Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją
Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Aleksandra Iwanicka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WPŁYW ZEWNĘTRZNYCH CZYNNIKÓW RYZYKA NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO RUINY W DWUWYMIAROWYM MODELU RYZYKA Z LEKKOOGONOWYMI ROZKŁADAMI WYPŁAT[1]

Streszczenie: W ostatnich latach obserwujemy zmiany klimatyczne, powodujące częste występowanie klęsk żywiołowych, które z kolei stają się przyczyną pojawiania się w tym samym czasie dużej liczby różnych szkód. Celem pracy jest próba zbadania wpływu zewnętrznych czynników ryzyka, takich jak klęski żywiołowe, na prawdopodobieństwo ruiny w modelu ryzyka dla dwóch klas ryzyka, a dokładniej w dwuwymiarowym modelu ryzyka. Przyjmuje się, że ruina wystąpi, gdy ulegnie jej co najmniej jedna z dwóch klas ryzyka. Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny prezentowany jest na numerycznych przykładach w przypadku lekkoogonowych rozkładów wpłat.

Słowa kluczowe: dwuwymiarowy model ryzyka, prawdopodobieństwo ruiny, zewnętrzne czynniki ryzyka.

1. Wstęp

Występowanie klęsk żywiołowych powoduje pojawianie się różnorodnych szkód i w konsekwencji różnorodnych wypłat z portfela ubezpieczyciela. Celem pracy jest przeprowadzenie krótkiej numerycznej analizy wpływu zewnętrznych czynników ryzyka, takich jak klęski żywiołowe, na prawdopodobieństwo ruiny w portfelu dla dwóch klas ryzyka, a dokładniej w dwuwymiarowym modelu ryzyka w przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat.

Dwuwymiarowy model ryzyka definiujemy w następujący sposób [Guo i in. 2006]:

$$\begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M_1(t)+M(t)} X_i \\ \sum_{i=1}^{M_2(t)+M(t)} Y_i \end{pmatrix}, \tag{1}$$

[1] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy nr 3361/B/H03/2010/38.

gdzie $u_1\,(u_2)$ jest kapitałem początkowym w pierwszej (drugiej) klasie ryzyka, $c_1\,(c_2)$ to stała dodatnia intensywność napływu składki w jednostce czasu w pierwszej (drugiej) klasie ryzyka, natomiast $\{M_1(t)\}_{t\geq 0}, \{M_2(t)\}_{t\geq 0}$ oraz $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ są trzema niezależnymi procesami Poissona z intensywnościami odpowiednio λ_1, λ_2 oraz λ. Proces $\{M_1(t)\}_{t\geq 0}$ $\left(\{M_2(t)\}_{t\geq 0}\right)$ jest procesem zliczającym wypłaty powodowane przez czynniki ryzyka właściwe tylko dla pierwszej (drugiej) klasy ryzyka, tzw. wewnętrzne czynniki ryzyka. Natomiast proces $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ jest procesem zliczającym wypłaty powodowane przez czynniki ryzyka wspólne dla obu klas ryzyka, tzw. zewnętrzne czynniki ryzyka. Wartości intensywności procesów zliczających szkody λ_1, λ_2 i λ można utożsamiać z siłą oddziaływania poszczególnych czynników ryzyka na odpowiednie klasy ryzyka. Warto zauważyć, że proces $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ powoduje zależność pomiędzy procesem zliczającym wypłaty w pierwszej klasie ryzyka, tj. $\{M_1(t)+M(t)\}_{t\geq 0}$, a procesem zliczającym wypłaty w drugiej klasie ryzyka, tj. $\{M_2(t)+M(t)\}_{t\geq 0}$, co z kolei skutkuje zależnością pomiędzy procesami ryzyka $\{R_1(t)\}_{t\geq 0}$ i $\{R_2(t)\}_{t\geq 0}$ dla obu klas. Ponadto $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ $(\{Y_i\}_{i=1}^{\infty})$ jest ciągiem kolejnych wypłat w pierwszej (drugiej) klasie ryzyka, które tworzą ciąg dodatnich zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie ze średnią $\mu_X(\mu_Y)$. Przyjmuje się założenie, że wszystkie wypłaty są niezależne od siebie oraz niezależne od procesów $\{M_1(t)\}_{t\geq 0}$, $\{M_2(t)\}_{t\geq 0}$ i $\{M(t)\}_{t\geq 0}$. Dodatkowo, aby zapewnić wypłacalność ubezpieczyciela w każdej klasie ryzyka, przyjmuje się założenie, że $c_1 = (1+\theta_1)(\lambda_1+\lambda)\mu_X$ oraz $c_2 = (1+\theta_2)(\lambda_2+\lambda)\mu_Y$, gdzie θ_1 i θ_2 są stałymi dodatnimi wartościami nazywanymi współczynnikami narzutu na bezpieczeństwo osobno w pierwszej i w drugiej klasie ryzyka.

W literaturze często przyjmuje się podział rozkładów wypłat na lekkoogonowe i ciężkoogonowe [Asmussen 2000; Rolski i in. 1998]. Rozkład zmiennej losowej X nazywamy lekkoogonowym, jeśli istnieją takie dodatnie stałe wartości a i b, które dla każdej rzeczywistej wartości x spełniają następującą nierówność:

$$1 - F_X(x) \leq a\exp(-bx),$$

gdzie F_X oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X. W przeciwnym razie rozkład zmiennej losowej X nazywamy rozkładem ciężkooognowym. Przykładami lekkoogonowych rozkładów wypłat są np. rozkład wykładniczy i rozkład gamma, które przyjęte są w numerycznych analizach w dalszej części niniejszej pracy.

W modelu (1) ruinę można definiować w różny sposób . Często definiuje się ją jako spadek sumy $R_1(t)+R_2(t)$ poniżej zera w pewnej chwili $t>0$. Jednak sumę dwóch procesów ryzyka $\{R_1(t)+R_2(t)\}_{t\geq 0}$ można przekształcić do klasycznego jednowymiarowego modelu ryzyka [Ambagaspitiya 1998]. Wówczas można stosować wiele znanych rezultatów z klasycznej teorii ruiny, które można znaleźć w pracach [Asmussen 2000; Rolski i in. 1998]. W tej pracy przyjmuje się bardziej zachowawcze podejście, nazywając ruiną spadek poniżej zera co najmniej jednego z dwóch procesów ryzyka: $\{R_1(t)\}_{t\geq 0}$, $\{R_2(t)\}_{t\geq 0}$ w pewnej chwili $t>0$. Niech $\tau = \inf\{t : R_1(t) < 0 \vee R_2(t) < 0\}$ oznacza pierwszy moment ruiny. Wtedy prawdopodobieństwem ruiny w skończonym horyzoncie czasowym T nazywamy następujące prawdopodobieństwo:

$$\psi(u_1,u_2;T)=P(\tau \le T \mid R_1(0)=u_1, R_2(0)=u_2) \tag{2}$$

oraz $\phi(u_1,u_2;T)=1-\psi(u_1,u_2;T)$ nazywamy prawdopodobieństwem przeżycia w skończonym horyzoncie czasowym T. Natomiast prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie definiujemy w następujący sposób:

$$\psi(u_1,\ u_2)=P(\tau<\infty \mid R_1(0)=u_1, R_2(0)=u_2). \tag{3}$$

Prawdopodobieństwa ruiny (2) i (3) mogą być wykorzystane jako wczesny system ostrzegawczy w dziale zarządzania ryzykiem firmy ubezpieczeniowej. Jednak ze względu na występowanie zależności pomiędzy klasami w dwuwymiarowym procesie ryzyka (1) prawdopodobieństwa te stają się trudne do szacowania [Guo i in. 2006].

2. Analiza w skończonym horyzoncie czasowym

Dwuwymiarowy model ryzyka (1) można aproksymować dwuwymiarowym dwumianowym modelem ryzyka z odpowiednio zdyskretyzowanymi wypłatami, otrzymując następującą aproksymację prawdopodobieństwa ruiny (2) [Guo i in. 2006]:

$$\psi(u_1,u_2;n)=\lim_{m\to\infty}\psi_m^*(w_1,w_2;mn), \tag{4}$$

gdzie $\psi_m^*(w_1,w_2;mn)$ jest prawdopodobieństwem ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w dwuwymiarowym dwumianowym modelu ryzyka. Wówczas można wyznaczyć rekurencyjnie następujące prawdopodobieństwo przeżycia $\phi_m^*(w_1,w_2;mn)=1-\psi_m^*(w_1,w_2;mn)$ w taki sposób [Guo i in. 2006]:

$$\begin{aligned}\phi_m^*(w_1,w_2;mn) &= p_{00}\phi_m^*(w_1+1,w_2+1;mn-1)+\\ &+p_{01}\sum_{j=1}^{w_2+1}\phi_m^*(w_1+1,w_2+1-j;mn-1)g_j+\\ &+p_{10}\sum_{i=1}^{w_1+1}\phi_m^*(w_1+1-i,w_2+1;mn-1)f_i+\\ &+p_{11}\sum_{i=1}^{w_1+1}\sum_{j=1}^{w_2+1}\phi_m^*(w_1+1-i,w_2+1-j;mn-1)f_i g_j,\end{aligned}$$

przy czym $w_i=u_i m/c_i\ (i=1,2)$, a $(f_k)_{k\in N}$ i $(g_k)_{k\in N}$ są funkcjami rozkładu prawdopodobieństwa zdyskretyzowanych wypłat odpowiednio w pierwszej i w drugiej klasie ryzyka. Ponadto p_{00} oznacza prawdopodobieństwo, że nie będzie wypłaty ani w pierwszej, ani w drugiej klasie ryzyka w jednym odcinku czasowym, p_{10} oznacza prawdopodobieństwo, że będzie jedna wypłata w pierwszej klasie i nie będzie ani jednej wypłaty w drugiej klasie w jednym odcinku czasowym, p_{01} oznacza prawdopodobieństwo, że będzie jedna wypłata z pierwszej klasy i nie będzie ani jednej wypłaty z pierwszej klasy w jednym odcinku czasowym, oraz p_{11} oznacza prawdopodobieństwo, że będzie po jednej wypłacie w każdej klasie w jednym odcinku czasowym. Natomiast pierwszy krok rekurencji zadany jest następująco:

$$\phi_m^*(z_1,z_2;0)=1 \quad \text{dla} \quad z_1=0,\ 1,\ \ldots\ ,w_1+mn-1, \quad z_2=0,\ 1,\ \ldots,\ w_2+mn-1.$$

Aproksymacja (4) jest jedyną znaną niesymulacyjną metodą szacowania prawdopodobieństwa ruiny (2) w skończonym horyzoncie czasowym. Wygodniejszym ze względu na niższą złożoność obliczeniową narzędziem do szacowania prawdopodobieństwa ruiny (2) są symulacje metodą Monte Carlo.

Przeanalizujmy na przykładzie numerycznym wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym. Przyjmujemy dwuwymiarowy model ryzyka (1). Niech intensywność pojawiania się wypłat w obu klasach ryzyka jest cały czas jednakowa i wynosi w pierwszej klasie $\lambda_1 + \lambda = 1$ oraz w drugiej klasie $\lambda_2 + \lambda = 1$, tzn. łączna siła oddziaływania wewnętrznych i zewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ryzyka jest stała. Ponadto niech $\theta_1 = \theta_2 = 0{,}05$ i niech $X_i \sim Gamma(0{,}5;2)$ oraz $Y_i \sim Exp(1)$. Prawdopodobieństwo ruiny szacowane jest dla różnych wartości kapitałów początkowych w obu kla-

Tabela 1. Wyniki aproksymacji dwuwymiarowego prawdopodobieństwa ruiny (2)

$T \setminus (u_1,u_2)$	(0,0)	(5,0)	(5,5)	(10,5)	(10,10)
$T=5$					
$\lambda=0$	0,9169	0,7199	0,2488	0,1640	0,0405
$\lambda=0,5$	0,8866	0,7071	0,2398	0,1623	0,0403
$\lambda=1$	0,8461	0,6993	0,2297	0,1610	0,0392
$T=10$					
$\lambda=0$	0,9540	0,8159	0,4174	0,2904	0,1103
$\lambda=0,5$	0,9336	0,8010	0,3994	0,2857	0,1080
$\lambda=1$	0,9066	0,7884	0,3820	0,2820	0,1058
$T=15$					
$\lambda=0$	0,9679	0,8587	0,5219	0,3808	0,1810
$\lambda=0,5$	0,9518	0,8434	0,5010	0,3728	0,1755
$\lambda=1$	0,9294	0,8292	0,4773	0,3647	0,1707
$T=20$					
$\lambda=0$	0,9742	0,8840	0,5899	0,4500	0,2445
$\lambda=0,5$	0,9606	0,8688	0,5669	0,4366	0,2355
$\lambda=1$	0,9420	0,8554	0,5430	0,4265	0,2279

Źródło: opracowanie własne.

sach (u_1, u_2) i dla różnych długości horyzontów czasowych T za każdym razem dla trzech różnych intensywności λ. W tabeli 1 przedstawione są wyniki oszacowania prawdopodobieństw otrzymane za pomocą aproksymacji (4) dla $m = 21$. Natomiast w tab. 2 przedstawione są wyniki oszacowania prawdopodobieństw za pomocą metody Monte Carlo na podstawie symulacji 500 000 trajektorii dwuwymiarowego procesu ryzyka (1).

W tabelach 1 i 2 można zauważyć, że wyniki liczone obiema metodami są podobne. Ponadto zarówno w tab. 1, jak i w tab. 2 dla dowolnie ustalonych wartości kapitałów początkowych (u_1, u_2) oraz dowolnie ustalonego horyzontu czasowego T obserwujemy, że w miarę wzrostu intensywności λ, którą można utożsamiać z siłą oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ryzyka, oszacowane prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u_1, u_2, T)$ maleje. Ponadto można zauważyć, że spadek oszacowanego prawdopodobieństwa $\psi(u_1, u_2, T)$ jest niemal proporcjonalny do wzrostu intensywności λ.

Tabela 2. Wyniki symulacji dwuwymiarowego prawdopodobieństwa ruiny (2)

$T \setminus (u_1, u_2)$	(0,0)	(5,0)	(5,5)	(10,5)	(10,10)
$T = 5$					
$\lambda = 0$	0,9205	0,7234	0,2515	0,1653	0,0404
$\lambda = 0,5$	0,8899	0,7103	0,2424	0,1639	0,0400
$\lambda = 1$	0,8500	0,6996	0,2322	0,1623	0,0393
$T = 10$					
$\lambda = 0$	0,9581	0,8228	0,4295	0,2982	0,1146
$\lambda = 0,5$	0,9380	0,8066	0,4112	0,2928	0,1120
$\lambda = 1$	0,9102	0,7924	0,3915	0,2870	0,1085
$T = 15$					
$\lambda = 0$	0,9712	0,8675	0,5400	0,3952	0,1909
$\lambda = 0,5$	0,9556	0,8509	0,5165	0,3856	0,1850
$\lambda = 1$	0,9334	0,8357	0,4916	0,3754	0,1777
$T = 20$					
$\lambda = 0$	0,9779	0,8934	0,6137	0,4681	0,2595
$\lambda = 0,5$	0,9649	0,8772	0,5875	0,4549	0,2502
$\lambda = 1$	0,9460	0,8617	0,5598	0,4412	0,2392

Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym punkcie pracy zajmiemy się analizą wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny (3) w nieskończonym horyzoncie czasowym.

3. Analiza w nieskończonym horyzoncie czasowym

W nieskończonym horyzoncie czasowym nie mamy żadnych niesymulacyjnych metod wyznaczania prawdopodobieństwa ruiny (3). Znane są jedynie pewne proste ograniczenia tego prawdopodobieństwa, które podane są poniżej.

Niech $\psi_i(u_i)$ oznacza prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym w i-tej klasie ryzyka dla $i=1,2$. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny (3) można ograniczyć z dołu i z góry w następujący sposób [Guo i in. 2006]:

$$\max\{\psi_1(u_1),\psi_2(u_2)\} \le \psi(u_1,u_2) \le \psi_1(u_1)+\psi_2(u_2)-\psi_1(u_1)\psi_2(u_2). \qquad (5)$$

W przypadku, gdy na obie klasy ryzyka oddziałują tylko wewnętrzne czynniki ryzyka, ograniczenie górne w (5) jest równe prawdopodobieństwu ruiny $\psi(u_1,u_2)$.

Ponadto Yuen, Guo i Wu udowodnili pewną istotną zależność pomiędzy prawdopodobieństwami ruiny (3) dla dwóch niezależnych dwuwymiarowych procesów ryzyka $(R_1(t),R_2(t))_{t\ge0}$ i $(\tilde{R}_1(t),\tilde{R}_2(t))_{t\ge0}$. Niech $(R_1(t),R_2(t))_{t\ge0}$ oznacza dwuwymiarowy proces ryzyka (1) z wypłatami X_i i Y_i odpowiednio w pierwszej i drugiej klasie ryzyka, z procesami zliczającymi wpłaty powodowane przez wewnętrzne czynniki ryzyka odpowiednio w pierwszej klasie $\{M_1(t)\}_{t\ge0}$ z intensywnością λ_1 i w drugiej klasie $\{M_2(t)\}_{t\ge0}$ z intensywnością λ_2 oraz procesem zliczającym wypłaty powodowane przez zewnętrzne czynniki ryzyka $\{M(t)\}_{t\ge0}$ z intensywnością λ. Ponadto niech $(\tilde{R}_1(t),\tilde{R}_2(t))_{t\ge0}$ oznacza niezależny od procesu $(R_1(t),R_2(t))_{t\ge0}$ dwuwymiarowy proces ryzyka (1) z wypłatami $\tilde{X}_i$ i $\tilde{Y}_i$ odpowiednio w pierwszej i drugiej klasie ryzyka, z procesami zliczającymi wpłaty powodowane przez wewnętrzne czynniki ryzyka odpowiednio w pierwszej klasie $\{\tilde{M}_1(t)\}_{t\ge0}$ z intensywnością $\tilde{\lambda}_1$ i w drugiej klasie $\{\tilde{M}_2(t)\}_{t\ge0}$ z intensywnością $\tilde{\lambda}_2$ oraz procesem zliczającym wypłaty powodowane przez zewnętrzne czynniki ryzyka $\{\tilde{M}(t)\}_{t\ge0.}$ z intensywnością $\tilde{\lambda}$. Przyjmujemy, że wypłaty osobno w pierwszej i drugiej klasie mają w obu procesach te same rozkłady i w obu procesach są takie same intensywności napływu składek osobno w pierwszej i drugiej klasie ryzyka. Dodatkowo zakładamy, że $\lambda_1+\lambda=\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}$ oraz $\lambda_2+\lambda=\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}$, tzn. intensywność napływu szkód osobno w pierwszej i w drugiej klasie ryzyka w obu dwuwymiarowych procesach $(R_1(t),R_2(t))_{t\ge0}$ i $(\tilde{R}_1(t),\tilde{R}_2(t))_{t\ge0}$ są takie same. Wówczas dla $\lambda\le\tilde{\lambda}$ zachodzi następująca relacja pomiędzy prawdopodobieństwami ruiny [Guo i in. 2006]:

$$\psi(u_1,u_2) \ge \tilde{\psi}(u_1,u_2), \qquad (6)$$

gdzie $\psi(u_1,u_2)$ oznacza prawdopodobieństwo ruiny dla $(R_1(t),R_2(t))_{t\ge0}$, natomiast $\tilde{\psi}(u_1,u_2)$ oznacza prawdopodobieństwo ruiny dla $(\tilde{R}_1(t),\tilde{R}_2(t))_{t\ge0}$. Relacja ta może sugerować, że jeśli wzrasta siła oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ryzyka i jednocześnie maleje siła oddziaływania wewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ryzyka w taki sposób, że łączna siła oddziaływania zewnętrznych i wewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ryzyka nie ulega zmianie, to wówczas prawdopodobieństwo ruiny maleje.

Przeanalizujmy wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u_1,u_2)$ na przykładzie numerycznym. Przyjmijmy dwuwymiarowy model ryzyka (1). Niech intensywność pojawiania się wypłat w obu klasach ryzyka jest cały czas jednakowa i wynosi w pierwszej klasie $\lambda_1 + \lambda = 1$ oraz w drugiej klasie $\lambda_2 + \lambda = 1$. Ponadto niech współczynnik narzutu na bezpieczeństwo w obu klasach ryzyka jest jednakowy i wynosi $\theta_1 = \theta_2 = 0{,}05$ oraz niech $X_i \sim Gamma(2;0{,}5)$ i $Y_i \sim Exp(1)$. Jako aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny $\psi(u_1,u_2)$ używamy prawdopodobieństwa ruiny $\psi(u_1,u_2,T)$ w skończonym horyzoncie czasowym T = 500, które oszacowane jest za pomocą metody Monte Carlo na podstawie symulacji 500 000 trajektorii dwuwymiarowego procesu ryzyka (1). W tabeli 3 przedstawione są wyniki aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u_1,u_2)$ dla różnych wartości kapitałów początkowych w obu klasach ryzyka (u_1,u_2) oraz dla różnych wartości intensywności λ. Ponadto tabela 3 zawiera wyniki górnego i dolnego ograniczenia z nierówności (5) prawdopodobieństwa ruiny $\psi(u_1,u_2)$, a także prawdopodobieństwa ruiny $\psi_1(u_1)$ oraz $\psi_2(u_2)$ wyznaczone za pomocą metody dokładnej dla fazowych rozkładów wypłat, która jednak ze względu na błąd numerycznych obliczeń może nie zwrócić dokładnych wartości [Asmussen 2000; Rolski i in. 1998].

Tabela 3. Wyniki aproksymacji dwuwymiarowego prawdopodobieństwa ruiny (3) za pomocą symulacji

(u_1,u_2)	$\psi_1(u_1)$	$\psi_2(u_2)$	Górne ograniczenie	$\psi(u_1,u_2)$, $\lambda=0$	$\psi(u_1,u_2)$, $\lambda=0{,}5$	$\psi(u_1,u_2)$, $\lambda=1$	Dolne ograniczenie
(0,0)	0,9524	0,9524	0,9977	0,9970	0,9930	0,9849	0,9524
(5,0)	0,7506	0,9524	0,9881	0,9846	0,9768	0,9672	0,9524
(5,5)	0,7506	0,6960	0,9242	0,9031	0,8724	0,8366	0,7506
(10,5)	0,5916	0,6960	0,8758	0,8411	0,8080	0,7654	0,6960
(10,10)	0,5916	0,5058	0,7982	0,7427	0,7053	0,6596	0,5916

Źródło: opracowanie własne.

Analizując wyniki aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny (3) przedstawione w tab. 3, możemy zauważyć, że dla dowolnie ustalonych kapitałów początkowych (u_1,u_2) w miarę wzrostu intensywności λ obserwujemy spadek wartości prawdopodobieństwa ruiny $\psi(u_1,u_2)$. Ponadto możemy zauważyć, że ten spadek wartości $\psi(u_1,u_2)$ jest niemal proporcjonalny do wzrostu intensywności λ. Widać również, że ograniczenie dolne jest dosyć słabym oszacowaniem wartości prawdopodobieństwa ruiny $\psi(u_1,u_2)$ dla $\lambda = 1$.

4. Podsumowanie

Na numerycznych przykładach w pkt 3 i 4 można zauważyć, że jeśli pojawia się wzrost siły oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ryzyka z jednoczesnym spadkiem oddziaływania wewnętrznych czynników ryzyka w tych klasach w taki sposób, że łączna siła oddziaływania zewnętrznych i wewnętrznych czynników ryzyka jest cały czas stała, to wówczas następuje spadek wartości prawdopodobieństwa ruiny zarówno w skończonym, jak i nieskończonym horyzoncie czasowym. Ponadto spadek tych wartości jest niemal proporcjonalny do wzrostu siły oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka.

Sytuacja jest odwrotna, jeśli ruinę w dwuwymiarowym modelu ryzyka (1) definiuje się jako spadek sumy procesów ryzyka z obu klas $R_1(t)+R_2(t)$ poniżej zera w pewnej chwili $t>0$. Wówczas obserwuje się, że w miarę wzrostu siły oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka wzrastają wartości prawdopodobieństwa ruiny zarówno w skończonym, jak i w nieskończonym horyzoncie czasowym [Iwanicka 2009a; 2009b]. Ponadto wzrost wartości prawdopodobieństwa ruiny jest niemal proporcjonalny do wzrostu siły oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka [Iwanicka 2009a; 2009b].

W modelu (1) zakłada się, że proces zliczający wpłaty powodowane przez zewnętrzne czynniki ryzyka $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ jest jednorodnym procesem Poissona. Można próbować analizować wpływ na prawdopodobieństwo ruiny zewnętrznych czynników ryzyka, które powodują szkody pojawiające się zgodnie z procesem Erlanga [Guo i in. 2002] lub uogólnionym procesem Erlanga [Garrido, Li 2005], co będzie celem mojej dalszej pracy.

Literatura

Ambagaspitiya R.S. (1998), *On the distribution of a sum of correlated aggregate claims*, „Insurance: Mathematics and Economics" nr 23.

Asmussen S. (2000), *Ruin probabilities*, „Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability".

Garrido J., Li S. (2005), *Ruin probabilities for two classes of risk processes*, „Astin Bulletin" nr 35.

Guo J., Wu X., Yuen K.C. (2002), *On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes*, „Insurance: Mathematics and Economics" nr 31.

Guo J., Wu X., Yuen K.C. (2006), *On the first time of ruin in the bivariate compound Poissona model*, „Insurance: Mathematics and Economics" nr 38.

Iwanicka A. (2009a), *Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka,* Zeszyt Naukowy Ekonometria XXIII, UE, Wrocław.

Iwanicka A. (2009b), *Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka,* Zeszyt Naukowy Ekonometria XXVI, Wrocław.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugles J. (1998), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley.

THE INFLUENCE OF SOME OUTSIDE RISK FACTORS ON A RUIN PROBABILITY IN A TWO-DIMENSIONAL RISK MODEL WITH LIGHT-TAILED CLAIM SIZES

Summary: Owing to a careful study of the weather over several years we can observe changes of our climate. Natural disasters including floods and wind damage have caused various kinds of insurance claims. The main aim of this paper is to investigate the impact of some outside risk factors such as natural disasters on a ruin probability in a two-dimensional risk model for a book of two classes of insurance business. We assume that the ruin will appear when at least one class of insurance business gets ruined. The impact of outside risk factors on the ruin probabilities is presented with some numerical examples in case of light-tailed distributions of claim severities.

Key words: two-dimensional risk model, ruin probability, outside risk factors.