

Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją
Walentego Ostasiewicza



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci

Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa

Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna

Barbara Łopusiewicz

Korektor

Barbara Cibis

Łamanie

Beata Mazur

Projekt okładki

Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl> oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawnictwa

© Copyright Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	7
Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Porównanie prawdopodobieństw paryskiej i klasycznej ruiny dla procesu ryzyka typu Lévy'ego	9
Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Problem wyboru optymalnej paryskiej dywidendy dla procesu ryzyka typu Lévy'ego – numeryczna analiza	22
Joanna Dębicka , Składki netto dla ubezpieczeń wielostanowych obciążone kosztami zawarcia i prowadzenia umowy	38
Monika Dyduch , Niekonwencjonalna metoda prognozy wartości jednostek funduszy emerytalnych	69
Stanisław Heilpern , Niestandardowe modele ryzyka – badanie wpływu stopnia zależności na prawdopodobieństwo ruiny	79
Aleksandra Iwanicka , Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w dwuwymiarowym modelu ryzyka z lekkoogonowymi rozkładami wypłat	92
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki , Składki zaufania z zastosowaniem niesymetrycznych funkcji strat	101
Kamil Jodź , Składka w modelu ryzyka indywidualnego z zależnymi roszczeniami opisanymi funkcjami łączącymi	118
Marek Kałuszka, Michał Krzeszowiec , Własności składki <i>mean-value</i> przy zniekształconym prawdopodobieństwie	136
Zbigniew Michna , Procesy Lévy'ego w modelach ubezpieczeniowych	149
Agnieszka Mruklik , Ubezpieczenia na życie ze stochastyczną techniczną stopą oprocentowania – zastosowanie modelu Hulla i White'a	157
Agnieszka Pobłocka , Rezerwa IBNR w ubezpieczeniach majątkowych – praktyczne metody jej szacowania	173
Agata de Sas Stupnicka , Równowaga na rynku ubezpieczeń zdrowotnych w zależności od przyjętego sposobu rozliczania świadczeń medycznych	190
Joanna Sawicka , Zagadnienia kalkulacji składki zaufania na podstawie łącznej wartości i liczby szkód	202
Alicja Wolny-Dominiak , Analiza porównawcza modeli mieszanych szacowania stóp taryf w ubezpieczeniach majątkowych z wykorzystaniem krosvalidacji	229
Walenty Ostasiewicz , Polacy nie gęsi, iż swój język mają!	238

Summaries

Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Comparison of Parisian and classical ruin probabilities for a Lévy risk process	21
Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski , Numerical analysis of dividend problem with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process	37
Joanna Dębicka , Expense-loaded premiums for multistate insurance contracts	68
Monika Dyduch , Alternative method of forecast of pension funds units value	78
Stanisław Heilpern , Nonstandard risk models – study of influence of the degree of dependence on the probability of ruin	91
Aleksandra Iwanicka , The influence of some outside risk factors on a ruin probability in a two-dimensional risk model with light-tailed claim sizes	100
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki , Credibility premiums using asymmetric loss functions	117
Kamil Jodź , Insurance premium in individual risk model with dependent claims described by copulas functions	135
Marek Kaluszka, Michał Krzeszowiec , Properties of mean-value principle under rank-dependent utility model	148
Zbigniew Michna , Lévy processes in insurance models	156
Agnieszka Mruklik , Life insurance with stochastic interest rate – an application of the Hull and White model	172
Agnieszka Pobłocka , IBNR reserve in non-life insurance. Practical methods of its estimation	189
Agata de Sas Stupnicka , Balance on the health insurance market – the impact of payment system	201
Joanna Sawicka , Calculation of credibility premium on the basis of number and total amount of claims	228
Alicja Wolny-Dominiak , Comparative analysis of mixed models for ratemaking in non-life insurance with k-fold cross-validation	237

Kamil Jodź

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

SKŁADKA W MODELU RYZYKA INDYWIDUALNEGO Z ZALEŻNYMI ROSZCZENIAMI OPISANYMI FUNKCJAMI ŁĄCZĄCYMI

Streszczenie: Model indywidualny – obok kolektywnego – jest jednym z głównych i najstarszych modeli wykorzystywanych w teorii ryzyka. Klasyczny model ma nierealne założenie o niezależności wypłat. W praktyce prawie zawsze rozpatrywane portfele zawierają polisy, których ryzyko nie jest wzajemnie niezależne. W przypadku modelowania zależności wyjątkowo atrakcyjne i nieskomplikowane w symulacji wydaje się użycie kopuł. Funkcje te, zwane również funkcjami łączącymi, pozwalają na nieparametryczne badanie zależności zachodzących między zmiennymi losowymi. W pracy przedstawione zostały wyniki komputerowych symulacji składek ubezpieczeniowych dla polis z portfela, w którym zależność modelowana jest funkcjami łączącymi (Claytona, Gumbela itp.). Wysokości składek porównano dla wypłat o rozkładach zarówno lekko-, jak i ciężkoogonowych.

Słowa kluczowe: model ryzyka indywidualnego, funkcje łączące, zależne roszczenia.

1. Wstęp

Poprawne wyliczanie składki jest jednym z najważniejszych zadań firmy ubezpieczeniowej. Stosowanie najprostszych metod, zakładających niezależność roszczeń, może prowadzić do błędnych wyników. W celu uniknięcia tego błędu należy uwzględnić zależność, jaka występuje między polisami w badanym portfelu.

2. Podstawowe pojęcia

2.1. Funkcje łączące

Funkcje łączące umożliwiają badanie i modelowanie zależności zachodzących między zmiennymi losowymi. Są łącznikiem między rozkładami brzegowymi a rozkładem łącznym danych zmiennych losowych.

Definicja 1 [Heilpern]. n -wymiarową funkcją łączącą C nazywamy dystrybucję łącznego rozkładu w przestrzeni R^n o jednostajnych na $[0,1]$ rozkładach brzegowych U_1, \dots, U_n .

Prezentowane poniżej twierdzenie jest zwane twierdzeniem Sklara. Możliwe, że jest ono najważniejsze w całej teorii funkcji łączących. Twierdzenie to jest wykorzystywane do modelowania zależności zachodzących między zmiennymi losowymi.

Twierdzenie 1 [Heilpern] (Sklara). Niech F będzie n -wymiarową dystrybuantą łączną o dystrybuantach brzegowych F_1, F_2, \dots, F_n . Wówczas istnieje funkcja łącząca $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ taka, że dla każdego $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Jeśli F_1, F_2, \dots, F_n są ciągłe, to funkcja C jest wyznaczona jednoznacznie. Z drugiej strony, jeśli C jest funkcją łączącą oraz F_1, F_2, \dots, F_n są dystrybuantami jednowymiarowymi, to funkcja F zdefiniowana powyższym wzorem jest n -wymiarową dystrybuantą łączną o dystrybuantach brzegowych F_1, F_2, \dots, F_n .

Powyższe twierdzenie jest narzędziem, które pozwala nam wyrazić ciągłą wielowymiarową dystrybuantę w języku jednowymiarowych dystrybuant brzegowych. Funkcja C opisuje zależność między zmiennymi losowymi, którym odpowiadają dystrybuanty brzegowe. Możliwe jest również, na podstawie twierdzenia Sklara, wyznaczenia funkcji C . Mówi o tym następujący wniosek:

Wniosek 1 [Heilpern]. Jeśli G jest wielowymiarową dystrybuantą z ciągłymi dystrybuantami brzegowymi F_1, F_2, \dots, F_n , to odpowiadającą im funkcję łączącą definiuje się wzorem:

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(F_1^{-1}(x_1), F_2^{-1}(x_2), \dots, F_n^{-1}(x_n)),$$

gdzie $F^{-1}(x)$ oznacza uogólnioną funkcję odwrotną dystrybuanty $F(x)$ daną wzorem:

$$F^{-1}(x) = \inf\{y \in R : F(y) \geq x\}$$

dla $x \in [0, 1]$.

2.2. Algorytmy symulacyjne zmiennych losowych o zadanej funkcji łączącej

Poniżej omówione zostaną metody generowania wektora losowego (X_1, X_2, \dots, X_n) o dystrybuantach brzegowych F_1, F_2, \dots, F_n i funkcji łączącej C . Symulacja zmiennych opiera się głównie na twierdzeniu Sklara. W wyniku zastosowania poniższych algorytmów otrzymuje się wielowymiarowy wektor $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ ze strukturą zależności opisaną funkcją łączącą C , gdzie U_i są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Na koniec w celu uzyskania wektora (X_1, X_2, \dots, X_n) użyta zostanie metoda odwrotnej dystrybuanty.

Algorytm 1 – wielowymiarowa funkcja łącząca Gaussa [Schmidt 2007]

1. Wyznaczyć macierz korelacji R .
2. Przedstawić macierz R w postaci AA^T , gdzie A jest macierzą trójkątną dolną (algorytm Cholesky'ego).

3. Wygenerować n niezależnych zmiennych losowych z_1, z_2, \dots, z_n z rozkładu $N(0,1)$.

4. Wyznaczyć wektor $x = Az$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

5. Wyznaczyć $u_i = \Phi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Algorytm 2 – wielowymiarowa funkcja łącząca t -Studenta [Schmidt 2007]

1. Wyznaczyć macierz korelacji R .

2. Przedstawić macierz R w postaci AA^T , gdzie A jest macierzą trójkątną dolną (algorytm Cholesky'ego).

3. Wygenerować n niezależnych zmiennych losowych z_1, z_2, \dots, z_n z rozkładu $N(0,1)$.

4. Wygenerować liczbę losową ζ z rozkładu χ_k^2 z k stopniami swobody niezależnie od z .

5. Wyznaczyć wektor $x = \sqrt{\frac{k}{\zeta}}Az$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

6. Wyznaczyć $u_i = t_k(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie t_k oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu t -Studenta z k stopniami swobody.

Algorytmy symulacji archimedesowych funkcji łączących będą podane tylko dla rodzin funkcji Claytona, Franka i Gumbela. Dla tych funkcji łączących funkcja odwrotna generatora ϕ ma prostą reprezentację jako transformatę Laplace'a pewnej funkcji G . Korzystając z tej własności, przekonujemy się, że algorytm generowania zmiennych losowych znacznie się upraszcza.

Jeżeli G oznacza dystrybuantę, to transformatę Laplace'a \hat{G} określa się jako:

$$\hat{G}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x) \quad \text{dla } t \geq 0 \quad \text{i} \quad \hat{G}(\infty) = 0.$$

Jeśli wygeneruje się zmienną losową V o dystrybuancie G , niezależne zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n o tym samym rozkładzie $U(0,1)$ i niezależne od V , to wektor

$U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$, gdzie $U_i = \hat{G}\left(\frac{-\ln X_i}{V}\right)$, ma strukturę określoną przez archimedesową funkcję łączącą o generatorze $\phi = \hat{G}^{-1}$.

Algorytm 3 [Schmidt 2007]

1. Wyznaczyć zmienną losową V o dystrybuancie G :

– dla funkcji łączącej Claytona: V ma rozkład gamma $G\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$, a $\hat{G}(t) = (1+t)^{-1/\alpha}$,

– dla funkcji łączącej Franka: V ma rozkład dyskretny $P(V = k) = \frac{(1 - e^{-\alpha})^k}{k\alpha}$,

$k = 1, 2, \dots$, a $\hat{G}(t) = -\frac{1}{\alpha} \ln[1 + e^t(e^{-\alpha} - 1)]$,

– dla funkcji łączącej Gumbela: V ma rozkład α -stabilny $S_{1/\alpha}(1, \gamma, 0)$, gdzie

$\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^\alpha$, $\hat{G}(t) = e^{(-t)^{1/\alpha}}$.

2. Wygenerować n niezależnych zmiennych losowych X_i o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$.

3. Wyznaczyć $U_i = \hat{G}\left(\frac{-\ln X_i}{V}\right), i = 1, 2, \dots, n$.

2.3. Miary zależności

Funkcje łączące opisują zależności zachodzące między zmiennymi losowymi. W praktyce znacznie częściej stosowane są liczbowe współczynniki zależności. Do najpopularniejszych należą: współczynnik liniowej korelacji Pearsona oraz współczynniki rangowe – Kendalla i Spearmana.

2.3.1. Współczynnik korelacji Pearsona

Dzięki łatwości obliczania współczynnik ten jest często stosowany. Ma on jednak istotne wady. Po pierwsze, nie jest on niezmienniczy ze względu na nieliniowe, rosnące przekształcenia $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tzn. w większości przypadków mamy do czynienia z nierównością $\rho(\alpha(X), \alpha(Y)) \neq \rho(X, Y)$. Wiadomo, że funkcje łączące są niezmiennicze ze względu na rosnące przekształcenia. Pary zmiennych losowych związanych tą samą funkcją łączącą mogą więc mieć różne współczynniki korelacji Pearsona. Po drugie, w przypadku gdy zmienne losowe mają nieskończoną wariancję, nie istnieje współczynnik liniowej korelacji. Jest to znaczna wada w sytuacji, gdy chcemy badać tą metodą zmienne losowe o rozkładach ciężkoogonowych.

2.3.2. Rangowe współczynniki korelacji

Współczynniki korelacji rangowej, w odróżnieniu od współczynnika Pearsona, mierzą monotoniczną zależność między zmiennymi, a nie tylko liniową zależność. Współczynniki korelacji rangowej są bardziej odporne na obserwacje odstające. Najczęściej używanymi współczynnikami korelacji rangowej są współczynniki Spearmana (ρ_S , Spearmana) oraz Kendalla (τ Kendalla). Współczynniki te można bezpośrednio przedstawić za pomocą funkcji łączących. Dzięki tym własnościom współczynniki rangowe Spearmana i Kendalla mogą być alternatywą dla współczynnika korelacji liniowej jako miary zależności nieeliptycznych dystrybuant, dla których współczynnik liniowy jest nieodpowiedni.

2.3.3. Współczynniki korelacji Spearmana i Kendalla

Definicja 2 [Embrechts i in. 2003]. Współczynnik korelacji Spearmana ρ_S zmiennych losowych X i Y o dystrybuantach F_X i F_Y określamy wzorem:

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_X(X), F_Y(Y)),$$

gdzie ρ oznacza współczynnik korelacji Pearsona.

Definicja 3 [Embrechts i in. 2003]. Współczynnik zależności Kendalla zmiennych losowych X i Y określamy wzorem

$$\tau(X, Y) = P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\} - P\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\},$$

gdzie (\tilde{X}, \tilde{Y}) jest niezależną kopią (X, Y) .

Wartości współczynników Spearmana i Kendalla, podobnie jak wartości współczynnika Pearsona, zawierają się w przedziale $[-1, 1]$. Współczynniki te przyjmują wartość 0 dla niezależnych zmiennych losowych (właściwość w przeciwną stronę nie jest prawdziwa), wartość 1 w przypadku współmonotoniczności zmiennych losowych oraz -1 w przypadku ich przeciwmonotoniczności. Znając postać funkcji łączącej C , można wyznaczyć współczynniki korelacji Spearmana i Kendalla. Wykorzystuje się wtedy fakt, że współczynniki te, podobnie jak funkcje łączące, są niezmiennicze ze względu na rosnące przekształcenia. Tabela 3 zawiera niektóre funkcje łączące wraz z odpowiadającymi im współczynnikami.

Tabela 1. Miary zależności wybranych funkcji łączących

Rodzina	τ Kendalla	ρ_s Spearmana
Claytona	$\frac{\alpha}{\alpha+2}; 0 \leq \tau \leq 1$	skomplikowana; $0 \leq \rho_s \leq 1$
Franka ^a	$1 - \frac{4}{\alpha}(1 - D_1(\alpha)); -1 \leq \tau \leq 1$	$1 - \frac{12}{\alpha}(D_1(\alpha) - D_2(\alpha)); -1 \leq \rho_s \leq 1$
Gumbela	$1 - \frac{1}{\alpha}; 0 \leq \tau \leq 1$	brak jawnej postaci; $0 \leq \rho_s \leq 1$
Yagera	$1 - \frac{2}{\alpha}; -1 \leq \tau \leq 1$	skomplikowana; $-1 \leq \rho_s \leq 1$
Gaussa	$\frac{2}{\pi} \arcsin \rho; -1 \leq \tau \leq 1$	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right); -1 \leq \rho_s \leq 1$
t_k -Studenta	$\frac{2}{\pi} \arcsin \rho; -1 \leq \tau \leq 1$	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right); -1 \leq \rho_s \leq 1$

^a Funkcje Debye: $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$.

Źródło: [Heilpern].

Analizując wyniki z tab. 1, łatwo zauważyć, że nie dla każdej funkcji łączącej współczynniki Spearmana oraz Kendalla przyjmują wartości z zakresu od -1 do 1 . O ile we wszystkich przykładach współczynniki Kendalla wyrażają się prostym wzorem, o tyle współczynnik Spearmana w niektórych przypadkach ma dość skomplikowaną postać lub nie da się go przedstawić w jawnej postaci.

2.4. Model ryzyka indywidualnego

Model ten jest często stosowany w pewnych rodzajach ubezpieczeń, np. zdrowotnych, na życie. Ogromną zaletą modelu jest prostota jego matematycznego zapisu.

Definicja 4. Założenia modelu

1. Badany portfel składa się z ustalonej liczby polis.
2. Wypłaty generowane przez ubezpieczone zdarzenia są niezależne.
3. Z każdej polisy może być dokonana co najwyżej jedna wypłata.
4. Całkowita wypłata S dla całego portfela złożonego z n indywidualnych wypłat wyraża się wzorem

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

gdzie X_i oznacza losową stratę generowaną przez i -tą polisę, $i = 1, 2, \dots, n$.

Założenie niezależności zmiennych X_1, X_2, \dots, X_n , choć wygodne w obliczeniach, nie odzwierciedla w sposób zadowalający rzeczywistości. W dalszej części pracy zostaną przedstawione dystrybuanta i momenty dla modelu, w którym dopuszczamy zależność zmiennych X_1, X_2, \dots, X_n . Zależności między wypłatami będą opisywane za pomocą funkcji łączących. Dla rozróżnienia suma wypłat w modelu ryzyka indywidualnego dla zależnych roszczeń będzie oznaczana przez $\tilde{S} = \sum_{i=1}^n X_i$.

Założmy, że całkowita wypłata z portfela \tilde{S} opisana jest indywidualnym modelem ryzyka, tzn.

X_1, X_2, \dots, X_n są zależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie, zaś struktura zależności jest opisana za pomocą funkcji łączącej C . Dystrybuanta oraz momenty całkowitej wypłaty z portfela wyrażają się poniższymi wzorami. We wszystkich poniższych wzorach całki są skończone.

1. Dystrybuanta zmiennej \tilde{S} .

$$F_{\tilde{S}}(x) = P(\tilde{S} \leq x) = \int_{[0, \infty)^{n-1}} \int_0^{x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} h(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

gdzie $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznacza gęstość rozkładu n -wymiarowego o dystrybuancie

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)), \text{ tzn.}$$

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)) = \\ &= C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

jeżeli F_i jest dystrybuantą jednowymiarową zmiennej losowej X_i .

2. Momenty rozkładu zmiennej \tilde{S} .

– wartość oczekiwana

$$E\tilde{S} = nEX = ES,$$

– wariancja

$$\begin{aligned} \text{Var}\tilde{S} &= E(\tilde{S} - E\tilde{S})^2 = \int_0^{\infty} (x - E\tilde{S})^2 f_{\tilde{S}}(x) dx = \\ &= \int_{[0, \infty)^n} (x - E\tilde{S})^2 h(x_1, x_2, \dots, x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) dx_n \dots dx_1 dx. \end{aligned}$$

3. Symulacje

Do podstawowych zadań matematyki aktuarialnej należy kalkulacja składek oraz wyliczanie rezerw. Wyznaczenie składki przeznaczonej na pokrycie wypłat polega na przypisaniu zmiennej losowej – opisującej stratę – pewnej wartości. Bardzo często zakłady ubezpieczeniowe stosują zasadę wartości oczekiwanej. Zasada ta polega na wyliczeniu składki netto:

$$P = ES = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n),$$

a następnie powiększeniu jej o pewien dodatek – θES .

Parametr θ wyznaczany jest tak, aby zebrana składka z całego portfela pokryła wypłacone odszkodowania z prawdopodobieństwem $1 - \varepsilon$, tzn.

$$P(S < (1 - \theta)ES) = 1 - \varepsilon.$$

Dla niezależnych zmiennych losowych składka z narzutem na bezpieczeństwo wyznaczona dla całego portfela przyjmuje wtedy postać:

$$\Pi = ES + u_{1-\varepsilon} \sqrt{\text{Var} S},$$

gdzie $u_{1-\varepsilon}$ oznacza kwantyl rzędu $1 - \varepsilon$ standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

Firmy ubezpieczeniowe, licząc w ten sposób składkę, uwzględniają zmienność wypłat z portfela. Jest to próba zabezpieczenia się zakładu przed wypłatami odbiegającymi od średniej. Składka Π powiększona o marżę na zysk i ponoszone koszty jest składką brutto. Wysokość marży jest kwestią indywidualną każdego zakładu ubezpieczeniowego, dlatego rozważana będzie jedynie składka Π przeznaczona w całości na pokrycie bieżących i przyszłych roszczeń.

W celu odróżnienia składek w modelu z zależnymi roszczeniami od modelu z niezależnymi roszczeniami wprowadźmy odpowiednie oznaczenia. Jeżeli składka Π będzie dotyczyć modelu ryzyka indywidualnego S dla niezależnych roszczeń, to będziemy ją oznaczać $\Pi_N = ES + u_{1-\varepsilon} \sqrt{\text{Var} S}$. Jeżeli składka będzie dotyczyć mo-

delu z zależnymi roszczeniami, oznaczać ją będziemy przez $\Pi_Z = E\tilde{S} + u_{1-\varepsilon} \sqrt{\text{Var}\tilde{S}}$. W obu przypadkach składka netto jest taka sama, więc będzie oznaczana tak samo, przez literę P . Podany wcześniej wzór na wariancję zmiennej \tilde{S} dla wypłat zależnych nie pozwala w sposób przejrzysty ukazać, jak założenie o zależności między wypłatami (opisane za pomocą funkcji łączących) wpływa na wariancję wypłaty z całego portfela. Składnikami składek Π_N oraz Π_Z są wariancje odpowiednio zmiennych S oraz \tilde{S} , dlatego porównanie ich staje się trudne i czasochłonne. W celu zobrazowania tego, jak zależność między wypłatami wpływa na wartość rozważanych składek, dokonano symulacji komputerowych składek Π_N oraz Π_Z .

Badanie przeprowadzono przy założeniu, że całkowita wypłata z portfela ubezpieczeń opisana jest indywidualnym modelem ryzyka dla $n = 10$. W przypadku modelu z zależnymi wypłatami założono, że zależność opisana jest pewną funkcją łączącą. Wyniki zostały uzyskane za pomocą metody Monte Carlo dla 1000 powtórzeń. Parametry zmiennych losowych X_i dobrano tak, aby $EX_i = 1$. Przyjęto ponadto, że $\varepsilon = 0,05$ i $u_{1-\varepsilon} = 1,6449$, zaś dla wszystkich par zmiennych losowych $(X_i, X_j)_{i < j}$ współczynnik korelacji Kendalla τ ma taką samą dodatnią wartość. Wszystkie obliczenia zostały wykonane przy użyciu programu Matlab.

3.1. Składki a zależność wypłat

Symulacje oraz analizę składek Π_N i Π_Z wykonano osobno dla wypłat opisanych rozkładami lekko- i ciężkoogonowymi. Podział ten wydaje się słuszny, gdyż rozkłady ciężkoogonowe lepiej modelują sytuację, w której wartości ekstremalne są osiąganego z „dużym” prawdopodobieństwem. Sytuacją taką w rzeczywistym świecie może być kataklizm, który powoduje wypłatę przez ubezpieczyciela ogromnych sum odszkodowań.

W tabeli 2 przedstawione zostały wyniki symulacji składek Π dla wypłat X_i o zadanych rozkładach lekkoogonowych i różnych współczynnikach τ Kendalla. Za-

Tabela 2. Składka Π dla różnych funkcji łączących i lekkoogonowych rozkładów roszczeń

Rodzina	Rozkład	Współczynniki korelacji τ Kendalla						
		niezależne	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,95
Claytona	$Exp(1)$	15,171	15,314	16,860	19,548	21,495	23,361	26,032
	$We(1,1)$	15,218	15,366	16,907	19,520	21,702	23,429	25,853
Gumbela	$Exp(1)$	15,273	15,586	18,755	22,164	24,292	25,921	26,838
	$We(1,1)$	15,157	15,685	18,782	22,456	24,621	25,649	26,323
Gaussa	$Exp(1)$	15,246	15,524	17,813	21,204	23,394	27,148	27,766
	$We(1,1)$	15,251	15,830	18,065	21,070	23,391	26,266	26,064
t -Studenta	$Exp(1)$	15,129	17,412	18,270	21,377	24,053	25,549	26,117
	$We(1,1)$	15,216	17,038	18,459	22,161	24,463	24,811	27,179

Źródło: opracowanie własne.

leżności między roszczeniami były modelowane za pomocą wybranych funkcji łączących.

Wysokość składki Π w sposób istotny zależy od współczynnika korelacji τ . Z danych widać, że w miarę wzrostu wartości współczynnika τ Kendalla rośnie wartość składki Π . Dla rozkładu zarówno wykładniczego, jak i Weibulla wartość tej składki rośnie bez względu na wybraną funkcję łączącą.

Dla rozkładu wykładniczego średnia wartość składki Π_N wynosi 15,205. Na podstawie otrzymanych wyników widać, że składka Π_Z dla $\tau = 0,95$ stanowi przeszło 175% wartości składki Π_N .

Wartość teoretyczna składki Π_N w modelu ryzyka indywidualnego S z wypłatami o rozkładzie wykładniczym $Exp(1)$ wynosi

$$\Pi_N = ES + u_{0,95} \sqrt{Var S} = nEX + u_{0,95} \sqrt{n Var X} = 10 + 1,6449\sqrt{10} = 15,201.$$

Zatem błąd średniokwadratowy symulacji składki Π_N jest równy 0,0035, czyli 0,35%. Jeżeli przyjmiemy, że błąd ten jest taki sam dla każdego τ , to wartość składki dla $\tau = 0,95$ będzie zawierać się w przedziale [26,594, 26,781].

Dla rozkładu Weibulla $We\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ składka z narzutem na bezpieczeństwo Π_N wynosi średnio 15,211, dla $\tau = 0,95$ zaś składka Π_Z jest już równa 26,355. Oznacza to, że składka $\Pi_{0,95}$ stanowi ok. 173% wartości składki Π_N .

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że jeżeli wypłaty w indywidualnym modelu ryzyka mają rozkład lekkoogonowy, to w miarę wzrostu zależności między nimi wartość składki ubezpieczeniowej Π rośnie. To, jak duże są różnice między składkami, zależy od odchylenia standardowego zmiennych losowych X_i . Jeżeli wartość odchylenia standardowego rośnie, to również różnica między składkami będzie wzrastać. Analogicznie, gdy odchylenie maleje, różnica staje się coraz mniejsza.

W tabeli 3 przedstawione zostały wartości tych samych składek, ale dla rozkładów ciężkoogonowych. Rozkłady te są często stosowane w finansach i matematyce aktuarialnej. Użycie rozkładu o ciężkim ogonie pozwala nam modelować i wyliczać składki dla portfela, w którym pojawiają się wypłaty znacznie odbiegające od średniej (ubezpieczenia od katastrof lub nieszczęśliwych wypadków).

Składki netto P dla rozkładów $We\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i $Pa\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)$ (podobnie jak w przypadku rozkładów lekkoogonowych) mają podobne wartości, bez względu na to, jaka funkcja łącząca została użyta do modelowania zależności między zmiennymi losowymi X_i oraz jaka była wartość współczynnika korelacji τ dla tych zmiennych. W przypadku składki Π , uwzględniającej odchylenie standardowe zmiennych losowych X_i , różnice w cenie polis są znacznie większe niż w analogicznych cenach polis w przypadku rozkładów lekkoogonowych. Jeżeli wypłaty X_i są z rozkładu $We\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ oraz są niezależne, to średnie wartości składek Π_N i Π_Z dla $\tau = 0,95$ wy-

Tabela 3. Składka Π dla różnych funkcji łączących i ciężkoogonowych rozkładów roszczeń

Rodzina	Rozkład	Współczynniki korelacji τ Kendalla						
		niezależne	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,95
Claytona	$We\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	21,512	21,817	23,296	26,181	29,467	33,188	42,604
	$Pa\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)$	21,187	21,460	22,555	25,804	26,420	29,926	36,535
Gumbela	$We\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	21,448	22,807	30,449	38,710	44,896	45,785	46,240
	$Pa\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)$	20,893	22,026	28,164	39,190	41,102	41,333	47,244
Gaussa	$We\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	21,691	22,305	25,320	31,621	37,789	42,475	46,054
	$Pa\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)$	21,516	20,961	22,272	37,721	35,772	42,211	44,621
t-Studenta	$We\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	21,869	27,686	39,666	37,940	39,012	45,362	48,564
	$Pa\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)$	21,077	21,822	28,157	32,408	36,272	40,873	42,241

Źródło: opracowanie własne.

noszą odpowiednio 21,630 i 45,865. Widać stąd, że składka $\Pi_{0,95}$ stanowi 212% składki dla niezależnych zmiennych losowych. Już niewielki wzrost zależności powoduje znaczne powiększenie składki Π . Dla $\tau = 0,1$ składka Π_z stanowi średnio 137% składki Π_N .

Na podstawie wyników z tab. 3 można stwierdzić, że jeżeli wypłaty w indywidualnym modelu ryzyka mają rozkład ciężkoogonowy i mają wariancję, to wraz ze wzrostem zależności między nimi wartość składki Π rośnie. W przypadku rozkładów ciężkoogonowych, dla których wariancja nie istnieje, stwierdzenie takie byłoby już błędne, gdyż wartość składki Π zależy od odchylenia standardowego, które może być dowolną liczbą.

Ciekawe jest spostrzeżenie, iż wartość składki Π może zależeć również od wyboru funkcji łączącej. Na przykład wartości składek z narzutem na bezpieczeństwo są nieco niższe, jeżeli zmienne losowe są powiązane funkcją Claytona. Pewne odstępstwa widać również w sytuacji użycia eliptycznych funkcji łączących. Widać stąd, że wybór funkcji łączącej ma również wpływ na otrzymane wyniki.

Badając składkę w modelu ryzyka indywidualnego dla wypłat o rozkładach ciężkoogonowych, warto również przeanalizować, jak grubość ogona rozkładu wpływa na jej wartość. W tym celu rozpatrzmy sytuację, w której wypłaty X_i mają rozkład

$We(\alpha, \beta)$ dla $\beta < 1$ i funkcji łączącej Claytona. Im mniejsza β , tym ogon rozkładu jest cięższy, a co za tym idzie – zmienne X_i przyjmują wartości ekstremalne z większym prawdopodobieństwem. W tabeli 4 przedstawiono wartość składki Π oraz odchylenie-

Tabela 4. Składki P i Π oraz odchylenie standardowe $\sqrt{Var S}$ w zależności od grubości ogona i współczynnika τ

Parametry $We(\alpha, \beta)$	Składka	Współczynniki korelacji τ Kendalla						
		niezależne	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,95
$\alpha = \frac{1}{\Gamma(6)}$ $\beta = 0,2$	$\sqrt{Var S}$	50,262	39,698	43,224	60,081	52,787	49,530	64,817
	Π	93,464	74,954	80,999	109,914	96,586	92,258	117,18
$\alpha = 0,5$ $\beta = 0,5$	$\sqrt{Var S}$	7,014	7,263	7,972	9,783	11,842	14,271	19,246
	Π	21,528	22,066	23,119	26,196	29,468	33,417	41,542
$\alpha = \frac{1}{\Gamma(17/7)}$ $\beta = 0,7$	$\sqrt{Var S}$	4,657	4,706	5,628	7,471	9,151	11,114	13,211
	Π	17,657	17,774	19,287	22,322	25,089	28,376	31,479
$\alpha = \frac{1}{\Gamma(19/9)}$ $\beta = 0,9$	$\sqrt{Var S}$	3,473	3,605	4,527	6,175	7,604	8,954	10,643
	Π	15,701	15,936	17,397	20,193	22,390	24,725	27,468

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Składki P i Π oraz odchylenie standardowe $\sqrt{Var S}$ w zależności od grubości ogona i współczynnika τ – ujęcie procentowe

Parametry $We(\alpha, \beta)$	Składka	Współczynniki korelacji τ Kendalla					
		0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,95
$\alpha = \frac{1}{\Gamma(6)}$ $\beta = 0,2$	$\frac{\sqrt{Var S_Z}}{\sqrt{Var S_N}}$	78,98	86,00	119,54	105,02	98,54	128,96
	Π_Z / Π_N	80,20	86,66	117,60	103,34	98,71	125,38
$\alpha = 0,5$ $\beta = 0,5$	$\frac{\sqrt{Var S_Z}}{\sqrt{Var S_N}}$	103,55	113,66	139,48	168,83	203,46	274,39
	Π_Z / Π_N	102,50	107,39	121,68	136,88	155,23	192,97
$\alpha = \frac{1}{\Gamma(17/7)}$ $\beta = 0,7$	$\frac{\sqrt{Var S_Z}}{\sqrt{Var S_N}}$	101,05	120,85	160,43	196,50	238,65	283,68
	Π_Z / Π_N	100,66	109,23	126,42	142,09	160,71	178,28
$\alpha = \frac{1}{\Gamma(19/9)}$ $\beta = 0,9$	$\frac{\sqrt{Var S_Z}}{\sqrt{Var S_N}}$	103,80	130,35	177,80	218,95	257,82	306,45
	Π_Z / Π_N	101,50	110,80	128,61	142,60	157,47	174,94

Źródło: opracowanie własne.

nia standardowego $\sqrt{\text{Var } S}$ dla rozkładów Weibulla o różnej grubości ogona i różnych wartościach współczynnika τ Kendalla. W przypadku składki Π wraz z powiększaniem się grubości ogona widać jej wzrost nawet w sytuacji, gdy zmienne losowe X_i są niezależne. Dla $\beta = 0,9$ składka Π_N wynosi 15,701, podczas gdy dla $\beta = 0,2$ już 93,464. Jest to rezultat większego odchylenia standardowego, które rośnie wraz z grubością ogona. Oczywiście składka Π wzrasta również w miarę wzrostu współczynnika τ . I tak dla $\beta = 0,9$ i $\tau = 0,01$ składka Π wynosi 15,936, a dla $\beta = 0,2$ i $\tau = 0,95$ już 117,182. W tabeli 5 przedstawiono stosunek procentowy składek Π_Z do składki Π_N , których wartości znajdują się w tab. 4.

Widać, że dla coraz cięższych ogonów i większych wartości współczynnika τ wartości składek Π_Z rosną. Na przykład dla $\beta = 0,5$ i $\tau = 0,95$ wartość składki Π_Z stanowi aż 192,97% składki Π_N .

3.2. Składka Π_Z jako funkcja współczynnika korelacji τ Kendalla

Z wcześniejszych obliczeń wiadomo, że w miarę wzrostu współczynnika korelacji τ rośnie wartość składki Π_Z niezależnie od rozkładu zmiennej opisującej wielkość odszkodowania z polisy. Różnica między Π_N a Π_Z może być bardzo duża. Interesujące wydają się więc pewne pytania. Jak dokładnie wygląda owa zależność? Czy jest ona taka sama dla różnych funkcji łączących? Przy analizowaniu tego problemu dokonano pewnych założeń. Badany portfel składa się z 10 polis i opisany jest indywidualnym modelem ryzyka \tilde{S} . Wypłaty z tego portfela mają rozkład wykładniczy $Exp(1)$. Rozpatrzono dwa przypadki: w pierwszym zależność między wypłatami opisana jest funkcją łączącą Gumbela, a w drugim funkcją łączącą Clayтона. Współczynnik τ jest określony na przedziale $[0,05,0,095]$.

Na początek rozważmy sytuację, w której roszczenia powiązane są ze sobą funkcją łączącą Gumbela. Jako możliwe postacie dopasowywanej funkcji wzięto pod uwagę wielomiany stopnia drugiego

$$f(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

i czwartego

$$g(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + e \cdot x^4$$

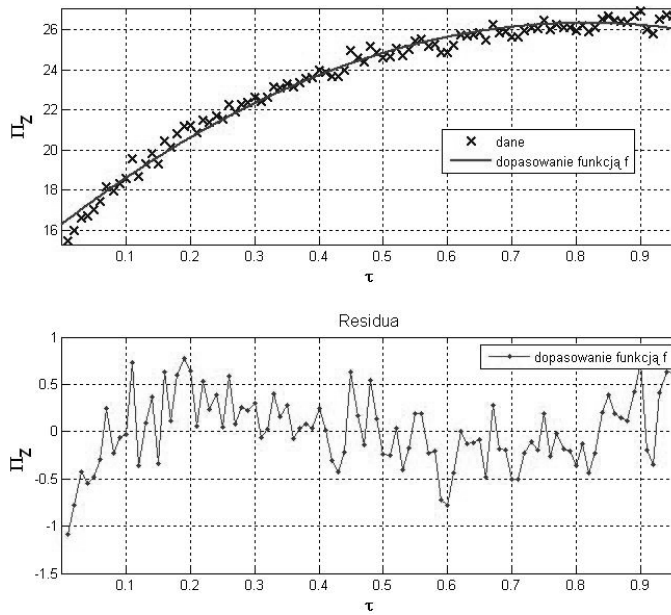
oraz funkcję wykładniczą postaci

$$h(x) = a \cdot \exp(b \cdot x) + c \cdot \exp(-d \cdot x).$$

Na rysunkach 1, 2 i 3 przedstawione zostały wykresy danych wraz z dopasowanymi do nich funkcjami oraz odpowiadające im wykresy residuów o. Składka Π_Z została otrzymana w wyniku symulacji metodą Monte Carlo (10000 powtórzeń) i ma następujące parametry:

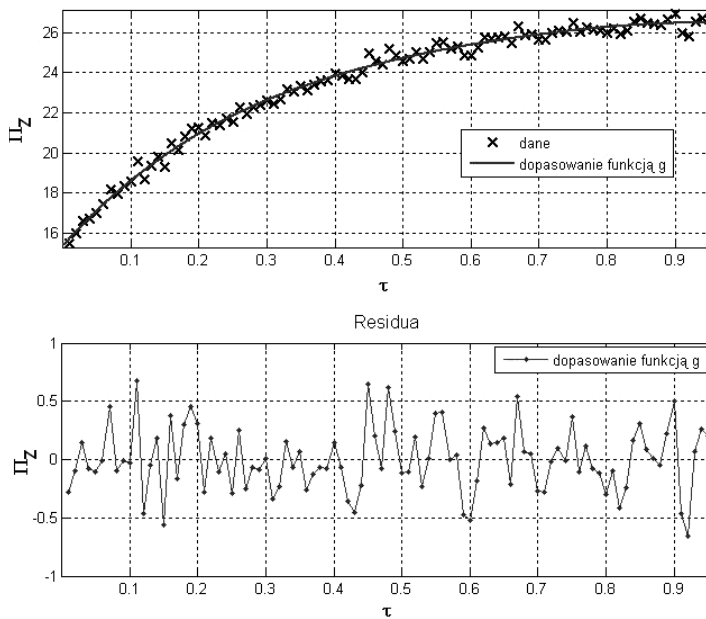
$$E \Pi_Z = 23,424, \quad \text{Var } \Pi_Z = 9,126, \quad q_{0,5} = 24,533,$$

gdzie $q_{0,5}$ oznacza medianę.



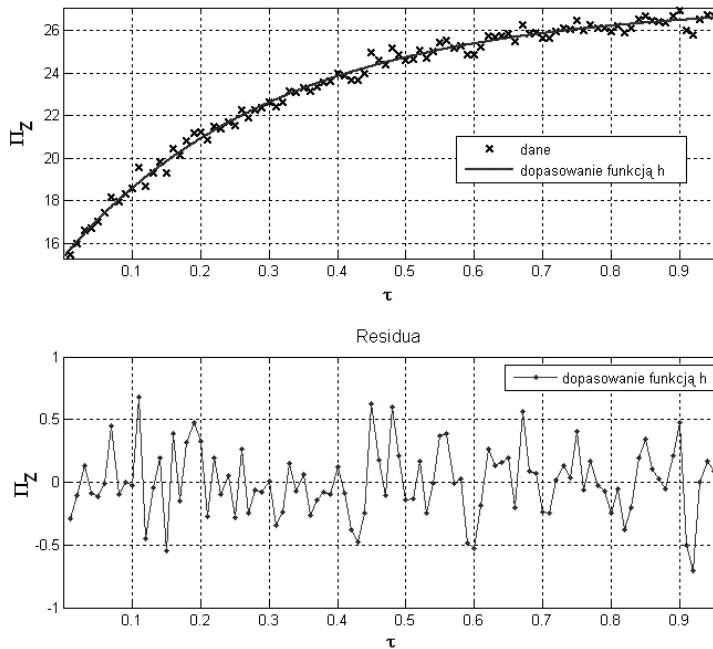
Rys. 1. Dopasowanie funkcją f

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Dopasowanie funkcją g

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Dopasowanie funkcją h

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku estymacji parametrów a , b , c , d , e metodą najmniejszych kwadratów funkcje f , g i h przyjęły następującą postać:

$$f(x) = 16,3 + 24,63x - 15,1x^2,$$

$$g(x) = 15,37 + 37,79x - 59,02x^2 + 51x^3 - 18,73x^4,$$

$$h(x) = 26,83 \exp(0,01115x) - 11,44 \exp(-3,269x).$$

W tabeli 6 przedstawiono główne charakterystyki dopasowanych funkcji.

Tabela 6. Parametry dopasowanych funkcji oraz kwadrat residuów

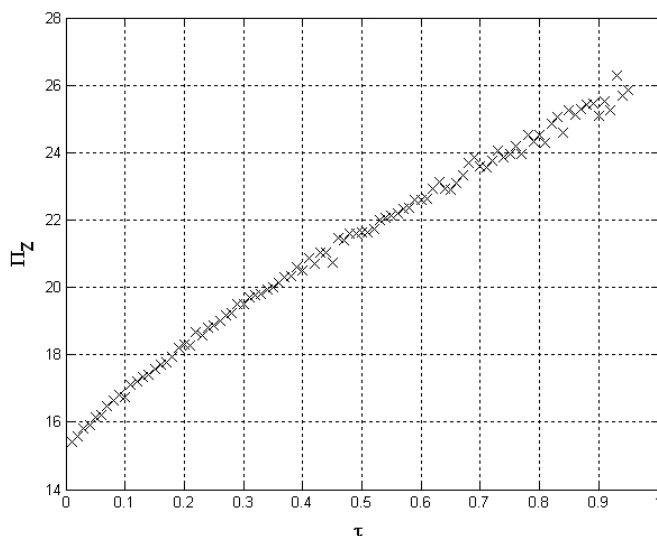
Parametr	Funkcja f	Funkcja g	Funkcja h
Średnia	23,507	23,503	23,512
Wariancja	8,847	8,908	8,911
Minimum	16,544	15,742	15,760
Maksimum	26,3434	26,479	26,603
$\sum_i res_i^2$	13,33	7,201	7,205

Źródło: opracowanie własne.

Wszystkie podane wyżej funkcje mają podobne (często różniące się dopiero na drugim miejscu po przecinku, co w ujęciu procentowy nie przekracza 1%) wartości średniej oraz wariancji. Na podstawie tych informacji można powiedzieć, że wszystkie trzy funkcje przybliżają wartości funkcji $\Pi_z(\tau)$ z podobną dokładnością. W celu uzyskania dokładniejszych wyników dokonana została analiza residuów, których wykresy znajdują się na rys. 1, 2 i 3. Residua wszystkich dopasowanych funkcji oscylują wokół prostej $y = 0$ oraz wszystkie oprócz jednej należą do przedziału $[1, 1]$. Wykresy residuów funkcji g oraz h , można powiedzieć, są prawie identyczne, a wartości residuów obydwu funkcji znajdują się bardzo blisko wartości 0. W przypadku residuów funkcji f można zauważyć większe wychylenia dla $\tau < 0.1$. Jako kryterium wyboru odpowiedniego dopasowania zastosowano badanie sum kwadratów residuów. W ostatnim wierszu tab. 6 znajduje się porównanie tych wartości. Najniższy wynik osiągany jest w przypadku dopasowania do danych wielomianu 4. stopnia. Jednakże różnica dzieląca tę wartość od liczby przypisanej funkcji wykładniczej jest bardzo mała i wynosi 0,004. Można zatem uznać, że wielomian 4. stopnia oraz funkcja wykładnicza najlepiej przybliżają funkcję $\Pi_z(\tau)$.

Dla coraz większych wartości τ składka Π_z rośnie coraz wolniej, zaś dla małych τ występują względnie duże różnice w wysokości składki. Może to powodować pewne komplikacje przy wyliczaniu składki dla portfela, w którym wypłaty są zależne od siebie w małym stopniu.

Rozpatrzmy teraz strukturę zależności opisaną funkcją łączącą Claytona. Na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 4 można się spodziewać, że szukaną funkcją przybliżającą $\Pi_z(\tau)$ będzie funkcja liniowa.



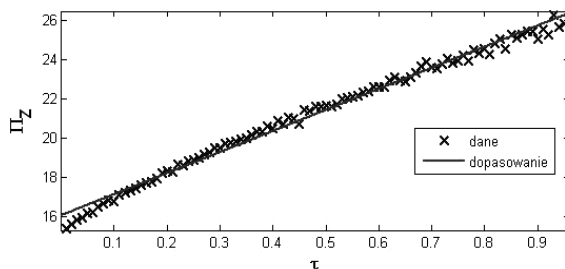
Rys. 4. Wykres funkcji $\Pi_z(\tau)$

Źródło: opracowanie własne.

Dopasowania będziemy więc szukać w grupie wielomianów 1. stopnia, czyli funkcji postaci:

$$f(x) = a + bx.$$

Wykres na rys. 5 przedstawia dopasowanie funkcji liniowej do modelowanych danych.



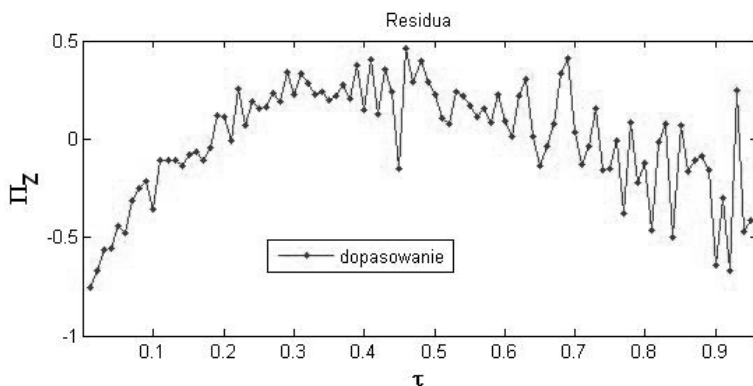
Rys. 5. Dopasowanie funkcją f

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku estymacji parametrów a i b metodą najmniejszych kwadratów funkcja f przyjmuje postać:

$$f(x) = 10,76 + 16,04x.$$

Na rysunku 5 można dostrzec, iż przy końcach przedział wykres danych oddala się od wykresu dopasowanej funkcji. Spozrzeżenie to potwierdza wykres residuów przedstawiony na rys. 6. Widać na nim, jak dla niskich τ wartości residuów odchylają się od wartości 0.



Rys. 6. Residua dopasowania funkcją f

Źródło: opracowanie własne.

Wynik ten jest jednak całkiem satysfakcjonujący dla τ z przedziału $[0,2,0,7]$.

4. Podsumowanie

Z przeprowadzonych w pkt 3 symulacji komputerowych wynika, że w indywidualnym modelu ryzyka występująca między wielkościami wypłat zależność ma bardzo istotny wpływ na składkę ubezpieczeniową liczoną według zasady wartości oczekiwanej.

Przyjęcie założenia o ich niezależności może prowadzić do niedoszacowania składki i być powodem ogromnych strat finansowych. Szczególnie dobrze widać to w odniesieniu do wyników uzyskanych przy badaniu składki dla wypłat o rozkładzie ciężkoogonowym (tab. 3). Niejednokrotnie wartość składki dla wypłat zależnych w takim modelu była dwukrotnie wyższa od wartości składki dla wypłat niezależnych.

Otrzymane wyniki sugerują, że na wysokość składki może mieć również wpływ rodzaj funkcji łączącej, jaka została użyta do modelowania zależności. We wszystkich przypadkach (tab. 2 i 3) wartości tych składek, dla których struktura zależności wypłat była modelowana funkcją łączącą Clayтона, są zdecydowanie niższe. Rysunki 1-5 również pokazują, że wybór funkcji łączącej może mieć wpływ na otrzymane wyniki. Jeżeli wartość składki Π_z potraktujemy jako funkcję współczynnika korelacji τ , to okaże się, że zależność ta może wyglądać inaczej przy zastosowaniu różnych funkcji łączących.

Literatura

- Bowers N.L. i in. (1986), *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.
- Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. (2006), *Capital requirements risk measures and comonotonicity*, „Mathematical Finance” no 16.
- Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M., Kaas R. (2001), *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publisher, Boston.
- Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M., Kaas R., Vynce D. (2002), *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance*, „Applications, Insurance: mathematics and Economics Applications”.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A. (2003), *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Elsevier, Amsterdam.
- Feller W. (1981), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom 2, Wydanie III, PWN, Warszawa.
- Frees E., Valdez E. (1998), *Understanding relationship using copulas*, „North American Actuarial Journal” no 2, 1.
- Heilpern S. (2007), *Funkcje łączące – podstawowe pojęcia i własności*, Seria: Statystyka i Ryzyko, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, AE, Wrocław.
- Nelsen R. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
- Ostasiewicz W., *Modele aktuarialne*, AE, Wrocław 2000.
- Schmidt T. (2007), *Coping with Copulas*, Risk Books & J. Rank.
- Sklar A. (1959), *Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8.
- Wieczorkowski R., Zieliński R. (1997), *Komputerowe generatory liczb losowych*, WNT, Warszawa.

INSURANCE PREMIUM IN INDIVIDUAL RISK MODEL WITH DEPENDENT CLAIMS DESCRIBED BY COPULAS FUNCTIONS

Summary: The individual model – apart from collective – is one of the main and oldest models in the risk theory. The classic model has unreal assumption about independence of payouts. In practice, a portfolio with dependent risks is very often considered. In case of modelling dependence, using of copulas is attractive and easy in simulation. These functions make it possible to do unparametric research of dependence between random variables. The results of computer simulations of insurance premiums for policies from portfolio, where dependence is modelled by copula functions (Clayton, Gumbel etc.), are presented in this paper. The prices of insurance premiums are compared for random variables with light-tailed and heavy-tailed distributions.

Key words: individual risk model, copula, dependent claims.