Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją

Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiejkolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawnictwa

© Copyright Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Stanisław Heilpern
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

NIESTANDARDOWE MODELE RYZYKA – BADANIE WPŁYWU STOPNIA ZALEŻNOŚCI NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO RUINY[1]

Streszczenie: Artykuł poświęcony jest niestandardowym modelom ryzyka, rozpatrywanym z punktu widzenia teorii ruiny. W modelach tych odstąpiono od klasycznych założeń dotyczących niezależności. Dopuszczono zależność wielkości wypłat oraz momentów ich wystąpienia. W pracy rozpatrywane są zarówno ciągłe, jak i dyskretne procesy ryzyka. Zbadano wpływ stopnia zależności na prawdopodobieństwo ruiny. W niektórych modelach zaobserwowano występowanie dużych nieregularności, braku monotoniczności badanych relacji.

Słowa kluczowe: proces ryzyka, ruina, zależność, funkcje łączące.

1. Wstęp

Tematem artykułu są niestandardowe modele ryzyka, rozpatrywane z punktu widzenia teorii ruiny. W odróżnieniu od standardowych, klasycznych modeli ryzyka, przedstawionych np. w pracach [Kaas i in. 2001; Ostasiewicz 2000; Shiu 1989], dopuszcza się w nim zależność niektórych procesów czy zmiennych losowych. Założenie niezależności jest bardzo wygodne od strony matematycznej, ale często jest mało realistyczne. W praktyce aktuarialnej spotykamy się np. z oddziaływaniem wspólnych, zewnętrznych czynników na poszczególne grupy polis, co powoduje ich wzajemną zależność. Mogą to być czynniki makroekonomiczne: kryzysy, inflacja, wzrost cen surowców, klimatyczne: powodzie, pożary, trzęsienia ziemi, wybuchy wulkanów oraz polityczne: kryzysy rządowe, zamieszki czy wojny.

W pracy omawiane są modele zarówno ciągłe, jak i dyskretne, jedno- i dwuwymiarowe. Występująca zależność dotyczy wielkości wypłat, jak również procesów liczących wypłaty. W analizie tych modeli zwrócono głównie uwagę na wpływ stopnia zależności na prawdopodobieństwo ruiny, dlatego też przedstawione w pracy modele zostały maksymalnie uproszczone. Zaobserwowano w niektórych modelach występowanie dużych nieregularności, braku monotoniczności tych relacji.

[1] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy nr 3361/B/H03/2010/38.

Praca ma charakter przeglądowy. Zawiera wyniki badań własnych zarówno autora [Heilpern 2009; 2010a; 2010b], jak i innych autorów [Cai, Li 2005; Cossete i in. 2004; 2003; Yuen i in. 2002; 2006]. Zamieszczone w pracy twierdzenia podane są bez dowodów. Czytelnik może je znaleźć we wskazanych odnośnikami pracach.

2. Modele dwuwymiarowe

2.1. Zależność procesów liczących wypłaty

W pracach [Yuen i in. 2002; 2006] autorzy rozpatrywali następujący dwuwymiarowy model ryzyka:

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix},$$

gdzie $u_i \geq 0$, $i = 1, 2$ są kapitałem początkowym, $c_i \geq 0$ intensywnościami napływu składki,

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_{ij}$$

oraz $N_i(t) = M_i(t) + M_0(t)$. W modelu tym zakłada się, że X_{ij} są niezależnymi wielkościami wypłat. Dla ustalonej klasy $i = 1, 2$ wielkości wypłat mają ten sam rozkład o dystrybuancie $F_i(x)$ i wartości oczekiwanej m_i. Natomiast $M_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, są procesami Poissona z intensywnościami λ_i. Są one niezależne oraz są niezależne od wielkości wypłat X_{ij}. Procesy $N_i(t)$, $i = 1, 2$ są więc również procesami Poissona z intensywnościami $\lambda_i + \lambda_0$, ale mogą one być zależne. Zależność powoduje wspólny proces $M_0(t)$, który może być interpretowany jako wpływ wspólnego, zewnętrznego czynnika, który wpływa na liczbę wypłat w obydwu klasach. Natomiast procesy $M_1(t)$, $M_2(t)$ mogą reprezentować oddziaływanie wewnętrznych, indywidualnych dla każdej klasy czynników.

Niech $T_i = \inf\{t\colon U_i(t) < 0\}$ oraz $\psi_i(u) = P(T_i < \infty | U_i(0) = u)$, $i = 1, 2$ będą odpowiednio czasami wystąpienia i prawdopodobieństwami ruiny w poszczególnych klasach $i = 1, 2$. Będziemy rozpatrywać dwa modele ruiny. W pierwszym rozpatrzymy moment pojawienia się pierwszej ruiny:

$$\psi_{\text{or}}(u_{1,} u_2) = P(T_{\text{or}} < \infty | U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2),$$

gdzie $T_{\text{or}} = \inf\{t\colon U_1(t) < 0 \text{ lub } U_2(t) < 0\} = \min\{T_1, T_2\}$. W drugim modelu interesować nas będzie ruina w procesie ryzyka będącego sumą procesów $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$:

$$\psi_s(u) = P(T_s < \infty | U(0) = u),$$

gdzie $T_s = \inf\{t\colon U(t) < 0\}$.

Zbadamy teraz wpływ stopnia zależności procesów $N_i(t)$ na prawdopodobieństwo ruiny w obydwu modelach. W tym celu wprowadzimy drugi dwuwymiarowy model:

$$\begin{pmatrix} U_1'(t) \\ U_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} S_1'(t) \\ S_2'(t) \end{pmatrix},$$

przyjmując, że intensywności λ_i, λ_i' procesów Poissona $M_i(t)$ i $M_i'(t)$ spełniają warunek:

$$\lambda_i + \lambda_0 = \lambda_i' + \lambda_0',$$

a wielkości wypłat X_{ij} i X_{ij}' mają ten sam rozkład dla ustalonej klasy i. Procesy liczące wypłaty $N_i(t)$ oraz $N_i'(t)$ mają wtedy również ten sam rozkład.

Wartości intensywności λ_0 i λ_0' oddają stopień zależności procesów odpowiednio $N_i(t)$ oraz $N_i'(t)$. Dla $\lambda_0 = 0$ otrzymujemy niezależność procesów $N_1(t)$ i $N_2(t)$. Relacja $\lambda_0 \geq \lambda_0'$ sygnalizuje nam, że stopień zależności między procesami liczącymi wypłaty w poszczególnych klasach jest większy dla dwuwymiarowego procesu ryzyka $(U_1(t), U_2(t))^T$ niż dla procesu $((U_1'(t), U_2'(t))^T)$.

Twierdzenie 1 [Yuen i in. 2006]. Jeżeli $\lambda_0 \geq \lambda_0'$ to $\psi_{or}(u_1, u_2) \leq \psi_{or}'(u_1, u_2)$, dla każdej wartości kapitału początkowego u_1 i u_2.

Widzimy, że w tym modelu większy stopień zależności implikuje mniejsze prawdopodobieństwo ruiny dla dowolnej wartości kapitału początkowego.

Rozpatrzmy teraz sumę procesów ryzyka

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) = u + ct - S(t),$$

gdzie $u = u_1 + u_2$, $c = c_1 + c_2$ oraz $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$. W tym przypadku relacja między stopniem zależności procesów a prawdopodobieństwem ruiny jest przeciwna niż w modelu poprzednim. Wzrost stopnia zależności powoduje również wzrost prawdopodobieństwa ruiny. Mówi o tym twierdzenie 2.

Twierdzenie 2 [Heilpern 2009]. Jeżeli $\lambda_0 \leq \lambda_0'$, to $\psi_s(u) \leq \psi_s'(u)$, dla każdej wartości kapitału początkowego u.

Jednak i w tym modelu zależność ta jest regularna, taka sama dla każdej wartości kapitału początkowego.

2.2. Zależność wypłat

Rozpatrzmy teraz dwuwymiarowy model ryzyka, w którym obydwie klasy mają ten sam proces liczący wypłaty $N(t)$ z intensywnością λ:

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix},$$

gdzie $S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_{ij}$, i = 1,2. Założymy przy tym, że dla ustalonej klasy i wielkości wypłat X_{i1}, X_{i2}, … mają ten sam rozkład określony dystrybuantą $F_i(x)$ i są niezależne, a każdy wektor losowy $\mathbf{X}_j = (X_{1j}, X_{2j})^T$ ma ten sam rozkład łączny dla każdego j z dystrybuantą $F(x_1, x_2)$. Natomiast wielkości wypłat X_{1j}, X_{2j} mogą być zależne.

Powyższy model może mieć zastosowanie w sytuacji, gdy mamy dwa rodzaje szkód (np. szkody dotyczące pojazdu i osób), które pojawiają się jednocześnie (np. podczas wypadku). Model ten został wprowadzony i zbadany przez Cai i Li [2005] w przypadku wielowymiarowym. Jednak dla naszych potrzeb wystarczy nam prostszy model dwuwymiarowy.

Zbadajmy następujący model ryzyka będący sumą obydwu procesów składowych:

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j\,,$$

gdzie $u = u_1 + u_2$, $c = c_1 + c_2$ oraz $Z_j = X_{1j} + X_{2j}$. Jest to klasyczny model ryzyka z niezależnymi zagregowanymi wypłatami Z_j o tym samym rozkładzie.

W celu zbadania wpływu stopnia zależności na wielkość prawdopodobieństwa ruiny wprowadzimy drugi zagregowany proces ryzyka $U'(t)$. Założymy, że $u_i = u_i'$, $c = c_i'$ oraz że wektory losowe $\mathbf{X}_j$, $\mathbf{X}_j'$ mają te same rozkłady brzegowe, ale różne rozkłady łączne. Do badania rozpatrywanego wpływu wykorzystamy porządek supermodularny wektorów losowych [Shaked, Shanthikumar 1997]. Wektor losowy $\mathbf{X}$ jest mniejszy niż wektor $\mathbf{X'}$ w porządku supermodularnym, co będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{X} \le_{sm} \mathbf{X}'$ lub $F_{\mathbf{X}} \le_{sm} F_{\mathbf{X}'}$, jeśli $E(f(\mathbf{X})) \le E(f(\mathbf{X}'))$ dla każdej funkcji supermodularnej f: $R^2 \to R$, tzn. spełniającej warunek: $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') \le f(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') + f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}')$ dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in R^2$. Cai i Li w pracy [2005] udowodnili twierdzenie 3.

Twierdzenie 3. Jeżeli $\mathbf{X}_j \le_{sm} \mathbf{X}_j'$, to $\psi(u) \le \psi'(u)$ dla każdej wartości kapitału początkowego u.

Widzimy, że porządek między prawdopodobieństwami ruiny jest zgodny z porządkiem supermodularnym między wektorami losowymi $\mathbf{X}_j$ i $\mathbf{X'}_j$.

Rozpatrzmy teraz szczególne przypadki, w których wykorzystamy twierdzenie 3. Niech wektory losowe $\mathbf{X}^L$ oraz $\mathbf{X}^U$ mają te same rozkłady brzegowe co wektor $\mathbf{X}$ i łączne rozkłady o dystrybuantach odpowiednio równych $F_L(x_1, x_2) = \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\}$ oraz $F_U(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$. Są to tzw. dolne i górne ograniczenia Frecheta wektora losowego $\mathbf{X}$. Brzegowe zmienne losowe X_{1j} i X_{2j} są w tym przypadku odpowiednio ujemnie i dodatnio ściśle zależne. Wtedy otrzymujemy relacje $\mathbf{X}^L \le_{sm} \mathbf{X} \le_{sm} \mathbf{X}^U$ [Bäuerle, Müller 1998] i z twierdzenia 3 mamy te same zależności między prawdopodobieństwami ruiny: $\psi_L(u) \le \psi_X(u) \le \psi_U(u)$.

Struktura zależności wektora losowego $\mathbf{X}$ może być opisana funkcją łączącą (*copula*) $C_{\mathbf{X}}$. Funkcja łącząca jest dystrybuantą łączną zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na [0, 1] $U_i = F_i(X_{ij})$ dla $i = 1, 2$ ([Nelsen 1999; Heilpern 2007]), co pociąga za sobą, że $\mathbf{X} \leq_{\mathrm{sm}} \mathbf{X}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathbf{X}} \leq_{\mathrm{sm}} C_{\mathbf{X}'}$, ponieważ supermodularny porządek jest zamknięty ze względu na monotoniczne funkcje [Muller, Scarsini 2000].

W praktyce często stosowne są rodziny archimedesowych funkcji łączących C_α, np. Claytona, Gumbela czy Franka [Nelsen 1999; Heilpern 2007], indeksowane parametrem α oddającym stopień zależności. Archimedesowa funkcja łącząca C jest indukowana przez generator g zależnością:

$$C_\alpha(u_1, u_2) = g^{-1}(g(u_1) + g(u_2)).$$

Jeśli $g_{\mathbf{X}} \circ g_{\mathrm{Y}}^{-1} \in L_\infty^*$, to $C_{\mathbf{X}} \leq_{\mathrm{sm}} C_{\mathbf{Y}}$, gdzie $L_\infty^* \{w: [0,\infty) \to [0,\infty) | \; w(0) = 0, w(\infty) = \infty, (-1)^{i-1} w^{(i)}(t) \geq 0, i = 1,2, \dots\}$ [Wei, Hu 2002]. Przeważnie dla standardowych rodzin archimedesowych funkcji łączących zachodzi własność, że relacja $\alpha \leq \beta$ pociąga za sobą $C_\alpha \leq_{\mathrm{sm}} C_\beta$. Tak więc z twierdzenia 3 otrzymujemy zależność $\psi_\alpha(u) \leq \psi_\beta(u)$.

Struktura zależności może też być opisana za pomocą gaussowskiej funkcji łączącej [Heilpern 2007], czyli funkcji łączącej indukowanej przez wielowymiarowy rozkład normalny. Wtedy stosując twierdzenie 11 z [Müller 2001], otrzymujemy, że jeżeli $\sigma \leq \sigma'$, to $\mathbf{X} \leq_{\mathrm{sm}} \mathbf{X}'$, gdzie $\sigma = \mathrm{Corr}(X_{1j}, X_{2j})$. Na podstawie twierdzenia 3 mamy, że i w tym przypadku wyższy stopień zależności, reprezentowany przez współczynnik korelacji Pearsona α, implikuje większe prawdopodobieństwo ruiny.

3. Ciągły proces ryzyka z zależnymi wypłatami

W powyższych modelach można było zaobserwować pewną regularność, mianowicie monotoniczną zależność między stopniem zależności określonych procesów a prawdopodobieństwem ruiny. Prawdopodobieństwo ruiny maleje (w pierwszym modelu) bądź wzrasta (w drugim i trzecim) w miarę wzrostu stopnia zależności dla każdej wartości kapitału początkowego. Natomiast w poniższym modelu wystąpi odmienna, nieregularna sytuacja.

Rozpatrzmy standardowy, ciągły model ryzyka:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdzie $N(t)$ jest procesem Poissona z intensywnością λ, a X_i są wielkościami wypłat o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą $F(x)$ i wartością oczekiwaną $m = E(X_i)$. Wypłaty X_i są niezależne od procesu $N(t)$, ale same mogą być już zależne. Symbolem $\psi_I(u)$ będziemy oznaczać prawdopodobieństwo ruiny w przypadku klasycznym, gdy wypłaty są niezależne. Wtedy otrzymujemy $\psi_I(0) = \lambda m/c$ oraz $\psi_I(\infty) = 0$ [Müller 2001].

W drugim skrajnym przypadku, gdy wypłaty X_i są ściśle zależne, gdy dla każdego i mamy tę samą zmienną losową X, tzn. zachodzi $X_i = X$, prawdopodobieństwo ruiny $\psi_{śz}(u)$ jest równe [Heilpern 2010a]:

$$\psi_{śz}(u) = \int_0^{\infty} \psi_x(u)\, dF(x) = \int_0^{c/\lambda} \psi_x(u)\, dF(x) + \bar{F}\left(\frac{c}{\lambda}\right),$$

gdzie $\psi_x(u)$ jest prawdopodobieństwem ruiny, gdy wypłaty są deterministyczne i równe x, tzn. zachodzi $P(X_i = x) = 1$. Postać powyższego wzoru wynika z faktu, że dla $x > c/\lambda$ otrzymujemy $\psi_x(u) = 1$.

Twierdzenie 4 przedstawia zależności między prawdopodobieństwem ruiny ψ_I, gdy wypłaty są niezależne, a prawdopodobieństwem ruiny $\psi_{śz}$ dla ściśle zależnych szkód, gdy kapitał początkowy przyjmuje skrajne wartości: $u = 0$ oraz $u = \infty$.

Twierdzenie 4 [Heilpern 2010a].
$\psi_I(0) \geq \psi_{śz}(0)$,
$\psi_I(\infty) \leq \psi_{śz}(\infty)$.

Jeśli zachodzi $\bar{F}\left(\frac{c}{\lambda}\right) > 0$, to w powyższych zależnościach zachodzą ściśle nierówności.

Widzimy, że w tym przypadku regularność nie zachodzi. Wzajemna relacja między prawdopodobieństwem ruiny dla wypłat niezależnych i wypłat ściśle zależnych zależy istotnie od wartości kapitału początkowego u. Dla zerowego kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny dla wypłat niezależnych nie może być mniejsze od prawdopodobieństwa ruiny dla wypłat ściśle zależnych. Natomiast dla dużych wartości kapitału początkowego otrzymujemy przeciwną zależność.

Załóżmy teraz, że struktura zależności między wypłatami jest opisana archimedesową funkcją łączącą C z generatorem g. Wtedy funkcja g^{-1} jest dla wielowymiarowych funkcji ($n > 2$) łączących całkowicie monotoniczna i jest transformatą Laplace'a pewnej nieujemnej zmiennej losowej Θ z dystrybuantą F_Θ [Nelsen 1999]. Wtedy dla ustalonej wartości θ zmiennej losowej Θ zmienne losowe X_i są warunkowo niezależne [Oakes 1989; Frees, Valdez 1998], a brzegowe funkcje przetrwania są określone wzorem [Oakes 1989]:

$$\bar{F}_i(x|\theta) = \exp(-\theta g(\bar{F}_i(x)).$$

Korzystając z powyższych faktów, otrzymujemy dla ustalonej wartości θ indukowanej przez archimedesową funkcję łączącą zmiennej losowej Θ klasyczny proces ryzyka z niezależnymi wypłatami:

$$U_\theta(t) = u + ct - S_\theta(t),$$

gdzie $S_\theta(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_{i|\theta}$, a $X_{i|\theta}$ są warunkowymi zmiennymi losowymi z dystrybuantą $F_i(x|\theta)$ i wartością oczekiwaną $m(\theta)$. Niech $\psi(u|\theta)$ będzie warunkowym prawdopodobieństwem ruiny dla procesu ryzyka $U_\theta(t)$, a θ_0 będzie największą wartością θ, dla której zachodzi nierówność $m(\theta) \geq c/\lambda$. Dla ustalonej wartości θ zmiennej losowej Θ warunkowe wypłaty $X_{i|\theta}$ są niezależne, więc chcąc wyznaczyć warunkowe prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u|\theta)$, możemy stosować znane, klasyczne metody, np. podane w [Kaas i in. 2001; Ostasiewicz 2000]. Natomiast bezwarunkowe prawdopodobieństwo ruiny jest równe [Heilpern 2010a]:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \psi(u|\theta) dF_\Theta(\theta) = \int_{\theta_0}^\infty \psi(u|\theta) dF_\Theta(\theta) + F_\Theta(\theta_0).$$

Funkcja $m(\theta)$ jest nierosnąca, więc dla każdego $\theta \leq \theta_0$ ruina jest zdarzeniem pewnym, tzn. $\psi(u|\theta) = 1$.

W przypadku gdy struktura zależności zadana jest przez archimedesową funkcję łączącą, otrzymujemy podobne nieregularne zależności jak dla wypłat ściśle zależnych.

Twierdzenie 5 [Heilpern 2010a].
$\psi_I(0) \geq \psi(0)$,
$\psi_I(\infty) \leq \psi(\infty)$.
Jeśli zachodzi $F_\Theta(\theta_0) > 0$, to w powyższych zależnościach zachodzą ścisłe nierówności.

Funkcja łącząca Claytona, określona wzorem [Nelsen 1999; Heilpern 2007]

$$C_\alpha(u_1, \ldots, u_n) = (u_1^{-\alpha} + \cdots + u_n^{-\alpha})^{-1/\alpha},$$

gdzie $\alpha > 0$, jest często stosowanym w praktyce przykładem archimedesowej funkcji łączącej. Jej generator $g(u) = u^{-\alpha} - 1$ indukuje zmienną losową Θ o rozkładzie gamma Ga($1/\alpha$, 1). Parametr α oddaje stopień zależności między zmiennymi losowymi X_i. Współczynnik korelacji Kendala jest wtedy równy

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

Gdy parametr α dąży do zera, otrzymujemy niezależność, a dla nieskończoności ścisłą zależność.

W pracy [Heilpern 2010a] rozpatrywany był przykład, gdy wielkości wypłat X_i mają rozkład Pareta o dystrybuancie $F(x) = 1 - \left(\frac{3}{x+3}\right)^2$, strukturze zależności wypłat opisanej funkcją łącząca Claytona oraz $c = 24$, $\lambda = 4$. W tabeli 1 przedstawione są wartości prawdopodobieństwa ruiny $\psi_\alpha(u)$ dla wartości parametru $\alpha = 0$, 2/3, 2 i ∞. Odpowiadają im wartości współczynnika korelacji Kendala równe 0; 0,25; 0,5 oraz 1. Na podstawie danych z tab. 1 można zauważyć różne uporządkowania wartości prawdopodobieństwa ruiny dla różnych wartości kapitału począt-

Tabela 1. Wartości prawdopodobieństwa ruiny dla różnych wartości α i u

α	u								
	0	4	20	60	100	200	400	600	∞
0	0,5000	0,3071	0,1376	0,0546	0,0310	0,0160	0,0070	0,0050	0,0000
2/3	0,3803	0,2581	0,2033	0,1627	0,1435	0,1204	0,1011	0,0955	0,0931
2	0,3452	0,2285	0,1980	0,1739	0,1583	0,1329	0,1122	0,1063	0,1040
∞	0,3333	0,1778	0,1301	0,1181	0,1160	0,1120	0,1112	0,1111	0,1111

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Heilpern 2010a].

Tabela 2. Prawdopodobieństwo ruiny, gdy $u = \infty$ dla różnych a

α	0	1	2	4	7	10	20	100	∞
$\psi(\infty)$	0	0.3700	0.3927	0.4038	0.4058	0.4053	0.4034	0.4008	0,4

Źródło: [Heilpern].

kowego. Na przykład dla kapitału początkowego równego 20 oraz 200 zachodzą następujące relacje:

$$\psi_\infty(20) \le \psi_0(20) \le \psi_2(20) \le \psi_{2/3}(20),$$
$$\psi_0(200) \le \psi_\infty(200) \le \psi_{2/3}(200) \le \psi_2(200).$$

Dla nieskończenie dużego kapitału początkowego otrzymujemy zależność monotoniczną. W miarę wzrostu stopnia zależności rośnie prawdopodobieństwo ruiny. Jednak nie zawsze tak musi być. Na przykład gdy wypłaty mają rozkład dwupunktowy: $P(X_i = 5) = 0,6$ oraz $P(X_i = 7) = 0,4$ [Heilpern], największe prawdopodobieństwo ruiny mamy dla parametru $\alpha = 7$, a nie dla wypłat ściśle zależnych (zob. tab. 2).

4. Model dyskretny

Na zakończenie naszych rozważań rozpatrzymy dyskretny model postaci:

$$U(t) = u + t - \sum_{i=1}^{t} Y_i,$$

gdzie $t = 1, 2, \dots$, $u = 0, 1, \dots$ jest dyskretnym kapitałem początkowym, wielkości wypłat $Y_i = I_i X_i$, $X_i = 1, 2, \dots$ są dyskretnymi zmiennymi losowymi, a indykatory

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{z prawdopodobieństwem } q \\ 0 & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - q \end{cases}$$

są binarnymi zmiennymi losowymi określającymi moment wystąpienia wypłaty. Przyjmujemy, że $U(0) = u$, $m = E(X_i) > 1$, a indykatory I_i są niezależne od wielkości wypłat X_i. Natomiast same indykatory, w odróżnieniu od klasycznego, dyskretnego modelu ryzyka [Shiu 1989], mogą być zależne.

W przypadku klasycznym, gdy indykatory wskazujące wystąpienie wypłaty są niezależne, dla $qm \geq 1$ ruina zachodzi z prawdopodobieństwem 1. Ponadto

$$\psi I(0) = \frac{q}{1-q}(m-1)) \text{ oraz } \psi I(\infty) = 0,$$

a dla pozostałych wartości kapitału początkowego u prawdopodobieństwo ruiny można wyznaczyć, stosując odpowiednie wzory rekurencyjne [Shiu 1989; Heilpern 2010b].

W modelu dyskretnym, gdy indykatory I_i są ściśle zależne, wypłata wystąpi w każdym momencie t bądź nie wystąpi w żadnym. Pierwsze zdarzenie zajdzie z prawdopodobieństwem q. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny jest stałe, nie zależy od wartości kapitału początkowego u i jest równe $\psi_{śz}(0) = q$. Dla nieskończenie dużego kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny jest zawsze większe dla indykatorów ściśle zależnych niż dla niezależnych, czyli

$$\psi_I(\infty) < \psi_{śż}(\infty).$$

W przypadku zerowego kapitału początkowego, gdy zachodzi warunek $m + q > 2$, zachodzi przeciwna relacja:

$$\psi_I(0) > \psi_{śż}(0).$$

Gdy $m + q < 2$, relacje te, zachodzące dla skrajnych wartości kapitału początkowego, są zgodne. Zachodzi bowiem wtedy nierówność

$$\psi_I(0) < \psi_{śż}(0).$$

Dla $m + q = 2$ otrzymujemy równość tych prawdopodobieństw ruiny [Heilpern 2010b].

Chcąc zbadać zależność prawdopodobieństwa ruiny od stopnia zależności indykatorów I_i, przyjmujemy, że struktura ich zależności opisana jest archimedesową funkcją łączącą C z generatorem g. Wtedy bezwarunkowe prawdopodobieństwo ruiny określone jest wzorem:

$$\psi(u) = \int_{\theta_0}^{\infty} \psi(u|\theta) dF_\Theta(\theta) + F_\Theta(\theta_0),$$

gdzie Θ jest indukowaną przez funkcję łącząca C zmienną losową, a $\theta_0 = \dfrac{\ln m}{g(q)}$. W pracy [Heilpern 2010b] rozpatrzony został przykład, gdzie wypłaty pojawiają się z prawdopodobieństwem $q = 0{,}3$ i mają rozkład geometryczny z wartością oczekiwaną $m = 2$, a struktura zależności indykatorów opisana jest funkcją łączącą Claytona. W tabeli 3 podane są prawdopodobieństwa ruiny dla wartości parametru α: 0; 0,1; 1; 2; 4 oraz ∞, czyli dla wartości współczynnika korelacji Kendala wynoszącego odpowiednio: 0; 0,048; 1/3; 0,5; 2/3 oraz 1. Jak łatwo zauważyć, w tym przypadku występuje duża nieregularność, całkowity brak monotoniczności. Dla różnych wartości kapitału początkowego występują różne uporządkowania ze względu na wartość parametru α, czyli wielkość stopnia zależności, prawdopodobieństw ruiny. Zachodzą np. następujące relacje:

$$\psi_\infty(0) \le \psi_4(0) \le \psi_2(0) \le \psi_1(0) \le \psi_0(0) \le \psi_{0,1}(0),$$

$$\psi_0(2) \le \psi_{0,1}(2) \le \psi_\infty(2) \le \psi_4(2) \le \psi_2(2) \le \psi_1(2),$$

$$\psi_0(\infty) \le \psi_{0,1}(\infty) \le \psi_1(\infty) \le \psi_2(\infty) \le \psi_\infty(\infty) \le \psi_4(\infty).$$

Tabela 3. Prawdopodobieństwo ruiny dla różnych wartości α i u

				α		
u	0	0.1	1	2	4	∞
0	0,42857	0,45766	0,42055	0,38448	0,35064	0,3
1	0,30612	0,36106	0,38117	0,36161	0,33939	0,3
2	0,21866	0,29190	0,35435	0,34607	0,33170	0,3
3	0,15618	0,24166	0,33557	0,33521	0,32629	0,3
4	0,11156	0,20462	0,32206	0,32739	0,32236	0,3
5	0,07969	0,17689	0,31208	0,32161	0,31944	0,3
6	0,05692	0,15583	0,30452	0,31722	0,31721	0,3
7	0,04066	0,13959	0,29866	0,31380	0,31546	0,3
8	0,02904	0,12689	0,29401	0,31109	0,31407	0,3
9	0,02074	0,11682	0,29026	0,30889	0,31293	0,3
10	0,01482	0,10872	0,28718	0,30708	0,31199	0,3
15	0,00275	0,08515	0,27755	0,30137	0,30900	0,3
20	0,00051	0,07443	0,27255	0,29837	0,30741	0,3
25	0,00010	0,06853	0,26951	0,29652	0,30643	0,3
30	0,00002	0,06486	0,26746	0,29528	0,30576	0,3
∞	0,00000	0,04961	0,25700	0,28882	0,30227	0,3

Źródło: [Heilpern 2010b].

Prawie całkowitą regularność możemy natomiast zauważyć w przypadku, gdy struktura zależności między indykatorami I_i zadana jest stacjonarnym łańcuchem Markowa z binarną przestrzenią stanów $\{0, 1\}$ oraz macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \pi q & q - \pi q \\ p - \pi p & q + \pi p \end{pmatrix}$$

gdzie $p_{ij} = P(I_{k+1} = j| I_k = i)$ dla $i, j \in \{0, 1\}$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $0 \le \pi \le 1$ oraz początkowymi prawdopodobieństwami [Cossete, Landriault 2004; 2003]

$$P(I_0 = 0) = p, \quad P(I_0 = 1) = q.$$

Parametr π oddaje stopień zależności indykatorów I_i, jest bowiem współczynnikiem korelacji Pearsona między sąsiednimi indykatorami, tzn.

$$\pi = \rho(I_k, I_{k+1}).$$

Gdy $\pi = 0$, otrzymujemy niezależność, a dla $\pi = 1$ silną zależność z zdegenerowaną, jednostkową macierzą przejść.

Prawdopodobieństwo ruiny $\psi_\pi(u)$ w zależności od wartości współczynnika π wyznaczamy, korzystając z warunkowych prawdopodobieństw ruiny zależnych od prawdopodobieństwa początkowego $\psi_\pi(u|i)$, gdzie $i = 0, 1$, określonych wzorem

$$\psi_\pi(u|i) = P(U(t) < 0 \text{ dla pewnego } t \mid U(0) = u, I_0 = i).$$

Bezwarunkowe prawdopodobieństwo ruiny jest wtedy równe:

$$\psi_\pi(u) = p\psi_\pi(u|0) + q\psi_\pi(u|1).$$

Natomiast warunkowe prawdopodobieństwa ruiny można wyznaczyć, stosując dla $0 \le \pi < 1$ wzory rekurencyjne [Shiu 1989; Cossete i in. 2004]:

$$\psi_\pi(0|0) = \frac{q}{p}(m-1), \tag{1}$$

$$\psi_\pi(0|1) = \frac{\pi\big(1 - f(1)\big) + p_{10}\psi_\pi(0|0)}{p_{00} - \pi f(1)} \tag{2}$$

i dla $u = 1, 2, \ldots$

$$\psi_\pi(u|0) = \psi_\pi(0|0) - \frac{q}{p}\sum_{k=1}^{u}\big(1 - F(k)\big)\big(1 - \psi_\pi(u-k|1)\big), \tag{3}$$

$$\psi_\pi(u|1) = \psi_\pi(0|1) - \sum_{k=1}^{u}\frac{\pi f(k+1) + p_{01}(1 - F(k))}{p_{00} - \pi f(1)}\big(1 - \psi_\pi(u-k|1)\big). \tag{4}$$

O wpływie stopnia zależności, w tym przypadku jest to wartość współczynnika korelacji π, na prawdopodobieństwo ruiny mówi nam twierdzenie 6.

Twierdzenie 6 [Cossete i in. 2004]. Jeżeli $\pi_1 < \pi_2 < 1$, to $\psi_{\pi_1}(u) < \psi_{\pi_2}(u)$.

Na podstawie powyższego twierdzenia możemy stwierdzić, że w przypadku gdy indykatory I_i tworzą stacjonarny łańcuch Markowa, to w miarę wzrostu stopnia zależności rośnie prawdopodobieństwo ruiny. Jednakże zależność ta zachodzi dla współczynników korelacji mniejszych od jedynki. Dla $\pi = 1$ otrzymujemy ścisłą zależność i – jak wiadomo z rozważań przeprowadzonych na początku tego punktu – prawdopodobieństwo ruiny jest stałe, nie zależy wtedy od wielkości kapitału początkowego u i jest równe

$$\psi_1(u) = q.$$

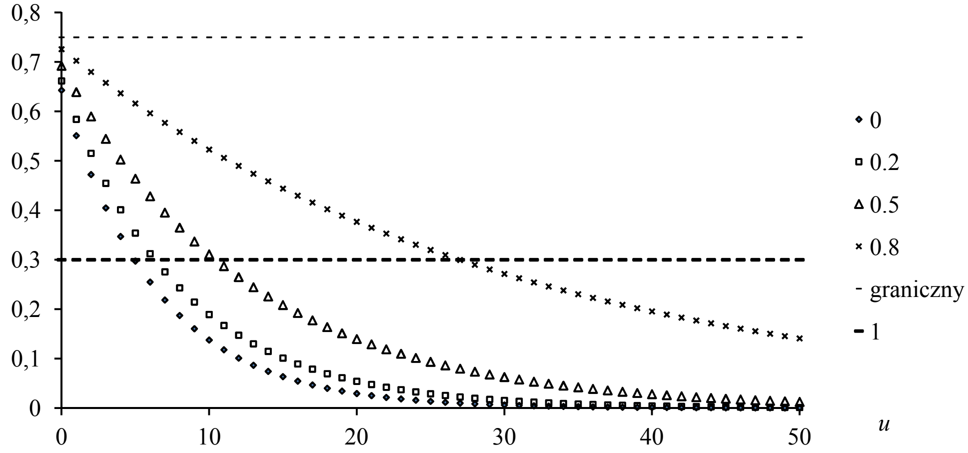
Natomiast jeśli współczynnik korelacji π dąży do 1, to graniczne prawdopodobieństwo ruiny $\psi_g(u)$ również jest stałe i wynosi [Heilpern 2010b]

$$\psi_g(u) = \lim_{\pi\to 1}\psi_\pi(u) = qm.$$

Jak łatwo zauważyć, jest ono zawsze większe od prawdopodobieństwa ruiny dla przypadku ścisłej zależności, czyli otrzymujemy

$$\psi_1(u) < \psi_g(u).$$

Gdy π = 1, to nie zachodzi ciągłość i jedynie w tym przypadku monotoniczność zostaje zaburzona.



Rys. 1. Prawdopodobieństwo ruiny dla różnych wartości parametru π

Źródło: [Heilpern 2010b].

W pracy [Heilpern 2010b] rozpatrzony został przypadek, gdy wypłaty X_i mają rozkład geometryczny o wartości oczekiwanej $m = 2{,}5$, a prawdopodobieństwo wystąpienia wypłaty jest równe $q = 0{,}3$. Na rysunku 1 przedstawione zostały wartości prawdopodobieństwa ruiny, gdy współczynnik korelacji π jest odpowiednio równy 0; 0,2; 0,5; 0,8; 1 oraz przypadek graniczny. Widzimy regularną, monotoniczną zależność prawdopodobieństwa ruiny od wartości współczynnika korelacji, gdy π < 1, oraz brak regularności dla π = 1.

Literatura

Bäuerle N., Müller A. (1998), *Modeling and comparing dependences in multivariate risk portfolios*, „ASTIN Bulletin" no 28.

Cai J., Li H. (2005), *Multivariate risk model of phase type*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 36.

Cossete H., Landriault D., Marceau E. (2004), *Exact expressions and upper bound for ruin probabilities in the compound Markov binomial model*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 34.

Cossete H., Landriault D., Marceau E. (2003), *Ruin probabilities in the compound Markov binomial model*, „Scandinavian Actuarial Journal" no 4.

Frees E.W., Valdez E. (1998), *Understanding relationships using copulas*, „North Amer. Actuarial J.” no 2.
Heilpern S., *Analiza wpływu stopnia zależności wypłat na prawdopodobieństwo ruiny*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, seria Ekonometria (w druku).
Heilpern S. (2007), *Funkcje łączące*, AE, Wrocław.
Heilpern S. (2009), *Probability of ruin for the dependent, twodimensional Poisson process*, „Badania Operacyjne i Decyzje” no 1.
Heilpern S. (2010a), *Wyznaczanie prawdopodobieństwa ruiny, gdy struktura zależności wypłat opisana jest Archimedesowi funkcją łączącą*, [w:] *Zagadnienia aktuarialne, teoria i praktyka*, red. W. Otto, Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa (w druku).
Heilpern S. (2010b), *Dependent discrete risk processes – calculation of probability of ruin*, „Operations Research and Decisions” nr 2 (w druku).
Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2001), *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston.
Muller A., Scarsini M. (2000), *Some remarks on the supermodular order*, „J. Multivariate Anal.” no 73.
Müller A. (2001), *Stochastic ordering of multivariate normal distributions*, „Ann. Inst. Statist. Math.” no 53.
Nelsen R.B. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
Oakes D. (1989), *Bivariate survival models induced by frailties*, „JASA” no 84 .
Ostasiewicz W. (red.) (2000), *Modele aktuarialne*, AE, Wrocław.
Shaked M., Shanthikumar J.G. (1997), *Supermodular stochastic orders and positive dependence of random vectors*, „J. Multivariate Anal.” no 61.
Shiu E. (1989), *The probability of eventual ruin in the compound binomial model*, „ASTIN Bulletin” no 19.
Wei G., Hu T. (2002), *Supermodular dependence ordering on a class of multivariate copulas*, „Insurance: Mathematics and Economics” no 57.
Yuen K.C., Guo J.Y., Wu X.Y. (2002), *On a correlated aggregate claim model with Poisson and Erlang risk processes*, „Insurance: Mathematics and Economics” no 31.
Yuen K.C., Guo J.Y., Wu X.Y. (2006), *On the first time of ruin in the bivariate compound Poisson model*, „Insurance: Mathematics and Economics” no 38.

NONSTANDARD RISK MODELS – STUDY OF INFLUENCE OF THE DEGREE OF DEPENDENCE ON THE PROBABILITY OF RUIN

Summary: The paper is devoted to nonstandard risk models. The assumption of dependence of some random processes or variables is made and the probability of ruin is investigated. The continuous and discrete processes are studied. In these processes the value of claims or the random variables, which determine the moments at which the claim occurs, may be dependent. The impact of the degree of dependence of claims on the probability of ruin is investigated. Some nonregularity and nonmonotonicity of such a relation are observed.

Key words: risk model, ruin, dependence.