



**Politechnika Opolska**  
**Wydział Mechaniczny**

Katedra Mechaniki i Podstaw

Konstrukcji Maszyn

**WYZNACZANIE TRWAŁOŚCI**  
**MATERIAŁÓW METODĄ SPEKTRALNĄ**  
**Z UWZGLĘDNIENIEM SKŁADOWEJ**  
**STATYCZNEJ**

ROZPRAWA DOKTORSKA

*Opracował: mgr inż. Michał Böhm*

*Promotor: dr hab. inż. Adam Niestony, prof. PO*

*Opole, 2014*

Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych  
na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/ST8/02520

*Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi  
**dr hab. inż. Adamowi Niesłonemu prof. PO**  
za cenne uwagi, opiekę naukową oraz pomoc w trakcie realizacji pracy doktorskiej.*

*Podziękowania kieruję również do wszystkich, którzy  
w czasie realizacji pracy służyli pomocą, szczególnie dziękuję*

***dr inż. Cyprianowi Lachowiczowi***

*oraz*

***prof. dr hab. inż. Tadeuszowi Łagodzie***

*Dziękuję mojej żonie **Ewelinie**, której bezustanne wsparcie, rady i miłość  
umożliwiły powstanie tej pracy.*

Spis treści	str.
WAŻNIEJSZE OZNACZENIA.....	6
1. Wstęp.....	8
2. Przegląd literatury.....	11
2.1. Wartość średnia naprężenia.....	11
2.2. Modele uwzględnienia wartości średniej naprężenia.....	13
2.3. Metody spektralne wyznaczania trwałości zmęczeniowej.....	23
2.3.1. Badania Kihla i Sarkaniego.....	26
2.3.2. Badania Niesłonego i Machy.....	27
3. Podstawy teoretyczne obliczeń zmęczeniowych w dziedzinie częstotliwości.....	29
3.1. Stacjonarne procesy losowe.....	29
3.2. Niestacjonarne procesy losowe.....	30
3.3. Główne charakterystyki sygnałów losowych.....	30
3.3.1. Wartość średnia i wariancja.....	30
3.3.2. Gęstość prawdopodobieństwa.....	31
3.3.3. Funkcja autokorelacji.....	31
3.3.4. Gęstość widmowa mocy.....	32
3.4. Naprężenie w dziedzinie częstotliwości.....	32
4. Cel, zakres i teza pracy.....	34
5. Badania eksperymentalne.....	35
5.1. Opis stanowiska badawczego.....	35
5.2. Materiał i geometria badanych próbek.....	36
5.3. Badania stało-amplitudowe.....	37
5.4. Badania losowe przy niezerowej wartości średniej historii obciążenia.....	40
6. Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej z uwzględnieniem wartości średniej naprężenia.....	46
6.1. Rejestracja, generacja lub obliczenie $G_{\sigma}(f)$ .....	47
6.2. Obliczanie części statycznej $\sigma_m$ .....	50
6.3. Obliczanie współczynnika $K(\sigma_m)$ .....	50
6.4. Obliczanie transformowanej gęstości widmowej mocy $G_{\sigma T}(f)$ ze względu na wartość średnią.....	51
6.5. Wyznaczanie momentów gęstości widmowej mocy $\xi_{kT}$ .....	53
6.6. Obliczanie trwałości zmęczeniowej.....	53

7. Badania symulacyjne .....	55
7.1. Wpływ jakości charakterystyk zmęczeniowych na wyniki obliczeń zmęczeniowych .....	56
7.1.1. Wyznaczanie trwałości na podstawie wykresów ( $\sigma_a-N$ ) z uwzględnieniem wpływu naprężeń średnich.....	59
7.2. Model uwzględnienia wartości średniej wykorzystujący dwie charakterystyki zmęczeniowe .....	63
7.2.1. Obliczenia trwałości zmęczeniowej dla zaproponowanych modeli.....	69
7.3. Wpływ estymacji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa amplitud na obliczeniową trwałość zmęczeniową .....	72
7.3.1. Obliczanie trwałości zmęczeniowej dla różnych metod obliczania rozkładu gęstości prawdopodobieństwa .....	75
7.4. Wpływ metody estymacji gęstości widmowej mocy na trwałość zmęczeniową ....	81
7.4.1. Obliczenia trwałości zmęczeniowej dla różnych metod estymacji GWM.....	85
7.5. Weryfikacja eksperymentalna algorytmu obliczeniowego na podstawie wyników badań własnych .....	86
7.6. Weryfikacja algorytmu obliczeniowego z wynikami eksperymentalnymi Kihla i Sarkaniego.....	93
8. Wnioski i spostrzeżenia.....	100
LITERATURA .....	103
STRESZCZENIE .....	108

## WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

<i>Symbol</i>	<i>jednostka</i>	<i>znaczenie</i>
$A$	–	współczynnik wyznaczony z charakterystyki Basquina,
$A_{\sigma}$	–	współczynnik wyznaczony z charakterystyki Wöhlera,
$b$	–	wykładnik wytrzymałości zmęczeniowej,
$c$	–	wykładnik zmęczeniowego odkształcenia plastycznego,
$E$	MPa	moduł Younga,
$F$	N	siła,
$f$	s <sup>-1</sup>	częstotliwość,
$G_{\sigma T}$	–	transformowana gęstość widmowa mocy,
$G_{\sigma}$	–	jednostronna gęstość widmowa mocy naprężenia,
$m$	–	współczynnik nachylenia charakterystyki Basquina,
$m_{\sigma}$	–	współczynnik nachylenia charakterystyki Wöhlera,
$M^+$	–	oczekiwana liczba pików w jednostce czasu,
$N$	cykle	bieżąca liczba cykli,
$N_f$	cykle	liczba cykli do zniszczenia,
$P$	–	gęstość prawdopodobieństwa,
$R_m$	MPa	wytrzymałość na rozciąganie,
$R_e$	MPa	granica plastyczności,
$\sigma$	MPa	naprężenie,
$\sigma_{af}$	MPa	granica zmęczenia dla rozciągania ściskania,
$\sigma_{aT}$	MPa	naprężenia transformowane,
$\sigma'_f$	MPa	naprężeniowy współczynnik wytrzymałości zmęczeniowej,
$\sigma'_r$	MPa	naprężenie referencyjne uzależnione od stałej $\eta$ ,
$\psi_{\sigma}(N)$	–	współczynnik wrażliwości materiału na wartość średnią,
$\varepsilon$	–	odkształcenie,

$\varepsilon'_f$	–	odkształceniowy współczynnik zmęczeniowy,
$\mu$	–	wariancja,
$\alpha_K$	–	współczynnik korekcyjny dla równania Kwofiego,
$\Gamma(\cdot)$	–	funkcja gamma,
$\gamma$	–	parametr równania Walkera,
$t$	s	czas,
$\omega$	rad <sup>-1</sup>	częstość,
$\lambda$	–	funkcja empiryczna zależna od parametru szerokości widma,
$\Delta$	–	przedział lub zakres.

### **Indeksy i skróty**

$a$	–	amplituda,
GWM	–	gęstość widmowa mocy,
$m$	–	wartość średnia,
$min$	–	wartość minimalna,
$max$	–	wartość maksymalna,
$cal$	–	obliczeniowa wartość,

## 1. Wstęp

---

**Z**agadnienie wyznaczania trwałości zmęczeniowej materiałów już od dłuższego czasu jest tematem licznych badań oraz rozważań natury teoretycznej. Na przykład fakt pęknięcia płytek metalowych poprzez działanie na nie cyklicznych obciążeń, znacznie mniejszych od maksymalnej statycznej wartości naprężenia zostało zauważone już bardzo dawno temu, jeszcze przed powszechnym stosowaniem pojęcia zmęczenia materiału. Pierwsze badania zmęczeniowe przeprowadził w 1829 roku niemiecki inżynier Wilhelm Albert, który badał spawane ogniwa łańcuchów wciągarki kopalnianej [61]. W swoim raporcie stwierdza, że uszkodzenie powstało w wyniku zmiennych obciążeń działających na układ. Poncelet, jako jeden z pierwszych w swych pracach dla pracowników w Metz w 1839 roku, mówi o zmęczeniu metali pod wpływem powtarzającego się procesu rozciągania i ściskania [87]. Następnie po roku 1852 nastaje era Wöhlera, która na stałe zmieniła podejście naukowców do problematyki zmęczenia poprzez konstrukcję stanowisk do badań zmęczeniowych przy stałym odkształceniu oraz wprowadzenie pojęcia granicy zmęczenia. Obecnie odchodzi się powoli od tej terminologii, wręcz mówi się o braku takiej granicy [8]. Natomiast poszukuje się metod szybkiego i efektywnego powiązania pomiędzy obciążeniem a przewidywaną trwałością. W fachowej literaturze możemy znaleźć definicję zmęczenia materiału, jako procesu powodującego przedwczesne zniszczenie lub uszkodzenie elementu z powodu działania na niego sił zmiennych w czasie. Jest to złożony proces o podłożu metalurgicznym, który jest trudny do zamodelowania lub choćby opisanie w skali mikro. Z tego powodu większość zjawisk, które da się zamodelować lub przedstawić za pomocą zależności matematycznych, przedstawiana jest w skali makro [2].

Na dzień dzisiejszy operując modelami naprężeniowymi, odkształceniowymi lub połączeniem tych dwóch modeli w postaci parametru energetycznego, wyznacza się trwałość zmęczeniową uzyskując coraz większą dokładność. Wykorzystuje się w tym celu algorytmy obliczeniowe oparte o metodę zliczania cykli zdefiniowaną w dziedzinie czasu lub metodę spektralną zdefiniowaną w dziedzinie częstotliwości. Wykonując obliczenia inżynierskie często jesteśmy zmuszeni pójść drogą uproszczeń oraz ustępstw. Z uwagi na trudności związane z uwzględnieniem wartości średniej obciążenia, przejawiającej się w formie dodatkowych sił przyłożonych do układu lub



choćby ciężaru własnego konstrukcji, jest ona często pomijana. Jednak siły te będąc dodatkowym obciążeniem statycznym znacząco wpływają na trwałość konstrukcji. Analizując literaturę łatwo można zauważyć, że brak jest prac na temat uwzględnienia wpływu wartości średniej naprężenia w metodach spektralnych. Niniejsza praca ma uzupełnić wiedzę w tym zakresie. W pracy przedstawiono opracowaną przez autora procedurę wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną z uwzględnieniem wartości średniej naprężenia przejawiającej się w formie stałej statycznej w dziedzinie częstotliwości.

W rozdziale drugim pracy dokonano przeglądu literatury dotyczącego modeli uwzględnienia wartości średniej naprężenia oraz metody spektralnej wyznaczania trwałości zmęczeniowej ze szczególnym uwzględnieniem prac na temat wpływu wartości średniej na trwałość. W rozdziale trzecim pracy przedstawiono podstawy teoretyczne obliczeń w dziedzinie częstotliwości. Opisano główne charakterystyki częstotliwościowe sygnałów losowych stacjonarnych i niestacjonarnych. Rozdział czwarty zawiera cel, zakres i tezę pracy.

Badania eksperymentalne stanowiskowe przedstawiono w rozdziale piątym pracy. Przeprowadzono je dla niezerowej wartości średniej obciążenia. Stal S355JR poddano badaniom zmęczeniowym przy stałej amplitudzie naprężenia oraz przy amplitudzie losowej z wygenerowanego pseudolosowego przebiegu czasowego. Badania wykonano dla dwóch przebiegów o odmiennej charakterystyce częstotliwościowej. Wyniki badań przedstawiono następnie na klasycznych charakterystykach zmęczeniowych Wöhlera:

$$\log N_f = A_\sigma - m_\sigma \sigma_a \quad (1)$$

gdzie:  $A_\sigma$ ,  $m_\sigma$  – współczynniki równania Wöhlera,  $N_f$  - liczba cykli do zniszczenia,  $\sigma_a$  - amplituda naprężenia.

Rozdział szósty pracy zawiera omówienie algorytmu wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną z uwzględnieniem wartości średniej naprężenia. Algorytm zawiera zależność na transformację gęstości widmowej mocy.

W rozdziale siódmym pracy przedstawiono badania symulacyjne związane z uwzględnieniem wartości średniej. Przeprowadzono analizę wpływu charakterystyk zmęczeniowych na uzyskiwaną trwałość. Przedstawiono modele uwzględnienia wartości

średniej opierające się o dwie charakterystyki zmęczeniowe. Następnie przeanalizowano wpływ metody wyznaczania rozkładu gęstości prawdopodobieństwa na uzyskiwane trwałości. To samo zrobiono w przypadku metod estymacji gęstości widmowej mocy. W ostatnich podrozdziałach dokonano weryfikacji algorytmu zaproponowanego w pracy. Obliczone trwałości porównano z wynikami eksperymentalnymi własnymi dla stali S355JR oraz dla badań zaczerpniętych z literatury z pracy Kihla i Sarkaniego. Rozdział ósmy zawiera podsumowanie pracy oraz wnioski końcowe.

## 2. Przegląd literatury

W niniejszym rozdziale zawarto przegląd literatury związany z wpływem wartości średniej obciążenia na trwałość zmęczeniową materiałów. W tym zakresie przedstawiono szeroką analizę tak zwanych modeli kompensacyjnych wartości średniej naprężenia. Ważnym elementem rozdziału jest również przegląd publikacji na temat zastosowania metod spektralnych, w których podjęto się rozważań lub prób uwzględnienia wpływu wartości średniej w procesie wyznaczania trwałości zmęczeniowej.

### 2.1. Wartość średnia naprężenia

Wartość średnia naprężenia wykorzystywana w wyznaczaniu trwałości zmęczeniowej jest to składowa statyczna historii naprężenia zgodnie z wzorem [7]

$$\sigma_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t) dt . \quad (2)$$

Dla obciążeń stało-amplitudowych wartość średnią oblicza się jako algebraiczną średnią wartości maksymalnej oraz minimalnej naprężenia w jednym cyklu obciążenia. W wytrzymałości materiałów funkcjonują następujące równania oraz wielkości charakteryzujące przebieg naprężenia o stałej amplitudzie:

- zakres naprężenia

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} , \quad (3)$$

gdzie  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  to odpowiednio wartości maksymalna i minimalna naprężenia,

- amplituda naprężenia

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} , \quad (4)$$

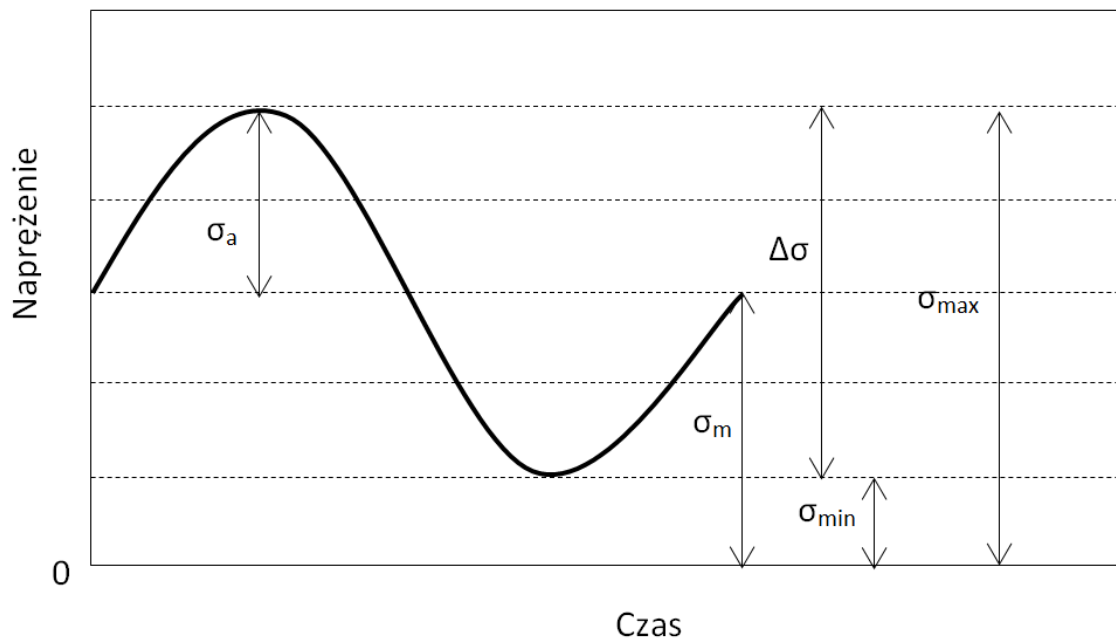
- wartość średnia definiowana jest, jako

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} , \quad (5)$$

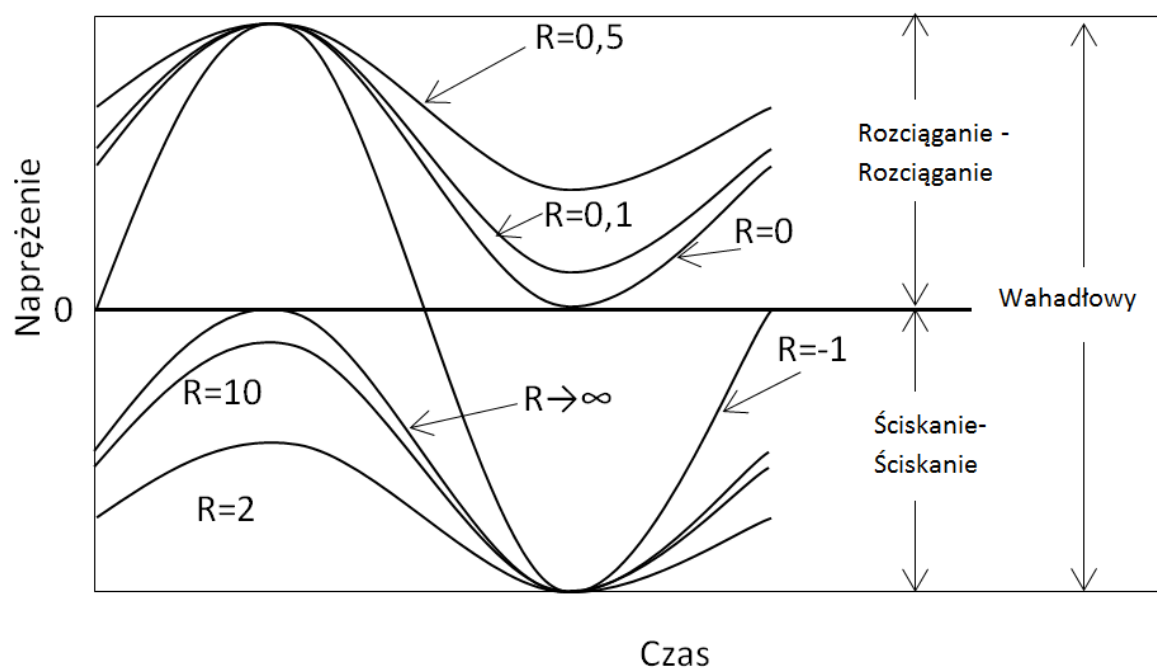
- współczynnik asymetrii cyklu  $R$  definiowany jest jako

$$R = \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \quad (6)$$

Wszystkie wielkości opisujące przebieg obciążenia zostały przedstawione graficznie na rys.1. Wybrane charakterystyczne przypadki wartości współczynnika asymetrii cyklu zostały przedstawione na rys.2.



Rys. 1. Wielkości charakteryzujące przebieg o stałej amplitudzie naprężenia.



Rys. 2. Graficzna interpretacja wybranych wartości współczynnika asymetrii cyklu  $R$  przy stałej amplitudzie obciążenia [91].

## 2.2. Modele uwzględnienia wartości średniej naprężenia

Niniejsza część pracy obejmuje przegląd powszechnie stosowanych modeli uwzględnienia wartości średniej wykorzystywanych w praktyce inżynierskiej [10]. Proces obliczania trwałości zmęczeniowej przy zmiennej amplitudzie lub w przypadku obciążenia losowego jest głównie przeprowadzany w dziedzinie czasu. Stosując przy tym odpowiedni algorytm zliczania cykli z historii obciążenia, model opisujący wpływ wartości średniej naprężenia na trwałość zmęczeniową oraz odpowiednią hipotezę sumowania uszkodzeń zmęczeniowych, jak np. popularne hipotezy Palmgrena-Minera lub Haibacha [36, 64, 69], lub jedną z wielu innych liniowych lub nieliniowych przedstawianych między innymi w pracy [84]. Tego typu algorytmy zliczania cykli wykorzystują często metodę przekraczania poziomów (level crossing) lub popularną metodą płynącego deszczu (rainflow), zamieszczona między innymi w normach ASTM [65]. W komercyjnych programach komputerowych służących do wyznaczania trwałości zmęczeniowej można znaleźć jedynie kilka najbardziej znanych modeli takich jak: Gerbera, Goodmana, Soderberga oraz model Smitha-Watsona-Toppera (SWT). Większość z nich definiuje warunek brzegowy stanu naprężenia za pomocą amplitudy naprężenia, wartości średniej oraz stałych materiałowych, takich jak granica zmęczenia, po przekroczeniu której materiał ulegnie zniszczeniu [11]. Odpowiedzi na pytanie, dlaczego właśnie te modele znalazły tak szerokie zastosowanie, można się doszukiwać nie tylko w tym, że w wielu przypadkach liczą dobrze, lecz również ze względu na uwarunkowania historyczne i źródła powstania poszczególnych modeli. Jednak ten aspekt nie będzie poddany dyskusji. W tej części pracy skupiono się na przedstawieniu założeń teoretycznych poszczególnych modeli i ich porównaniu.

Gerber (1874, Niemcy) zaproponował równanie paraboli by zamodelować linię graniczną wytrzymałości zmęczeniowej. W celu kalibracji modelu zastosował wartość wytrzymałości na rozciąganie materiału  $R_m$  [90]

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2, \quad (7)$$

gdzie:  $\sigma_{aT}$  jest amplitudą transformowaną,  $\sigma_a$  i  $\sigma_m$  to amplituda naprężenia oraz wartość średnia naprężenia.

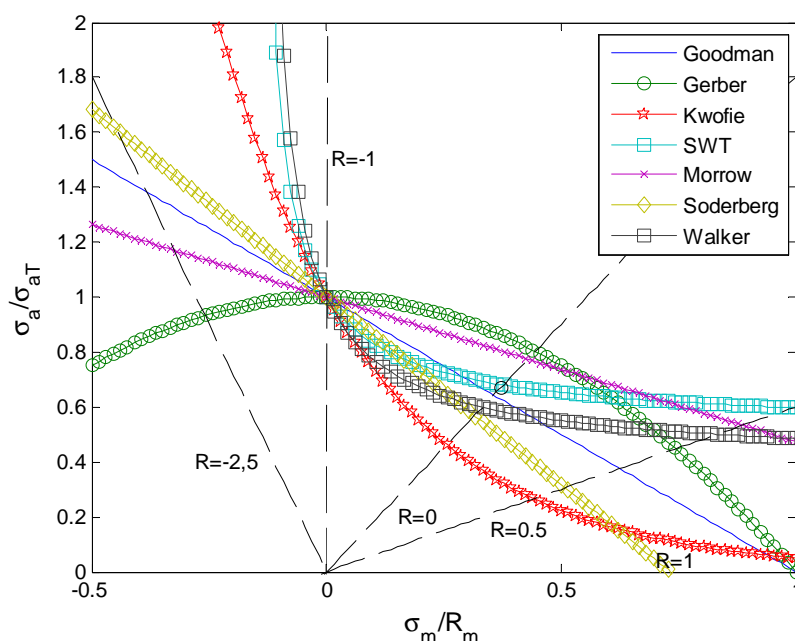
Największą wadą tego modelu jest fakt, iż nie rozróżnia stanu wyężenia materiału wywołany rozciąganiem i ściskaniem, a wiadomo, iż dla wielu materiałów konstrukcyjnych składowa stała ściskająca znacznie zwiększa trwałość zmęczeniową w stosunku do składowej rozciągającej. Ta nieprawidłowość nie występuje w modelu Goodmana (1899, Anglia). Zmodyfikował on związek zaproponowany przez Gerbera do następującej postaci [27]

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_m}. \quad (8)$$

Niniejsze równanie prowadzi do linii granicznej w postaci prostej, co przedstawiono na rys. 3. Podobna koncepcja została również wykorzystana przez Soderberga (1930, USA), który wprowadził do poniższego wzoru granicę plastyczności  $R_e$  w miejsce wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$ . Powstałe równanie tworzy również linię prostą, co przedstawiono na rys. 3, jednak o innym nachyleniu niż linia Goodmana [80]

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_e}. \quad (9)$$

Godnym uwagi jest fakt, iż model Soderberga jest zalecany dla materiałów konstrukcyjnych w stanie elastoplastycznym, co oznacza, że wartość średnia naprężenia powinna być mniejsza od granicy plastyczności ( $\sigma_m < R_e$ ).



**Rys. 3.** Przebieg linii granicznych wytrzymałości zmęczeniowej dla wybranych modeli uwzględniających wpływ wartości średniej na trwałość zmęczeniową [43].

Stosunkowo dobrze znaną modyfikacją powyższej koncepcji „linii prostej” jest model zaproponowany przez Morrowa (1968, USA), gdzie w miejsce współczynników uzyskanych na podstawie próby monotonicznego rozciągania ( $R_m$  i  $R_e$ ) wprowadzono współczynnik wytrzymałości zmęczeniowej  $\sigma'_f$  znany z równania Basquina [62]

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b, \quad (10)$$

gdzie:  $b$  – wykładnik trwałości zmęczeniowej, co prowadzi do modelu postaci

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}. \quad (11)$$

Kolejny bardzo popularny model zaproponowany został przez Smitha, Watsona, oraz Toppera (1970, USA) [79]. Model ten jest stosowany głównie w połączeniu z charakterystyką zmęczeniową powstałą z przemnożenia odkształceniowego [30, 33, 35] i naprężeniowego [14] wykresu zmęczeniowego

$$\sigma_{\max} \varepsilon_a = \left( \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \right) \left( \sigma'_f (2N_f)^b \right) = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c}, \quad (12)$$

gdzie:  $\varepsilon_a$  amplituda odkształcenia,  $\varepsilon'_f$  – odkształceniowy współczynnik zmęczeniowy,  $c$  – wykładnik zmęczeniowego odkształcenia plastycznego.

Zakładając, że część plastyczna amplitudy odkształcenia całkowitego jest niewielka, można ją pominąć w obliczeniach zmęczeniowych. Zabieg ten jest powszechnie stosowany dla zakresu wytrzymałości zmęczeniowej wysokocyklowej. Lewa strona równania (12) definiuje tak zwany parametr SWT, który można przy powyższych założeniach przedstawić następująco [79]

$$\sigma_{aT} = \sqrt{(\sigma_a + \sigma_m) \varepsilon_a E} = \sqrt{(\sigma_a + \sigma_m) \sigma_a}. \quad (13)$$

Równanie (13) może być również wyrażone za pomocą współczynnika asymetrii cyklu  $R$  [21]

$$\sigma_{aT} = (\sigma_a + \sigma_m) \sqrt{\frac{1-R}{2}} = \sigma_a \sqrt{\frac{2}{1-R}}. \quad (14)$$

Walker (1979, USA) opierając się na wynikach badań eksperymentalnych wybranych stopów aluminium rozwinął model SWT uwzględniający wpływ wartości średniej naprężenia do następującej postaci [93]

$$\sigma_{aT} = (\sigma_{\max})^{1-\gamma} \sigma_a^\gamma, \quad (15)$$

który można także wyrazić za pomocą współczynnika asymetrii cyklu  $R$  [21]

$$\sigma_{aT} = \sigma_{\max} \left( \frac{1-R}{2} \right)^\gamma = \sigma_a \left( \frac{2}{1-R} \right)^{1-\gamma}. \quad (16)$$

Główną zaletą tego modelu jest fakt, że poprzez przyjęcie odpowiedniej wartości parametru  $\gamma$ , model można dostosować do wrażliwości na wartość naprężenia średniego szerokiego spektrum materiałów, a dla wartości parametru  $\gamma = 0,5$  model upraszcza się do propozycji Smitha Watsona i Toppera SWT [79].

Kwofie (2001, Ghana) podczas definicji linii granicznej, rys. 3, wykorzystuje funkcję eksponencjalną, która poprzez współczynnik wrażliwości materiału na wartość średnią  $\alpha_K$  pozwala na kalibrację modelu. Współczynnik ten zależy bezpośrednio od rodzaju materiału [48]

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = \exp\left(-\alpha_K \cdot \frac{\sigma_m}{R_m}\right). \quad (17)$$

Podczas przedstawiania modeli uwzględniających wartość średnią naprężenia należy także wspomnieć o klasycznym modelu Smitha [78]. Model ten jest stosowany powszechnie do wyznaczania zastępczej granicy zmęczenia z uwzględnieniem wpływu wartości średniej dla bardzo kruchych materiałów, ale model SWT znalazł zdecydowanie większą rzeszę użytkowników i jest znacznie częściej używany.

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = \frac{1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)}{1 + \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)}. \quad (18)$$

Model Klimana [41] został stworzony w oparciu o wykładniki odkształceniowego wykresu zmęczeniowego, które uzyskane zostały w trakcie analizy wyników badań stanowiskowych oraz służy w dużym stopniu do utrzymania eksponencjalnego charakteru wykresu



$$\sigma_{aT} = \frac{\sigma_a}{\left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}\right)^{\frac{c+1}{b+c+1}}}. \quad (19)$$

Uogólnienie modeli empirycznych Gerbera, Goodmana, Smitha można przedstawić za pomocą równania Marina [58], który dla różnych wartości  $n$  (dobieranej w zależności od materiału) przyjmuje postać wymienionych poprzednio modeli

$$\sigma_{aT} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^n}}. \quad (20)$$

Kolejne równanie zaproponowane przez Pawliczka zostało opracowane na podstawie wyników eksperymentalnych, a szczególnym obiektem zainteresowań był wpływ wartości średniej naprężenia na trwałość zmęczeniową stali 10HNAP [50]. Opracowany model kompensacyjny wykorzystuje współczynnik wrażliwości na wartość średnią, który wyznaczany jest dla właściwej liczby cykli. Dwie formy modelu Pawliczek-Gasiak [71] zostały przedstawione dla dwóch stanów jednoosiowego obciążenia:

- dla zginania

$$\sigma_{aT} = \sigma_a + \psi_\sigma(N)\sigma_m, \quad (21)$$

- oraz dla skręcania

$$\tau_{aT} = \tau_a + \psi_\sigma(N)\tau_m, \quad (22)$$

gdzie:  $\sigma_a, \tau_a$  – amplitudy naprężenia dla zginania i skręcania,  $\sigma_{aT}, \tau_{aT}$  – transformowane amplitudy naprężenia dla zginania i skręcania,  $\sigma_m, \tau_m$  – wartość średnia zginania i skręcania, a współczynnik  $\psi_\sigma(N)$  – to współczynnik wrażliwości materiału na asymetrię cyklu dla danej liczby cykli zdefiniowanej jako iloraz odpowiednich granic zmęczenia, co zostało przedstawione szerzej w pracy [71].

Model Bagci [1] tak jak powszechnie stosowany model Soderberga znajduje zastosowanie wyłącznie dla stanu elastoplastycznego, czyli przypadku, gdy  $\sigma_m < R_e$ . W innym przypadku wyniki obliczeń będą prowadziły do znacznych błędów, odbiegających od obserwowanego podczas eksperymentu pasma rozrzutu wyników. Niniejszy model przyjmuje postać

$$\sigma_{aT} = \frac{\sigma_a}{1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_e}\right)^4}. \quad (23)$$

Model zaprezentowany przez Trosta i El-Magda [49] łączy cechy popularnych modeli Goodmana, Gerbera lub Smitha za pomocą stałej materiałowej  $p$ , można go przedstawić w formie

$$\sigma_a = \sigma_{aT} \left( 1 - p \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right) - (1 - p) \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right), \quad (24)$$

gdzie:  $p$  – stała materiałowa występująca w roli współczynnika wagowego równania.

Dietman [83] przedstawił równanie paraboliczne na bazie modelu Goodmana. Na podstawie badań literaturowych można stwierdzić, że niniejszy model znajduje zastosowanie dla materiałów w stanie elasto-kruchym

$$\left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} \right)^2 = 1 - \frac{\sigma_m}{R_m}. \quad (25)$$

Kihl oraz Sarkani [39] zaproponowali niewielką modyfikację równania Goodmana. Ta zmiana wynikała z analizy aproksymacyjnej danych zawartych w ich pracy

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - 3 \frac{\sigma_m}{R_m} \text{ dla } \sigma_m < 0. \quad (26)$$

Niesłony oraz Böhm [66] zaprezentowali model, który wykorzystuje amplitudy wyznaczone z wykresów Wöhlera dla zakresu ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej. Amplitudę transformowaną wyznacza się z wzoru

$$\sigma_{aT} = \sigma_a + \left( \sigma_{af,R=-1} - \sigma_{af,R=0} \right) \frac{\sigma_m}{\sigma_{af,R=0}}, \quad (27)$$

gdzie:  $\sigma_{af,R=-1}$  oraz  $\sigma_{af,R=0}$  są amplitudami wyznaczonymi z wykresów Wöhlera dla współczynników asymetrii cyklu  $R = -1$  oraz  $R = 0$ .

Kolejny interesujący związek przedstawia Figge [24]. Model opracowano na podstawie dużego zestawu danych. Celem pracy było stworzenie aproksymowanego równania, którego funkcja pokrywałaby się z wynikami eksperymentalnymi dla serii badań o niezerowej wartości średniej. Zaproponowana eksponencjalna funkcja oparta jest na statystycznych obliczeniach z danych uzyskanych z badań zmęczeniowych

$$\Delta\sigma_T = R_m e^{\frac{0,693\sigma_m}{R_m}} - R_m - \sigma_f, \quad (28)$$

gdzie:  $\Delta\sigma_T$  – transformowany zakres naprężenia,  $\sigma_f$  – granica zmęczenia dla  $R=-1$ ,  $e^{(x)}$ - funkcja eksponencjalna.

Grupa naukowców z Aachen [42] (Kluberg, Schaefer, Hempen, Beiss) zaproponowała równanie zawierające się pomiędzy amplitudami pulsującymi a symetrycznymi naprężenia. Niniejszy model przyjmuje następującą formę

$$\sigma_{a(R=0)} = K_a + [\sigma_{a(R=-1)}]^q, \quad (29)$$

gdzie:  $\sigma_{a(R=-1)}$  oraz  $\sigma_{a(R=0)}$  są amplitudami wyznaczonymi z charakterystyk Wöhlera dla rozciągania o asymetrii cyklu  $R = -1$  oraz  $R = 0$ ,  $K_a$  i  $q$  są parametrami uzyskanymi z analizy regresji [42].

To „prawo mocy” jak później nazywane przez autorów jest przekształcone ze względu na trwałość zmęczeniową dla przypadku skręcania i przyjmuje podobną postać:

$$\tau_{a(R=0)} = K_a + [\tau_{a(R=-1)}]^q, \quad (30)$$

gdzie:  $\tau_{a(R=-1)}$  oraz  $\tau_{a(R=0)}$  są amplitudami wyznaczonymi z charakterystyk Wöhlera dla skręcania o asymetrii cyklu  $R = -1$  oraz  $R = 0$ .

Wpływ różnych wartości średnich na zachowanie materiału w przypadku wytrzymałości zmęczeniowej laminatów było obiektem zainteresowania Kawaii’ego oraz Katy [38]. Badano laminat Glare 2 i na podstawie uzyskanych wyników stworzono liniową zależność wywodzącą się z klasycznego równania Goodmana:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{B(\text{exp})}} = \psi_{-1}(N_f) \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{B(\text{exp})}} \right), \quad (31)$$

gdzie:  $\sigma_{B(\text{exp})}$  – eksponencjalna wytrzymałość statyczna materiału,  $\psi_{-1}(N_f)$  – całkowity gradient dopasowania linii Goodmana.

Gang Tao oraz Zihui Xia [86] pracowali nad trwałością zmęczeniową żywic epoksydowych oraz nad wpływem wartości średniej naprężenia działającej na tego typu materiały. Na podstawie tych badań zaproponowali następującą zależność

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{af}} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_r}, \quad (32)$$

gdzie:  $\sigma_r$  – naprężenie referencyjne zdefiniowane jako

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{af}}{\eta}, \quad (33)$$

gdzie:  $\eta$  – to stała materiałowa.

Kolejny model kompensujący wartość średnią naprężenia zaprezentowany został przez Bergmana [9], który wprowadził pewną modyfikację do naprężeniowej formy modelu SWT. Bergman zauważył, że dla materiału liniowo-sprężystego wrażliwość na wartość średnią naprężenia jest umiarkowana i stąd można ją w prosty sposób uwzględnić w obliczeniach. Jednak dla materiałów liniowo-sprężystych poddanych wysokiej wartości średniej naprężenia model SWT nie prowadzi do uzyskiwania poprawnych wyników. To w tym celu wprowadził współczynnik korekcyjny wartości średniej naprężenia

$$\sigma_{aT} = \sqrt{(\sigma_a + a_b \sigma_m) \varepsilon_a E} = \sqrt{(\sigma_a + a_b \sigma_m) \sigma_a}, \quad (34)$$

gdzie  $a_b$  to współczynnik korekcyjny wartości średniej naprężenia, przyjmuje się:  $a_b = 1$  dla  $\sigma_m \geq 0$ ,  $a_b = 0$  dla  $\sigma_m < 0$  (dla stali),  $a_b = 0.5$  dla  $\sigma_m < 0$  (dla stopu aluminium).

Park i inni [70] zajmowali się zjawiskiem ratchetingu, głównie jego wpływu na trwałość zmęczeniową materiałów. Zaproponowali model dla przypadku obciążenia z efektem ratchetingu z uwzględnieniem wpływu wartości średniej naprężenia, który wykorzystuje współczynnik odkształcenia podczas ratchetingu  $\varepsilon_T^f$

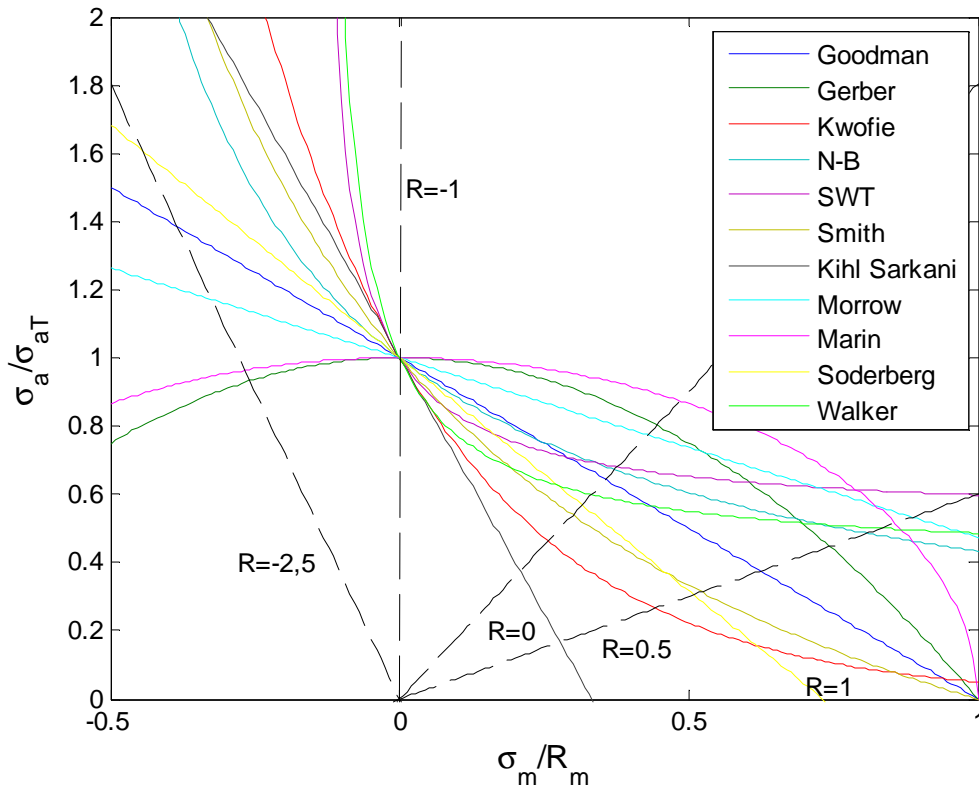
$$\sigma_{aT} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \varepsilon_T^f \sigma_m + \sigma_a\right) \sigma_a}. \quad (35)$$

Warte uwagi są prace ośrodka Bydgoskiego [85], który od dłuższego czasu zajmuje się wpływem naprężeń średnich. Prezentowane przez autorów modele opierają się na klasycznych dwuparametrycznych równaniach Goodmana, Haigha lub Gerbera. Warty przedstawienia jest tzw. Model V z uwagi na prostotę oraz możliwości wykorzystania dla obciążeń sinusoidalnych.

$$\frac{\sigma_{fa(R)}^{(T)}}{R'_m} = a_1 \left( \frac{\sigma_{fa(R)}^{(T)}}{R'_m} \right)^2 + a_2 \frac{\sigma_{fa(R)}^{(T)}}{R'_m} a_3, \quad (36)$$

gdzie:  $\sigma_{fa(R)}^{(T)}$  -wytrzymałość zmęczeniowa ograniczona dla obciążeń sinusoidalnych o współczynniku asymetrii cyklu  $R$ ,  $R'_m$  -doraźna wytrzymałość na rozciąganie,  $a_i$  -współczynniki równania.

Część z wyżej przedstawianych modeli została przedstawiona na rys. 4 w celu ukazania charakteru otrzymanych linii granicznych, ukazano je na tle wcześniej opisywanych modeli zaliczonych do grupy popularnych. W tabeli 1 zebrano podstawowe wzory dotyczące modeli omawianych w pracy.



**Rys. 4.** Kształt granicznych linii dla wybranych modeli kompensacyjnych na tle popularnie stosowanych zależności.

**Tabela 1.** Wybrane modele naprężeniowe uwzględnienia wartości średniej naprężenia.

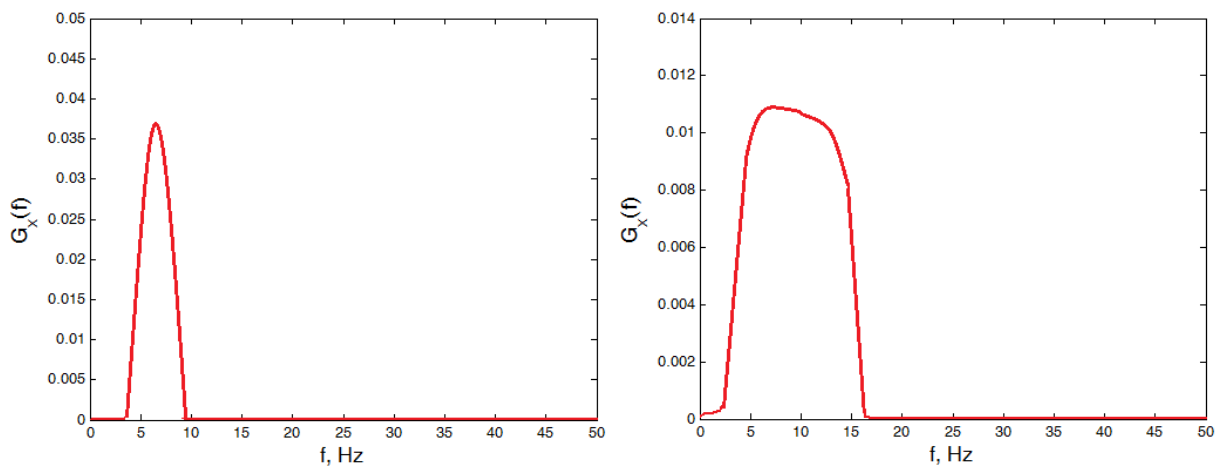
<b>Autor/ Rok</b>	<b>Model</b>	<b>Autor/ Rok</b>	<b>Model</b>
<b>Gerber 1874</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2,$	<b>SWT 1970</b>	$\sigma_{aT} = \sqrt{(\sigma_a + \sigma_m)\sigma_a},$
<b>Goodman 1899</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_m},$	<b>Walker 1979</b>	$\sigma_{aT} = (\sigma_{\max})^{1-\gamma} \sigma_a^\gamma,$
<b>Soderberg 1930</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_e},$	<b>Bagci 1983</b>	$\sigma_{aT} = \frac{\sigma_a}{1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_e} \right)^4},$
<b>Smith 1942</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = \frac{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}{1 + \frac{\sigma_m}{R_m}},$	<b>Pawliczek 2001</b>	$\sigma_{aT} = \sigma_a + \psi_\sigma(N)\sigma_m,$
<b>Marin 1949</b>	$\sigma_{aT} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^n}},$	<b>Kwofie 2001</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = \exp\left(-\alpha_K \cdot \frac{\sigma_m}{R_m}\right),$
<b>Morrow 1960</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f},$	<b>Gang Tao 2007</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_r},$
<b>Bergmann 1983</b>	$\sigma_{aT} = \sqrt{(\sigma_a + a_b\sigma_m)\sigma_a},$	<b>Dietman 2005</b>	$\left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} \right)^2 = 1 - \frac{\sigma_m}{R_m},$
<b>Kliman 1993</b>	$\sigma_{aT} = \frac{\sigma_a}{\left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}\right)^{\frac{c+1}{b+c+1}}},$	<b>Klubberg i inni 2003</b>	$\sigma_{a(R=0)} = K_a \left[ \sigma_{a(R=1)} \right]^q,$
<b>Figge 1967</b>	$\Delta\sigma_T = R_m e^{\frac{0,693\sigma_m}{R_m}} - R_m - \sigma_f,$	<b>Kawaii, Kato 2006</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{B(\exp)}} = \psi_{-1}(N_f) \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{B(\exp)}} \right),$
<b>Kihl i Sarkani 1999</b>	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{aT}} = 1 - 3 \frac{\sigma_m}{R_m},$	<b>Niestony- Böhm 2011</b>	$\sigma_{aT} = \sigma_a + \left( \sigma_{afR=1} - \sigma_{afR=0} \right) \frac{\sigma_m}{\sigma_{afR=0}},$
<b>Park 2007</b>	$\sigma_{aT} = \sqrt{\left( \frac{1}{2} \varepsilon_f^f \sigma_m + \sigma_a \right) \sigma_a},$	<b>Ligaj- Szala 2011</b>	$\frac{\sigma_{fa(R)}^{(T)}}{R_m} = a_1 \left( \frac{\sigma_{fa(R)}^{(T)}}{R_m} \right)^2 + a_2 \frac{\sigma_{fa(R)}^{(T)}}{R_m} a_3,$

Podsumowując ten podrozdział można stwierdzić, że historycznie modele naprężeniowe były stosowane jako pierwsze w celu uwzględnienia wpływu wartości średniej naprężenia. Ze względu na swą prostotę zostały przyjęte przez środowisko konstruktorów. Wykorzystywane są do dzisiaj podczas obliczeń zmęczeniowych w zakresie dużej liczby cykli [12]. Ponieważ praca skupia się wokół zastosowania takich modeli naprężeniowych w metodzie spektralnej wyznaczania trwałości zmęczeniowej,

ograniczono się jedynie do przedstawienia tego zakresu nie analizując modeli odkształceniowych [43] lub wykorzystujących parametr energetyczny [44].

### 2.3. Metody spektralne wyznaczania trwałości zmęczeniowej

W literaturze przedmiotu możemy się spotkać z dwoma metodami wyznaczania trwałości zmęczeniowej. Pierwsza z nich osadzona w dziedzinie czasu jest związana ze zliczaniem cykli oraz druga funkcjonująca w dziedzinie częstotliwości, zwana metodą spektralną wyznaczania trwałości zmęczeniowej. Cechą charakterystyczną metody spektralnej jest wykorzystanie funkcji gęstości widmowej mocy (GWM) do opisu obciążenia, z czym wiąże się opis stanu naprężenia lub odkształcenia. Czytając publikacje na ten temat możemy się spotkać z licznymi propozycjami obliczania trwałości w zależności od charakteru obciążenia i przeznaczenia danej metody spektralnej [63]. Prace Niestonego [62, 68] zawierają wyczerpujący przegląd literaturowy w zakresie metod wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodami spektralnymi. Metody te wykorzystywane są do obliczeń dla obciążeń o wąskim lub szerokim widmie obciążeń rys. 5. Poniżej przedstawiono wybrane prace dotyczące tej problematyki.



**Rys. 5.** Rodzaje widm obciążenia a) wąskopasmowe, b) szerokopasmowe.

Miles [34] przedstawia jedną z pierwszych prac na temat wyznaczania trwałości metodą spektralną. Jak zauważono między innymi w pracy Niestonego [63] założenia podejścia Milesa są prawdziwe jedynie dla obciążeń o wąskim widmie częstotliwościowym. Przy wykorzystaniu liniowej hipotezy sumowania uszkodzeń

zmęczenia Palmgrena-Minera i aproksymacji rozkładem amplitud prawdopodobieństwa Rayleigha otrzymano wzór w postaci:

$$T = \frac{A_\sigma}{M^+ (2\xi_0)^{\frac{m_\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{m_\sigma + 2}{2}\right)}, \quad (37)$$

gdzie:  $A_\sigma = \sigma_a^{m_\sigma} N$  - współczynnik wyznaczony z charakterystyki Wöhlera,  $M^+$  - oczekiwana liczba pików w jednostce czasu,  $\xi_0$  - wariancja przebiegu naprężenia,  $m_\sigma$  - wykładnik potęgowy funkcji opisującej charakterystykę Wöhlera,  $\Gamma(\cdot)$  - funkcja gamma.

Sakai oraz Okamura [75] zaproponowali wzór na wyznaczanie trwałości dla przypadku dwóch dominujących częstości dla przebiegu wąskopasmowego. Założyli, że za zniszczenie materiału jest odpowiedzialne uszkodzenie złożone z sumy uszkodzeń wywołanych procesami o odpowiedniej częstości dominującej z odpowiednią wagą [63]

$$T = \frac{2^{\frac{1-m_\sigma}{2}} \pi A_\sigma}{\Gamma\left(\frac{m_\sigma + 2}{2}\right)} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \left( \omega_1 \frac{\xi_{0,1}^{1-m_\sigma}}{\xi_{2,1}} + \omega_2 \frac{\xi_{0,2}^{1-m_\sigma}}{\xi_{2,2}} \right), \quad (38)$$

gdzie:  $\xi_{0,1}, \xi_{2,1}$  - zerowy i drugi moment gęstości widmowej mocy procesu składowego o częstości dominującej  $\omega_1$ ,  $\xi_{0,2}, \xi_{2,2}$  - zerowy i drugi moment gęstości widmowej mocy procesu składowego o częstości dominującej  $\omega_2$ .

Praca Kowalewskiego [47] obejmuje temat związany z wyznaczaniem trwałości zmęczeniowej metodą spektralną dla przypadku obciążeń o szerokim widmie częstotliwości. Proponuje on modyfikację modelu Milesa (37) wprowadzając do równania współczynnik nieregularności  $I$  [63]

$$I = \sqrt{\frac{\xi_2^2}{\xi_0 \xi_4}}, \quad (39)$$

$$T = \frac{A_\sigma}{I^{m_\sigma} M^+ (2\xi_0)^{\frac{m_\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{m_\sigma + 2}{2}\right)}, \quad (40)$$

gdzie:  $\xi_0, \xi_2, \xi_4$  - zerowy, drugi oraz czwarty moment gęstości widmowej mocy.



Wirshing oraz Light [96] zaproponowali równanie ze współczynnikiem  $\lambda$ , którym korygują trwałość  $T$  z wzoru zaproponowanego przez Bolotina [15]

$$T = \frac{A_\sigma}{\left[ \int_0^\infty G_0(f) f^2 df \right]^{\frac{1}{2}} (2\xi_0)^{\frac{m_\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{m_\sigma + 2}{2}\right)}, \quad (41)$$

gdzie:  $G_0$  - unormowana funkcja gęstości widmowej mocy.

Trwałość dla obciążenia o szerokim widmie częstotliwości  $T_{BB}$  otrzymuje się na podstawie równania:

$$T_{BB} = \frac{T}{\lambda}. \quad (42)$$

Współczynnik  $\lambda$  jest funkcją empiryczną zależną od parametru szerokości widma  $\chi$  oraz wykładnika potęgowego  $m_\sigma$  charakterystyki  $(\sigma_a - N_f)$

$$\lambda(m_\sigma, \chi) = a(m_\sigma) + [1 - a(m_\sigma)](1 - \chi)^{b(m_\sigma)}. \quad (43)$$

Jedną z bardziej znanych prac na temat wyznaczania trwałości zmęczeniowej z wykorzystaniem metod w dziedzinie częstotliwości jest praca Dirlika [20], który przedstawia opracowany przez siebie wzór empiryczny opisujący rozkład prawdopodobieństwa zakresów cykli składowych przebiegu naprężenia

$$p(\Delta\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\xi_0}} \left[ \frac{K_1}{K_4} e^{\frac{-Z}{K_4}} + \frac{K_2 Z}{R^2} e^{\frac{-Z^2}{2R^2}} + K_3 Z e^{\frac{-Z^2}{2}} \right], \quad (44)$$

gdzie:  $Z, K_1, K_2, K_3, K_4, R$  - współczynniki będące funkcjami pierwszych pięciu momentów  $\xi_k$  ( $k = 0, \dots, 4$ ) funkcji GWM naprężenia transformowanego

$$\xi_k = \int_0^\infty G_{\sigma T}(f) f^k df. \quad (45)$$

Trwałość zmęczeniową obliczamy korzystając z wybranej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, np. dla liniowej hipotezy Palmgren-Minera z uwzględnieniem amplitud poniżej granicy zmęczenia otrzymuje się:

$$T = \frac{1}{M^+ \int_0^{\infty} \frac{p(\Delta\sigma)}{N_f(\Delta\sigma)} d\Delta\sigma}. \quad (46)$$

### 2.3.1. Badania Kihla i Sarkaniego

Kihl i Sarkani [39] przedstawiają w swej pracy wpływ wartości średniej na trwałość zmęczeniową stalowych złączy spawanych. Badania próbek eksperymentalnych przeprowadzono przy obciążeniach stało-amplitudowych jak również przy obciążeniach o charakterze losowym. Autorzy opracowali wzór na wyznaczenie oczekiwanej liczby cykli do inicjacji pęknięć zmęczeniowych w przypadku obciążeń losowych z amplitudami składowymi o rozkładzie Rayleigha przy niezerowej wartości średniej naprężenia:

$$N_{cal} = \frac{2^{\frac{m_\sigma}{A}} \sigma_x^{m_\sigma} A}{\Gamma\left(1 - \frac{m_\sigma}{2}\right)}. \quad (47)$$

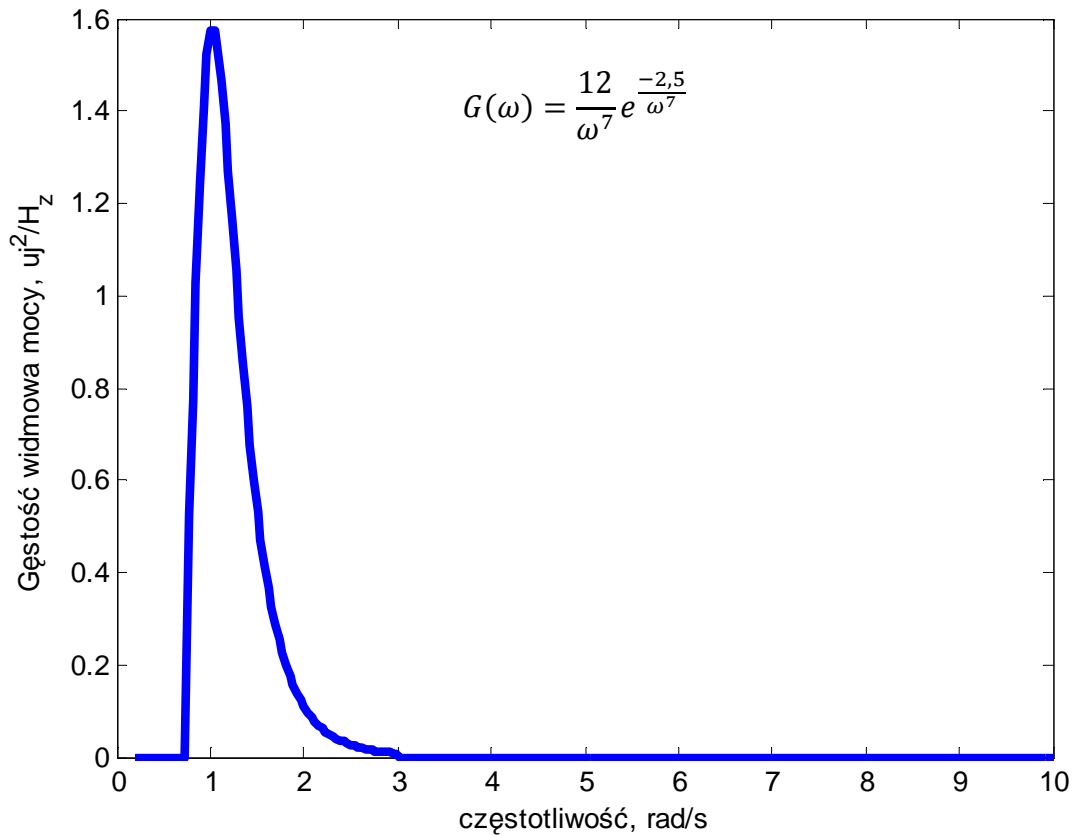
Po modyfikacji ze względu na wartość średnią naprężenia otrzymali:

$$N_{cal} = \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)^{-m_\sigma} \frac{2^{\frac{m_\sigma}{A}} \sigma_x^{m_\sigma} A}{\Gamma\left(1 - \frac{m_\sigma}{2}\right)}, \quad (48)$$

gdzie:  $N_{cal}$  – liczba cykli do inicjacji pęknięcia zmęczeniowego,  $A$  i  $m_\sigma$  – stałe wyznaczone z wykresu Wöhlera dla obciążenia stało-amplitudowego,  $\sigma_x$  – odchylenie standardowe przebiegu naprężenia.

Łatwo zauważyć, że w równaniu (48) za uwzględnienie wartości średniej jest odpowiedzialny czynnik  $(1 - \sigma_m/R_m)^{-B}$ , który modyfikuje wyznaczoną wzorem Milesa [69] liczbę cykli do inicjacji pęknięcia zmęczeniowego. Rozwiązanie to znajduje jednak zastosowanie tylko w przypadku obciążeń o charakterze wąskopasmowym. Na rys. 6 przedstawiono kształt funkcji gęstości widmowej mocy zastosowanej w obliczeniach zmęczeniowych przez Kihla oraz Sarkaniego wraz z wzorem wykorzystywanym do generacji. Jest to funkcja dla przypadku wąskopasmowego obciążenia. W pracy [40]

zapropozowano również analogiczną funkcję dla przypadku bimodalnej gęstości widmowej mocy.

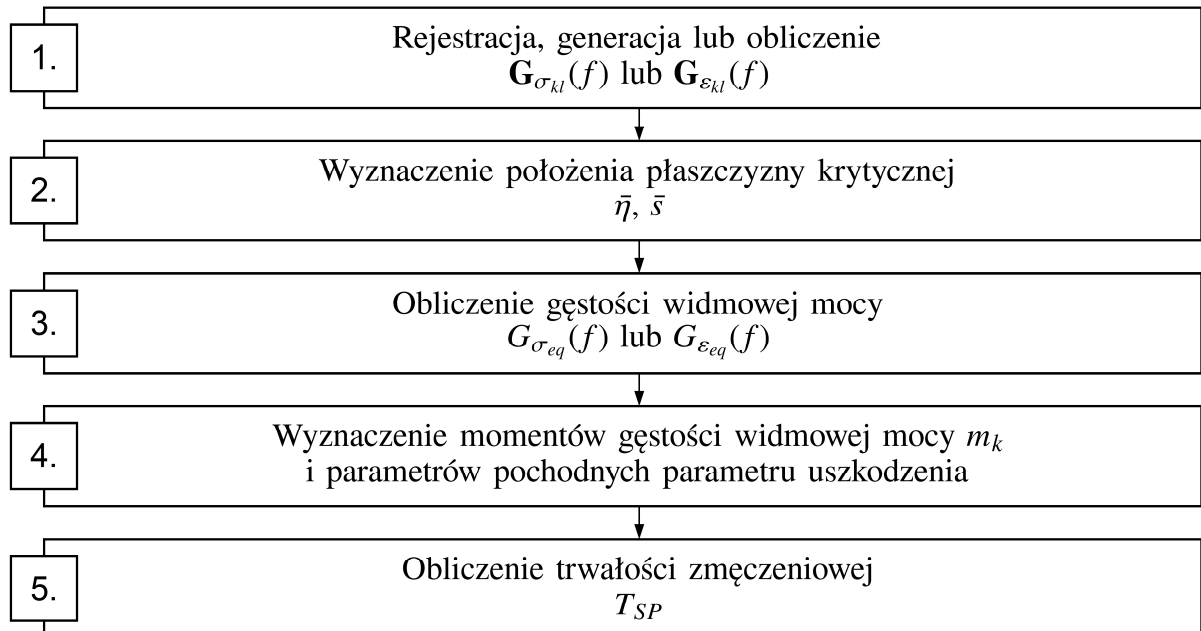


**Rys. 6.** Gęstość widmowa mocy wykorzystywana przez Kihla i Sarkaniego do obliczeń dla szerokopasmowych obciążeń.

### 2.3.2. Badania Niestłonego i Machy

Prace Niestłonego oraz Machy dotyczą głównie wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną w wieloosiowym stanie obciążenia [56, 63, 68]. Prezentowali zagadnienia obliczania trwałości zmęczeniowej z wykorzystaniem GWM dla przypadku obciążeń cyklicznych i losowych, jak również szereg kryteriów wieloosiowego zmęczenia dedykowanych metodom spektralnym. Prace zawierają również propozycje zastosowania składowych odkształcenia do wykonania obliczeń metodą spektralną. Niestłony przedstawia w jednej ze swych prac przegląd kryteriów uszkodzenia zmęczeniowego możliwych do zastosowania w metodach spektralnych dla przypadku obliczeń wieloosiowych [64]. W jednej z prac przedstawiono algorytm wyznaczania

trwałości zmęczeniowej z wykorzystaniem metody spektralnej wyznaczania trwałości zmęczeniowej dla obciążeń wieloosiowych. Na rys. 7 przedstawiono schemat algorytmu obliczeniowego zaproponowanego przez Niestonego oraz Machę.



**Rys. 7.** Algorytm wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną- zaczerpnięte z pracy Niestonego [69].

### 3. Podstawy teoretyczne obliczeń zmęczenia w dziedzinie częstotliwości

---

**P**odstawy teoretyczne związane z opisem oraz obróbką statystyczną sygnałów losowych przedstawiane w tym rozdziale są zaczerpnięte z prac Bendata i Piersola [5, 7] oraz Niestoniego i innych [69]. Analizując sygnał musimy zacząć od kilku podstawowych czynności. Jest to zdefiniowanie czy sygnał wykazuje charakter deterministyczny - czyli możemy go opisać równaniami, czy może ma charakter stochastyczny (losowy) - co wiąże się z tym, że możemy jedynie określić pewne jego główne statystyczne właściwości. Następnie wiedząc już, z czym mamy do czynienia możemy podjąć się obliczeń matematycznych lub statystyki sygnału. Fakt, iż metoda spektralna wykorzystywana jest głównie dla obciążeń losowych powoduje, że interesuje nas wyłącznie obróbka statystyczna sygnału. W przypadku obliczeń zmęczenia interesuje nas również poprawne przedstawienie naprężenia dla losowych sygnałów. W kolejnych podrozdziałach podjęto się przedstawienia podstawowych założeń teoretycznych odnoszących się do właściwości sygnałów losowych.

#### 3.1. Stacjonarne procesy losowe

Gdy dla określonego procesu losowego  $x(t)$  obliczyć nieskończony zbiór momentów wyższych rzędów i momentów łącznych, a wszystkie te możliwe momenty oraz momenty łączne nie zależą od czasu to w takim przypadku proces losowy  $x(t)$  nazywamy stacjonarnym lub stacjonarnym w węższym sensie. W ogólnym przypadku wartość średnia oraz funkcja autokorelacji nie mogą się zmieniać wraz z czasem, aby proces można było uznać za stacjonarny. Jeżeli proces  $x(t)$  jest stacjonarny, a wartość średnia oraz funkcja autokorelacji są jednakowe dla różnych funkcji losowych, to taki proces losowy nazywa się ergodycznym. Ergodyczne procesy losowe należą do najczęstszych przypadków procesów stacjonarnych, co często ułatwia prawidłowe wyznaczenie charakterystyki stacjonarnego procesu losowego na podstawie jednej realizacji [7].

### 3.2. Niestacjonarne procesy losowe

Do procesów niestacjonarnych zalicza się wszystkie procesy losowe, które nie spełniają wymagań dotyczących stacjonarności przedstawionych we wcześniejszym podrozdziale. W skrócie można powiedzieć, że gdy wartość średnia oraz funkcja autokorelacji zmieniają się wraz z kolejnymi realizacjami procesu losowego  $x(t)$  to proces losowy  $x(t)$  nazywamy niestacjonarnym. W praktyce ciężko uzyskać prawidłowe wyznaczenie charakterystyk sygnału dla takiego procesu na podstawie nawet wielu realizacji [7].

### 3.3. Główne charakterystyki sygnałów losowych

W celu poprawnego opisu sygnału losowego należy posłużyć się odpowiednimi zależnościami matematycznymi, które dają oczekiwane informacje statystyczne. Do głównych charakterystyk sygnałów losowych możemy zaliczyć [5]:

- wartość średnią,
- wariancję,
- gęstość prawdopodobieństwa,
- funkcję autokorelacji,
- gęstość widmową mocy.

#### 3.3.1. Wartość średnia i wariancja

Rozpatrzmy przykład jednowymiarowego stacjonarnego procesu losowego  $x(t)$  wykazującego cechy ergodyczności. Zakładając, że  $x(t)$  reprezentuje sygnał fizyczny nieraz wygodne jest przedstawienie go w postaci sumy składowej statycznej  $x_m$  i składowej dynamicznej  $x_d(t)$  lub fluktuacyjnej [7]

$$x(t) = x_m + x_d(t). \quad (49)$$

Składową statyczną można opisać przez wartość oczekiwaną określaną wzorem

$$x_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dx, \quad (50)$$

a składową dynamiczną przez wariancję sygnału

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - x_m]^2 dt. \quad (51)$$

Wariancja jednak nie opisuje struktury częstotliwościowej procesu losowego, a informacja ta jest niezbędna do prawidłowego estymowania liczby cykli i rozkładu amplitud obciążenia w trakcie obliczeń zmęzeniowych.

### 3.3.2. Gęstość prawdopodobieństwa

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa sygnału losowego określa prawdopodobieństwo zdarzenia polegające na tym, że wartości sygnału w dowolnej chwili są zawarte w określonym przedziale. Głównym celem pomiaru gęstości prawdopodobieństwa sygnału fizycznego jest ustalenie praw statystycznych dotyczących rozkładu jego wartości chwilowych. Funkcję gęstości prawdopodobieństwa przedstawia się jako [5]:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \right], \quad (52)$$

gdzie:  $T_x$  oznacza sumę przedziałów czasu, w których wartości sygnału znajdują się w przedziale  $(x, x+\Delta x)$  w czasie trwania obserwacji  $T$ .

Wartość średnią można wyrazić za pomocą gęstości prawdopodobieństwa w następujący sposób:

$$x_m = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (53)$$

### 3.3.3. Funkcja autokorelacji

Funkcja autokorelacji sygnału losowego charakteryzuje ogólną zależność sygnału w pewnej określonej chwili od wartości w innej chwili. Głównym zastosowaniem funkcji autokorelacji procesu jest ustalenie, w jakim stopniu wartość procesu w określonej chwili wpływa na wartość procesu w pewnej chwili w przyszłości [7].

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt. \quad (54)$$

Wartość średnią procesu losowego  $x_m$  można wyznaczyć z funkcji autokorelacji. Zależność ta nie jest prawdziwa dla procesu okresowego.

$$x_m = \sqrt{R_x(\infty)}. \quad (55)$$

### 3.3.4. Gęstość widmowa mocy

Funkcja gęstości widmowej mocy sygnału losowego opisuje ogólną strukturę częstotliwościową procesu za pomocą gęstości widmowej wartości średniokwadratowej rozpatrywanego sygnału fizycznego. Wartość tę można wyznaczyć dla przedziału od  $f$  do  $f+\Delta f$  za pomocą filtru środkowo-przepustowego o wąskim paśmie i uśredniając kwadrat sygnału na wyjściu filtru [7]

$$\Psi_x(f, \Delta f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f)dt, \quad (56)$$

gdzie:  $\Psi_x$  – wartość średniokwadratowa przebiegu,  $x(t)$ ,  $T$  – czas obserwacji,  $x(t, f, \Delta f)$  – składnik funkcji  $x(t)$  w przedziale częstotliwości od  $f$  do  $f + \Delta f$ .

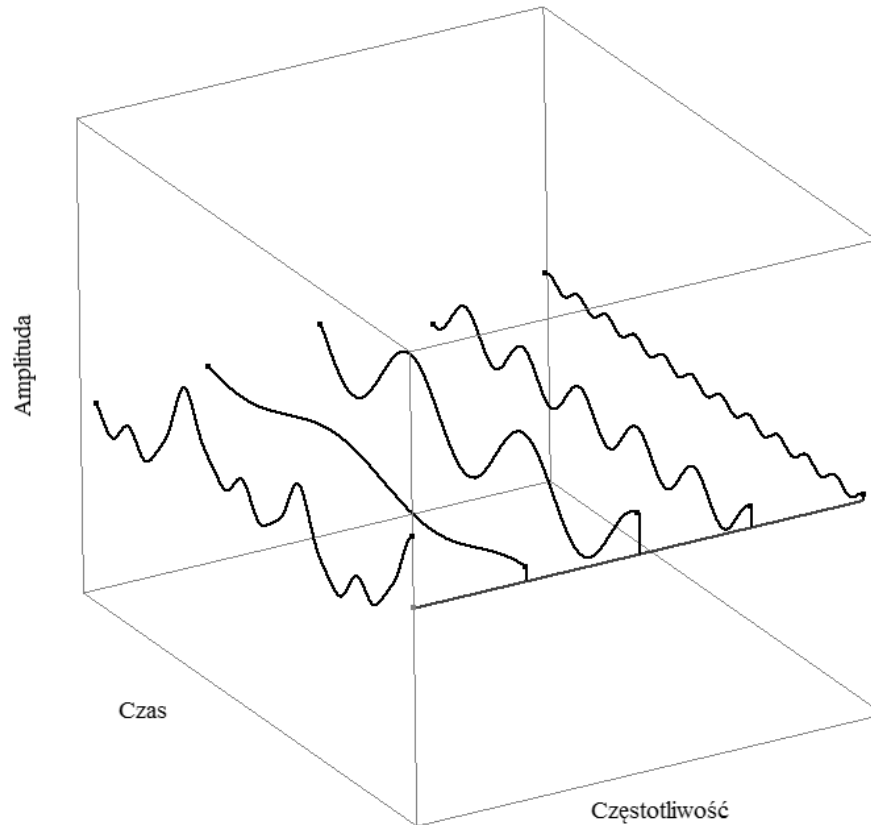
Przy małych wartościach  $\Delta f$  wzór (56) przedstawia jednostronną funkcję GWM

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Psi_x(f, \Delta f)}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f)dt \right]. \quad (57)$$

### 3.4. Naprężenie w dziedzinie częstotliwości

Haibach [29] w swej pracy stwierdził, że przyjęło się, że historia obciążenia najczęściej przedstawiana jest w dziedzinie czasu, w układzie amplituda naprężenia - czas. Natomiast w dziedzinie częstotliwości naprężenie może zostać przestawione przy pomocy transformacji Fouriera [29] jak przedstawiono na rys. 8.





**Rys. 8.** Alternatywne przedstawienie przebiegu naprężenia w dziedzinie czasu oraz w dziedzinie częstotliwości na przykładzie przebiegu harmonicznego według Haibacha [29].

Korzystając z szybkiej transformacji Fouriera (FFT) przekształcamy przebieg naprężenia z dziedziny czasu na dziedzinę częstotliwości. Przebieg obciążeń zmiennych w czasie jest określany jako widmo obciążenia. Przeglądając literaturę możemy się spotkać ze stwierdzeniem, że dla różnych ekstremalnych przypadków naprężenia (charakter sinusoidalny, losowy, szokowy, poli harmoniczny) możemy przedstawić różne widma obciążenia [51]. W tym celu operujemy takimi wielkościami jak gęstość widmowa mocy oraz rozkład gęstości prawdopodobieństwa. Gęstość widmowa mocy naprężenia opisuje ogólny rozkład naprężeniowo-częstotliwościowy obciążenia. W metodzie spektralnej do opisu naprężenia służy funkcja gęstości widmowej mocy przebiegu naprężenia  $G_{\sigma}(f)$ . Można ją wyznaczyć na podstawie zarejestrowanego przebiegu naprężenia  $\sigma(t)$  lub stosując modele opisujące widmo rzeczywistych obiektów [23]. W tym celu wykorzystując na przykład pakiet Matlab możemy skorzystać z funkcji `spectrum`, lub poszczególnych zaimplementowanych podfunkcji Welcha, Burga itp., które w pełni poprawnie estymują GWM.

## 4. Cel, zakres i teza pracy

---

### **Cel pracy**

Celem pracy jest opracowanie algorytmu obliczeniowego uwzględniającego wpływ wartości średniej naprężenia na trwałość w metodzie spektralnej.

### **Zakres pracy**

Zakres pracy obejmuje:

- Badania literaturowe z zakresu metody spektralnej i wpływu wartości średniej naprężenia na trwałość zmęczeniową;
- Adaptację znanych modeli kompensacyjnych do metody spektralnej;
- Badania symulacyjne;
- Badania eksperymentalne;
- Weryfikację proponowanego algorytmu na podstawie wyników badań eksperymentalnych własnych i zaczerpniętych z literatury.

### **Teza pracy**

Istnieje możliwość zastosowania w metodzie spektralnej wyznaczania trwałości zmęczeniowej znanych z literatury modeli uwzględniających wpływ wartości średniej naprężenia na trwałość zmęczeniową poprzez wyznaczenie funkcji gęstości widmowej mocy naprężenia transformowanego bezpośrednio w dziedzinie częstotliwości.

## 5. Badania eksperymentalne

**K**ażdy wywód teoretyczny opisujący zjawisko fizyczne powinien mieć swe potwierdzenie w warunkach laboratoryjnych. Zgodnie z tymi założeniami podjęto się zaplanowania badań eksperymentalnych. Z uwagi na dużą dostępność oraz na zakres zastosowania, jako materiał badany wybrano stal S355JR. Autor skupił się na zaplanowaniu badań jednoosiowych dla przypadku rozciągania-ściskania oraz zaplanowaniu przeprowadzenia badań na poziomach obciążenia odpowiadających wytrzymałości wysokocyklowej dla danego materiału. W niniejszym rozdziale prezentowane są wyniki badań własnych stali S355JR wykonanych na stanowisku do badań zmęczeniowych przy rozciąganiu-ściskaniu SHM-250. Badania wykonano dla obciążeń o charakterze stało amplitudowym jak również losowym dla dwóch różnych funkcji gęstości widmowej mocy. Badania były wykonywane dla współczynnika asymetrii cyklu równego  $R = -1$  oraz  $R = 0$  dla obciążenia stało amplitudowego oraz dla globalnego współczynnika asymetrii cyklu  $\bar{R} = 0$  dla obciążenia o charakterze losowym.

### 5.1. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko do badań zmęczeniowych SHM-250 służy do badań próbek materiałów obciążonych w jednej osi rozciąganiem-ściskaniem. Maszyna umożliwia wprowadzenie dodatkowego statycznego obciążenia. Badania na stanowisku mogą być wykonywane przy kontrolowanej sile, odkształceniu lub przemieszczeniu. Maszynę można wyposażyć w dodatkowe uchwyty umożliwiające zamontowanie próbek krzyżowych. Maszyna umożliwia wykonywanie badań cyklicznych jak również losowych przy wykorzystaniu odpowiednich generatorów. Maszyna ma następujące parametry:

- Zakres stosowanych sił  $\pm 50\text{kN}$ ;
- Maksymalna statyczna siła  $63\text{kN}$ ;
- Maksymalna częstotliwość pracy  $30\text{Hz}$ ;
- Zakres pracującego przemieszczającego się elementu  $\pm 10\text{mm}$ ;
- Zasilanie  $380\text{V}/50\text{Hz}$ ;
- Moc  $23\text{kW}$ .

Na rys. 9 przedstawiono stanowisko do badań zmęczeniowych SHM-250 z zamontowaną próbką.



**Rys. 9.** Stanowisko SHM 250 do badań zmęczeniowych w jednoosiowym stanie naprężenia rozciąganiem-ściskaniem przy kontrolowanej sile.

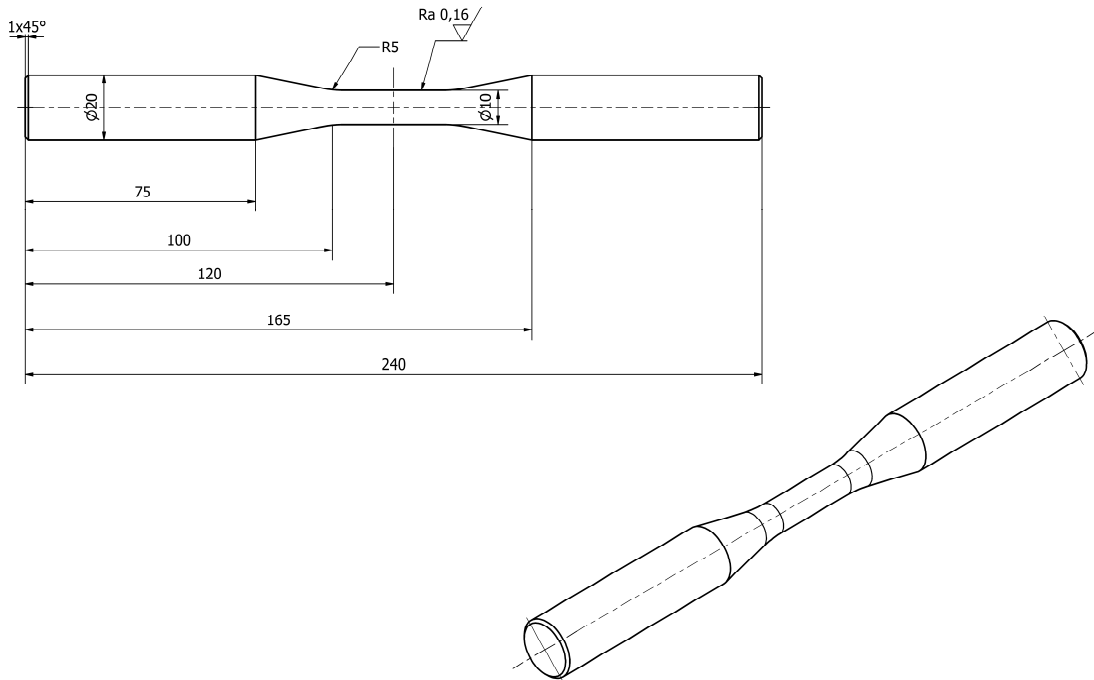
## 5.2. Materiał i geometria badanych próbek

Materiał wykorzystany do badań eksperymentalnych to stal S355JR. Badana stal jest powszechnie stosowana w przemyśle maszynowym oraz energetycznym m.in. przy budowie słupów trakcji energetycznej, masztów itp. według PN-EN 10025-2:2007 (Wyroby walcowane na gorąco ze stali konstrukcyjnych. Część 2: Warunki techniczne dostawy stali konstrukcyjnych niestopowych) [99] jest to stal niestopowa, konstrukcyjna stosowana na konstrukcje stalowe, spawalna i cechuje się bardzo dobrą skrawalnością. Niniejszy typ stali był już poddawany analizie zmęczeniowej m.in. przez Łagodę i innych [45] oraz w pracy Klugera i Łagody [43], gdzie przedstawiono wyniki badań zmęczeniowych próbek materiału dla zginania wahadłowego przy stałej amplitudzie momentu zginającego. Własności statyczne stali S355JR zostały przedstawione w tabeli 2. Materiał nie został poddany zabiegom obróbki cieplnej ani żadnym zabiegom zwiększania twardości powierzchni po obróbce mechanicznej [13].

**Tabela 2.** Własności wytrzymałościowe stali S355JR.

<b>R<sub>e</sub> [MPa]</b>	<b>R<sub>m</sub> [MPa]</b>	<b>A<sub>10</sub> [%]</b>	<b>Z [%]</b>	<b>E [GPa]</b>	<b>v</b>
<b>394</b>	611	20	51	213	0,31

Kształt i wymiary próbek wykorzystanych w badaniach zostały przyjęte zgodnie z zaleceniami uznanego powszechnie przez naukowców Amerykańskiego Towarzystwa do Testowania Materiałów (ASTM) [22]. Kształt oraz wymiary próbek przedstawiono na rys. 10.

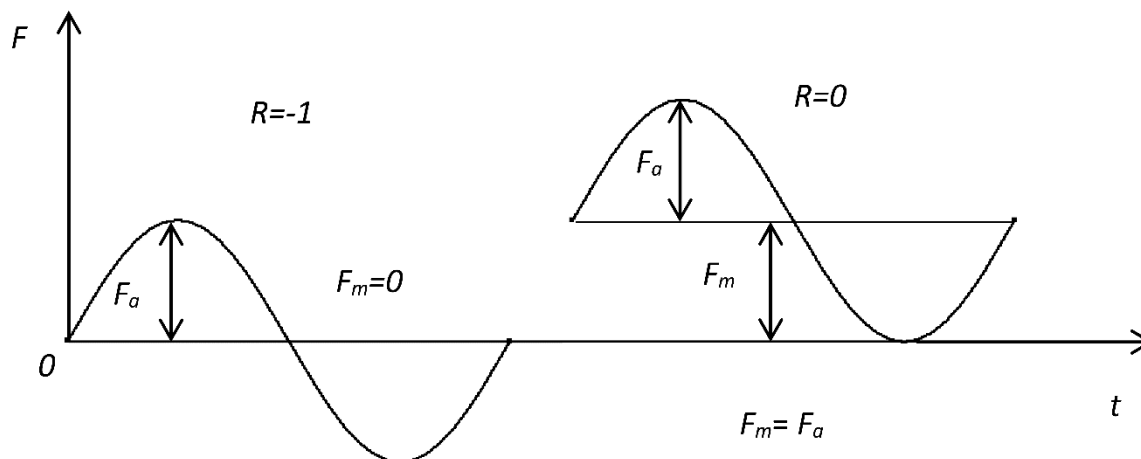


Rys. 10. Kształt i wymiary próbek zastosowanych w trakcie badań zmęczeniowych.

### 5.3. Badania stało-amplitudowe

W celu ustalenia podstawowych charakterystyk zmęczeniowych stali przeprowadzono badania cykliczne przy stałych amplitudach obciążenia. Podstawowym założeniem było uzyskanie dwóch charakterystyk zmęczeniowych S-N w układzie naprężenie-liczba cykli. Badania cykliczne przeprowadzono na stanowisku do badań zmęczeniowych SHM-250 stosując standardowy program sterujący siłą dla dwóch stanów obciążenia przy kontrolowanej sile:

- Zerowej wartości średniej obciążenia  $R=-1$  ;
- Wartości średniej równej amplitudzie obciążenia  $R=0$ .



Rys. 11. Graficzna interpretacja stanu obciążenia dla badań cyklicznych.

Badania przeprowadzono dla serii 12 próbek. Naprężenia zostały przeliczone na podstawie sił oraz pola przekroju próbek zgodnie z wzorem

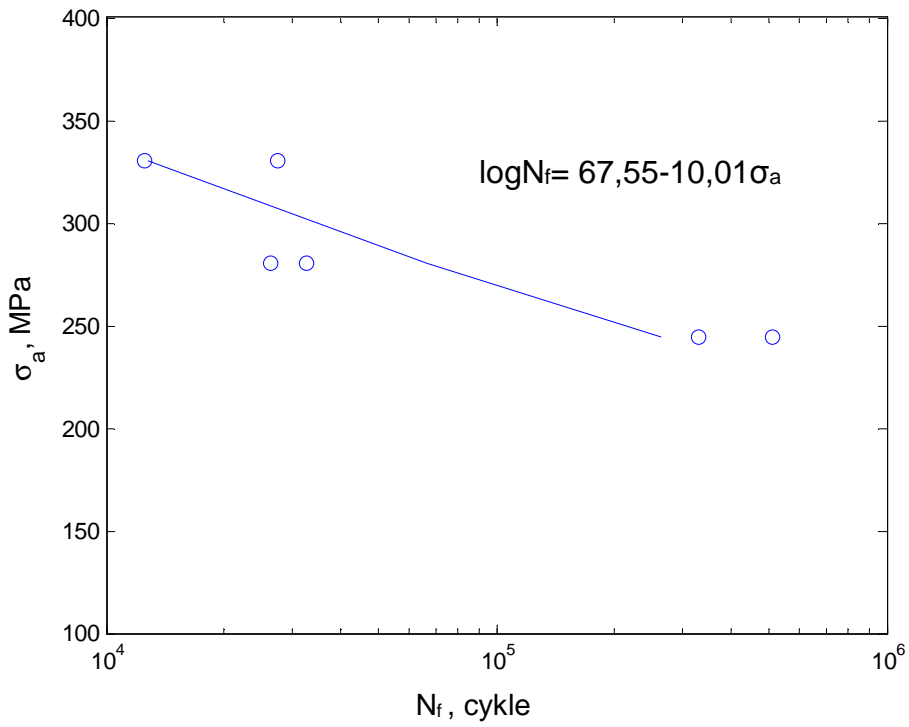
$$\sigma = \frac{F}{S_o}, \quad (58)$$

gdzie:  $F$ -siła działająca w osi próbki,  $S_o$ - powierzchnia przekroju poprzecznego próbki.

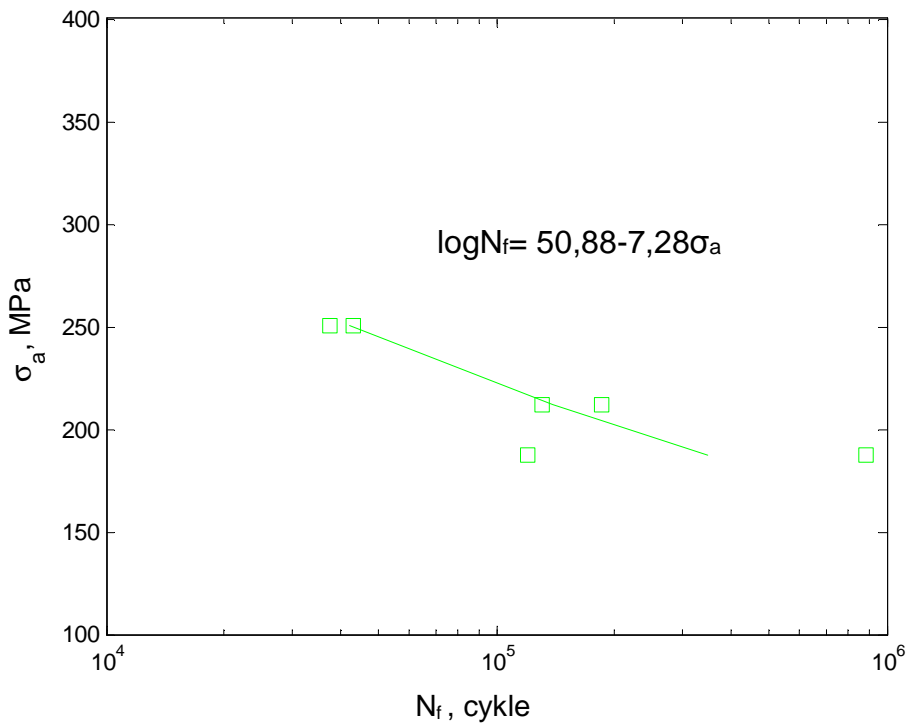
Wyniki zbiorcze dla obu współczynników asymetrii cyklu zostały przedstawione w tabeli 3 oraz w formie charakterystyk zmęczenia Wöhlera dla  $R=-1$  na rys. 12, dla  $R=0$  na rys. 13 oraz zbiorczy na rys. 14.

Tabela 3. Wyniki badań zmęzeniowych przy stałej amplitudzie.

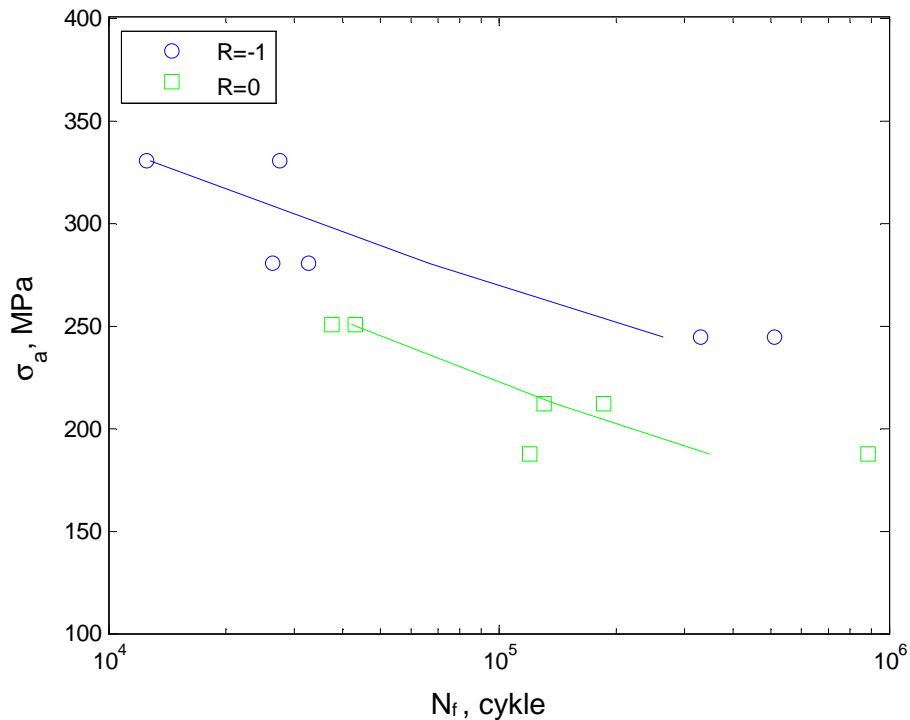
<b>R</b>	<b><math>\sigma_a</math>, MPa</b>	<b><math>N_f</math>, cykle</b>
<b>-1</b>	330	27470
	330	12500
	280	32590
	280	26500
	244	511900
	244	328540
<b>0</b>	250	42830
	250	37320
	212	185400
	212	130980
	187	888620
	187	120200



**Rys. 12.** Charakterystyka Wöhlera dla badań cyklicznych dla stali S355JR przy współczynniku asymetrii cyklu  $R=-1$ .



**Rys. 13.** Charakterystyka Wöhlera dla badań cyklicznych dla stali S355JR przy współczynniku asymetrii cyklu  $R=0$ .



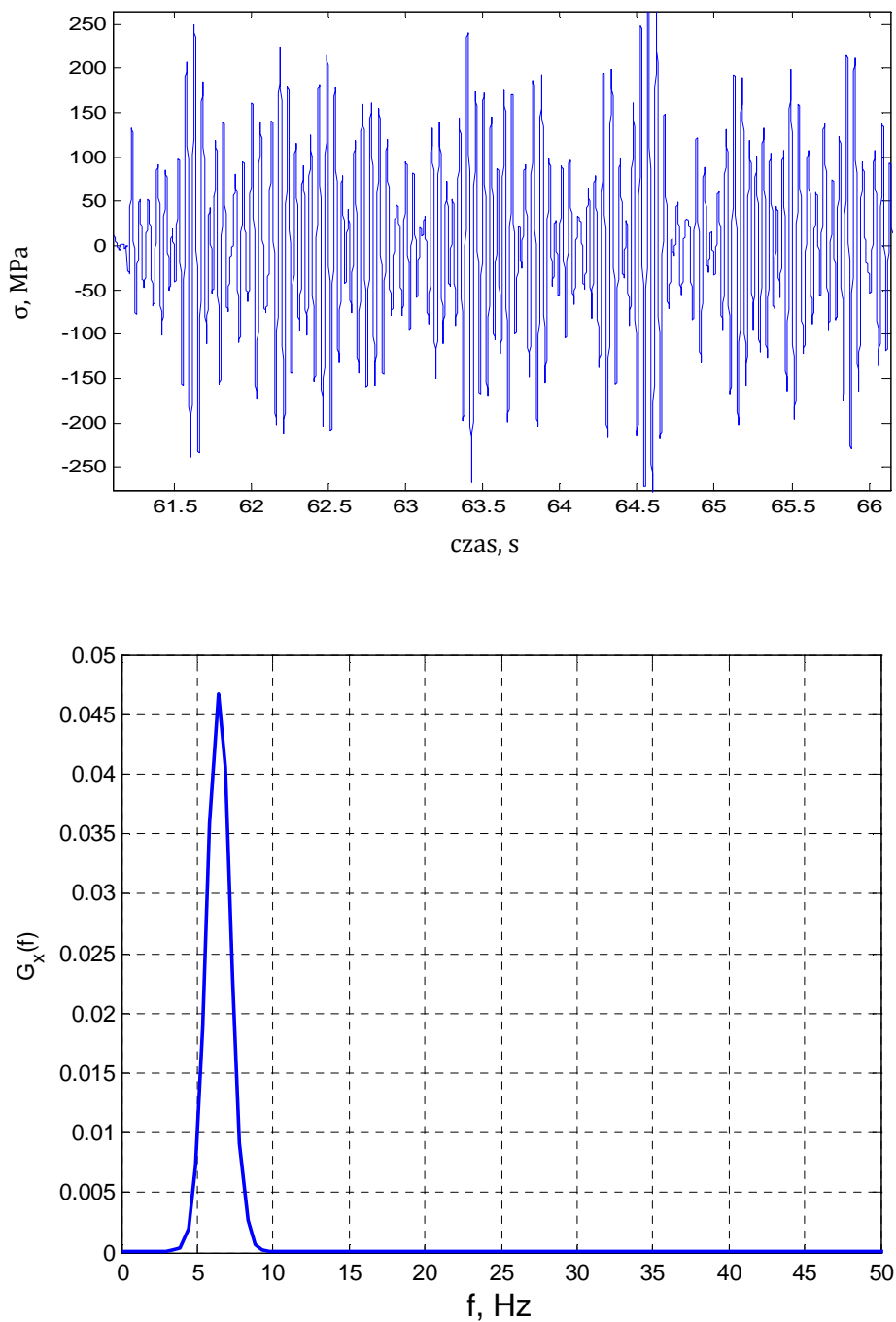
**Rys. 14.** Zbiorcze charakterystyki zmęczeniowe dla badań cyklicznych dla stali S355JR przy współczynnikach asymetrii cyklu  $R=-1$  oraz  $R=0$ .

#### 5.4. Badania losowe przy niezerowej wartości średniej historii obciążenia

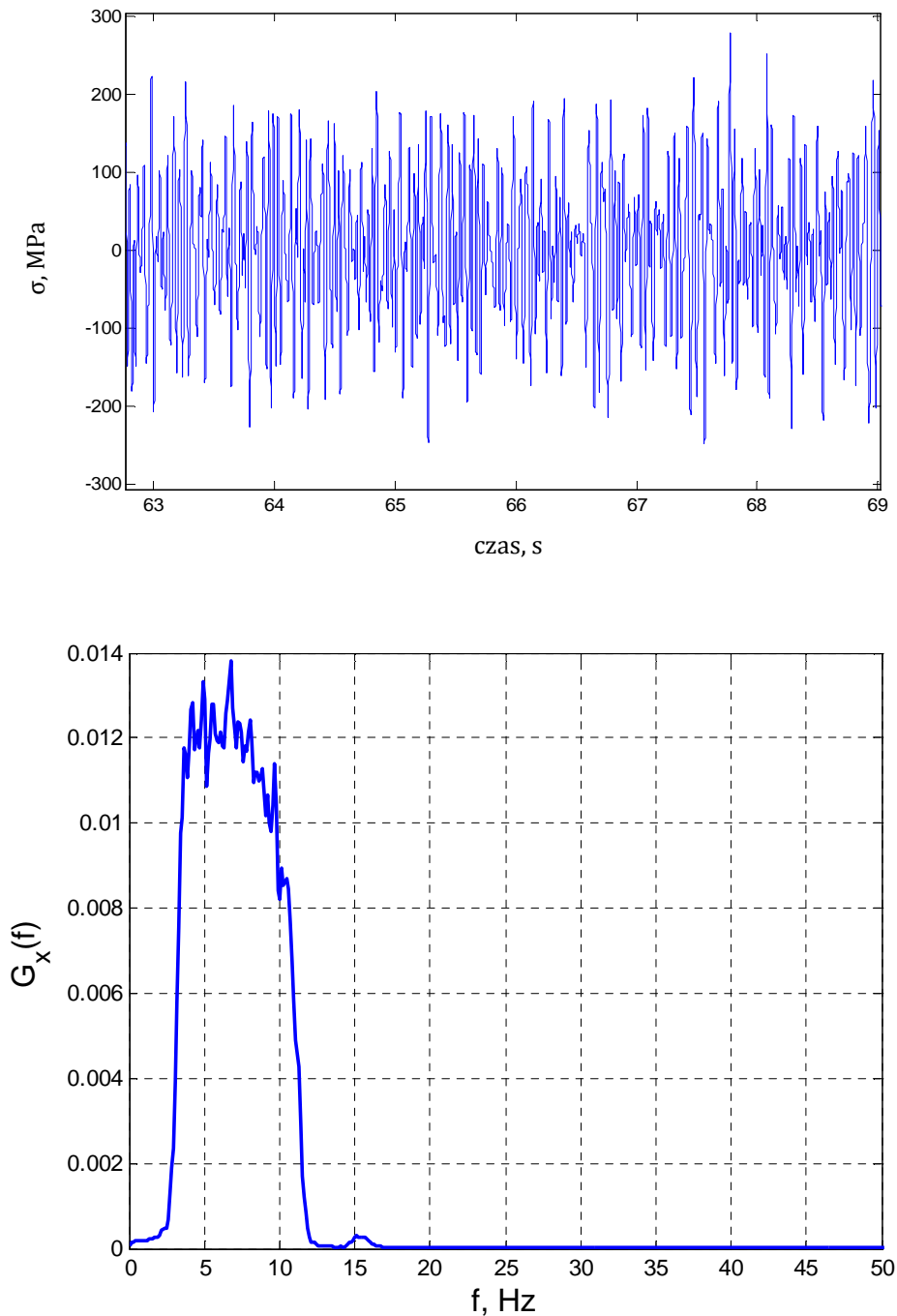
Metoda spektralna wyznaczania trwałości zmęczeniowej wykorzystywana jest w praktyce w przypadku losowych historii obciążenia [14]. Ten fakt wpłynął na plan badań zmęczeniowych a tym samym uwzględnienie obciążeń losowych w badaniach. Literatura analizuje najczęściej obciążenia wąsko bądź szerokopasmowego. Stąd też podjęto się wykonania badań dla obu tych typów obciążeń. Badania dla obciążeń o charakterze losowym przeprowadzono za pomocą specjalnego modułu do zadawania obciążeń stochastycznych wprowadzonego do podstawowego układu sterującego maszyny SHM-250. Na potrzeby badań wygenerowano dwa przebiegi pseudolosowe: wąskopasmowy oraz szerokopasmowy. Wycinek sygnału sterującego wąskopasmowego o częstotliwości dominującej wynoszącej 20Hz wraz z wykresem funkcji gęstości widmowej mocy przedstawiono na rys. 15, natomiast szerokopasmowego analogicznie na rys. 16. Przebiegi, aczkolwiek generowane przez filtrację pasmową szumu gaussowskiego białego, odpowiadają przebiegom naprężenia obserwowanym w wielu



elementach konstrukcyjnych podczas typowych warunków pracy. Badania losowe przeprowadzono dla globalnej wartości  $\bar{R} = 0$ , co oznacza, że próbki były wstępnie obciążone naprężeniem równym maksymalnej globalnej wartości amplitudy naprężenia.



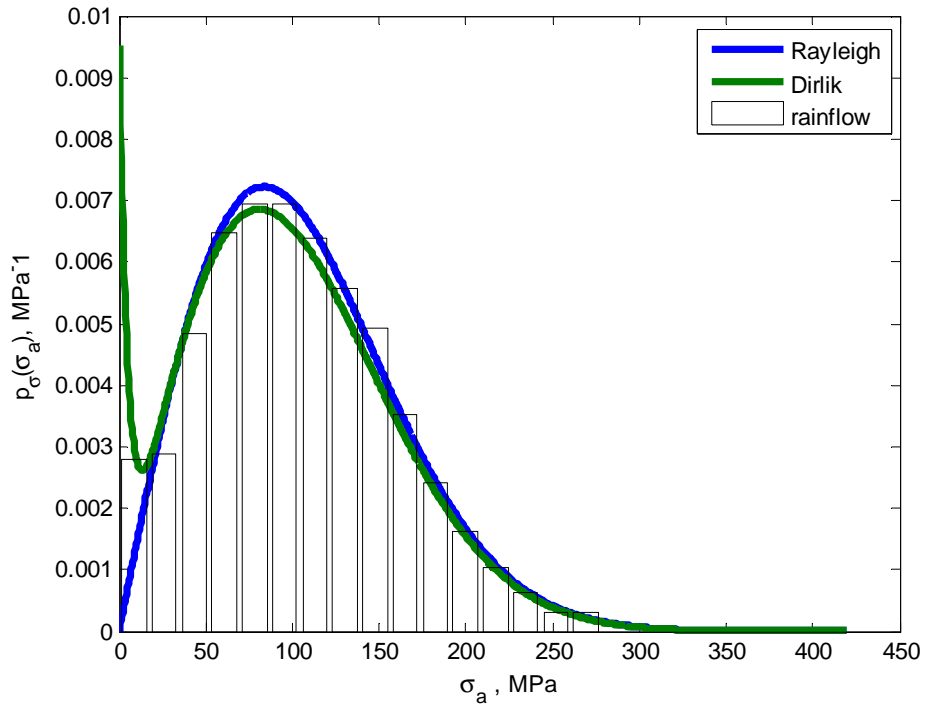
**Rys. 15.** Wycinek przebiegu obciążenia losowego wąskopasmowego wykorzystany podczas badań zmęczeniowych przed skalowaniem wraz z jego gęstością widmową mocy.



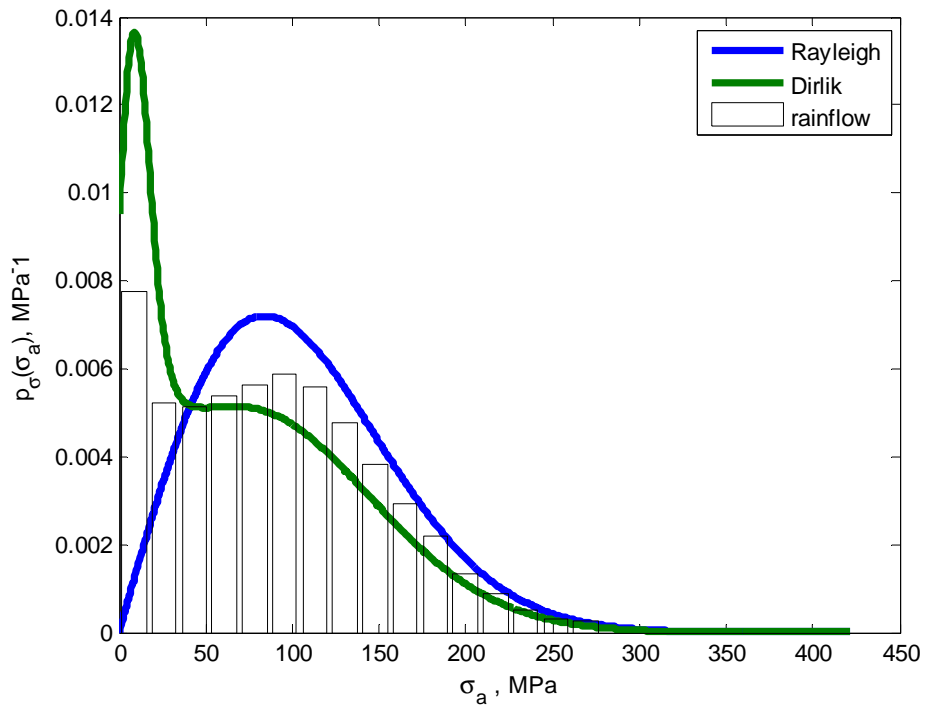
**Rys. 16.** Wycinek przebiegu obciążenia losowego szerokopasmowego wykorzystany podczas badań zmęczeniowych przed skalowaniem wraz z jego gęstością widmową mocy.

W celu ustalenia rozkładu gęstości prawdopodobieństwa amplitud naprężenia przebiegów zastosowano dwie metody: Rayleigha i Dirlika, które porównano z wynikami rozkładu amplitud według metody płynącego deszczu (rainflow). Rozkłady te

przedstawiono na rys. 17 oraz 18. Analizując rys. 16 widać, że rozkład prawdopodobieństwa według Dirlika najlepiej opisuje rozkład amplitud.



Rys. 17. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa amplitud dla przebiegu wąskopasmowego.



Rys. 18. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa amplitud dla przebiegu szerokopasmowego.

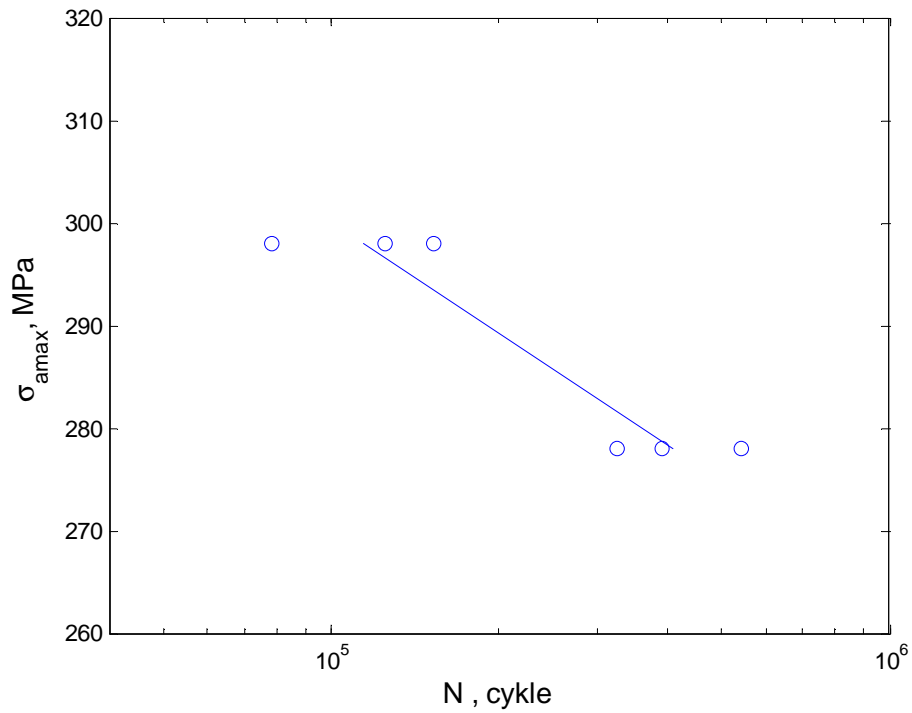
Badania losowe przeprowadzono również dla serii 12 próbek eksperymentalnych po trzy na poziom, z których utworzono charakterystyki zmęczeniowe w układzie maksymalna amplituda naprężenia- liczba cykli przedstawione na rys. 19 oraz na rys. 20. Są to tak zwane charakterystyki zmęczeniowe Gassnera [26]. Częstotliwość dominująca pracy maszyny była ustalona na 13Hz w celu uniknięcia wpływu efektów związanych z oddziaływaniem temperatury. W celu czytelnego przedstawienia wyników badawczych liczba cykli została przeliczona z czasu pracy maszyny aż do uszkodzenia oraz częstotliwości pracy maszyny dla każdej próbki. Wyniki eksperymentalne przedstawiono dla przebiegu wąskopasmowego w tabeli 4. Natomiast dla przebiegu szerokopasmowego w tabeli 5.

**Tabela 4.** Wyniki badań zmęczeniowych dla obciążenia pseudolosowego dla przebiegu wąskopasmowego.

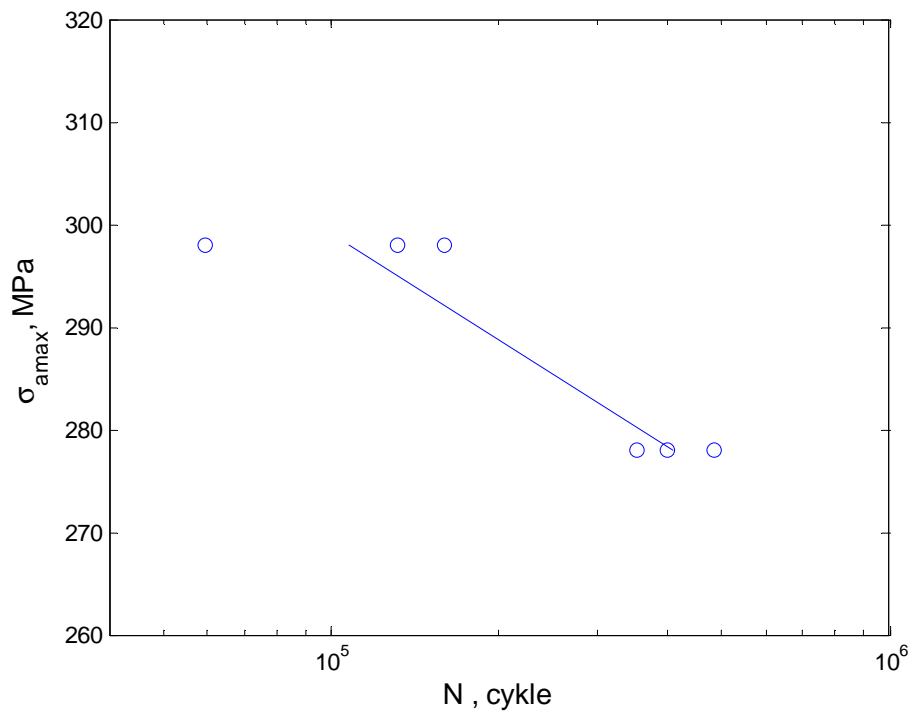
$\bar{R}$	$\sigma_{amax}, MPa$	$N_f, \text{cykle}$
<b>0</b>	298	124800
	298	78000
	298	152100
	278	390000
	278	540540
	278	324792

**Tabela 5.** Wyniki badań zmęczeniowych dla obciążenia pseudolosowego dla przebiegu szerokopasmowego.

$\bar{R}$	$\sigma_{amax}, MPa$	$N_f, \text{cykle}$
<b>0</b>	298	131820
	298	159120
	298	59280
	278	351780
	278	400920
	278	486720



**Rys. 19.** Charakterystyka zmęczeniowa Gassnera dla stali S355JR przy globalnej asymetrii cyklu  $\bar{R}=0$  dla badań sygnałem pseudolosowym przebiegu wąskopasmowego.



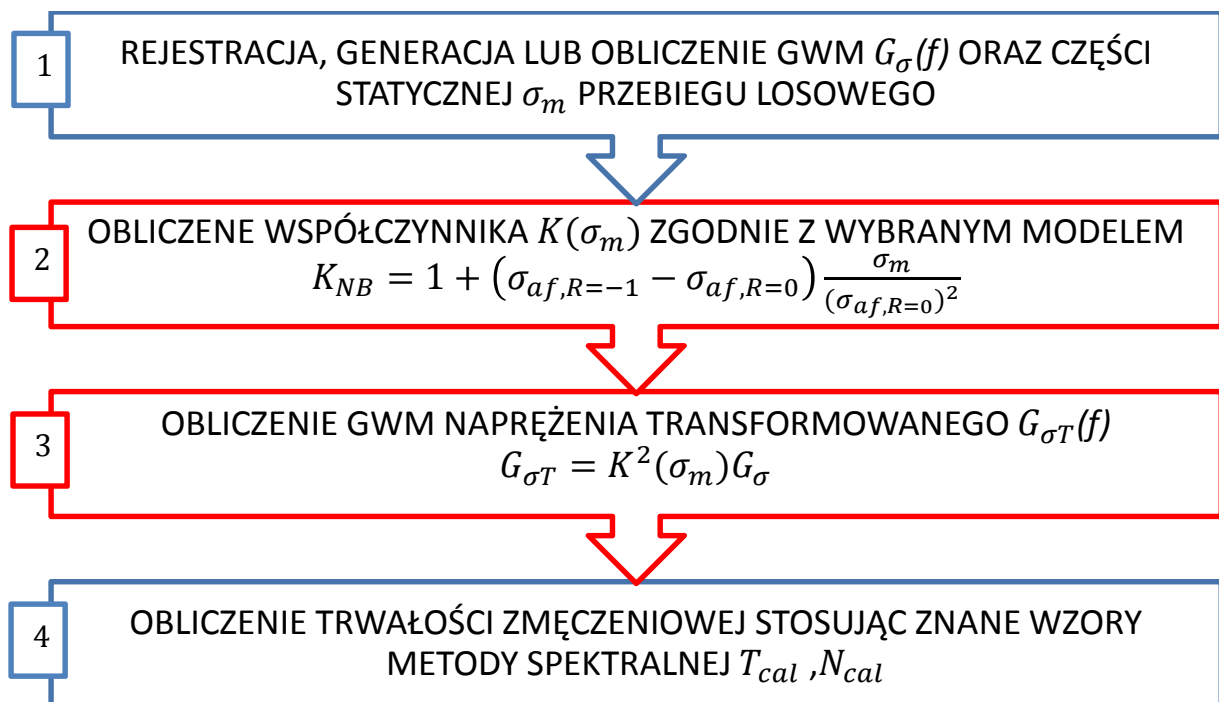
**Rys. 20.** Charakterystyka zmęczeniowa Gassnera dla stali S355JR przy globalnej asymetrii cyklu  $\bar{R}=0$  dla badań sygnałem pseudolosowym przebiegu szerokopasmowego.

## 6. Algorytm obliczania trwałości zmęczeniowej z uwzględnieniem wartości średniej naprężenia

Jedną z kluczowych części tej pracy jest stworzenie ścieżki jaką przeciętny inżynier powinien podążyć, aby wyznaczyć trwałość zmęczeniową przy wykorzystaniu metody spektralnej z uwzględnieniem wartości średniej naprężenia. Taką ścieżką postępowania lub przepisem może być algorytm obliczeniowy wyznaczania trwałości zmęczeniowej. Opierając się częściowo na algorytmie zaproponowanym przez Niestłonego [69] wprowadzono do niego pewne modyfikacje. Zmiany te związane są z krokami uwzględniającymi wpływ wartości średniej obciążenia. Upraszczając algorytm możemy go zawęzić do kilku głównych kroków:

- Rejestrację, generację lub obliczenie GWM  $G_{\sigma}(f)$  oraz jej części statycznej  $\sigma_m$ ;
- Obliczenie współczynnika  $K(\sigma_m)$  zgodnie z odpowiednim modelem;
- Obliczenie GWM naprężenia transformowanego  $G_{\sigma T}(f)$ ;
- Wyznaczenie trwałości zmęczeniowej stosując odpowiednie zależności metody spektralnej.

Schemat zaproponowanego algorytmu obliczeniowego zaprezentowano na rys. 21.



Ryż 21. Uproszczony schemat algorytmu wyznaczania trwałości zmęczeniowej przy pomocy metody spektralnej z uwzględnieniem wartości średniej naprężenia.

## 6.1. Rejestracja, generacja lub obliczenie $G_{\sigma}(f)$

Pierwszy krok algorytmu wymaga ustalenia obciążenia działającego na układ poprzez rejestrację lub generację przebiegu naprężenia. Podstawowymi danymi wejściowymi do obliczeń będą przebiegi obciążenia lub bezpośrednio GWM. Dane te otrzymujemy poprzez:

- pomiar tensometryczny odkształceń na rzeczywistych elementach konstrukcyjnych,
- wyznaczenie funkcji gęstości widmowej mocy (GWM) z wygenerowanych losowych przebiegów obciążenia, odpowiadającym rzeczywistym warunkom eksploatacyjnym poprzez zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera (FFT),
- określenie kształtu funkcji GWM poprzez dobór odpowiednich jej parametrów statystycznych na podstawie rzeczywistych zaobserwowanych zjawisk fizycznych.

Oprócz przedstawionych powyżej sposobów pozyskiwania informacji o obciążeniu, coraz większym uznaniem cieszy się wykorzystanie przebiegów obciążenia przygotowanych na podstawie uśrednionych wyników badań wykonanych przez dziesiątki ośrodków badawczych zajmujących się rejestracją różnego typu obciążeń eksploatacyjnych [23]. Są to tak zwane obciążenia standardowe, do których możemy zaliczyć:

- **CARLOS** (CAR LOading Standard) – widmo zostało zaproponowane przez Instytut badań nad wytrzymałością zmęczeniową Fraunhofera w Darmstadt w Niemczech. Jak wynika z samej nazwy najczęściej stosowane jest do badań elementów samochodowych. Autorzy sugerują, że to pseudolosowe widmo obciążenia może być również stosowane do ogólnego użytku dla stanowiskowych badań zmęczeniowych różnego typu elementów. Jego rozkład prawdopodobieństwa jest równoważny z rozkładem dla stacjonarnego procesu Gaussowskiego [76]. Zmiana częstotliwości pracy maszyny wykorzystującej przebieg CARLOS nie wpływa na charakterystykę sygnału. Widmo powstało we współpracy z wieloma koncernami samochodowymi. Dodatkowo stworzono trzy przebiegi obciążenia: CARLOS vertical (136 tys cykli obciążenia), CARLOS lateral (95 tys cykli obciążenia) oraz

CARLOS longitudinal (83 tys cykli obciążenia). Trzy standardowe przebiegi obciążenia dla kierunku pionowego, bocznego oraz wzdłużnego dla kontaktu nadwozia z kołem. Przebiegi te uzyskano z badań terenowym na samochodach współpracujących koncernów w celu stworzenia ujednoczonego standardu obciążenia drogowego na odcinku 6000 km.

- **COLOS** (COal LOading Standard) - powstał w ramach III programu badawczego Europejskiego Towarzystwa Węgla i Stali. Jest to przebieg wąskopasmowy o stałej wartości RMS (średni pierwiastek kwadratowy). Wygenerowany został na podstawie siedmiu stacjonarnych widm Gaussa o różnych wartościach RMS. Wszystkie siedem widm wzmocniono o 5 procent ich szczytowych wartości w celu generacji losowego rozkładu szczytowych wartości. Ten typ obciążenia może zostać opisany za pomocą rozkładu Rayleigha. Wadą tego obciążenia jest fakt, iż nie uwzględnia on dynamicznych zmian w układzie. Z tego powodu nie symuluje idealnie rzeczywistych zjawisk [23].
- **UKOSRPII** (United Kingdom Offshore Steel Research Project) - Jest to losowe widmo o dwóch dominujących wartościach wygenerowane w celu badań zmęczeniowych w programie badawczym UKOSRPII prowadzonym przez Narodowe Centrum Badawcze Wielkiej Brytanii w Szkocji, na rzecz badań zmęczeniowych platform wiertniczych pod wpływem losowych obciążeń. Przebieg ten powstał głównie na podstawie danych otrzymanych z platformy wiertniczej Forties Bravo i kilku innych mniej znaczących. Widmo to symuluje jedynie jeden przypadek rzeczywisty stanu wzburzonego morza o charakterystyce określonej w raporcie [72]. Z tego to powodu podobnie jak COLOS nie może być stosowany do wszystkich obliczeń dla rzeczywistych elementów konstrukcyjnych. Widmo to było szeroko analizowane w pracy Carpintiere'go [18].
- Widmo wygenerowane na podstawie algorytmu **Harta-Wirshinga**. Był to najdokładniejszy opis historii obciążenia powstającego na Morzu Północnym za pomocą statystycznych zależności dla dłuższego odcinka czasu opisany za pomocą wartości RMS w latach 80-tych. Jest to zmodyfikowane widmo obciążenia Wirshinga, przedstawione za pomocą zależności przez Harta:



$$G_{\sigma}(f) = AH_s^{2\varphi} \left[ \frac{\exp\left(\frac{-1050}{(2\pi T_D f)^4}\right)}{T_D^4 (2\pi f)^5 \left( \left[1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi f}{f_n}\right]^2 \right)} \right], \quad (59)$$

gdzie:  $G_{\sigma}(f)$  - funkcja gęstości widmowej mocy wyrażona jako funkcja częstotliwości fali  $f$ ,  $f_n$  - częstotliwość własna konstrukcji,  $\xi$  - współczynnik tłumienia,  $A$  oraz  $\varphi$  - współczynniki skali,  $H_s$  - znacząca wysokość fali o dominującym okresie  $T_D$ .

Trzy najniższe stany morza zostały pominięte z oryginalnego przebiegu, a trzy najwyższe połączone w jeden. Jest to pierwsze widmo, które nie tylko przedstawiało historię obciążenia dla dłuższego odcinka czasu, lecz również nie opierało się jedynie o ekstremalne stany morza dla odcinka czasu.

- **WISPER** (Wind Spectrum Reference) - powstało w Narodowym Centrum Badań nad Aeronautyką Holandii, mieszczącym się w Amsterdamie. Widmo to utworzono na podstawie badań dziewięciu turbin wiatrowych o zakresie mocy od 18kW do 3MW oraz rotorach o wymiarach od 12 do 100m. Badania wykonano dla około 130000 cykli przy częstotliwości 10Hz. Szczytane obciążenia powstałe w wyniku wyginania się łopatek oraz całej konstrukcji zostały wzięte do ustalenia ogólnej charakterystyki tego widma. Widmo to zyskało uznanie międzynarodowe i jest powszechnie stosowane do obliczeń zmęzeniowych w przypadku obciążeń wywołanych przez wiatr [32]. Znaczący dla tego przebiegu jest fakt iż generowany jest dla różnych współczynników asymetrii cyklu wahających się pomiędzy  $R=0.4$  do  $R=-0.67$ .
- **WISPERX** - powstało w wyniku modyfikacji widma WISPER. Ponieważ badania przy częstotliwości 10Hz trwały by zbyt długo w większości przypadków, ustalono, że trzeba stworzyć krótszą wersję tego widma. Krótsza wersja powstała poprzez filtrację mniejszych amplitud obciążenia, co dało zmniejszenie długości widma do 10% oryginalnej długości. Stąd wziął się człon X, który zwraca uwagę, że jest to jedna dziesiąta oryginalnego sygnału. Warto zwrócić uwagę na fakt, że sygnał ma długość 13000 cykli, jednak tylko 143 są wahadłowe (pomiędzy

rozciąganiem a ściskaniem), reszta zaś znajduje się w paśmie czystego rozciągania bądź ściskania [91].

## 6.2. Obliczanie części statycznej $\sigma_m$

Część statyczna jest obliczana dla losowego przebiegu naprężenia, jako globalna wartość średnia naprężenia. Wartość ta jest oczekiwaną wartością średnią przebiegu. Przedstawiona za pomocą wzoru [43]:

$$\bar{\sigma}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i, \quad (60)$$

gdzie:  $\sigma_i$  - wartość chwilowa naprężenia.

## 6.3. Obliczanie współczynnika $K(\sigma_m)$

Współczynnik  $K(\sigma_m)$  wyznaczany jest na podstawie wzorów uwzględnienia wartości średniej naprężenia. Możemy wyprowadzić równanie na taki współczynnik z dowolnej zależności kompensacyjnej przedstawianej w rozdziale drugim niniejszej pracy. Szeroką gamę tych modeli znajdziemy w pracach Pawliczka [50] oraz w pracach autora [66]. Wykorzystując te współczynniki możemy obrać jedną z dwóch ścieżek uwzględnienia wartości średniej zaproponowanych przez Łagodę [50]. Obejmują one uwzględnienie wartości średniej globalnej lub wartości średniej dla każdego cyklu z osobna. Udowodniono również, że te ścieżki obliczeniowe są ze sobą równoważne. Wybrane wzory na współczynnik  $K$  przedstawiono poniżej:

- dla modelu Soderberga:

$$K_s = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{R_e}}, \quad (61)$$

- dla modelu Goodmana:

$$K_{Go} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}, \quad (62)$$

- dla modelu Morrowa:

$$K_M = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}}, \quad (63)$$

- dla Modelu Gerbera:

$$K_{Ge} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2}, \quad (64)$$

- dla modelu Kwofiego:

$$K_K = \frac{1}{\exp\left(-\alpha_K \cdot \frac{\sigma_m}{R_m}\right)}, \quad (65)$$

gdzie:  $K_S, K_{Go}, K_M, K_{Ge}, K_K$  – współczynniki wyznaczone odpowiednio na podstawie modeli Soderberga, Goodmana, Morrowa, Gerbera i Kwofiego.

Modele te wykorzystane są do transformacji amplitud naprężenia w celu uwzględnienia wpływu globalnej wartości średniej naprężenia w dziedzinie czasu zgodnie z wzorem:

$$\sigma_T(t) = [\sigma(t) - \sigma_m] \cdot K(\sigma_m). \quad (66)$$

#### 6.4. Obliczanie transformowanej gęstości widmowej mocy $G_{\sigma T}(f)$ ze względu na wartość średnią

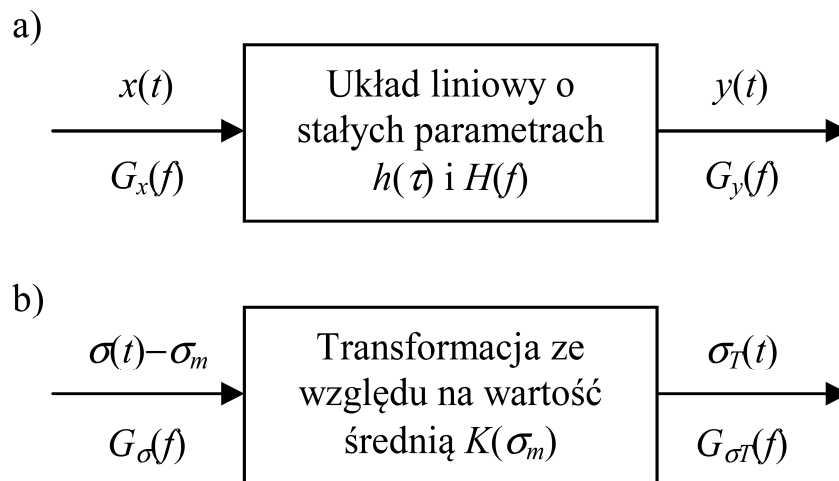
Przejsięcie sygnału  $x(t)$  przez układ liniowy o stałych parametrach określony odpowiedzią impulsową  $h(\tau)$  i transmitancją  $H(f)$  opisują następujące zależności [7]:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau, \quad (67)$$

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f), \quad (68)$$

gdzie:  $y(t)$  – sygnał wyjściowy z układu,  $G_x(f)$  i  $G_y(f)$  – odpowiednio GWM sygnału wejściowego i wyjściowego.

Z równania (65) wynika, że gęstość widmową mocy sygnału wyjściowego można wyznaczyć znając współczynnik wzmocnienia  $|H(f)|$  układu. Na rysunku 22a przedstawiono schematycznie przejście sygnału przez jednowejściowy układ liniowy.



**Rys. 22.** Jednowejściowy układ liniowy (a) oraz interpretacja transformacji liniowej przebiegu naprężenia ze względu na wartość średnią (b) - zaczerpnięte z pracy [67].

W metodzie spektralnej wyznaczania trwałości zmęczeniowej wykorzystuje się funkcję GWM do opisu przebiegu naprężenia bezpośrednio w dziedzinie częstotliwości. W przypadku, gdy przebieg naprężenia zawiera składową statyczną i fluktuacyjną należy wyznaczyć przebieg naprężenia transformowanego zgodnie z równaniem (66). Traktując składową fluktuacyjną przebiegu naprężenia  $[\sigma(t) - \sigma_m]$  jako sygnał wejściowy jednowejściowego układu liniowego o stałym współczynniku wzmocnienia  $|H(f)| = K(\sigma_m)$  można wyznaczyć gęstość widmową mocy przebiegu naprężenia transformowanego [67]

$$G_{\sigma_T}(f) = K^2(\sigma_m) G_\sigma(f), \quad (69)$$

gdzie:  $G_\sigma(f)$  – gęstość widmowa mocy centrowanego przebiegu naprężenia. Na rysunku 22b przedstawiono interpretację transformacji liniowej przebiegu naprężenia ze względu na wartość średnią, którą można porównać do przejścia sygnału przez układ liniowy, rys. 22a.

Główną zaletą proponowanego rozwiązania jest to, że transformacji podlega funkcja gęstości widmowej mocy przed zastosowaniem wzorów do wyznaczania trwałości zmęczeniowej. Daje to możliwość zastosowania w metodzie spektralnej wzorów na trwałość opracowanych dla przebiegów o wąskim paśmie częstotliwości jak i bardziej uniwersalnych rozwiązań opisujących prawidłowo większość przebiegów losowych stosowanych w obliczeniach zmęczeniowych [67].

## 6.5. Wyznaczanie momentów gęstości widmowej mocy $\xi_{kT}$

Uzyskaną wartość transformowanej gęstości widmowej mocy wykorzystujemy do ustalenia odpowiednich parametrów wymaganych do finalnych obliczeń zmęczeniowych za pomocą wielu dostępnych metod. Możemy skorzystać np. z równania na rozkład prawdopodobieństwa zakresów amplitud zaproponowanego przez Dirlika (wzór 42). Aby tego dokonać musimy obliczyć pierwsze pięć momentów funkcji GWM przy pomocy zależności:

$$\xi_{kT} = \int_0^{\infty} G_{\sigma T}(f) f^k df, \quad (70)$$

gdzie:  $\xi_{kT}$  - funkcja do wyznaczania pierwszych pięciu momentów transformowanej GWM ( $k=0, \dots, 4$ ).

## 6.6. Obliczanie trwałości zmęczeniowej

Trwałość zmęczeniową obliczamy korzystając w wybranej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, np. dla liniowej hipotezy Palmgren-Minera [37] z uwzględnieniem amplitud poniżej granicy zmęczenia otrzymuje się:

dla trwałości w cyklach 
$$N_{cal} = \frac{1}{\int_0^{\infty} \frac{p(\sigma_a)}{N_f(\sigma_a)} d\sigma_a}, \quad (71)$$

dla trwałości w s 
$$T_{cal} = \frac{1}{M^+ \int_0^{\infty} \frac{p(\sigma_a)}{N_f(\sigma_a)} d\sigma_a}, \quad (72)$$

gdzie: liczbę cykli dla amplitud oblicza się na podstawie charakterystyki zmęczeniowej materiału:

$$N_f(\sigma_a) = A\sigma_a^{-m}. \quad (73)$$

## 7. Badania symulacyjne

---

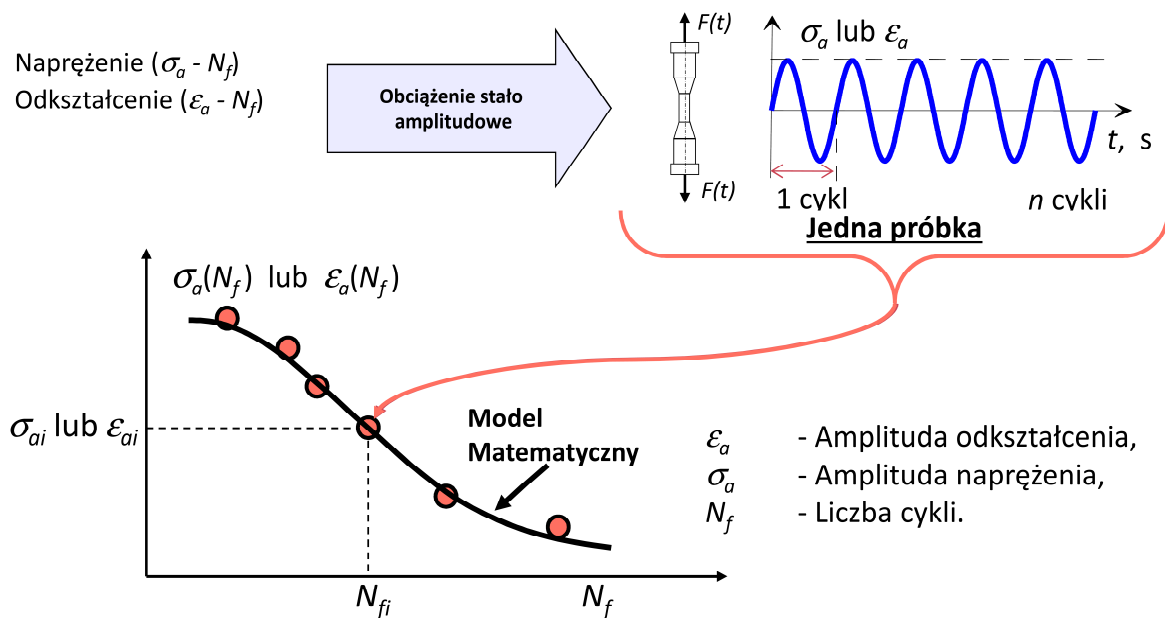
**S**ymulacja rzeczywistych procesów fizycznych przy pomocy zaawansowanych technik komputerowych nabiera obecnie coraz większego znaczenia. Ciekawym a zarazem interesującym zagadnieniem jest symulacja procesów losowych. Naukowcy już od dawna zauważyli, że część procesów zachodzących w naturze można opisać za pomocą charakterystyk probabilistycznych. Szczególnie jest to interesujące w zakresie wyznaczania wytrzymałości zmęczeniowej, gdzie od wielu lat stara się przedstawić metodę, która możliwie najbardziej zbliżyłaby nas do rzeczywistości. Poza dokładnością wymagany jest jeszcze inny element takiej symulacji. Pożądane jest, aby obliczenia wykonywane taką metodą były również najmniej czasochłonne, co wiąże ze sobą zmniejszenie kosztów takich obliczeń. Cechy te spełnia metoda spektralna wyznaczania trwałości zmęczeniowej, która jest nie tylko dokładna, lecz również obliczenia za pomocą niej są niezwykle szybkie. Po wybraniu odpowiedniej metody trzeba skupić się na jej zaletach i wadach. Zalety, jakimi są dokładność i szybkość obliczeń zostały już przedstawione, a wadą jest nieuwzględnianie wpływu wartości średniej naprężenia. W niniejszej części pracy skupiono się na przeanalizowaniu wszystkich aspektów związanych z wpływem wartości średniej na proces obliczeniowy:

- doboru odpowiedniej charakterystyki zmęczeniowej,
- wyboru poprawnego modelu kompensującego wpływ wartości średniej,
- wpływ metody obliczania rozkładu gęstości prawdopodobieństwa,
- wpływ metody estymacji gęstości widmowej mocy,
- wybór poprawnej hipotezy kumulacji uszkodzeń.

Po przeanalizowaniu tych wszystkich aspektów, podjęto się wykonania obliczeń według algorytmu przedstawionego w rozdziale szóstym pracy. Obliczenia wykonano dla wyników badań własnych oraz dla zaczerpniętych z literatury, m.in. dla badań Kihla i Sarkaniego.

## 7.1. Wpływ jakości charakterystyk zmęczeniowych na wyniki obliczeń zmęczeniowych

W praktyce inżynierskiej zjawisko zmęczenia opisuje się wykresami zmęczeniowymi, które są wynikiem obróbki statystycznej wyników badań próbek materiału przy ściśle ustalonych warunkach obciążenia zmiennego. Wykresy te mogą być naprężeniowe, odkształceniowe lub naprężeniowo-odkształceniowe. Otrzymuje się w ten sposób informacje wystarczające do prawidłowego opisu zjawiska bez wnikania w mechanizmy mikroskopowe zmęczenia, które są trudne do opisu w sposób deterministyczny [68]. Schemat opisujący procedurę tworzenia wykresów zmęczeniowych przedstawiono na rys. 23.



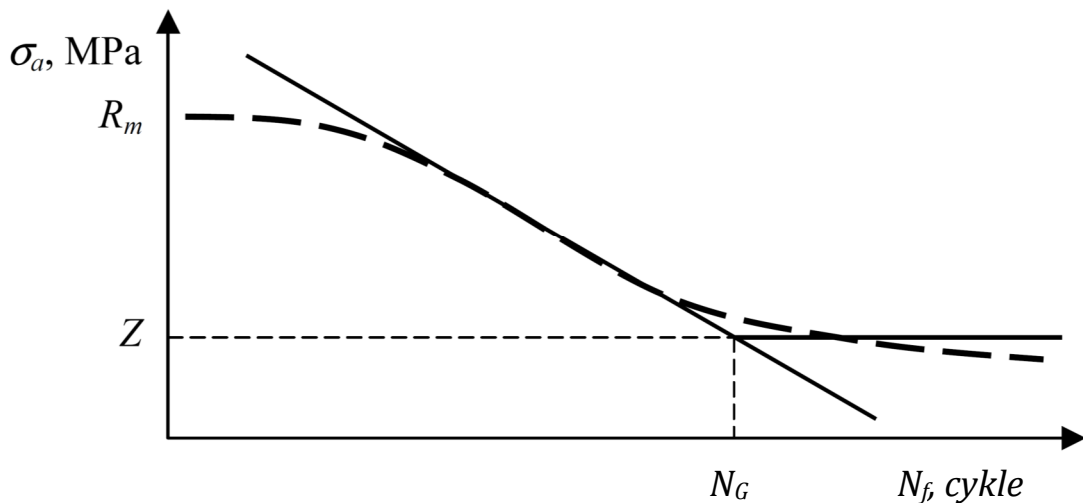
Rys. 23. Schemat opisujący procedurę tworzenia wykresów zmęczeniowych.

Najczęściej wykorzystuje się naprężeniowe wykresy zmęczeniowe, które wiążą liczbę cykli do zniszczenia z amplitudą naprężenia. Modeluje się te wykresy funkcjami wykładniczymi uzyskując odpowiednie odcinki proste na wykresach o osiach logarytmicznych. Najbardziej popularnymi wykresami tego typu są charakterystyki Wöhlera i Basquina. Niestety, opisują one prawidłowo rzeczywisty wykres tylko dla wąskiego przedziału liczby cykli, w którym obserwuje się w przybliżeniu odcinek prosty. Dlatego też w niniejszej części pracy podjęto próbę opisu wyników eksperymentalnych zaczerpniętych z literatury wykresami klasycznymi Basquina dla współczynnika



asymetrii cyku  $R = -1$  i  $R = 0$  oraz metodą odcinkową, a następnie wykorzystano tak sporządzone wykresy do obliczenia trwałości zmęczeniowej przy uwzględnieniu wpływu wartości średniej obciążenia. Jest to najprostszy przypadek praktyczny, w którym szczególną rolę odgrywa jakość dopasowania charakterystyk zmęczeniowych do rzeczywistych własności materiału.

Naprężeniowe wykresy zmęczeniowe przedstawiają odporność materiału na obciążenia zmienne i są wykorzystywane podczas obliczeń zmęczeniowych. Ze względu na wykładniczy charakter zmian zmęczeniowych osie tego typu wykresów są najczęściej skalowane logarytmicznie. Zgodnie z literaturą przedmiotu rzeczywiste wykresy zmęczeniowe przyjmują postać opadającej fali, co przedstawiono na rys. 24.



**Rys. 24.** Rzeczywisty wykres zmęczeniowy i aproksymacje wykresami Wöhlera i Basquina[3].

Ze względu na fakt, że najczęściej obliczenia zmęczeniowe wykonuje się dla zakresu ograniczonej lub nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej powstało wiele propozycji dotyczących aproksymacji tych zakresów odpowiednimi funkcjami [77], z których najbardziej popularny to wykres Wöhlera.

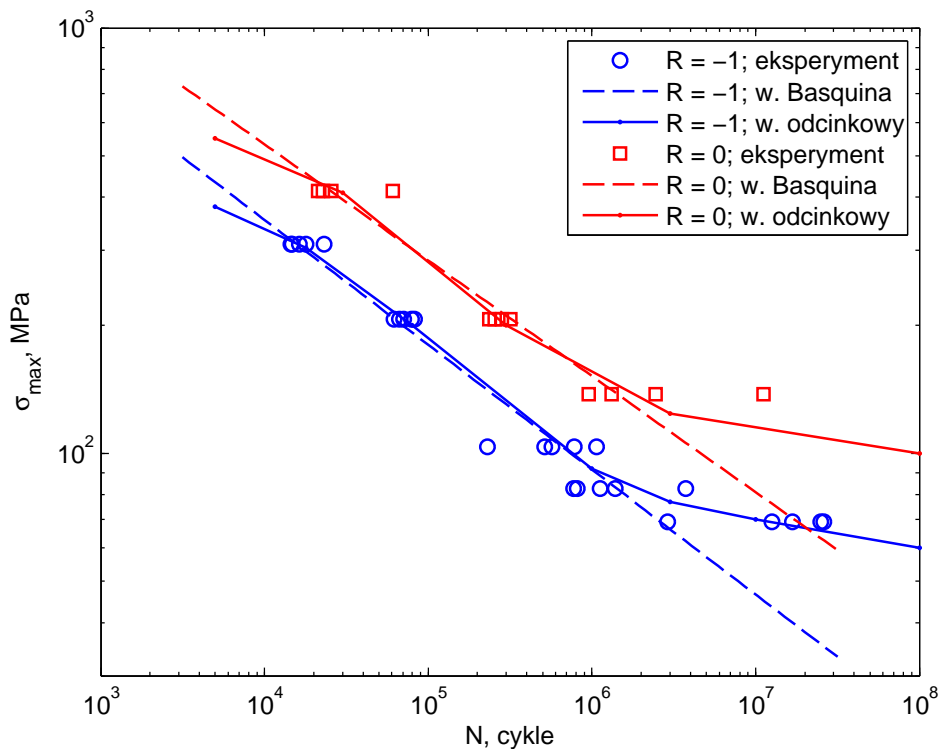
$$\log N_f = A_\sigma - m_\sigma \sigma_a \text{ dla } N_f < N_G, \quad (74)$$

oraz wykres Basquina w jednej z dwóch postaci:

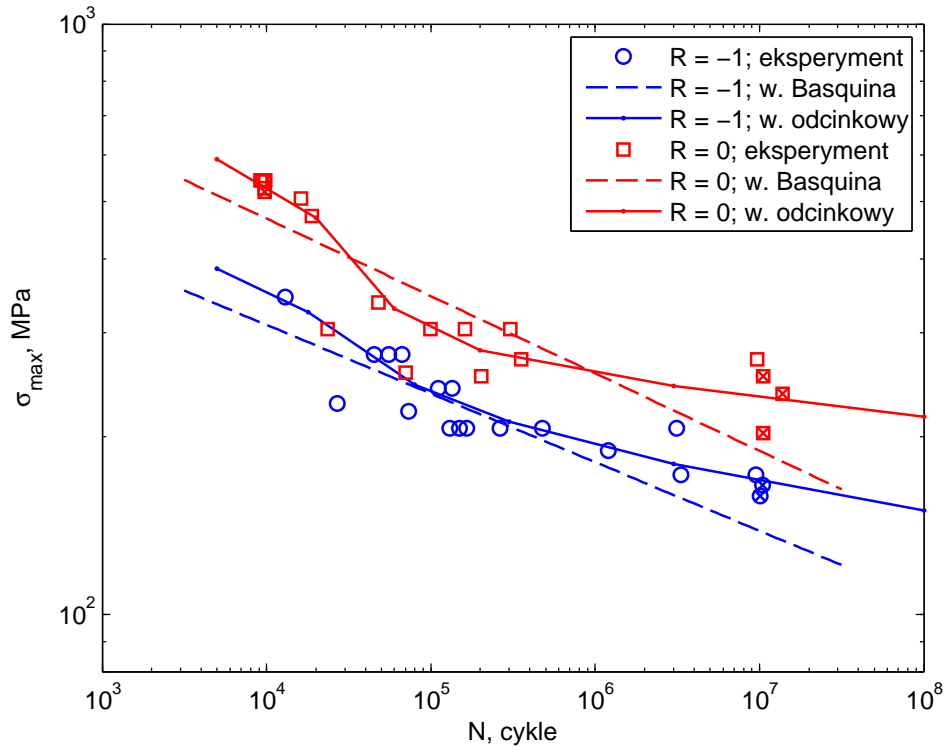
$$\log N_f = A - m \log \sigma_a, \quad (75)$$

$$\sigma_a = \sigma'_f (N_f)^b. \quad (76)$$

Ze względu na dużą łatwość w zastosowaniu metod numerycznych coraz bardziej popularne staje się odwzorowanie funkcji odcinkami prostymi. Metoda ta, nazywana odcinkową, jest często spotykana w programach obliczeniowych MES i pozwala na aproksymację danych eksperymentalnych wykazujących brak granicy zmęczenia lub nieliniowy charakter naprężeniowego wykresu zmęczeniowego [8]. W tym przypadku do zdefiniowania kolejnych odcinków wystarcza podanie pary wartości amplitudy naprężenia  $\sigma_a$  i odpowiadającej jej liczby cykli do zniszczenia  $N_f$ , które definiują kolejne punkty połączone linią prostą na wykresie. Liczbę odcinków dobiera się odpowiednio do potrzeb. Powstałe w ten sposób wykresy przedstawiono na rys. 25 i 26 odpowiednio dla badań zmęczeniowych próbek spawanych z wysokowytrzymałej stali niskostopowej HSLA-80 prezentowanych przez Kihla i Sarkaniego [39] oraz próbek gładkich ze stopu aluminium 75S-T6 Grovera i innych [28]. W tabeli 6 przedstawiono punkty definiujące naprężeniowe wykresy zmęczeniowe.



**Rys. 25.** Naprężeniowy wykres zmęczeniowy na podstawie badań Kihla i Sarkaniego aproksymowany wykresem Basquina i metodą odcinkową.



Rys. 26. Naprężeniowy wykres zmęczeniowy na podstawie badań Grovera i innych aproksymowany wykresem Basquina i metodą odcinkową.

Tabela 6. Punkty definiujące naprężeniowe wykresy zmęczeniowe w metodzie odcinkowej.

<i>i</i>	Stal HSLA-80, Kihl i Sarkani				Stop aluminium 75S-T6, Grover i inni			
	<i>R</i> = -1		<i>R</i> = 0		<i>R</i> = -1		<i>R</i> = 0	
	$\sigma_{ai}$ MPa	$N_i$ cykle	$\sigma_{ai}$ MPa	$N_i$ cykle	$\sigma_{ai}$ MPa	$N_i$ cykle	$\sigma_{ai}$ MPa	$N_i$ cykle
1	380	$5 \cdot 10^3$	275	$5 \cdot 10^3$	385	$5 \cdot 10^3$	295	$5 \cdot 10^3$
2	304	$1,8 \cdot 10^4$	205	$3 \cdot 10^4$	325	$1,8 \cdot 10^4$	235	$2 \cdot 10^4$
3	200	$8 \cdot 10^4$	100	$3 \cdot 10^5$	245	$8 \cdot 10^4$	165	$6 \cdot 10^4$
4	92	$1 \cdot 10^6$	62	$3 \cdot 10^6$	212	$3 \cdot 10^5$	140	$2 \cdot 10^5$
5	77	$3 \cdot 10^6$	50	$1 \cdot 10^8$	180	$3 \cdot 10^6$	122	$3 \cdot 10^6$
6	70	$1 \cdot 10^7$			150	$1 \cdot 10^8$	108	$1 \cdot 10^8$
7	60	$1 \cdot 10^8$						

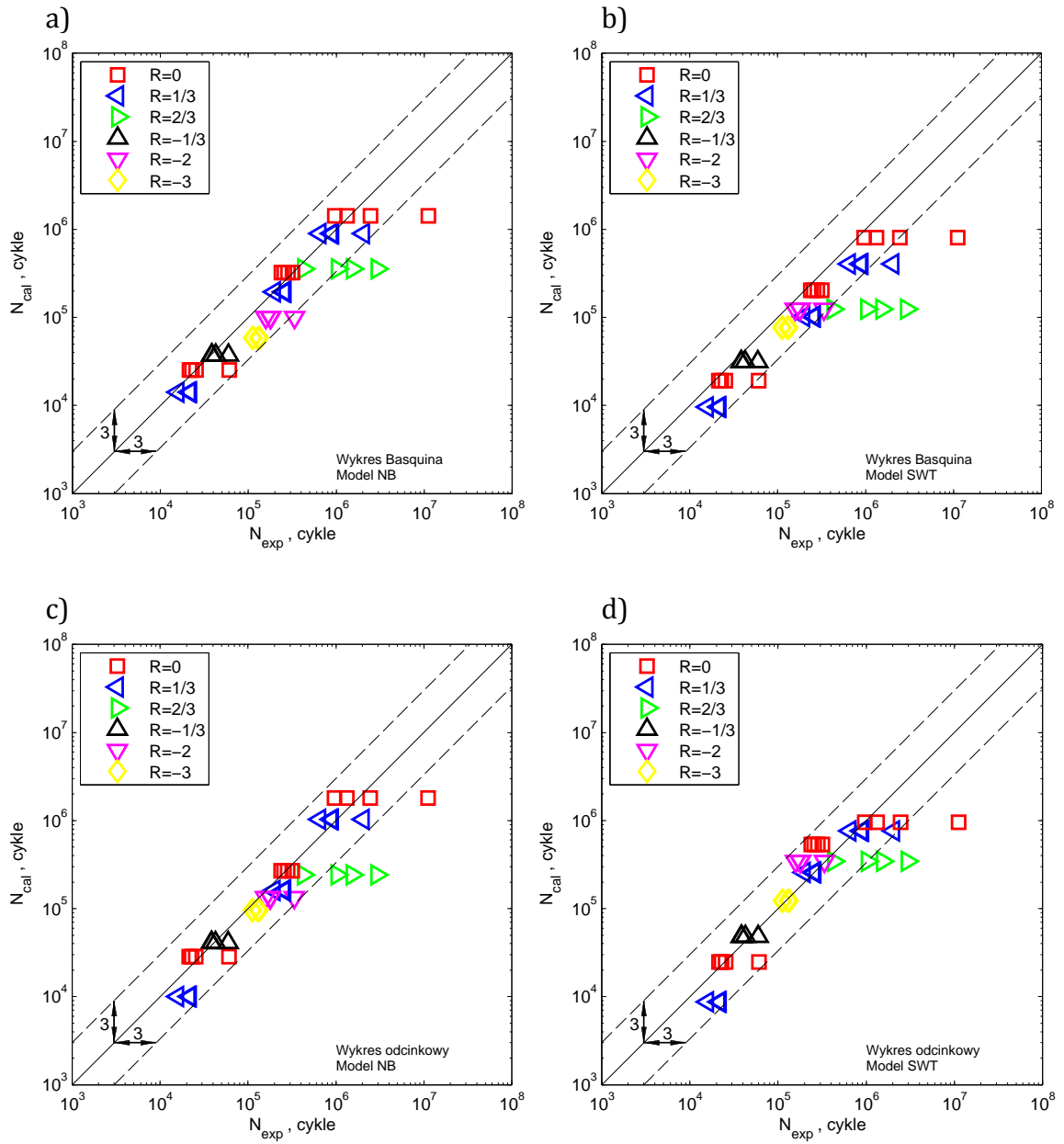
### 7.1.1. Wyznaczanie trwałości na podstawie wykresów ( $\sigma_a$ -*N*) z uwzględnieniem wpływu naprężeń średnich

Niezawodne prognozowanie trwałości zmęczeniowej jest nieodzownie związane z poprawnym uwzględnieniem wpływu wartości średniej obciążenia na trwałość.

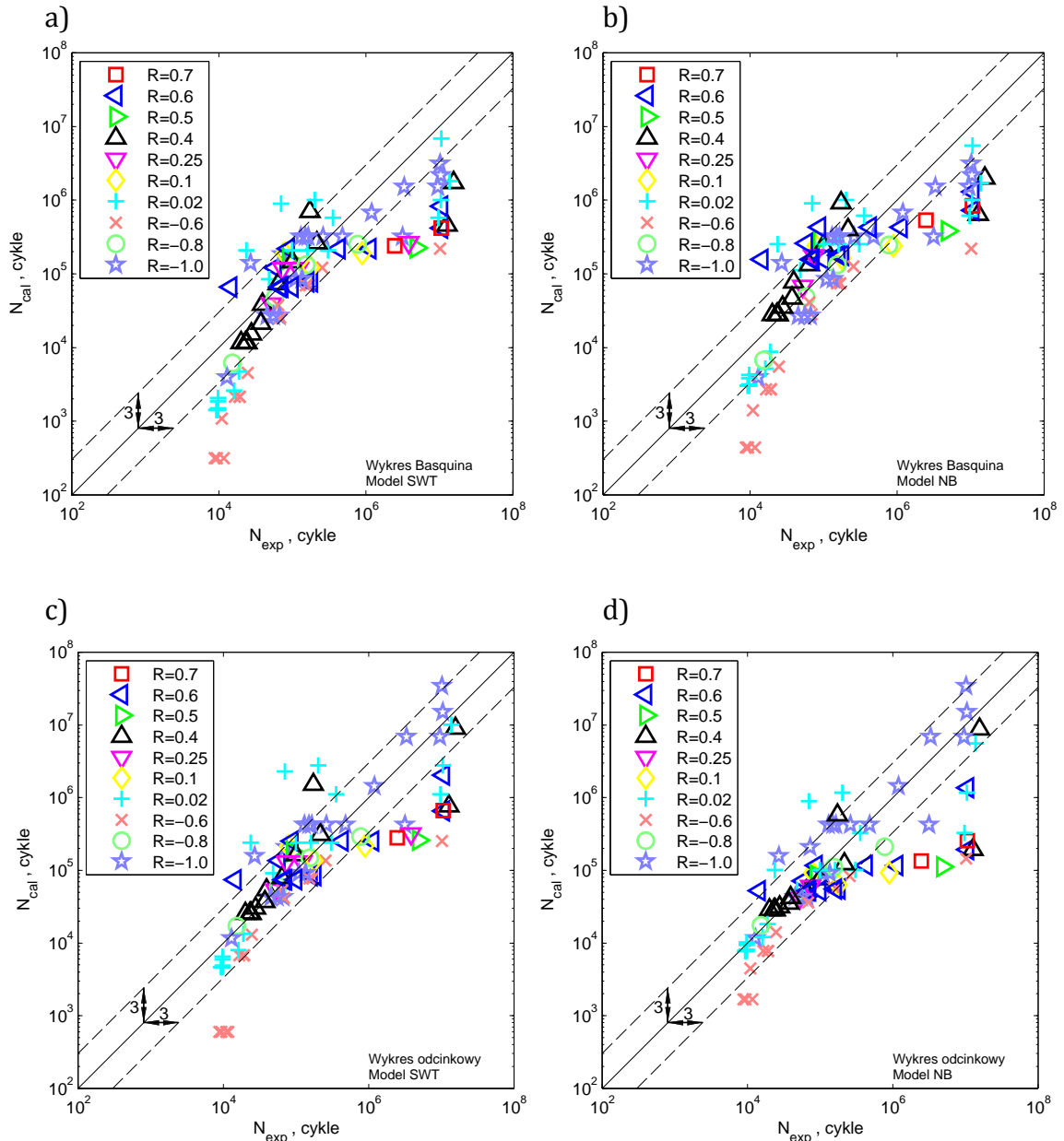
Mnogość kombinacji amplitudy obciążenia i wartości średniej spotykana w rzeczywistych przebiegach jest główną przyczyną rozwoju modeli opisujących ten wpływ w sposób analityczny. Różnorodne równania powstałe na przestrzeni lat przedstawiają trwałość zmęczeniową w funkcji amplitudy, wartości średniej i wybranych stałych materiałowych. W kontekście niniejszej pracy na szczególną uwagę zasługują jednak modele, które umożliwiają wykonanie obliczeń także według charakterystyki opisanej metodą odcinkową. Wybrano w tym celu dwa modele. Pierwszy to model proponowany przez Niesłonego i Böhma (27). Drugi to popularny model Smitha-Watsona-Toppera (SWT) w postaci równania (13). Amplitudy naprężenia transformowanego uzyskane na podstawie wzorów (27) i (13) wykorzystano do obliczenia liczby cykli  $N_{obl}$  na podstawie naprężeniowych charakterystyk zmęczeniowych Basquina i charakterystyk opisanych metodą odcinkową, które zaprezentowano na rys. 25 i 26 i omówiono wcześniej. Podczas odczytywania liczby cykli skorzystano z charakterystyki sporządzonej dla asymetrii cyklu  $R = -1$ . W przypadku modelu NB podczas obliczeń należało dobrać tak liczbę cykli  $N$ , dla której odczytano odpowiednie wartości amplitud  $\sigma_{af,R=-1}(N)$  oraz  $\sigma_{af,R=0}(N)$ , aby była ona równa obliczeniowej liczbie cykli  $N_{cal}$ . Ponieważ przed obliczaniem amplitudy transformowanej zgodnie z wzorem (27) ta liczba cykli nie była znana,  $N$  ustalono rozwiązując zadanie optymalizacyjne, w którym funkcja celu była zdefiniowana następująco

$$N = N_{cal}. \quad (77)$$

Wykorzystano w tym celu funkcję *fzero* pakietu obliczeniowego Matlab. Obliczone liczby cykli  $N_{cal}$  porównano z otrzymanymi z eksperymentu  $N_{exp}$  na rys. 27 dla badań przedstawionych przez Kihla i Sarkaniego oraz dla badań Grovera, przedstawiono na rys. 28.



**Rys. 27.** Porównanie obliczeniowej liczby cykli  $N_{cal}$  na podstawie modelu NB (a) i (c) i modelu SWT (b) i (d) z liczbą cykli uzyskaną podczas eksperymentu  $N_{exp}$  dla różnych wartości współczynnika asymetrii cyklu  $R$ . Wyniki badań cyklicznych Kihla i Sarkaniego  $R = 0$  i  $R = -1$  aproksymowane wykresem Morrowa (a) i (b) oraz metodą odcinkową (c) i (d).



**Rys. 28.** Porównanie obliczeniowej liczby cykli  $N_{cal}$  na podstawie modelu NB (a) i (c) i modelu SWT (b) i (d) z liczbą cykli uzyskaną podczas eksperymentu  $N_{exp}$  dla różnych wartości współczynnika asymetrii cyklu  $R$ . Wyniki badań cyklicznych Kihla i Sarkaniego  $R = 0$  i  $R = -1$  aproksymowane wykresem Morrowa (a) i (b) oraz metodą odcinkową (c) i (d).

Zastosowanie w procesie prognozowania trwałości zmęczeniowej eksperymentalnych wykresów zmęczeniowych aproksymowanych metodą odcinkową znacząco wpłynęło na dokładność otrzymanych wyników obliczeniowych. Szczególnie jest to widoczne dla skrajnych wartości zakresu liczby cykli, gdzie klasyczny wykres Basquina nie opisuje dostatecznie dokładnie zachowania się materiału. Metoda odcinkowa pozwala, przy dostatecznie dużej liczbie badań eksperymentalnych, na lepsze

dopasowanie do rzeczywistej charakterystyki zmęczeniowej. Modele NB i SWT wykorzystane do wyznaczenia amplitud naprężenia transformowanego pozwalają stosunkowo dobrze skompensować wpływ wartości średniej naprężenia na trwałość zmęczeniową. Można zauważyć, że stosując model NB otrzymuje się lepsze rezultaty w stosunku do parametru SWT biorąc pod uwagę rozpiętość wyników badań w liczbie cykli. Można to tłumaczyć tym, że istnieje zależność czułości materiału na wartość średnią ze względu na liczbę cykli. Model NB uwzględnia tę zmianę przez ustalanie amplitud transformowanej na podstawie amplitud odczytanych z wykresów zmęczeniowych dla ustalonej liczby cykli. Istnieje potrzeba przeprowadzenia dalszych weryfikacji wybranych modeli na podstawie wykresów zmęczeniowych aproksymowanych odcinkami by wykazać ich przydatność w prognozowaniu trwałości zmęczeniowej w szerokim zakresie liczby cykli.

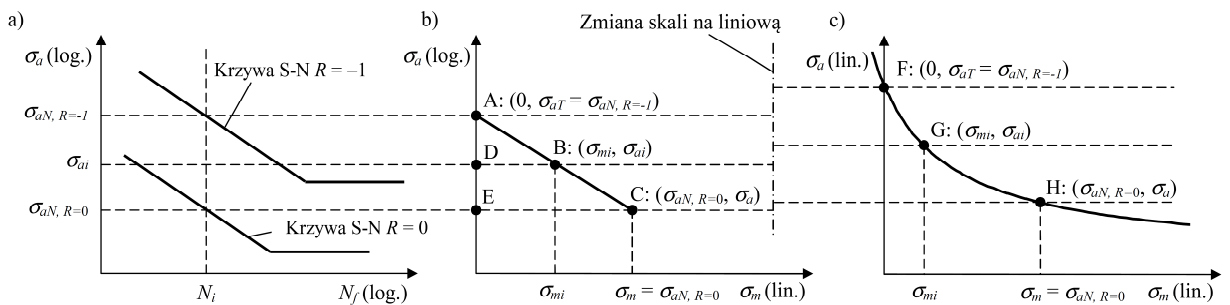
## **7.2. Model uwzględnienia wartości średniej wykorzystujący dwie charakterystyki zmęczeniowe**

W celu wykonania poprawnych obliczeń zmęczeniowych z uwzględnieniem wpływu wartości średniej naprężenia wymagane jest dobranie odpowiedniego modelu korekcyjnego. Może to być jeden z modeli przedstawianych w drugim rozdziale pracy. W zależności od tego, jakie informacje posiadamy o materiale, to znaczy które podstawowe własności mechaniczne są nam znane, możemy zastosować jeden z nich. Ważną informacją podczas doboru modelu korekcyjnego będzie również informacja o tym, z jakim materiałem mamy do czynienia; czy jest to materiał w stanie sprężysto-plastycznym czy sprężysto-kruchym zależnie od jego wrażliwości na wartości średniej. Często dzieje się tak, że dla materiału, dla którego wykonuje się badania zmęczeniowe, wykonywane są dwie krzywe  $\sigma_a-N$ . Najczęściej są podane dla dwóch skrajnych przypadków dla przebiegu wahadłowego  $R=-1$  oraz dla przebiegu odzerowo tętniącego  $R=0$ . Z tego powodu podjęto się zaproponowania modelu uwzględnienia wpływu wartości średniej używającego amplitudy naprężenia, odczytanej bezpośrednio z krzywych  $\sigma_a-N$  dla ustalonej liczby cykli (27). W takim przypadku ogólna forma amplitudy transformowanej będzie mogła być zapisana następująco:

$$\sigma_{aT} = \sigma_a K(\sigma_m, N_f) \text{ lub } \sigma_{aT} = \sigma_a K(\sigma_m, \sigma_{aN, R=-1}, \sigma_{aN, R}) \quad (78)$$

Założono, że model będzie brał pod uwagę różne wrażliwości materiału na wpływ wartości średniej zmieniające się wraz z liczbą cykli. Skutkuje to lepszym opisem wpływu wartości średniej na zjawisko zmęczenia materiału.

Kluczowe założenia modelu opierają się o zastosowanie dwóch obranych amplitud naprężenia, które przyjęto jako graniczne. Pierwszej dla: rozciągania-ściskania dla  $R=-1$  oraz drugiej ze znacznym wpływem wartości średniej, np.  $R=0$ . Te wartości są odczytywane z krzywych  $\sigma_a-N$  dla danej liczby cykli  $N_i$ , równej dla obu krzywych. Założono również, że stan pośredni wyężenia materiału pomiędzy granicznymi stanami, może zostać opisany za pomocą ciągłej funkcji. Poprzez dobranie odpowiedniej funkcji, poszczególne formy modeli uwzględnienia wartości średniej zostają uzyskane. Model ten doczekał się dwóch modyfikacji, jednej aproksymującej za pomocą zależności liniowej w formie modelu 1 oraz prostej zależności potęgowej w formie modelu 2. Ich założenia pokazano na rys. 29



**Rys. 29.** Ilustracja przedstawiająca analityczny sposób wyznaczania modeli korekcyjnych wartości średniej naprężenia opartych o krzywe  $\sigma_a-N$  (a), model 1(b), model 2(c).

Na rys. 29a pokazano wykres z dwoma krzywymi dla obciążenia wahadłowego oraz od zerowo tętniącego z zaznaczonymi amplitudami  $\sigma_{aN, R=-1}$  oraz  $\sigma_{aN, R=0}$  dla wybranej liczby cykli  $N_i$ . Te poziomy amplitud przeniesione są na wykres zamieszczony na rys. 29b, gdzie oś rzędnych przedstawia wartości  $\sigma_a$ , natomiast oś odciętych wartości  $\sigma_m$ . Warty podkreślenia jest fakt, że oś rzędnych jest w skali logarytmicznej natomiast odciętych w skali liniowej. Naszym zadaniem jest zapewnienie dla takiej samej wartości liczby cykli  $N_i$ , oraz dowolnej kombinacji wartości amplitudy  $\sigma_a$  oraz wartości średniej  $\sigma_m$  odpowiadającej im amplitudy transformowanej  $\sigma_{aT}$ , która da nam tę samą wartość liczby



cykli  $N_i$  jeżeli zastosujemy wartości z wykresów  $\sigma_a-N$  dla  $R=-1$  oraz  $R=0$ . Z podobieństwa trójkątów ACE oraz ABD wynika:

$$\frac{\log(\sigma_{aN,R=-1}) - \log(\sigma_{aN,R=0})}{\sigma_{aN,R=0}} = \frac{\log(\sigma_{aT}) - \log(\sigma_{ai})}{\sigma_{mi}} \quad (79)$$

Po prostej transformacji uzyskujemy zależność na obliczanie amplitudy transformowanej:

$$\sigma_{aT} = \sigma_{ai} \left( \frac{\sigma_{aN,R=-1}}{\sigma_{aN,R=0}} \right)^{\frac{\sigma_{mi}}{\sigma_{aN,R=0}}} \quad (80)$$

W zależności od wrażliwości na wartość średnią materiał może zachowywać się różnie. Z tego powodu podjęto się wyznaczenia drugiego modelu transformacyjnego, który uwzględni wpływ wartości średniej w bardziej znaczący sposób. W modelu drugim założono, że funkcja łącząca dwa graniczne stany będzie miała następującą formę:

$$\sigma_a = \frac{A}{\sigma_m + B} \quad (81)$$

Co odpowiada bardziej rzeczywistości. Nieznane wartości  $A$  i  $B$  możemy uzyskać rozwiązując prosty układ równań:

$$\begin{cases} \sigma_{aN,R=-1} = \frac{A}{B} \\ \sigma_{aN,R=0} = \frac{A}{\sigma_{aN,R=0} + B} \end{cases} \quad (82)$$

Gdzie pierwsze równanie opisuje przypadek, kiedy wartość średnia jest równa zero ( $R=-1$ , punkt F na rys. 29c). Natomiast drugie równanie opisuje przypadek, w którym wartość średnia jest równa amplitudzie naprężenia ( $R=0$ , punkt H na rys. 29c). Oba równania są prawdziwe dla tej samej liczby cykli odczytanej z wykresu  $\sigma_a-N$ . Po rozwiązaniu układu równań uzyskujemy:

$$A = -\frac{(\sigma_{aN,R=0})^2 \sigma_{aN,R=-1}}{\sigma_{aN,R=0} - \sigma_{aN,R=-1}} \quad B = -\frac{(\sigma_{aN,R=0})^2}{\sigma_{aN,R=0} - \sigma_{aN,R=-1}} \quad (83)$$

Na podstawie powyższych równań uzyskujemy:

$$\sigma_{aT} = \sigma_{ai} \left[ 1 + \sigma_{mi} \frac{\sigma_{aN,R=-1} - \sigma_{aN,R=0}}{(\sigma_{aN,R=0})^2} \right]. \quad (84)$$

Łatwo zauważyć, że w celu kalibracji powyższych modeli wykorzystuje się amplitudy  $\sigma_{aN,R=-1}$  oraz  $\sigma_{aN,R=0}$ , które uzyskujemy z wykresu  $\sigma_a-N$ . W praktyce możemy zastosować dowolną drugą amplitudę (zamiast  $R=0$ ) uzyskaną dla dowolnego współczynnika asymetrii cyklu  $R \neq -1$ . Poprzez zastosowanie równania wpływu wartości średniej z użyciem współczynnika asymetrii cyklu uzyskujemy [21, 93]:

$$\sigma_m = \sigma_{aN,R} \frac{1+R}{1-R}. \quad (85)$$

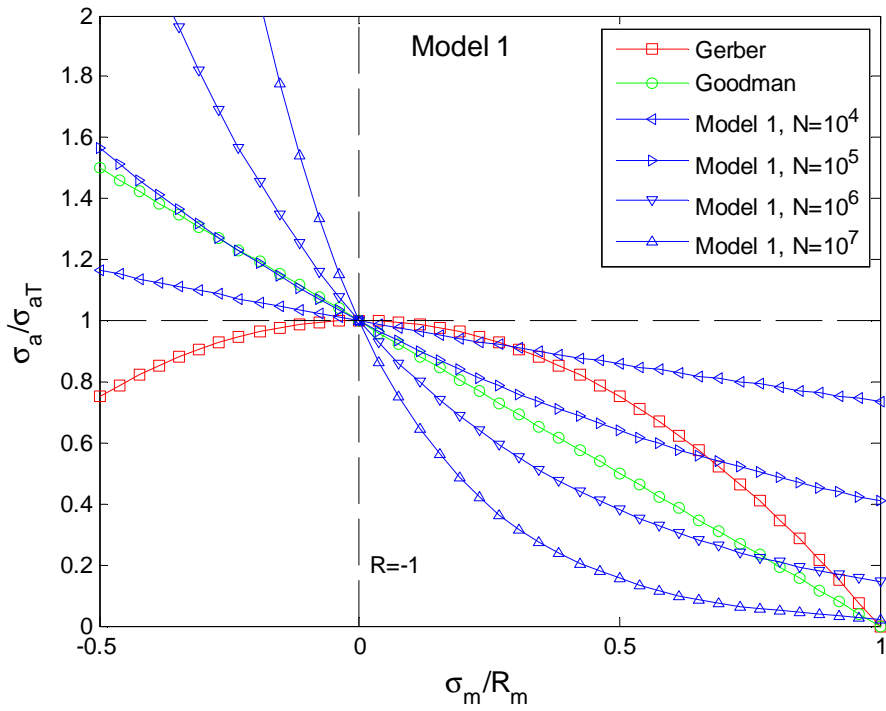
Uzyskujemy następujące formy przedstawianych wcześniej modeli:

$$\sigma_{aT} = \sigma_{ai} \left( \frac{\sigma_{aN,R=-1}}{\sigma_{aN,R}} \right)^{\frac{\sigma_{mi}(1-R)}{\sigma_{aN,R}(1+R)}}, \quad (86)$$

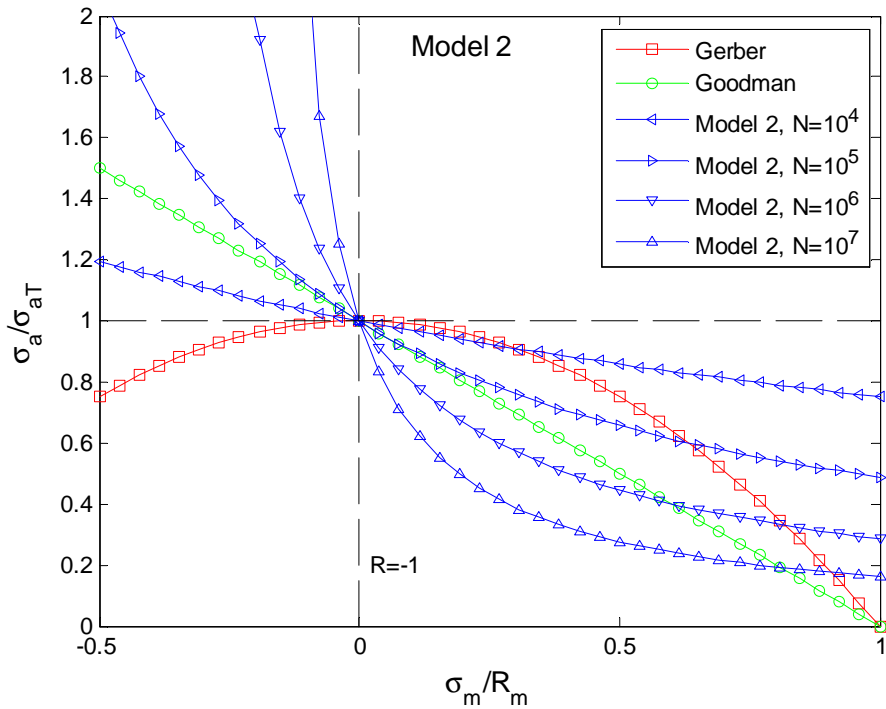
oraz dla modelu drugiego:

$$\sigma_{aT} = \sigma_{ai} \left[ 1 + \sigma_{mi} \left( \frac{1-R}{1+R} \right) \frac{\sigma_{aN,R=-1} - \sigma_{aN,R}}{(\sigma_{aN,R})^2} \right]. \quad (87)$$

Na rys. 30 oraz rys. 31 przedstawiono graficzną interpretację modelu 1 oraz modelu 2 dla różnych wartości liczby cykli w parze z modelami Gerbera oraz Goodmana na podstawie wyników dla stopu niklu przy 260°C z badań Warrena oraz Wei [94].



Rys. 30. Przebieg linii granicznych wytrzymałości zmęczeniowej dla modelu 1 dla różnych wartości liczby cykli oraz modeli Gerbera i Goodmana.



Rys. 31. Przebieg linii granicznych wytrzymałości zmęczeniowej dla modelu 2 dla różnych wartości liczby cykli oraz modeli Gerbera i Goodmana.

Współczynniki  $R$  przyjmują wartości dla współczynnika asymetrii dla drugiej krzywej kalibrującej. Powyższe modele działają na zasadzie dwóch granicznych amplitud  $\sigma_{aN, R=-1}$  oraz  $\sigma_{aN, R}$ , które można łatwo odczytać z wykresów zmęczenia. Jedyną ich wadą jest fakt, że w celu wykorzystania tych modeli wymagane jest posiadanie dwóch krzywych zmęczenia, obowiązkowo dla  $R=-1$  oraz dowolnego  $R \neq -1$ . Nie ma problemu z wykresem dla  $R=-1$ , jednak brakuje często dowolnej drugiej charakterystyki. Brakujący wykres można wyznaczyć za pomocą znanych modeli korekcyjnych przedstawianych w rozdziale drugim niniejszej pracy. Takim przykładem może być zastosowanie modelu SWT dla przypadku gdy  $R=0$  ( $\sigma_m = \sigma_a = \sigma_{aN, R=0}$ ), który dla części sprężystej możemy zapisać po przekształceniu jako:

$$\sigma_{aT} = \sigma_{aN, R=-1} = \sqrt{(\sigma_{aN, R=0} + \sigma_{aN, R=0})\sigma_{aN, R=0}} \cdot \quad (88)$$

Co daje nam wartość końcową amplitudy  $\sigma_{aN, R=0}$ :

$$\sigma_{aN, R=0} = \frac{\sigma_{aN, R=1}}{\sqrt{2}} \cdot \quad (89)$$

W ten sam sposób możemy policzyć brakujące wartości na przykład za pomocą modelu Walkera:

$$\sigma_{aN, R=0} = \frac{\sigma_{aN, R=1}}{2^{1-\gamma}} \cdot \quad (90)$$

Tego typu rozwiązanie powinno się stosować z odpowiednią ostrożnością, ponieważ wraz z wszystkimi zaletami, mamy również wady powstające z zastosowania modelu SWT oraz Walkera. Wadami tymi są pewne braki w opisie wrażliwości materiału na wartość średnią jak również tracimy możliwość kalibracji modelu za pomocą rzeczywistych wartości odczytanych z wykresów naprężeniowych.

W celu zweryfikowania użyteczności zaproponowanych modeli podjęto się wykonania obliczeń dla wyników zaczerpniętych z literatury. Były to wyniki badań wykonywane przy stałej amplitudzie obciążenia w jednoosiowym stanie obciążenia. Przy wyborze wyników eksperymentalnych zwrócono szczególną uwagę na kompletność wyników w tym:

- krzywą  $\sigma_a-N$  dla współczynnika asymetrii cyklu  $R=-1$ ,

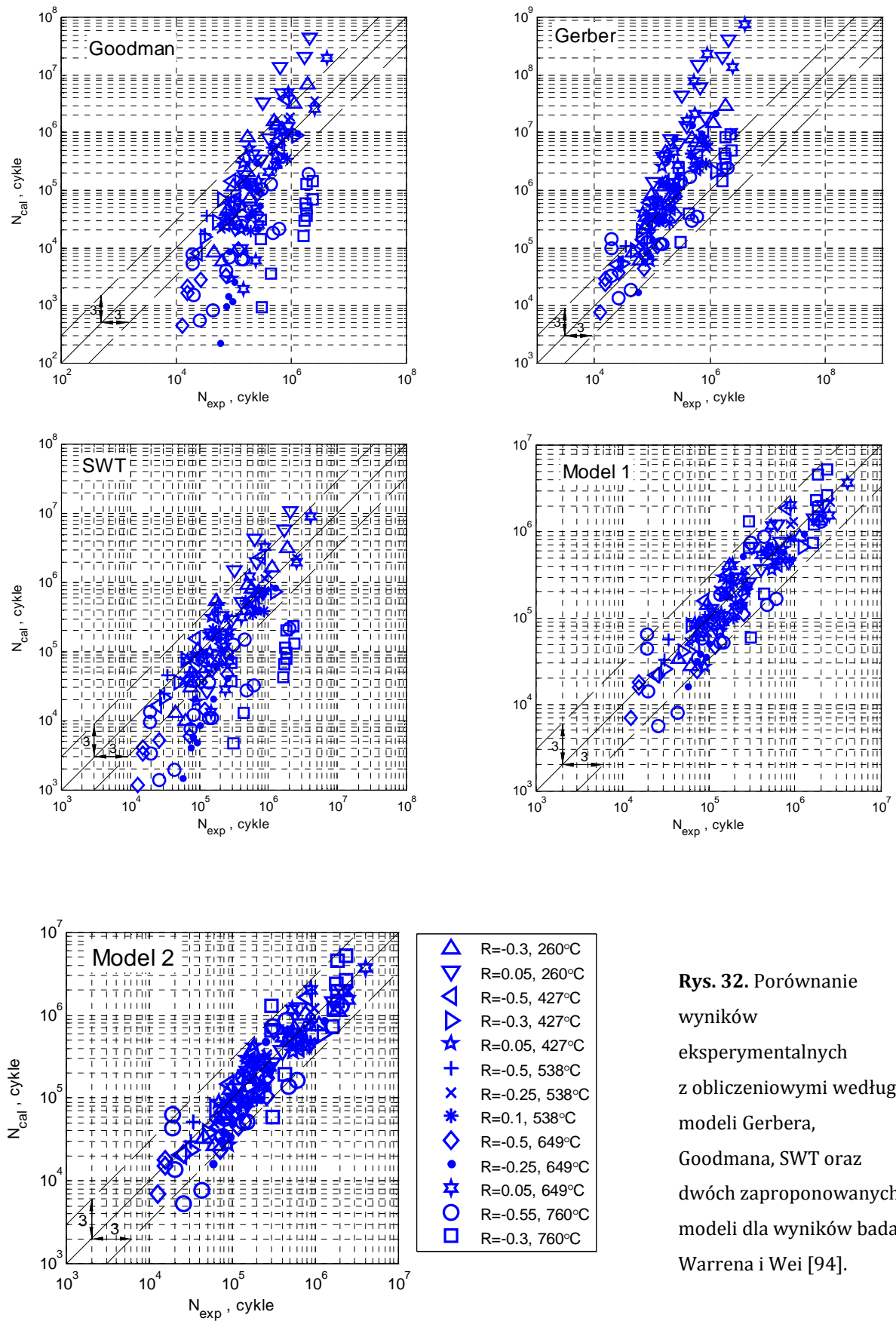
- krzywą  $\sigma_a-N$  dla współczynnika  $R \neq -1$ , najczęściej zbliżonego do  $R=0$ ,
- wyniki eksperymentalne dla różnych współczynników asymetrii cyklu,
- wytrzymałość na rozciąganie  $R_m$  uzyskaną dla podwyższonych temperatur.

Z wyników dostępnych w literaturze wybrano następujące zestawy danych:

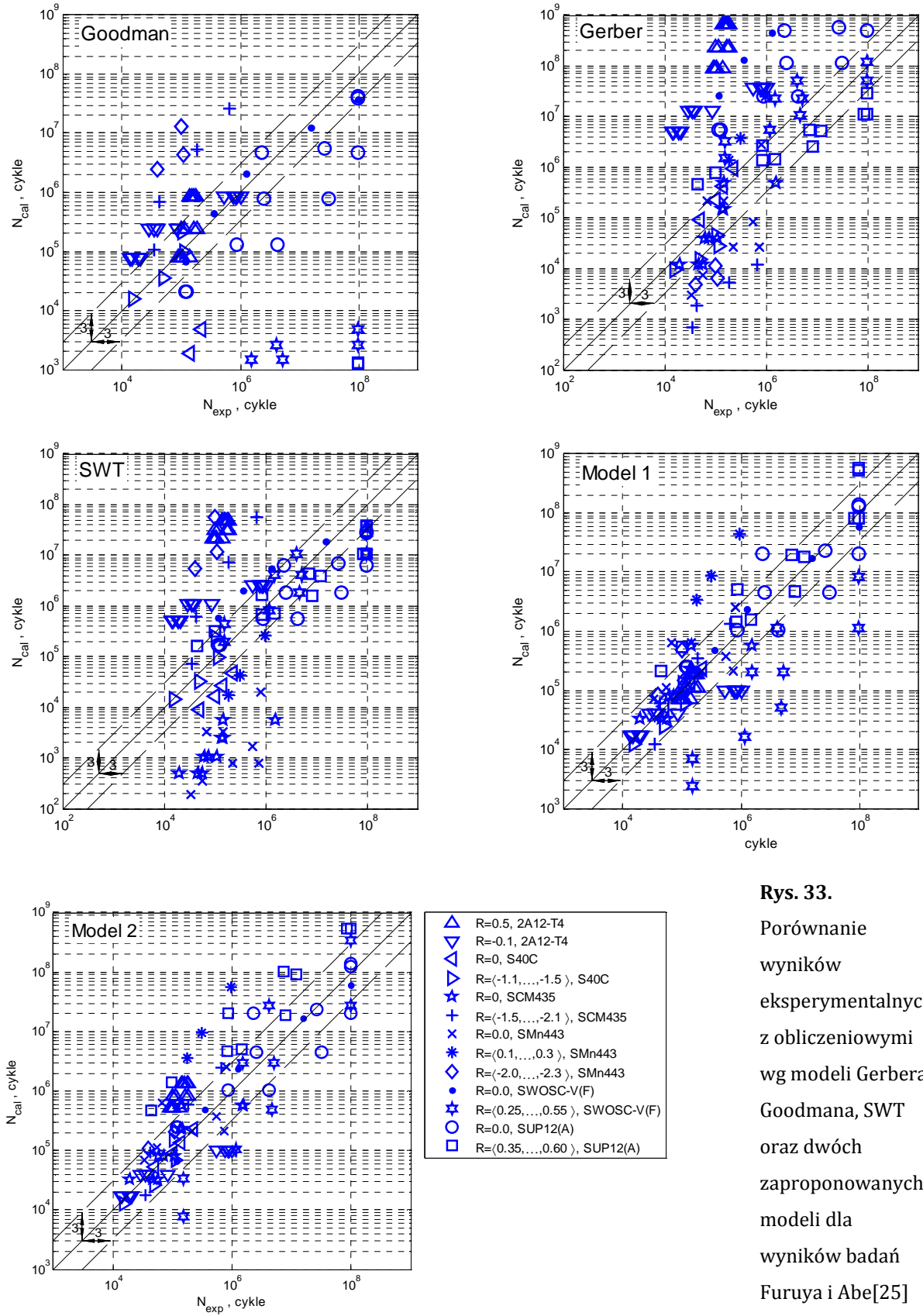
- Warren oraz Wei [94] dla stopu niklu (AMS 5707) w pięciu różnych temperaturach,
- Furuya oraz Abe [25] dla badań pięciu stali sprężynowych po różnej obróbce cieplnej,
- Zhang i inni [97] dla stopu aluminium 2A12-T4.

### **7.2.1. Obliczenia trwałości zmęczeniowej dla zaproponowanych modeli**

Obliczenia wykonano dla modeli Goodmana, Gerbera, Smitha-Watsona-Toppera oraz dwóch modeli przedstawionych w tym rozdziale-równania (86) i (87). Wyniki obliczeń porównano z wynikami uzyskanymi eksperymentalnie oraz przedstawiono na rys. 32 oraz na rys. 33 dla różnych wartości współczynnika asymetrii cyklu.



**Rys. 32.** Porównanie wyników eksperymentalnych z obliczeniowymi według modeli Gerbera, Goodman, SWT oraz dwóch zaproponowanych modeli dla wyników badań Warrena i Wei [94].



**Rys. 33.**

Porównanie wyników eksperymentalnych z obliczeniowymi wg modeli Gerbera, Goodmana, SWT oraz dwóch zaproponowanych modeli dla wyników badań Furuya i Abe[25] oraz Zhanga i innych[97].

Z porównania trwałości eksperymentalnej z obliczeniową, uzyskanej za pomocą trzech popularnych modeli literaturowych oraz dwóch zaproponowanych w pracy wynika, że zaproponowane dają lepsze wyniki w zakresie dokładności, a w większości przypadków znajdują się również w akceptowalnym paśmie rozrzutu. Modele działają znacząco lepiej w momencie, gdy ich kalibracja wykonywana jest za pomocą krzywych o współczynnikach asymetrii cyklu  $R$  powyżej rozpatrywanego zakresu  $R$ . Głównym ograniczeniem zaproponowanego rozwiązania jest wymóg posiadania dwóch krzywych zmęczeniowych. Podsumowując można stwierdzić, że modele mogą zostać wykorzystane dla szerokiego zakresu materiałów, przy ujęciu wpływu temperatury jak również obróbki cieplnej na trwałość zmęczeniową.

### 7.3. Wpływ estymacji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa amplitud na obliczeniową trwałość zmęczeniową

W literaturze możemy się spotkać z wieloma metodami wyznaczania rozkładu gęstości prawdopodobieństwa amplitud z momentów gęstości widmowej mocy. Metody te znalazły zastosowanie przy obliczeniach zmęczeniowych w przemyśle morskim, motoryzacyjnym, lotniczym, elektronicznym oraz kolejowym. Możemy z nich wydzielić te, które są stosowane w konkretnej gałęzi przemysłu i uniwersalne. Pozycje literaturowe przedstawiają często modyfikację znanych rozkładów prawdopodobieństwa lub wyznaczone z nich bezpośrednio modele uszkodzenia, które wykorzystują amplitudę ważoną. Dobór odpowiedniego rozkładu ma kluczowy wpływ na wyniki obliczeń trwałości zmęczeniowej. Stworzono syntetyczny podział metod w zależności od dziedziny, w których się je stosuje:

- Przemysł morski:
  - Rice [74]

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi_0}} (1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-\sigma^2}{2\mu^2(1-\gamma^2)}\right] + \frac{\sigma}{2\mu^2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{\xi_0\sqrt{2\gamma^2-2}}\right)\right] \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\mu^2}\right), \quad (91)$$

gdzie:

$$\gamma = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_0\xi_4}}, \quad (92)$$



gdzie:  $erf$  - funkcja błędu wyrażona, jako:

$$erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt. \quad (93)$$

- Chaudhury i Dover [19] wykorzystując rozkład prawdopodobieństwa Rice'a (90) zaproponowali poniższą zależność na amplitudę ważoną

$$\sigma_{aw} = \left( 2\sqrt{2\xi_0} \left[ \left( \frac{(\sqrt{1-\gamma^2})^{m+2}}{2\sqrt{\pi}} \right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) + \frac{\gamma}{2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) + erf(\gamma) \frac{\gamma}{2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) \right] \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (94)$$

- Hancock [31]

$$\sigma_{aw} = \left( 2\sqrt{2\xi_0} \left[ \gamma \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \right] \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (95)$$

- Przemysł lotniczy

- Lalanne [51-55] - jest to zmodyfikowana forma równania Rice'a

$$p(\sigma) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2\pi\xi_0}} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\xi_0(1-\gamma^2)}\right) + \frac{\gamma\sigma}{2\xi_0} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\xi_0}\right) \left( 1 - erf\left(\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{2\xi_0(1-\gamma^2)}}\right) \right). \quad (96)$$

- Przemysł elektroniczny:

- Steinberg [81]

$$\sigma_{aw} = \left[ 0,683(2\sqrt{\xi_0})^m + 0,271(4\sqrt{\xi_0})^m + 0,043(6\sqrt{\xi_0})^m \right]^{\frac{1}{m}}. \quad (97)$$

- Przemysł kolejowy

- Tunna [89]

$$p(\sigma) = \frac{\sigma}{4\gamma\xi_0} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{8\gamma\xi_0}\right). \quad (98)$$

- Uniwersalne:

- Rayleigh [6]

$$p(\sigma) = \frac{\sigma}{\xi_0} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\xi_0}\right). \quad (99)$$

- o Bendat [6]

$$p(\sigma) = \frac{\sigma}{4\xi_0} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{8\xi_0}\right). \quad (100)$$

- o Dirlik [20]

$$p(\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\xi_0}} \left[ \frac{K_1}{K_4} e^{\frac{-Z}{K_4}} + \frac{K_2 Z}{R^2} e^{\frac{-Z^2}{2R^2}} + K_3 Z e^{\frac{-Z^2}{2}} \right], \quad (101)$$

gdzie:

$$Z = \frac{\sigma}{2\sqrt{\xi_0}}, \quad B_m = \frac{\xi_1}{\xi_0} \left( \frac{\xi_2}{\xi_4} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$I_m = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_0 \xi_4}}, \quad R = \frac{I_m - B_m - K_1^2}{1 - I_m - K_1 + K_1^2},$$

$$K_1 = \frac{2(B_m - I_m^2)}{1 + I_m^2}, \quad K_2 = \frac{1 - I_m - K_1 + K_1^2}{1 - R},$$

$$K_3 = 1 - K_1 - K_2, \quad K_4 = \frac{1,25(I_m - K_3 - K_2 R)}{K_1}.$$

- o Zhao i Baker [98]

$$p(\sigma) = w \alpha \beta \sigma^{(\beta-1)} \exp(-\alpha\sigma^\beta) + (1-w)\sigma \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2}\right), \quad (102)$$

gdzie:  $w, \alpha, \beta$ -współczynniki wyrażone, jako:

$$w = \frac{1-\gamma}{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \alpha^{\frac{-1}{\beta}}}, \quad (103)$$

$$\alpha = 8 - 7\gamma, \quad (104)$$

$$\beta = \begin{cases} 1,1; & \gamma < 0,9 \\ 1,1+9(\gamma-0,9); & \gamma \geq 0,9 \end{cases} \quad (105)$$

- o Benassciutti i Tovo [4] zaproponowali następujące równanie wyznaczające bezpośrednio uszkodzenie (dla rozkładu z rainflow):

$$E(D_{RFC}) = v_p C - 1\gamma(\sqrt{2\xi_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) [b + (1-b)\gamma^{m-1}], \quad (106)$$

gdzie:  $C$  oraz  $m$ - to stałe z krzywej Basquina,  $b$ - funkcja wagowa zależna od gęstości widmowej mocy. Natomiast  $v_p$  wyznacza się z zależności:

$$v_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\xi_4}{\xi_2}}. \quad (107)$$

- o Lutes i Sarkani [56] zaproponowali empiryczny wzór opierający się o rozkład Gaussa:

$$p(\sigma) = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\xi_0}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\mu^2(1-\gamma^2)}\right) + \frac{\gamma\sigma}{\mu^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\mu^2}\right) \Phi\left(\frac{\gamma\sigma}{\xi_0\sqrt{1-\gamma^2}}\right), \quad (108)$$

gdzie  $\Phi$  jest standardową normalną funkcją rozkładu:

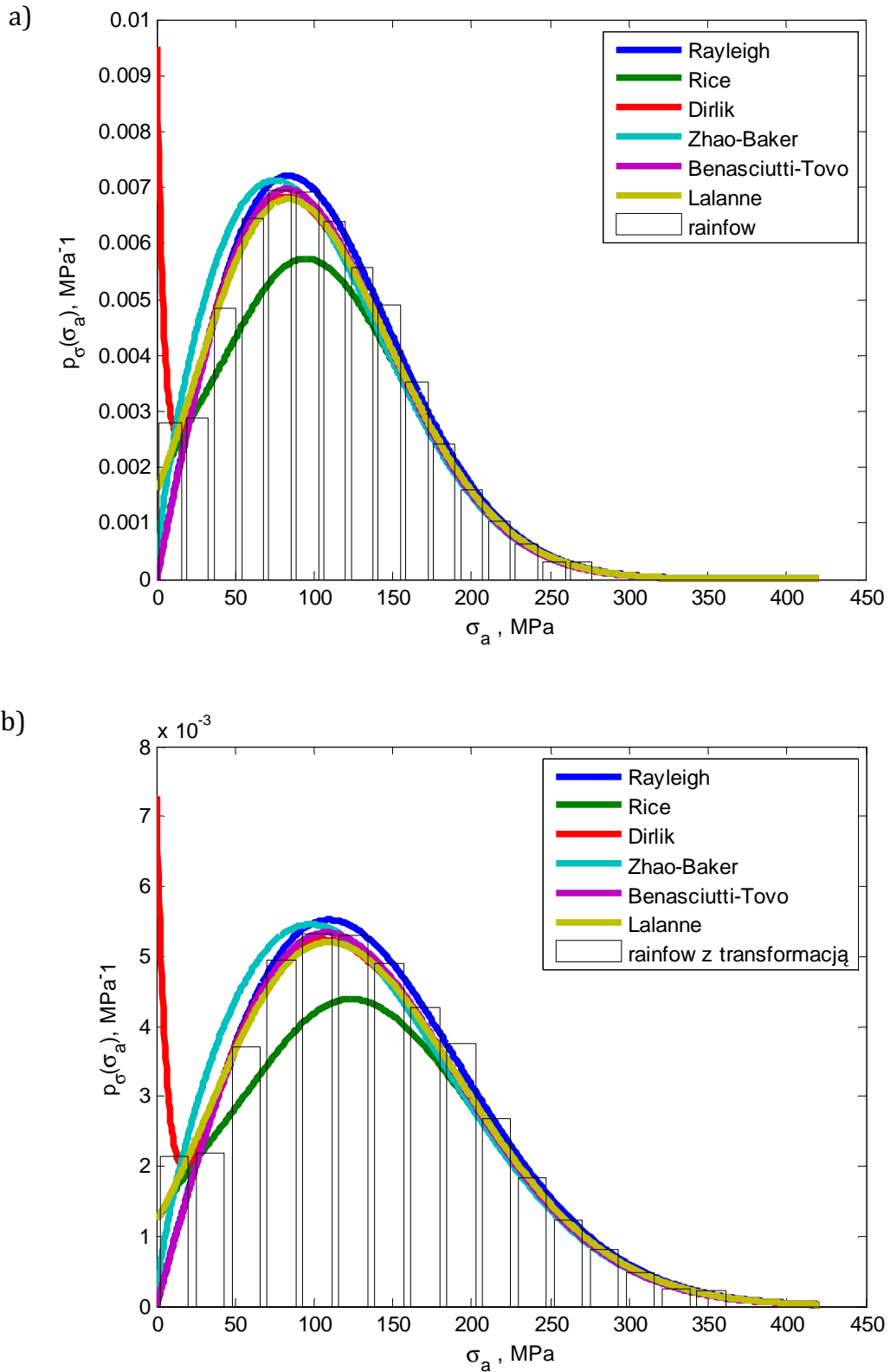
$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (109)$$

W przygotowaniu powyższej klasyfikacji metod starano się przedstawić jedynie te, które wykorzystują momenty gęstości widmowej mocy. Analiza przebiegów obciążenia za pomocą powyższych rozkładów, wykorzystująca te parametry jest niezwykle szybka, a same momenty nie są trudne do wyznaczenia np. przy pomocy odpowiedniego oprogramowania.

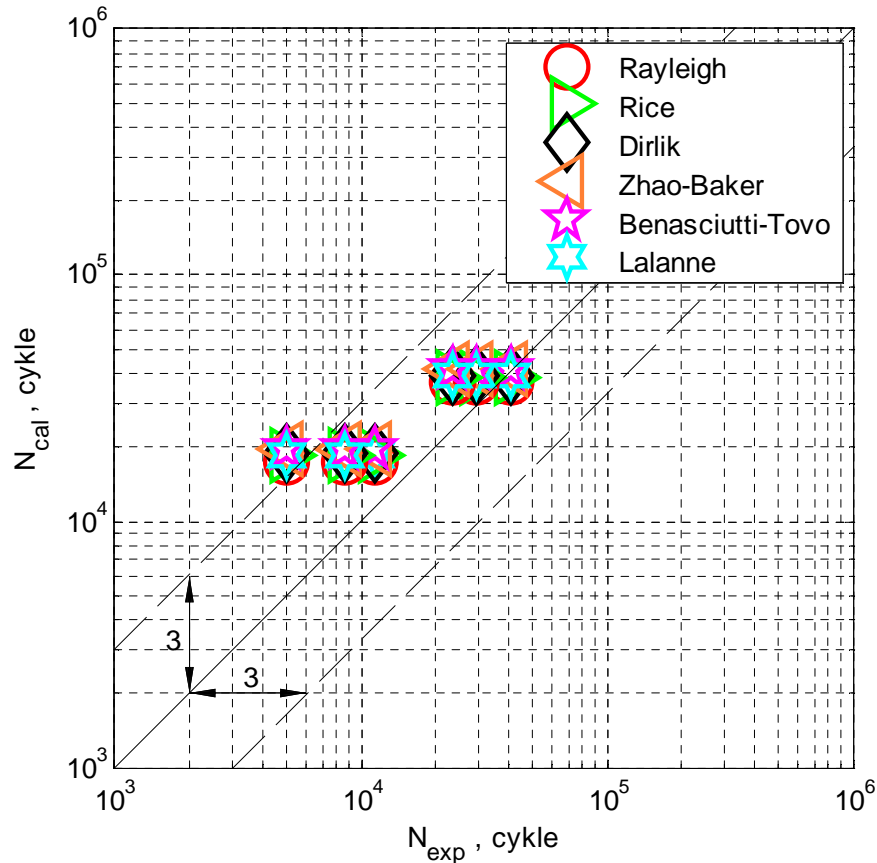
### 7.3.1. Obliczanie trwałości zmęczeniowej dla różnych metod obliczania rozkładu gęstości prawdopodobieństwa

W niniejszej części pracy przedstawiono wpływ metody obliczania gęstości prawdopodobieństwa na trwałość zmęczeniową na przykładzie badanej stali S355JR z uwzględnieniem wpływu niezerowej wartości średniej. Obliczenia wykonano dla dwóch stosowanych w badaniach sygnałów wąsko oraz szerokopasmowego. Procedurę przeprowadzono za pomocą funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa dla wybranych modeli. W celu kompensacji wpływu wartości średniej wybrano model Morrowa. Gęstość widmowa mocy została estymowana za pomocą standardowej

procedury według metody Welcha. Obliczenia wykonano dla modeli Rayleigha, Rice'a, Dirlika, Zhao-Bakera, Benassciutti i Tovo, Lalanne'a oraz porównano je z rozkładem amplitud z metody płynącego deszczu (rainflow). Na rys. 34a przedstawiono wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa amplitud dla nieprzeskalowanego wąskopasmowego przebiegu obciążenia z zerową wartością średnią i metodą płynącego deszczu bez transformacji ze względu na wartość średnią. Natomiast na rys. 34b przedstawiono rozkłady po przeskalowaniu przebiegu na przebieg o niezerowej wartości średniej globalnej równej amplitudzie obciążenia  $\bar{R} = 0$  oraz metodą płynącego deszczu z transformacją ze względu na wartość średnią. Natychmiastowa analiza zastosowanych rozkładów prawdopodobieństwa wykazała, że rozkład Rice'a źle opisuje rozkład amplitud dla obciążenia wąskopasmowego porównując go z rozkładem amplitud za pomocą rainflow. Ważne jest, aby zweryfikować czy pozornie błędny opis na tle rozkładu rainflow, będzie również znacząco wpływał na obliczenia trwałości zmęczeniowej. Na rys. 35 przedstawiono wykres porównania trwałości zmęczeniowej obliczeniowej z eksperymentalną dla badań własnych dla przebiegu wąskopasmowego o niezerowej wartości średniej obciążenia z transformacją za pomocą modelu Morrowa. Wyniki porównania trwałości przedstawiono w jednostkach czasu.

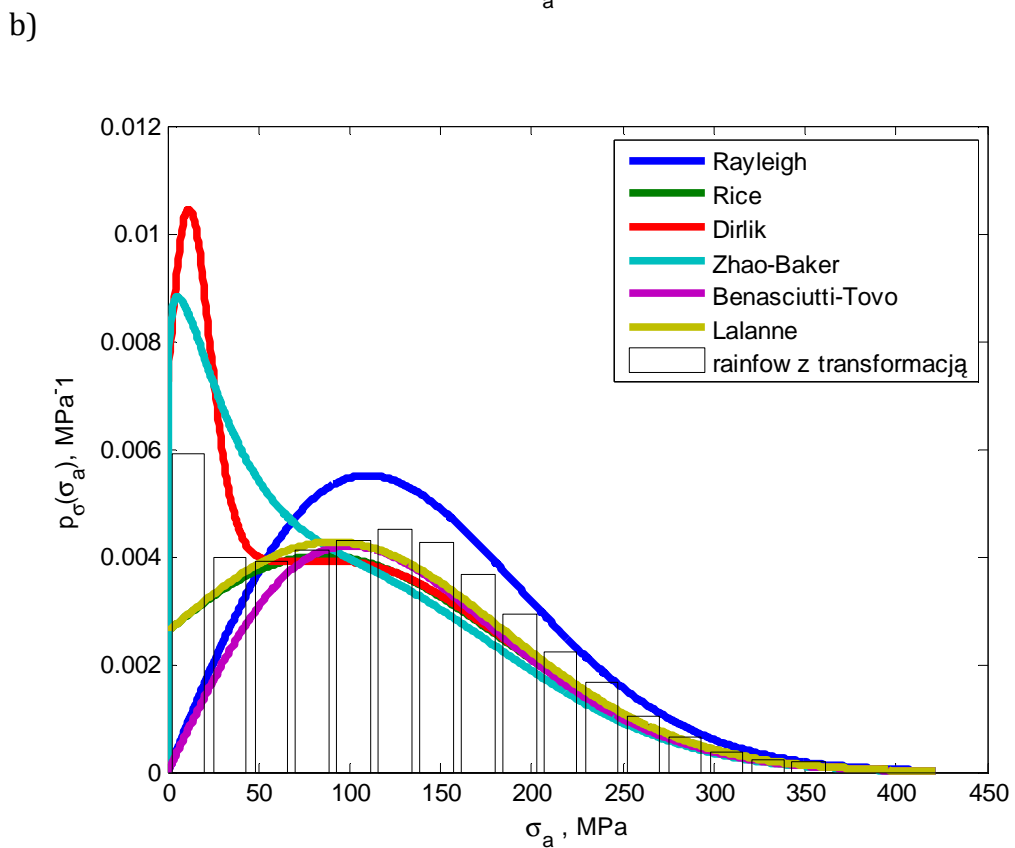
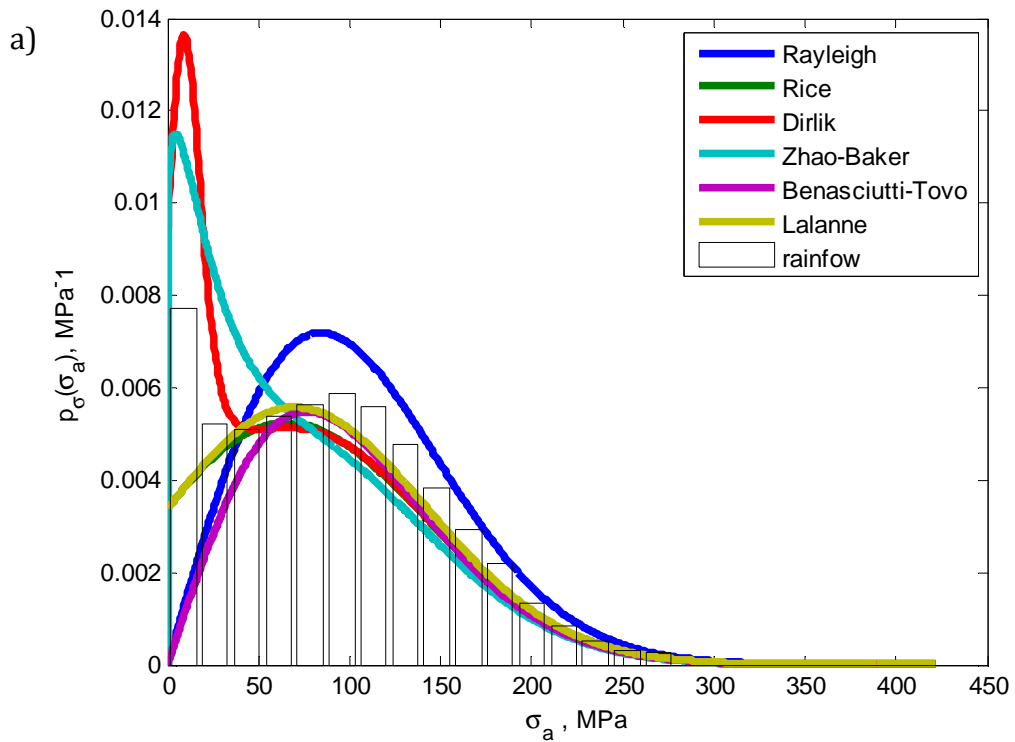


**Rys. 34.** Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa dla zastosowanego przebiegu wąskopasmowego za pomocą odpowiednich funkcji: a) dla nieprzeskalowanego przebiegu o zerowej wartości średniej obciążenia, b) dla przeskalowanego przebiegu z niezerową wartością średnią obciążenia.

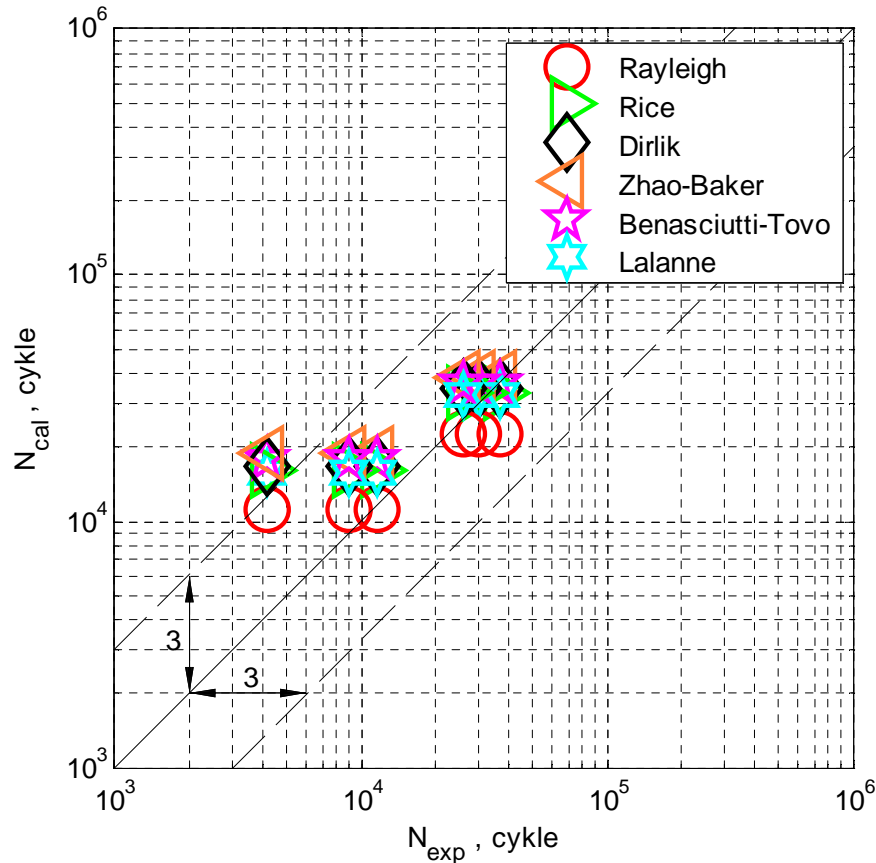


**Rys. 35.** Porównanie trwałości eksperymentalnej z obliczeniową dla różnych funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa amplitud przebiegu wąskopasmowego.

Po przeanalizowaniu rysunku 35 można stwierdzić, że wcześniejsze przypuszczenia, mówiące o tym, że model Rice'a będzie prawdopodobnie w zły sposób opisywać eksperymentalną trwałość zmęzeniową nie znalazł poparcia w wynikach obliczeń. Kolejnym przebiegiem, jaki zastosowano do obliczeń jest przebieg szerokopasmowy zastosowany w badaniach eksperymentalnych przez autora. Na rys. 36a przedstawiono wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa amplitud dla nieprzeskalowanego szerokopasmowego przebiegu obciążenia z zerową wartością średnią i rainflow bez transformacji ze względu na wartość średnią. Natomiast na rys. 36b przedstawiono rozkłady po przeskalowaniu przebiegu na przebieg o niezerowej wartości średniej globalnej równej amplitudzie obciążenia  $\bar{R}=0$  oraz rainflow z transformacją ze względu na wartość średnią. Tym razem rozkład Rice'a pokrył się prawie całkowicie z rozkładem według Lalanne'a. Część stosowanych rozkładów nie opisuje całości amplitud na tle rainflow. Na rys. 37 przedstawiono porównanie trwałości eksperymentalnej z obliczeniową dla analizowanego przebiegu.



**Rys. 36.** Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa dla zastosowanego przebiegu szerokopasmowego za pomocą odpowiednich funkcji: a) dla nieprzeskalowanego przebiegu o zerowej wartości średniej obciążenia, b) dla przeskalowanego przebiegu z niezerową wartością średnią obciążenia.



**Rys. 37.** Porównanie trwałości eksperymentalnej z obliczeniową dla różnych funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa amplitud przebiegu szerokopasmowego.

Analiza wyników obliczeń dla przebiegu szerokopasmowego wykazała, że nie wszystkie modele opisują w pełni rozkład amplitud na tle metody płynącego deszczu (rainflow). Natomiast w tym przypadku obliczenia wykonane modelem Rayleigha dały znacząco lepsze wyniki, jeżeli chodzi o bezpośrednie porównanie z wynikami eksperymentalnymi w stosunku do pozostałych metod, które znalazły się w założonym paśmie rozrzutu akceptowalnych wyników obliczeniowych. Analizując te wyniki trzeba również wziąć pod uwagę fakt, że transformacja została wykonana według procedury przedstawianej w rozdziale szóstym pracy. Jednak obliczenia wykonano jedynie za pomocą jednego modelu uwzględnienia wartości średniej według Morrowa. Kluczowym elementem pracy musi być również szersza analiza modeli dla analizowanych przebiegów obciążenia.



## 7.4. Wpływ metody estymacji gęstości widmowej mocy na trwałość zmęczeniową

Metoda spektralna wyznaczania trwałości zmęczeniowej wykorzystuje podstawy teoretyczne z teorii procesów losowych i stochastyki. W praktyce niezmiernie ważnym zagadnieniem jest poprawna estymacja podstawowych wielkości i funkcji wykorzystywanych w obliczeniach numerycznych takich jak funkcja GWM, funkcja autokorelacji czy też wartość oczekiwana i wariancja procesu. W niniejszej części pracy skupiono się na estymacji funkcji GWM sygnału losowego, która opisuje ogólną jego strukturę częstotliwościową za pomocą gęstości widmowej wartości średniokwadratowej jego sygnału [5]. W kontekście wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną funkcja ta ma znaczenie użytkowe, ponieważ na jej podstawie wyznacza się podstawowe parametry charakteryzujące przebieg obciążenia. Są to między innymi takie parametry i funkcje jak: liczba cykli obciążenia w jednostce czasu, wariancja i odchylenie standardowe przebiegu, funkcja gęstości prawdopodobieństwa amplitud itp. Zauważono, że estymacja funkcji GWM jest realizowana na wiele sposobów i w zależności od wybranego sposobu występują niewielkie różnice w przebiegu estymatora funkcji [46]. Różnice te nie są istotne podczas oceny jakościowej struktury częstotliwościowej przebiegu obciążenia i w wielu przypadkach można zamiennie stosować różne metody estymacji funkcji GWM [16]. Dobór metody jest w tym przypadku podyktowany ograniczeniami sprzętowymi i zależy od obszaru zastosowań (wibroakustyka, emisyjność, spektrografia itp.). Pojawia się więc pytanie czy także w ocenie ilościowej mamy do czynienia z pewną dowolnością w doborze algorytmów estymujących funkcję GWM?

W literaturze spotykamy się z wieloma metodami estymacji parametrów wykorzystywanych do obliczeń zmęczeniowych metodą spektralną. Parametry te znajdują później zastosowanie w znanych wzorach do wyznaczania trwałości zmęczeniowej proponowanych m.in. przez Milesa, Tovo i Benasciuttiego lub Dirlika [69]. Analizując programy obliczeniowe i systemy wykorzystywane w analizie sygnałów można napotkać znaczną liczbę funkcji związanych z generowaniem oraz estymowaniem funkcji GWM np. za pomocą algorytmu Welcha [95] czy Burga [59]. Postanowiono przeanalizować dostępne w pakiecie Matlab funkcje do estymacji GWM z przebiegów

czasowych w zakresie późniejszego wykorzystania do obliczeń trwałości zmęczeniowej metodą spektralną.

Wraz z rozwojem technik komputerowych pojawiły się przyjazne dla użytkownika środowiska do obliczeń numerycznych. Jednym z nich jest program Matlab firmy MathWorks. Podobnie jak w innych programach obliczeniowych chętnie wykorzystywanych w pracach naukowych i badawczo-rozwojowych (PTC Mathcad, Scilab, Octave itp.) także i w tym możemy odnaleźć znaczną liczbę funkcji i narzędzi wspomagających obróbkę sygnału i analizę spektralną [88]. Za ich pomocą można z łatwością otrzymać estymatory takich funkcji jak GWM, pseudospektrum, kowariancji, wartości średniokwadratowej, wariancji, odchylenia standardowego itd. Jednak w zastosowaniach analizy spektralnej dotyczącej wyznaczania trwałości zmęczeniowej korzystamy głównie z estymatora GWM, a pozostałe wymienione funkcje i parametry są jedynie uzupełnieniem informacji w niej zawartej. W pakiecie programu znajduje się dziewięć standardowych funkcji wyznaczania GWM sygnału [60]. Uruchamia się je, zgodnie z nazwami funkcji funkcjonującymi w języku Matlab Script, poprzez następujące komendy podzielone odpowiednio na grupy:

1) Metody parametryczne, en. Parametric Methods:

- pburg (algorytm Burga),
- pcov (algorytm wykorzystuje funkcję kowariancji),
- pmcov (wykorzystuje algorytm zmodyfikowanej kowariancji),
- pyulear (wykorzystuje algorytm Yule'a- Walkera),

2) Metody nieparametryczne, en. Nonparametric Methods:

- pmtm (wykorzystuje metodę multitaper MTM),
- periodogram (obliczenia za pomocą periodogramu),
- pwelch (wykorzystuje algorytm Welcha),

3) Metody podprzestrzeni, en. Subspace Methods:

- peig (wykorzystuje metodę estymacji pseudospectrum),
- pmusic (wykorzystuj metodę estymacji pseudospectrum przy wykorzystaniu algorytmu MUSIC).

Funkcja **pburg** wykorzystuje algorytm Burga, który polega na estymacji GWM poprzez dopasowanie autoregresyjnego oczekiwanych wartości modelu danego rzędu do sygnału. Dopasowuje liniowy model filtra autoregresyjnego do sygnału wejściowego poprzez minimalizację (stosując metodę najmniejszych kwadratów) arytmetycznej wartości średniej przewidywanych błędów powyżej oraz poniżej linii regresji. Gęstość widmowa mocy jest następnie obliczana z odpowiedzi częstotliwościowej filtra przewidującego. Parametry filtra autoregresyjnego są ustalane w taki sposób, aby spełnić założenia Levinsona-Durbina [17, 60].

Funkcja **pcov** estymuje GWM sygnału wykorzystując metodę kowariancji. Metoda kowariancji polega na dopasowaniu liniowego modelu filtra autoregresyjnego do sygnału wejściowego poprzez minimalizację przewidywanego błędu powyżej linii regresji (w zależności od zaobserwowanych związków w sygnale) w sensie najmniejszych kwadratów. Estymator funkcji GWM otrzymywany tą metodą odpowiada wartości odpowiedzi częstotliwościowej modelu autoregresji podniesionej do kwadratu [16, 60].

Funkcja **pmcov** estymuje GWM wektora sygnału przy użyciu zmodyfikowanej metody kowariancji. Metoda ta dopasowuje liniowy model filtra autoregresyjnego do sygnału wejściowego poprzez jednoczesną minimalizację błędów (w zależności od obserwacji związków w sygnale) w sensie najmniejszych kwadratów. Estymacja spektralna tą metodą zwracana za pomocą pcov jest odpowiedzią częstotliwościową wielkości podniesionej do kwadratu tego modelu autoregresji [60].

Funkcja **pyulear** estymuje GWM wektora sygnału wejściowego stosując metodę autoregresji Yule'a-Walkera. Ta metoda, również nazywana autokorelacją lub metodą okienkową, dopasowuje autoregresję modelu przewidującego filtra liniowego do sygnału poprzez jednoczesną minimalizację wyższego (w zależności od obserwacji związków w sygnale) w sensie najmniejszych kwadratów [60].

Funkcja **pmtm** estymuje GWM szeregów czasowych stosując metodę wielu zwężeń (MTM) opisaną w [73]. Metoda ta stosuje liniową lub nieliniową kombinację zmodyfikowanych periodogramów w celu estymacji GWM. Te periodogramy są wyznaczone stosując sekwencję zwężeń ortogonalnych wyszczególnionych z wydłużonych dyskretyzacji sferycznych sekwencji [60].

Funkcja **periodogram** estymuje GWM za pomocą periodogramów sekwencji. Periodogram przedstawia ciągły rozkład gęstości mocy sygnału. Gęstość widmowa mocy jest obliczana w jednostkach mocy na radiany na próbkę [60].

Funkcja **pwelch** estymuje GWM przy pomocy periodogramów. Metoda polega na dzieleniu przebiegów czasowych na segmenty, obliczeniu zmodyfikowanych periodogramów dla każdego segmentu oraz wyznaczeniu z nich średniej wartości estymatora GWM. Jest stosowana dla różnych zakresów częstotliwości, co czyni ją w miarę uniwersalną w tej materii.

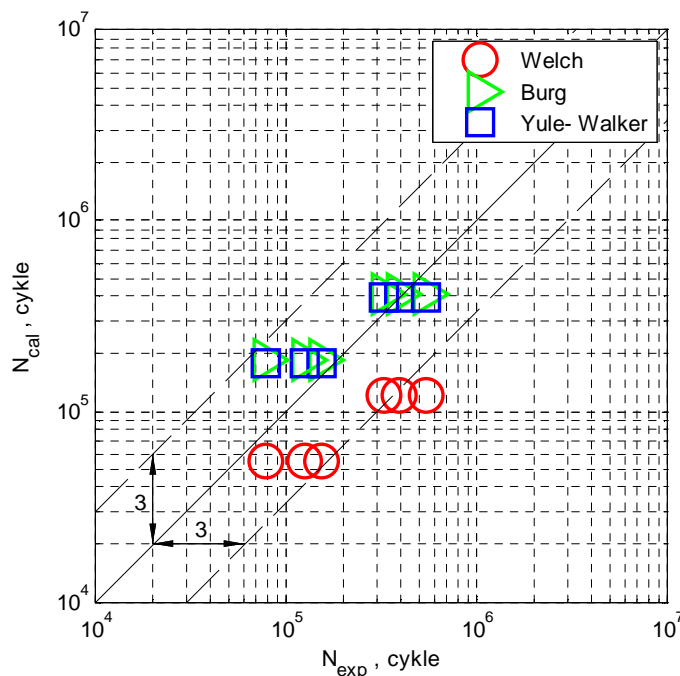
Funkcja **peig** estymuje pseudospectrum, przy użyciu wagowej wersji algorytmu MUSIC (en. MULTitaple Signal Classification). Algorytm ten przeprowadza analizę przestrzeni własnej sygnału macierzy korelacji w celu estymacji odpowiedzi częstotliwościowej sygnału. Algorytm ten jest właściwy dla sygnałów poliharmonicznych, będących sumą sinusoid zawierających dodatnią wartość Gaussowskiego białego szumu [60, 82].

Funkcja **pmusic** wykorzystywana jest do wyznaczania pseudospektrum przy wykorzystaniu algorytmu MUSIC. Algorytm ten estymuje pseudospektrum z pojedynczego sygnału albo macierzy korelacji używając metody Schmid't'a [59]. Możliwość zastosowania tej metody znajduje się w tym samym zakresie jak funkcji **peig** [60].

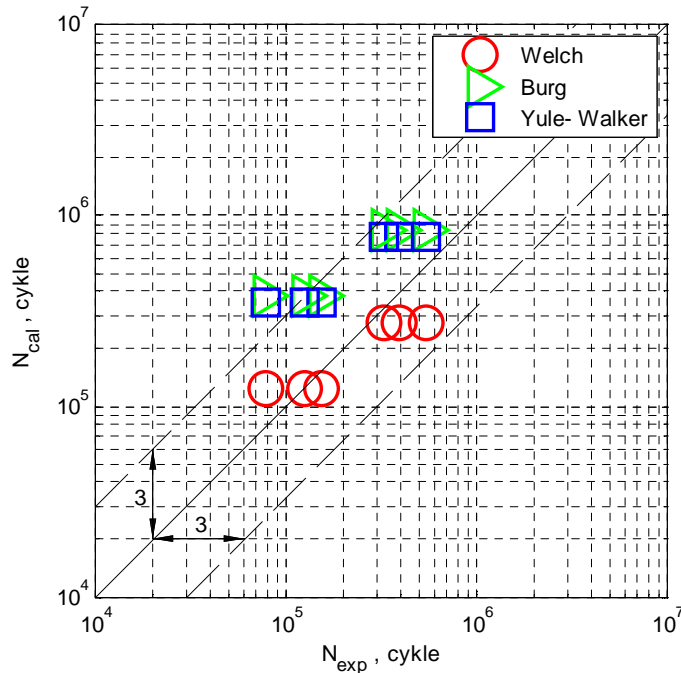
Analizując opis algorytmów zastosowanych w funkcjach estymujących GWM zauważamy, że tylko część przedstawionych funkcji nadają się do wykorzystania podczas obliczeń zmęczeniowych i prawidłowego wyznaczenia funkcji GWM typowych historii czasowych naprężenia.

### 7.4.1. Obliczenia trwałości zmęczeniowej dla różnych metod estymacji GWM

Na rys. 38 i 39 przedstawiono wyniki porównania trwałości zmęczeniowych eksperymentalnych z obliczeniowymi dla losowego wąskopasmowego przebiegu obciążenia wygenerowanego na potrzeby obliczeń numerycznych. Przebieg ten został szerzej opisany w rozdziale piątym niniejszej pracy. Przebieg ten jest wąskopasmowy o dominującej częstotliwości 20 Hz. Do obliczeń wykorzystano dwa rozkłady prawdopodobieństwa według Rayleigha oraz Dirlika. Podstawiono je do finalnego wzoru na wyznaczenie trwałości zmęczeniowej (71).



**Rys. 38.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu stochastycznego wąskopasmowego wygenerowanego na potrzeby obliczeń przy zastosowaniu pewnych funkcji pakietu Matlab oraz zależności na rozkład prawdopodobieństwa według Rayleigha.



**Rys. 39.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu stochastycznego wąskopasmowego wygenerowanego na potrzeby obliczeń przy zastosowaniu pewnych funkcji pakietu Matlab oraz zależności na rozkład prawdopodobieństwa według Dirlika.

Podsumowując ten podrozdział możemy powiedzieć, że nie wszystkie metody generacji GWM pakietu Matlab nadają się do bezpośredniej implementacji do algorytmów wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną. W przypadku analizy wyników przy wykorzystaniu rozkładu prawdopodobieństwa według Rayleigha prawie wszystkie wyniki znalazły się w założonym paśmie rozrzutu. Natomiast metoda Burga oraz Yule-Walkera dała najlepsze wyniki. Dla rozkładu prawdopodobieństwa według Dirlika również większość wyników znalazła się w założonym paśmie rozrzutu. Natomiast wyniki uzyskane metodą Welcha były najbardziej dopasowane do wyników eksperymentalnych.

## 7.5. Weryfikacja eksperymentalna algorytmu obliczeniowego na podstawie wyników badań własnych

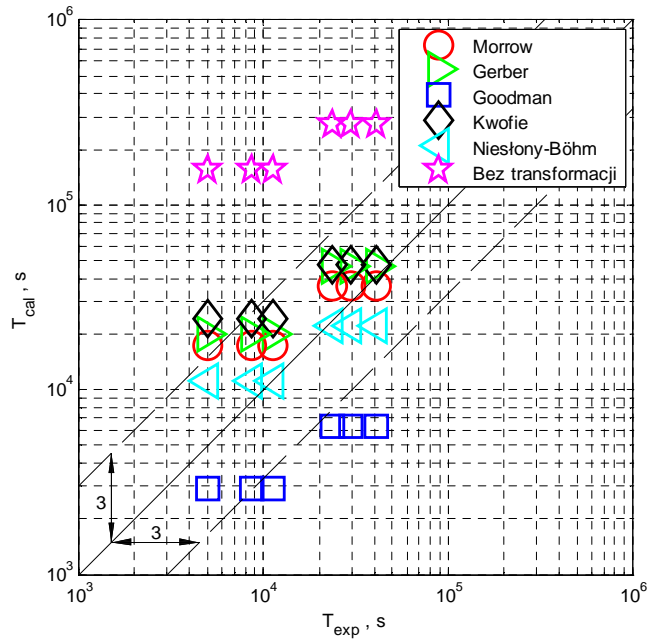
W niniejszym podrozdziale pracy podjęto się weryfikacji eksperymentalnej zaproponowanego algorytmu obliczeniowego przedstawionego w rozdziale szóstym pracy. Obliczenia wykonano przy wykorzystaniu hipotezy kumulacji uszkodzeń według

Palmgrena-Minera oraz pięciu modeli transformacji amplitudy ze względu na wartość średnią. Były to modele Goodmana, Gerbera, Morrowa, Kwofiego oraz Niesłonego-Böhma. Wykonano obliczenia również dla przypadku bez transformacji gęstości widmowej mocy. Wybrano dwa rozkłady gęstości prawdopodobieństwa według Rayleigha oraz Dirlika, które w akceptowalnym stopniu opisują zarówno przebiegi wąsko jak i szerokopasmowe. Do obliczeń wykorzystano przebiegi obciążenia wykorzystywane do badań eksperymentalnych. Trwałości przedstawiono w formie czasu, w jakim nastąpi zniszczenie materiału. W tabeli 7 przedstawiono wyniki obliczonej trwałości przy zastosowaniu pięciu modeli oraz dwóch różnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa dla przebiegu wąskopasmowego. Wyniki obliczeń porównano z wynikami eksperymentalnymi stanowiskowymi. Na rys. 40 przedstawiono wykres porównawczy trwałości eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu wąskopasmowego przy wykorzystaniu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa za pomocą modelu Rayleigha. Na rys. 41 przedstawiono ten sam typ wykresu, ale rozkład gęstości prawdopodobieństwa według Dirlika. Można zauważyć, że brak transformacji gęstości widmowej mocy skutkuje w przeszacowaniu trwałości. Warte uwagi jest to, że większość wyników znajduje się w założonym paśmie rozrzutu. Jedynie model Niesłonego-Böhma dał wszystkie wyniki znajdujące się w założonym paśmie rozrzutu o współczynniku równym 3.

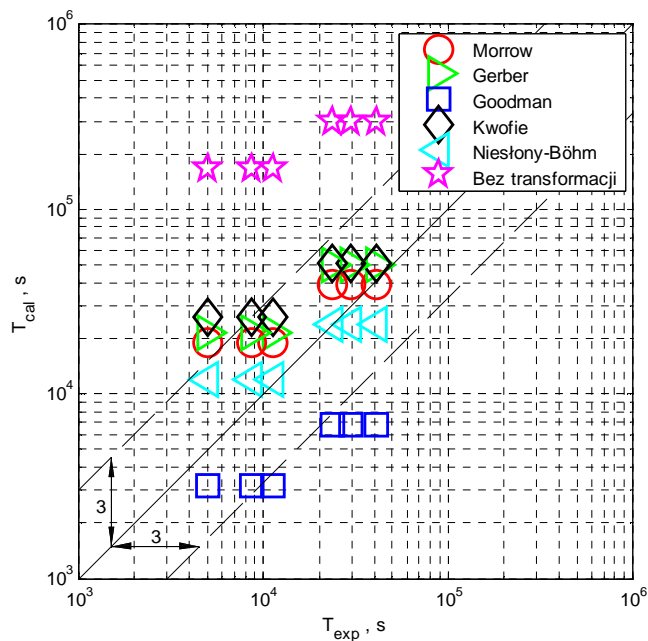
**Tabela 7.** Wyniki obliczeń trwałości zmęczeniowej dla wyników badań eksperymentalnych dla przebiegu wąskopasmowego przy pomocy pięciu modeli korekcji wartości średniej oraz algorytmu przedstawionego w rozdziale szóstym dla rozkładu Rayleigha oraz Dirlika.

<b>RAYLEIGH</b>							
<b><math>\sigma_a</math> MPa</b>	<b><math>T_{exp}</math> s</b>	<b><math>T_{Bez}</math> transfor- macji s</b>	<b><math>T_{Morrow}</math> s</b>	<b><math>T_{Goodman}</math> s</b>	<b><math>T_{Gerber}</math> s</b>	<b><math>T_{Kwofie}</math> s</b>	<b><math>T_{Niestony- Böhm}</math> s</b>
<b>298</b>	8640	155680	17456	2935	19931	24065	11117
<b>298</b>	5004	155680	17456	2935	19931	24065	11117
<b>298</b>	11340	155680	17456	2935	19931	24065	11117
<b>278</b>	29520	275194	36534	6332	46298	47716	22299
<b>278</b>	40788	275194	36534	6332	46298	47716	22299
<b>278</b>	23616	275194	36534	6332	46298	47716	22299
<b>DIRLIK</b>							
<b><math>\sigma_a</math> MPa</b>	<b><math>T_{exp}</math> s</b>	<b><math>T_{Bez}</math> transfor- macji s</b>	<b><math>T_{Morrow}</math> s</b>	<b><math>T_{Goodman}</math> s</b>	<b><math>T_{Gerber}</math> s</b>	<b><math>T_{Kwofie}</math> s</b>	<b><math>T_{Niestony- Böhm}</math> s</b>
<b>298</b>	8640	167615	18794	3160	21459	25910	11968
<b>298</b>	5004	167615	18794	3160	21459	25910	11968
<b>298</b>	11340	167615	18794	3160	21459	25910	11968
<b>278</b>	29520	296291	39335	6816	49847	51373	24007
<b>278</b>	40788	296291	39335	6816	49847	51373	24007
<b>278</b>	23616	296291	39335	6816	49847	51373	24007





**Rys. 40.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu wąskopasmowego przy zastosowaniu pięciu modeli transformacyjnych oraz braku transformacji gęstości widmowej mocy stosując rozkład gęstości prawdopodobieństwa według Rayleigha.

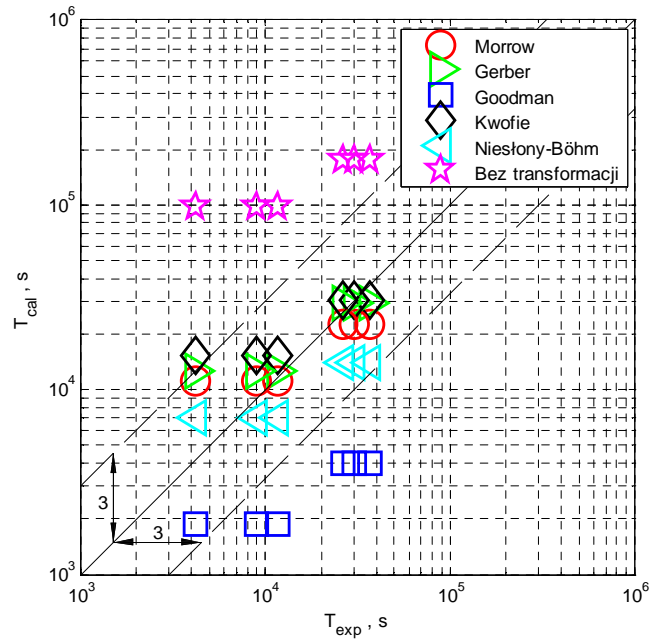


**Rys. 41.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu wąskopasmowego przy zastosowaniu pięciu modeli transformacyjnych oraz braku transformacji gęstości widmowej mocy stosując rozkład gęstości prawdopodobieństwa według Dirlika.

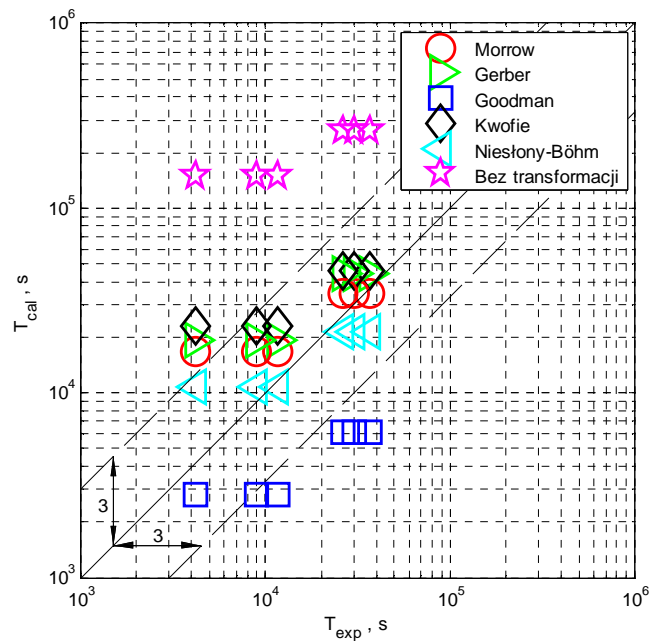
W tabeli 8 przedstawiono wyniki obliczonej trwałości przy zastosowaniu pięciu modeli oraz dwóch różnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa dla przebiegu szerokopasmowego. Na rys. 42 przedstawiono wykres porównawczy trwałość eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu szerokopasmowego przy wykorzystaniu rozkładu prawdopodobieństwa według Rayleigha. Natomiast na rys. 43 przedstawiono wykres porównawczy z zastosowaniem rozkładu Dirlika. Podobnie jak było to w przypadku przebiegu wąskopasmowego i w tym przypadku widać, że musimy uwzględniać wartość średnią w formie transformacji gęstości widmowej mocy. Większość wyników znalazła się w założonym paśmie rozrzutu. Jedynie obliczenia według modelu Niestonego-Böhma dały wszystkie wyniki znajdujące się w założonym paśmie rozrzutu 3. Warto zauważyć, że wyniki uzyskane przy pomocy modelu Goodmana w najmniejszym stopniu znalazły się w założonym paśmie rozrzutu. Znalazły się jednak po stronie bezpiecznej, czyli obliczenia nie przeszacowały realnych wyników eksperymentalnych.

**Tabela 8.** Wyniki obliczeń trwałości zmęczeniowej dla wyników badań eksperymentalnych dla przebiegu szerokopasmowego przy pomocy pięciu modeli korekcji wartości średniej oraz algorytmu przedstawionego w rozdziale szóstym dla rozkładu Rayleigha oraz Dirlika.

<b>RAYLEIGH</b>							
<b><math>\sigma_a</math> MPa</b>	<b><math>T_{exp}</math> s</b>	<b><math>T_{Bez}</math> transfor- macji s</b>	<b><math>T_{Morrow}</math> s</b>	<b><math>T_{Goodman}</math> s</b>	<b><math>T_{Gerber}</math> s</b>	<b><math>T_{Kwofie}</math> s</b>	<b><math>T_{Niestony- Böhm}</math> s</b>
<b>298</b>	8964	98731	11069	1861	12638	15261	7049
<b>298</b>	11700	98731	11069	1861	12638	15261	7049
<b>298</b>	4176	98731	11069	1861	12638	15261	7049
<b>278</b>	26316	174526	22660	4015	29357	30259	14140
<b>278</b>	30024	174526	22660	4015	29357	30259	14140
<b>278</b>	36864	174526	22660	4015	29357	30259	14140
<b>DIRLIK</b>							
<b><math>\sigma_a</math> MPa</b>	<b><math>T_{exp}</math> s</b>	<b><math>T_{Bez}</math> transfor- macji s</b>	<b><math>T_{Morrow}</math> s</b>	<b><math>T_{Goodman}</math> s</b>	<b><math>T_{Gerber}</math> s</b>	<b><math>T_{Kwofie}</math> s</b>	<b><math>T_{Niestony- Böhm}</math> s</b>
<b>298</b>	8964	149834	16796	2818	19177	23157	10692
<b>298</b>	11700	149834	16796	2818	19177	23157	10692
<b>298</b>	4176	149834	16796	2818	19177	23157	10692
<b>278</b>	26316	264860	34385	6083	44548	45917	21448
<b>278</b>	30024	264860	34385	6083	44548	45917	21448
<b>278</b>	36864	264860	34385	6083	44548	45917	21448



**Rys. 42.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu szerokopasmowego przy zastosowaniu pięciu modeli transformacyjnych oraz braku transformacji gęstości widmowej mocy stosując rozkład gęstości prawdopodobieństwa według Rayleigha.



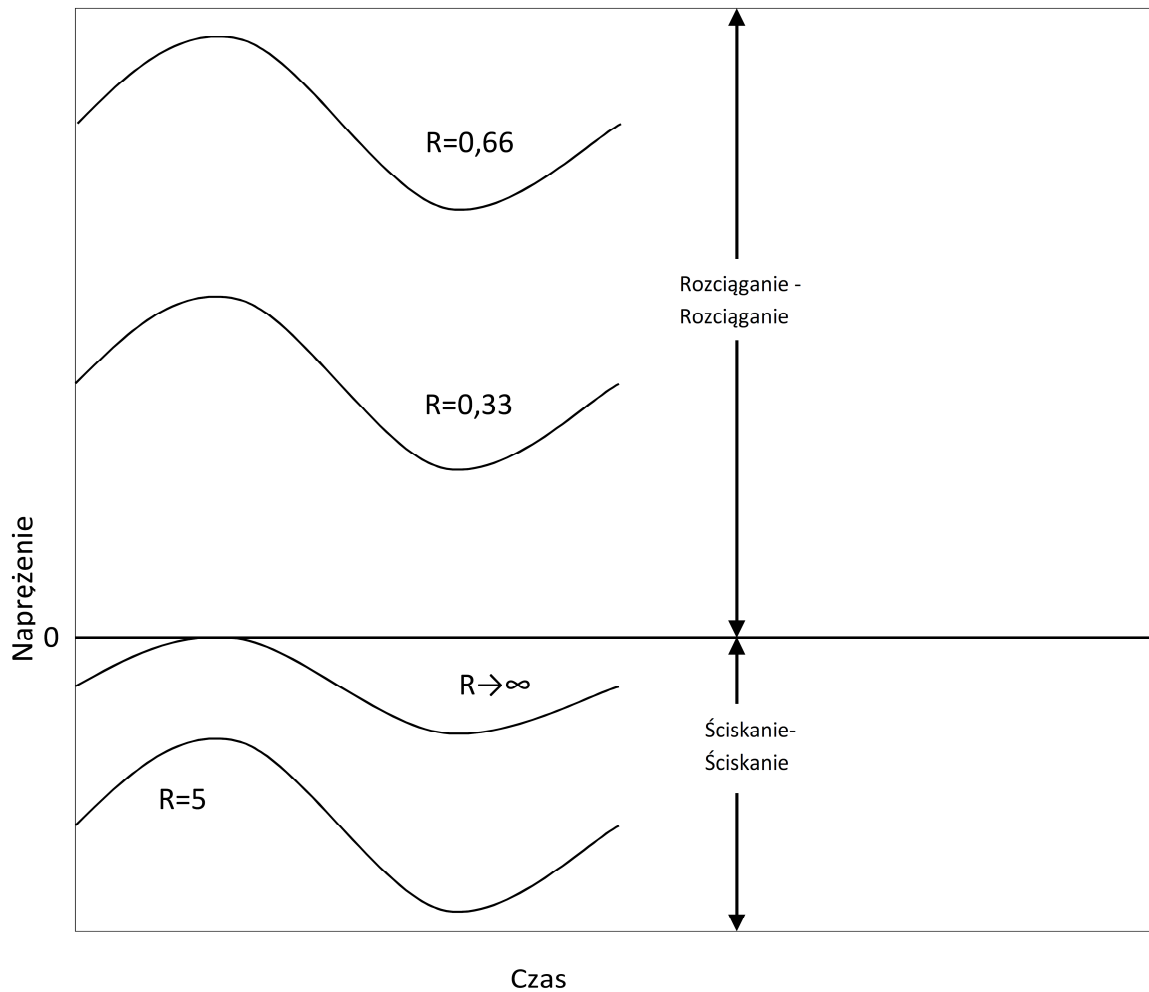
**Rys. 43.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla przebiegu szerokopasmowego przy zastosowaniu pięciu modeli transformacyjnych oraz braku transformacji gęstości widmowej mocy stosując rozkład gęstości prawdopodobieństwa według Dirlika.

## 7.6. Weryfikacja algorytmu obliczeniowego z wynikami eksperymentalnymi Kihla i Sarkaniego

Po weryfikacji algorytmu zaproponowanego w rozdziale szóstym pracy za pomocą wyników badań własnych przedstawionych w podrozdziale 7.5, zaproponowano weryfikację algorytmu na wynikach zaczerpniętych z literatury. Najwłaściwszą pracą, którą zasadnie można byłoby wykorzystać w tym celu jest praca Kihla i Sarkaniego [39,40]. Z prezentowanych wyników eksperymentalnych wybrano wyniki losowe z niezerową wartością średnią. Gęstość widmowa mocy została wygenerowana na podstawie przebiegów wąskopasmowych. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa został policzony według zależności Rayleigha. Skalowanie przebiegów ze względu na odpowiedni poziom obciążenia przeprowadzono wyłącznie przy pomocy wariancji. W tabeli 9 zamieszczono wyniki obliczeń trwałości zmęczeniowej dla wyników eksperymentalnych Kihla i Sarkaniego dla badań przy losowej amplitudzie obciążenia dla różnych wartości globalnego współczynnika asymetrii cyklu  $R$  (przedstawiono na rys. 44).

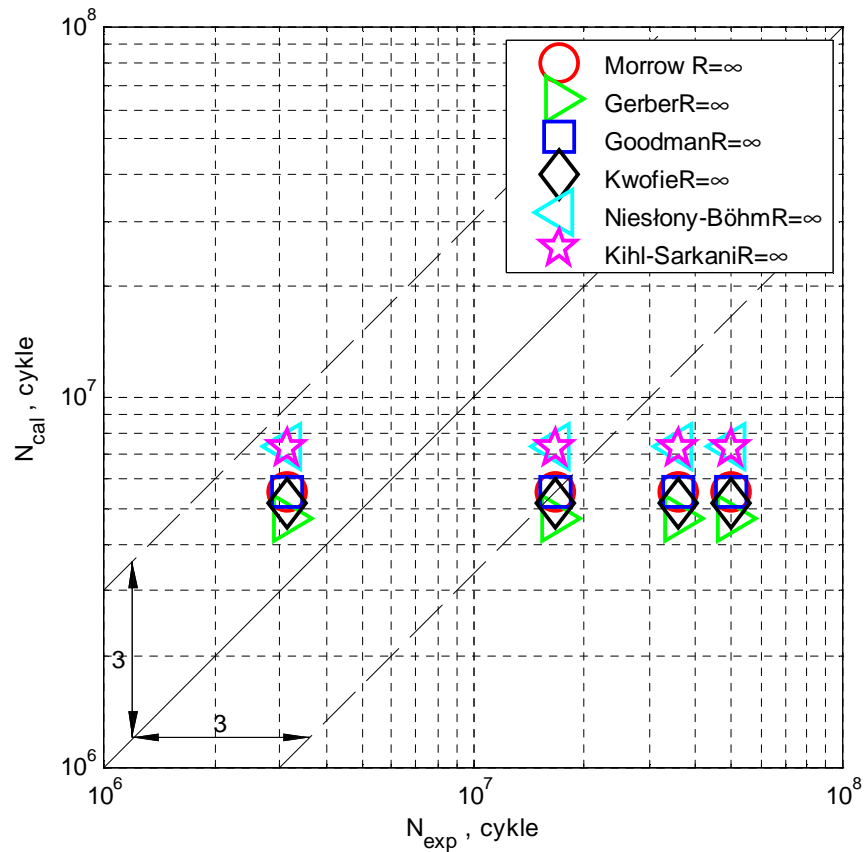
**Tabela 9.** Wyniki obliczeń trwałości zmęczeniowej dla wyników badań eksperymentalnych Kihla i Sarkaniego przy pomocy pięciu modeli korekcji wartości średniej oraz algorytmu przedstawionego w rozdziale szóstym.

$\sigma_{\max}$ MPa	$\sigma_m$ MPa	$N_{\text{exp}}$ , cykle	$N_{\text{Morrow}}$ , cykle	$N_{\text{Gerber}}$ , cykle	$N_{\text{Goodman}}$ , cykle	$N_{\text{Kwofie}}$ , cykle	$N_{\text{Niestony-Böhm}}$ , cykle	$N_{\text{Kihl}}$ , cykle
34,4	-34,4	3131400	5559159	4706977	5567915	5151129	7403787	7245200
34,4	-34,4	35742100	5559159	4706977	5567915	5151129	7403787	7245200
34,4	-34,4	16763400	5559159	4706977	5567915	5151129	7403787	7245200
34,4	-34,4	50016900	5559159	4706977	5567915	5151129	7403787	7245200
68,9	-103,4	6712500	806619	475406	810101	655682	2482309	3238300
68,9	-103,4	4191400	806619	475406	810101	655682	2482309	3238300
68,9	-103,4	2326800	806619	475406	810101	655682	2482309	3238300
68,9	-103,4	1679800	806619	475406	810101	655682	2482309	3238300
68,9	137,8	263100	250605	447574	248604	370072	259552	225100
68,9	137,8	183100	250605	447574	248604	370072	259552	225100
68,9	137,8	245200	250605	447574	248604	370072	259552	225100
68,9	137,8	217500	250605	447574	248604	370072	259552	225100
68,9	275,7	72500	111487	287020	109735	268027	153824	144500
68,9	275,7	161700	111487	287020	109735	268027	153824	144 500
68,9	275,7	123100	111487	287020	109735	268027	153824	144 500
68,9	275,7	301700	111487	287020	109735	268027	153824	144 500



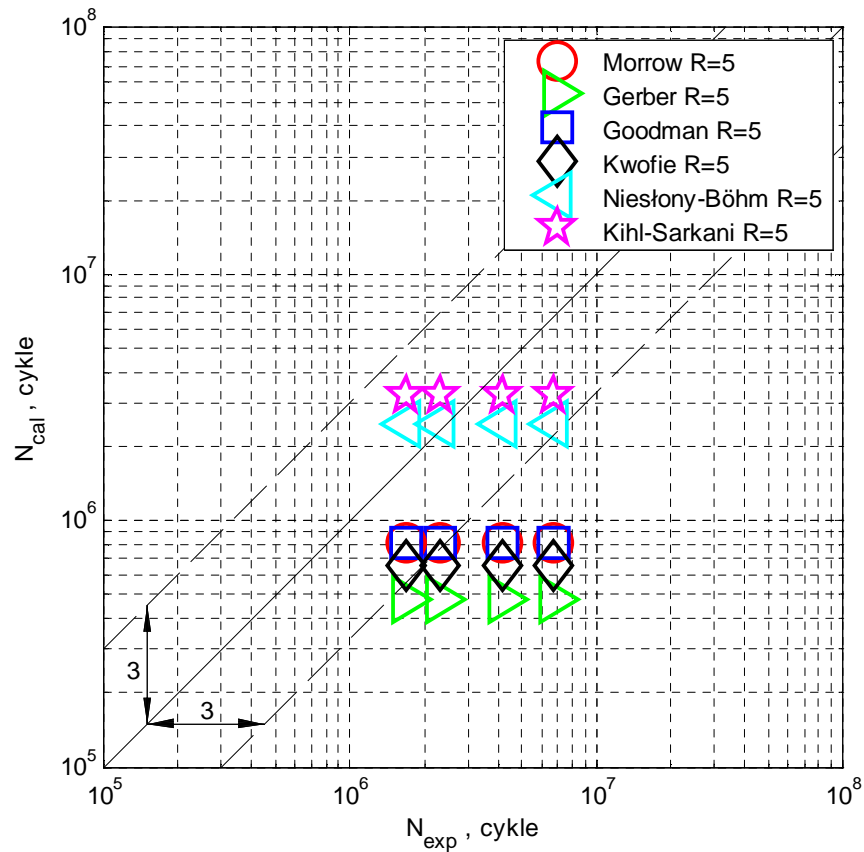
**Rys. 44.** Globalne współczynniki asymetrii cyklu dla badań Kihla i Sarkaniego.

Na rys. 45 zamieszczono wykres porównawczy trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla badań przy współczynniku asymetrii cyklu  $R=\infty$ . Jest to przypadek odzerowo tętniącego ściskania. Znaczący dla tego wykresu przy jego analizie jest fakt, że z czterech próbek jedynie jedna pękła w trakcie badań zaś resztę zawieszono po osiągnięciu znaczącej liczby cykli, z tego to powodu nie są one w pełni reprezentatywne dla tego poziomu. Obliczenia pokryły się z wynikami eksperymentalnymi w pewnym stopniu. Najlepsze dopasowanie uzyskano przy pomocy modelu Niesłonego-Böhma.



**Rys. 45.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla wyników z pracy Kihla i Sarkaniego [39] dla losowego przebiegu wąskopasmowego wygenerowanego za pomocą rozkładu Rayleigha z wartością średnią dla  $R=\infty$ .

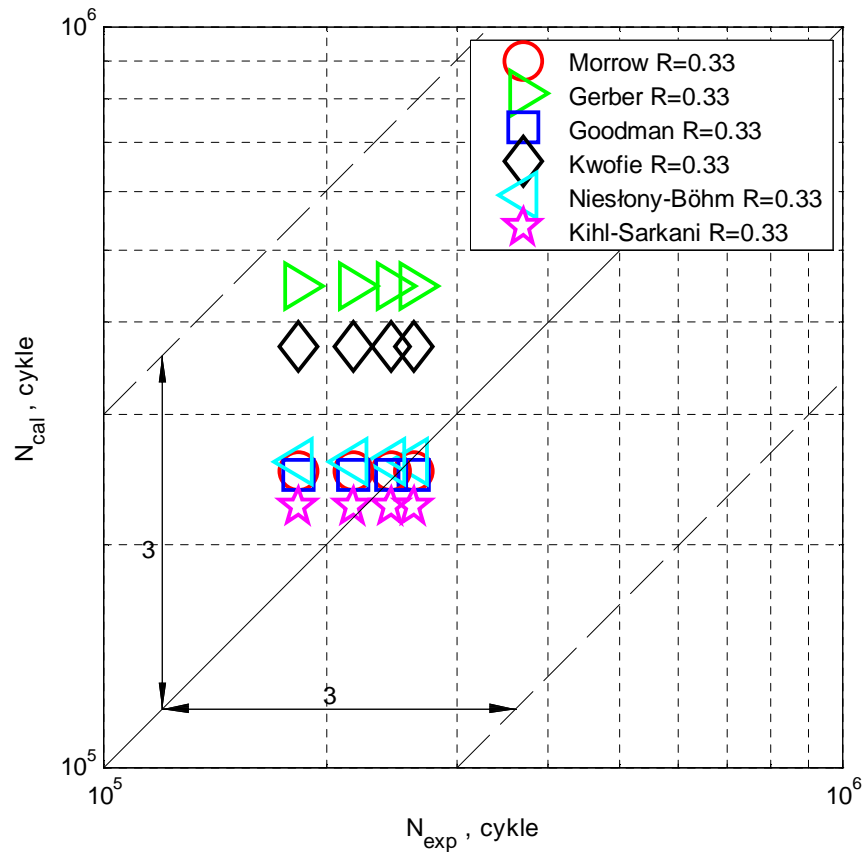
Na rys. 46 przedstawiono wykres porównawczy trwałości zmęczeniowej dla współczynnika asymetrii  $R=5$ . Prawie wszystkie zastosowane modele sprawdziły się dla tego przypadku, chociaż nie wszystkie wyniki znajdują się w założonym paśmie rozrzutu 3. Jednakże najlepszym dopasowaniem do wyników wykazał się model Niestonego-Böhma oraz metoda zaproponowana przez Kihla i Sarkaniego. Wyniki pozostałych modeli możemy uznać za zadowalające gdyż znajdują się po bezpiecznej stronie, tzn. nie przeszacowują trwałości zmęczeniowej.



**Rys. 46.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla wyników z pracy Kihla i Sarkaniego[39] dla losowego przebiegu wąskopasmowego wygenerowanego za pomocą rozkładu Rayleigha z wartością średnią dla  $R=5$ .

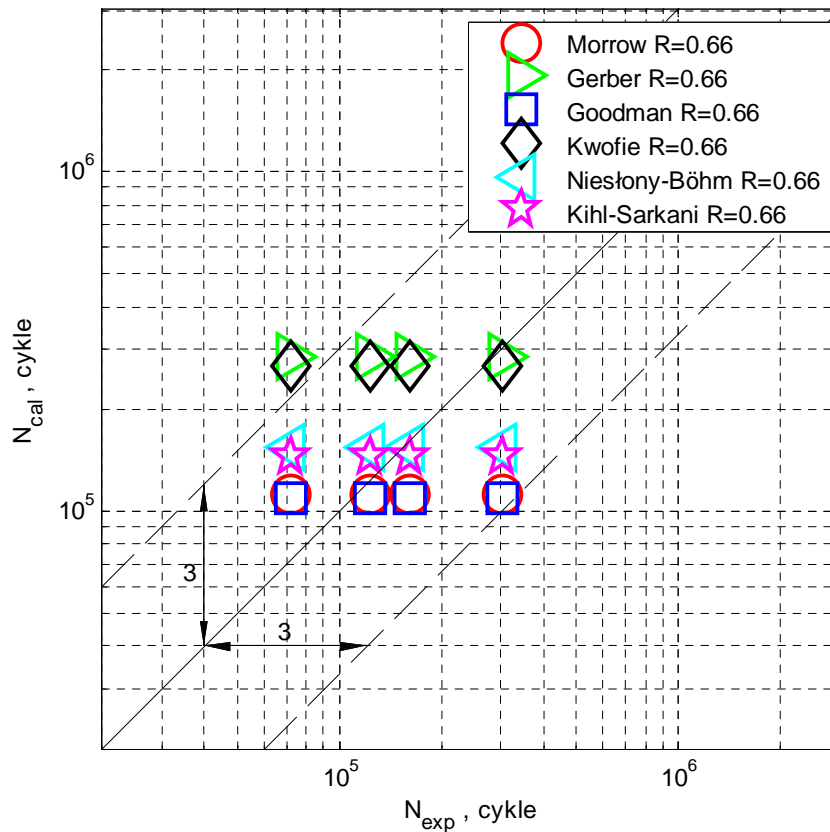
Na rys. 47 przedstawiono wykres porównawczy dla współczynnika asymetrii cyklu  $R=0.33$ . Wszystkie wyniki znalazły się w założonym paśmie rozrzutu. Najlepsze dopasowanie wykazują modele Goodmana, Morrowa, Niesłonego-Böhma oraz wyniki obliczeń metodą Kihla-Sarkaniego.





**Rys. 47.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla wyników z pracy Kihla i Sarkaniego[39] dla losowego przebiegu wąskopasmowego wygenerowanego za pomocą rozkładu Rayleigha z wartością średnią dla  $R=0,33$ .

Na rys. 48 przedstawiono wyniki porównawcze dla współczynnika asymetrii cyklu  $R=0,66$ . Prawie wszystkie wyniki obliczeń znalazły się w założonym paśmie rozrzutu. Najlepsze dopasowanie wykazują modele Goodman, Morrowa, Niestonego-Böhma oraz wyniki obliczeń metodą Kihla-Sarkaniego.



**Rys. 48.** Porównanie wyników trwałości zmęczeniowej eksperymentalnej z obliczeniową dla wyników z pracy Kihla i Sarkaniego[39] dla losowego przebiegu wąskopasmowego wygenerowanego za pomocą rozkładu Rayleigha z wartością średnią dla  $R=0,66$ .

W celu dodatkowego porównania liczbowego rozwiązania autora z propozycją Kihla i Sarkaniego podjęto się obliczenia błędu średniokwadratowego rozrzutów dla wyników badań uzyskanych w tym podrozdziale. W tym celu wykorzystano zależności zaproponowaną przez Walat i Łagodę [92]:

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \log^2 \frac{N_{exp i}}{N_{cali}}}{n}}, \quad (110)$$

ostatecznie błąd średniokwadratowy rozrzutów otrzymuje się jako:

$$T_{RMS} = 10^{E_{RMS}}. \quad (111)$$

W tabeli 10 zamieszczono wyniki błędów średniokwadratowych uzyskanych dla wykonanych obliczeń.

**Tabela 10.** Wyniki obliczeń błędu średniokwadratowego rozrzutów dla wyników badań eksperymentalnych Kihla i Sarkaniego przy pomocy pięciu modeli korekcji wartości średniej oraz algorytmu przedstawionego w rozdziale szóstym.

<b>R</b>	<b>TRMSMorrow, cykle</b>	<b>TRMSGerber, cykle</b>	<b>TRMSGoodman, cykle</b>	<b>TRMSKwofie, cykle</b>	<b>TRMSNiesłony- Böhm, cykle</b>	<b>TRMSKihl, cykle</b>
$\infty$	4,8	5,44	4,79	5,08	3,95	4,00
<b>5</b>	4,43	7,33	4,41	5,39	1,8	1,7
<b>0,33</b>	1,19	2,02	1,18	1,67	1,22	1,15
<b>0,66</b>	1,78	2,36	1,79	2,23	1,68	1,67

Wyniki obliczeń błędu średniokwadratowego wskazują, że najlepsze rezultaty uzyskuje się przy pomocy obliczeń według algorytmu autora wykorzystując model Niesłonego-Böhma oraz przy pomocy metody Kihla i Sarkaniego. Weryfikacja eksperymentalna zaproponowanego algorytmu obliczeniowego okazała się poprawna również dla wyników zaczerpniętych z literatury. Wykonanie obliczeń na bazie pracy Kihla i Sarkaniego było niezmiernie ważne, gdyż brak jest prac na ten temat, gdzie operuje się bezpośrednio na gęstości widmowej mocy i uwzględnia się wpływ niezerowej wartości średniej naprężenia przy pomocy podobnego rozwiązania jak w niniejszej pracy.

## 8. Wnioski i spostrzeżenia

**P**roblem badawczy przedstawiony w niniejszej pracy porusza bardzo ważne zagadnienie, jakim jest uwzględnienie wpływu wartości średniej naprężenia w metodzie spektralnej wyznaczania trwałości zmęczeniowej. Poziomość tego zagadnienia uniemożliwiało zastosowanie metody spektralnej dla przypadków obciążenia z niezerową wartością średnią. Z tego powodu podjęto się stworzenia syntetycznego algorytmu obliczeniowego, wykorzystującego transformację gęstości widmowej mocy przy pomocy klasycznych modeli kompensacyjnych. Założono, że w celu poprawnej weryfikacji algorytmu trzeba uwzględnić wszystkie czynniki, które mogą oddziaływać na proces obliczeniowy. Podjęto się również analizy ograniczeń wewnętrznych funkcji oprogramowania, z których częściowo korzystano. Po przeanalizowaniu przedstawionych w pracy założeń oraz wyników badań i symulacji można wysunąć następujące wnioski i spostrzeżenia:

1. Sformułowano algorytm wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną z uwzględnieniem wpływu niezerowej wartości średniej za pomocą transformacji gęstości widmowej mocy przy pomocy liniowych modeli kompensacyjnych, znanych z literatury. Algorytm ten, jako jedyny można stosować zarówno dla przebiegów obciążenia o charakterze wąsko jak i szerokopasmowym.
2. Zastosowanie eksperymentalnych wykresów zmęczeniowych aproksymowanych metodą odcinkową znacząco wpływa na dokładność wyników obliczeniowych trwałości. Szczególnie dla obszarów skrajnych, które klasyczny wykres Basquina nie opisuje dostatecznie dokładnie. Metoda odcinkowa pozwala, przy dostatecznie dużej liczbie badań eksperymentalnych, na lepsze dopasowanie do rzeczywistej charakterystyki zmęczeniowej. Modele Niesłonego-Böhma oraz Smitha-Watsona-Toppera wykorzystane w trakcie obliczeń z wykorzystaniem metody odcinkowej pozwalały stosunkowo dobrze skompensować wpływ wartości średniej naprężenia na trwałość zmęczeniową. Model Niesłonego-Böhma wykazywał w tej mierze lepsze rezultaty w stosunku do Smitha-Watsona-Toppera biorąc pod uwagę rozpiętość wyników w liczbie cykli.
3. Poprawny dobór modelu uwzględnienia wartości średniej naprężenia jest jednym z najważniejszych czynników wpływających na wyniki obliczeniowej trwałości

- zmęczeniowej. Prezentowane w pracy dwa nowe modele wykorzystujące dwie graniczne charakterystyki zmęczeniowe mogą być wykorzystywane z powodzeniem zarówno dla materiałów w temperaturze otoczenia jak i w podwyższonych temperaturach pracy. Z badań wynika, że proponowane modele dają wyniki lepsze od popularnego modelu Smitha-Watsona-Toppera.
4. Wybór odpowiedniej metody obliczania rozkładu gęstości prawdopodobieństwa ma niebagatelny wpływ na trwałość zmęczeniową wyznaczaną metodą spektralną. Modele Rayleigha, Rice'a, Dirlika, Zhao-Bakera, Benasciutti-Tovo oraz Lalanne nadają się do implementacji. Najlepsze wyniki porównania trwałości obliczeniowej do eksperymentalnej dały modele Rayleigha oraz Dirlika dla przebiegu wąskopasmowego oraz model Dirlika dla przebiegu szerokopasmowego.
  5. Sposób estymacji gęstości widmowej mocy ma znaczący wpływ na wyniki obliczeniowe. Tylko nieliczne metody estymacji gęstości widmowej mocy nadają się do bezpośredniej implementacji do algorytmów wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną. Z wszystkich dostępnych metod, do obliczeń trwałości zmęczeniowej nadają się trzy metody: Welcha, Burga oraz Yule-Walkera. Biorąc pod uwagę losowy charakter obciążenia wyniki badań eksperymentalnych mieszczą się w dopuszczalnym, trzykrotnym paśmie rozrzutu. Ponadto zauważono, że najlepsze wyniki porównania trwałości obliczeniowej z eksperymentalną dla przebiegu wąskopasmowego daje model Burga oraz Yule'a-Walkera. Natomiast dla przebiegu szerokopasmowego najlepsze wyniki uzyskujemy za pomocą metody Welcha.
  6. Zastosowano z powodzeniem transformację funkcji gęstości widmowej mocy w dziedzinie częstotliwości w celu uwzględnienia wpływu wartości średniej naprężenia na trwałość zmęczeniową. Do transformacji można stosować zarówno liniowe jak i nieliniowe modele kompensacyjne. Brak transformacji gęstości widmowej mocy ze względu na wartość średnią naprężenia powoduje otrzymanie zawyżonych trwałości.
  7. Wyniki trwałości obliczeniowej w porównaniu z wynikami badań stanowiskowych własnych dla stali S355JR, przy pomocy proponowanego podejścia dały zadowalające wyniki. Większość wyników przy zastosowaniu pięciu modeli kompensacyjnych znalazła się w założonym paśmie rozrzutu, zarówno dla

przebiegu wąsko jak i szerokopasmowego. Najlepszym dopasowaniem w obu przypadkach wykazał się model Niestonego-Böhma. Najgorsze wyniki uzyskano przy zastosowaniu modelu Goodmana.

8. Weryfikacja algorytmu obliczeniowego na bazie wyników z pracy Kihla i Sarkaniego potwierdziła zasadność transformacji gęstości widmowej mocy również w tym przypadku. W porównaniu z wynikami eksperymentalnymi dla różnych wartości współczynnika asymetrii cyklu  $R$  większość wyników znalazła się w założonym paśmie rozrzutu. Najlepsze dopasowanie do wyników eksperymentalnych uzyskano przy zastosowaniu modelu Niestonego-Böhma.

## LITERATURA

- [1] Bagci C., Fatigue design of machine elements using Bagci line defining the fatigue failure surface line, *Mechanism and Machine Theory*. 16 (1981) 339.
- [2] Bannantine J.A., *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*, 1 edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1989.
- [3] Basquin O., The exponential law of endurance tests, *Proc. American Society for Testing and Materials*. 10 (1910) 625–630.
- [4] Benasciutti D., Tovo R., Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes, *International Journal of Fatigue*. 27 (2005) 867–877.
- [5] Bendat J.S., *Random data: analysis and measurement procedures*, 4th ed, Wiley, Hoboken, N.J, 2010.
- [6] Bendat J.S., M.A. Corporation, U.S.N.A. and S. Administration, *Probability functions for random responses: prediction for peaks, fatigue damage, and catastrophic failures*, National Aeronautics and Space Administration, 1964.
- [7] Bendat J.S., Piersol A.G., *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, Państwowe Wydaw. Naukowe, 1976.
- [8] Berger C., Pyttel B., Schwerdt D., Beyond HCF – Is there a fatigue limit?, *Mat.-Wiss. U. Werkstofftech*. 39 (2008) 769–776.
- [9] Bergmann J., *Zur Betriebsfestigkeitsbemessung gekerbter bauteile auf der grundlage der örtlichen Beanspruchungen*, Presse- und Informationsdienst der THD., 1983.
- [10] Böhm M., Niesłony A., Przegląd modeli uwzględniających wpływ wartości średniej naprężenia na trwałość w jednoosiowym stanie obciążenia, *XXIV Sympozjum Zmęczenie I Mechanika Pękania*, Bydgoszcz. (2012) 21–22.
- [11] Böhm M., Niesłony A., A comparison of criterias of mean stress compensation dedicated to uniaxial loading, in: *Nowe Trendy W Naukach Inżynieryjnych*, Creativetime, 2012.
- [12] Böhm M., Niesłony A., Comparison of usability of different mean stress compensation models: a case study for cast iron GGG40 and GGG60, in: *Młodzi Naukowcy Dla Polskiej Nauki*, Creativetime, 2012.
- [13] Böhm M., Niesłony A., Wytrzymałość zmęczeniowa stali S355JR w warunkach obciążeń losowych z wartością średnią, *Energetyka, Problemy Energetyki I Gospodarki Paliwowo - Energetycznej*. (2012) s. 7–10.
- [14] Böhm M., Niesłony A., Life prediction of structural elements using spectral method - a study case for the 18G2A steel, in: *Młodzi Naukowcy Dla Polskiej Nauki*, Creativetime, 2012.
- [15] Bolotin V.V., *Random vibrations of elastic systems*, Springer Netherlands, Dordrecht, 1984.
- [16] Broersen P.M.T., *Automatic Autocorrelation and Spectral Analysis*, 2006 edition, Springer, Berlin ; London, 2006.
- [17] Burg J.P., *Maximum entropy spectral analysis*, Stanford University, 1975.
- [18] Carpinteri A., *Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures*, Newnes, 1994.
- [19] Chaudhury G., Dover W., Fatigue analysis of offshore platforms subject to sea wave loadings, *International Journal of Fatigue - INT J FATIGUE*. 7 (1985) 13–19.
- [20] Dirlik T., *Application of computers in fatigue analysis*, phd, University of Warwick, 1985.

- [21] Dowling N.E., Mean Stress Effects in Stress-Life and Strain-Life Fatigue, SAE International, Warrendale, PA, 2004.
- [22] E08 Committee, Practice for Conducting Force Controlled Constant Amplitude Axial Fatigue Tests of Metallic Materials, ASTM International, 2007.
- [23] Etube L., Fatigue and Fracture Mechanics of Offshore Structures, 1 edition, Wiley, London, 2001.
- [24] Figge I.E., NASA TN D-3883, National Aeronautics and Space Administration, 1967.
- [25] Furuya Y., Abe T., Effect of mean stress on fatigue properties of 1800 MPa-class spring steels, *Materials & Design*. 32 (2011) 1101–1107.
- [26] Gassner E., Fatigue life of structural components under random loading, *Fraunhofer-Ges. z. Förderung d. Angewandten Forschung e. V.*, 1973.
- [27] Goodman J., *Mechanics Applied to Engineering*, Longmans, Green & Company, 1899.
- [28] Grover H.J., Bishop S.M., Jackson L.R., Fatigue strengths of aircraft materials: axial load fatigue tests on unnotched sheet specimens of 24S-T3 and 75S-T6 aluminum alloys and of SAE 4130 steel, 1951.
- [29] Haibach E., *Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*, Auflage: 3., korr. u. erg. Aufl. 2006, Springer, Berlin, 2006.
- [30] Halford G.R., *Fatigue and Durability of Structural Materials*, ASM International, 2006.
- [31] Hancock J., D. Gall, *Fatigue under narrow and broad band stationary loading*, Marine Technology Directorate Ltd, 1985.
- [32] Have A.A., Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (Netherlands), WISPER and WISPERX: final definition of two standardised fatigue loading sequences for wind turbine blades, Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, Amsterdam, 1992.
- [33] Ince A., Glinka G., A modification of Morrow and Smith–Watson–Topper mean stress correction models, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 34 (2011) 854–867.
- [34] Miles J.W., On Structural Fatigue Under Random Loading, *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*. 21 (1954) 753–762.
- [35] Karakas Ö., Consideration of mean-stress effects on fatigue life of welded magnesium joints by the application of the Smith–Watson–Topper and reference radius concepts, *International Journal of Fatigue*. 49 (2013) 1–17.
- [36] Karolczuk A., Plastic strains and the macroscopic critical plane orientations under combined bending and torsion with constant and variable amplitudes, *Engineering Fracture Mechanics*. 73 (2006) 1629–1652.
- [37] Karolczuk A., Blacha Ł., Fatigue life estimation under variable amplitude bending using the non-local damage parameter and multisurface plasticity model, *International Journal of Fatigue*. 33 (2011) 1376–1383.
- [38] Kawai M., Kato K., Effects of R-ratio on the off-axis fatigue behavior of unidirectional hybrid GFRP/Al laminates at room temperature, *International Journal of Fatigue*. 28 (2006) 1226–1238.
- [39] Kihl D.P., Sarkani S., Mean stress effects in fatigue of welded steel joints, *Probabilistic Engineering Mechanics*. 14 (1999) 97–104.
- [40] Kihl D.P., Sarkani S., Beach J.E., Stochastic fatigue damage accumulation under broadband loadings, *International Journal of Fatigue*. 17 (1995) 321–329.
- [41] Kliman V., Prediction of Random Load Fatigue Life Distribution, *Fatigue Design*. 16 (1993) 241–255.
- [42] Klubberg F., Schaefer H.J., Hempen M., Beiss P., Empirical relationship between pulsating and fully reversed fatigue strength amplitudes, *Fatigue Damage of Materials*. (2003) 12.



- [43] Kluger K., Łagoda T., Wpływ wartości średniej obciążenia na trwałość zmęczeniową w opisie energetycznym, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2007.
- [44] Kluger K., Łagoda T., New energy model for fatigue life determination under multiaxial loading with different mean values, *International Journal of Fatigue*. 66 (2014) 229–245.
- [45] Kohut M., Łagoda T., Pawliczek R., Trwałość zmęczeniowa elementów okrągłych i kwadratowych ze stali 18G2A poddanych zginaniu wahadłowemu, *Przegląd Mechaniczny*. nr 6 (2005) 35–40.
- [46] Kopriva D.A., *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations: Algorithms for Scientists and Engineers*, 2009 edition, Springer, Dordrecht, 2009.
- [47] Kowalewski J., On the relationship between Component Life under Irregularly Fluctuating and Ordered Load Sequences, part 2, 1963.
- [48] Kwofie S., An exponential stress function for predicting fatigue strength and life due to mean stresses, *International Journal of Fatigue - INT J FATIGUE*. 23 (2001) 829–836.
- [49] Łagoda T., *Trwałość zmęczeniowa maszyn: laboratorium*, Politechnika Opolska, 2005.
- [50] Łagoda T., Macha E., Pawliczek R., The influence of the mean stress on fatigue life of 10HNAP steel under random loading, *International Journal of Fatigue*. 23 (2001) 283–291.
- [51] Lalanne C., *Mechanical Vibration and Shock Analysis, Random Vibration*, John Wiley & Sons, 2013.
- [52] Lalanne C., *Mechanical Vibration and Shock Analysis, Sinusoidal Vibration*, John Wiley & Sons, 2013.
- [53] Lalanne C., *Mechanical Vibration and Shock Analysis, Fatigue Damage*, John Wiley & Sons, 2013.
- [54] Lalanne C., *Mechanical Vibration and Shock Analysis, Mechanical Shock*, John Wiley & Sons, 2013.
- [55] Lalanne C., *Mechanical Vibration and Shock Analysis, Specification Development*, John Wiley & Sons, 2013.
- [56] Lutes L.D., *Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations*, 1st edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, 1996.
- [57] Macha E., Spectral method of fatigue life calculation under random multiaxial loading, *Mater Sci*. 32 (1996) 339–349.
- [58] Marin J., Biaxial tension-torsion fatigue strength of metals, *Journal of Applied Mechanics*. 16 (1949) 383–388.
- [59] Marple S.L., *Digital Spectral Analysis: With Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1987.
- [60] Mathworks, Matlab help files, (1984).
- [61] Moore H.F., Kommers J.B., *The fatigue of metals*, New York [etc.] McGraw-Hill book company, inc., 1927.
- [62] Morrow J., Fatigue properties of metals, *Fatigue Design Handbook*. section 3.2 (1968).
- [63] Niesłony A., *Wyznaczanie warstw uszkodzeń zmęczeniowych metodą spektralną*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2008.
- [64] Niesłony A., Comparison of some selected multiaxial fatigue failure criteria dedicated for spectral method, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 48 (2010) 233–254.
- [65] Niesłony A., *Rainflow Counting Algorithm - File Exchange - MATLAB Central*, (n.d.).

- [66] Niesłony A., Böhm M., Trwałość zmęczeniowa żeliwa GGG40 w warunkach zmiennoodprężeniowego rozciągania ze skręcaniem z wartością średnią naprężenia, *Modelowanie Inżynierskie*. T. 10, nr 41 (2011) 299–306.
- [67] Niesłony A., Böhm M., Mean Stress Value in Spectral Method for the Determination of Fatigue Life, *Acta Mechanica et Automatica*. 6 (2012) 71–74.
- [68] Niesłony A., Böhm M., Determination of Fatigue Life on the Basis of Experimental Fatigue Diagrams under Constant Amplitude Load with Mean Stress, *Materials Science Forum*. 726 (2012) 33–38.
- [69] Niesłony A., Macha E., *Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue*, Springer, 2007.
- [70] Park S.J., Kim K.S., Kim H.S., Ratcheting behaviour and mean stress considerations in uniaxial low-cycle fatigue of Inconel 718 at 649 °C, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 30 (2007) 1076–1083.
- [71] Pawliczek R., *Badanie wpływu parametrów obciążenia i geometrii karbu na trwałość przy zmiennym zginaniu i skręcaniu*, Politechnika Opolska, Opole, 2001.
- [72] Peckover R., *United Kingdom Offshore Steels Research Project- Phase 1: Final Report*, Health and Safety Executive Report OTH, London, 1988.
- [73] Percival D.B., Walden A.T., *Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [74] Rice S.O., *Mathematical Analysis of Random Noise*, *Bell System Technical Journal*. 23 (1944) 282–332.
- [75] Sakai S., Okamura H., On the distribution of rainflow range for Gaussian random processes with bimodal PSD, *JSME International Journal*. 38 (1995) 440–445.
- [76] Schuetz D., Klaetschke H., Steinhilber H., Heuler P., Schuetz W., *Standardized load sequences for car wheel suspension components. car loading standard - CARLOS. final report*, (1990).
- [77] Schütz W., A history of fatigue, *Engineering Fracture Mechanics*. 54 (1996) 263–300.
- [78] Smith J., *The effect of range of stress on fatigue strength*, 1942.
- [79] Smith K., Watson P., Topper T., A stress strain function for the fatigue of metals, *J. of Materials ASTM*. 5 (1970) 767–778.
- [80] Soderberg C., *Factor of safety and working stress*, *Transactions of ASME*. 52 (1939) 13–28.
- [81] Steinberg D.S., *Vibration Analysis for Electronic Equipment*, 3 edition, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [82] Stoica P., *Introduction to Spectral Analysis*, 1 edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
- [83] Susmel L., Tovo R., Lazzarin P., The mean stress effect on the high-cycle fatigue strength from a multiaxial fatigue point of view, *International Journal of Fatigue*. 27 (2005) 928–943.
- [84] Szala J., *Hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych*, Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz, 1998.
- [85] Szala J., Szala G., Ligaj B., *Dwuparametryczne charakterystyki zmęczeniowe stali konstrukcyjnych i ich eksperymentalna weryfikacja: zbiór monografii*, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich, 2011.
- [86] Tao G., Xia Z., Mean stress/strain effect on fatigue behavior of an epoxy resin, *International Journal of Fatigue*. 29 (2007) 2180–2190.
- [87] Timoshenko S., *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, Courier Dover Publications, 1983.

- [88] Trefethen L.N., Spectral Methods in MATLAB, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2001.
- [89] Tunna J.M., Fatigue Life Prediction for Gaussian Random Loads at the Design Stage, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 9 (1986) 169–184.
- [90] Gerber W.Z., Bestimmung der zulässigen Spannungen in Eisen-Konstruktionen (Calculation of the allowable stresses in iron structures), *Z Bayer Archit Ing-Ver*. 6 (1874) 101–110.
- [91] Wahl N.K., Mandell J.F., Samborsky D.D., S.N. Laboratories, Spectrum Fatigue Lifetime and Residual Strength for Fiberglass Laminates, Montana State University--Bozeman, 2001.
- [92] Walat K., Łagoda T., Trwałość zmęczeniowa elementów maszyn w płaszczyźnie krytycznej wyznaczonej przez ekstremum kowariancji naprężeń, Politechnika Opolska Oficyna Wydawnicza, 2011.
- [93] Walker K., The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum, in: M. Rosenfeld (Ed.), *Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life*, ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959, 1970: pp. 1–1–14.
- [94] Warren J., Wei D.Y., A microscopic stored energy approach to generalize fatigue life stress ratios, *International Journal of Fatigue*. 32 (2010) 1853–1861.
- [95] Welch P.D., The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*. 15 (1967) 70–73.
- [96] Wirsching P.H., Light M.C., Fatigue under Wide Band Random Stresses, *Journal of the Structural Division*. 106 (1980) 1593–1607.
- [97] Zhang J., Shi X., Bao R., Fei B., Tension–torsion high-cycle fatigue failure analysis of 2A12-T4 aluminum alloy with different stress ratios, *International Journal of Fatigue*. 33 (2011) 1066–1074.
- [98] Zhao W., Baker M., On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes, *International Journal of Fatigue*. (1992) 121–135.
- [99] PN-EN 10025-2:2007 Wyroby walcowane na gorąco ze stali konstrukcyjnych. Część 2: Warunki techniczne dostawy stali konstrukcyjnych niestopowych, (2007).

## STRESZCZENIE

---

### **WYZNACZANIE TRWAŁOŚCI MATERIAŁÓW METODĄ SPEKTRALNĄ Z UWZGLĘDNIENIEM SKŁADOWEJ STATYCZNEJ**

W pracy przedstawiono propozycję algorytmu uwzględniania wartości średniej naprężenia w procesie wyznaczania trwałości zmęczeniowej metodą spektralną. Przedstawione ujęcie zdefiniowane jest w dziedzinie częstotliwości. Opisano istniejące rozwiązania jak również przedstawiono wybrane modele naprężeniowe stosowane w celu uwzględniania wartości średniej podczas obliczania trwałości zmęczeniowej. Modele te, ze względu na ich liniowy charakter, zostały wykorzystane do wyznaczenia funkcji gęstości widmowej mocy (GWM) naprężenia transformowanego ze względu na wartość średnią. W pracy podjęto się weryfikacji zaproponowanego podejścia na bazie badań własnych stali S355JR oraz wyników zaczerpniętych z literatury. Przedstawiono oraz przeanalizowano wpływ czynników wpływających na obliczenia zmęczeniowe przeprowadzane metodą spektralną.

### **DETERMINATION OF FATIGUE LIFE OF MATERIALS WITH THE USE OF SPECTRAL METHOD TAKING INTO ACCOUNT THE STATIC COMPONENT**

The thesis presents a proposal of an algorithm which takes into account the mean stress value in the process of fatigue life determination with the use of spectral method. The proposed solution is defined in the frequency domain. Existing solutions have been described as well as chosen mean stress compensation models used in the fatigue life determination process for non-zero mean stresses. These models due to their linear character, have been used in the process of determination of the transformed power spectral density (PSD) of the stress due to mean stress. The thesis undertakes the verification of the proposed algorithm on the basis of own research of the S355JR steel as well as research data obtained out of the literature. The impact of chosen factors which influence the fatigue calculations with the use of spectral method have been properly described and analyzed.