Anna Chwastyk

Q-niezależność w algebrach z retrakcją

Opole 2008

Spis treści

Wstęp 5

Rozdział 1. Q-niezależność - definicje i własności 7

1.1. M-niezależność 7
1.2. Q-niezależność 8
1.3. Własności pojęcia Q-niezależności 10
1.4. Retrakty a Q-niezależność 11

Rozdział 2. Q-niezależność w algebrach Stone'a 15

2.1. Podstawowe pojęcia i fakty dotyczące algebr Stone'a 15
2.2. Q-niezależność w kratach dystrybutywnych 17
2.3. Q-niezależność w algebrach Boole'a 20
2.4. Q-niezależność w algebrach Stone'a dla zbiorów jedno- i dwuelementowych 21
2.5. Niezależne podzbiory F_a 24
2.6. Związki między niezależnością w algebrze Stone'a i algebrze Boole'a $\mathbf{S}(\mathbf{L})$ 30

Rozdział 3. Q-niezależność w pewnych algebrach niełącznych 41

3.1. Grupoidy *-łączne 41
3.2. Działania termowe w *-łącznym grupoidzie przemiennym 48
3.3. Q-niezależność w półkratach 57
3.4. Q-niezależność w grupoidach *-łącznych z retrakcją 61
3.5. Quasigrupy *-łączne 65

Bibliografia 73

Skorowidz rzeczowy 77

Skorowidz osobowy 79

Streszczenia 81

Wstęp

W latach 60. ubiegłego wieku E. Marczewski zaobserwował związek między liniową niezależnością wektorów oraz teoriomnogościową niezależnością zbiorów. Starając się ująć oba te pojęcia w jeden wspólny schemat, zaproponował pojęcie niezależności zdefiniowane dla dowolnej algebry ogólnej i nazwane poźniej M-niezależnością. Pojęcie to, rozważane w odpowiednich algebrach, dało szereg uprzednio zdefiniowanych rodzajów niezależności. Oprócz wyżej wspomnianych, także niezależność liniową punktów lub liczb, niezależność algebraiczną w teorii grup abelowych, niezależność algebraiczną w teorii liczb (lub ogólniej, w teorii rozszerzeń ciał), niezależność wielomianów, niezależność funkcji ciągłych, niezależność logiczną aksjomatów i wiele innych.

W schemacie M-niezależności nie udało się jednak zawrzeć wielu ważnych pojęć, między innymi niezależności ze względu na operator domknięcia, niezależności stochastycznej oraz niezależności zdefiniowanych przez J. Schmidta, S. Świerczkowskiego i G. Grätzera. W 1966 roku E. Marczewski zauważył, że pojęcia te można wyrazić w języku odwzorowań i rozszerzeń do homomorfizmów i przedstawił bardziej ogólny schemat zwany niezależnością względem rodziny odwzorowań, bądź krócej Q-niezależnością. Niniejsza praca jest poświęcona badaniu Q-niezależności w algebrach Stone'a oraz w pewnych algebrach niełącznych. Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje i własności rodzin zbiorów Q-niezależnych. twierdzenie 1 dotyczy algebr, w których wśród działań termowych występuje retrakcja. Przedstawiono w nim związek między Q-niezależnością w danej algebrze a niezależnością w jej retrakcie i klasach abstrakcji generowanych przez kongruencję indukowaną przez retrakcję.

W rozdziale drugim badane są rodziny zbiorów Q-niezależnych w algebrach Stone'a, w oparciu o trójkową reprezentację tych algebr. Szkielet algebry Stone'a, będący również jej retraktem, jest algebrą Boole'a, a każda klasa abstrakcji kongruencji Glivenki, tożsamej z kongruencją indukowaną przez retrakcję, jest kratą dystrybutywną. W związku z tym, w paragrafie 2.2, dotychczasowe rezultaty badań zbiorów Q-niezależnych w kratach dystrybutywnych uzupełnione zostały o charakterystykę rodzin S, S_0, G oraz I-niezależnych w tych algebrach. Natomiast paragraf 2.3 to krótki przegląd wyników badań nad Q-niezależnością w algebrach Boole'a. Twierdzenie 8 podaje warunek konieczny i dostateczny na to, aby podzbiór pewnej klasy abstrakcji kongruencji Glivenki był S_0 i A_1-niezależny w algebrze Stone'a. Twierdzenie 10 charakteryzuje rodzinę zbiorów t-niezależnych w algebrze Stone'a. W twierdzeniach 11 i 12 zawarte są warunki konieczne dla M, I, S, S_0 oraz A_1-niezależności zbioru w rozważanej algebrze.

W rozdziale trzecim zdefiniowane zostało pewne uogólnienie półgrup i grup przemiennych, mianowicie grupoidy i quasigrupy *-łączne. Algebry te w zbiorze swych działań fundamentalnych zawierają inwolucję. W rozdziale tym podano również podstawowe własności grupoidów *-łącznych oraz ich związki z półkratami (twierdzenia 14 i 15). Twierdzenia 16 i 17 opisują działania termowe w przemiennych półgrupach *-łącznych, które spełniają istotną rolę w badaniu Q-niezależności. Wyróżniona została również pewna klasa grupoidów *-łącznych, których retraktem są półkraty. Wstępem do badania Q-niezależności w tych algebrach jest paragraf 3.3 zawierający oprócz wyników dotyczących M i t-niezależności w półkratach także opis rodzin zbiorów S, S_0, G oraz I-niezależnych. W paragrafie 3.5 podane zostały ogólne własności i opis działań termowych w quasigrupach *-łącznych.

Rozdział 1

Q-niezależność - definicje i własności

1.1. M-niezależność

Dla danej algebry $\mathbf{A} = (A; F)$ oznaczmy przez $T^{(n)}(\mathbf{A})$ $(n = 1, 2, ...)$ rodzinę wszystkich *n-argumentowych działań termowych* algebry $\mathbf{A}$, to znaczy najmniejszy ze względu na inkluzję zbiór spełniający warunki:

i) $p_i^n \in T^{(n)}(\mathbf{A})$, (rzutowania $p_i^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$, dla $i = 1, 2, ..., n$, są n-argumentowymi działaniami termowymi);
ii) jeśli $g_1, g_2, ..., g_k \in T^{(n)}(\mathbf{A})$ oraz $f \in F$ jest k-argumentowym działaniem fundamentalnym, to $\hat{f}(g_1, g_2, ..., g_k)(x_1, x_2, ..., x_n) =$
$= f(g_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., g_k(x_1, x_2, ..., x_n)) \in T^{(n)}(\mathbf{A})$.

Przez $T^{(0)}(\mathbf{A})$ oznaczmy zbiór wszystkich stałych algebraicznych, traktowanych jako nularne działania termowe algebry $\mathbf{A}$.

Standardową terminologię i oznaczenia dla podstawowych pojęć algebry uniwersalnej można znaleźć w [4] oraz [26].

Niech $\mathbf{A} = (A; F)$ będzie algebrą. Niepusty zbiór $X \subseteq A$ nazywamy *M-niezależnym* ($X \in Ind(\mathbf{A}, M)$), jeśli

(a) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \leq card(X))$ $(\forall f, g \in T^{(n)}(\mathbf{A}))$ $(\forall \underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\neq} \in X)$

$[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow f = g \text{ (w } \mathbf{A})]$
lub równoważnie

(b) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \leq card(X))$ $(\forall f, g \in T^{(n)}(\mathbf{A}))$ $(\forall p : X \to A)$
$(\forall a_1, ..., a_n \in X)$ $[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow$

$f(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = g(p(a_1), \ldots, p(a_n))]$;

(c) $(\forall p \in A^X)\ (\exists \bar{p} \in Hom(\langle X \rangle_{\mathbf{A}}, \mathbf{A}))\ [\ \bar{p}|_X = p\ ]$;

(d) $\langle X \rangle_{\mathbf{A}}$ jest $\mathbb{K}$-wolną algebrą, $\mathbb{K}$-wolno generowaną przez X, gdzie $\mathbb{K} = \{\mathbf{A}\}$ (lub $\mathbb{K} = \mathcal{HSP}\{\mathbf{A}\}$ co oznacza, że jest rozmaitością generowaną przez $\mathbf{A}$).

1.2. Q-niezależność

Niech $\mathbf{A} = (A; F)$ będzie algebrą oraz $\emptyset \neq X \subseteq A$. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$Q_X \subseteq A^X = \{p \mid p : X \to A\},$$
$$Q(A) = Q = \bigcup\{Q_X \mid X \subseteq A\},$$
$$H_X(\mathbf{A}) = \{p \in A^X \mid \exists \bar{p} \in Hom(\langle X \rangle_{\mathbf{A}}, \mathbf{A}),\ \bar{p}|_X = p\}.$$

Zbiór X nazywamy *niezależnym względem rodziny odwzorowań* Q lub krótko *Q-niezależnym* ($X \in Ind(\mathbf{A}, Q)$), jeśli

$$Q \cap A^X \subseteq H_X(\mathbf{A})$$

lub równoważnie

$$(\forall p \in Q_X)\ (\forall n \leq card(X))\ (\forall f, g \in T^{(n)}(\mathbf{A}))\ (\forall a_1, \ldots, a_n \in X)$$
$$[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow f(p(a_1), \ldots, p(a_n)) =$$
$$g(p(a_1), \ldots, p(a_n))].$$

Przyjmując w miejsce Q różne rodziny odwzorowań, otrzymujemy wiele uprzednio zdefiniowanych pojęć niezależności.

Przykłady:

1) $Q = M = \bigcup\{A^X \mid X \subseteq A\}$, *M-niezależność* zdefiniowana przez E. Marczewskiego w [32], czasem nazywana niezależnością algebraiczną.

2) $Q = S = \bigcup\{\langle X\rangle_{\mathbf{A}}^{X} \mid X \subseteq A\}$, *S-niezależność* zdefiniowana przez J. Schmidta w [41] jako tak zwana *niezależność lokalna.*

3) $Q = S_0 = \bigcup\{X^X \mid X \subseteq A\}$, S_0-*niezależność* wprowadzona przez S. Świerczkowskiego w [44] pod nazwą *słabej niezależności.*

4) $Q = A_1 = \bigcup\{f|_X \mid f \in T^{(1)}(\mathbf{A}), X \subseteq A\}$, A_1-*niezależność* zdefiniowana przez K. Głazka w [18].

5) $Q = G = \bigcup\{p|_X \mid p \in A^A$ jest zmniejszające, $X \subseteq A\}$, *G-niezależność* wprowadzona przez G. Grätzera w [24] jako tak zwana *słaba niezależność*. Odwzorowanie p nazywamy *zmniejszającym*, jeśli
$$(\forall f, g \in T^{(1)}(\mathbf{A}))\ (\forall a \in A)\ [f(a) = g(a) \Rightarrow f(p(a)) = g(p(a))].$$

6) $Q = I = \bigcup\{p \mid p \in A^X$ różnowartościowe, $X \subseteq A\}$, *I-niezależność* wprowadzona przez K. Głazka w [18] jako *R-niezależność.*

Inny rodzaj niezależności, tak zwana *t-niezależność*, został zdefiniowany przez J. Płonkę i W. Poguntke w [39].

Zbiór $X \subseteq A$ nazywamy *t-niezależnym* w algebrze $\mathbf{A} = (A; F)$, jeśli dla każdych parami różnych elementów $a_1, ..., a_n \in X$ oraz każdego n-argumentowego działania termowego f nie będącego rzutowaniem, zachodzi $f(a_1, ..., a_n) \neq a_i$ dla wszystkich $i = 1, ..., n$. Przez $Ind_t(\mathbf{A})$ oznaczamy rodzinę wszystkich t-niezależnych zbiorów algebry $\mathbf{A}$.

Wiadomo (por. [18]), że $Ind(\mathbf{A}, M) \subseteq Ind_t(\mathbf{A})$ dla dowolnej algebry $\mathbf{A} = (A; F)$. Zatem istnieje pewna rodzina odwzorowań $Q(A)$ taka, że $Ind_t(\mathbf{A}) = Ind(\mathbf{A}, Q(A))$. Problem zdefiniowania w jednolity sposób takiej rodziny Q, że dla dowolnej algebry zachodzi $Ind_t(\mathbf{A}) = Ind(\mathbf{A}, Q)$, pozostaje nadal otwarty.

1.3. Własności pojęcia Q-niezależności

Następujące własności rodzin zbiorów Q-niezależnych w dowolnej algebrze $\mathbf{A} = (A; F)$ zostały podane w pracy K. Głazka [18]:

$$\begin{gathered} Ind(\mathbf{A}, M) \subseteq Ind(\mathbf{A}, Q) \text{ dla wszystkich } Q \subseteq M, \\ Ind(\mathbf{A}, S) \subseteq Ind(\mathbf{A}, S_0) \text{ oraz } Ind(\mathbf{A}, S) \subseteq Ind(\mathbf{A}, A_1), \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} (\forall a \in A)\ [\ \{a\} \in Ind(\mathbf{A}, S) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind(\mathbf{A}, A_1)\ ], \\ (\forall a \in A)\ [\ \{a\} \in Ind(\mathbf{A}, I) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind(\mathbf{A}, M)\ ], \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$(\forall a \in A)\ [\ \{a\} \in Ind(\mathbf{A}, S_0) \cup Ind(\mathbf{A}, G)\ ], \tag{1.3}$$

$$(\forall X \subseteq A)\ [\ X \in Ind(\mathbf{A}, G) \Leftrightarrow X \setminus T^{(0)}(\mathbf{A}) \in Ind(\mathbf{A}, G)\ ]. \tag{1.4}$$

Przedstawimy teraz związek między pewnymi rodzajami Q-niezależności w danej algebrze oraz jej reduktach.

Fakt 1. *Niech $\mathbf{A} = (A; F)$ będzie algebrą, $X \subseteq B \subseteq A$ oraz $F' \subseteq F$. Jeśli $\mathbf{B}' = (B; F')$ jest podalgebrą reduktu $(A; F')$ algebry $\mathbf{A}$, to*

$$X \in Ind(\mathbf{A}, S_0) \Rightarrow X \in Ind(\mathbf{B}', S_0). \tag{1.5}$$

Ponadto, jeśli $\mathbf{B} = (B; F)$ jest podalgebrą algebry $\mathbf{A}$, to

$$X \in Ind(\mathbf{A}, Q) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathbf{B}, Q) \quad \textit{dla} \quad Q = S, S_0 \textit{ lub } A_1. \tag{1.6}$$

Dowód Niech $X \subseteq B \subseteq A$ oraz $X \in Ind(\mathbf{A}, S_0)$. Weźmy dwa n-argumentowe działania termowe f_1, f_2 w redukcie (A, F') takie, że $f_1(a_1, ..., a_n) = f_2(a_1, ..., a_n)$ dla pewnych $a_1, ..., a_n \in X$, $n \in N$. Działaniom tym odpowiadają dwa termy, które mogą być również realizowane w algebrze $\mathbf{A}$ jako działania termowe $f_3, f_4 \in T^{(n)}(\mathbf{A})$. Zatem $f_3(a_1, ..., a_n) = f_1(a_1, ..., a_n) = f_2(a_1, ..., a_n) = f_4(a_1, ..., a_n)$. Z założenia mamy $f_3(p(a_1), ..., p(a_n)) = f_4(p(a_1), ..., p(a_n))$ dla dowolnego $p : X \to X$. Oczywiście $p(a_i) \in X \subseteq B$

$(i = 1, ..., n)$, co implikuje $f_1(p(a_1), ..., p(a_n)) = f_2(p(a_1), ..., p(a_n))$. W konsekwencji $X \in Ind(\mathbf{B}', S_0)$.

W przypadku, gdy $\mathbf{B}$ jest podalgebrą algebry $\mathbf{A}$, implikacja (1.5) zachodzi także dla S oraz A_1-niezależności, ponieważ dla dowolnego odwzorowania $q : X \to \langle X \rangle_{\mathbf{B}}$ lub $q = f_0|_X$ $(f_0 \in T^{(1)}(\mathbf{A}))$ mamy $q(a_i) \in B$.

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathbf{B}, Q)$ dla $Q = S, S_0$ lub A_1 oraz $f_5(b_1, ..., b_n) = f_6(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f_5, f_6 \in T^{(n)}(\mathbf{A})$, $a_1, ..., a_n \in X$. Ponieważ $\mathbf{B}$ jest podalgebrą, więc $f_i(a_1, ..., a_n) \in B$ oraz $f_i|_B \in T^{(n)}(\mathbf{B})$ dla $i = 5, 6$. Zatem dla dowolnego $p \in X^X$, $p \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}}^X = \langle X \rangle_{\mathbf{B}}^X$ lub $p = f_0|_X$, $f_0 \in T^{(1)}(\mathbf{A})$ otrzymujemy $f_5(p(a_1), ..., p(a_n)) = f_6(p(a_1), ..., p(a_n))$, co kończy dowód. ■

Rodzina zbiorów J jest *dziedziczna*, gdy dla każdego zbioru $X \subseteq A$ spełniony jest warunek $X \in J \Rightarrow (\forall\, Y \subseteq X)[Y \in J]$.

Rodzina $Ind(\mathbf{A}, Q)$ jest dziedziczna dla $Q = M, S, S_0, G, A_1$ oraz I. Własność dziedziczności posiada również rodzina zbiorów t-niezależnych.

Podamy teraz pojęcie rzędu elementu wprowadzone przez G. Grätzera w [24]. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą algebr podobnych, $\mathbf{A} = (A; F) \in \mathcal{K}$ oraz $a \in A$. Odwzorowanie $e_1^1 \mapsto a$ posiada jednoznaczne rozszerzenie do homomorfizmu h z algebry termów jednej zmiennej $T^{(1)}(\mathcal{K})$ klasy $\mathcal{K}$ w algebrę $\mathbf{A}$. Relację kongruencji indukowaną przez h (jądro homomorfizmu h) oznaczamy $O(a)$ i nazywamy *rzędem* elementu a. Element a nazywamy *beztorsyjnym*, jeśli $O(a) = \omega$ $(= \{(f, f) \mid f \in T^{(1)}(\mathcal{K})\})$.

Z rezultatu G. Grätzera przedstawionego w pracy [24] wynika, że

$$(\forall a \in X \subseteq A)\ [O(a) = \omega] \Rightarrow [X \in Ind(\mathbf{A}, G) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathbf{A}, M)]. \tag{1.7}$$

1.4. Retrakty a Q-niezależność

Podamy teraz pewne ogólne własności rodzin zbiorów Q-niezależnych dla algebr, w których wśród działań termowych występuje retrakcja.

Przypomnijmy, że odwzorowanie g nazywamy *retrakcją* algebry $\mathbf{A} = (A; F)$, gdy $g \in End(\mathbf{A})$ oraz $g(g(x)) = g(x)$ dla każdego $x \in A$. Zbiór $g(A)$ nazywamy *retraktem* algebry $\mathbf{A}$. Oczywiście $g(\mathbf{A}) = (g(A); F)$ jest podalgebrą algebry $\mathbf{A}$. Klasę abstrakcji kongruencji indukowanej przez g jednoznacznie wyznaczoną przez dowolny element a należący do retraktu oznaczmy przez

$$F_a = \{x \in A \mid g(x) = g(a) = a\}.$$

Jeśli $Q = G$ lub A_1, to

$$(\forall X \subseteq A)\ (\forall a \in X \cap g(A))\ (\forall p \in Q_X)\ [p(a) \in g(A)]. \tag{1.8}$$

Zauważmy, że w przypadku rodzin S i S_0 własność (1.8) zachodzi, gdy $X \subseteq g(A)$.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Jeśli w algebrze $\mathbf{A} = (A; F)$ istnieje istotnie unarne działanie termowe $g \neq e_1^1$ będące retrakcją, to*

(a) $(\forall a \in A)\ [a \in g(A) \Rightarrow \{a\} \notin Ind(\mathbf{A}, I) \cup Ind_t(\mathbf{A})]$*;*

(b) $(\forall X \subseteq A)\ [X \in Ind(\mathbf{A}, Q) \Rightarrow g(X) \in Ind(g(\mathbf{A}), Q)]$ *dla* $Q = M$ *lub* A_1*;*

(c) $(\forall X \subseteq g(A))\ [X \in Ind(g(\mathbf{A}), Q) \Rightarrow X \in Ind(\mathbf{A}, Q)]$ *dla* $Q = A_1, S, S_0$ *lub* G*;*

(d) $(\forall a, b \in A)\ [g(a) = g(b) \Rightarrow \{a, b\} \notin Ind(\mathbf{A}, I)]$*;*

(e) $(\forall a, b, c \in A)\ [g(a) = g(b) \neq g(c) \Rightarrow \{a, b, c\} \notin Ind(\mathbf{A}, S_0)]$*;*

(f) $(\forall X \subseteq A)\ [X \in Ind(\mathbf{A}, S_0) \Rightarrow [X \cap g(A) = \emptyset \vee X \subseteq g(A)]]$.

Dowód

(a) Przypuśćmy, że $a \in g(A)$. Wówczas $e_1^1(a) = a = g(a)$. Zgodnie z założeniem $e_1^1 \neq g \in T^{(1)}(\mathbf{A})$, a stąd $\{a\} \notin Ind(\mathbf{A}, M)$. Wobec własności (1.2), mamy również $\{a\} \notin Ind(\mathbf{A}, I)$, natomiast z definicji t-niezależności wynika, że $\{a\} \notin Ind_t(\mathbf{A})$.

(b) Niech $f_1(a_1, ..., a_n) = f_2(a_1, ..., a_n)$ dla pewnych $f_1, f_2 \in T^{(n)}(\mathbf{A})$, $a_1, ..., a_n \in g(X)$. Oczywiście $a_i = g(b_i)$ $(i = 1, .., n)$ dla pewnych $b_1, ..., b_n \in X$. Zatem $f_1(g(b_1), ..., g(b_n)) = f_2(g(b_1), ..., g(b_n))$, a stąd $g(f_1(b_1, ..., b_n)) = g(f_2(b_1, ..., b_n))$ oraz $\hat{g}(f_1), \hat{g}(f_2) \in T^{(n)}(\mathbf{A})$.

Jeśli przyjmiemy, że $X \in Ind(\mathbf{A}, M)$, to $\hat{g}(f_1) = \hat{g}(f_2)$ w algebrze $\mathbf{A}$. Zatem $\hat{g}(f_1)(c_1, ..., c_n) = \hat{g}(f_2)(c_1, ..., c_n)$ dla dowolnych $c_1, ..., c_n \in g(A)$. Ponieważ $c_i = g(c_i)$ $(i = 1, .., n)$, więc $f_1(c_1, ..., c_n) = f_2(c_1, ..., c_n)$, czyli $f_1 = f_2$ w $g(\mathbf{A})$. Wobec tego $g(X) \in Ind(g(\mathbf{A}), M)$.

Zakładając, że $X \in Ind(\mathbf{A}, A_1)$ otrzymujemy $g(f_1(p(a_1), ..., p(a_n))) =$ $= g(f_2(p(a_1), ..., p(a_n)))$ dla każdego $p = f_0|_X$, $f_0 \in T^{(1)}(\mathbf{A})$. Zatem $f_1(g(p(a_1)), ..., g(p(a_n))) = f_1(p(g(a_1)), ..., p(g(a_n))) = f_1(p(b_1), ..., p(b_n)) =$ $=f_2(p(b_1), ..., p(b_n))$, w konsekwencji $g(X) \in Ind(g(\mathbf{A}), A_1)$.

(c) Załóżmy teraz, że $g(A) \supseteq X \in Ind(g(\mathbf{A}), Q)$ dla $Q = A_1, S, S_0$ lub G oraz $p \in Q \cap A^X$. Zgodnie z własnością (1.8) mamy $p : X \to g(A)$. Ponadto g jest retrakcją, więc $\langle X \rangle_{\mathbf{A}} = \langle X \rangle_{\mathbf{g(A)}}$. Zatem, z założenia, odwzorowanie p można rozszerzyć do homomorfizmu $\bar{p} : \langle X \rangle_{\mathbf{A}} \to g(A) \subseteq A$. A stąd $X \in Ind(\mathbf{A}, Q)$.

(d) Przyjmijmy, że $g(a) = g(b)$. Zdefiniujmy dwa binarne działania termowe $f_3(x, y) = g(x)$ i $f_4(x, y) = g(y)$. Ponieważ, z założenia, g nie jest działaniem stałym, wobec tego $g(c) \neq g(a)$ dla pewnego $c \in A$. Rozważmy różnowartościowe odwzorowanie $p_1 : \{a, b\} \to A$ zdefiniowane przez równości $p_1(a) = a$, $p_1(b) = c$. Mamy zatem $f_3(a, b) = g(a) = g(b) = f_4(a, b)$, a także $f_3(p_1(a), p_1(b)) = g(p_1(a)) = g(a) \neq g(c) = g(p_1(b)) = f_4(p_1(a), p_1(b))$. Oznacza to, że $\{a, b\} \notin Ind(\mathbf{A}, I)$.

(e) Niech $g(a) = g(b) \neq g(c)$. Rozważmy następujące działania termowe $f_5(x, y, z) = g(x)$, $f_6(x, y, z) = g(y)$ oraz odwzorowanie $p_2 : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ takie, że $p_2(a) = a, p_2(b) = p_2(c) = c$. Otrzymujemy wówczas $f_5(a, b, c) = g(a) = g(b) = f_6(a, b, c)$. Lecz $f_5(p_2(a), p_2(b), p_2(c)) = g(p_2(a)) = g(a) \neq g(c) = g(p_2(b)) = f_6(p_2(a), p_2(b), p_2(c))$, a w konsekwencji $\{a, b, c\} \notin Ind(\mathbf{A}, S_0)$.

(f) Załóżmy, że $X \in Ind(\mathbf{A}, S_0)$ oraz $a \in X \cap g(A)$, $b \in X$. Rozważmy działania termowe $f_3(x, y) = g(x)$, $e_1^2(x, y) = x$ (oczywiście $f_3 \neq e_1^2$) oraz odwzorowanie $p_3 : X \to X$ dane wzorem $p(x) = b$. Oczywiście $f_3(a, b) = g(a) = a = e_1^2(a, b)$. Z S_0-niezależności otrzymujemy

$f_3(p_3(a), p_3(b)) = e_1^2(p_3(a), p_3(b))$. Stąd $f_3(b, b) = e_1^2(b, b)$, co implikuje $g(b) = b$. Zatem $b \in g(A)$, czyli $X \subseteq g(A)$. ■

Rozdział 2

Q-niezależność w algebrach Stone'a

2.1. Podstawowe pojęcia i fakty dotyczące algebr Stone'a

Dla dowolnej kraty $(L; \vee, \wedge)$ z najmniejszym elementem $\mathbf{0}$ (lub ogólniej $\wedge$-półkraty z zerem) można zdefiniować pseudodopełnienie elementu $a \in L$ jako największy element a^* spełniający równość

$$a \wedge a^* = \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

czyli element taki, że

$$(\forall x \in L)\ [a \wedge x = \mathbf{0} \Leftrightarrow x \leq a^*]. \tag{2.2}$$

Kratę (lub odpowiednio $\wedge$-półkratę) nazywamy kratą (lub półkratą) z pseudodopełnieniem, gdy każdy jej element ma pseudodopełnienie. Z definicji pseudodopełnienia wynika, że są one określone jednoznacznie. Zatem przyporządkowanie $x \mapsto x^*$ można traktować jako działanie podstawowe, a algebrę $(L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ z dwoma działaniami binarnymi, jednym unarnym i z dwoma stałymi (traktowanymi jako działania zero-argumentowe) nazywamy *algebrą pseudokomplementarną* (lub *p-algebrą*).

Po raz pierwszy kraty i półkraty z pseudopełnieniami rozważał V. Glivenko w 1929 roku w pracy [15], a następnie G. Birkhoff w 1933 roku w pracy [3]. Dalszy rozwój teorii takich algebr był wynikiem rozwiązania w 1957 roku przez G. Grätzera i E. T. Schmidta w pracy [27] problemu postawionego przez M. H. Stone'a (por. G. Birkhoff [2], Problem 70).

Dystrybutywne algebry pseudokomplementarne tworzą ważne klasy algebr równościowo definiowalnych. Dystrybutywna krata algebraiczna, krata ideałów dystrybutywnej kraty z zerem, krata kongruencji dowolnej kraty, algebra Boole'a są przykładami p-algebr.

Rozważając dystrybutywną p-algebrę $(L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ spełniającą warunek

$$x^* \vee x^{**} = \mathbf{1} \text{ (dla wszystkich } x \in L) \tag{2.3}$$

otrzymujemy uogólnienie algebry Boole'a zwane *algebrą Stone'a*.

W 1970 roku K. B. Lee udowodnił, że klasy równościowe p-algebr dystrybutywnych tworzą łańcuch, którego najmniejszym, nietrywialnym elementem jest klasa algebr Boole'a, a kolejnym klasa algebr Stone'a. Jest ona równościowo definiowana przez równości definiujące klasę dystrybutywnych krat ograniczonych, równość (2.3) oraz

$$x \wedge x^{**} = x, \tag{2.4}$$

$$x^* \vee x^{**} = \mathbf{1}. \tag{2.5}$$

W latach późniejszych algebry Stone'a z ograniczonym zbiorem gęstym znalazły szereg zastosowań, między innymi w badaniu algebr zdarzeń warunkowych (por. [13]) oraz zbiorów przybliżonych (por. [30], [40]).

Szczególnie pomocnym narzędziem do badania struktury algebr Stone'a jest trójkowa reprezentacja przedstawiona przez C. C. Chena oraz G. Grätzera w [6].

W strukturze tej ważną rolę spełnia zbiór *gęsty*:

$$D(L) = \{x \in L \mid x^* = \mathbf{0}\}$$

oraz *szkielet*

$$S(L) = \{x \in L \mid x^{**} = x\}$$

nazywany czasem centrum algebry i oznaczany przez $C(L)$ lub $B(L)$. Algebra $\mathbf{S}(\mathbf{L}) =(S(L); \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ jest podalgebrą algebry Stone'a, będącą również algebrą Boole'a. $\mathbf{D}(\mathbf{L}) = (D(L); \vee, \wedge, \mathbf{1})$ jest kratą dystrybutywną z największym elementem $\mathbf{1}$. $D(L)$ jest filtrem kraty $\mathcal{L}$.

Niech $\mathbf{F}(D(L))$ oznacza rodzinę wszystkich filtrów kraty $\mathbf{D}(\mathbf{L})$. Związek między $S(L)$ i $D(L)$ określony jest przez homomorfizm $\varphi_L : S(L) \to \mathbf{F}(D(L))$ zdefiniowany $\varphi_L(a) = \{x \in D(L) \mid x \geq a^*\}$. Trójka $(S(L), D(L), \varphi_L)$ charakteryzuje algebrę Stone'a z dokładnością do izomorfizmu.

Łatwo zauważyć, że działanie termowe $g(x) = x^{**}$ jest retrakcją algebry $\mathbf{L}$, a $S(L) = g(L)$ jej retraktem. Jądro tego homomorfizmu oznaczamy przez θ i nazywamy *kongruencją Glivenki*:

$$(x, y) \in \theta \Leftrightarrow x^* = y^* (\Leftrightarrow x^{**} = y^{**}). \tag{2.6}$$

Wiadomo, że L/θ jest algebrą izomorficzną z $S(L)$ oraz $[\mathbf{1}]_\theta = D(L)$. Każda θ-klasa zawiera dokładnie jeden element z $S(L)$, który jest największym elementem w danej klasie. Dla $a \in S(L)$, zdefiniujmy zbiór $[a]_\theta = F_a = \{x \in L \mid x^{**} = a\}$. Wówczas $\mathbf{F_a} = (F_a; \vee, \wedge, a)$ jest kratą dystrybutywną z największym elementem a. Jest to podkrata kraty dystrybutywnej z jednością $\mathbf{L}_1 = (L; \vee, \wedge, \mathbf{1})$. Zdefiniujmy funkcję $\phi : L \to D(L)$ następująco:

$$\phi(x) = x \vee x^*. \tag{2.7}$$

Wówczas $\phi|_{F_a}$ jest izomorfizmem kratowym $\mathbf{F_a}$ na $\varphi_L(a)$ dla każdego $a \in S(L)$. Mamy zatem:

$$\phi(x) = \mathbf{1} \Leftrightarrow x \in S(L). \tag{2.8}$$

Korzystając z faktu, iż wśród działań termowych algebry Stone'a występuje retrakcja, możemy do badania zbiorów Q-niezależnych w tej algebrze zastosować fakt 1 i twierdzenie 1. W tym celu opiszemy najpierw rodziny zbiorów Q-niezależnych w kratach dystrybutywnych oraz algebrach Boole'a.

2.2. Q-niezależność w kratach dystrybutywnych

Przypomnijmy (por. [35] i [33]) opis działań termowych w kratach dystrybutywnych. Niech $\mathbf{L}_D = (L; \vee, \wedge)$ będzie kratą dystrybutywną. Dla każdego n-argumentowego działania termowego f algebry $\mathbf{L}_D$ istnieje dokładnie jedna rodzina P podzbiorów zbioru $\{1, ..., n\}$ nieporównywalnych ze względu na inkluzję zbiorów taka, że

$$f(x_1, ..., x_n) := \tilde{f}_P(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{U \in P} \bigwedge_{j \in U} x_j. \tag{2.9}$$

Rezultaty otrzymane przez G. Szásza oraz E. Marczewskiego (por. [43] i [35]) dają opis M-niezależności w kratach dystrybutywnych.

Twierdzenie 2. *Niech $(L; \vee, \wedge)$ będzie kratą dystrybutywną. Wówczas $X \subseteq L$ jest M-niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$c_1 \wedge ... \wedge c_m \nleq d_1 \vee ... \vee d_n \tag{2.10}$$

dla każdych parami różnych $c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n \in X$. $\square$

Korzystając z powyższego twierdzenia otrzymujemy:

Twierdzenie 3. *Niech $\mathbf{L}_D = (L; \vee, \wedge)$ będzie kratą dystrybutywną (bez stałych). Wówczas*

$$Ind(\mathbf{L}_D, M) = Ind(\mathbf{L}_D, Q), \text{ gdzie } Q = S, S_0, G, I.$$

Dowód Na mocy (1.1) wystarczy udowodnić inkluzję $\supseteq$. W tym celu przypuśćmy, że $X \notin Ind(\mathbf{L}_D, M)$. Korzystając z twierdzenia 2 otrzymujemy $c_1 \wedge ... \wedge c_m \leq d_1 \vee ... \vee d_n$ dla pewnych, parami różnych $c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n \in X$. Zatem mamy $(c_1 \wedge ... \wedge c_m) \wedge (d_1 \vee ... \vee d_n) = c_1 \wedge ... \wedge c_m$. Rozważmy następujące działania termowe: $f(x_1, ..., x_{m+n}) = (x_1 \wedge ... \wedge x_m) \wedge (x_{m+1} \vee ... \vee x_{m+n})$ oraz $g(x_1, ..., x_{m+n}) = x_1 \wedge ... \wedge x_m$.

Na początek załóżmy, że $X \in Ind(\mathbf{L}_D, S_0)$ oraz rozważmy odwzorowanie $p : X \to X$ zdefiniowane następująco:

$$p(x) = \begin{cases} c_1 & \text{dla } x = c_i \ (i = 1, ..., m); \\ d_1 & \text{dla } x = d_j \ (j = 1, ..., n); \\ x & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę definicję działań f i g mamy $f(c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n) = g(c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n)$ oraz, na mocy S_0-niezależności,
$f(p(c_1), ..., p(c_m), p(d_1), ..., p(d_n)) = g(p(c_1), ..., p(c_n), p(d_1), ..., p(d_n))$.
Stąd $c_1 \wedge d_1 = c_1$. Przyjmijmy teraz $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1$ oraz $p_1(c_1) = d_1$, $p_1(d_1) = c_1$, $p_1(x) = x$ dla $x \neq c_1, d_1$. Wówczas mamy $f_1(c_1, d_1) = g_1(c_1, d_1)$ oraz $f_1(p(c_1), p(d_1)) = g_1(p(c_1), p(d_1))$. Zatem $d_1 \wedge c_1 = d_1$, a w konsekwencji $c_1 = d_1$, sprzeczność. Reasumując

$Ind(\mathbf{L}_D, M) = Ind(\mathbf{L}_D, S_0)$ oraz $Ind(\mathbf{L}_D, M) = Ind(\mathbf{L}_D, S)$, dzięki własności (1.1).

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathbf{L}_D, I)$. Rozważmy odwzorowanie $p : X \to L$ dane wzorami:
$p_2(c_i) = \begin{cases} c_1 \vee ... \vee c_m & \text{dla } i = 1, \\ c_i & \text{dla } i \neq 1, \end{cases}$ $p_2(d_j) = \begin{cases} d_1 \wedge ... \wedge d_n & \text{dla } i = 1, \\ d_j & \text{dla } i \neq 1, \end{cases}$,
$p_2(x) = x$ dla $x \neq c_i, d_j$; $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. Łatwo wykazać, że odwzorowanie to na zbiorze I-niezależnym jest różnowartościowe. Dla działań uprzednio zdefiniowanych mamy zatem
$f(p_2(c_1), ..., p_2(c_m), p_2(d_1), ..., p_2(d_n)) = g(p_2(c_1), ..., p_2(c_n), p_2(d_1), ...,$ $p_2(d_n))$. Co prowadzi do $(c_2 \wedge ... \wedge c_m) \wedge (d_2 \vee ... \vee d_n) = c_2 \wedge ... \wedge c_m$. Po k liczbie podobnych kroków ($k = max\{m, n\}$) uzyskamy $c_m \wedge d_n = c_m$. Wykorzystując różnowartościowe odwzorowanie p_3 zdefiniowane następująco: $p_3(c_m) = d_n$, $p_3(d_n) = c_m$, $p_3(x) = x$ dla $x \neq c_m, d_n$, otrzymamy $c_m = d_n$, wbrew założeniu.

Ponieważ w algebrze $\mathbf{L}_D$ nie ma elementów M-samozależnych, mamy również $Ind(\mathbf{L}_D, M) = Ind(\mathbf{L}_D, G)$ (por. [18]). ■

Oczywiście $Ind(\mathbf{L}_D, A_1) = 2^L$, ponieważ w kracie dystrybutywnej jedynym działaniem jednoargumentowych jest działanie tożsamościowe.

Badaniem t-niezależności w kratach dystrybutywnych zajmowali się J.Płonka i W. Poguntke w pracy [39].

Twierdzenie 4. *Niech* $\mathbf{L}_D = (L; \vee, \wedge)$ *będzie kratą dystrybutywną. Wówczas zbiór* $X \subseteq L$ *jest* t*-niezależny w* $\mathbf{L}_D$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych parami różnych* $a_1, ..., a_n \in X$ *zachodzi:*

$$a_1 \not\leq a_1 \vee ... \vee a_n \text{ oraz } a_1 \wedge ... \wedge a_n \not\leq a_1.$$

□

Z powyższego twierdzenia wynika, że rodziny zbiorów M-niezależnych i t-niezależnych w kratach dystrybutywnych nie pokrywają się.

W algebrach Stone'a każda θ-klasa jest kratą dystrybutywną z elementem maksymalnym, sformułujmy zatem następujący wniosek z twierdzenia 2 oraz 3:

Wniosek 1. *Niech* $\mathbf{L}_c = (L; \vee, \wedge, c)$ $(c = \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie kratą dystrybutywną z największym elementem* $\mathbf{1}$ *lub najmniejszym elementem* $\mathbf{0}$*. Jeśli* $X \subseteq L$*, to dla* $Q = M, S$ *lub* I *następujące warunki są równoważne:*

(α) $X \in Ind(\mathbf{L}_c, Q)$ *lub* $X = \{c\}$*;*

(β) $X \in Ind(\mathbf{L}_c, S_0)$*;*

(γ) $X \setminus \{c\} \in Ind(\mathbf{L}_c, G)$*;*

(δ) $c_1 \wedge ... \wedge c_m \nleq d_1 \vee ... \vee d_n$ *dla każdych* $c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n$ *parami różnych elementów zbioru* X*.*

2.3. Q-niezależność w algebrach Boole'a

Przypomnijmy opis działań termowych w algebrach Boole'a. Niech $x^0 = x$, $x^1 = x^*$. W algebrze Boole'a $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ zdefiniujmy *atom ze względu na elementy* $x_1, ..., x_n \in B$ indeksowany ciągiem $(i_1, ..., i_n)$, gdzie $i_k \in \{0, 1\}$ $(k = 1, ..., n;\ n \in N)$, następująco:

$$A_{(i_1,...,i_n)}(x_1, ..., x_n) := \bigwedge_{k=1}^{n} x_k^{i_k}.$$

E. Marczewski w pracy [33] udowodnił, że działania postaci

$$A_J(x_1, ...x_n) = \bigvee_{(i_1,...,i_n)\in J} A_{(i_1,...,i_n)}(x_1, ..., x_n),$$

dla dowolnej rodziny $J \subseteq \{0, 1\}^n$ $(A_\emptyset(x_1, ..., x_n) = \mathbf{0})$ tworzą zbiór wszystkich n-arnych działań termowych algebry $\mathbf{B}$.

E. Marczewski zbadał również M-niezależność w algebrze Boole'a (por. [33]). Przypomnijmy ten rezultat.

Twierdzenie 5. *Niech* $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Boole'a oraz* $X \subseteq B$. *Wówczas* $X \in Ind(\mathbf{B}, M)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_{(i_1,...,i_n)}(a_1, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$$

dla każdego $(i_1, ..., i_n) \in \{0, 1\}^n$ *i każdych parami różnych* $a_1, ..., a_n \in X$. □

Dla tych algebr zbadane zostały również inne rodzaje niezależności (K. Głazek, [18]). W algebrze Boole'a $\mathbf{B}$ mamy następujące opisy rodzin zbiorów Q-niezależnych:

$$Ind(\mathbf{B}, M) = Ind(\mathbf{B}, S) = Ind(\mathbf{B}, S_0) \setminus \{\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{1}\}\} = Ind(\mathbf{B}, I) \text{ oraz}$$

$$X \in Ind(\mathbf{B}, G) \Leftrightarrow X \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \in Ind(\mathbf{B}, M).$$

Ponadto K. Golema-Hartman w [22] udowodniła, że:

$$X \in Ind_t(\mathbf{B}) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathbf{B}, M).$$

Przypomnijmy również opis A_1-niezależności (K. Głazek, [18]).

Twierdzenie 6. *Niech* $\mathbf{B} = (B; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Boole'a oraz* $X \subseteq B$. *Wówczas* $X \in Ind(\mathbf{B}, A_1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych* $a_1, ..., a_n \in X$ *spełnione są następujące warunki:*

(α) $A_{(0,0,...,0)}(a_1, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$;

(β) $A_{(i_1,...,i_n)}(a_1, ..., a_n) = \mathbf{0} \Rightarrow A_{(1-i_1,...,1-i_n)}(a_1, ..., a_n) = \mathbf{0}$. □

2.4. Q-niezależność w algebrach Stone'a dla zbiorów jedno- i dwuelementowych

Wszystkie omawiane przez nas rodziny zbiorów niezależnych są dziedziczne, zatem badanie zbiorów niezależnych rozpoczniemy od zbiorów jednoelementowych.

Odnotujmy najpierw, że $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ są jedynymi nularnymi, natomiast x, x^*, x^{**}, $x \vee x^*$ są jedynymi unarnymi działaniami termowymi w algebrze Stone'a. Mamy zatem

Lemat 1. *Wszystkie unarne równości w algebrze Stone'a można zredukować do czterech następujących typów:*

$$x = \mathbf{0},\ x = \mathbf{1},\ x^* = \mathbf{0}\ \ i\ \ x^{**} = x.$$

Dowód Rozważmy następujące cztery grupy równości:
(a) $x = \mathbf{0},\ x^* = \mathbf{1},\ x^{**} = \mathbf{0},\ x^* = x \vee x^*$;
(b) $x = \mathbf{1},\ x^{**} = x \vee x^*$;
(c) $x^* = \mathbf{0},\ x^{**} = \mathbf{1},\ x = x \vee x^*$;
(d) $x^{**} = x,\ \mathbf{1} = x \vee x^*$.
Łatwo wykazać, że równości każdej z tych grup są między sobą równoważne. Równości z grup (a), (b) są spełnione jedynie przez elementy, odpowiednio, $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Natomiast równości z grupy (c) są spełnione tylko przez elementy zbioru $D(L)$, a z grupy (d) tylko przez elementy $S(L)$. ∎

Z lematu 1 wynika natychmiast następujący wniosek:

Wniosek 2. *Niech* $(L; \vee, \wedge,^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a. Odwzorowanie* $p : X \to L$ $(X \subseteq L)$ *jest odwzorowaniem zmniejszającym wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje stałe oraz zbiory* $S(L)$ *i* $D(L)$ *(czyli* $p(S(L)) \subseteq S(L)$ *i* $p(D(L)) \subseteq D(L)$*).*

Fakt 2. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge,^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $a \in L$. *Wówczas:*

(i) $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, M) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup S(L)$;
(ii) $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, S) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$;
(iii) $\{a\} \in Ind_t(\mathbf{L}) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup S(L)$.

Dowód
(i) Niech $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, M)$. Załóżmy, nie wprost, że $a \in D(L)$. Rozważmy unarne działania termowe: $f(x) = x^*$ i $g(x) = \mathbf{0}$. Zatem $f(a) = a^* = \mathbf{0} = g(a)$ oraz $f(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$, z czego wynika, że $f \neq g$ w $\mathbf{L}$, wbrew założeniu. Stąd $a \notin D(L)$. Ponadto, z twierdzenia 1(a) otrzymujemy $a \notin S(L)$.

Przypuśćmy teraz, że $a \notin D(L) \cup S(L)$. Z lematu 1 wynika wówczas $f(a) \neq g(a)$ dla każdej pary różnych $f, g \in T^{(1)}(\mathbf{L})$. W konsekwencji $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, M)$.

(ii) Załóżmy, że $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, S)$ oraz $a \in D(L)$. Rozważmy działania f, g zdefiniowane powyżej oraz odwzorowanie $p : \{a\} \to \langle a \rangle_{\mathbf{L}}$, dane wzorem $p(x) = x^*$. Wówczas $f(a) = g(a)$, a stąd $f(p(a)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{1} \neq \mathbf{0} = g(p(a))$, co prowadzi do sprzeczności. W analogiczny sposób można udowodnić, że $a \neq \mathbf{0}$.

Dla wykazania implikacji przeciwnej weźmy $a \notin D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$. Jeśli, dodatkowo, $a \notin S(L)$, to $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, M) \subseteq Ind(\mathbf{L}, S)$, na mocy faktu 2(i) oraz własności (1.1). Zatem wystarczy rozważyć $a \in S(L) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Załóżmy, że $f(a) = g(a)$ dla pewnych $f, g \in T^{(1)}(\mathbf{L})$ oraz $q : \{a\} \to \langle a \rangle_{\mathbf{L}}$. Skoro $S(L)$ jest podalgebrą $\mathbf{L}$, to $q(a) \in \langle a \rangle_{\mathbf{L}} \subseteq S(L)$. Biorąc pod uwagę lemat 1, otrzymamy $f(p(a)) = g(p(a))$. Zatem $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, S)$.

(iii) Niech $\{a\} \in Ind_t(\mathbf{L})$. Z twierdzenia 1(a) wynika, że $a \notin S(L)$. Przypuśćmy zatem, że $a \in D(L)$. Wówczas $a^* = \mathbf{0}$, co implikuje $a \vee a^* = a$. Rozważając działanie termowe $\phi(x) = x \vee x^*$ otrzymamy $\phi(a) = a$ (ϕ nie jest rzutowaniem), wbrew założeniu.

Weźmy teraz $a \notin D(L) \cup S(L)$. Z lematu 1 wynika natychmiast $f(a) \neq a$. Stąd $\{a\} \in Ind_t(\mathbf{L})$.

■

Na podstawie faktu 2 oraz własności (1.2) i (1.3) otrzymujemy:

Wniosek 3. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $a \in L$. *Wówczas:*

(iv) $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, A_1) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$;
(v) $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, I) \Leftrightarrow a \notin D(L) \cup S(L)$;
(vi) $\{a\} \in Ind(\mathbf{L}, S_0) \cup Ind(\mathbf{A}, G)$.

Fakt 3. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* b_1, b_2 *będą różnymi elementami zbioru* F_a *dla pewnego* $a \in S(L)$. *Wtedy* $\{b_1, b_2\} \notin Ind_t(\mathbf{L}) \cup Ind(\mathbf{L}, Q)$, *gdzie* $Q = M, I$ *lub* S. *Jeśli dodatkowo* $a \neq \mathbf{1}$, *to* $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathbf{L}, G)$.

Dowód Przypuśćmy, że $b_1, b_2 \in F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$. Przypomnijmy, że działanie termowe $g(x) = x^{**}$ jest retrakcją algebry $\mathbf{L}$. Oczywiście $g(b_1) = g(b_2)$. Zatem, z twierdzenia 1(d) wynika, że $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathbf{L}, I) \cup Ind(\mathbf{L}, M)$.

Rozważmy dwa działania termowe $f_1(x, y) = x^{**}$ i $f_2(x, y) = y^{**}$ oraz odwzorowanie $p : \{b_1, b_2\} \to \langle b_1, b_2 \rangle_{\mathbf{L}}$ takie, że $p(b_1) = \mathbf{1}, p(b_2) = \mathbf{0}$. Zatem $f_1(b_1, b_2) = a = f_2(b_1, b_2)$, a także $f_1(p(b_1), p(b_2)) = f_1(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{1} \neq \mathbf{0} = f_2(p(b_1), p(b_2))$. Stąd $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathbf{L}, S)$.

Przypuśćmy teraz, że $a \neq \mathbf{1}$. Oczywiście, $a \neq \mathbf{0}$. Czyli p jest odwzorowaniem zmniejszającym na mocy wniosku 2, a w konsekwencji $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathbf{L}, G)$.

Aby udowodnić, że $\{b_1, b_2\} \notin Ind_t(\mathbf{L})$, rozważmy działanie $f_3(x, y) = x \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*)$. Istotnie, mamy wówczas $f_3(b_1, b_2) = b_1$ oraz $f_3(a_1, a_2) = a_1 \vee a_2$ dla dowolnych $a_1, a_2 \in S(L)$ (czyli f_3 nie jest rzutowaniem). ■

Z faktu 2 wynika, że badając zbiory M, S, I oraz t-niezależne należy rozważać zbiory, których elementy należą do różnych klas abstrakcji kongruencji Glivenki θ. W przypadku S_0 i A_1-niezależności należy dodatkowo analizować podzbiory dowolnej θ-klasy, a w przypadku G- niezależności podzbiory zbioru gęstego $D(L) = F_1$.

Z twierdzenia 1(e) wynika ponadto, że jeśli zbiór S_0-niezależny nie zawiera się w pewnej θ-klasie, to każde dwa jego elementy muszą należeć do różnych klas abstrakcji wspomnianej kongruencji. Natomiast z twierdzenia 1(f) wiemy, że zbiory S i S_0-niezależne muszą być podzbiorami szkieletu $S(L)$ lub być z nim rozłączne.

2.5. Niezależne podzbiory F_a

Zajmiemy się teraz związkiem pomiędzy S_0 i A_1-niezależnością w algebrze Stone'a a niezależnością w danej θ-klasie $\mathbf{F_a}$ będącej kratą dystrybutywną z największym elementem a.

Podobnie jak w algebrze Boole'a, w algebrze Stone'a można zdefiniować:

$$A_J(x_1, ...x_n) = \bigvee\{x_1^{i_1} \wedge ... \wedge x_n^{i_n} \mid (i_1, ..., i_n) \in J\}$$

dla niepustej rodziny $J \subseteq \{0, 1, 2\}^n$, gdzie $x^0 = x,\ x^1 = x^*,\ x^2 = x^{**}$ oraz $A_\emptyset(x_1, ...x_n) = \mathbf{0}$.

Działania termowe w algebrze Stone'a opisali K. Głazek, T. Hecht i T. Katriňák w [20].

Twierdzenie 7. *Dla każdego n-argumentowego działania termowego f w algebrze Stone'a $(L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ istnieje rodzina $J \subseteq \{0, 1, 2\}^n$ taka, że*

$$f(x_1, ..., x_n) = A_J(x_1, ...x_n).$$

□

W odróżnieniu od analogicznej reprezentacji działań termowych w algebrze Boole'a rodzina J w przypadku algebr Stone'a nie jest jednoznacznie określona.

Podamy teraz kilka własności działań termowych w algebrze Stone'a, a w szczególności w klasie abstrakcji F_a.

Lemat 2. *Niech $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będzie algebrą Stone'a, $x \in L$ oraz $b_1, ..., b_n \in F_a$ dla pewnego $a \in S(L)$. Wówczas:*

(a) $(\forall k \in \{1, ..., n\})\ [\ (i_k = 1) \Rightarrow\ A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = a^*$ *oraz* $A_{(i_1,...,i_n)}(x, ..., x) = x^*\ ]$;

(b) $(\forall k \in \{1, ..., n\})\ [\ (i_k \neq 1) \Rightarrow\ A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) \in F_a$ *oraz* $(\forall c \in S(L))(A_{(i_1,...,i_n)}(c, ..., c) = c)\ ]$;

(c) $(\exists k, l \in \{1, ..., n\})\ [\ (i_k = 1 \wedge i_l \neq 1) \Rightarrow A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0} = = A_{(i_1,...,i_n)}(x, ..., x)]$.

Dowód

(a) Dla każdego $k \in \{1, ..., n\}$ mamy $(b_k)^1 = (b_k)^* = a^*$. Zatem $A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = b_1^{i_1} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = a^*$. Podobnie $A_{(1,...,1)}(x, ..., x) = x^*$.

(b) W tym przypadku mamy $(b_k)^0 = b_k \in F_a$ lub $(b_k)^2 = (b_k)^{**} = a \in F_a$ dla wszystkich $k \in \{1, ..., n\}$. Stąd $b_1^{i_1} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} \in F_a$. Ponieważ $c^{**} = c$, więc otrzymujemy $A_{(i_1,...,i_n)}(c, ..., c) = c$.

(c) Niech $i_k = 1$, $i_l = 2$ dla pewnych $k, l \in \{1, ..., n\}$ (weźmy $k < l$). Wówczas $A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = b_1^{i_1} \wedge ... \wedge b_k^{i_k} \wedge ... \wedge b_l^{i_l} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} =$ $= b_1^{i_1} \wedge ... \wedge a^* \wedge ... \wedge a \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}$. Dowód dla $i_k = 1$ i $i_l = 0$ przebiega analogicznie. Oczywiście $x^* \wedge x = x^* \wedge x^{**} = \mathbf{0}$, czyli $A_{(i_1,...,i_n)}(x, ..., x) = \mathbf{0}$. ■

Z twierdzenia 7 i lematu 2 otrzymujemy:

Wniosek 4. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a,* $b_1, ..., b_n \in F_a$ *dla pewnego* $a \in S(L)$ *oraz* $f \in T^{(n)}(\mathbf{L})$. *Wówczas* $f(b_1, ..., b_n) \in F_a \cup \varphi_L(a) \cup \{\mathbf{0}, a^*\}$. *Jeśli, dodatkowo,* $a \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$, *to* $F_a \cap \varphi_L(a) \cap \{\mathbf{0}, a^*\} = \emptyset$.

W kolejnych rozważaniach użyteczna będzie pewna zredukowana postać działań termowych w algebrach Stone'a. Oznaczmy $\bar{J} = J \cap \{0, 2\}^n$.

Wniosek 5. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a,* $b_1, ..., b_n \in F_a$ *dla pewnego* $a \in S(L)$ *oraz* $f(b_1, ..., b_n) = A_J(b_1, ..., b_n) \in F_a$ *dla pewnej rodziny* $J \in \{0, 1, 2\}^n$. *Wówczas* $A_J(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}}(b_1, ..., b_n)$.

Niech $f(x_1, ..., x_n) = A_J(x_1, ...x_n)$ dla pewnej rodziny $J \subseteq \{0, 1, 2\}^n$.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi_1 : J \to \{0, 1\}^n$ przez

$$\phi_1((i_1, ..., i_n)) = (i_1(mod 2), ..., i_n(mod 2)) \text{ dla } (i_1, ..., i_n) \in J \subseteq \{0, 1, 2\}^n. \tag{2.11}$$

Oznaczmy $\bar{f}(x_1, ..., x_n) = A_{\phi_1(J)}(x_1, ..., x_n)$. Łatwo zauważyć, że $\bar{f} \in T^{(n)}(\mathbf{S}(\mathbf{L}))$.

Rozważmy teraz odwzorowanie $\phi_2 : J \to 2^{\{1,...,n\}}$ zdefiniowane następująco:

$$\phi_2((i_1, ..., i_n)) = \{k \in N |\ i_k = 0\} \text{ dla } (i_1, ..., i_n) \in J. \tag{2.12}$$

Biorąc pod uwagę definicję (2.9), otrzymujemy $\tilde{f}_{\phi_2(J)} = \tilde{f} \in T^{(n)}(\mathbf{F_a})$.

Zdefiniujmy $f_A : \{1, ..., n\} \to \{0, 1\}$, dla $A \subseteq \{1, ..., n\}$ jako funkcję charakterystyczną zbioru A oraz odwzorowanie $\phi_3 : 2^{\{1,...,n\}} \to \{0, 2\}^n$ przez

$$\phi_3(X) = (i_1, ..., i_n), \text{ gdzie } i_k = 2f_{X'}(k), k \in \{1, ..., n\}, X' = \{1, ..., n\} \setminus X, \tag{2.13}$$

dla każdego $X \in 2^{\{1,...,n\}}$. Zauważmy, że $A_J(b_1, ..., b_n) = A_{\phi_3(\phi_2(J))}(b_1, ..., b_n)$ dla dowolnych $b_1, ..., b_n \in F_a$, $J \subseteq \{0, 2\}^n$. Przy przyjętych oznaczeniach łatwo dowieść następujący lemat:

Lemat 3. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a,* $f(x_1, ..., x_n) = A_J(x_1, ...x_n)$ *dla pewnej rodziny* $J \subseteq \{0, 1, 2\}^n$. *Wówczas*

(a) $(\forall a_1, ..., a_n \in S(L))$ $[f(a_1, ..., a_n) = A_{\phi_1(J)}(a_1, ..., a_n)]$;

(b) $(\forall a \in S(L))$ $(\forall b_1, ..., b_n \in F_a)$ $[f(b_1, ..., b_n) \in F_a \Rightarrow f(b_1, ..., b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J})}(b_1, ..., b_n)]$;

(c) $(\forall a \in S(L))$ $(\forall b_1, ..., b_n \in F_a)(\forall P \subseteq 2^{\{1,...,n\}})$ $[\tilde{f}_P(b_1, ..., b_n) = = A_{\phi_3(P)}(b_1, ..., b_n)]$.

Dowód

(a) Oczywiste, ponieważ $a^{**} = a$ dla wszystkich $a \in S(L)$.

(b) Z wniosku 5, otrzymujemy $f(b_1, ..., b_n) = A_J(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}}(b_1, ..., b_n)$, gdzie $\bar{J} = J \cap \{0, 2\}^n$. Ponieważ $b_i^2 = b_i^{**} = a$ oraz $b_i \wedge a = b_i$ dla każdego $b_i \in F_a$, więc $A_{\bar{J}}(b_1, ..., b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J})}(b_1, ..., b_n)$.

(c) Oczywiście $b_i \wedge a = b_i$ dla każdego $b_i \in F_a$ $(i = 1, ..., n)$. Stąd $\tilde{f}_P(b_1, ..., b_n) = A_{\phi_3(P)}(b_1, ..., b_n)$. ■

Twierdzenie 8. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \subseteq F_a$ *dla pewnego* $a \in S(L)$. *Wówczas*

$$X \in Ind(\mathbf{L}, S_0) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathbf{F_a}, S_0).$$

Ponadto, jeśli $a \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$, *to* $X \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$.

Dowód Wobec faktu 1 pozostaje udowodnić implikację $(\Leftarrow)$. Przypuśćmy zatem, że $X \in Ind(\mathbf{F_a}, S_0)$ oraz $p \in X^X$. Wtedy $p(b_i) \in F_a$ dla wszystkich $b_i \in X$ $(i = 1, ..., n)$. Niech $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f, g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$. Z twierdzenia 7 wynika, że $f(b_1, ..., b_n) = A_{J_1}(b_1, ..., b_n)$ oraz $g(b_1, ..., b_n) = A_{J_2}(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $J_1, J_2 \subseteq \{0, 1, 2\}^n$.

Zgodnie z wnioskiem 4 musimy rozważyć następujące 4 przypadki:

(1) $f(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0}$,

(2) $f(b_1, ..., b_n) = a^*$,

(3) $f(b_1, ..., b_n) \in F_a$,

(4) $f(b_1,...,b_n) \in \varphi_L(a)$.

Ad. (1) i (2) W tych przypadkach wszystkie atomy działań f i g są równe $\mathbf{0}$ lub a^*. Z lematu 2 (a),(c), mamy $f(p(b_1),...,p(b_n)) = g(p(b_1),...,p(b_n))$.
Ad. (3) Korzystając z wniosku 5, mamy $f(b_1,...,b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1,...,b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1,...,b_n) = g(b_1,...,b_n)$. Na mocy lematu 3(b) otrzymujemy zatem $f(b_1,...,b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}(b_1,...,b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_2)}(b_1,...,b_n) = g(b_1,...,b_n)$ oraz $\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_i)} \in T^{(n)}(\mathbf{F_a})$ dla $i = 1,2$. Wówczas $\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}(p(b_1),...,p(b_n)) =$
$= \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_2)}(p(b_1),...,p(b_n))$, ponieważ $X \in Ind(\mathbf{F_a}, S_0)$. Lemat 3(c) implikuje $\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_i)}(p(b_1),...,p(b_n)) = A_{\phi_3(\phi_2(\bar{J}_i))}(p(b_1),...,p(b_n)) =$
$= A_{\bar{J}_i}(p(b_1),...,p(b_n))$ dla $i = 1,2$. A w konsekwencji $f(p(b_1),...,p(b_n)) =$
$= g(p(b_1),...,p(b_n))$.

Ad. (4) Biorąc pod uwagę twierdzenie 7 i lemat 2 otrzymamy
$f(b_1,...,b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1,...,b_n) \vee a^* = A_{\bar{J}_2}(b_1,...,b_n) \vee a^* = g(b_1,...,b_n)$. Ponieważ odwzorowanie ϕ, zdefiniowane wzorem 2.7, jest bijekcją F_a na $\varphi_L(a)$, więc $A_{\bar{J}_1}(b_1,...,b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1,...,b_n) \in F_a$. Zgodnie z rozważaniami zawartymi w punkcie (3) mamy $A_{\bar{J}_1}(p(b_1),...,p(b_n)) = A_{\bar{J}_2}(p(b_1),...,p(b_n))$. A stąd $A_{\bar{J}_1}(p(b_1),...,p(b_n)) \vee a^* = A_{\bar{J}_2}(p(b_1),...,p(b_n)) \vee a^*$, co implikuje $f(p(b_1),...,p(b_n)) = g(p(b_1),...,p(b_n))$.

Wykażemy teraz, że $X \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$ dla dowolnego $X \subseteq F_a$, $a \in S(L) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Oczywiście, $a^* \neq \mathbf{0}$, $a^* \notin \varphi_L(a)$ oraz $F_a \cap \varphi_L(a) = \emptyset$.

Rozważmy wszystkie unarne działania termowe na zbiorze X. Definiują one pięć nietożsamościowych odzwzorowań $p_i : X \to L$:

$$p_i(x) = x^i \text{ dla } i = 1,2;\ p_3(x) = \mathbf{0},\ p_4(x) = \mathbf{1} \text{ oraz } p_5(x) = \phi(x) = x \vee x^*. \tag{2.14}$$

Dla każdego $b \in F_a$, mamy $p_1(b) = a^*$, $p_2(b) = a$, $p_3(b) = \mathbf{0}$ oraz $p_4(b) = \mathbf{1}$. Oczywiście $a^*, a, \mathbf{0}, \mathbf{1} \in S(L)$. Ponadto, $p_5(b) = b \vee b^* \in D(L) = F_{\mathbf{1}}$. Niech $f(b_1,...,b_n) = g(b_1,...,b_n)$ dla pewnych $b_1,...,b_n \in X$ i $f,g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$. Musimy rozpatrzyć przypadki (1)-(4) wspomniane powyżej.

Na początek załóżmy, że $f(b_1,...,b_n) = \mathbf{0}$. Wówczas wszystkie atomy działań f i g dla elementów $b_1,...,b_n$ są równe $\mathbf{0}$. Z lematu 2(c) otrzymujemy $f(p_i(b_1),...,p_i(b_n)) = \mathbf{0} = g(p_i(b_1),...,p_i(b_n))$ dla $i = 0,...,5$.

Przypuśćmy teraz, że $f(b_1, ..., b_n) = a^*$. Wtedy wszystkie atomy działań f i g są równe $\mathbf{0}$ lub a^*. Zatem $f(p_j(b_1), ..., p_j(b_n)) = [p_j(b_k)]^* = g(p_j(b_1), ..., p_j(b_n))$, dla $j = 0, ..., 5$, na mocy lematu 2(a), (c).

Następnie rozważmy przypadek, gdy $f(b_1, ..., b_n) \in F_a$. Korzystając z wniosku 4 otrzymujemy $f(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$. Ponieważ $p_j(b_k) \in S(L)$, dla $j = 1, ..., 4$, zatem mamy $f(p_j(b_1), ..., p_j(b_n)) = p_j(b_k) = g(p_j(b_1), ..., p_j(b_n))$, na mocy Lematu 2(b). Ponieważ $\phi|_{F_a}$ jest homomorfizmem kratowym, więc $f(p_5(b_1), ..., p_5(b_n)) = = g(p_5(b_1), ..., p_5(b_n))$.

Rozważanie dotyczące przypadku (4) możemy przeprowadzić analogicznie do dowodu tego przypadku dla S_0-niezależności. ∎

Ze względu na dziedziczność rodziny zbiorów A_1-niezależnych oraz wniosek 3(iv), oczywiste jest, że $X \notin Ind(\mathbf{L}, A_1)$ dla każdego $X \subseteq F_1$.

Opiszemy teraz związek między G-niezależnością podzbiorów zbioru gęstego $D(L)$ w algebrze Stone'a a G-niezależnością w kracie dystrybutywnej.

Twierdzenie 9. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \subseteq D(L)$. *Wówczas* $X \in Ind(\mathbf{L}, G)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $X \in Ind(\mathbf{D}(\mathbf{L}), G)$.

Dowód Zauważmy, że implikacja $X \in Ind(\mathbf{L}, G) \Rightarrow X \in Ind(\mathbf{D}(\mathbf{L}), G)$ ma dowód analogiczny do dowodu implikacji (1.5) z faktu 1, ponieważ dla każdego $a \in X \subseteq D(L)$ oraz $p \in G$ zachodzi $p(a) \in D(L)$.

W celu udowodnienia implikacji przeciwnej, przypuśćmy, że $X \in Ind(\mathbf{D}(\mathbf{L}), G)$. Możemy założyć również, że $\mathbf{1} \notin X$, ponieważ w dowolnej algebrze $\mathbf{A}$ zachodzi własność (1.4).

Niech $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $b_1, ..., b_n \in X \subseteq D(L)$ oraz $f, g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$. Z twierdzenia 7 wynika, że

$$f(x_1, ..., x_n) = A_{J_1}(x_1, ..., x_n), \;\; g(x_1, ..., x_n) = A_{J_2}(x_1, ..., x_n),$$

dla pewnych $J_1, J_2 \in \{0, 1, 2\}^n$. Zatem $A_{J_1}(b_1, ..., b_n) = A_{J_2}(b_1, ..., b_n)$. Wobec lematu 2 mamy $A_{(i_1,...,i_n)}(b_1, ..., b_n) = \mathbf{0}$, jeśli $i_k = 1$ dla pewnego $k \in \{1, ..., n\}$. Zatem $f(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_1}(b_1, ..., b_n) = A_{\bar{J}_2}(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$. Łatwo zauważyć, że $D(L) \cup \{\mathbf{0}\}$ jest podalgebrą algebry

Stone'a $\mathbf{L}$. Tak więc
$f(b_1,...,b_n) = g(b_1,...,b_n) \in D(L)$ lub $f(b_1,...,b_n) = g(b_1,...,b_n) = \mathbf{0}$.

Przypuśćmy, że $f(b_1,...,b_n) \in D(L)$. Korzystając z lematu 3(b) otrzymujemy $\tilde{f}_{\phi_2(J_1)}(b_1,...,b_n) = \tilde{f}_{\phi_2(J_2)}(b_1,...,b_n)$ oraz $\tilde{f}_{\phi_2(J_i)} \in T^{(n)}(\mathbf{D(L)})$ dla $i = 1,2$.

Niech p będzie odwzorowaniem zmniejszającym. Z wniosku 2 wynika, że $p(b_i) \in D(L)$ dla każdego $i = 1,...,n$. Z założenia otrzymujemy $\tilde{f}_{\phi_2(J_1)}(p(b_1),...,p(b_n)) = \tilde{f}_{\phi_2(J_2)}(p(b_1),...,p(b_n))$. Ponadto, dla $i = 1,2$, $\tilde{f}_{\phi_2(J_i)}(p(b_1),...,p(b_n)) = A_{\phi_3(\phi_2(J_i))}(p(b_1),...,p(b_n)) = A_{J_i}(p(b_1),...,p(b_n))$, na mocy lematu 3(c). Czyli $f(p(b_1),...,p(b_n)) = g(p(b_1),...,p(b_n))$.

W drugim przypadku wszystkie atomy działań f i g muszą być równe zero, będą również równe zero dla obrazów elementów $b_1,...,b_n$, ponieważ $p(b_i) \in D(L)$, dla każdego $i = 1,...,n$, lemat 2(c). ∎

2.6. Związki między niezależnością w algebrze Stone'a i algebrze Boole'a S(L)

Podamy teraz charakterystykę rodziny t-niezależnych podzbiorów algebry Stone'a $\mathbf{L}$, wykorzystując odpowiadające im elementy ze szkieletu (tj. algebry Boole'a $\mathbf{S(L)} = (S(L); \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$).

Twierdzenie 10. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \subseteq L$. *Wówczas* $X \in Ind_t(\mathbf{L})$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych parami różnych* $b_1,...,b_n \in X$ *istnieją* $a_1,...,a_n \in S(L)$ *spełniające warunki:*

a) $a_i \neq b_i \in F_{a_i}$ $(i = 1,...,n)$ *oraz*

b) $\{a_1,...,a_n\} \in Ind_t(\mathbf{S(L)})$.

Dowód Niech $X \in Ind_t(\mathbf{L})$ oraz $b_1,...,b_n$ będą różnymi elementami zbioru X. Z faktów 2(iii) oraz 3 wynika, że $b_i \in F_{a_i}$ oraz $b_i \neq a_i$ $(i = 1,...,n)$ dla pewnych, różnych $a_1,...,a_n \in S(L) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Załóżmy nie wprost, że $\{a_1,...,a_n\} \notin Ind_t(\mathbf{S(L)})$. Ponieważ w algebrach Boole'a rodziny zbiorów M-niezależnych i t-niezależnych pokrywają się, więc z twierdzenia 5 mamy

$$a_1^{i_1} \wedge .... \wedge a_n^{i_n} = \mathbf{0} \text{ dla pewnych } i_k \in \{0,1\} \ (k = 1,...,n). \tag{2.15}$$

Zatem $b_1^{i_n} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} \in F_{\mathbf{0}} = \{\mathbf{0}\}$. Czyli

$$b_1^{i_n} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}. \tag{2.16}$$

Przypuśćmy, że $i_1 = ... = i_n = 0$. Wtedy $b_1^* \vee ... \vee b_n^* = \mathbf{1}$, a stąd, wykorzystując dystrybutywność, otrzymujemy $b_1 = b_1 \wedge (b_1^* \vee ... \vee b_n^*) = b_1 \wedge (b_2^* \vee ... \vee b_n^*)$. Rozważmy następujące działanie termowe $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \wedge (x_2^* \vee ... \vee x_n^*)$. Wówczas $f \in T^{(n)}(\mathbf{L})$, $f(b_1, ..., b_n) = b_1$ oraz $f(\mathbf{1}, ..., \mathbf{1}) = \mathbf{0}$ (czyli f nie jest rzutowaniem), wbrew założeniu.

Załóżmy teraz, że $i_k = 1$ dla pewnego $k \in \{1, ..., n\}$. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że $k = 1$. Zatem $b_1^* \wedge b_2^{i_2} \wedge ... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}$, a stąd $b_1 \vee (b_1^* \wedge b_2^{i_2} \wedge ... \wedge b_n^{i_n}) = b_1$. Rozważmy $g(x_1, ..., x_n) = x_1 \vee (x_1^* \wedge x_2^{i_2} \wedge ... \wedge x_n^{i_n})$. Wówczas $g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$, $g(b_1, ..., b_n) = b_1$ oraz, co łatwo udowodnić, g nie jest rzutowaniem. Czyli również w tym przypadku otrzymujemy sprzeczność.

W celu udowodnienia implikacji przeciwnej załóżmy, że dla każdych parami różnych elementów $b_1, ..., b_n \in X$ istnieją $a_1, ..., a_n \in S(L)$ takie, że $a_i \neq b_i \in F_{a_i}$ $(i = 1, ..., n)$ oraz $\{a_1, ..., a_n\} \in Ind_t(\mathbf{S}(\mathbf{L}))$.

Przypuśćmy, że $b_k = f(b_1, ..., b_n)$ dla pewnego $f \in T^{(n)}(\mathbf{L})$ oraz $k \in \{1, ..., n\}$. Wówczas $f(b_1, ..., b_n) \in F_{f(a_1,...,a_n)}$ i $b_k \in F_{a_k}$. Stąd $a_k = f(a_1, ..., a_n) = \bar{f}(a_1, ..., a_n)$ oraz $\bar{f} \in T^{(n)}(\mathbf{S}(\mathbf{L}))$ (definicja (2.11)). Z założenia mamy zatem $\bar{f} = e_n^k$ w $S(L)$. Czyli $f(x_1, ..., x_n) = x_k^{**}$ (co jest sprzeczne z założeniem) lub f jest rzutowaniem. Stąd $X \in Ind_t(\mathbf{L})$. ■

Fakt 2 oraz wniosek 3 charakteryzują jednolementowe zbiory niezależne. Obecnie rozważać będziemy zbiory co najmniej dwuelementowe. Udowodnimy w tym celu następujący lemat:

Lemat 4. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a,* $a \in D(L)$ *i* $b \notin D(L)$ *(lub* $a = \mathbf{0}$ *i* $b \neq \mathbf{0}$*). Wówczas* $\{a, b\} \notin Ind(\mathbf{L}, S_0)$.

Dowód Niech $a \in D(L)$ i $b \notin D(L)$. Rozważmy dwa binarne działania termowe $f_1(x, y) = x^* \wedge y$, $g_1(x, y) = x^* \wedge y^*$ oraz odwzorowanie $p : \{a, b\} \to \{a, b\}$ dane wzorem $p(x) = b$. Wtedy $f_1(a, b) = g_1(a, b)$, ale $f_1(p(a), p(b)) = f_1(b, b) = \mathbf{0} \neq b^* = g_1(p(a), p(b))$. Stąd $\{a, b\} \notin Ind(\mathbf{L}, S_0)$.

Analogiczny wniosek dla $a = \mathbf{0}$ i $b \neq \mathbf{0}$ uzyskamy rozważając działania $f_2(x, y) = x \wedge y$ i $g_2(x, y) = \mathbf{0}$. ■

Dla zbioru $X \subseteq L$ zdefiniujmy $X^{**} = \{x^{**} \mid x \in X\}$. Oczywiście $X^{**} = g(X)$ dla retrakcji g. Kolejne twierdzenie formułuje warunek konieczny na to, aby zbiór X należał do rodziny zbiorów Q-niezależnych.

Twierdzenie 11. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a,* $X \subseteq L$ *oraz* $|X| > 1$. *Jeśli* $X \in Ind(\mathbf{L}, Q)$, *to* $X^{**} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), Q)$ *dla* $Q = M, A_1, S, S_0, I$ *oraz* G.

Dowód Wobec twierdzenia 1(b) implikacja ta jest prawdziwa dla $Q = M, A_1$. Przypuśćmy zatem, że $X \in Ind(\mathbf{L}, Q)$ oraz $X^{**} \notin Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), Q)$ dla $Q = S, S_0$ lub I. Ponieważ dla zbiorów co najmniej dwuelementowych w algebrze Boole'a rodziny te pokrywają się, więc zgodnie z twierdzeniem 5 otrzymujemy (2.15) dla pewnych, parami różnych $a_1, ..., a_n \in X^{**}$. Z definicji zbioru X^{**} istnieją $b_1, ..., b_n \in X$ takie, że $b_i \in F_{a_i}$ $(i = 1, ..., n)$, czyli (2.16). Rozważmy następujące n-argumentowe działania termowe algebry Stone'a $\mathbf{L}$:

$$f(x_1, ..., x_n) = x^{i_1} \wedge .... \wedge x^{i_n}, \quad g(x_1, ..., x_n) = \mathbf{0}. \tag{2.17}$$

Oczywiście

$$f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) \text{ oraz } f \neq g. \tag{2.18}$$

Na mocy założenia, dla dowolnego $p_i \in Q \cap L^X$, mamy

$$f(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)) = g(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)). \tag{2.19}$$

Zdefiniujmy teraz odwzorowanie $p_1 : X \to X$ następująco:

$$p_1(x) = \begin{cases} b_1 & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 0, \\ b_2 & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 1, \quad (k = 1, ..., n). \\ x & \text{dla } x \neq b_k. \end{cases}$$

Jeśli $i_k = 0$ (lub $i_k = 1$) dla wszystkich $k = 1, ..., n$, to otrzymamy $b_1 = \mathbf{0}$ lub $b_2^* = \mathbf{0}$ (czyli $b_2 \in D(L)$), co jest sprzeczne z lematem 4. W przypadku, gdy $i_k = 0$ oraz $i_l = 1$ dla pewnych $k, l \in \{1, .., n\}$ mamy $b_1 \wedge b_2^* = \mathbf{0}$. Stąd $a_1 \wedge a_2^* = \mathbf{0}$, co implikuje $a_1 \leq a_2^{**} = a_2$. Wobec dziedziczności, $\{b_1, b_2\} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), S_0)$. Rozważmy teraz dwa binarne działania termowe: $f_1(x,y) = x \wedge y^*, g_1(x,y) = \mathbf{0}$ oraz odwzorowanie $p_2 : \{b_1, b_2\} \to \{b_1, b_2\}$, zdefiniowane $p_2(b_1) = b_2, p_2(b_2) = b_1$. Wówczas $f_1(p_2(b_1), p_2(b_2)) = f_1(b_2, b_1) = b_2 \wedge b_1^* = \mathbf{0} = g_1(b_2, b_1)$. Oznacza to, że $a_2 \wedge a_1^* = \mathbf{0}$ oraz $a_2 \leq a_1$. W konsekwencji otrzymamy $a_1 = a_2$, wbrew założeniu. Zatem powyższa implikacja jest prawdziwa dla S_0-niezależności, jak również, na mocy własności (1.1), dla S-niezależności.

Jeśli $X \in Ind(\mathbf{L}, I)$, to zgodnie z wnioskiem 3, mamy $X \cap S(L) = \emptyset$. Rozważmy zatem różnowartościowe odwzorowanie :

$$p_3(b_k) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{dla } x = b_1 \text{ oraz } i_1 = 0, \\ \mathbf{0} & \text{dla } x = b_1 \text{ oraz } i_1 = 1, \\ x & \text{dla } x \neq b_1. \end{cases}$$

Wówczas $f(p_3(b_1), ..., p_3(b_n)) = g(p_3(b_1), ..., p_3(b_n))$, czyli $b_2^{i_2} \wedge .... \wedge b_n^{i_n} = \mathbf{0}$. Po $n-1$ podobnych krokach otrzymamy $b_n = \mathbf{0}$ lub $b_n^* = \mathbf{0}$. Co, na mocy wniosku 3, prowadzi do sprzeczności.

Załóżmy teraz, że $X \in Ind(\mathbf{L}, G)$ oraz $X^{**} \notin Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), G)$. Korzystając z własności (1.4) możemy przyjąć, że w zbiorze X^{**} nie ma stałych. Czyli następujące odwzorowanie jest zmniejszające (wniosek 2):

$$p_4(b_k) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 0, \\ \mathbf{0} & \text{dla } x = b_k \text{ oraz } i_k = 1, \quad (k = 1, ..., n). \\ x & \text{dla } x \neq b_k. \end{cases}$$

Przypomnijmy, że w algebrze Boole'a rodzina zbiorów G-niezależnych nie zawierających stałych pokrywa się z rodziną zbiorów M-niezależnych. Mamy zatem (2.19) dla $i = 4$. A stąd $\mathbf{1} = \mathbf{0}$, sprzeczność. ∎

Wniosek 6. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a,* $X \subseteq L$, $|X| > 1$ *oraz* $X \in Ind(\mathbf{L}, Q)$ *dla* $Q = M, S$ *oraz* I *. Wówczas*

$$f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) \Rightarrow \bar{f} = \bar{g} \ w\ \mathbf{S}(\mathbf{L}) \tag{2.20}$$

dla każdych $f, g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$ *oraz parami różnych* $b_1, .., b_n \in X$.

Istotnie, jeśli $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f, g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$ oraz parami różnych $b_1, .., b_n \in X$. Wówczas $f(b_1, ..., b_n) \in F_{f(a_1,...,a_n)}$ i $g(b_1, ..., b_n) \in F_{g(a_1,...,a_n)}$, gdzie $a_i = b_i^{**} \in X^{**} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), Q)$. Z założenia oraz faktu 3, elementy $a_1, ..., a_n$ są parami różne. Czyli $f(a_1, ..., a_n) = g(a_1, ..., a_n)$, co implikuje $\bar{f}(a_1, ..., a_n) = \bar{g}(a_1, ..., a_n)$. Ponieważ rozważane rodziny zbiorów niezależnych w algebrze Boole'a pokrywają się z rodziną zbiorów M-niezależnych zatem otrzymujemy $\bar{f} = \bar{g}$ w $\mathbf{S}(\mathbf{L})$, na mocy definicji M-niezależności.

Podzbiory szkieletu $S(L)$ nie mogą być zbiorami M, I, oraz t-niezależnymi. Dla pozostałych rozważanych przez nas rodzajów niezależności twierdzenia 1 i 11 pozwalają sformułować następujący wniosek:

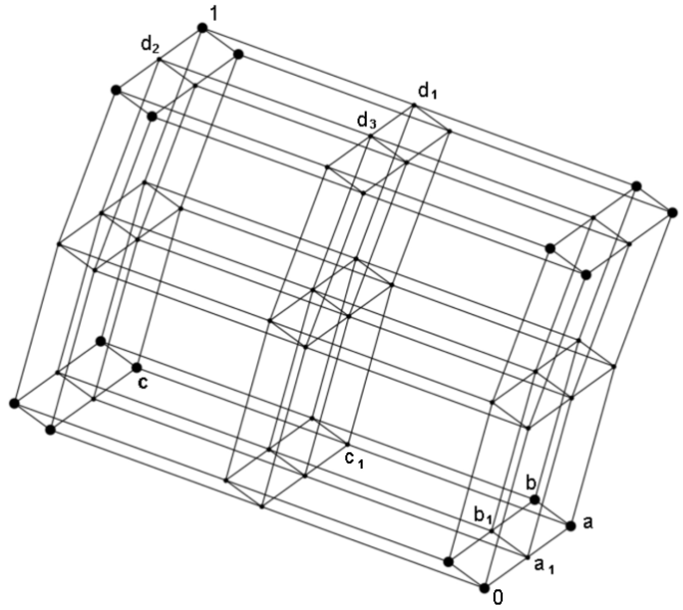
Wniosek 7. *Niech* $\mathbf{L}$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \subseteq S(L); |X| > 1$. *Wówczas*

$$X \in Ind(\mathbf{L}, Q) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), Q)$$

dla $Q = S_0, S, G$ *oraz* A_1.

Za wyjątkiem t-niezależności przedstawiony w twierdzeniu 11 warunek nie jest warunkiem wystarczającym dla rozważanych przez nas rodzajów niezależności.

Przykład 1. Rozważmy algebrę Stone'a $\mathbf{L}$ odpowiadającą kracie Stone'a przedstawionej na rysunku 2.1. Jest to produkt prosty trzech trójelementowych i jednej dwuelementowej algebry Stone'a. Korzystając z twierdzenia 5, łatwo zauważyć, że $\{b, c\} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), M)$. Natomiast $\{b_1, c_1\} \notin Ind(\mathbf{L}, Q)$ dla $Q = M, S, S_0, I, G$. Rzeczywiście, rozważmy dwa binarne działania $f(x, y) = x \wedge y$ i $g(x, y) = x \wedge y^{**}$. Wówczas $f(b_1, c_1) = a_1 = b_1 \wedge c_1^{**} = g(b_1, c_1)$. Jeśli zdefiniujemy odwzorowanie p następująco: $p(b_1) = c_1$, $p(c_1) = b_1$, to $p \in M \cup S \cup S_0 \cup G \cup I$. Otrzymujemy zatem $f(p(b_1), p(c_1)) = f(c_1, b_1) = a_1$ oraz $g(p(b_1), p(c_1)) = c_1 \wedge b_1^{**} = c_1 \wedge b = a$. Rozważając odwzorowanie $\phi(x) = x \vee x^*$ analogiczny wniosek otrzymamy również dla A_1-niezależności.



Rysunek 2.1. Diagram Hasse'a przedstawiający przykład kraty Stone'a

Twierdzenie 12. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a,* $X \subseteq L$*,* $|X| > 1$ *oraz* $X = \{b_k \mid a_k \neq b_k \in F_{a_k}$ *dla różnych* $a_k \in S(L), k \in K\} \in Ind(\mathbf{L}, Q)$ *dla* $Q = M, S, S_0$ *lub* I*. Wówczas* $\phi(X) \in Ind(\mathbf{D}(\mathbf{L}), M)$*.*

Dowód Przypuśćmy, że $\phi(X) \notin Ind(\mathbf{D}(\mathbf{L}), M)$. Z twierdzenia 2 wynika zatem, że $\phi(c_1) \wedge ... \wedge \phi(c_m) \leq \phi(d_1) \vee ... \vee \phi(d_n)$ dla pewnych $\phi(c_1), ..., \phi(c_m)$, $\phi(d_1), ..., \phi(d_n)$ parami różnych elementów zbioru $\phi(X)$. Zdefiniujmy następujące działania termowe:
$f(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*) \wedge ... \wedge (x_m \vee x_m^*) \wedge [x_{m+1} \vee x_{m+1}^* \vee ... \vee x_{m+n} \vee x_{m+n}^*]$,
$g(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*) \wedge ... \wedge (x_m \vee x_m^*)$. Z założenia otrzymujemy

$$f(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n) = g(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n). \tag{2.21}$$

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathbf{L}, Q)$ dla $Q = M, S, S_0$. Rozważmy odwzorowanie $p_1 \in Q_X$ dane wzorem:

$$p_1(x) = \begin{cases} c_1 & \text{dla } x = c_k, \\ d_1 & \text{dla } x = d_l, \\ x & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \qquad (k = 1, ..., m;\ l = 1, ..., n).$$

Z Q-niezależności zbioru X w algebrze $\mathbf{L}$ otrzymujemy zatem

$$(c_1 \vee c_1^*) \wedge (d_1 \vee d_1^*) = c_1 \vee c_1^*, \tag{2.22}$$

a stąd $\phi(c_1) \leq \phi(d_1)$. Jeśli w tym samym celu wykorzystamy odwzorowanie

$$p_2(x) = \begin{cases} d_1 & \text{dla } x = c_k, \\ c_1 & \text{dla } x = d_l, \\ x & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \qquad (k = 1, ..., m;\ l = 1, ..., n),$$

to uzyskamy $\phi(d_1) \leq \phi(c_1)$. Reasumując $\phi(c_1) = \phi(d_1)$, wbrew założeniu.

Załóżmy teraz, że $X \in Ind(\mathbf{L}, I)$ i rozważmy odwzorowanie

$$p_3(x) = \begin{cases} c_1 & \text{dla } x = c_1, \\ x^{**} & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

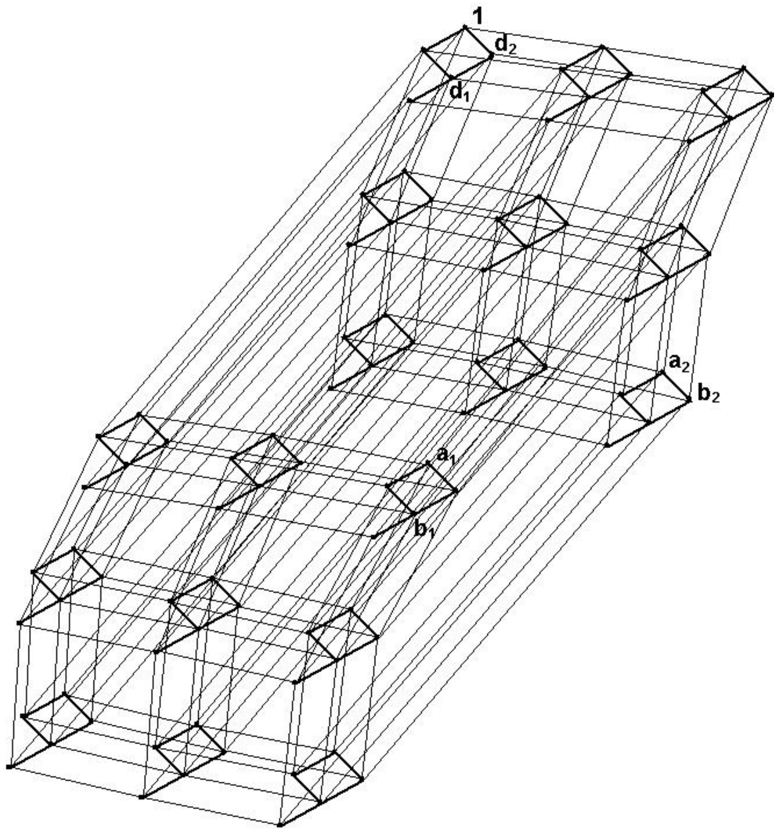
Zgodnie z definicją zbioru X odwzorowanie to jest różnowartościowe. Zatem równość (2.21) implikuje $(c_1 \vee c_1^*) \wedge [d_1 \vee d_1^* \vee ... \vee d_n \vee d_n^*] = (c_1 \vee c_1^*)$. Jeśli $n = 1$, to mamy (2.22). W przeciwnym wypadku rozważmy działania termowe $f_1(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*) \wedge [x_{m+1} \vee x_{m+1}^* \vee ... \vee x_{m+n} \vee x_{m+n}^*]$, $g_1(x_1, .., x_{m+n}) = (x_1 \vee x_1^*)$ oraz odwzorowanie

$$p_4(x) = \begin{cases} d_1 & \text{dla } x = d_1, \\ \phi(d_1) & \text{dla } x = d_2, \\ x & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z I-niezależności zbioru X oraz twierdzenia 11 wynika, że $d_1 \notin D(L)$ (czyli $d_1 \neq \phi(d_1)$), zatem odwzorowanie p_4 jest różnowartościowe. Mamy zatem $f_1(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n) = g_1(c_1, .., c_m, d_1, ..., d_n)$, a w konsekwencji $(c_1 \vee c_1^*) \wedge [d_1 \vee d_1^* \vee d_1 \vee d_1^* \vee ... \vee d_n \vee d_n^*] = (c_1 \vee c_1^*)$. Po $n-1$ podobnych krokach uzyskamy równość (2.22), na podstawie której łatwo wywnioskować sprzeczną z założeniem równość $\phi(c_1) = \phi(d_1)$. ■

Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe dla A_1-niezależności.

Przykład 2. Rozważmy podzbiór $X = \{b_1, b_2\}$ algebry odpowiadającej kracie Stone'a przedstawionej na rysunku 2.2. Jak łatwo zauważyć $\phi(b_1) = d_1 \leq d_2 = \phi(b_2)$. Zatem z twierdzenia 2 otrzymujemy $\phi(X) \notin Ind(\mathbf{D}(\mathbf{L}), M)$. Ponieważ X spełnia warunek konieczny A_1-niezależności zawarty w twierdzeniu 11 ($\{a_1, a_2\} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), A_1)$), więc analizując binarne działania termowe algebry Stone'a generowane przez termy opisane poniżej możemy wykazać, że $X \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$.



Rysunek 2.2. Diagram Hasse'a przestawiający kratę Stone'a

Algebra termów dwuargumentowych algebry Stone'a jest oczywiście izomorficzna z wolną algebrą Stone'a generowaną przez zbiór dwuelementowy $X = \{x, y\}$:

$\mathbf{F}_X = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, x, y, x^*, y^*, x^{**}, y^{**}, x \vee x^*, y \vee y^*, x \wedge y, x \wedge y^{**}, x^{**} \wedge y, x^{**} \wedge y^{**}, x \wedge y^*,$
$x^{**} \wedge y^*, x^* \wedge y, x^* \wedge y^{**}, x^* \wedge y^*, (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y),$
$(x \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*),$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y),$
$(x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y) \vee y^*, (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), x \vee (x^{**} \wedge y),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee y, (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), x \vee (x^* \wedge y), x \vee (x^* \wedge y^{**}), x \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x \wedge y^{**}) \vee y^*,$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y),$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^*) \vee y,$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}), (x^{**} \wedge y) \vee y^*, y \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y),$
$y^{**} \vee (x \wedge y^*), (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), x^{**} \vee (x^* \wedge y), x^{**} \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x^{**} \wedge y^{**}) \vee y^*, (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), y^{**} \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x \wedge y^*) \vee x^*, y^* \vee (x^* \wedge y), (x^{**} \wedge y) \vee x^*, (x \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee x^*, (x \wedge y) \vee y^* \vee (x^* \wedge y), (x \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*,$
$x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y), x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^{**}), x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x \wedge y^{**}) \vee y \vee (x^{**} \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}),$
$(x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee y^*, (x \wedge y^{**}) \vee y \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee x^*,$
$x \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee y^* \vee (x^{**} \wedge y), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*,$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*), (x^{**} \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee x^*,$
$(x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*, (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*),$
$(x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x \wedge y^*) \vee x^*, (x^{**} \wedge y^{**}) \vee (x^* \wedge y) \vee y^*, x \vee (x^{**} \wedge y) \vee x^*,$

$x \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^* \wedge y) \vee (x^* \wedge y^*), (x \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee x^*,$ $(x \wedge y^{**}) \vee y \vee y^*\}$.

Twierdzenie 13. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \subseteq L$. *Wówczas* $X \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $X^{**} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), A_1)$ *oraz*

$$f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n) \Rightarrow \tilde{f}(\phi(b_1), ..., \phi(b_1)) = \tilde{g}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) \tag{2.23}$$

dla każdych $f, g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$, $b_1, .., b_n \in X$.

Dowód Przypuśćmy, że $L \supseteq X \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$. Z twierdzenia 11 otrzymujemy natychmiast $X^{**} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), A_1)$.

Niech $f(b_1, ..., b_n) = g(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f, g \in T^{(n)}(\mathbf{L})$, $b_1, ..., b_n \in X$. Ponieważ $\phi \in T^{(1)}(\mathbf{L})$, więc otrzymujemy $f(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) = g(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$. Na mocy twierdzenia 7, $f(x_1, ..., x_n) = A_{J_1}(x_1, ..., x_n)$ i $g(x_1, ..., x_n) = A_{J_2}(x_1, ..., x_n)$ dla pewnych $J_1, J_2 \in \{0, 1, 2\}^n$.

Oczywiście $\phi(x) \in D(L)$ dla wszystkich $x \in L$, zatem $[\phi(b_i)]^* = \mathbf{0}$ oraz $[\phi(b_i)]^{**} = \mathbf{1}$. Wobec tego $f(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) = A_{\bar{J}_1}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$, gdzie $\tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_1)}$ zdefiniowane jest wzorem (2.12). Podobnie $g(\phi(b_1), ..., \phi(b_n)) = \tilde{f}_{\phi_2(\bar{J}_2)}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$. Zatem otrzymujemy (2.23).

W celu udowodnienia implikacji przeciwnej przypuśćmy, że $f_1(b_1, ..., b_n) = g_1(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych $f_1, g_1 \in T^{(n)}(\mathbf{L})$, $b_1, .., b_n \in X$. Przypomnijmy zbiór nietożsamościowych unarnych działań termowych w algebrze Stone'a: $p_1(x) = x^*, p_2(x) = x^{**}, p_3(x) = \mathbf{0}, p_4(x) = \mathbf{1}$ i $p_5(x) = \phi(x) = x \vee x^*$. Oczywiście, dla $i = 1, ..., 4$, mamy $p_i(b_k) \in S(L)$ $(k = 1, ..., n)$, ponadto $p_i(b_k) = p_i(a_k)$. Z założenia otrzymujemy zatem $f_1(p_i(a_1), ..., p_i(a_n)) = g_1(p_i(a_1), ..., p_i(a_n))$, a stąd $f_1(p_i(b_1), ..., p_i(b_n)) = g_1(p_i(b_1), ..., p_i(b_n))$. Natomiast z (2.23) mamy $f_1(\phi(b_1), ..., \phi(b_1)) = g_1(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$. ■

Z definicji $\tilde{f} \in T^{(n)}(\mathbf{D}(\mathbf{L}))$ dla dowolnego $f \in T^{(n)}(\mathbf{L})$. Ponieważ $\mathbf{D}(\mathbf{L})$ jest kratą, więc działania $\vee, \wedge$ są idempotentne. Mamy zatem następujący wniosek:

Wniosek 8. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *będzie algebrą Stone'a oraz* $X \in L$*. Jeśli* $X^{**} \in Ind(\mathbf{S}(\mathbf{L}), A_1)$ *oraz* $|\phi(X)| = 1$*, to* $X \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$*.*

Warunek $|\phi(X)| = 1$ nie jest warunkiem koniecznym A_1-niezależności zbioru X w algebrze Stone'a. Istotnie:

Przykład 3. Rozważmy podzbiór $X = \{c, b_1\}$ algebry przedstawionej w przykładzie 1 (rysunek 2.1, strona 35). Jak łatwo zauważyć $\phi(c) = \mathbf{1} \neq \phi(\mathbf{b_1})$. Analizując binarne działania termowe tej algebry możemy wykazać, że $X \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$.

Zbiór ten nie spełnia również warunku (f) twierdzenia 1, ponieważ $c \in S(L)$ oraz $b_1 \notin S(L) = g(L)$. Zauważmy również, że w przykładzie tym zbiór $\{b, b_1, c\} \in Ind(\mathbf{L}, A_1)$, zatem twierdzenie 1(e) i (f) nie jest prawdziwe dla A_1-niezależności.

Rozdział 3

Q-niezależność w pewnych algebrach niełącznych

3.1. Grupoidy *-łączne

Idea badania algebr *-łącznych wywodzi się z pojęcia τ-pierścieni wprowadzonego przez B. Gleichgewichta w [14]. K. Głazek w [16] i [17] rozważał niełączne pierścienie oraz algebry, w których działania binarne są *-łączne.

Standardową terminologię dla półgrup, quasigrup i półkrat można znaleźć odpowiednio w [29], [37], [42] oraz [5].

Grupoidem z inwolucją nazywamy algebrę $\mathbf{A} = (A; +, ^*)$ typu $(2, 1)$ spełniającą następujące warunki:

$$(x^*)^* = x, \tag{3.1}$$

$$(x + y)^* = y^* + x^*. \tag{3.2}$$

Działanie * jest zatem anty-automorfizmem grupoidu $\mathbf{A}$ rzędu 2.

Grupoid z inwolucją $(A; +, ^*)$ nazywamy *-*łącznym*, gdy

$$(x + y)^* + z = x + (y + z)^*. \tag{3.3}$$

Przykłady:

1) Rozważmy zbiór $A = \{a, b, c, d\}$ z działaniem $\oplus$ zdefiniowanym w tabeli 3.1 oraz inwolucją * taką, że $a^* = b$, $c^* = c$ oraz $d^* = d$. Wówczas algebra $(A; \oplus, ^*)$ jest grupoidem *-łącznym. Co więcej, jest to najmniejszy grupoid *-łączny, nie będący półgrupą.

$\oplus$	a	b	c	d
a	b	c	c	c
b	d	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	c	c	c

Tabela 3.1.

2) Rozważmy zbiór jednostek kwaternionowych $H_0 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Zdefiniujmy działanie * następująco: $(1)^* = 1$, $(-1)^* = -1$, $(i)^* = -i$, $(-i)^* = i$, $(j)^* = -j$, $(-j)^* = j$, $(k)^* = -k$, $(-k)^* = k$ oraz działanie binarne $\oplus$ za pomocą tabeli 3.2. Łatwo udowodnić, że algebra $(H_0, \oplus, ^*)$ jest grupoidem *-łącznym.

$\oplus$	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	-i	i	-j	j	-k	k
-1	-1	1	i	-i	j	-j	k	-k
i	-i	i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	i	-i	1	-1	-k	k	j	-j
j	-j	j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	j	-j	k	-k	1	-1	-i	i
k	-k	k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	k	-k	-j	j	i	-i	1	-1

Tabela 3.2.

3) i 4) Zdefiniujmy w zbiorze Z_5 następujące działania:

$$x^* \equiv 4x \pmod 5,$$
$$x \oplus y \equiv 4x + 4y + 2x^2y^2(x+y) \pmod 5;$$

oraz w zbiorze Z_7:

$$x^* \equiv 6x \pmod 7,$$
$$x \oplus y \equiv 6x + 6y + 2x^2y^2(x^3+y^3) + 4x^3y^3(x+y) \pmod 7.$$

Wówczas $(Z_5; \oplus, ^*)$ oraz $(Z_7; \oplus, ^*)$ są grupoidami *-łącznymi.

5) Zbiór $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o\}$ z działaniem $\oplus$ zdefiniowanym w tabeli 3.3 oraz inwolucją * daną wzorami $a^* = b$, $c^* = c$, $d^* = e$, $f^* = f$, $g^* = h$, $i^* = j$, $k^* = l$, $m^* = n$, $o^* = o$ jest przemiennym grupoidem *-łącznym.

$\oplus$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
a	b	c	c	k	g	i	n	g	o	i	m	k	n	m	o
b	c	a	c	h	l	j	h	m	j	o	l	n	n	m	o
c	c	c	c	n	m	o	n	m	o	o	m	n	n	m	o
d	k	h	n	e	f	f	h	i	j	i	j	k	n	o	o
e	g	l	m	f	d	f	j	g	j	i	l	i	o	m	o
f	i	j	o	f	f	f	j	i	j	i	j	i	o	o	o
g	n	h	n	h	j	j	h	o	j	o	j	n	n	o	o
h	g	m	m	i	g	i	o	g	o	i	m	i	o	m	o
i	o	j	o	j	j	j	j	o	j	o	j	o	o	o	o
j	i	o	o	i	i	i	o	i	o	i	o	i	o	o	o
k	m	l	m	j	l	j	j	m	j	o	l	o	o	m	o
l	k	n	n	k	i	i	n	i	o	i	o	k	n	o	o
m	n	n	n	n	o	o	n	o	o	o	o	n	n	o	o
n	m	m	m	o	m	o	o	m	o	o	m	o	o	m	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Tabela 3.3.

Przedstawimy teraz pewne własności zdefiniowanej przez nas algebry, które staną się narzędziami do dalszego jej badania.

Element $a \in A$ nazywamy elementem *lewostronnie* (*prawostronnie*) *anihilującym*, *lewym* (*prawym*) *zerem*, jeśli $a + x = a$ (odpowiednio, $x + a = a$, $a + x = x$, $x + a = x$), dla każdego $x \in A$.

Fakt 4. *Niech* $(A; +, ^*)$ *będzie grupoidem z inwolucją. Jeśli* $a \in A$ *jest elementem lewostronnie anihilującym (prawostronnie anihilującym, lewym zerem, prawym zerem), to* a^* *jest elementem prawostronnie anihilującym (lewostronnie anihilującym, prawym zerem, lewym zerem).*

Rzeczywiście, niech $a+x = a$ dla każdego $x \in A$. Wówczas $(a+x)^* = a^*$ oraz $x^* + a^* = a^*$. Działanie * jest bijekcją, zatem a^* jest elementem prawostronnie anihilującym. ■

Fakt 5. *Niech* $(A; +, ^*)$ *będzie grupoidem* **-łącznym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) $(\exists \mathbf{0} \in A)\ (\forall x \in A)\ [\mathbf{0} + x = x]$;

(b) $(A; +, \mathbf{0})$ *jest półgrupą przemienną z zerem.*

Dowód Przypuśćmy, że element $\mathbf{0} \in A$ jest zerem grupoidu *-łącznego oraz $x \in A$. Jak łatwo wykazać $\mathbf{0}^* = \mathbf{0}$. Wówczas $x = (\mathbf{0} + x) + \mathbf{0} = (x^* + \mathbf{0}^*)^* + \mathbf{0} = x^* + (\mathbf{0} + \mathbf{0})^* = x^*$. Skoro * jest inwolucją, zatem działanie binarne będzie przemienne, a z *-łączności otrzymamy natomiast jego łączność. ■

Oczywiście, jeśli inwolucja jest działaniem tożsamościowym wówczas grupoid *-łączny jest półgrupą przemienną. Implikacja odwrotna nie zachodzi, wystarczy rozważyć algebrę $(\{a, b, c\}; \oplus, ^*)$, w której $a^* = b$, $c^* = c$ oraz działanie binarne definiuje wzór $x \oplus y = c$.

Niech $\mathbf{A} = (A; +, ^*)$ będzie grupoidem *-łącznym. Przez P_A będziemy oznaczać zbiór wszystkich idempotentów algebry $\mathbf{A}$ (to znaczy elementów spełniających warunki $x + x = x$ oraz $x^* = x$).

Fakt 6. *Niech* $(A; +, ^*)$ *będzie grupoidem* **-łącznym. Relacja* $\leq$ *zdefiniowana następująco:*

$$a \leq b \Leftrightarrow a = a + b = b + a$$

jest relacją częściowego porządku na P_A*.*

Dowód. Zwrotność i antysymetryczność tej relacji jest oczywista. W celu udowodnienia tranzytywności, przypuśćmy, że $a, b, c \in P_A$, $a \leq b$ oraz $b \leq c$, wtedy

$a + c = a^* + c = (a + b)^* + c = a + (b + c)^* = a + b^* = a + b = a$ oraz

$c + a = c + a^* = c + (b + a)^* = (c + b)^* + a = b + a = a$. ■

Fakt 7. *Niech* $\mathbf{A} = (A; +, ^*)$ *będzie grupoidem* **-łącznym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(α) $(\forall x, y \in P_A)\ (y + x) + y = y + (x + y)$;

(β) $(P_A; +, ^*)$ *jest podalgebrą algebry* $\mathbf{A}$*;*

(γ) $(P_A; +)$ *jest półkratą.*

Dowód. Załóżmy, że w zbiorze P_A zachodzi warunek (α). Udowodnimy najpierw, że działanie $+$ jest przemienne na P_A. Dla dowolnych $x, y \in P_A$ mamy $x+y = x+y^* = x+(y+y)^* = (x+y)^*+y = (y^*+x^*)+y = (y+x)+y = y+(x+y) = y+(x^*+y^*) = y+(y+x)^* = (y+y)^*+x = y+x$. Zatem $(x+y)^* = y^*+x^* = y+x = x+y$, a stąd $(x+y)+(x+y) = (x+y)^*+(x+y) = x+(y+(x+y))^* = x+((x+y)^*+y^*) = x+(x+(y+y^*)^*) = x+(x+(y+y)^*) = x+(x+y^*) = x+(x+y) = x+(x+y)^* = (x+x)^*+y = x+y$. Reasumując P_A jest podalgebrą grupoidu *-łącznego $\mathbf{A}$.

Oczywiście, jeśli P_A jest podalgebrą grupoidu *-łącznego $\mathbf{A}$, wówczas działanie binarne jest łączne i przemienne na zbiorze idempotentów P_A. Zatem $(P_A; +)$ jest półkratą. Fakt ten natychmiast implikuje warunek (α). ■

Opiszemy teraz związek pomiędzy pewną klasą grupoidów *-łącznych a półkratami górnymi (lub inaczej $\vee$-półkratami).

Twierdzenie 14. *Niech $(A; +, ^*)$ będzie *-łącznym grupoidem przemiennym spełniającym warunek $x + x = x^*$ dla każdego $x \in A$. Zdefiniujmy relację ϱ następująco:*

$$x\varrho y \Leftrightarrow x + y = y^*.$$

Wówczas $(A; \varrho)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym takim, że dla każdej pary elementów ze zbioru A istnieje supremum ze względu na relację ϱ. Ponadto, odwzorowanie $x \mapsto x^*$ jest izotoniczne.

Dowód Zwrotność i antysymetryczność relacji ϱ jest oczywista. Przypuśćmy zatem, że $x, y \in A$, $x\varrho y$ oraz $y\varrho z$. Wtedy $x + z = x + (z^*)^* = x + (y + z)^* = (x + y)^* + z = (y^*)^* + z = y + z = z^*$. Czyli ϱ jest również tranzytywna.

Udowodnimy teraz, że $sup_\varrho\{x, y\} = (x+y)^*$ dla wszystkich $x, y \in A$. Ponieważ $x + (x + y)^* = (x + x)^* + y = x + y = ((x + y)^*)^*$ otrzymujemy $x\varrho(x + y)^*$ i podobnie $y\varrho(x + y)^*$. Niech $x\varrho p$ i $y\varrho p$ dla pewnego $p \in A$. Zatem $(x+y)^*+p = x+(y+p)^* = x+(p^*)^* = x+p = p^*$. Stąd $(x+y)^*\varrho p$.

W celu wykazania izotoniczności relacji ϱ, przypuśćmy, że $x\varrho y$, czyli $x + y = y^*$. Zatem $x^* + y^* = (x + y)^* = (y^*)^*$, a w konsekwencji $x^*\varrho y^*$. ■

Twierdzenie 15. *Niech* $(A;\varrho)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym takim, że dla każdych* $a,b \in A$ *istnieje* $sup_\varrho\{a,b\}$. *Niech* * *będzie izotonicznym odwzorowaniem spełniającym warunek* $(x^*)^* = x$. *Zdefiniujmy działanie* $\oplus$ *następująco:*

$$x \oplus y = sup_\varrho\{x^*, y^*\}.$$

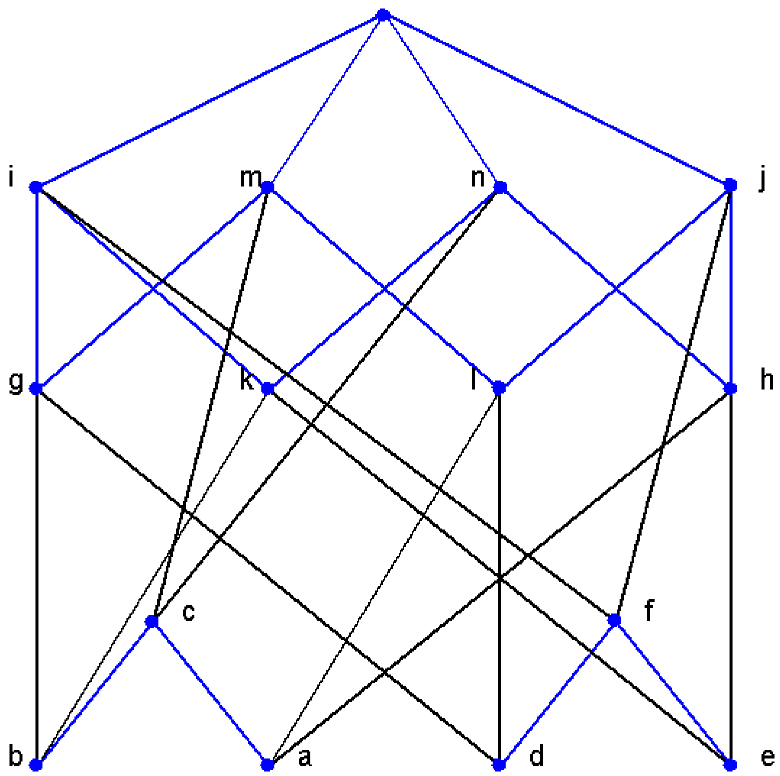
Wówczas $(A;\oplus,^*)$ *jest* **-łącznym grupoidem przemiennym spełniającym warunek*

$$x \oplus x = x^* \text{ dla wszystkich } x \in A.$$

Dowód Z definicji działania $\oplus$ wynika, że $x \oplus x = x^*$ oraz $x \oplus y = y \oplus x$. Aby udowodnić, że działanie * jest inwolucją na $(A;\oplus)$ weźmy dowolne $x,y \in A$. Wówczas $y^* \oplus x^* = sup_\varrho\{x,y\} = a$ dla pewnego $a \in A$ oraz $(x \oplus y)^* = (sup_\varrho\{x^*,y^*\})^*$.
Wykażemy, że $sup_\varrho\{x^*,y^*\} = a^*$. Rzeczywiście, mamy $x\varrho a$ i $y\varrho a$. Korzystając z izotoniczności *, uzyskujemy $x^*\varrho a^*$ oraz $y^*\varrho a^*$. Przypuśćmy teraz, że $x^*\varrho p$ i $y^*\varrho p$ dla pewnego $p \in A$. Wtedy $x\varrho p^*$ oraz $y\varrho p^*$. Zatem $a\varrho p^*$, a stąd $a^*\varrho p$. Reasumując $sup_\varrho\{x^*,y^*\} = a^*$, czyli $(x\oplus y)^* = x^* \oplus y^*$.

Pozostaje udowodnić, że działanie $\oplus$ jest *-łączne. Załóżmy zatem, że $x,y,z \in A$ oraz $(x \oplus y)^* \oplus z = w$ dla pewnego $w \in A$. Oznacza to, że $sup_\varrho\{x \oplus y, z^*\} = w$. Co implikuje $sup_\varrho\{x^*,y^*\}\varrho w$ i $z^*\varrho w$. A stąd $x^*\varrho w$ oraz $y^*\varrho w$. Jak łatwo wykazać $w = sup_\varrho\{x^*, y \oplus z\}$. ■

Niech $(A;\oplus,^*)$ będzie *-łącznym grupoidem rozważanym w Przykładzie 5. Wówczas $(A;\varrho)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym o następującym diagramie:



Rysunek 3.1. Diagram Hasse'a dla zbioru uporządkowanego rozważanego w przykładzie 5

Grupoid *-łącznym $\mathbf{A} = (A; +, ^*)$ nazywamy *indukującym półkratę*, jeśli działanie binarne jest przemienne oraz dla każdego $x \in A$ zachodzi warunek $x + x = x^*$.

Grupoidy *-łączne zdefiniowane w przykładach 3, 4 oraz 5 indukują półkraty.

Odnotujmy, że jedynymi unarnymi działaniami termowymi w grupoidzie indukującym półkratę są: $p_1^1(x) = x, f(x) = x^*$ oraz $g(x) = x + x^*$. Poniżej przedstawiamy tabelę dla dodawania w wolnym grupoidzie indukującym półkratę generowanym przez zbiór $\{x\}$. Oczywiście grupoid ten jest izomorficzny z algebrą działań termowych jednoargumentowych omawianego grupoidu.

$+$	x	x^*	$x+x^*$
x	x^*	$x+x^*$	$x+x^*$
x^*	x^*+x	x	$x+x^*$
$x+x^*$	$x+x^*$	$x+x^*$	$x+x^*$

Tabela 3.4.

Łatwo sprawdzić, że $f, g \in End(\mathbf{A})$. Zatem otrzymujemy

$$Ind(\mathbf{A}, A_1) = 2^A.$$

Ponadto $g(g(x)) = g(x)$, a więc g jest retrakcją, $g(A) = P_A$ oraz $\mathbf{P_A} = (P_A; +)$ jest półkratą. W rozważanej algebrze $F_a = \{x \in A \mid x + x^* = a + a^* = a\}$ dla dowolnego $a \in P_A$. Jak łatwo wykazać $\mathbf{F_a} = (F_a; +, ^*)$ jest podalgebrą grupoidu $\mathbf{A}$ indukującego półkratę. W algebrze $\mathbf{F_a}$ element a jest anihilatorem. Istotnie, $a + x = (x + x^*) + x =$
$= x^* + (x^* + x^*) = x^* + x = a$.

3.2. Działania termowe w *-łącznym grupoidzie przemiennym

Opiszemy teraz ogólną postać działań termowych w *-łącznych grupoidach przemiennych, która jest niezbędna do badania Q-niezależności w omawianych algebrach.

Przyjmujemy, że $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, natomiast $2\mathbf{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych. Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$x^0 = x^*, \quad x^1 = x \ \text{ oraz } \ i' = i + 1(\mathrm{mod}2).$$

Zdefiniujmy funkcję $\chi : \mathbf{N} \to \{0, 1\}$: $\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in 2\mathbf{N}; \\ 0 & \text{dla } n \notin 2\mathbf{N}. \end{cases}$

Jest to oczywiście funkcja charakterystyczna zbioru liczb parzystych.

Przedstawimy teraz kilka prostych własności działań w grupoidzie *-łącznym, przemiennym.

Lemat 5. *Niech $(A;+,^*)$ będzie grupoidem *-łącznym, przemiennym. Wówczas:*

$$(x+y)+z = x^*+(y+z^*), \tag{3.4}$$

$$(x+y)+z = (x+z^*)+y^*, \tag{3.5}$$

$$(w+x)+(y+z) = (w+y)+(x+z), \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}(...(x_1+x_2)+...)+x_i)+x^*)...+x^*)+x_j)+...)+x_n = \\ (...(x_1+x_2)+...)+x_i)+x)...+x)+x_j)+...)+x_n,\end{gathered} \tag{3.7}$$

jeśli $i \geq 1$ oraz x^* występuje w liczbie parzystej,

$$(...(x_1^{i_1}+x_2^{i_2})+x_3^{i_3}...)+x_n^{i_n} = (...(x_2^{i_2}+x_3^{i'_3})+x_4^{i'_4})+...)+x_n^{i'_n})+(x_1^{i_1})^{\chi(n)}, \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}(...(x_1^{i_1}+x_2^{i_2})+...)+x_k^{i_k})+...)+x_n^{i_n} = \\ (...(x_1^{i_1}+x_2^{i_2})+...)+x_{k-1}^{i_{k-1}})+x_{k+1}^{i'_{k+1}})+...)+x_n^{i'_n})+(x_k^{i_k})^{\chi(n-k)} \ \textit{dla}\ k>1.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Oznaczmy

$$g_{(k,l)}(x) = (...(x^{i_1}+x^{i_2})+...)+x^{i_l})+...)+x^{i_k}, \tag{3.10}$$

gdzie $l \leq k$ oraz

1) dla $l=0$ mamy $i_s = 1$ dla każdego $s \in \{1,...,k\}$;

2) dla $l=1$ mamy $i_s = \begin{cases} 0, & \text{gdy } s=1 \text{ lub } s \text{ parzyste;} \\ 1, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$

3) dla $l>1,$ mamy $i_s = \begin{cases} 0, & \text{gdy } s=l+2r \text{ dla pewnego } r \in \mathbf{N}; \\ 1, & \text{w pozostałych przypadkach .} \end{cases}$

Przykłady.

$g_{(1,0)}(x) = x$ (czyli $g_{(1,0)} = e_1^1$),
$g_{(5,1)}(x) = (((x^*+x^*)+x)+x^*)+x,$
$g_{(6,3)}(x) = ((((x+x)+x^*)+x)+x^*)+x.$

Dla uproszczenia piszemy $g^*_{(k,l)}(x)$ zamiast $(g_{(k,l)}(x))^*$.

Twierdzenie 16. *Każde unarne działanie termowe w przemiennym grupoidzie *-łącznym $(A;+,^*)$ można przekształcić do postaci $g_{(k,l)}(x)$ dla pewnych $l \in \mathbf{N}_0$, $k \in \mathbf{N}$ oraz $l \leq k$.*

Dowód twierdzenia 16 otrzymamy jako konsekwencję następujących lematów.

Lemat 6. *Dla $l = 0$ mamy*

$$g^*_{(k,0)} = \begin{cases} g_{(k,1)}(x), & \textit{dla } k = 1, 2; \\ g_{(k,k-1-\chi(k))}(x), & \textit{dla } k > 2. \end{cases}$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla $k > 2$ oraz k parzystego ($\chi(k) = 1$). Podkreślone zostały miejsca, w których korzystamy z własności (3.7). Mamy zatem

$g^*_{(k,0)}(x) = (...(x+x)+...)+x)^* = (...(x^* + x^*)+...)+x^*)+x^* = (...(x^*+x)+...)+x)+x^* = (...(x+x^*)+x)+...)+x)+x)+x^* = (...(x+x^*)+...)+x^*)+x^*)+x)+x^* = (...(x+x)+x)+..)+x^*)+x)+x^* = g_{(k,k-2)}(x) = g_{(k,k-1-\chi(k))}(x)$.

Dowody pozostałych przypadków przebiegają w analogiczny sposób. ■

Lemat 7. *Niech $l \geq 1$. Wówczas*

$$g^*_{(k,l)}(x) = \begin{cases} g_{(k,0)}(x), & \textit{dla } k = 1,2 \textit{ i } l = 1; \\ & \textit{oraz dla } l \in 2\mathbf{N} \textit{ i } l = k-2, k-1; \\ g_{(k,3)}(x), & \textit{dla } k > 2 \textit{ i } l = 1; \\ g_{(k,1)}(x), & \textit{dla } k > 2 \textit{ i } l = 3; \\ g_{(k,l-3)}(x), & \textit{dla } l \notin 2\mathbf{N} \textit{ i } l > 3; \\ g_{(k,l+3)}(x), & \textit{dla } l \in 2\mathbf{N} \textit{ i } l+3 \leq k; \\ g_{(k,k)}(x), & \textit{dla } l \in 2\mathbf{N} \textit{ i } l = k. \end{cases}$$

Dowód Dwa pierwsze przypadki są oczywiste. Również dwa kolejne możemy łatwo udowodnić wykorzystując własność (3.7).

Przypuśćmy zatem, że $k > 2$ i $l = 1$. Wtedy
$g^*_{(k,1)}(x) = [(...(x^*+x^*)+x)+...]^* = (...(x+x)+x^*)+... = g_{(k,3)}(x)$.
Podobnie przebiega dowód dla przypadku $k > 2$ i $l = 3$.

Przypuśćmy teraz, że l jest nieparzyste oraz $l > 3$. Wówczas mamy $g^*_{(k,l)}(x) = [(...(g_{(l-1,0)}(x) + x^*) + ...]^* = (...(g_{(l-1,l-3)}(x) + x) + ... =$ $= (...(g_{(l-4,0)}(x) + x^*) + ... = g_{(k,l-3)}(x)$.

Niech l będzie parzyste oraz $l + 3 \leq k$. Rozważymy teraz dwa przypadki:

a) dla $l = 2$ otrzymujemy $g^*_{(k,2)}(x) = (...(x + x^*) + x) + x^*) + x) + ...)^* =$ $(...(x^* + x) + x^*) + x) + x^*) + ... = (...(x + \underline{x^*) + x^*}) + x) + x^*) + ... =$ $(...(x + x) + x) + x) + x^*) + ... = g_{(k,5)}(x)$.

b) dla $l \geq 4$ mamy $g^*_{(k,l)}(x) = (...(g_{(l-1,0)}(x) + x^*) + x) + x^*) + x) + ...)^* =$
$(...(g_{(l-1,l-2)}(x) + x) + x^*) + x) + x^*) + ... =$
$(...(g_{(l-3,0)}(x) + x^*) + \underline{x) + x}) + x^*) + x) + x^*) + ... =$
$(...(g_{(l-3,0)}(x) + \underline{x^*) + x^*) + x^*) + x^*}) + x) + x^*) + ... =$
$(...(g_{(l-3,0)}(x) + x) + x) + x) + x) + x) + x^*) + ... = g_{(k,l+3)}(x)$.

Przypuśćmy, że l jest parzyste oraz $l = k$. Równość $g^*_{(2,2)}(x) = g_{(2,2)}(x)$ jest oczywista. Weźmy zatem $k > 2$. W tym przypadku zachodzi $g^*_{(k,k)}(x) = (g_{(k-1,0)}(x) + x^*)^* = g_{(k-1,k-2)}(x) + x = ((g_{(k-3,0)}(x) + x^*) + \underline{x) + x} = ((g_{(k-3,0)}(x) + \underline{x^*) + x^*}) + x^* = ((g_{(k-3,0)}(x) + x) + x) + x^* = g_{(k,k)}(x)$. ■

Prawdziwość kolejnego lematu można udowodnić przez indukcję względem n.

Lemat 8. *Niech t będzie termem *-łącznego grupoidu przemiennego* $\mathbf{A}$. *Wówczas*

$$t + [...(x_1 + x_2) + x_3) + ...) + x_n] = (...(t^{\chi(n+1)} + x_1) + x_2^*) + ...) + x_n^*.$$

□

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:

$$h_{(p,r)}(y,x) = (...(y + x^{i_1}) + x^{i_2}) + ...) + x^{i_r}) + ...) + x^{i_p},$$

gdzie $p, r \in N_0$, $r \leq p$; $i_s = 0$ dla $s < r$; $i_{r+2l} = 0$ oraz $i_{r+2l+1} = 1$ dla $l \in N_0$.

Dla uproszczenia będziemy pisać $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(y)$ w miejsce $h_{(p,r)}(g_{(k,l)}(x), y)$. Przyjmujemy, że

$$h_{(0,0)}(y,x) = y \text{ oraz } g_{(0,0)}(x) \oplus h_{(p,r)}(y) = g_{(p,r)}(y).$$

Lemat 9. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) =$

$$= \begin{cases} g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,1)}(x), & dla\ r = 1; \\ g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r-1)}(x), & dla\ r \notin 2\mathbf{N},\ r > 1; \\ g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r+1)}(x), & dla\ r \in 2\mathbf{N},\ r < p; \\ g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x), & dla\ r \in 2\mathbf{N},\ r = p. \end{cases}$$

gdzie $i = \chi(p+1)$.

Dowód. Rozważamy kolejno przypadki naszego lematu, wykorzystując lemat 8:

Ad 1. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,1)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x^* + x^*) + x) + ...] =$
$(..(g^i_{(k,l)}(x) + x^*) + x) + x^*) + ... = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,1)}(x)$.

Ad 2. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x + x) + ...) + x) + x^*) + ...] =$
$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + \underline{x^*) + ...x^*}) + x^*) + x) + ... =$
$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + ...) + x) + x^*) + x) + ... = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r-1)}(x)$.

Ad 3. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x+x) + ...) + x) + x^*) + x) + ...] =$
$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + \underline{x^*) + ...) + x^*}) + x) + x^*) + ... =$
$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + x) + ...) + x) + x) + x^*) + ... = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r+1)}(x)$.

Ad 4. $g_{(k,l)}(x) + g_{(p,r)}(x) = g_{(k,l)}(x) + [...(x + x) + ...) + x) + x^*] =$
$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + \underline{x^*) + ...) + x^*}) + x) =$
$(...(g^i_{(k,l)}(x) + x) + x) + ...) + x) + x) = g^i_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x)$. ■

Lemat 10. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) =$

$$= \begin{cases} g_{(k+p,0)}(x), & dla\ l = 0; \\ g_{(k+p,l)}(x), & dla\ p = 1\ oraz\ [l = 1, k \in 2\mathbf{N}]\ lub\ [l > 1,\ k - l \in 2\mathbf{N}]; \\ g_{(k+p,p)}(x), & dla\ l = 1,\ p \in 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,p-1)}(x), & dla\ l = 1,\ p > 1,\ p, k \in 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,p+1)}(x), & dla\ l = 1,\ p, k \notin 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,l+p)}(x), & dla\ l > 1,\ p \in 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,l+p-1)}(x), & dla\ l > 1,\ p > 1,\ p \in 2\mathbf{N}\ oraz\ k - l \in 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,l+p+1)}(x), & dla\ l > 1,\ p \notin 2\mathbf{N}\ oraz\ k - l \notin 2\mathbf{N}. \end{cases}$$

Dowód Rozpatrujemy kolejno przypadki lematu.

Ad 1. Oczywisty.

Ad 2. Rozważymy tylko przypadek gdy $l = 1$ oraz k jest parzyste. Wówczas mamy $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(1,0)}(x) = [...(x^* + x^*) + x) + ...) + x^*] + x = g_{(k+1,l)}$. Dowód dla $l > 1$ oraz $k - l$ parzystego przebiega analogicznie.

Ad 3. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) = (...[...(x^* + x^*) + x) + ...] \oplus h_{(p,0)}(x) =$
$(...(x^* \oplus h_{(p,0)}(x)) + x^*) + x) + ... = (...(x + x^*) \oplus h_{(p-2,0)}(x)) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(x \oplus h_{(p-2,0)}(x^*)) + x^*) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(g_{(p-1,0)}(x) + x^*) + x) + x^*) + x) + ... = g_{(k+p,p)}(x)$.

Ad 4. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) = (...[...(x^* + x^*) + ...) + x^*] \oplus h_{(p-1,0)}(x)) + x =$
$(...(x^* \oplus h_{(p-1,0)}(x)) + x^*) + x) + ... = (...(x + x^*) \oplus h_{(p-3,0)}(x)) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(x \oplus h_{(p-3,0)}(x^*)) + x^*) + x) + ... = (...(g_{(p-2,0)}(x) + x^*) + x) + ... = g_{(k+p,p-1)}(x)$.

Ad 5. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,0)}(x) = (...[...(x^* + x^*) + ...) + \underbrace{x] + x) + x) + ...) + x}_{p+1} =$
$(...(x^* \oplus h_{(p+1,0)}(x)) + x^*) + x) + ... = (...(x + x^*) \oplus h_{(p-1,0)}(x)) + x) + x^*) + x) + ... =$
$(...(x \oplus h_{(p-1,0)}(x^*)) + x^*) + x) + ... = (...(g_{(p,0)}(x) + x^*) + x) + ... = g_{(k+p,p+1)}(x)$.

W podobny sposób można zweryfikować pozostałe przypadki. ■

Lemat 11. *Niech $r \neq 0$; $s = [\frac{k+2}{2}] - [\frac{p-r+2}{2}]$ dla $l = 1$ oraz $t = [\frac{k-l+2}{2}] - [\frac{p-r+2}{2}]$ dla $l > 1$. Wówczas:*
$g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) =$

$$\begin{cases} g_{(k+p,1)}(x), & \textit{dla } l=1 \textit{ oraz } [r=1 \textit{ i } k\notin 2\mathbf{N}] \\ & \qquad \textit{lub } [r=2 \textit{ i } k\in 2\mathbf{N}]; \\ g_{(k+p,r-2)}(x), & \textit{dla } l=1, r>2 \textit{ oraz } k,r\in 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,r-1)}(x), & \textit{dla } l=1, r>1 \textit{ oraz } k,r\notin 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,l+r-2)}(x), & \textit{dla } l>1 \textit{ oraz } k+l,r\in 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,l+r-1)}(x), & \textit{dla } l>1 \textit{ oraz } k+l,r\notin 2\mathbf{N}; \\ g_{(k+p,0)}(x), & \textit{dla } l=1, k>1 \textit{ oraz } k+r\notin 2\mathbf{N}, s=0; \\ & \textit{lub } l>1 \textit{ oraz } k+r\notin 2\mathbf{N}, t=0; \\ g_{(k+p,k+p-2|s|+2)}(x), & \textit{dla } l=1;\ k,p\in 2\mathbf{N};\ r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s>0, \\ & \qquad \textit{lub } k\in 2\mathbf{N};\ p,r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s<0, \\ & \qquad \textit{lub } k,p\notin 2\mathbf{N};\ r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s>0, \\ & \qquad \textit{lub } k\notin 2\mathbf{N};\ p,r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s<0; \\ g_{(k+p,k+p-2|s|+1)}(x), & \textit{dla } l=1;\ k,p\in 2\mathbf{N};\ r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s<0, \\ & \qquad \textit{lub } k\in 2\mathbf{N};\ p,r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s>0, \\ & \qquad \textit{lub } k,p\notin 2\mathbf{N};\ r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s<0, \\ & \qquad \textit{lub } k\notin 2\mathbf{N};\ p,r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } s>0; \\ g_{(k+p,k+p-2|t|+1)}(x), & \textit{dla } l>1;\ k+l\in 2\mathbf{N};\ p,r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t>0, \\ & \qquad \textit{lub } k+l,p\in 2\mathbf{N};\ r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t<0, \\ & \qquad \textit{lub } k+l\notin 2\mathbf{N};\ p,r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t>0, \\ & \qquad \textit{lub } k+l,p\notin 2\mathbf{N};\ r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t<0; \\ g_{(k+p,k+p-2|t|+2)}(x), & \textit{dla } l>1;\ k+l\in 2\mathbf{N};\ p,r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t<0, \\ & \qquad \textit{lub } k+l,p\in 2\mathbf{N};\ r\notin 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t>0, \\ & \qquad \textit{lub } k+l\notin 2\mathbf{N};\ p,r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t<0, \\ & \qquad \textit{lub } k+l,p\notin 2\mathbf{N};\ r\in 2\mathbf{N} \textit{ oraz } t>0. \end{cases}$$

Dowód. Liczby s, t są rezultatem dzielenia liczby występowań symbolu * w działaniu $g_{(k,l)}(x)$ przez liczbę występowań symbolu * w działaniu $h_{(p,r)}(x)$ dla $l = 1$ oraz $l > 1$, odpowiednio.

Ad 1. Przypuśćmy, że $l = 1$. Łatwo zauważyć, że równość jest prawdziwa dla $r = 1$ oraz k nieparzystego. Weźmy teraz $r = 2$ oraz k parzyste. Wówczas mamy

$$g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,2)}(x) = [g_{(k-1,1)}(x) + x^*] \oplus [x \oplus h_{(p-1,2)}(x)] = g_{(k+p,1)}(x).$$

Ad 2. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(r-2,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) = g_{(k+r-2,r-2)}(x) \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) = [g_{(k+r-3,r-2)}(x) + x^*] \oplus [x \oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] = g_{(k+p,r-2)}(x)$.

Ad 3. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,)}(x) = g_{(k+r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(k+r-2,r-1)}(x) + x] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = g_{(k+p,r-1)}(x)$.

Ad 4. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-2,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) = g_{(k+r-2,l+r-2)}(x) \oplus h_{(p-r+2,2)}(x) = [g_{(k+r-3,l+r-2)}(x) + x^*] \oplus [x \oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] = g_{(k+p,l+r-2)}(x)$.

Ad 5. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = g_{(k+r-1,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [((g_{(k+r-2,l+r-1)}(x) + x) + x^*] \oplus h_{(p-r,2)}(x) = g_{(k+p,l+r-1)}(x)$.

Ad 6. Niech $l = 1, s = 0$, $k > 1$, k będzie parzyste oraz r nieparzyste. Przeprowadzimy dowód przez indukcję względem $i = [\frac{k+2}{2}] = [\frac{p-r+2}{2}]$. Oczywiście, $i \geq 2$, ponieważ k jest parzyste. Zatem $r < p$. Weźmy teraz $i = 2$. Jeśli p jest nieparzyste, to otrzymamy

$$g_{(2,1)}(x) \oplus h_{(p,p-2)}(x) = (([g_{(2,1)}(x) \oplus h_{(p-3,0)}(x)] + x^*) + x) + x^* =$$
$$g_{(p-1,p-3)}(x) \oplus [(x^* + x) + x^*] = [((g_{(p-4,0)}(x) + x^*) + x) + x^*] \oplus [(x^* + x) + x^*] =$$
$$(((((g_{(p-4,0)}(x) + x^*) + x) + x^*) + x^*) + x) + x^* =$$
$$(((((g_{(p-4,0)}(x) + x) + x) + x) + x) + x) + x = g_{(p+2,0)}(x).$$

W przypadku p parzystego mamy

$$g_{(2,1)}(x) \oplus h_{(p,p-3)}(x) = ((([g_{(2,1)}(x) \oplus h_{(p-4,0)}(x)] + x^*) + x) + x^*) + x =$$
$$g_{(p-2,p-4)}(x) \oplus [((x^* + x) + x^*) + x] =$$
$$[((g_{(p-5,0)}(x) + x^*) + x) + x^*] \oplus [((x^* + x) + x^*) + x] =$$
$$((((((g_{(p-5,0)}(x) + x^*) + x) + x^*) + x^*) + x) + x^*) + x =$$
$$((((((g_{(p-5,0)}(x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x = g_{(p+2,0)}(x).$$

Przypuśćmy teraz, że lemat jest prawdziwy dla i. Wówczas otrzymamy

$$g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = g_{(k,1)}(x) \oplus [g_{(r-1,0)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] =$$
$$g_{(k+r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(k+r-2,r-1)}(x) + x^*] \oplus [x^* \oplus h_{(p-r,2)}(x)] =$$
$$[(g_{(k+r-2,r-1)}(x) + x^*) + x^*] \oplus h_{(p-r,2)}(x) =$$
$$[(g_{(k+r-2,r-1)}(x) + x) + x] \oplus h_{(p-r,2)}(x) =$$
$$g_{(k+r,r+1)}(x) \oplus h_{(p-r,2)}(x) = [g_{(r,0)}(x) \oplus h_{(k,1)}(x)] \oplus h_{(p-r,2)}(x) =$$
$$[(g_{(r,0)}(x) \oplus h_{(k-1,1)}(x)) + x] \oplus [x \oplus h_{(p-r-1,1)}(x)] =$$
$$[g_{(r+2,0)}(x) \oplus h_{(k-1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r-1,1)}(x) =$$
$$g_{(r+2,0)}(x) \oplus h_{(k-r-2,0)}(x) = g_{(k+p,0)}(x).$$

Wykazaliśmy zatem prawdziwość hipotezy dla $i+1$ w rozważanym przypadku.

Dowody dla pozostałych przypadków przebiegają podobnie, więc je pomijamy.

Ad 7. W tym przypadku i kolejnych trzech rozważamy tylko pierwszy podpunkt, ponieważ pozostałe można udowodnić tymi samymi metodami.
$g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$g_{(k+r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(k+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$[[[g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(k-p+r+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r,1)}(x)] \oplus h_{(p-r,1)}(x)] + x =$
$[[g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(k-p+r+1,1)}(x)] \oplus h_{(2p-2r,0)}(x)] + x =$
$[g_{(k-p+2r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(2p-2r,0)}(x)] + x = g_{(k+p-1,2p-r-1)}(x) + x =$
$[g_{(k+p-2,2p-r-1)}(x) + x] + x = g_{(k+p,2p-r+1)}(x) = g_{(k+p,k+p-2|s|+2)}$

Ostatnia równość wynika z $|s| = \frac{k+2}{2} - \frac{p-r+1}{2}$.

Ad 8. $g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,1)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$g_{(k+r-1,r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) = [g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(k+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$[[g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(k+1,1)}(x)] \oplus h_{(k+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r-k,2)}(x)] =$
$[g_{(r-2,0)}(x) \oplus h_{(2k+2,0)}(x)] \oplus h_{(p-r-k,2)}(x) = g_{(2k+r,0)}(x) \oplus h_{(p-r-k,1)}(x) =$
$g_{(k+p,2k+r+2)}(x) = g_{(k+p,k+p-2|s|+1)}(x)$. W tym przypadku $|s| = \frac{p-r+1}{2} - \frac{k+2}{2}$.

Ad 9. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$g_{(k+r-1,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$[g_{(k-p,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$g_{(k-p+2r-2,l+r-1)}(x) \oplus h_{(2p-2r+2,0)}(x) = g_{(k+p,2p-r+l+1)}(x) =$

$g_{(k+p,k+p-2|t|+1)}(x)$, gdzie $|t| = \frac{k-l+2}{2} - \frac{p-r+2}{2}$.

Ad 10. $g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(p,r)}(x) = [g_{(k,l)}(x) \oplus h_{(r-1,0)}(x)] \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$g_{(k+r-1,l+r-1)}(x) \oplus h_{(p-r+1,1)}(x) =$
$[[g_{(l+r-2,0)}(x) \oplus h_{(k-l+1,1)}(x)] \oplus h_{(k-l+1,1)}(x)] \oplus h_{(p-n+l-r,2)}(x) =$
$[g_{(l+r-2,0)}(x) \oplus h_{(2k-2l+2,0)}(x)] \oplus h_{(p-k+l-r,2)}(x) =$
$g_{(2k-l+r,0)}(x) \oplus h_{(p-k+l-r,2)}(x) = g_{(k+p,2k-l+r+2)}(x) = g_{(k+p,k+p-2|t|+2)}(x)$.
W tym przypadku $|t| = \frac{p-r+2}{2} - \frac{k-l+2}{2}$. ■

Uogólniając twierdzenie 16 otrzymujemy następujące:

Twierdzenie 17. *Każde n-argumentowe działanie termowe w *-łącznym grupoidzie przemiennym można sprowadzić do następującej postaci:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (...(g_{(k_1,l_1)}(x_1) \oplus h_{(k_2,l_2)}(x_2)) \oplus ...) \oplus h_{(k_n,l_n)}(x_n),$$

gdzie $k_i, l_i \in \mathbf{N}_0$, $k_i \geq l_i$ dla $i = 1, ..., n$ oraz $k_1 + ... + k_n \neq 0$. □

Biorąc pod uwagę tabelę 3.4 przedstawiającą działanie binarne w algebrze działań termowych jednoargumentowych grupoidu *-łącznego indukującego półkratę oraz uwzględniając lematy 9, 10 oraz 11 otrzymamy:

Wniosek 9. *Dowolne n-arne działanie termowe w grupoidzie *-łącznym indukującym półkratę można przekształcić do postaci:*

$$f(x_1, ..., x_n) = (...(x_{k_1}^{i_1} + x_{k_2}^{i_2}) + ...) + x_{k_p}^{i_p} \tag{3.11}$$

dla pewnych $0 \leq k_1 \leq ... \leq k_p \leq n$ oraz $i_r \in \{0, 1, 2\}$ $(r = 1, ..., p)$, gdzie $x^0 = x^*$, $x^1 = x$, $x^2 = x + x^*$.

Jeśli w grupoidzie tym spełniony jest dodatkowo warunek $(\forall x \in A)\ x + x^* = a$, to w postaci (3.11) mamy $i_r \in \{0, 1\}$ $(r = 1, ..., p)$.

3.3. Q-niezależność w półkratach

W rozważanych *-łącznych grupoidach retrakt $g(A) = P_A$ jest półkratą, zatem aby można było zastosować twierdzenie 1 konieczne jest zbadanie rodzin zbiorów Q-niezależnych w półkratach. Przedstawione w tym rozdziale twierdzenia dla półkrat górnych na zasadzie dualności odnoszą się oczywiście również do półkrat dolnych.

M-niezależność w tych algebrach badał G. Szász w [43].

Twierdzenie 18. *Niech $\mathbf{L} = (L; \vee)$ będzie półkratą górną. Zbiór $X \subseteq L$ jest M-niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych parami różnych $a_1, ..., a_r \in X$ mamy*

$$a_r \nleq a_1 \vee ... \vee a_{r-1}.$$

$\square$

K. Golema-Hartman wykazała (por. [21], [22]), że $X \in Ind_t(\mathbf{L})$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie elementy zbioru X są parami nieporównywalne.

Oczywiście $Ind(\mathbf{L}, A_1) = 2^L$.

Opiszemy teraz pozostałe, omawiane przez nas, rodziny zbiorów Q-niezależnych w półkratach.

Zauważmy najpierw, że każde działanie termowe w półkracie można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$f(x_1, ..., x_n) = x_{i_1} \vee ... \vee x_{i_s}$$

dla pewnych $1 \leq i_1 \leq .... \leq i_s \leq n$.

Twierdzenie 19. *Niech $\mathbf{L} = (L; \vee)$ będzie półkratą górną oraz $Q = S_0, S$ lub G. Wówczas*

$$Ind(\mathbf{L}, M) = Ind(\mathbf{L}, Q).$$

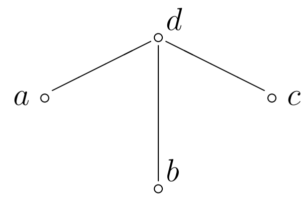
Dowód. Dowód można przeprowadzić analogicznie do dowodu twierdzenia 3. Rozważamy wówczas działania termowe $f(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1} \vee x_r$, $g(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1}$ oraz odwzorowanie $p(x) = \begin{cases} a_1 & \text{dla } x \neq a_r; \\ a_r & \text{dla } x = a_r. \end{cases}$
Oczywiście w półkratach wszystkie odwzorowania są zmniejszające, ponieważ

jedynym działaniem termowym jednoargumentowym jest działanie tożsamościowe.

■

Zauważmy teraz, że rodziny zbiorów M-niezależnych oraz I-niezależnych w półkracie górnej nie muszą być jednakowe.

Przykład



W przedstawionej półkracie mamy $a \vee b = a \vee b \vee c$. Z twierdzenia 18 wynika, że zbiór $\{a, b, c\}$ nie jest M-niezależny, gdyż $c \leq a \vee b$. Jest on natomiast I-niezależny, ponieważ suma dowolnych różnych elementów będzie zawsze równa elementowi d.

Przypadek ten można uogólnić. Półkratę $(L; \vee)$ nazywamy *niską*, jeśli posiada element największy, a pozostałe jej elementy są parami nieporównywalne. Z punktu widzenia teorii grafów zbiór częściowo uporządkowany tego typu można traktować jako graf drzewiasty, w którym tylko jeden wierzchołek ma stopień większy niż jeden (taki graf nazywany jest zwykle gwiazdą).

Twierdzenie 20. *Niech* $\mathbf{L} = (L; \vee)$ *będzie półkratą. Jeśli* $\mathbf{L}$ *jest półkratą niską, to*

$$Ind(\mathbf{L}, I) = Ind_t(\mathbf{L}).$$

Jeśli $\mathbf{L}$ *nie jest półkratą niską, to*

$$Ind(\mathbf{L}, I) = Ind(\mathbf{L}, M).$$

Dowód. Niech $\mathbf{L}$ będzie półkratą oraz $X \in Ind(\mathbf{L}, I)$. Załóżmy, że $a < b$ dla pewnych $a, b \in X$. Rozważając binarne działania termowe $f(x, y) =$

$x \vee y$, $e_2^2(x,y) = y$ oraz różnowartościowe odwzorowanie $p : X \to L$ dane wzorami $p(a) = b$, $p(b) = a$, $p(x) = x$ dla $x \neq a, b$, otrzymamy sprzeczność. Zatem wszystkie elementy zbioru I-niezależnego w półkracie muszą być parami nieporównywalne. Czyli $X \in Ind_t(\mathbf{L})$.

Przypuśćmy teraz, że $\mathbf{L}$ jest półkratą niską, wszystkie elementy zbioru $X \subseteq L$ są parami nieporównywalne oraz $f_1(a_1, ..., a_n) = g_1(a_1, ..., a_n)$ dla pewnych, różnych $a_1, ..., a_n \in X$ oraz $f_1, g_1 \in T^{(n)}(\mathbf{L})$. Z definicji półkraty niskiej wynika zatem $f_1(p(a_1), ..., p(a_n)) = g_1(p(a_1), ..., p(a_n))$ dla dowolnego różnowartościowego odwzorowania $p : X \to L$. Stąd $X \in Ind(\mathbf{L}, I)$.

Załóżmy teraz, że $\mathbf{L}$ nie jest półkratą niską, $X \in Ind(\mathbf{L}, I)$ oraz $X \notin Ind(\mathbf{L}, M)$. Z twierdzenia 18 otrzymujemy $b_r \leq b_1 \vee ... \vee b_{r-1}$ dla pewnych, parami różnych $b_1, ..., b_r \in X$. Stąd $b_1 \vee ... \vee b_{r-1} = b_1 \vee ... \vee b_{r-1} \vee b_r$. Rozważmy następujące działania termowe: $f_2(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1}$ oraz $g_2(x_1, ..., x_r) = x_1 \vee ... \vee x_{r-1} \vee x_r$. Oczywiście $f_2(b_1, ..., b_r) = g_2(b_1, ..., b_r)$. Zdefiniujmy odwzorowanie p_1 następująco:
$$p_1(x) = \begin{cases} b_2 \vee b_3 & \text{dla } x = b_1; \\ x & \text{dla } x \neq b_1. \end{cases}$$
Wykazaliśmy wcześniej, że elementy zbioru I-niezależnego muszą być parami nieporównywalne, zatem powyższe odwzorowanie jest różnowartościowe. Co implikuje
$f_2(p_1(b_1), ..., p_1(b_r)) = g_2(p_1(b_1), ..., p_1(b_r))$. Stąd mamy $b_2 \vee ... \vee b_{r-1} = b_2 \vee ... \vee b_{r-1} \vee b_r$. Po $r-3$ takich krokach otrzymamy $b_{r-2} \vee b_{r-1} = b_{r-2} \vee b_{r-1} \vee b_r$. Rodzina zbiorów
I-niezależnych jest dziedziczna zatem $\{b_{r-2}, b_{r-1}, b_r\} \in Ind(\mathbf{L}, I)$. Rozważana półkrata nie jest niska, więc istnieją różne elementy $c_1, c_2 \in L$ takie, że $c_1 \vee c_2 \neq b_{r-2} \vee b_{r-1}$.

Przypuśćmy, że $c_1 \vee c_2 > b_{r-2} \vee b_{r-1}$. Rozważając odwzorowanie różnowartościowe $p_2(b_i) = \begin{cases} b_i & \text{dla } i \neq r; \\ c_1 \vee c_2 & \text{dla } i = r \end{cases}$ $(i = r-2, r-1, r)$, otrzymamy $b_{r-2} \vee b_{r-1} = b_{r-2} \vee b_{r-1} \vee c_1 \vee c_2$, a stąd $b_{r-2} \vee b_{r-1} = c_1 \vee c_2$, co przeczy założeniu.

Załóżmy teraz, że $c_1 \vee c_2 \not> b_{r-2} \vee b_{r-1}$. W tym przypadku odwzorowanie

$$p_3(b_i) = \begin{cases} c_i & \text{dla } i = r-2, r-1; \\ b_{r-2} \vee b_{r-1} & \text{dla } i = r; \end{cases} \quad (i = r-2, r-1, r)$$

jest różnowartościowe. Korzystając z I-niezależności rozważanego zbioru uzyskamy $c_1 \vee c_2 = c_1 \vee c_2 \vee b_{r-2} \vee b_{r-1}$. Wobec tego $c_1 \vee c_2 > b_{r-2} \vee b_{r-1}$, sprzeczność.

Reasumując $X \in Ind(\mathbf{L}, M)$. ■

3.4. Q-niezależność w grupoidach *-łącznych z retrakcją

Łatwo zauważyć, że w grupoidzie *-łącznym indukującym półkratę $\mathbf{A} = (A; +, ^*)$ mamy $O(a) = \omega$ (czyli element a jest *beztorsyjny*) wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin P_A$. A także $O(a) = \iota$ wtedy i tylko, gdy $a \in P_A$. Ponadto

Lemat 12. *p jest odwzorowaniem zmniejszającym grupoidu indukującego półkratę $(A; +, ^*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p(a) \in P_A$ dla każdego $a \in P_A$.* □

Z twierdzenia 1(a) wynika

Lemat 13. *Niech $\mathbf{A} = (A; +, ^*)$ będzie grupoidem *-łącznym indukującym półkratę. Wówczas dla każdego $a \in A$ mamy*

(i) $\{a\} \in Ind(\mathbf{A}, M) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind(\mathbf{A}, I) \Leftrightarrow \{a\} \in Ind_t(\mathbf{A}) \Leftrightarrow a \notin P_A$;

(ii) $\{a\} \in Ind(\mathbf{A}, Q)$ *dla* $Q = S, S_0, G$. □

Twierdzenie 21. *Niech $\mathbf{A}_c = (A; +, ^*)$ będzie grupoidem *-łącznym indukującym półkratę spełniającym warunek $(\exists c \in A)\ (\forall x \in A)\ [x + x^* = c]$. Dla dowolnego $X \subseteq A$ następujące warunki są równoważne:*

(α) $X \in Ind(\mathbf{A}_c, M)$;

(β) $X \in Ind(\mathbf{A}_c, S)$;

(γ) $(...(b_1^{i_1} + b_2^{i_2}) + ...) + b_n^{i_n} \neq c$ *dla każdych parami różnych* $b_1, ..., b_n \in X$ *oraz* $i_k \in \{0, 1\}$ $(k = 1, ..., n)$.

Ponadto $X \in Ind(\mathbf{A}_c, G) \Leftrightarrow X \setminus \{c\} \in Ind(\mathbf{A}_c, M)$.

Dowód Wobec (1.1) implikacja ($\alpha \Rightarrow \beta$) jest oczywista.

Przypuśćmy zatem, że $X \in Ind(\mathbf{A}_c, S)$ oraz $(...(b_1^{i_1}+b_2^{i_2})+...)+b_n^{i_n} = c$ dla pewnych parami różnych $b_1, ..., b_n \in X$, $i_k \in \{0,1\}$ $(k = 1, ..., n)$. Rozważmy odwzorowanie $p : X \to \langle X\rangle_{\mathbf{A}_c}$ zdefiniowane wzorami:
$$p(b_k) = \begin{cases} b_2 & \text{dla } i_k = 1; \\ b_2^* & \text{dla } i_k = 0; \end{cases} \quad \text{dla } \ k = 1, 2 \ \text{ oraz } \ p(x) = x \ \text{ dla } \ x \neq b_1, b_2$$
oraz działania $f_1(x_1, ..., x_n) = (...(x_1^{i_1} + x_2^{i_2}) + ...) + x_n^{i_n}$, $f_2(x_1, ..., x_n) = c$. Korzystając z S-niezależności zbioru X otrzymamy $(...(b_2+b_2)+...)+b_n^{i_n} = c$. Stąd $(...(b_2^* + b_3^{i_3}) + ...) + b_n^{i_n} = c$. Po skończonej liczbie takich kroków otrzymamy $b_n^* = c$, czyli $b_n = c$. Jeśli zastosujemy własność (3.9), to w analogiczny sposób możemy otrzymać $b_k = c$ dla każdego $k = 1, ..., n$. Wbrew założeniu.

Przypuśćmy teraz, że zbiór $X \subseteq A$ spełnia warunek (γ) oraz $f_1(b_1, ..., b_n) = f_2(b_1, ..., b_n)$ dla pewnych różnych $f_1, f_2 \in T^{(n)}(\mathbf{A}_c)$, $b_1, ..., b_n \in X$. Na mocy wniosku 9 mamy $f_1(x_1, ..., x_n) = (...(x_{k_1}^{i_1}+x_{k_2}^{i_2})+...)+x_{k_p}^{i_p}$, $f_2(x_1, ..., x_n) = (...(x_{l_1}^{j_1} + x_{l_2}^{j_2}) + ...) + x_{l_r}^{j_r}$ dla pewnych, różnych podciągów $0 \leq k_1 \leq ... \leq k_p \leq n$; $0 \leq l_1 \leq ... \leq l_r \leq n$ oraz $i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_r \in \{0, 1\}$. Zatem $(...(b_{k_1}^{i_1} + b_{k_2}^{i_2}) + ...) + b_{k_p}^{i_p} = (...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}$. Ponieważ $f_1 \neq f_2$, więc istnieją liczby s i t takie, że $l_t \notin \{k_1, ..., k_{s-1}, k_{s+1}, ..., k_p\}$ oraz $(b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)} \neq (b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}$. Wówczas, stosując własność (3.9), otrzymamy
$$(...(b_{k_1}^{i_1} + b_{k_2}^{i_2}) + ...) + b_{k_{s-1}}^{i_{s-1}}) + b_{k_{s+1}}^{i'_{k+1}}) + ...) + b_{k_p}^{i'_p}) + (b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)} =$$
$= (...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j'_r}) + (b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}$. Dodając do obu stron równania $(b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)}$ i korzystając z własności (3.4) mamy
$$[(...(b_{k_1}^{i_1}+b_{k_2}^{i_2})+...)+b_{k_{s-1}}^{i_{s-1}})+b_{k_{s+1}}^{i'_{k+1}})+...)+b_{k_p}^{i'_p}]^*+[(b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)}+((b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)})^*] =$$
$$= [(...(b_{l_1}^{j_1}+b_{l_2}^{j_2})+...)+b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}})+b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}})+...)+b_{l_r}^{j'_r}]^*+[(b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}+((b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)})^*].$$
Stąd $c = [(...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}] + (b_{k_s}^{i_s})^{\chi(p-s)}$, jeśli $l_t \neq k_s$.

W przypadku, gdy $l_t = k_s$ mamy $\chi(r-t) = \chi(p-s)+1 (\text{mod } 2)$. Wówczas
$$c = [(...(b_{l_1}^{j_1}+b_{l_2}^{j_2})+...)+b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}})+b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}})+...)+b_{l_r}^{j'_r}]^*+[(b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}+(b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}] =$$
$$= [(...(b_{l_1}^{j_1} + b_{l_2}^{j_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j'_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j'_r}]^* + [(b_{l_t}^{j_t})^{\chi(r-t)}]^* =$$

$= [(...(b_{l_1}^{j'_1} + b_{l_2}^{j'_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j'_{t-1}}) + b_{l_{t+1}}^{j_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}] + (b_{l_t}^{j'_t})^{\chi(r-t)} =$ $[(...(b_{l_1}^{j'_1} + b_{l_2}^{j'_2}) + ...) + b_{l_{t-1}}^{j'_{t-1}}) + b_{l_t}^{j'_t}) + b_{l_{t+1}}^{j_{t+1}}) + ...) + b_{l_r}^{j_r}]$. W obu tych przypadkach otrzymujemy sprzeczność z założeniem. Czyli $X \in Ind(\mathbf{A}_c, M)$.

Z własności (1.4) mamy $X \in Ind(\mathbf{A}_c, G) \Leftrightarrow X \setminus \{c\} \in Ind(\mathbf{A}_c, G)$. W rozważanej algebrze $P_A = \{c\}$, czyli wszystkie elementy zbioru $X \setminus \{c\}$ są beztorsyjne, zatem na mocy własności (1.4) i (1.7) otrzymujemy $X \setminus \{c\} \in Ind(\mathbf{A}_c, G) \Leftrightarrow X \setminus \{c\} \in Ind(\mathbf{A}_c, M)$. ■

Z twierdzenia 1(d) wynika, że szukając zbiorów M oraz I-niezależnych musimy wybierać elementy spośród różnych klas F_a. To samo dotyczy S oraz S_0-niezależności, jeśli dany zbiór nie zawiera się w pewnej klasie (twierdzenie 1(e)). W grupoidach indukujących półkraty własność ta dotyczy również G-niezależności.

Wniosek 10. *Niech $\mathbf{A} = (A; +, ^*)$ będzie grupoidem indukującym półkratę oraz $b_1, b_2 \in F_a$ dla pewnego $a \in P_A$. Wówczas $\{b_1, b_2\} \notin Ind(\mathbf{A}, G)$.*

Istotnie, w każdej klasie F_a jest dokładnie jeden element z P_A. Zatem, możemy przeprowadzić dowód analogiczny do dowodu twierdzenia 1(d), przyjmując za a ewentualny element z P_A. Wówczas zdefiniowane we wspomnianym dowodzie odwzorowanie p_1 będzie zmniejszające, na mocy lematu 12. ■

Natomiast zbiory złożone z elementów pewnej klasy abstrakcji mogą być zbiorami t-niezależnymi w rozważanych algebrach.
Przykład 5'. W grupoidzie indukującym półkratę rozważanym w Przykładzie 5 zbiór $\{g, k\} \subseteq F_o$ jest t-niezależny. Ponadto w rozważanej algebrze zbiór $\{c, e\}$ należy do rodziny zbiorów G-niezależnych, chociaż $c \in g(A)$ i $e \notin g(A)$. Wynika stąd, że twierdzenie 1(f) nie jest prawdziwe dla G-niezależności.

Na mocy twierdzenia 1(b) kolejnym warunkiem koniecznym dla M-niezależności zbioru X jest $g(X) \in Ind(g(\mathbf{A}), M)$. Wykażemy, że w przypadku grupoidów indukujących półkraty implikacja ta jest prawdziwa również dla S, S_0 oraz G-niezależności.

Oznaczmy przez $X_P = \{x + x^* \mid x \in X\} = g(X)$.

Twierdzenie 22. *Niech* $\mathbf{A} = (A; +,^*)$ *będzie grupoidem indukującym półkratę,*
$X \subseteq A$ *oraz* $|X| > 1$. *Jeśli* $X \in Ind(\mathbf{A}, Q)$, *to* $X_P \in Ind(\mathbf{P}_A, Q)$ *dla* $Q = S, S_0, G$ *oraz* I.

Dowód. Przypuśćmy, że $X \subseteq A$, $|X| > 1$ oraz $X_P \notin Ind(\mathbf{P}_A, Q)$ dla $Q = S, S_0, G$. Zgodnie z twierdzeniami 18 i 19 w półkracie $\mathbf{P}_A$ zachodzi $g(b_1) + g(b_2) + ... + g(b_{n-1}) = g(b_1) + g(b_2) + ... + g(b_{n-1}) + g(b_n)$ dla pewnych, parami różnych $g(b_1), ..., g(b_n) \in X_P$. Stąd

$$\begin{gathered}(...((b_1 + b_1^*) + (b_2 + b_2^*)) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*) = \\ (...((b_1 + b_1^*) + (b_2 + b_2^*)) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*)) + (b_n + b_n^*).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Zdefiniujmy następujące działania termowe
$f_1(x_1, ...x_n) = (...((x_1 + x_1^*) + (x_2 + x_2^*)) + ...) + (x_{n-1} + x_{n-1}^*)$,
$g_1(x_1, ...x_n) = (...((x_1 + x_1^*) + (x_2 + x_2^*)) + ...) + (x_{n-1} + x_{n-1}^*)) + (x_n + x_n^*)$.

Zakładając, że $X \in Ind(\mathbf{A}, S_0)$ oraz rozważając odwzorowanie
$$p_1(x) = \begin{cases} b_1 & \text{dla } x \neq b_n; \\ b_n & \text{dla } x = b_n. \end{cases}$$
otrzymamy $g(b_1) = g(b_1) + g(b_n)$, a stąd, wykorzystując S_0-niezależność zbioru X, można łatwo wykazać, że $g(b_1) = g(b_n)$, co przeczy założeniu.

Wobec (1.2) oraz twierdzenia 19 rozważana implikacja jest prawdziwa również dla S-niezależności.

Jeśli $b_i \notin P_A$ $(i = 1, .., n)$, to odwzorowanie p_1 jest zmniejszające. W przeciwnym razie wystarczy w definicji odwzorowania p_1 w miejsce b_1 wziąć dowolny element, który należy do P_A. Zatem implikacja ta jest prawdziwa również dla G-niezależności.

Przypuśćmy teraz, że $X \in Ind(\mathbf{A}, I)$ oraz $X_P \notin Ind(\mathbf{P}_A, I)$. Na mocy twierdzenia 1(a) odwzorowanie
$$p_2(x) = \begin{cases} b_2 + b_2^* & \text{dla } x = b_1; \\ x & \text{dla } x \neq b_1 \end{cases}$$
jest różnowartościowe, ponieważ $X \cap P_A = \emptyset$.

Jeśli półkrata $\mathbf{P}_A$ nie jest niska, to z twierdzenia 20 mamy $X_P \notin Ind(\mathbf{P}_A, M)$. Możemy zatem przeprowadzić analogiczne do powyższego

rozumowanie otrzymując z warunku (3.12) równość
$(...((b_2 + b_2^*) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*) = (...((b_2 + b_2^*) + ...) + (b_{n-1} + b_{n-1}^*)) +$
$(b_n + b_n^*)$.
Po skończonej liczbie takich kroków uzyskamy $g(b_{n-1}) = g(b_{n-1}) + g(b_n)$, co implikuje $g(b_{n-1}) = g(b_n)$, wbrew założeniu.

W przypadku, gdy półkrata $\mathbf{P}_A$ jest niska, z założenia wynika, że w zbiorze X_P istnieją co najmniej dwa elementy porównywalne ze sobą. Zatem mamy warunek (3.12) dla $n = 2$. Wówczas, wykorzystując I-niezależnośc zbioru X, łatwo wykazać sprzeczność. ■

Z twierdzenia 1(c) i twierdzenia 22 otrzymujemy natychmiast następujący:

Wniosek 11. *Niech* $\mathbf{A} = (A; +,^*)$ *będzie grupoidem indukującym półkratę. Wówczas*

$$(\forall X \subseteq P_A)\ [X \in Ind(\mathbf{A}, Q) \Leftrightarrow X \in Ind(\mathbf{P}_A, Q)]$$

dla $Q = S, S_0$ *oraz* G.

3.5. Quasigrupy *-łączne

Grupoid *-łączny $(A; +,^*)$ nazywamy *quasigrupą *-łączną*, jeśli $(A; +)$ jest quasigrupą.

Rozważmy grupoid *-łączny $(A; +,^*)$ spełniający następujące warunki:

$$(\exists \varepsilon \in A)\ (\forall a \in A) \quad \varepsilon + a = a^*, \tag{3.13}$$

$$(\forall a \in A)\ (\exists b \in A) \quad b + a = \varepsilon, \tag{3.14}$$

gdzie ε jest elementem spełniającym warunek (3.13).

Wykażemy, że tak zdefiniowany grupoid jest quasigrupą.

Lemat 14. *Niech* $(A; +,^*)$ *będzie grupoidem *-łącznym oraz* $\varepsilon \in A$ *spełnia warunek* (3.13). *Wówczas* $\varepsilon \in P_A$, ε *należy do centrum algebry* A *oraz jest jednoznacznie określony.*

Dowód Wykażemy najpierw, że $\varepsilon = \varepsilon^*$. Z warunku (3.13) oraz aksjomatów (3.1), (3.2) wynika, że $x^* + \varepsilon^* = x$ dla wszystkich $x \in A$. Podstawiając y w miejsce x^* (ponieważ * jest "na" A), otrzymujemy $y + \varepsilon^* = y^*$ dla każdego $y \in A$. Stąd $\varepsilon + \varepsilon^* = \varepsilon^*$, a z warunku (3.13) $\varepsilon + \varepsilon^* = (\varepsilon^*)^* = \varepsilon$. Czyli $\varepsilon = \varepsilon^*$. Zatem

$$(\exists \varepsilon \in A)\ (\forall a \in A) \quad a + \varepsilon = a^* = \varepsilon + a. \tag{3.15}$$

Element ε komutuje ze wszystkimi elementami zbioru A, zatem należy do centrum rozważanej algebry. Co wiecej, $\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon^*$. Zauważmy, że element ε jest jednoznacznie określony. Rzeczywiście, niech ε, ε' spełniają (3.13), wówczas, korzystając z warunku (3.15), mamy $\varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon + \varepsilon' = (\varepsilon')^* = \varepsilon'$. ■

Lemat 15. *Niech $(A; +,^*)$ będzie grupoidem *-łącznym spełniającym warunki* (3.13) *i* (3.14). *Jeśli $a, b \in A$ i $b + a = \varepsilon$, to b jest jednoznacznie określony oraz $a + b = \varepsilon$.*

Dowód Dla dowolnego $a \in A$ istnieje $b \in A$ spełniające warunek $b + a = \varepsilon$. Również dla elementu b mamy $c + b = \varepsilon$ przy pewnym $c \in A$. Wówczas

$$c^* = c + \varepsilon = c + \varepsilon^* = c + (b + a)^* = (c + b)^* + a = \varepsilon^* + a = \varepsilon + a = a^*.$$

Stąd $a = c$, ponieważ odwzorowanie $x \mapsto x^*$ jest różnowartościowe. Zatem

$$(\forall a \in A)\ (\exists b \in A) \quad b + a = \varepsilon = a + b. \tag{3.16}$$

Wykażemy teraz, że element b z warunku (3.14) jest jednoznacznie wyznaczony przez a. Niech b_1, b_2 spełniają (3.14). Wtedy

$$b_1^* = \varepsilon + b_1 = \varepsilon^* + b_1 = (b_2 + a)^* + b_1 = b_2 + (a + b_1)^* = b_2 + \varepsilon = b_2^*,$$

a więc $b_1 = b_2$. ■

Twierdzenie 23. *Niech* $\mathbf{A} = (A; +,^*)$ *będzie grupoidem *-łącznym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathbf{A}$ *spełnia* (3.13) *oraz* (3.14);

(2) $(A; +)$ *jest quasigrupą.*

Dowód Przypuśćmy, że algebra **A** spełnia warunki (3.13) i (3.14). Udowodnimy, że dla dowolnych $a, b \in A$ równania $a + x = b$, $y + a = b$ mają jednoznaczne rozwiązania. Załóżmy, że $a+x = b$. Zatem $(a+x)^* = b^*$. Z lematu 15 wynika, że istnieje dokładnie jedno c takie, że $c + a = \varepsilon$. Stąd $c+(a+x)^* = c+b^*$, a także $(c+a)^*+x = c+b^*$. Czyli $\varepsilon^* x = cb^*$. Na mocy lematu 14 mamy $\varepsilon + x = c + b^*$. Stosując (3.13) uzyskujemy $x^* = c + b^*$. Co implikuje $x = b + c^*$. Podobnie można wykazać, że $y = d^* + b$ dla pewnego elementu $d \in A$ jednoznacznie wyznaczonego przez a.

Przypuśćmy teraz, że $(A; +)$ jest quasigrupą. Dla ustalonego elementu $a \in A$ istnieje ε_a takie, że $\varepsilon_a + a = a^*$, ponieważ $(A, +)$ jest quasigrupą. Należy wykazać, że dla każdego $b \in A$ mamy $\varepsilon_a + b = b^*$. Weźmy zatem $b \in A$. Oczywiście $c + a^* = b$ dla pewnego $c \in A$. Stąd $(\varepsilon_a+b)^* = b^*+\varepsilon_a^* = (c+a^*)^*+\varepsilon_a^* = c+(a^*+\varepsilon_a^*)^* = c+(\varepsilon_a+a) = c+a^* = b$. W konsekwencji otrzymujemy $\varepsilon_a+b = b^*$, czyli grupoid **A** spełnia warunek (3.13).

Rozważmy teraz równanie $x+a = \varepsilon$. Ma ono jednoznaczne rozwiązanie, zatem w algebrze $(A; +,^*)$ zachodzi warunek (3.14). ■

Przykłady.

1) Rozważmy zbiór $A = \{\varepsilon, a, b, c\}$ wraz działaniem binarnym $\oplus$ zdefiniowanym tabelą 3.5 oraz z inwolucją * taką, że $\varepsilon = \varepsilon^*$, $a^* = b$, $c^* = c$.

$\oplus$	ε	a	b	c
ε	ε	b	a	c
a	b	ε	c	a
b	a	c	ε	b
c	c	a	b	ε

Tabela 3.5.

Wówczas $(A; +,^*, \varepsilon)$ jest quasigrupą *-łączną.

2) Algebra $(Z;\oplus,^*)$, gdzie $x\oplus y=-(x+y)+3a$ (dla ustalonego $a\in Z$) oraz $x^*=-x+2a$ jest quasigrupą *-łączną.

Ponadto grupoid *-łączny $(H_0,\oplus,^*)$ zdefiniowany w rozdziale 3.1 (przykład 2, strona 43) oraz grupoidy opisane w przykładach 3,4 (strona 44) tegoż rozdziału są również quasigrupami *-łącznymi.

Kolejne przykłady quasigrup *-łącznych otrzymamy, gdy w grupoidzie *-łącznym $(A;+,^*)$ istnieje idempotent e. Możemy wówczas zdefiniować zbiór Q_e w następujący sposób:

$$Q_e=\{a\in A\mid e+a=a+e=a^*,\ a+b=b+a=e \text{ dla pewnego } b\in A\}.$$

Fakt 8. *Niech* $\mathbf{A}=(A;+,^*)$ *będzie grupoidem* **-łącznym. Wówczas* $(Q_e;+,^*)$ *jest quasigrupą* **-łączną oraz*

$$Q_e=\{a\in A\mid\ a^*\in(e+A)\cap(A+e),\ e\in(a+A)\cap(A+a)\}.$$

Dowód. Udowodnimy najpierw, że Q_e jest podalgebrą algebry $\mathbf{A}$. Niech $a\in Q_e$. Wtedy $a+e=e+a=a^*$ oraz $a+b=b+a=e$ dla pewnego $b\in A$. Zatem $e+a^*=(a+e)^*=(a^*)^*=a=a^*+e,\ a^*+b^*=(b+a)^*=e=b^*+a^*$. Co implikuje $a^*\in Q_e$.

Przypuśćmy teraz, że $a,b\in Q_e$. Stąd $a+c=c+a=e$ oraz $b+d=d+b=e$ dla pewnych $c,d\in A$. Wówczas

$$\begin{gathered}e+(a+b)^*=(e+a)^*+b=a^{**}+b=a+b,\\(a+b)^*+e=a+(b+e)^*=a+b,\\(a+b)^*+(d+c)^*=a+(b+(d+c)^*)^*=a+((b+d)^*+c)^*=\\a+(e+c)^*=(a+e)^*+c=a+c=e=(d+c)^*+(a+b)^*.\end{gathered}$$

Tak więc $(a+b)^*\in Q_e$, co implikuje $a+b\in Q_e$.

Aby udowodnić, że $Q_e\supseteq\{a\in A\ :\ a^*\in(e+A)\cap(A+e),\ e\in(a+A)\cap(A+a)\}$, przypuśćmy, że $a^*\in(e+A)\cap(A+e)$ oraz $e\in(a+A)\cap(A+e)$. Zatem $a^*=e+p,\ a^*=q+e,\ e=a+r$ oraz $e=t+a$ dla pewnych $p,q,r,t\in A$. Stąd $e+a=e+(e+p)^*=(e+e)^*+p=e+p=a^*$. Analogicznie $a+e=a^*$.

Weźmy teraz $b=(t+e)^*$. Wtedy $t+e=t+e^*=t+(a+r)^*=(t+a)^*+r=e+r=(t+a)+r$. Czyli $(t+a)+r=b^*=t+(a+r)$, a stąd

$a+b = a+((t+a)+r)^* = a+(e+r)^* = (a+e)^*+r = a^{**}+r = a+r = e$. W podobny sposób możemy udowodnić, że $b+a = e$. W rezultacie otrzymamy $a \in Q_e$. ■

Niech $\mathbf{A} = (A; +, ^*, \varepsilon)$ będzie quasigroupą *-łączną. Dla dowolnego $a \in A$ oznaczmy przez $-a$ element spełniający warunek $a + (-a) = \varepsilon$. Piszemy $a-b$ w miejsce $a+(-b)$. W dalszych naszych rozważniach unarne działane $a \mapsto -a$ dodajemy do zbioru działań fundamentalnych algebry $\mathbf{A}$.

Fakt 9. *Niech $(A; +, -, ^*, \varepsilon)$ będzie quasigrupą *-łączną. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
(1) $(\forall a \in A)\ a = a^*$;
(2) $(A; +, -, \varepsilon)$ *jest grupą przemienną.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). W quasigrupie *-łącznej zachodzi warunek (3.15). Z założenia wynika zatem $a + \varepsilon = a = \varepsilon + a$. Warunek (3.16) gwarantuje, że dla każdego elementu istnieje element przeciwny. Oczywiście $+$ jest łączne i przemienne.
(2) $\Rightarrow$ (1). Konsekwencja faktu 5. ■

Udowodnimy teraz kilka prostych własności działań w quasigrupie *-łącznej oraz *-łącznej quasigrupie przemiennej.

Lemat 16. *Niech $(A; +, -, ^*, \varepsilon)$ będzie quasigrupą *-łączną. Wówczas dla dowolnych $a, b, c \in A$ mamy:*
(a) $(-a)^* = -(a^*)$;
(b) $-(a + b) = (-b) + (-a)$;
(c) $a = b \Leftrightarrow a - b = \varepsilon$;
(d) $a + b = c \ \Leftrightarrow\ a = -b^* + c \ \Leftrightarrow\ b = c - a^*$;
(e) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ *oraz* $c + a = c + b \Rightarrow a = b$.

Dowód. Ad. (b) $(a+b)+((-b)+(-a)) = (a+b)+((-a^*)+(-b^*))^* =$
$= ((a + b) + (-a^*))^* + (-b^*) = ((b^* + a^*)^* + (-a^*))^* + (-b^*) =$
$= (b^* + (a^* + (-a^*))^*)^* + (-b^*) = (b^* + \varepsilon)^* + (-b^*) = b^* + (-b^*) = \varepsilon$.

Proste dowody pozostałych własności pomijamy. ■

Lemat 17. *Niech* $(A;+,-,^*,\varepsilon)$ *będzie przemienną quasigrupą* **-łączną,* $a \in A$ *oraz* $i = 0,1$. *Wówczas*

(*e*) $-(a-a^*) = (a-a^*)^*$,

(*f*) $a^i + (a-a^*) = a^i$,

(*g*) $(a+a^*) + (a-a^*)^i = a^i + a^i$. □

Opiszemy teraz ogólną postać działań termowych w *-łącznych quasigrupach przemiennych. W tym celu zdefiniujmy T_1 i T_2 jako zbiory termów postaci $g_{(k,l)}(x)$ (wzór (3.10)) spełniających odpowiednio następujące warunki:

1) $l = 0$ dla $k = 2$; $l = 1$ dla k nieparzystych; $l = 3$ dla $k > 2$ i k parzystych;

2) $l = 0$ dla $k = 1$; $l = 1$ dla k parzystych; $l = 3$ dla $k > 1$ i k nieparzystych.

Oznaczmy

$$f_{(k,l,m,n)}(x) = g_{(k,l)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*), \tag{3.17}$$

gdzie $k,l,m,n \in N_0$, $g_{(0,0)}(x) = \varepsilon$ oraz jeśli $m \neq 0$, to

$$[g_{(k,l)}(x) \in T_1 \text{ i } g_{(m,n)}(x) \in T_2] \text{ lub } [g_{(k,l)}(x) \in T_2 \text{ i } g_{(m,n)}(x) \in T_1].$$

Twierdzenie 24. *Każde unarne działanie termowe w* **-łącznej quasigrupie przemiennej* $(A;+,-,^*,\varepsilon)$ *można przekształcić do postaci*

$$\pm f_{(k,l,n,m)}(x).$$

Dowód Oczywiście każda *-łączna quasigrupa jest również *-łącznym grupoidem. Na mocy twierdzenia 16 działania termowe postaci $g_{(k,l)}(x)$, a także $-g_{(k,l)}(x)$ należą do zbioru działań termowych *-łącznej quasigrupy przemiennej. Z własności (3.5) oraz lematu 16(a) i (b) wynika, że $g_{(k,l)}(x) \pm g_{(m,n)}(x-x^*)$ oraz $-g_{(k,l)}(x) \pm g_{(m,n)}(x-x^*)$ również do niego należą. Na mocy lematu 17(a) są one równoważne z $\pm[g_{(k,l)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*)] = \pm f_{(k,l,n,m)}(x)$.

Rozważamy tylko działania termowe postaci $f_{(k,l,n,m)}(x)$, ponieważ dla działania termowego postaci $-f_{(k,l,n,m)}(x)$ dowód przebiega analogicznie. Dla $i = 0,1$ zdefiniujmy $j = i + 1(\text{mod } 2)$.

Na początek zauważmy, że w przypadku $m \neq 0$ wystarczy rozpatrywać tylko działania termowe postaci $g_{(k,l)}(x)$ należące do T_1 lub T_2, ponieważ pozostałe można przekształcić do żądanej postaci: $\pm f_{(k',l',m',n')}(x)$.

Przypuśćmy zatem, że $l = 2$. Dla $k = 2$ otrzymamy
$f_{(2,2,n,m)}(x) = (x+x^*)+g_{(m,n)}(x-x^*) = (x+x^*)+[g_{(m-1,n)}(x-x^*)+(x-x^*)^i] = [x^j+g_{(m-1,n)}(x-x^*)]+[x^i+(x-x^*)^i] = [x^j+g_{(m-1,n)}(x-x^*)]+x^i = (x^j+x^j)+g^*_{(m-1,n)}(x-x^*)$, gdzie $x^i+x^i = g_{(2,j)}(x) \in T_1$ lub T_2.

Dla $k > 2$ oraz k parzystego mamy

$$
\begin{aligned}
f_{(k,2,n,m)}(x) &= g_{(k,2)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*) = \\
&[(x + x^*) \oplus g_{(k-2,2)}(x)] + [g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)^i] = \\
&[((x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x) + x^i] + [g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)^i] = \\
&[(x^i + (x - x^*)^i] + [(x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x)) + g_{(m-1,n)}(x - x^*)] = \\
&x^i + [(x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x)) + g_{(m-1,n)}(x - x^*)] = \\
&[x^j + (x^j \oplus g_{(k-2,2)}(x)] + g *_{(m-1,n)} (x - x^*) = \\
&[(x^j + x^j) \oplus g_{(k-2,2)}(x)] + g *_{(m-1,n)} (x - x^*).
\end{aligned}
$$

Po skończonej liczbie podobnych kroków otrzymamy $f_{(k',l',m',n')}(x)$, gdzie $m' = 0$ lub $g_{(k',l')}(x)$ należą do T_1 or T_2. Zatem możemy przyjąć, że $l \neq 2$.

Oczywiście $(x + x) + x = (x + x^*) + x^*$ zatem, stosując powyższe metody uzyskujemy $l \leq 3$ dla $k \geq 3$. W konsekwencji, $g_{(k,l)}(x) \in T_1$ lub $g_{(k,l)}(x) \in T_2$.

Ponieważ $g_{(2,2)}(x-x^*) = (x-x^*)+(x-x^*)^* = \varepsilon$ oraz $g_{(3,0)}(x-x^*) = ((x-x^*)+(x-x^*))+(x-x^*) = (x-x^*)$, więc term $g_{(m,n)}(x-x^*)$ należy do T_1 lub T_2.

Przypuśćmy teraz, że $g_{(k,l)}(x), g_{(m,n)}(x) \in T_1$. Wówczas dla $k = 1$, $m = 1$ otrzymamy $f_{(1,1,1,1)}(x) = g_{(1,1)}(x) + g_{(1,1)}(x - x^*) = x^*$, z lematu 17(b). Czyli możemy działanie termowe przekształcić do formy $f_{(k',l',n',m')}(x)$, gdzie $m' = 0$.

Dla $k = 1, m > 1$ mamy $f_{(1,1,n,m)}(x) = g_{(1,1)}(x) + g_{(m,n)}(x - x^*) = x^* + (g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)) = (x + (x - x^*)) + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) = x + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) = g_{(1,0)}(x) + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*)$, gdzie $g_{(1,0)}(x) \in T_2$ i $g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) \in T_1$.

Dla $k > 1, m = 1$ zauważmy, że
$f_{(k,l,1,1)}(x) = g_{(k,l)}(x) + g_{(1,1)}(x - x^*) = (g_{(k-1,l)}(x) + x) + (x - x^*)^* = (x + (x - x^*)) + g^*_{(k-1,l)}(x) = g^*_{(k-1,l)}(x) + x$. Stąd $m' = 0$.

W przypadku $k = 2$ i $m = 2$, z własności (3.5) i lematu 17(b) mamy $f_{(2,0,2,0)}(x) = g_{(2,0)}(x)$.

Dla $k = 2$ oraz $m > 2$ otrzymamy
$f_{(2,0,n,m)}(x) = (x + x) + (g_{(m-1,n)}(x - x^*) + (x - x^*)) =$
$(x + (x - x^*)) + (x + g_{(m-1,n)}(x - x^*)) = x + (x + g_{(m-1,n)}(x - x^*)) =$
$(x + x^*) + g^*_{(m-1,n)}(x - x^*) = (x + x^*) + (g^*_{(m-2,n)}(x - x^*) + (x - x^*)) =$
$((x + x^*)^* + (x - x^*)) + g_{(m-2,n)}(x - x^*) = ((x + x^*) + (x - x^*))+$
$g_{(m-2,n)}(x - x^*) = ((x + x^*)^* + (x - x^*)) + g_{(m-2,n)}(x - x^*) =$
$(x^* + x^*) + g_{(m-2,n)}(x - x^*)$, gdzie $g_{(2,1)}(x) \in T_2$ oraz $g_{(m-2,n)}(x - x^*) \in T_1$.

W przypadku $k > 2, m = 2$ uzyskamy
$f_{(k,l,2,0)}(x) = (g_{(k-1,l)}(x) + x) + ((x - x^*) + (x - x^*)) =$
$((x - x^*) + x) + (g_{(k-1,l)}(x) + (x - x^*)) = x + (g_{(k-1,l)}(x) + (x - x^*)) =$
$x + ((g_{(k-2,l)}(x) + x^*) + (x - x^*)) = x + (g^*_{(k-2,l)}(x) + (x^* + (x - x^*)^*) =$
$x + (g^*_{(k-2,l)}(x) + x^*) = (g^*_{(k-2,l)}(x) + x^*) + x$. Zatem $m' = 0$.

Dla $k > 2, m > 2$ mamy $f_{(k,l,n,m)}(x) =$
$((g_{(k-2,l)}(x) + x^*) + x) + ((g_{(m-2,n)}(x - x^*) + (x - x^*)^*) + (x - x^*)) =$
$(g^*_{(k-2,l)}(x) + (x^* + x^*)) + (g^*_{(m-2,n)}(x - x^*) + ((x - x^*)^* + (x - x^*)^*) =$
$(g^*_{(k-2,l)}(x) + g^*_{(m-2,n)}(x - x^*)) + ((x^* + x^*) + ((x - x^*)^* + (x - x^*)^*) =$
$(g^*_{(k-2,l)}(x) + g^*_{(m-2,n)}(x - x^*)) + (x^* + x^*) =$
$((x + x) + g^*_{(k-2,l)}(x)) + g_{(m-2,n)}(x - x^*)$. Po skończonej liczbie podobnych przekształceń uzyskamy działanie termowe o żądanej postaci.

Analogiczny wniosek otrzymamy dla $g_{(k,l)}(x), g_{(m,n)}(x) \in T_2$. ∎

Bibliografia

[1] BALBES R., DWINGER Ph.: *Distributive Lattices*, Univ. Missouri Press, Columbia, Miss. 1974.

[2] BIRKHOFF G.: *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., New York, 1949.

[3] BIRKHOFF G.: *On the combination of subalgebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. **29** (1933), 441-464.

[4] BURRIS S., SANKAPPANAVAR H.P.: *A Course in Universal Algebra*, second edition, The Millennium Edition, 2000.

[5] CHAJDA I., GŁAZEK K.: *A Basic Course on General Algebra*, Technical Univ. Press, Zielona Góra 2000.

[6] CHEN C. C., GRÄTZER G.: *Stone lattices. I: Construction theorems*, Can. J. Math. **21** (1969), 884-894 .

[7] CHWASTYK A., GŁAZEK K.: *Remarks on *-associative groupoids*, Contributions to General Algebra **13** (2001), 83-89.

[8] CHWASTYK A., GŁAZEK K.: *Term operations in commutative *-associative groupoids*, Contributions to General Algebra **14** (2004), 35-42.

[9] CHWASTYK A., GŁAZEK K.: *Pseudo-nearrings and quasi-modules over them*, Ukrainian Math. Bull. **1** (2004), 129-139.

[10] CHWASTYK A., GŁAZEK K.: *Remarks on Q-independence of Stone algebra*, Math. Slovaca **56** (2006), No. 2, 181-197.

[11] CHWASTYK A.: *Retracts and Q-independence*, Discussiones Math., General Algebra and Appl. **27** (2007), 235-243.

[12] FRINK O.: *Pseudo-complements in semi-lattices*, Duke Math Journal **29** (1962), 505-514.

[13] GEHRKE M., WALTER E.: *Iterating conditionals and symmetric Stone algebras*, Discrete Math. **148** (1996), 49-63.

[14] GLEICHGEWICHT B.: *On some class of rings*, Fund. Math. **48** (1960), 355-359.

[15] GLIVENKO V.: *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bull. Acad. des Sci. de Belgique **15** (1929), 183-188.

[16] GŁAZEK K.: *O pewnych pierścieniach niełącznych*, Acta Uniw. Wratislav. **17** (1961), 15-19.

[17] GŁAZEK K.: **-łączne i* γ*-algebry*, Acta Uniw.Wratislav. **58** (1967), 5-19.

[18] GŁAZEK K.: *Independence with respect to family of mappings in abstract algebras*, Dissertationes Math. **81** (1971).

[19] GŁAZEK K.: *General notions of independence*, p. 112-128 in "Advances in Algebra", World Scientific, Singapore 2003.

[20] GŁAZEK K., HECHT T. and KATRIŇÁK T.: *On weak homomorphisms of Stone algebra*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **17** (1975), 145-159.

[21] GOLEMA-HARTMAN K.: *Idempotent reduct of abelian groups and minimal algebras*, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences **21** (1973), 809-811.

[22] GOLEMA-HARTMAN K.: *Exchange property and t-independence*, Colloq. Math. **36** (1976), 181-186.

[23] GRÄTZER G.: *A generalization of Stone's representation theorem for Boolean algebras*, Duke Math. Journal **30** (1963), 469-474.

[24] GRÄTZER G.: *A new notion of independence in universal algebras*, Colloq. Math. **17** (1967), 225-234.

[25] GRÄTZER G.: *General Lattice Theory*, Academic Press, New York 1978.

[26] GRÄTZER G.: *Universal Algebra*, wydanie drugie, Springer-Verlag, New York 1979.

[27] GRÄTZER G., SCHMIDT E. T.: *On a problem of M. H. Stone*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 455-460.

[28] HION J.: Ω*-ringoids,* Ω*-rings and their representations* (w j. rosyjskim), *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **14** (1965), 3-47.

[29] HOWIE J. M.: *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London 1976.

[30] IWIŃSKI T.: *Algebraic aprouch to rough sets*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35** (1987), 673-683.

[31] KUROSH A. G.: *General Algebra. Lectures of the Academic Year 1969-1970* (w j. rosyjskim), Izd. *Nauka*, Moskov 1974.

[32] MARCZEWSKI E.: *A general scheme of the notions of independence in mathematics*, Bull. Acad. Polon. Sci. (Ser. Sci. Math. Astr. Phys.) **6** (1958), 731-738.

[33] MARCZEWSKI E.: *Independence in algebras of sets and Boolean algebras*, Fund. Math. **48** (1960), 135-145.

[34] MARCZEWSKI E.: *Independence and homomorphisms in abstract algebras*, Fund. Math. **50** (1961), 45-61.

[35] MARCZEWSKI E.: *Concerning the independence in lattices*, Colloq. Math. **10** (1963), 21-23.

[36] MARCZEWSKI E.: *Independence with respect to a family of mappings*, Colloq. Math. **20** (1968), 11-17.

[37] PFLUGFELDER H. O.: *Quasigroups and Loops: Introduction*, Heldermann, Berlin 1990.

[38] PILZ G.: *Near-Rings*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1983.

[39] PŁONKA J., POGUNTKE W.: *T-independence in distributive lattices*, Colloq. Math. **36** (1976), 171-175.

[40] POMYKAŁA J., POMYKAŁA J. A.: *The Stone algebra of rough sets*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **36** (1988), 495-508.

[41] SCHMIDT J.: *Eine algebraische Äquivalente zum Auswahlaxiom*, Fund. Math. **50** (1962), 485-496.

[42] SZÁSZ G.: *Introduction to Lattice Theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1963.

[43] SZÁSZ G.: *Marczewski independence in lattices and semilattices*, Colloq. Math. **10** (1963), 15-23.

[44] ŚWIERCZKOWSKI S.: *Topologies in free algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **14** (1964), 566-576.

Skorowidz rzeczowy

Algebra
- pseudokomplementarna 15
- Stone'a 16

Atom algebry Boole'a 20

Działania termowe 7

Element beztorsyjny 11

Grupoid
- indukujący półkratę 47
- *-łączny 41
- z inwolucją 41

Kongruencja Glivenki 17

Niezależność
- A_1-niezależność 9
- G-niezależność 9
- I-niezależność 9
- M-niezależność 7
- Q-niezależność 8
- S-niezależność 9
- S_0-niezależność 9
- t-niezależność 9

Półkrata niska 59

Quasigrupa *-łączna 65

Retrakcja 12
retrakt 12
rząd elementu 11

Szkielet algebry Stone'a 16

Zbiór gęsty 16

Skorowidz osobowy

Birkhoff, G. 15

Chen, C.C. 16

Gleichgewicht, B. 41
Glivenko, V. 15
Głazek, K. 9, 21, 25, 41
Golema-Hartman, K. 21, 58
Grätzer, G. 10, 15, 16

Hecht, T. 25

Katriňák, T. 25

Marczewski, E. 8, 17, 18, 20, 21

Lee, K. B. 16

Płonka, J. 9, 19
Poguntke, W. 9, 19

Schmidt, E. T. 15
Schmidt, J. 9
Szász, G. 18, 58

Świerczkowski, S. 9

Streszczenia

Q-NIEZALEŻNOŚĆ W ALGEBRACH Z RETRAKCJĄ

W latach 60. ubiegłego wieku E. Marczewski zauważył, że szereg różnych pojęć niezależności występujących w wielu dziedzinach matematyki można zdefiniować w języku odwzorowań i rozszerzeń do homomorfizmów. Przedstawił ogólny schemat niezależności w ramach algebry uniwersalnej - pojęcie niezależności względem rodziny odwzorowań Q. Różne, wcześniej zdefiniowane rodzaje niezależności, sprowadzają się do wyboru odpowiedniej algebry oraz rodziny odwzorowań Q. Jako standardowe rozważa się M, S, S_0, A_1, G, I oraz t-niezależność.

W niniejszej pracy badano rodziny zbiorów Q-niezależnych w algebrach Stone'a w oparciu o trójkową reprezentację tych algebr. Następnie cześć uzyskanych rezultatów uogólniono na algebry, które w zbiorze swych działań termowych posiadają retrakcje. Uzupełnione zostały również wyniki Marczewskiego i Szásza o charakterystykę zbiorów S, S_0, G oraz I-niezależnych w kratach dystrybutywnych i półkratach. W następnej części pracy zdefiniowano pewne uogólnienia pólgrup i grup przemiennych, mianowicie grupoidy i quasigrupy *-łączne. Podano ich podstawowe własności wraz z opisem działań termowych. W końcowej części pracy rozważano zbiory Q-niezależne w pewnej klasie grupoidów *-łącznych, których retraktami są półkraty.

Q-INDEPENDENCE IN ALGEBRAS WITH RETRACTION

In 1966 E. Marczewski introduced a general notion of independence, which contained as special cases the majority of independence notions used in various branches of mathematics - independence with respect to a family Q of mappings in an abstract algebra (Q-independence).

We investigated Q-independent subsets for some specified families Q of mappings (e.g. M, S, S_0, A_1, G, I) in Stone algebras, using the triple representation of Stone algebras. Next, some of these results were generalized

for algebras which have a retraction in their set of term operations. We characterized also the families of Q-independence sets in distributive lattices and semillattices for $Q = S, S_0, G$ and I. Special classes of groupoids with involution, the so-called *-associative groupoids and quasigroups was introduced. We gave the description of term operations in these algebras and investigated their Q-independent subsets.