Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją

Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Irmina Czarna[1], Zbigniew Palmowski[2]
Uniwersytet Wrocławski

PROBLEM WYBORU OPTYMALNEJ PARYSKIEJ DYWIDENDY DLA PROCESU RYZYKA TYPU LÉVY'EGO – NUMERYCZNA ANALIZA

Streszczenie: W pracy zanalizowano problem wyboru optymalnej dywidendy, kiedy proces ryzyka jest modelowany przez spektralnie ujemny proces Lévy'ego (przed wypłatą dywidend). Dywidendy są płacone do czasu tzw. paryskiej ruiny, tzn. do czasu, kiedy proces rezerw pozostanie ujemny dłużej niż ustalony horyzont czasowy $\zeta > 0$. W artykule przedstawiono warunki dostateczne na to, aby strategia barierowa był optymalna, gdzie maksymalizowaną funkcją wypłaty jest zdyskontowana łączna suma dywidend. Zidentyfikowano także optymalną barierę oraz dla niej wartość funkcji wypłaty. Skoncentrowano się na badaniach numerycznych dla dwóch specyficznych klas procesów ryzyka: klasycznego procesu Craméra-Lundberga oraz ruchu Browna z dryfem.

Słowa kluczowe: prawdopodobieństwo ruiny, dywidenda, proces ryzyka, optymalizacja.
MSC: 60J99, 93E20, 60G51.
SEL: C00.

1. Wstęp

W pracy rozważamy dowolny proces ryzyka typu Lévy'ego. Oznacza to, iż o procesie zakładamy, że ma on stacjonarne i niezależne przyrosty oraz trajektorie typu càdlàg (prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami). Ponadto ze względu na postać roszczeń naturalne jest założenie, że skoki tego procesu są niedodatnie. Zatem proces ryzyka rozważany w tej pracy będzie spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego, a to oznacza, że miara spektralna tego procesu ma nośnik niedodatni. Klasycznym przykładem spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego jest proces Craméra-Lundberga:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \tag{1}$$

[1] Projekt finansowany przez grant N N201 525638 (2010-2011).
[2] Projekt finansowany przez grant N N201 394137 (2009-2011).

gdzie $x > 0$ jest kapitałem początkowym, U_i, $(i = 1, 2, ...)$ są niezależnymi roszczeniami o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F, które są zgłaszane do firmy ubezpieczeniowej zgodnie z niezależnym procesem Poissona N_t z intensywnością λ. Premia jest naliczana ze stałą intensywnością c. Ponadto zakładamy tzw. *net profit condition*: $\lambda U_1/c < 1$ pozwalający na nieograniczony wzrost rezerw firmy ubezpieczeniowej. Jest to tzw. przypadek dużych roszczeń. Natomiast kiedy zgłaszane szkody są małe, lepszą aproksymację daje ruch Browna z dodatnim dryfem $X_t = x + \sigma B_t + ct$. Można także rozważać sumę niezależnego ruchu Browna oraz procesu ryzyka (1). Jest to tzw. klasyczny proces ryzyka z brownowskimi perturbacjami płynącymi właśnie z dużą liczbą małych roszczeń.

Procesy Lévy'ego są dziś jednym z podstawowych narzędzi używanych w modelowaniu rezerw firm ubezpieczeniowych. Warto wspomnieć książki takich autorów, jak Asmussen [2000], Bertion [1996], Kyprianou [2006], Schmidli [2008], oraz serie prac autorstwa Albrechera [Albrecher, Thonhauser 2008; Albrecher, Kortschak, Zhou 2010], Avrama i in. [2004], de Finettiego [1957], Gerbera [Gerber 1969; 1972; Gerber, Shiu 2004], Kyprianou [Kyprianou, Palmowski 2005; 2007], Landriaulta i in. [2010], Pistoriusa [2004], Zhou [2005].

Drugim składnikiem naszego modelu są wypłacane dywidendy. Zaproponowane one zostały już w 1957 r. przez de Finettiego [1957] dla klasycznego modelu ryzyka w czasie dyskretnym, aby ograniczyć wzrost rezerw firmy ubezpieczeniowej. W modelu Gordona liczba wypłacanych dywidend jest też miarą ryzyka dla danej firmy – firma w dobrej kondycji finansowej jest skłonna wypłacać więcej dywidend i na odwrót – firma przeżywająca kryzys nie wypłaca dywidend, aby uzyskać płynność finansową. W pracy skoncentrujemy się na optymalizacji wypłaty dywidend z punktu widzenia akcjonariuszy. Będziemy zatem maksymalizować ich zysk. Tak znaleziona funkcja wypłaty może stanowić świetną miarę ryzyka (zob. [Asmussen i in. 2000]).

Precyzyjnie w pracy będziemy rozważać proces ryzyka kontrolowany przez pewną strategię wypłat dywidend π:

$$U_t^\pi = X_t - L_t^\pi,$$

gdzie $X_0 = x > 0$ oznacza początkowy kapitał firmy ubezpieczeniowej, L_t^π zaś jest niemalejącym, adaptowalnym, lewostronnie ciągłym procesem, który opisuje łączną wielkość wypłaconych dywidend do czasu t. Adaptowalność tego procesu implikuje, że decyzje dotyczące liczby wypłaty dywidend są podejmowane na podstawie dotychczasowej historii rezerw firmy ubezpieczeniowej.

Funkcja, którą będziemy maksymalizować, opisuje zdyskontowaną łączną wypłatę dywidend do czasu ruiny σ^π:

$$v^\pi(x) = E_x\left[\int_0^{\sigma^\pi} e^{-qt} dL_t^\pi\right], \tag{2}$$

gdzie q jest stopą dyskonta w czasie ciągłym. Dolny indeks przy mierze lub wartości oczekiwanej będzie oznaczał, że proces ryzyka startuje z $X_0 = x$. Indeks ten będziemy dalej opuszczać, jeśli $x = 0$.

Celem tej pracy jest zidentyfikowanie strategii (będziemy ją dalej nazywać optymalną), która maksymalizuje powyższą funkcję wypłaty, czyli szukamy:

$$v_*(x) = \sup_{\pi \in \Pi} v^\pi(x), \tag{3}$$

gdzie Π jest zbiorem dopuszczalnych strategii $\Pi = \{L_t^\pi, t \geq 0\}$, które są adaptowalne, oraz $L_t^\pi - L_{t-}^\pi < U_{t-}^\pi$, czyli nie wypłacamy w postaci dywidend więcej, niż dysponujemy w danym momencie czasowym.

Dotychczas analiza (3) dotyczyła przypadku, kiedy moment ruiny był klasyczny, tzn. był pierwszym momentem, kiedy proces rezerw stał się ujemny: $\tau_0^U = \inf\{t > 0 : U_t^\pi < 0\}$. Badania zainicjowała seria świetnych prac Gerbera [1969; 1972], w których podał on dla klasycznego procesu ryzyka (1) optymalną bandową strategię, która dla określonych band mówi, że należy wypłacać w postaci dywidend wszystko ponad określony poziom (powyżej pewnej bandy) albo jeśli proces przekroczy w dół określony inny poziom, wypłacić impulsowo różnicę pomiędzy bieżącą pozycją procesu rezerw a następną wysokością bandy pojawiającej się zaraz poniżej tej pozycji. Okazało się też, że dla procesu ryzyka (1) z wykładniczymi roszczeniami optymalną strategią jest tzw. strategia barierowa, która wypłaca w postaci dywidend wszystko powyżej określonej bariery a. Jest to najprostsza optymalna strategia, która była analizowana przez wielu autorów, m.in. Irbäcka [2003] i Zhou [2005]. Szczególnie Gerber i Shiu [2004] oraz Jeanblanc i Shiryaev [1995] udowodnili podobny rezultat dla ruchu Browna z dryfem. Hallin [1979] używał równań całkowo-różniczkowych do znalezienia optymalnej funkcji wypłaty. Albrecher i Thonhauser [2008] brali także pod uwagę stałe oprocentowanie odsetek. Dyfuzyjne procesy ryzyka były również dokładnie przebadane przez Asmussena i in. [2000] oraz Paulsena [2007] (zob. też spisy literatury pojawiające się w tych pozycjach). Ponadto wprowadzane są także funkcje użyteczności (zob. [Grandits i in. 2007]).

Procesy Lévy'ego pojawiły się po raz pierwszy w przełomowej pracy Avram i in. [2004]. Rezultaty te zostały później uogólnione w serii prac Loeffena [Loeffen 2008; Loeffen, Renaud 2010]. Avram i in. [2010] udowodnili, że zawsze dla procesu ryzyka typu Lévy'ego optymalną strategią jest strategia bandowa. Znaleźli też warunki dostateczne na to, aby strategia barierowa była optymalna.

Ta praca koncentruje się na innym momencie ruiny niż klasyczny $\tau_0^U = \inf\{t > 0 : U_t^\pi < 0\}$. Mianowicie znajdziemy w tej pracy warunki dostateczne na to, aby strategia barierowa π^a z barierą a była optymalna (3), kiedy moment ruiny jest zdefiniowany poprzez tzw. paryską ruinę:

$$\sigma^{\pi,\zeta} = \inf\{t > 0 : t - \sup\{s \leq t : U_s^\pi \geq 0\} \geq \zeta, U_t^\pi < 0\}. \tag{4}$$

Nazwa „paryska ruina" pochodzi od paryskiej opcji, która jest aktywowana, jeśli cena akcji pozostaje powyżej lub poniżej wcześniej określonej ceny dłużej niż ustalony horyzont czasowy (zob. [Dassios, Wu 2009a; 2009b; 2009c; 2009d]).

Problem dywidendy z opóźnieniem paryskim dotychczas był tylko rozważany w pracy Dassios i Wu [2009c]. Praca ta jednak dotyczy tylko klasycznego ryzyka Craméra-Lundberga (1) z wykładniczymi roszczeniami oraz innego opóźnienia, które następowało pomiędzy decyzją o wypłacie dywidend a samą jej wypłatą. Wiadomo jednak z ogólnej teorii rozwiniętej dla klasycznej ruiny i klasycznego procesu ryzyka, że taka strategia nie jest optymalna i jako taka jest zatem mniej interesująca (zob. [Avram i in. 2007]).

Rozważanie paryskiej ruiny ma jeszcze jedną dodatkową przewagę. Pozwala bowiem modelować możliwość przetrwania firmy ubezpieczeniowej pomimo ujemnych rezerw tylko na ustalonym skończonym horyzoncie czasowym. W tym miejscu należy zaznaczyć, że ze względu na brane pożyczki proces ryzyka, kiedy rezerwy są ujemne, powinien statystycznie różnić się od tego, kiedy proces rezerw jest dodatni. To jednak można uwzględnić w podanych formułach, biorąc np. inne parametry procesu Lévy'ego, kiedy pozycja wskazuje na to, że przebywa on na ujemnej półosi. Ze względu na przejrzystość formuł zdecydowaliśmy się nie uwzględniać jednak tej możliwości.

Rozważanie tak ogólnej rodziny procesów ryzyka i ogólnie postawionego problemu dywidendowego ma jeszcze jedną ogromną zaletę. Pozwala wyrazić wartość funkcji wypłaty w jednolitym języku tzw. funkcji skalujących $W^{(p)}$, których transformata Laplace'a jest dana przez charakterystykę procesu ryzyka. Uzyskujemy zatem bardzo prosty mechanizm identyfikacji strategii optymalnej: zamiast dla każdego procesu ryzyka rozwiązywać problem optymalizacyjny, jak to dotychczas było, wystarczy teraz zidentyfikować funkcję skalującą odpowiadającą danemu procesowi ryzyka oraz zastosować główny rezultat zanotowany w tej pracy. Warto dodać, że funkcje te są znane dla wielu szczególnych procesów ryzyka. Kilka przykładów zostało podanych również w tej pracy. Te wzory oraz pakiet Maple pozwalają z kolei znaleźć różne wyrażenia numeryczne, które wskazują na bardzo ciekawe zależności wyboru optymalnej bariery od parametrów procesu ryzyka. A przecież takie jest m.in. zadanie modelowania matematycznego: zidentyfikować nie do końca jawne zależności, które mogą się pojawić w świecie rzeczywistym. Oczywiście nasz model jak każdy inny daje tylko wskazówki dla sekcji menedżerskiej przy ocenie stanu firmy ubezpieczeniowej czy przy strategii wypłat dywidend i jako taki należy go traktować. Konsekwencją tej filozofii jest też świadomy wybór modelu – zamiast rozbudowywać go przez dodawanie wielu składników (jak podatki, różne systemy wypłat dywidend w zależności od kraju itp.), staramy się bardziej ogólnie modelować proces rezerw, pokazując, jak zmienia się optymalna strategia, kiedy dopuścimy możliwość paryskiego opóźnienia w momencie ruiny, czyli dajemy firmie ubezpieczeniowej możliwość ponownego uzyskania płynności finansowej.

2. Preliminaria

Zacznijmy od podania głównych faktów z teorii fluktuacji procesów Lévy'ego. Znakomite podsumowanie tej teorii można znaleźć w książkach Bertoina [1996], Kyprianou [2006] czy Sato [1999] i spisach literatury tamże zawartych .

W tej pracy rozważamy spektralnie ujemny proces ryzyka Lévy'ego $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$, czyli taki, dla którego miara skoków Lévy'ego ν spełnia $\nu(0,\infty) = 0$. Ponieważ skoki procesu są niedodatnie, funkcja generująca momenty $E[^{\theta X_t}]$ jest dobrze zdefiniowana dla wszystkich $\theta \geq 0$ i z twierdzenia Lévy'ego-Chińczyna jest dana przez $E[e^{\theta X_t}] = e^{t\psi(\theta)}$ dla wykładnika Laplace'a $\psi(\theta)$, który jest dobrze zdefiniowany przynajmniej na nieujemnej półosi, jest wypukły i zbiega do nieskończoności dla argumentów zbiegających do nieskończoności. Oznaczmy przez Φ uogólnioną funkcję odwrotną do ψ. Będziemy także rozważać proces dualny: $\widehat{X}_t = -X_t$ z miarą skoków $\widehat{\nu}\,(0,y) = \nu\,(-y,0)$. Dalej wszystkie wielkości liczone dla procesu dualnego będą oznaczane przez daszek ponad odpowiednikiem dla procesu X.

Zdefiniujmy teraz nową miarę poprzez pochodną Radona-Nikodyma:

$$\left.\frac{dP^\theta}{dP}\right|_{F_t} = \exp\left(\theta X_t - \psi(\theta)t\right), \tag{5}$$

gdzie $\mathcal{F}_t$ jest prawostronnie ciągłą naturalną filtracją X. Na nowej przestrzeni probabilistycznej proces X jest nadal spektralenie ujemnym procesem Lévy'ego z wykładnikiem Lapace'a:

$$\psi_\theta(s) = \psi(s+\theta) - \psi(\theta). \tag{6}$$

Dalej dla uproszczenia będziemy zakładać, że albo proces Lévy'ego ma komponentę brownowską, albo skoki mają gęstość.

Dla $p \geq 0$ możemy teraz zdefiniować tzw. p-tą funkcję skalującą $W^{(p)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, która jest rosnącą i ciągłą funkcją z transformatą Laplace'a $\int_0^\infty e^{-\theta y} W^{(p)}(y)dy = (\psi(\theta) - p)^{-1}$ dla $\theta > \Phi(p)$.

Dziedzina $W^{(p)}$ jest rozszerzona na ujemną półoś przez położenie tamże wartości zero. Należy wspomnieć ciekawą własność funkcji skalującej – jest ona różniczkowalna (chociaż niekoniecznie w sposób ciągły).

Funkcje skalujące stanowią podstawę do rozwiązania tzw. problemów wyjścia, które podają rozkład pierwszych momentów wejścia X do przedziałów $[a,\infty)$ oraz $(-\infty,-a)$:

$$\tau_a^+ = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}, \tau_a^- = \inf\{t \geq 0 : X_t < -a\}.$$

Szczególnie:

$$E_z\left[e^{-p\tau_0^- + \beta X_{\tau_0^-}}, \tau_0^- < \infty\right] = e^{\beta z}\left(Z_\beta^{(u)}(z) - \frac{u}{\Phi(u)} W_\beta^{(u)}(z)\right),$$

gdzie $W_\beta^{(u)}$ oraz $Z_\beta^{(u)}$ są funkcjami skalującymi liczonymi względem miary P^β, $u = p - \psi(\beta)$ oraz $u/\Phi(u)$ jest rozumiane w sensie granicznym dla $u = 0$. Funkcje skalujące na nowej przestrzeni probabilistycznej można łatwo związać z tymi liczonymi względem oryginalnej miary P w następujący sposób: $e^{\beta z} W_\beta^{(u)}(z) = W^{(p)}(z)$ oraz

$$Z_\beta^{(u)}(z) = 1 + u \int_0^z e^{-\beta y} W^{(p)}(y)dy.$$

Mając zdefiniowane funkcje skalujące, można także zidentyfikować prawdopodobieństwo braku paryskiej ruiny dla procesu X , które definiujemy w następujący sposób:

$$\tau^\zeta = \inf\{t > 0 : t - \sup\{s \leq t : X_s \geq 0\} \geq \zeta, X_t > 0\}. \tag{7}$$

Szczególnie twierdzenie 1 podane w pracy Czarnej i Palmowskiego [2010] podaje następującą reprezentację.

Twierdzenie 1.

Prawdopodobieństwo braku paryskiej ruiny jest równe:

$$P_x(\tau^\zeta = \infty) = P_x(\tau_0^- = \infty) P(\tau^\zeta < \infty)$$
$$+ \left(1 - P(\tau^\zeta < \infty)\right) \left(1 - \int_0^\infty P(\tau_z^+ > \zeta) P_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)\right) \tag{8}$$

$$P_x(\tau_0^- = \infty) = \psi'(0+) W(x),$$
$$\int_0^\infty e^{-\theta s}\, ds \int_0^\infty P(\tau_z^+ > s) P_x(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)$$
$$= \frac{1 - \psi'(0+)W(x)}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{\Phi(\theta)x} \left(Z_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)}(x) + \frac{\theta}{\Phi(-\theta)} W_{\Phi(\theta)}^{(-\theta)}(x) \right).$$

Dodatkowo zachodzą następujące tożsamości identyfikujące prawdopodobieństwo paryskiej ruiny z zerowym kapitałem początkowym w zależności od właściwości trajektorii tego procesu.

- Jeśli proces X jest o ograniczonym wahaniu, to:

$$P(\tau^\zeta < \infty) \;=\; \frac{\int_0^\infty P(\tau_z^+ > \zeta) P(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)}{1 - \rho + \int_0^\infty P(\tau_z^+ > \zeta) P(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)},$$

gdzie

$$\int_0^\infty e^{-\theta s}\, ds \int_0^\infty P(\tau_z^+ > s) P(\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz)$$
$$= \frac{1}{\theta p} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\Phi(\theta) z}\right) \widehat{\nu}(z, \infty) dz.$$

- Jeśli proces X jest o nieograniczonym wahaniu, to

$$P(\tau^{\zeta} < \infty) = \lim_{b\to\infty} \frac{q(b,\zeta) - q(b,\infty)}{q(b,\zeta)},$$

gdzie

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\omega s} e^{-\beta t} q(s,t)\, dt\, ds = \frac{m(\omega)\Phi(\omega)(\beta - \omega)}{\beta\omega^2(\Phi(\beta) - \Phi(\omega))}$$

$$m(\omega) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{P(-\underline{X}_{e_\omega} \leq \epsilon)}{n(\epsilon)}$$

dla normalizującej stałej n oraz niezależnej zmiennej losowej e_ω o rozkładzie wykładniczym z parametrem ω oraz $\underline{X}_t = \inf_{0\leq s\leq t} X_s$.

3. Główne rezultaty

W tym rozdziale podamy warunki dostateczne na to, aby strategia barierowa była optymalna. Przypomnijmy, że strategia barierowa π^a polega na wypłacie minimalnej liczby dywidend tak, aby proces regulowany po jej wypłacie zawsze był poniżej bariery na wysokości a. Z rozważań geometrycznych łatwo jest zauważyć, że regulowany proces ryzyka U^{π^a} względem miary P_x ma taki sam rozkład jak proces $\{a - Y_t : t \geq 0\}$ dla

$$Y_t = a \vee \overline{X}_t - X_t,$$

który jest tzw. procesem odbitym w przeszłym supremum:

$$\overline{X}_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s.$$

Przyjęliśmy powyżej następującą konwencję $y \vee 0 = \max\{y, 0\}$. Szczegóły można znaleźć w pracy Avrama i in. [2007]. Będziemy rozważać dwa rodzaje funkcji wypłat: do czasu klasycznej ruiny τ_0^U i do czasu paryskiej ruiny $\sigma^{\pi^a,\zeta}$. Robimy to po to, aby później móc porównać, jak zmienia się liczba wypłaconych dywidend oraz dla jakiego opóźnienia paryskiego jesteśmy w stanie zauważyć znaczną różnicę. Zatem dla $x \geq 0$ będziemy rozważać dwie funkcje wypłaty:

$$v(x) := E_x\left(\int_0^{\tau_0^U} e^{-qt} dL_t^{\pi^a}\right) \tag{9}$$

oraz

$$v_a(x) := E_x\left(\int_0^{\sigma^{\pi^a,\zeta}} e^{-qt} dL_t^{\pi^a}\right). \tag{10}$$

W obu przypadkach $L_t^{\pi^a} = a \vee \overline{X}_t - a$ jest matematycznie czasem lokalnym w supremum. Wypłacona łączna liczba dywidend jest zatem niczym innym niż łącznym zdyskontowanym czasem lokalnym liczonym do czasu ruiny. Klasyczna ruina odpowiada matematycznie pojawieniu się pierwszej wycieczki od supremum z głębokością większą niż a. Ta interpretacja pozwala znaleźć nawet rozkład wypłaconych dywidend (zob. [Kyprianou, Palmowski 2007]). Nasza funkcja wypłat polega jednak na znalezieniu tylko wartości oczekiwanej. Możemy zatem uprościć analizę. Korzystając bowiem z mocnej własności Markowa, uzyskujemy dla $x \le a$:

$$v(x) = E_x\left[e^{-q\tau_a^+}, \tau_a^+ < \tau^\zeta\right] v(a)$$

oraz

$$v(x) = x - a + v(a) \qquad \text{dla } x > a.$$

Z teorii fluktuacji wiadomo z kolei, że:

$$E_x\left[e^{-q\tau_a^+}, \tau_a^+ < \tau^\zeta\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}.$$

Dodatkowo wiemy, że funkcja wypłaty powinna być dostatecznie gładka. Szczególnie chcemy, aby:

$$v'(a) = 1,$$

bo taka jest pochodna dla $x > a$.

To daje następującą funkcję wypłaty:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)\prime}(a)}, & x \le a, \\ \\ x - a + \frac{W^{(q)}(a)}{W^{(q)\prime}(a)}, & x > a. \end{cases} \tag{11}$$

Podobną analizę można przeprowadzić dla dywidend płaconych do czasu paryskiej ruiny. Załóżmy, że $X \to \infty$ p.w. Wtedy na mocy mocnej własności Markowa oraz faktu, że nie ma skoków dodatnich, czyli nasz proces rezerw w górę wędruje w sposób ciągły, mamy:

$$P_x(\tau^\zeta = \infty) = P_x(\tau_a^+ < \tau^\zeta) P_a(\tau^\zeta = \infty).$$

Zatem:

$$P_x(\tau_a^+ < \tau^\zeta) = \frac{P_x(\tau^\zeta = \infty)}{P_a(\tau^\zeta = \infty)}.$$

Używając zamiany miary (5) dla $\theta = \Phi(q)$, opcjonalnego twierdzenia o czasie zatrzymania oraz faktu, że względem nowej miary probabilistycznej $P^{\Phi(q)}$ proces X

zbiega do nieskończoności prawie wszędzie (ponieważ $\psi'_{\Phi(q)}(0+) = \psi'(\Phi(q)+) > 0$ na mocy wypukłości wykładnika Lapace'a), dla $x \leq a$ uzyskujemy:

$$E_x\left[e^{-q\tau_a^+}, \tau_a^+ < \tau^\zeta\right] = \frac{V^{(q)}(x)}{V^{(q)}(a)},$$

gdzie

$$V^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} P_x^{\Phi(q)}(\tau^\zeta = \infty).$$

Korzystając z tych samych argumentów jak poprzednio, można uzyskać następującą funkcję wypłaty:

$$v_a(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{V^{(q)}(x)}{V^{(q)\prime}(a)}, & x \leq a, \\ \\ x - a + \frac{V^{(q)}(a)}{V^{(q)\prime}(a)}, & x > a. \end{cases} \tag{12}$$

Biorąc pod uwagę prace Avrama i in. [2007] oraz Czarnej i Palmowskiego [2010], można uzyskać mocniejsze twierdzenie. Wiadomo przecież, że rozwiązanie optymalnej strategii polega na rozwiązaniu systemu Hamiltona-Jacobiego-Bellmana. W pierwszym przypadku wygląda on następująco:

$$\begin{aligned} \Gamma f(x) - qf(x) &\leq 0, \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ f'(x) &\geq 1, \text{gdy} \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

a w drugim przypadku:

$$\begin{aligned} \Gamma f(x) - qf(x) &\leq 0, \text{gdy} \quad x \in R, \\ f'(x) &\geq 1, \text{gdy} \quad x \in R, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Gamma f(x) = \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + p_0 f'(x) + \int_{-\infty}^{0} \left[f(x+y) - f(x) + f'(x) y 1_{\{|y|<1\}}\right] \nu(dy),$$

jest generatorem procesu ryzyka X oraz ν jest miarą skoków, σ^2 oznacza współczynnik gaussowski oraz $p_0 = c - \int_{-1}^{0} y\nu(dy)$. Teraz tylko wystarczy wstawić znalezione funkcje wartości dla strategii barierowej w odpowiedni problem wariacyjny i znaleźć warunki dostateczne na to, aby te systemy były spełnione. Daje to następujący rezultat.

Twierdzenie 2.

Przypuśćmy, że dla $x > 0$ miara skoków dla procesu dualnego ma gęstość $\widehat{\nu}'(x)$ monotonicznie malejącą, wtedy strategia barierowa jest optymalna dla obu problemów optymalizacyjnych z klasyczną ruiną i ruiną paryską. Szczególnie optymalna bariera dla problemu (9) z klasyczną ruiną wynosi:

$$a^* = \inf\{a > 0 : W^{(q)\prime}(a) \leq W^{(q)\prime}(y) \quad \text{dla wszystkich } y \geq 0\},$$

zaś dla problemu (10) z paryskim opóźnieniem w momencie ruiny:

$$a^{*,\zeta} = \inf\{a > 0 : V^{(q)\prime}(a) \leq V^{(q)\prime}(y) \quad \text{dla wszystkich } y \geq 0\}.$$

Szczególnie jeśli $W^{(q)} \in \mathcal{C}^2(R)$ (a tak jest np. kiedy mamy brownowskie perturbacje), to optymalne bariery rozwiązują następujące równania:

$$W^{(q)\prime\prime}(a^*) = 0, \qquad V^{(q)\prime\prime}(a^{*,\zeta}) = 0.$$

4. Analiza numeryczna

4.1. Klasyczny proces Craméra-Lundberga z wykładniczymi roszczeniami

Załóżmy teraz, że proces ryzyka X (jeszcze przed wypłatą dywidend) jest klasycznym procesem ryzyka (1) z wykładniczymi roszczeniami $F(dz) = \xi e^{-\xi z}\, dz$ i z intensywnością ich zgłaszania λ. Z twierdzenia 2 wiemy, że optymalną strategią jest zawsze strategia barierowa. Znajdziemy teraz jej optymalną wysokość. Wtedy względem $P^{\Phi(q)}$ dla

$$\Phi(q) = \frac{q + \lambda - \xi c + \sqrt{(q + \lambda - \xi c)^2 + 4cq\xi}}{2c},$$

proces X_t jest ponownie klasycznym procesem ryzyka ze zmienionymi parametrami, mianowicie roszczenia mają teraz rozkład wykładniczy z parametrem $\xi_q = \xi + \Phi(q)$, zaś intensywność zgłaszania szkód zmienia się na $\lambda_q = \lambda\xi/\xi_q$ (jest to konsekwencja (6) i bardzo prostych rachunków).

Z definicji funkcji skalującej można uzyskać, że wtedy:

$$W^{(q)}(x) = c^{-1}\left(A_+ e^{q^+(q)x} - A_- e^{q^-(q)x}\right),$$

gdzie $A_\pm = \frac{\xi + q^\pm(q)}{q^+(q) - q^-(q)}$ z $q^+(q) = \Phi(q)$ oraz $q^-(q)$ będący najmniejszym rozwiązaniem równania $\psi(\theta) = q$:

$$q^-(q) = \frac{q + \lambda - \xi c - \sqrt{(q + \lambda - \xi c)^2 + 4cq\xi}}{2c}.$$

Stąd rozważając klasyczną ruinę optymalną, należy stwierdzić, że wysokością bariery jest:

$$a^* = \frac{1}{q^+(q) - q^-(q)} \log \frac{q^-(q)^2(\xi + q^-(q))}{q^+(q)^2(\xi + q^+(q))}.$$

Dodatkowo twierdzenie 1 identyfikuje paryską funkcję skalującą:

$$V^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x}\left(1 - e^{-\left(\frac{c\xi_q - \lambda_q}{c}\right)x}\left(\frac{\lambda_q D}{c\xi_q - \lambda_q(1-D)}\right)\right),$$

gdzie

$$D = 1 - \int_0^\zeta \sqrt{\frac{c\xi_q}{\lambda_q}} e^{-(\lambda_q + c\xi_q)t} t^{-1} I_1(2t\sqrt{c\lambda_q \xi})dt$$

oraz $I_1(x)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessla pierwszego rodzaju (zob. [Czarna, Palmowski 2010] w celu uzyskania detali tych rachunków). To daje następującą optymalną barierę:

$$a^{*,\zeta} = \frac{c}{c\xi_q - \lambda_q} \log\left[\left(\frac{\lambda_q D}{c\xi_q - \lambda_q(1-D)}\right)\left(1 - \frac{c\xi_q - \lambda_q}{c\Phi(q)}\right)^2\right].$$

Jesteśmy teraz w stanie dokonać numerycznych obliczeń. Bierzemy następujące parametry procesu ryzyka: $\xi = 2, \lambda = 2, q = 0.1, c = 2.5$, które pojawiają się często w serii numerycznych prac Albrechera, Thonhausera [2008]. Łatwo policzyć, że w tym przypadku $a^* = 3.78$. Dodatkowo tab. 1-4 będą analizować różne opóźnienia paryskie: $\zeta = 0.1, 0.3, 0.7, 2$ i różne rezerwy początkowe dla $x = 2, 5, 10, 50$.

Tabela 1. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$a^{*,\zeta}$	3.54	3.09	2.40	0.84

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Analiza różnych kapitałów początkowych dla klasycznej ruiny

x	2	5	10	50
$v(x)$	12.57	15.71	20.71	60.71

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Analiza różnych kapitałów początkowych dla paryskiego opóźnienia

x	2	5	10	50
$v_{a^{*,\zeta}}(x)$	13.38	16.40	21.40	61.40

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Analiza kapitałów początkowych dla klasycznej ruiny i paryskiego opóźnienia

x_1	2.69	5.69	10.69	50.69
x	2	5	10	50
$v(x_1) = v_{a^*,\zeta}(x)$	13.38	16.40	21.40	61.40

Źródło: opracowanie własne.

Tabele 3 i 4 są liczone dla $\zeta = 3$.

Z powyższych obliczeń numerycznych można wyciągnąć następujące wnioski. Po pierwsze, zastosowanie paryskiego opóźnienia pozwala na to, aby optymalna bariera była bliżej zera. Oczywiście w miarę zwiększania paryskiego opóźnienia wysokość optymalnej bariery obniża się, co przedstawia tab. 1. Niższa optymalna bariera oznacza większe dywidendy przy takim samym kapitale początkowym, co możemy zaobserwować, analizując tab. 2 i 3. Jednakże tak samo jak w przypadku paryskiej ruiny tutaj należałoby zastanowić się nad rozsądnym ograniczeniem czasu opóźnienia. Z analizy numerycznej zaobserwowaliśmy, że dla powyższych danych już przy $\zeta = 2.88$ optymalna bariera jest ujemna, co w praktyce oznacza, że to opóźnienie i wszystkie większe nie mają sensu. Ciekawa wydaje się tab. 4, która pokazuje, jakie zwiększenie kapitału początkowego w przypadku klasycznym daje tyle samo dywidend co przypadek paryskiego opóźnienia.

4.2. Ruch Browna z dryfem

Rozważmy teraz przypadek, kiedy proces ryzyka jest ruchem Browna z dodatnim dryfem:

$$X_t = x + \sigma B_t + ct,$$

gdzie $x, \sigma, c > 0$ oraz B_t jest klasycznym ruchem Browna. Z twierdzenia 2 wiemy, że optymalną strategią jest zawsze strategia barierowa. Znajdziemy teraz jej optymalną wysokość. Względem $P^{\Phi(q)}$ dla $\Phi(q) = \frac{c_q - c}{\sigma^2}$ proces X jest dalej ruchem Browna z dryfem $c_q = \sqrt{c^2 + 2q\sigma^2}$, czyli $X_t = x + \sigma B_t + c_q t$. Definicja funkcji skalującej daje:

$$W^{(q)}(x) = \frac{1}{\sigma^2 \delta} \left(e^{(-\omega+\delta)x} - e^{-(\omega+\delta)x} \right),$$

gdzie $\delta = \sigma^{-2}\sqrt{c^2 + 2q\sigma^2}$ oraz $\omega = c/\sigma^2$.

Stąd rozważając klasyczną ruinę, należy stwierdzić, że optymalną wysokością bariery jest:

$$a^* = \log \left| \frac{\delta + \omega}{\delta - \omega} \right|^{1/\delta}.$$

Z twierdzenia 1 mamy:

$$V^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x}\left(1 - e^{-(2c_q\sigma^{-2})x}\frac{\Psi\left(\frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta}{2}}\right) - \frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta\pi}{2}}}{\Psi\left(\frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta}{2}}\right) + \frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta\pi}{2}}}\right),$$

gdzie

$$\Psi(x) = 2\sqrt{\pi}x\mathcal{N}(\sqrt{2}x) - \sqrt{\pi}x + e^{-x^2}$$

oraz $\mathcal{N}(.)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego (zob. [Czarna, Palmowski 2010]). To daje następującą optymalną barierę:

$$a^{*,\zeta} = \frac{\sigma^2}{2c_q}\log\left[\frac{\Psi\left(\frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta}{2}}\right) - \frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta\pi}{2}}}{\Psi\left(\frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta}{2}}\right) + \frac{c_q}{\sigma}\sqrt{\frac{\zeta\pi}{2}}}\left(1 - \frac{2c_q}{c_q - c}\right)^2\right].$$

Tutaj dokonamy podobnej analizy numerycznej jak dla klasycznego procesu ryzyka, wybierając $\sigma = 2$ oraz $c = 2.5$. Wtedy $a^* = 5.28$. Dodatkowo tab. 5-8 będą analizować różne opóźnienia paryskie: $\zeta = 0.1, 0.3, 0.7, 2$ i różne rezerwy początkowe dla $x = 2, 5, 10, 50$.

Tabela 5. Analiza różnych paryskich opóźnień

ζ	0.1	0.3	0.7	2
$a^{*,\zeta}$	4.48	3.89	3.12	1.17

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Analiza różnych kapitałów początkowych dla klasycznej ruiny

x	2	5	10	50
$v(x)$	20.49	24.72	29.72	69.72

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7. Analiza różnych kapitałów początkowych dla paryskiego opóźnienia

x	2	5	10	50
$v_{a^{*,\zeta}}(x)$	23.00	26.11	31.11	71.11

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7 jest liczona dla $\zeta = 0.3$.

Tabela 8. Analiza kapitałów początkowych dla klasycznej ruiny i paryskiego opóźnienia

x_1	3.40	6.39	11.39	51.39
x	2	5	10	50
$v(x_1) = v_{a^*,\zeta}(x)$	23.00	26.11	31.11	71.11

Źródło: opracowanie własne.

Analizując tab. 5-8, dochodzimy do takich samych wniosków co w przypadku procesu Craméra-Lundberga: zastosowanie paryskiego opóźnienia pozwala na to, aby optymalna bariera była bliżej zera. W porównaniu z wynikami dotyczącymi procesu Craméra-Lundberga tutaj można zauważyć, że paryskie opóźnienie bardziej istotnie wpływa na zwiększenie wysokości dywidend.

5. Podsumowanie

W tej pracy zajmowaliśmy się znajdowaniem optymalnej strategii wypłaty dywidend, gdzie funkcja wypłaty opisywała łączną zdyskontowaną sumę ich wypłat do momentu ruiny. Rozważaliśmy dwa momenty ruiny: klasyczny i paryski. Znaleźliśmy m.in. warunki dostateczne, aby strategia barierowa (płacąca z rezerw wszystkie fundusze ponad określony poziom a w postaci dywidend) była optymalna. Pokazaliśmy, że w prawie wszystkich ciekawych przypadkach ta właśnie strategia jest optymalna. Główne rezultaty nie tylko identyfikują optymalną wysokość bariery, ale także znajdują funkcję wypłaty. Tę z kolei tak jak w modelu Gordona można traktować jako kolejną miarę ryzyka oceniającą daną firmę ubezpieczeniową. Dokonaliśmy także różnorodnych porównań numerycznych, które pokazują, jaki wpływ ma dopuszczenie paryskiego opóźnienia w momencie ruiny. Zauważyliśmy m.in., że w porównaniu z przypadkiem klasycznej ruiny zastosowanie paryskiego opóźnienia pozwala na to, aby optymalna bariera była bliżej zera. Ponadto w miarę zwiększania paryskiego opóźnienia wysokość optymalnej bariery obniża się, a niższa optymalna bariera oznacza większe dywidendy przy takim samym kapitale początkowym. Znaleźliśmy także górne ograniczenie na wielkość paryskiego opóźnienia, które dane jest następującym wzorem: $\zeta_{max} = \sup\{\zeta > 0 : a^{*,\zeta} > 0\}$. Warto zwrócić uwagę, że opóźnienie paryskie jest jak najbardziej uzasadnione aplikacyjnie. Pozwala ono bowiem uzyskać płynność finansową na określonym horyzoncie czasowym z wykorzystaniem pożyczek lub innych mechanizmów finansowych. Model rozważany w tej pracy jest prosty, ale wciąż nie odpowiada na wiele pytań. Pozostaje przecież pytanie o optymalne strategie, kiedy nasze warunki dostateczne nie są spełnione. Wierzymy, że taki przykład można „wyprodukować", rozważając klasyczny proces ryzyka (1) z erlangowskimi roszczeniami. Pierwszą próbę tego rodzaju dla klasycznego problemu dywidendowego można znaleźć w książce Schmidli [2008]. Jak na razie nic nie jest wiadome w tej kwestii dla problemu dywidendowego z paryskim opóźnieniem w momencie ruiny. Wydaje się także, że jest możliwe rozważanie tzw.

procesu rozszczepionego, kiedy tylko część rezerw powyżej danego poziomu jest przekazywana w postaci dywidend do akcjonariuszy. Te i wiele innych problemów będą przedmiotem dalszych badań.

Literatura

Albrecher H., Thonhauser S. (2008), *Optimal dividend strategies for a risk process under force of interest*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 43.

Albrecher H., Kortschak D., Zhou X. (2010), *Pricing of Parisian options for a jump-diffusion model with two-sided jumps*, złożony do publikacji.

Asmussen S. (2000), *Ruin Probabilities*, World Scientific.

Asmussen S., Hojgaard B., Taksar M. (2000), *Optimal risk control and dividend distribution policies. Example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation*, „Finance Stoch." no 4.

Avram F., Kyprianou A.E., Pistorius M.R. (2004), *Exit problems for spectrally negative Lévy processes and applications to (Canadized) Russian options*, „Ann. Appl. Probab." no 14.

Avram F., Palmowski Z., Pistorius M.R. (2007), *On the optimaldividend problem for a spectrally negative Lévy process*, „Ann. Appl. Probab." no 17.

Avram F., Palmowski Z., Pistorius M.R. (2010), *Optimal dividend distribution for a Lévy risk-process in the presence of a Gerber-Shiu penalty function*, Manuskrypt.

Bertoin J. (1996) , *Lévy Processes*, Cambridge University Press.

Czarna I., Palmowski Z. (2010), *Ruin probability with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process*, złożony do publikacji, zob. http://arxiv.org/abs/1003.4299.

Czarna I., Palmowski Z. (2010), *Dividend problem with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process*, złożony do publikacji, http://arxiv.org/abs/1004.3310.

Dassios A., Wu S. (2009a), *Parisian ruin with exponential claims,* złożony do publikacji, http://stats.lse.ac.uk/angelos/.

Dassios A., Wu S. (2009b), *Ruin probabilities of the Parisian type for small claims*, złożony do publikacji, http://stats.lse.ac.uk/angelos/.

Dassios A., Wu S. (2009c), *On barrier startegy dividends with Parisian implementation delay for classical surplus processes*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 45.

Dassios A., Wu S. (2009d), *Perturbed Brownian motion and its application to Parisian option pricing*, „Finance and Stochastics", http://www.springerlink.com/content/c10155vh5121180x/.

De Finetti B. (1957), *Su un'impostazione alternativa dell teoria colletiva del rischio*, „Trans. XV Intern. Congress Act." no 2.

Gerber H.U. (1969), *Entscheidungskriterien für denZusammengesetzten Poisson Prozess*, „Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker" no 69.

Gerber H.U. (1972), *Games of economic survival with discrete- and continuous-income processes,* „Operations Research" no 20.

Gerber H.U., Shiu E.S.W. (2004), *Optimal dividends: analysis with Brownian motion*, „North American Actuarial Journal" no 8.

Grandits P., Hubalek F., Schachermayer W., Zigo, M. (2007), *Optimal expected exponential utility of dividend payments in*

Brownian risk model, „Scandinavian Actuarial Journal" no 2.

Hallin M. (1979), *Band strategies: The random walk of reserves*, „Blatter der DGVFM" no 14.

Irbäck J. (2003), *Asymptotic theory for a risk process with a high dividend barrier*, „Scand. Actuarial J." no 2.

Jeanblanc M., Shiryaev A.N. (1995), *Optimization of the flow of dividends*, „Russian Math. Surveys" no 50.

Kyprianou A.E. (2006), *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer, Germany.

Kyprianou A.E., Palmowski Z. (2005), *A martingale review of some fluctuation theory for spectrally negative Lévy processes*, „Seminaire de Probabilites" no XXXVIII.

Kyprianou A.E., Palmowski Z. (2007), *Distributional study of De Finetti's dividend problem for a general Lévy insurance risk process*, „Journal of Applied Probability" no 44(2).

Landriault D., Renaud J.F., Zhou X. (2010), *Insurance risk model with Parisian implementation delays*, złożony do publikacji,

Loeffen R. (2008), *On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Levy processes*, „Annals of Applied Probability" no 18(5).

Loeffen R., Renaud J.F. (2010), *De Finetti's optimal dividends problem with an affine penalty function at ruin*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 46(1).

Paulsen J. (2007), *Optimal dividend payments until ruin of diffusion processes when payments are subject to both fixed and proportional costs*, „Adv. in Appl. Probab." no 39(3).

Pistorius M.R. (2004), *On exit and ergodicity of the completelyasymmetric Levy process reflected at its infimum*, „J. Th. Probab." no 17.

Sato K. (1999), *Levy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press.

Schmidli H. (2008), *Stochastic Control in Insurance*, Springer Verlag, London.

Zhou X. (2005), *On a classical risk model with a constant dividend barrier*, „North American Actuarial Journal" no 9.

NUMERICAL ANALYSIS OF DIVIDEND PROBLEM WITH PARISIAN DELAY FOR A SPECTRALLY NEGATIVE LÉVY RISK PROCESS

Summary: In this paper we consider a dividend problem for an insurance company whose risk evolves as a spectrally negative Lévy process (in the absence of dividend payments) when Parisian delay is applied. The objective function is given by the cumulative discounted dividends received until the moment of ruin. In this paper we find necessary conditions for barrier strategy to be optimal. We focus on numerical analysis of few examples of risk process such as Cramér-Lunberg process (large claim size case) and Brownian motion with drift (small claim size case).

Key words: ruin probability, dividends, risk process, optimization.