nauczycieli w sytuacji, gdy jest to możliwe także w odniesieniu do uczniów. Odporność konstruowanego systemu w dużym stopniu zależeć będzie od sposobu agregacji preferencji indywidualnych. Gdy (zgodnie z ideą Rawlsa) maksymalizo-

wana będzie satysfakcja ucznia o najniższym poziomie realizacji jego oczekiwań, zapewnienie takiemu uczniowi niezerowego poziomu realizacji jego oczekiwań spowoduje przypisanie go do wskazanego nauczyciela. Problem odporności na stosowanie tego typu strategii występuje jednak w dużo mniejszym stopniu w sytuacji, gdy funkcja celu jest – jak w analizowanych przykładach – typu utylitarystycznego. W analizowanym wypadku głosowanie strategiczne musiałyby być bowiem uzgodnione przez większą grupę osób.

Literatura

- Alonso-Ayuso A., Escudero L., Martín-Campo F.J., 2012, *A mixed 0–1 nonlinear optimization model and algorithmic approach for the collision avoidance in ATM: Velocity changes through a time horizo*, Computers & Operations Research, 39.12, s. 3136-3146.
- Hanczar P., Peternek P., 2015, *The short-term car flow planning model in rail freight company – case study*, Transportation Research Procedia, 10, s. 605-614.
- Hołubiec J., Szkatuła G., Wagner D., 2001, *Modelowanie preferencji wyborców w postaci regul decyzyjnych*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, s. 133-144.
- Kośny M., Peternek P., 2010, *Modelowanie preferencji na przykładzie przydziału studentów do grup administracyjnych*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 108.
- Rawls J., 1994, *Teoria sprawiedliwości*, PWN, Warszawa.