Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją

Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Irmina Czarna[1], Zbigniew Palmowski[2]
Uniwersytet Wrocławski

PORÓWNANIE PRAWDOPODOBIEŃSTW PARYSKIEJ I KLASYCZNEJ RUINY DLA PROCESU RYZYKA TYPU LÉVY'EGO

Streszczenie: W pracy analizujemy prawdopodobieństwo ruiny typu paryskiego, kiedy proces ryzyka jest modelowany przez spektralnie ujemny proces Lévy'ego. Paryska ruina następuje, kiedy proces rezerw pozostaje ujemny dłużej niż ustalony horyzont czasowy $\zeta > 0$. W pracy przedstawimy jednolite wzory na klasyczne prawdopodobieństwo ruiny oraz prawdopodobieństwo typu paryskiego. Otrzymane wyniki zapisane są w języku tzw. funkcji skalujących, których transformata Laplace'a jest dana przez podstawową charakterystykę procesu Lévy'ego, jaką jest wykładnik Laplace'a. Siła tej nowej metody zostanie przedstawiona na przykładzie kilku wybranych procesów ryzyka, m.in. przeanalizujemy klasyczny proces Craméra-Lundberga oraz ruch Browna z dryfem. W pracy pokażemy także numeryczne porównanie, jak opóźnienie paryskie wpływa na prawdopodobieństwo ruiny.

Słowa kluczowe: prawdopodobieństwo ruiny, proces ryzyka, optymalizacja.
MSC: 60J99, 93E20, 60G51.
SEL: C00.

1. Wstęp

W teorii ryzyka zwykle rozważa się klasyczny proces ryzyka Craméra-Lundberga:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \tag{1}$$

gdzie $x > 0$ jest kapitałem początkowym, U_i, ($i = 1, 2, ...$) są niezależnymi roszczeniami o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F, które są zgłaszane do firmy ubezpieczeniowej zgodnie z niezależnym procesem Poissona N_t z intensywnością λ. Premia jest naliczana ze stałą intensywnością c. Jak zwykle zakładamy tzw. net profit condition: $\lambda U_1/c < 1$ pozwalający na nieograniczony wzrost rezerw firmy ubezpieczeniowej. Kiedy zgłaszane szkody są małe, lepszą aproksymację daje ruch Browna

[1] Projekt finansowany przez grant N N201 525638 (2010-2011).
[2] Projekt finansowany przez grant N N201 394137 (2009-2011).

z dodatnim dryfem $X_t = x + \sigma B_t + ct$. Można także rozważać sumę niezależnego ruchu Browna oraz procesu ryzyka (1). Jest to tzw. klasyczny proces ryzyka z brownowskimi perturbacjami płynącymi właśnie z dużej liczby małych roszczeń. Zaburzenie klasycznego procesu ryzyka może mieć jednakże dużo bardziej złożoną postać. Przede wszystkim może być skompensowaną sumą martyngałową bardzo „dużej" liczby małych skoków, gdzie słowo „dużo" w języku matematycznym będzie oznaczało proces o nieograniczonym wahaniu na każdym skończonym przedziale. W ten właśnie sposób skonstruujemy proces ryzyka typu Lévy'ego, czyli będziemy zakładać o procesie ryzyka tylko tyle, że ma on stacjonarne i niezależne przyrosty. Ze względu na postać roszczeń naturalne jest założenie, że skoki tego procesu są niedodatnie. Zatem proces ryzyka rozważany w tej pracy będzie spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego. Oznacza to, że miara spektralna tego procesu ma nośnik będący ujemną półprostą.

Procesy tej klasy już na dobre zadomowiły się w modelowaniu rezerw firm ubezpieczeniowych. Warto wspomnieć książki takich autorów, jak Asmussen [2000], Bertoin [1996], Kyprianou [Kyprianou, Palmowski 2005; 2007], Schmidli [2008], oraz serie prac autorstwa Albrechera [Albrecher, Thonhauser 2008; Albrecher, Kortschak, Zhou 2010], Asmussena [Asmussen, Hojgaard, Taksar 2000], Avrama i in. [2004], de Finettiego [1957], Gerbera [Gerber 1969; 1972; Gerber, Shiu 2004], Landriaulta i in. [2010], Pistoriusa [2004] oraz Zhou [2005].

Podstawową charakterystyką w teorii ryzyka jest prawdopodobieństwo ruiny dane przez $P_x(\tau_0^- < \infty)$ dla $\tau_0^- = \inf\{t > 0 : X_t < 0\}$, gdzie indeks dolny x przy mierze lub wartości oczekiwanej podkreśla wartość kapitału początkowego. Prawdopodobieństwo to jest traktowane jako podstawowa miara ryzyka, a także stanowi ono najważniejszy składnik uwzględniany przy wyliczaniu składki ubezpieczeniowej. Liczba artykułów zajmujących się tą tematyką jest przeogromna. Jeśli chodzi o referencje dotyczące tej bardzo bogatej tematyki, wystarczy wspomnieć książki Rolskiego i in. [1999] oraz Asmussena [2000] i spisy literatury tam zawarte. W tym artykule pragniemy uogólnić pojęcie ruiny do tzw. paryskiej ruiny, która pojawia się, kiedy proces rezerw pozostaje poniżej zera dłużej niż ustalony horyzont czasowy $\zeta > 0$. Formalnie definiujemy paryski moment ruiny w następujący sposób:

$$\tau^\zeta = \inf\{t > 0 : t - \sup\{s < t : X_s \geq 0\} \geq \zeta, X_t < 0\},$$

zaś prawdopodobieństwo paryskiej ruiny jest wtedy dane przez:

$$P(\tau^\zeta < \infty | X_0 = x) = P_x(\tau^\zeta < \infty).$$

Przypadek $\zeta = 0$ odpowiada oczywiście klasycznej ruinie. Dalej symbol τ^ζ będzie zastrzeżony dla $\zeta > 0$, aby odróżnić to oznaczenie od klasycznej ruiny τ_0^-.

Nazwa „paryska ruina" pochodzi od paryskiej opcji, która jest aktywowana, jeśli cena akcji pozostaje powyżej lub poniżej wcześniej określonej ceny dłużej niż ustalony horyzont czasowy (zob. [Dassios, Wu 2009a; 2009b; 2009c]).

Rozważanie paryskiej ruiny jest jak najbardziej uzasadnione ekonomicznie. Pozwala ono bowiem modelować możliwość przetrwania firmy ubezpieczeniowej pomimo ujemnych rezerw, które dopuszczamy tylko na ustalonym, skończonym horyzoncie czasowym. W tym miejscu należy zaznaczyć, że ze względu na brane pożyczki proces ryzyka, kiedy rezerwy są ujemne, powinien statystycznie różnić się od tego, kiedy proces rezerw jest dodatni. To jednak można uwzględnić w podanych formułach, biorąc np. inne parametry procesu Lévy'ego, kiedy pozycja wskazuje na to, że przebywa on na ujemnej półosi. Ze względu na przejrzystość formuł zdecydowaliśmy się jednak nie uwzględniać tej możliwości.

Rozważanie tak ogólnej rodziny procesów ryzyka i ogólnie postawionego problemu z paryskim opóźnieniem ma jeszcze jedną ogromną zaletę. Pozwala wyrazić prawdopodobieństwo ruiny w jednolitym języku funkcji skalujących $W^{(p)}$, o transformacie Laplace'a wyrażonej przez tradycyjną trójkę charakterystyczną procesu ryzyka (brownowską wariancję, dryf i rozkład roszczeń). Uzyskujemy zatem bardzo prosty mechanizm identyfikacji prawdopodobieństwa ruiny: zamiast dla każdego procesu ryzyka z osobna znajdować to prawdopodobieństwo, jak to robiono dotychczas, wystarczy teraz zidentyfikować funkcję skalującą odpowiadającą danemu procesowi ryzyka oraz zastosować główny rezultat zanotowany w tej pracy. Warto dodać, że funkcje te są znane dla wielu szczególnych procesów ryzyka. Kilka przykładów zostało podanych również w tej pracy. Te wzory oraz pakiet Maple pozwalają z kolei znaleźć różne wyrażenia numeryczne, które wskazują na bardzo ciekawe zależności. Możemy np. dzięki analizie numerycznej zobaczyć wpływ wielkości paryskiego opóźnienia na wielkość prawdopodobieństwa ruiny. Warto zauważyć, że przecież właśnie to prawdopodobieństwo daje podstawę naliczania składek. Zmniejszenie go daje więc pole do zmniejszenia składki, co w dobie wysokiej konkurencyjności na rynku ubezpieczeniowym może mieć ogromne znaczenie. Dodatkowo jest to pierwsza próba modelowania ponownego uzyskania płynności finansowej przez firmę ubezpieczeniową po momencie klasycznej ruiny.

Praca jest zorganizowana w następujący sposób. W następnym rozdziale przedstawimy główne oznaczenia i fakty. Po czym przedstawimy najważniejsze rezultaty. W ostatnim rozdziale skoncentrujemy się na szczególnych przypadkach procesu ryzyka będącego albo klasycznym procesem ryzyka (1) z wykładniczymi roszczeniami, albo ruchem Browna z dryfem. Tutaj też pojawia się dokładna analiza numeryczna. Pracę kończą wnioski i zapowiedź przyszłych badań.

2. Preliminaria

Zacznijmy od podania głównych faktów z teorii fluktuacji procesów Lévy'ego. Znakomite podsumowanie tej teorii można znaleźć w książkach Bertoina [1996], Kyprianou [2006] czy Sato [1999] i spisach literatury tamże zawartych.

W tej pracy rozważamy spektralnie ujemny proces ryzyka Lévy'ego $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$, czyli taki, dla którego miara skoków Lévy'ego v spełnia $v(0, \infty) = 0$. Ponieważ skoki procesu są niedodatnie, funkcja generująca momenty $E[^{\theta X_t}]$ jest dobrze zdefiniowana co najmniej dla wszystkich $\theta \geq 0$ i z twierdzenia Lévy'ego--Chińczyna jest dana przez $E[e^{\theta X_t}] = e^{t\psi(\theta)}$ dla wykładnika Laplace'a $\psi(\theta)$, który jest dobrze zdefiniowany przynajmniej na nieujemnej półosi, jest wypukły i zbiega do nieskończoności dla argumentów zbiegających do nieskończoności. Oznaczmy przez Φ uogólnioną funkcję odwrotną do ψ. Będziemy także rozważać proces dualny: $\widehat{X}_t = -X_t$ z miarą skoków $\widehat{\nu}\,(0,y) = \nu\,(-y,0)$. Dalej wszystkie wielkości liczone dla procesu dualnego będą oznaczane przez daszek ponad odpowiednikiem dla procesu X.

Zdefiniujmy teraz nową miarę przez pochodną Radona-Nikodyma:

$$\left.\frac{dP^\theta}{dP}\right|_{F_t} = \exp\left(\theta X_t - \psi(\theta)t\right), \tag{2}$$

gdzie $\mathcal{F}_t$ jest prawostronnie ciągłą naturalną filtracją X. Na nowej przestrzeni probabilistycznej proces X jest nadal spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego z wykładnikiem Laplace'a:

$$\psi_\theta(s) = \psi(s+\theta) - \psi(\theta). \tag{3}$$

Dalej dla uproszczenia będziemy zakładać, że albo proces Lévy'ego ma komponentę brownowską albo skoki mają gęstość.

Dla $p \geq 0$ możemy teraz zdefiniować tzw. p-tą funkcję skalującą $W^{(p)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, która jest rosnącą i ciągłą funkcją z transformatą Laplace'a $\int_0^\infty e^{-\theta y} W^{(p)}(y)dy = (\psi(\theta) - p)^{-1}$ dla $\theta > \Phi(p)$.

Dziedzina $W^{(p)}$ jest rozszerzona na ujemną półoś przez położenie tamże wartości zero. Należy wspomnieć ciekawą własność funkcji skalującej – jest ona różniczkowalna (chociaż niekoniecznie w sposób ciągły).

Funkcje skalujące stanowią podstawę do rozwiązania tzw. problemów wyjścia, które podają rozkład pierwszych momentów wejścia X do przedziałów $[a,\infty)$ oraz $(-\infty,-a)$:

$$\tau_a^+ = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}, \tau_a^- = \inf\{t \geq 0 : X_t < -a\}.$$

Przede wszystkim

$$E_z\left[e^{-p\tau_0^- + \beta X_{\tau_0^-}}, \tau_0^- < \infty\right] = e^{\beta z}\left(Z_\beta^{(u)}(z) - \frac{u}{\Phi(u)} W_\beta^{(u)}(z)\right), \tag{4}$$

gdzie $W_\beta^{(u)}$ oraz $Z_\beta^{(u)}$ są funkcjami skalującymi liczonymi względem miary P^β, $u = p - \psi(\beta)$ oraz $u/\Phi(u)$ jest rozumiane w sensie granicznym dla $u = 0$. Funkcje skalujące na nowej przestrzeni probabilistycznej można łatwo związać z tymi liczonymi względem oryginalnej miary P w następujący sposób: $e^{\beta z}W_{\beta}^{(u)}(z) = W^{(p)}(z)$ oraz

$$Z_{\beta}^{(u)}(z) = 1 + u\int_0^z e^{-\beta y}W^{(p)}(y)dy.$$

3. Główne rezultaty

Prawdopodobieństwo klasycznej ruiny jest konsekwencją tożsamości (4).

Twierdzenie 1.

$$P_x(\tau_0^- < \infty) = \begin{cases} 1 - \psi'(0+)W(x) & \text{dla } \psi'(0+) > 0 \\ 1 & \text{dla } \psi'(0+) \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $W(x) = W^{(0)}(x)$.

Paryska ruina odbywa się w następujący sposób. Na początku proces rezerw staje się nieujemny. Całkując względem pozycji procesu ryzyka w momencie klasycznej ruiny, znajdujemy prawdopodobieństwo, że proces ryzyka wróci do poziomu zero przed czasem $\zeta > 0$. Wtedy prawdopodobieństwo paryskiej ruiny z dowolnym nieujemnym kapitałem początkowym wyrażamy przez prawdopodobieństwo ruiny dla zerowego kapitału początkowego. Dla procesu X o ograniczonym wahaniu, kładąc $x = 0$, uzyskujemy prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla zerowego kapitału, czyli też dla dowolnego kapitału początkowego. Przypadek procesu ryzyka o nieograniczonym wahaniu jest bardziej złożony i polega na odsunięciu warunku początkowego od zera oraz przeprowadzeniu odpowiedniej aproksymacji przez poprzedni przypadek. Cała procedura dokładnie została przedstawiona w pracy Czarnej i Palmowskiego [2010], rezultat zaś może być podsumowany w następujący sposób.

Twierdzenie 2.

Prawdopodobieństwo paryskiej ruiny jest równe:

$$\begin{aligned} P_x(\tau^\zeta < \infty) &= P_x(\tau_0^- < \infty)P(\tau^\zeta < \infty) \\ &+ \left(1 - P(\tau^\zeta < \infty)\right)\left(1 - \int_0^\infty P(\tau_z^+ > \zeta)P_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

$$P_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - \psi'(0+)W(x), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\theta s}ds\int_0^\infty P(\tau_z^+ > s)P_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz) \\ &= \frac{1 - \psi'(0+)W(x)}{\theta} - \frac{1}{\theta}e^{\Phi(\theta)x}\left(Z_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)}(x) + \frac{\theta}{\Phi(-\theta)}W_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)}(x)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Dodatkowo zachodzą następujące tożsamości identyfikujące prawdopodobieństwo paryskiej ruiny z zerowym kapitałem początkowym w zależności od właściwości trajektorii tego procesu.

- Jeśli proces X jest o ograniczonym wahaniu, to:

$$P(\tau^\zeta < \infty) =$$

$$= \frac{\int_0^\infty P(\tau_z^+ > \zeta) P(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)}{1 - P(\tau_0^- < \infty) + \int_0^\infty P(\tau_z^+ > \zeta) P(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)}, \tag{8}$$

gdzie

$$\int_0^\infty e^{-\theta s}\, ds \int_0^\infty P(\tau_z^+ > s) P(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz) = \frac{1}{\theta p} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\Phi(\theta) z}\right) \widehat{\nu}(z, \infty) dz. \tag{9}$$

- Jeśli proces X jest o nieograniczonym wahaniu, to

$$P(\tau^\zeta < \infty) = \lim_{b \to \infty} \frac{q(b,\zeta) - q(b,\infty)}{q(b,\zeta)}, \tag{10}$$

gdzie

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\omega s} e^{-\beta t} q(s,t)\, dt\, ds = \frac{m(\omega) \Phi(\omega) (\beta - \omega)}{\beta \omega^2 (\Phi(\beta) - \Phi(\omega))}$$

$$m(\omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{P(-\underline{X}_{e_\omega} \le \epsilon)}{n(\epsilon)}$$

dla normalizującej stałej n oraz niezależnej zmiennej losowej e_ω o rozkładzie wykładniczym z parametrem ω oraz $\underline{X}_t = \inf_{0 \le s \le t} X_s$.

4. Analiza numeryczna

4.1. Klasyczny proces Craméra-Lundberga z wykładniczymi roszczeniami

Załóżmy teraz, że proces ryzyka X jest klasycznym procesem ryzyka (1) z wykładniczymi roszczeniami $F(dz) = \xi e^{-\xi z}\, dz$ i z intensywnością ich zgłaszania λ.

Z definicji funkcji skalującej można uzyskać wtedy, że:

$$W^{(p)}(x) = c^{-1} \left(A_+ e^{q^+(p)x} - A_- e^{q^-(p)x} \right),$$

gdzie $A_\pm = \frac{\xi + q^\pm(p)}{q^+(p) - q^-(p)}$ z $q^+(p) = \Phi(p)$ oraz $q^-(p)$ będący najmniejszym rozwiązaniem równania $\psi(\theta) = p$:

$$q^{-}(p) = \frac{p + \lambda - \xi c - \sqrt{(p + \lambda - \xi c)^2 + 4cp\xi}}{2c}.$$

Z twierdzenia 1 możemy uzyskać teraz prawdopodobieństwo klasycznej ruiny:

$$P_x(\tau_0^- < \infty) = \frac{\lambda}{c\xi} e^{-(\frac{c\xi-\lambda}{c})x}. \tag{11}$$

Dodatkowo zauważmy, że

$$P_x(\tau^\zeta < \infty) = \frac{\lambda}{c\xi} e^{-(\frac{c\xi-\lambda}{c})x} \left(\frac{c\xi D}{c\xi - \lambda(1 - D)} \right), \tag{12}$$

gdzie

$$D = 1 - \int_0^\zeta \sqrt{\frac{c\xi}{\lambda}} e^{-(\lambda + c\xi)t} t^{-1} I_1(2t\sqrt{c\lambda\xi})dt$$

oraz $I_1(x)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessla pierwszego rodzaju.
Rzeczywiście, na mocy własności braku pamięci rozkładu wykładniczego:

$$\int_0^\infty e^{-\theta s}\, ds \int_0^\infty P(\tau_z^+ > s) P_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz) =$$

$$= \frac{\lambda}{c\xi} e^{-(\frac{c\xi-\lambda}{c})x} \frac{\Phi(\theta)}{\theta(\Phi(\theta) + \xi)},$$

co daje

$$\int_0^\infty P(\tau_z^+ > \zeta) P_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz) = \frac{\lambda}{c\xi} e^{-(\frac{c\xi-\lambda}{c})x} D$$

i łącznie z (5) i (8) kończy dowód (12).

Jesteśmy teraz w stanie dokonać numerycznych obliczeń. Bierzemy następujące parametry procesu ryzyka: $\xi = 2, \lambda = 2, c = 2.5$, które pojawiają się często w serii numerycznych prac Albrechera i Thonhausera [2008]. Dodatkowo tab. 1 i 2 będą analizować różne opóźnienia paryskie: $\zeta = 0.1, 0.3, 0.7, 2$ i różne kapitały początkowe dla $x = 2, 5, 10, 50$.

Tabela 1. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$P_2(\tau_0^- < \infty)$	$3.63 \cdot 10^{-2}$	$3.63 \cdot 10^{-2}$	$3.63 \cdot 10^{-2}$	$3.63 \cdot 10^{-2}$
$P_2(\tau^\zeta < \infty)$	$2.70 \cdot 10^{-2}$	$1.59 \cdot 10^{-2}$	$6.95 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$

Źródło: obliczenia własne.

Zauważmy, że drugi rząd tab. 1 jest stały i został dodany dla wygody porównania.

Tabela 2. Analiza różnych kapitałów początkowych

x	2	5	10	50
$P_x(\tau_0^- < \infty)$	$3.63 \cdot 10^{-2}$	$9.91 \cdot 10^{-4}$	$2.46 \cdot 10^{-6}$	$3.50 \cdot 10^{-27}$
$P_x(\tau^\zeta < \infty)$	$1.59 \cdot 10^{-2}$	$4.34 \cdot 10^{-4}$	$1.07 \cdot 10^{-6}$	$1.53 \cdot 10^{-27}$

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2 jest liczona dla $\zeta = 0.3$.

Tabela 3 pokazuje, ile więcej potrzebujemy kapitału początkowego, aby w przypadku klasycznym prawdopodobieństwo ruiny było na tym samym poziomie jak dla paryskiego opóźnienia.

Tabela 3. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$P_x(\tau_0^- < \infty)$	$2.69 \cdot 10^{-2}$ $x = 2.25$	$1.60 \cdot 10^{-2}$ $x = 2.68$	$6.93 \cdot 10^{-3}$ $x = 3.38$	$1.09 \cdot 10^{-3}$ $x = 4.92$
$P_2(\tau^\zeta < \infty)$	$2.70 \cdot 10^{-2}$	$1.59 \cdot 10^{-2}$	$6.95 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$

Źródło: obliczenia własne.

Z powyższych obliczeń numerycznych można wyciągnąć następujące wnioski. Tak jak się można było spodziewać, zastosowanie paryskiego opóźnienia znacznie zmniejsza prawdopodobieństwo ruiny, co obrazują tab. 1-3. Oczywiście gdy zwiększamy paryskie opóźnienie, to prawdopodobieństwo ruiny zmniejsza się, w praktyce jednakże należałoby zastanowić się nad rozsądnym ograniczeniem tego czasu. Najciekawsza wydaje się tab. 3, która pokazuje, że zastosowanie paryskiego opóźnienia pozwala firmie ubezpieczeniowej na zmniejszenie kapitału początkowego przy takim samym ryzyku bankructwa.

4.2. Ruch Browna z dryfem

Rozważmy teraz przypadek, kiedy proces ryzyka jest ruchem Browna z dodatnim dryfem:

$$X_t = x + \sigma B_t + ct,$$

gdzie $x, \sigma, c > 0$ oraz B_t jest klasycznym ruchem Browna. Definicja funkcji skalującej daje:

$$W(x) = \frac{1}{c}\left(1 - e^{-(2c\sigma^{-2})x}\right).$$

Stąd

$$P_x(\tau_0^- < \infty) = e^{-(2c\sigma^{-2})x}. \tag{13}$$

Dodatkowo

$$P_x(\tau^\zeta < \infty) = e^{-(2c\sigma^{-2})x} \frac{\Psi\left(\frac{c}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta}{2}}\right) - \frac{c}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta\pi}{2}}}{\Psi\left(\frac{c}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta}{2}}\right) + \frac{c}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta\pi}{2}}}, \tag{14}$$

gdzie

$$\Psi(x) = 2\sqrt{\pi}x\mathcal{N}(\sqrt{2}x) - \sqrt{\pi}x + e^{-x^2}$$

oraz $\mathcal{N}(.)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego (zob. [Czarna, Palmowski 2010]).

Przypadek I ($\sigma = 1$)

Tutaj dokonamy podobnej analizy numerycznej jak dla klasycznego procesu ryzyka, wybierając $\sigma = 1$ oraz $c = 2.5$. Tabele 4-6 będą analizować różne opóźnienia paryskie: $\zeta = 0.1, 0.3, 0.7, 2$ i różne rezerwy początkowe dla $x = 2, 5, 10, 50$.

Tabela 4. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$P_2(\tau_0^- < \infty)$	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$4.54 \cdot 10^{-5}$
$P_2(\tau^\zeta < \infty)$	$6.08 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$	$6.51 \cdot 10^{-10}$

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że drugi rząd jest stały i został dodany dla wygody porównania.

Tabela 5. Analiza różnych kapitałów początkowych

x	2	5	10	50
$P_x(\tau_0^- < \infty)$	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-11}$	$1.93 \cdot 10^{-22}$	$2.67 \cdot 10^{-109}$
$P_x(\tau^\zeta < \infty)$	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$3.86 \cdot 10^{-13}$	$5.37 \cdot 10^{-24}$	$7.43 \cdot 10^{-111}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5 jest liczona dla $\zeta = 0.3$.

Tabela 6 pokazuje, ile więcej potrzebujemy kapitału początkowego, aby w przypadku klasycznym prawdopodobieństwo ruiny było na tym samym poziomie jak dla paryskiego opóźnienia.

Tabela 6. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$P_x(\tau_0^- < \infty)$	$6.14 \cdot 10^{-5}$ $x = 2.4$	$1.24 \cdot 10^{-6}$ $x = 2.72$	$1.44 \cdot 10^{-7}$ $x = 3.15$	$6.52 \cdot 10^{-10}$ $x = 4.23$
$P_2(\tau^\zeta < \infty)$	$6.08 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$	$6.51 \cdot 10^{-10}$

Źródło: opracowanie własne.

Przypadek II $\sigma = 2$ (małe i częste roszczenia)

Tutaj dokonamy podobnej analizy numerycznej jak dla procesu ryzyka, wybierając $\sigma = 2$ oraz $c = 2.5$. Tabele 7-9 będą analizować różne opóźnienia paryskie: $\zeta = 0.1, 0.3, 0.7, 2$ i różne rezerwy początkowe dla $x = 2, 5, 10, 50$.

Tabela 7. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$P_2(\tau_0^- < \infty)$	$8.21 \cdot 10^{-2}$	$8.21 \cdot 10^{-2}$	$8.21 \cdot 10^{-2}$	$8.21 \cdot 10^{-2}$
$P_2(\tau^\zeta < \infty)$	$3.04 \cdot 10^{-2}$	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$5.58 \cdot 10^{-3}$	$7.12 \cdot 10^{-4}$

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że drugi rząd jest stały i został dodany dla wygody porównania.

Tabela 8. Analiza różnych kapitałów początkowych

x	2	5	10	50
$P_x(\tau_0^- < \infty)$	$8.21 \cdot 10^{-2}$	$1.93 \cdot 10^{-3}$	$3.73 \cdot 10^{-6}$	$7.19 \cdot 10^{-28}$
$P_x(\tau^\zeta < \infty)$	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$3.41 \cdot 10^{-4}$	$6.57 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-28}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8 jest liczona dla $\zeta = 0.3$.

Tabela 9 pokazuje, ile więcej potrzebujemy kapitału początkowego, aby w przypadku klasycznym prawdopodobieństwo ruiny było na tym samym poziomie jak dla paryskiego opóźnienia.

Tabela 9. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$P_x(\tau_0^- < \infty)$	$3.05 \cdot 10^{-2}$ $x = 2.79$	$1.45 \cdot 10^{-2}$ $x = 3.39$	$5.58 \cdot 10^{-3}$ $x = 4.15$	$7.19 \cdot 10^{-4}$ $x = 5.79$
$P_2(\tau^\zeta < \infty)$	$3.04 \cdot 10^{-2}$	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$5.58 \cdot 10^{-3}$	$7.12 \cdot 10^{-4}$

Źródło: opracowanie własne.

Analiza numeryczna wykazała, że tak samo jak w przypadku procesu Craméra-Lundberga zastosowanie paryskiego opóźnienia znacznie zmniejsza prawdopodobieństwo ruiny. Tak jak poprzednio możemy zauważyć, że zwiększanie paryskiego opóźnienia powoduje zmniejszenie prawdopodobieństwa ruiny. Z praktycznego punktu widzenia oczywiście należałoby zastanowić się nad rozsądnym ograniczeniem tego czasu. Tutaj również najciekawsza wydaje się tab. 3, która pokazuje, że zastosowanie paryskiego opóźnienia pozwala firmie ubezpieczeniowej na zmniejszenie kapitału początkowego przy takim samym ryzyku bankructwa.

5. Podsumowanie

W tej pracy wprowadziliśmy pojęcie paryskiej ruiny, która następuje wtedy, kiedy proces rezerw pozostaje dłużej poniżej zera niż ustalony z góry horyzont czasowy $\zeta > 0$. Opóźnienie tego rodzaju pozwala na ponowne uzyskanie przez firmę ubezpieczeniową płynności finansowej przez pożyczki lub inne operacje finansowe. Oczywiście dopuszczenie dodatkowej możliwości pozostania procesu rezerw poniżej zera zmniejsza jego prawdopodobieństwo ruiny, a tym samym zmniejsza miarę ryzyka, która jest podstawą do wyliczania składki. Celem pracy było zbadanie, jak poważny wpływ na prawdopodobieństwo ruiny ma wprowadzenie paryskiego opóźnienia. W tym celu wyrażamy oba prawdopodobieństwa w jednolitym języku tzw. funkcji skalujących, które z kolei są wyrażone przez transformatę Laplace'a oraz identyfikowalne dla większości znanych modeli. W tej pracy skoncentrowaliśmy się na dwóch przykładach: klasycznym procesie ryzyka oraz ruchu Browna z dryfem. Mając wyrażenia na prawdopodobieństwa ruiny klasycznej i paryskiej, porównaliśmy je numerycznie dla różnorodnych opóźnień paryskich. Zauważyliśmy, że zastosowanie paryskiego opóźnienia znacznie zmniejsza prawdopodobieństwo ruiny oraz pozwala firmie ubezpieczeniowej na zmniejszenie kapitału początkowego przy takim samym ryzyku bankructwa. Jednakże należy także rozsądnie wybrać górne ograniczenie na wielkość paryskiego opóźnienia. Zaobserwowaliśmy także, że w przypadku ruchu Browna z dryfem aplikacja paryskiego opóźnienia ma dużo większy wpływ na zmniejszenie prawdopodobieństwa ruiny względem klasycznego, niż jest to w przypadku procesu Craméra-Lundberga. Oczywiście dalsze modele powinny być zanalizowane. Szczególnie ciekawy wydaje się przypadek, kiedy proces zgłoszeń jest opisany przez proces odnowy, np. z erlangowskim okresem pomiędzy zgłoszeniami. Markowskie modulowanie otoczenia pozwoliłoby z kolei lepiej modelować sezonowość. Następnym krokiem powinno być ujęcie inwestycji w modelu, tak jak to jest robione w serii prac Paulsena [2007], czy też uwzględnienie zależności intensywności składki od obecnego poziomu rezerw. Te i inne problemy będą przedmiotem dalszych badań.

Literatura

Albrecher H., Thonhauser S. (2008), *Optimal dividend strategies for a risk process under force of interest*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 43.

Albrecher H., Kortschak D., Zhou X. (2010), *Pricing of Parisian options for a jump-diffusion model with two-sided jumps*, złożony do publikacji.

Asmussen S., Hojgaard B., Taksar M. (2000), *Optimal risk control and dividend distribution policies. Example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation*, „Finance Stoch" no 4.

Asmussen S. (2000), *Ruin Probabilities*, World Scientific, London.

Avram F., Kyprianou A.E., Pistorius M.R. (2004), *Exit problems for spectrally negative Lévy processes and applications to (Canadized)Russian options*, „Ann. Appl. Probab." no 14.

Bertoin J. (1996), *Levy Processes*, Cambridge University Press.

Czarna I., Palmowski Z. (2010), *Ruin probability with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process*, złożony do publikacji, http://arxiv.org/abs/1003.4299.

Dassios A., Wu S. (2009a), *Parisian ruin with exponential claims*, złożony do publikacji, http://stats.lse.ac.uk/angelos/.

Dassios A., Wu S. (2009b), *Ruin probabilities of the Parisian type for small claims*, złożony do publikacji, http://stats.lse.ac.uk/angelos/.

Dassios A., Wu S. (2009c), *Perturbed Brownian motion and its application to Parisian option pricing*, „Finance and Stochastics", http://www.springerlink.com/content/c10155vh5121180x/.

De Finetti B. (1957), *Su un'impostazione alternativa dell teoria colletiva del rischio*, „Trans. XV Intern. Congress Act." no 2.

Gerber H.U. (1969), *Entscheidungskriterien für den Zusammengesetzten Poisson Prozess*, „Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker" Nr. 69.

Gerber H.U. (1972), *Games of economic survival with discrete- and continuous-income processes*, „Operations Research" no 20.

Gerber H.U., Shiu E.S.W. (2004), *Optimal dividends: analysis with Brownian motion*, „North American Actuarial Journal" no 8.

Kyprianou A.E., Palmowski Z. (2005), *A martingale review of some fluctuation theory for spectrally negative Lévy processes*, „Seminaire de Probabilites" XXXVIII.

Kyprianou A.E. (2006), *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer, Germany.

Kyprianou A.E., Palmowski Z. (2007), *Distributional study of De Finetti's dividend problem for a general Lévy insurance risk process*, „Journal of Applied Probability" no 44(2).

Landriault D., Renaud J.F., Zhou X. (2010), *Insurance risk model with Parisian implementation delays*, złożony do publikacji,

Paulsen J. (2007), *Optimal dividend payments until ruin of diffusion processes when payments are subject to both fixed and proportional costs*, „Adv. in Appl. Probab." no 39(3).

Pistorius M.R. (2004), *On exit and ergodicity of the completely asymmetric Lévy process reflected at its infimum*, „J. Th. Probab." no 17.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, Chichester.

Sato K. (1999), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press.

Schmidli H. (2008), *Stochastic Control in Insurance*, Springer Verlag, London.

Zhou X. (2005), *On a classical risk model with a constant dividend barrier*, „North American Actuarial Journal" no 9.

COMPARISON OF PARISIAN AND CLASSICAL RUIN PROBABILITIES FOR A LÉVY RISK PROCESS

Summary: In this paper we analyze so-called Parisian ruin probability that happens when surplus process stays below zero longer than fixed amount of time $\zeta > 0$. We focus on general spectrally negative Lévy insurance risk process. For this class of processes we identify expression for (classical and Parsisan) ruin probability in terms of so-called scale functions which is defined via Laplace exponent of risk process. We analyze few explicit examples such as Cramér-Lunberg process (large claim size case) and Brownian motion with drift (small claim size case). In this paper we numerically compare classical and Parisian ruin probabilities.

Key words: ruin probability, risk process, optimization.