Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją
Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp 7

Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski, Porównanie prawdopodobieństw paryskiej i klasycznej ruiny dla procesu ryzyka typu Lévy'ego 9

Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski, Problem wyboru optymalnej paryskiej dywidendy dla procesu ryzyka typu Lévy'ego – numeryczna analiza 22

Joanna Dębicka, Składki netto dla ubezpieczeń wielostanowych obciążone kosztami zawarcia i prowadzenia umowy 38

Monika Dyduch, Niekonwencjonalna metoda prognozy wartości jednostek funduszy emerytalnych 69

Stanisław Heilpern, Niestandardowe modele ryzyka – badanie wpływu stopnia zależności na prawdopodobieństwo ruiny 79

Aleksandra Iwanicka, Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w dwuwymiarowym modelu ryzyka z lekkoogonowymi rozkładami wypłat 92

Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Składki zaufania z zastosowaniem niesymetrycznych funkcji strat 101

Kamil Jodź, Składka w modelu ryzyka indywidualnego z zależnymi roszczeniami opisanymi funkcjami łączącymi 118

Marek Kałuszka, Michał Krzeszowiec, Własności składki *mean-value* przy zniekształconym prawdopodobieństwie 136

Zbigniew Michna, Procesy Lévy'ego w modelach ubezpieczeniowych 149

Agnieszka Mruklik, Ubezpieczenia na życie ze stochastyczną techniczną stopą oprocentowania – zastosowanie modelu Hulla i White'a 157

Agnieszka Pobłocka, Rezerwa IBNR w ubezpieczeniach majątkowych – praktyczne metody jej szacowania 173

Agata de Sas Stupnicka, Równowaga na rynku ubezpieczeń zdrowotnych w zależności od przyjętego sposobu rozliczania świadczeń medycznych 190

Joanna Sawicka, Zagadnienia kalkulacji składki zaufania na podstawie łącznej wartości i liczby szkód 202

Alicja Wolny-Dominiak, Analiza porównawcza modeli mieszanych szacowania stóp taryf w ubezpieczeniach majątkowych z wykorzystaniem kroswalidacji 229

Walenty Ostasiewicz, Polacy nie gęsi, iż swój język mają! 238

Summaries

Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski, Comparison of Parisian and classical ruin probabilities for a Lévy risk process 21
Irmina Czarna, Zbigniew Palmowski, Numerical analysis of dividend problem with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process 37
Joanna Dębicka, Expense-loaded premiums for multistate insurance contracts 68
Monika Dyduch, Alternative method of forecast of pension funds units value 78
Stanisław Heilpern, Nonstandard risk models – study of influence of the degree of dependence on the probability of ruin 91
Aleksandra Iwanicka, The influence of some outside risk factors on a ruin probability in a two-dimensional risk model with light-tailed claim sizes 100
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Credibility premiums using asymmetric loss functions 117
Kamil Jodź, Insurance premium in individual risk model with dependent claims described by copulas functions 135
Marek Kałuszka, Michał Krzeszowiec, Properties of mean-value principle under rank-dependent utility model 148
Zbigniew Michna, Lévy processes in insurance models 156
Agnieszka Mruklik, Life insurance with stochastic interest rate – an application of the Hull and White model 172
Agnieszka Pobłocka, IBNR reserve in non-life insurance. Practical methods of its estimation 189
Agata de Sas Stupnicka, Balance on the health insurance market – the impact of payment system 201
Joanna Sawicka, Calculation of credibility premium on the basis of number and total amount of claims 228
Alicja Wolny-Dominiak, Comparative analysis of mixed models for ratemaking in non-life insurance with k-fold cross-validation 237

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Marek Kałuszka
Politechnika Łódzka

Michał Krzeszowiec
Polska Akademia Nauk, Politechnika Łódzka

WŁASNOŚCI SKŁADKI *MEAN-VALUE* PRZY ZNIEKSZTAŁCONYM PRAWDOPODOBIEŃSTWIE

Streszczenie: Celem pracy jest przedstawienie własności składki *mean-value* przy zniekształconym prawdopodobieństwie bez założeń o wklęsłości i różniczkowalności funkcji użyteczności u i funkcji zniekształcającej prawdopodobieństwa g. Takie funkcje u i g pojawiają się w najnowszych pracach ekonomistów analizujących problem optymalnych wyborów. Dotychczasowe wyniki (zob. np. [Gerber 1979]) sprowadzały się do rozwiązywania równań różniczkowych, podczas gdy wyniki w tej pracy zostały osiągnięte przez rozwiązywanie równań funkcyjnych.

Słowa kluczowe: składka *mean-value*, zniekształcone prawdopodobieństwo, teoria perspektywy.

1. Wstęp

Teoria oczekiwanej użyteczności von Neumana-Morgensterna stanowi prosty model opisujący ludzkie zachowania w warunkach ryzyka i niepewności. Oparte na tej teorii składki *mean-value* oraz zerowej użyteczności są powszechnie analizowane w literaturze ubezpieczeniowej. Według naszej wiedzy, składki te zaproponował Pratt [1964], choć Hardy, Littlewood i Pólya [1952] już wcześniej rozważali funkcjonał *quasilinear mean-value* $u^{-1}(Eu(X))$. Wyznaczane są one na podstawie pewnej funkcji użyteczności u. Gerber [1979], Goovaerts, De Vylder, Haezendonck [1984] oraz Rolski, Schmidli, Schmidt, Teugels [1999] dokonują analizy własności składek *mean-value* i/lub zerowej użyteczności, zakładając wklęsłość (wypukłość) funkcji u i/lub jej dwu- lub nawet trzykrotną różniczkowalność. Słynne paradoksy (np. [Allais 1953; Rabin 2000; Yaari 1987]) ukazują ponadto słabość klasycznej teorii oczekiwanej użyteczności i prowadzą do innych klas funkcji użyteczności, które są nieróżniczkowalne.

Friedman, Savage [1948] proponują wykorzystywanie funkcji użyteczności, które choć są różniczkowalne, to mają dwa punkty przegięcia. W krytyce tej pracy

Markowitz [1952] uznaje za rozsądne stosowanie funkcji użyteczności, które mają tylko jeden punkt przegięcia, zlokalizowany w pobliżu obecnego majątku inwestora. Gillen i Markowitz w [2010] na podstawie tych prac sugerują pewną klasę funkcji użyteczności, różniczkowalnych w każdym punkcie, które są jednak kawałkami wklęsłe i wypukłe. Analizując odpowiednie podklasy tych funkcji, jesteśmy w stanie określić znaczenie posiadanego majątku przez daną osobę, jak również scharakteryzować chęć ryzyka bądź awersję do niego. Schmidt i Zank w [2007] wykorzystują z kolei kawałkami liniowe, a zatem nieróżniczkowalne, funkcje użyteczności w celu doboru odpowiedniego portfela inwestycyjnego oraz ustalenia potrzeby reasekuracji w firmie ubezpieczeniowej.

W przełomowej pracy Kahneman i Tversky [1979] proponują stosowanie funkcji użyteczności wypukłych dla argumentów ujemnych i wklęsłych dla argumentów dodatnich, takich że $u_+^{'}(0) < u_-^{'}(0)$, gdzie $u_+^{'}$ i $u_-^{'}$ oznaczają pochodne prawostronne i lewostronne funkcji *u*. Tę klasę funkcji Kahneman i Tversky wyróżnili na podstawie licznych doświadczeń mających na celu zbadanie ludzkich zachowań w warunkach niepewności. Opisana przez nich teoria perspektywy doczekała już się pewnych modyfikacji.

W uzupełnieniu do teorii perspektywy Kőszegi i Rabin [2007] zauważyli, że podejmowanie decyzji w warunkach niepewności zwiększa awersję do ryzyka, jeżeli wcześniej spodziewamy się tego ryzyka. Wprowadzili oni pojęcie punktów referencyjnych, które stanowią punkty odniesienia decydenta przy podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności. Punkty referencyjne wyznaczane są na podstawie aktualnych przekonań danej osoby dotyczących możliwego wyniku i mogą być wyznaczone w sposób losowy. Podjęcie odpowiedniej decyzji polega na maksymalizacji następującego funkcjonału $E_F \int u(w|r)dG(r)$ gdzie *u* jest funkcją użyteczności zaproponowaną przez Kahnemana i Tversky'ego, *w* jest majątkiem o rozkładzie *F*, *G* zaś jest dystrybuantą rozkładu dyskretnego o skończonym nośniku zmiennej losowej *R*. Wówczas funkcja $w \to \int u(w|r)dG(r)$ jest nieróżniczkowalna w wielu punktach i ma liczne punkty przegięcia.

Kahneman i Tversky postulowali ponadto, że prawdopodobieństwo przy podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka ulega zniekształceniu. Odkrycie to stało się motywacją dla innych ekonomistów (zob. [Yaari 1987; Segal 1989; Puppe 1991; Abdellaoui 2002]), którzy zbadali i uzasadnili te zjawiska. Schmidt, Starmer i Sugden [2008] uogólniają wyniki Kahnemana i Tversky'ego, opisując referencyjne modele użyteczności, przy jednoczesnym skupieniu uwagi na porównaniu, jakie konsekwencje wynikają z podjęcia konkretnej decyzji. Wykorzystywane funkcje użyteczności zależą od referencji użyteczności, są kawałkami wklęsłe i wypukłe oraz nieróżniczkowalne w wielu punktach. Wyniki te uzyskane są przy założeniu, że prawdopodobieństwa przy podejmowaniu decyzji są zniekształcone przez pewną funkcję.

Na bazie tych obserwacji powstał *rank-dependent utility model* (zob. np. [Segal 1989]), w którym zakłada się, że prawdopodobieństwa charakteryzujące zmienną losową X są zaburzone przez pewną funkcję g:[0, 1] → [0, 1], taką że $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ i g jest niemalejąca, nazywaną funkcją zniekształcającą. W dalszej części będziemy oznaczali $g \in \mathbf{G}$, gdy g jest funkcją zniekształcającą prawdopodobieństwo, spełniającą wspomniane trzy założenia. Dla ustalonej funkcji g oraz zmiennej losowej X niech

$$E_g X := \int_{-\infty}^{0} \big(g\big(P(X>t)\big)-1\big)dt + \int_{0}^{\infty} g\big(P(X>t)\big)dt,$$

o ile obie całki występujące we wzorze są skończone. Wówczas $E_g X$ nazywamy całką Choqueta. Jeżeli zmienna losowa X przyjmuje skończoną liczbę wartości $x_1 < x_2 < ... < x_n$ z prawdopodobieństwami $P(X = x_i) = p_i > 0$, to $E_g X = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(q_i)\big(x_{i+1} - x_i\big)$, gdzie $q_i = \sum_{k=i+1}^{n} p_k$; szczególnie dla $n = 2$, mamy $E_g X = x_1\big(1-g(p_2)\big) + g(p_2)x_2$. Całka Choqueta jest funkcjonałem addytywnym dla ryzyka komonotonicznego, dodatnio jednorodnym, monotonicznym (tzn. $E_g X \geq E_g Y$ o ile $X \geq Y$ p.w.) oraz $E_g(c) = c$ dla $c \in \mathsf{R}$. Ponadto $E_g(-X) = -E_{\bar{g}}(X)$, gdzie $\bar{g}(x) = 1 - g(1-x)$ (zob. [Denneberg 1994]).

2. Składka *mean-value*

Załóżmy, że u:R → R jest pewną funkcją, X zaś – dowolną nieujemną zmienną losową. Rozważmy podmiot, który dysponuje pewnym majątkiem $w \geq 0$ i jest narażony na stratę losową w wysokości X. Aby uchronić się przed tą stratą, podmiot wykupuje polisę ubezpieczeniową, która w przypadku zaistnienia szkody wypłaca ubezpieczonemu jej równowartość. Przy ustalonej wartości w oraz funkcji $g \in \mathbf{G}$ składka *mean-value* $H(X)$ za ubezpieczenie ryzyka X jest rozwiązaniem równania

$$u\big(w - H(X)\big) = E_g\big[u(w-X)\big]. \tag{1}$$

Zakładać będziemy w dalszej części, że wszystkie zmienne losowe określone są na pewnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, A, P). Ponadto będziemy oznaczali $X \in \mathrm{X}_2$, gdy $P(X = 0) = 1 - q$, $P(X = s) = q$, gdzie $s > 0$ oraz $q \in [0, 1]$.

Sprawdzimy, jakie minimalne założenia należy poczynić odnośnie do funkcji u, aby składka $H(X)$ istniała i była wyznaczona jednoznacznie. Powszechnie akceptowanym założeniem jest, aby funkcja u była niemalejąca. Gdyby jednak funkcja u była stała na pewnym przedziale, to składka nie byłaby wyznaczona jednoznacznie. Stąd istotne jest założenie, że u jest funkcją rosnącą. Okazuje się, że istotnym założeniem jest ciągłość funkcji u. W przeciwnym wypadku równanie (1) może nie mieć rozwiązania. Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że $u(0) = 0$. Reasumując, będziemy rozważali funkcje u takie, że u jest rosnąca, ciągła i $u(0) = 0$. W dalszym ciągu będziemy oznaczali $u \in \mathbf{U}$, jeśli funkcja u spełnia te trzy założenia. Będziemy pisali ponadto $u \in \mathbf{U}_0$, jeśli $u(x) = cx$, $u(x) = (e^{cx} - 1)/a$ lub $u(x) = (1 - e^{-cx})/a$ dla wszystkich $x \in \mathsf{R}$ oraz pewnych $a, c > 0$.

W przypadku gdy funkcja użyteczności jest liniowa, to prawa strona równania (1) ma postać $E_g\left[u(w-X)\right] = cE_g\left[w-X\right] = c(w + E_g(-X)) = c(w - E_{\bar{g}}(X))$. Stąd $H(X) = E_{\bar{g}}(X)$ dla $u(x) = cx$.

Własności składki wyznaczonej ze wzoru (1) badał Luan [2001] przy dodatkowych założeniach wklęsłości i dwukrotnej różniczkowalności funkcji *g*. Te silne założenia pomijają pewne istotne rodziny funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo. Na przykład funkcja $g(x) = \mathbf{1}_{\{x>p\}}$ odpowiadająca składce VaR nie jest ciągła, zaś funkcje

$$g(x) = \begin{cases} (1+r)x, & 0 \le x < 0{,}5 \\ r + (1-r)x, & 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-\alpha}, & x < 1-\alpha \\ 1, & x \ge 1-a \end{cases}$$

opisujące odpowiednio składki *Denneberg absolute deviation principle* oraz CVaR nie są różniczkowalne (zob. np. [Wang 1996]).

W dalszej części pracy omówimy własności składki *H*(*X*) będącej rozwiązaniem równania (1).

3. Własności składki *mean-value*

1. Brak nadmiernego ładowania bezpieczeństwa, tzn. $H(X) \le \sup X$.

Warunek ten zachodzi dla dowolnych funkcji $u \in \mathbf{U}$ oraz $g \in \mathbf{G}$. Ponieważ $w - X \ge w - \sup X$, więc z monotoniczności *u* oraz całki Choqueta mamy

$$u\big(w - H(X)\big) = E_g\left[u(w-X)\right] \ge E_g[u(w - \sup X)] = u(w - \sup X).$$

Stąd $H(X) \le \sup X$.

2. Brak nieuzasadnionego ładowania bezpieczeństwa, tzn. $H(a) = a$ dla wszystkich $a \ge 0$. Warunek ten również jest spełniony dla wszystkich $u \in \mathbf{U}$ oraz $g \in \mathbf{G}$. Mamy

$$u(w - H(a)) = E_g[u(w-a)] = u(w-a).$$

Stąd $H(a) = a$.

3. Zgodność, tzn. $H(X+b) = H(X) + b$ dla wszystkich $b \ge 0$.

Z równania (1) mamy

$$\begin{aligned} u(w-b-H(X)) &= E_g[u(w-b-X)] = E_g[u(w-(X+b))] \\ &= u(w-H(X+b)) = u(w-b-(H(X+b)-b)). \end{aligned} \tag{2}$$

Z monotoniczności *u* mamy, że $H(X+b) = H(X) + b$. Zauważmy jednak, że w pierwszym równaniu we wzorze (2) składka jest wyznaczana przy kapitale początkowym *w* – *b*, w ostatnim zaś równaniu we wzorze (2) składka wyznaczana jest przy kapitale początkowym w. Zatem na podstawie powyższej obserwacji możemy wywnioskować, że składka jest zgodna, gdy nie zależy od wartości kapitału początkowego w. Na przykład dla funkcji $g(x)=\mathbf{1}_{\{x>\alpha\}}$ występującej przy składce VaR składka $H(X)$ ma postać $H(X)=-F_{-X}^{-1}(1-\alpha)$, gdzie $F_{-X}^{-1}(1-\alpha)=\inf\{x\in \mathrm{R}: F_X(x)\geq 1-\alpha\}$. Ponieważ $H(X)$ nie zależy w tym przypadku od w, więc jest zgodna. Dalsze wyniki dotyczące zgodności składki podaje twierdzenie 1.

Twierdzenie 1. Niech $u\in\mathbf{U}$ i $g\in\mathbf{G}$.
(i) Jeżeli $u\in\mathbf{U}_0$, to składka $H(X)$ jest zgodna.
(ii) Jeżeli g jest ciągła oraz składka $H(X)$ jest zgodna, to $u\in\mathbf{U}_0$.

Lemat 1. Jeżeli u jest funkcją rosnącą i ciągłą, to $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{u(x+y)}{u(x)}=e^{-by}$ dla pewnego $b>0$, o ile granica ta istnieje i jest skończona.

Dowód lematu można znaleźć w [Kałuszka, Krzeszowiec 2012].

Lemat 2. (zob. [Polyanin, Manzhirov 2007, s. 16]). Niech $a,b>0$, zaś $c\in\mathrm{R}$. Jedynymi rozwiązaniami równania funkcyjnego $u(x+a)=bu(x)+c$, $x\geq 0$ (lub $x\leq 0$, lub $x\in\mathrm{R}$) są funkcje:

(a) $u(x)=\varphi(x)+\dfrac{c}{a}x$ gdy $b=1$,

(b) $u(x)=\varphi(x)b^{x/a}+\dfrac{c}{1-b}$ gdy $b\neq 1$,

gdzie φ jest dowolną funkcją okresową o okresie a.

Dowód twierdzenia 1. (i) Jeżeli $u(x)=cx$, to $H(X)=E_{\bar{g}}(X)$ oraz

$$H(X+b)=E_{\bar{g}}(X+b)=E_{\bar{g}}X+b=H(X)+b,$$

a więc składka jest zgodna. Jeżeli $u(x)=(e^{cx}-1)/a$, to $H(X)=-\frac{1}{c}\ln(E_g e^{-cX})$. Stąd oraz z dodatniej jednorodności całki Choqueta mamy

$$H(X+b)=-\frac{1}{c}\ln(E_g e^{-c(X+b)})=-\frac{1}{c}[-cb+\ln(E_g e^{-cX})]=b+H(X),$$

co dowodzi zgodności składki $H(X)$. Analogicznie warunek zgodności pokazujemy dla $u(x)=(1-e^{cx})/a$.

(ii) Załóżmy teraz, że $H(X+b)=H(X)+b$ dla dowolnego $b\geq 0$. Rozważmy zmienną losową $X\in\mathrm{X}_2$. Wówczas dla $w=0$ z równania (1) mamy

$$\bar{g}(q)=\frac{u(-H(X))}{u(-s)}. \tag{3}$$

Ponieważ $H(X)=0$ dla $q=0$ oraz $H(X)=s$ dla $q=1$, więc z monotoniczności oraz ciągłości u wynika, że $H(X)$ jest ciągłą i niemalejącą funkcją prawdopodobieństwa q, zatem przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[0, s]$. Ze zgodności składki $H(X)$ równanie (1) dla zmiennej losowej $X+b$ ma postać

$$u(-H(X)-b)=(1-\overline{g}(q))u(-b)+\overline{g}(q)u(-s-b). \tag{4}$$

Wstawiając (3) do (4), oznaczając $x=-H(X)$, $y=-b$ i dzieląc stronami przez $u(x)u(-s)$, otrzymujemy po przekształceniach równanie

$$f(x,y)=f(-s,y) \tag{5}$$

dla wszystkich $y\le 0$, $s>0$ i $-s\le x\le 0$, gdzie $f(x,y)=(u(x+y)-u(y))/$ $/u(x)$. Kładąc $s=1$ w (5), mamy

$$f(x,y)=f(-1,y) \tag{6}$$

dla wszystkich $y\le 0$, $-1\le x\le 0$. Przyjmując $x=-1$ w (5) otrzymujemy

$$f(-s,y)=f(-1,y) \tag{7}$$

dla wszystkich $y\le 0$ i $-s\le -1$. Ze wzorów (6) i (7) mamy $f(x,y)=f(-1,y)$ dla każdego $x,y\le 0$, zatem przy ustalonym y mamy

$$u(x+y)=c(y)u(x)+u(y) \tag{8}$$

dla wszystkich $x\le 0$, gdzie $c(y)$ jest jakąś funkcją. Rozważmy dwa przypadki:

(a) $u(-\infty) > -\infty$. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że $u(-\infty)=-1$. Przechodząc z $x\to\infty$, we wzorze (8) mamy $c(y)=u(y)+1$. Po podstawieniu tej zależności do (8) otrzymujemy $u(x+y)=u(x)u(y)+u(x)+u(y)$ dla wszystkich $x,y\le 0$, co po podstawieniu $h(x)=u(x)+1$ daje $h(x+y)=h(x)h(y)$ dla wszystkich $x,y\le 0$. Funkcja h jest rosnąca i ciągła, więc jedynym rozwiązaniem jest $h(x)=e^{ax}$ dla wszystkich $x\le 0$ i pewnego $a\ge 0$ (zob. [Kuczma 2009]). Stąd jedynym rozwiązaniem równania (8) jest $u(x)=e^{ax}-1$ dla wszystkich $x\le 0$ i pewnego $a>0$.

(b) $u(-\infty) > -\infty$. Dzieląc stronami równanie (8) przez $u(x)$ i przechodząc do granicy z $x\to-\infty$, mamy $c(y)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{u(x+y)}{u(x)}$. Z lematu 1 i ze wzoru (8) mamy

$$u(x+y)=u(x)e^{-by}+u(y) \tag{9}$$

dla wszystkich $x,y\le 0$ i pewnego $b\le 0$. Jeżeli $b=0$, to otrzymujemy równanie Cauchy'ego, którego jedynym rozwiązaniem ciągłym i rosnącym jest funkcja $u(x)=cx$ dla wszystkich $x\le 0$ i pewnego $c>0$ (zob. [Kuczma 2009]). Jeżeli $b>0$, to z lematu 2 dowolne rozwiązanie równania (9) ma postać

$$u(x)=\varphi_y(x)e^{-bx}+\frac{u(y)}{1-e^{-by}}$$

dla wszystkich $x\le 0$, gdzie $\varphi_y(\cdot)$ jest dowolną funkcją ciągłą i okresową o okresie y. Wykażemy, że $x\mapsto\varphi_y(x)$ jest funkcją stałą dla każdego $y<0$. Dla dowolnych $y_1\ne y_2$ mamy

$$\varphi_{y_1}(x) - \varphi_{y_2}(x) = e^{bx}\left(\frac{u(y_1)}{1-e^{-by_1}} - \frac{u(y_2)}{1-e^{-by_2}}\right) \tag{10}$$

dla wszystkich $x \leq 0$. Zauważmy, że funkcja po prawej stronie równości (10) jest nieograniczona ze względu na zmienną *x*, gdy $\frac{u(y_1)}{1-e^{-by_1}} \neq \frac{u(y_2)}{1-e^{-by_2}}$, podczas gdy różnica funkcji ciągłych i okresowych nie może być funkcją nieograniczoną. Stąd funkcja $\frac{u(y)}{1-e^{-by}}$ jest stała, a więc $u(x) = (1 - e^{bx})/a$ dla wszystkich $x \leq 0$ i pewnych $a, b > 0$.

Zdefiniujmy teraz funkcję

$$\hat{u}(x) = u(w + x) - u(w) \tag{11}$$

dla $x \leq 0$. Ponieważ $H(X)$ jest zgodna, więc *u* jest funkcją liniową lub wykładniczą dla argumentów ujemnych. Kładąc $x = -w$, w (11) mamy z dowolności *w*, że *u* jest liniowa lub wykładnicza dla $x \geq 0$. Stąd $u \in \mathbf{U}_0$.

4. Proporcjonalność, tzn. $H(aX) = aH(X)$ dla $a > 0$.

Twierdzenie 2. Niech $u \in \mathbf{U}$ i $g \in \mathbf{G}$.

(i) Jeżeli $u(x) = cx$ dla pewnego $c > 0$, to $H(aX) = aH(X)$ dla wszystkich $a > 0$.

(ii) Jeżeli *g* jest funkcją ciągłą i $H(aX) = aH(X)$ dla wszystkich $a > 0$, to $u(x) = cx$ dla wszystkich $x \in \mathsf{R}$ i pewnego $c > 0$.

Dowód. (i) Jeżeli $u(x) = cx$, to łatwo sprawdzić, że składka $H(X)$ jest proporcjonalna.

(ii) Załóżmy, że $H(aX) = aH(X)$. Wtedy z (1) dla $X \in \mathrm{X}_2$ mamy

$$u(-ah) = \overline{g}(q)u(-as) \tag{12}$$

dla wszystkich $a > 0,$ gdzie $h = H(X)$. Kładąc $f(x) = -u(-x)$ oraz wyznaczając $\overline{g}(q)$ z równania (12) przy $a = 1$, równanie (12) możemy zapisać w postaci

$$f(ah) = f(as)\frac{f(h)}{f(s)} \tag{13}$$

dla wszystkich $s > 0,\ 0 \leq h \leq s.$ Wówczas kładąc $s = 1$ we wzorze (13) i dzieląc stronami przez $u(-1)$, mamy $z(ah) = z(a)z(h)$ dla wszystkich $0 \leq h \leq 1$ i $a > 0,$ gdzie $z(x) = f(x)/u(-1)$. Jeśli położymy $h = 1$ w (13), to otrzymujemy $z(a)z(s) = z(as)$ dla wszystkich $s \geq 1$ i $a > 0.$ Z ostatnich dwóch równań wnioskujemy, że $z(ax) = z(a)z(x)$ dla wszystkich $a, x > 0.$ Z ciągłości *z* mamy, że $z(x) = x^d$ dla wszystkich $x \geq 0$ i pewnego $d > 0$ (zob. [Kuczma 2009]). Zatem $u(x) = -c(-x)^d$ dla wszystkich $x \leq 0$ oraz pewnych $c = -u(-1) > 0$ i $d > 0.$ Połóżmy $\hat{u}(x) = u(x+w) - u(w)$ dla dowolnych $x \le 0$ i $w \ge 0$. Z proporcjonalności składki $H(X)$ mamy

$$u(x+w) - u(w) = -c(-x)^d. \tag{14}$$

Kładąc $x = -w$, w (14) mamy, że $u(w) = cw^d$ dla wszystkich $w \ge 0$. Zatem $u(x) = cx\,|\,x\,|^{d-1}$ dla wszystkich $x \in \mathsf{R}$. Kładąc $x = -1$ i $w = 1/2$ dla tak wyznaczonej funkcji u, w równaniu (14) mamy $2/2^d = 1$. Stąd $d = 1$.

5. Addytywność dla ryzyka komonotonicznego

Twierdzenie 3. Niech $u \in \mathbf{U}$, $g \in \mathbf{G}$ zaś będzie ciągła. Wtedy składka $H(X)$ jest addytywna dla ryzyka komonotonicznego wtedy i tylko wtedy, gdy $u(x) = cx$ dla pewnego $c > 0$.

Dowód twierdzenia 3 można znaleźć w [Kałuszka, Krzeszowiec 2012].

6. Addytywność dla ryzyka niezależnego

Twierdzenie 4. (i) Jeżeli $g(p) = p$ oraz $u \in \mathbf{U}_0$, to składka $H(X)$ jest addytywna dla ryzyka niezależnego.

(ii) Jeżeli $g(p) = p$ oraz składka $H(X)$ jest addytywna dla ryzyka niezależnego, to $u \in \mathbf{U}_0$.

(iii) Niech $u \in \mathbf{U}_0$. Jeżeli $g \in \mathbf{G}$ jest funkcją prawostronnie ciągłą w 0, lewostronnie ciągłą w 1 oraz ma pochodną lewostronną w **1**, to składka $H(X)$ jest addytywna dla ryzyka niezależnego wtedy i tylko wtedy, gdy $g(p) = p$.

Lemat 3. Jeżeli dziedziną funkcji u jest $[0,1/2]$, to rozwiązaniem ogólnym równania $u(2x) = 2u(x)$ jest funkcja $u(x) = xh(\ln x)$, gdzie h jest funkcją okresową o okresie ln2 oraz $0 \cdot h(-\infty) = 0$. Jeżeli założymy dodatkowo, że u ma pochodną prawostronną w $x = 0$ (przy czym pochodna ta może być skończona bądź nie), to jedynym rozwiązaniem jest $u(x) = cx$ dla pewnego $c > 0$.

Dowód lematu można znaleźć w [Kałuszka, Krzeszowiec 2012].

Dowód (i) Łatwo sprawdzić, że odpowiednie składki są addytywne dla ryzyka niezależnego.

(ii) Dowód przeprowadzimy, opierając się na pomyśle Gerbera [1979]. Załóżmy, że $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$ dla dowolnych niezależnych rodzajów ryzyka X, Y. Szczególnie jeśli X jest dowolnym ryzykiem, zmienna losowa Y zaś jest stała, tzn. $P(Y = d) = 1$ dla pewnego $d > 0$, to z założenia o addytywności dla ryzyka niezależnego oraz z braku nieuzasadnionego ładowania bezpieczeństwa wnioskujemy, że składka $H(X)$ jest zgodna. Z twierdzenia 1 mamy zatem, że $u \in \mathbf{U}_0$.

(iii) Niech $u(x) = cx$. Zakładamy, że składka $H(X)$ jest addytywna dla ryzyka niezależnego. Załóżmy, że $X, Y \in \mathrm{X}_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz $P(X = 1) = p$, $P(Y = 1) = q$. Wtedy

$$H(X) = \overline{g}(p), \quad H(Y) = \overline{g}(q) \tag{15}$$

oraz

$$H(X+Y)=\bar{g}(p+q-pq)+\bar{g}(pq). \tag{16}$$

Z założenia o addytywności dla ryzyka niezależnego na mocy (15) i (16) mamy

$$\bar{g}(p+q-pq)+\bar{g}(pq)=\bar{g}(p)+\bar{g}(q) \tag{17}$$

dla wszystkich $0 \le p,q \le 1.$ Połóżmy $q=c-p,$ gdzie $0 \le c \le 1.$ Utwórzmy ciąg $\left(p_n\right)_{n\in N}$, taki, że $p_0=c/2$ oraz $p_{n+1}=p_n(c-p_n).$ Jest to odwzorowanie logistyczne (zob. [Polyanin, Manzhirov 2007]). Z (17) mamy

$$\bar{g}(c-p_{n+1})+\bar{g}(p_{n+1})=\bar{g}(c-p_n)+\bar{g}(p_n)=...=2\bar{g}(c/2). \tag{18}$$

Ponieważ $p_{n+1}/c=c\cdot p_n/c\cdot(1-p_n/c),$ gdzie $c\le 1,$ więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{c}=0,$ a stąd $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=0.$ Funkcja $\bar{g}$ jest ciągła w 0 i w 1, a więc przechodząc z $n\to\infty$, we wzorze (18) mamy

$$\bar{g}(c)=2\bar{g}(c/2) \tag{19}$$

dla wszystkich $0\le c\le 1.$ Ponieważ $\bar{g}$ ma pochodną prawostronną w 0 (dopuszczamy, by $\bar{g}'(0)=\infty$), więc z lematu 3 mamy $\bar{g}(p)=p,$ a zatem $g(p)=p.$

Załóżmy teraz, że $u(x)=(1-e^{-cx})/a$, gdzie $a,c>0.$ Wówczas $H(X)=\frac{1}{c}\ln(E_{\bar{g}}e^{cX}).$ Stąd dla niezależnych zmiennych losowych $X,Y\in \mathrm{X}_2$, takich, że $P(X=s)=p$ i $P(Y=s)=q$, mamy

$$H(X)=\frac{1}{c}\ln(1+\bar{g}(p)(e^{cs}-1)),\;\; H(Y)=\frac{1}{c}\ln(1+\bar{g}(q)(e^{cs}-1)), \tag{20}$$

$$H(X+Y)=\frac{1}{c}\ln(1+\bar{g}(p+q-pq)(e^{cs}-1)+\bar{g}(pq)(e^{cs}-1)) \tag{21}$$

dla wszystkich $0\le p,q\le 1.$ Z założenia o addytywności z (20) i (21) mamy

$$\bar{g}(p)+\bar{g}(q)+\bar{g}(p)\bar{g}(q)(e^{cs}-1)=\bar{g}(p+q-pq)+\bar{g}(pq)(e^{cs}-1).$$

Z dowolności s wynika, że funkcja $\bar{g}$ spełnia warunek (17).

Podobnie dowodzi się przypadku, gdy $u(x)=(e^{cx}-1)/a,$ dla pewnych $a,c>0.$

7. Subaddytywność, tzn. $H(X+Y)\le H(X)+H(Y)$.

Twierdzenie 5. Niech $u(x)=cx$ dla pewnego $c>0$, zaś $g\in \mathbf{G}$. Wówczas składka *H*(*X*) jest subaddytywna wtedy i tylko wtedy, gdy *g* jest funkcją wypukłą. Dowód twierdzenia można znaleźć w [Kałuszka, Krzeszowiec 2012].

8. Zachowanie porządku *stop-loss*, tzn. $X\le_{sl} Y\Rightarrow H(X)\le H(Y)$.

Własność ta jest zachowana bądź nie w zależności od rodzaju funkcji *u*. Jeżeli $u\in \mathbf{U}$ jest wypukła, to własność ta zachodzi. Dowód można znaleźć w [Kałuszka, Krzeszowiec 2012].

9. Iteracyjność, tzn. $H(X) = H(H(X\,|\,Y))$ dla dowolnych rodzajów ryzyka X, Y.

Twierdzenie 6. Jeżeli $u \in \mathbf{U}$ i $g \in \mathbf{G}$ jest ciągła, to składka $H(X)$ jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy $g(p) = p$.

Dowód. Jeżeli $g(p) = p$, to łatwo sprawdzić, że składka jest iteracyjna (zob. [Gerber 1979]). Dla $v(x) := u(w-x)$ mamy $H(X) = v^{-1}(E_g v(X))$. Ponadto $H(X\,|\,Y) = v^{-1}(E_g(v(X)\,|\,Y))$, gdzie

$$E_g(X\,|\,Y) = \int_0^\infty g(P(X > s\,|\,Y))ds + \int_{-\infty}^0 (g(P(X > s\,|\,Y)) - 1)ds$$

$$= \int_0^\infty g(P(X > s\,|\,Y))ds - \int_0^\infty \overline{g}(P(-X \geq s\,|\,Y))ds.$$

Warunek $H(X) = H(H(X\,|\,Y))$ jest równoważny warunkowi

$$v^{-1}(E_g v(X)) = v^{-1}(E_g v(H(X\,|\,Y))) = v^{-1}(E_g(E_g(v(x)\,|\,Y))),$$

czyli iteracyjność jest równoważna temu, że

$$E_g v(X) = E_g(E_g(v(X)\,|\,Y)). \tag{22}$$

Niech $Z = v(X)$ i wektor (Z,Y) ma rozkład taki, że $P(Z=-1, Y=1) = 1/2 - a$, $P(Z=-1, Y=2) = 1/2 - b$, $P(Z=1, Y=1) = a$, $P(Z=1, Y=2) = b$ dla $0 \leq a < b \leq 1/2$. Wówczas

$$E_g Z = (1 - g(a+b))\cdot(-1) + g(a+b) = 2g(a+b) - 1,$$

$$E_g(Z\,|\,Y=1) = 2g(2a) - 1,$$

$$E_g(Z\,|\,Y=2) = 2g(2b) - 1.$$

Warunek (22) można zapisać w postaci

$$\big(1 - g(1/2)\big)g(2a) + g(1/2)g(2b) = g(a+b)$$

dla wszystkich $0 \leq a < b \leq 1/2$. Ponieważ $g(0) = 0$, więc kładąc kolejno $a = 0$ i $b = 0$, otrzymujemy

$$g(1/2)g(2b) = g(b) \text{ oraz } (1 - g(1/2))g(2a) = g(a)$$

dla wszystkich $0 \leq a < b \leq 1/2$. Zatem $g(a) + g(b) = g(a+b)$ dla $0 \leq a < b \leq 1/2$, co z symetrii daje, że

$$g(a) + g(b) = g(a+b) \tag{23}$$

dla wszystkich $0 \leq a, b \leq 1/2$. Jeśli założymy, że g jest ciągła, to jedynym rozwiązaniem (23) spełniającym warunek $g(0) = 0$ jest funkcja $g(x) = x$ dla $0 \leq x \leq 1/2$

(zob. [Kuczma 2009]). Dla $x > 1/2$ istnieją liczby $x_1, x_2 \le 1/2$ takie, że $x = x_1 + x_2$. Zatem dla $x > 1/2$ z (23) mamy $g(x) = g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2) = x$.

10. Warunek zysku netto, tzn. $H(X) \ge E(X)$.

Jeżeli własność ta jest spełniona, to oczywiście żadna firma ubezpieczeniowa nie zdecyduje się sprzedać ubezpieczenia. Podamy teraz twierdzenia, które charakteryzują warunek zysku netto przy założeniu istnienia funkcji zniekształcającej prawdopodobieństwo.

Lemat 4. Jeżeli u jest niemalejącą funkcją wypukłą, to dla dowolnej funkcji $g \in \mathbf{G}$ oraz dowolnej zmiennej losowej X takiej, że $E_g |X| < \infty$, mamy $E_g u(X) \ge u(E_g(X))$. Gdy u jest funkcją wklęsłą, to w tezie lematu otrzymujemy nierówność przeciwną.

Dowód lematu można znaleźć w [Heilpern 2003].

Twierdzenie 6. Jeżeli $u \in \mathbf{U}$ jest wklęsła, $g \in \mathbf{G}$ jest taka, że $g(p) \le p$ dla $p \in [0,1]$, to $H(X) \ge E(X)$.

Oczywiście w ogólności warunek $H(X) \ge E(X)$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $E(X) \le w - u^{-1}(E_g u(w - X))$. Ponieważ prawa strona tego wzoru może być trudna do obliczenia, więc podajemy różne warunki wystarczające dla nieujemnego ładowania bezpieczeństwa.

Twierdzenie 7. Załóżmy, że $u \in \mathbf{U}$, $g \in \mathbf{G}$ zaś jest nieujemną i ograniczoną zmienną losową oraz $w \le s = \sup X$. Wówczas składka $H(X)$ spełnia warunek $H(X) \ge E(X)$, gdy

$$E(X) \le w - u^{-1}[g(P(X < w)\ u(w) + \overline{g}(P(X = s)\ u(w - s)]. \qquad (24)$$

Gdy X przyjmuje jedynie wartości ze zbioru $\{0, w, s\}$, to warunek (24) jest równoważny warunkowi $H(X) \ge E(X)$.

Twierdzenie 8. Załóżmy, że $u \in \mathbf{U}$, zaś $g \in \mathbf{G}$. Wówczas $H(X) \ge E(X)$, gdy

$$E(X) \le w - u^{-1}(u(w)g(P(X < w))). \qquad (25)$$

Gdy $P(X = 0) + P(X = w) = 1$, to warunek (25) jest równoważny warunkowi $H(X) \ge E(X)$.

Zauważmy, że w twierdzeniu 8 nie zakładamy, że zmienna losowa X jest ograniczona. Podamy teraz warunek wystarczający na to, że klient się nie ubezpieczy, gdy jako funkcję użyteczności przyjmuje funkcję Kahnemana-Tversky'ego.

Twierdzenie 9. Niech $g \in \mathbf{G}$, zaś $u \in \mathbf{U}$ będzie funkcją wypukłą dla argumentów dodatnich, wklęsłą dla argumentów ujemnych oraz $u'_+(0) < u'_-(0)$. Niech $0 \le X \le s$, gdzie $s > w$. Jeśli

$$E(X) \ge w - u^{-1}\Big(\big(u(w)/w\big)g(P(X \le w)) - u'_-(0)E_{\overline{g}}(X - w)_+\Big), \qquad (26)$$

to $H(X) < E(X)$. Gdy $P(X = 0) + P(X = w) = 1$, to warunek (26) równoważny jest $H(X) < E(X)$.

Dowody twierdzeń 6-9 można znaleźć w [Kałuszka, Krzeszowiec 2012].

Literatura

Abdellaoui M. (2002), *A genuine rank-dependent generalization of the von Neumann- Morgenstern expected utility theorem*, „Econometrica" no 70.

Allais M. (1953), *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique de postulats et axiomes de l'ecole americaine*, „Econometrica" no 21.

Denneberg D. (1994), *Lectures on Non-additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Friedman M., Savage L.P. (1948), *The utility analysis of choices involving risk*, „Journal of Political Economy" no 56.

Gerber H.U. (1979,) *An introduction to Mathematical Risk Theory*, Homewood, Philadelphia.

Gillen B.J., Markowitz H.M. (2010), *A Taxonomy of Utility Functions*, [w:] *Variations in Economic Analysis*, red. J.R. Aronson, H.L. Parmet, R.J. Thornton, Springer, New York.

Goovaerts M.J., De Vylder F., Haezendonck J. (1984), *Insurance Premiums: Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam.

Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. (1952), *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, 2nd edition, Reprinted 1988.

Heilpern S. (2003), *A rank-dependent generalization of zero utility principle*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 33.

Kahneman D., Tversky A. (1979), *Prospect theory: An analysis of decisions under risk*, „Econometrica" no 47.

Kałuszka M., Krzeszowiec M. (2012), *Mean-value principle under Cumulative Prospect Theory* (praca przyjęta do „ASTIN Bulletin").

Kőszegi B., Rabin M. (2007), *Reference-dependent risk attitudes*, „American Economic Review" no 97.

Kuczma M. (2009), *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Second edition, Birkhäuser, Berlin.

Luan C. (2001), *Insurance premium calculations with anticipated utility theory*, „ASTIN Bulletin" no 31.

Markowitz H.M. (1952), *The utility of wealth*, „Journal of Political Economy" no 60.

Polyanin A.D., Manzhirov A.H. (2007), *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, London.

Pratt J.W. (1964), *Risk aversion in the small and in the large*, „Econometrica" no 32.

Puppe C. (1991), *Distorted Probabilities and Choice Under Risk*, Springer, Berlin.

Rabin M. (2000), *Risk aversion and expected-utility theory: A calibration theorem*, „Econometrica" no 68.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, New York.

Schmidt U., Starmer C., Sugden R. (2008), *Third-generation prospect theory*, „Journal of Risk and Uncertainty" no 36.

Schmidt U., Zank H. (2007), *Linear cumulative prospect theory with applications to portfolio selection and insurance demand*, „Decisions in Economics and Finance" no 30.

Segal U. (1989), *Anticipated utility theory: a measure representation approach*, „Annals of Operations Research" no 19.

Wang S. (1996), *Premium calculation by transforming the layer premium density*, „ASTIN Bulletin" no 26.

Yaari M.E. (1987), *The dual theory of choice under risk*, „Econometrica" no 55.

PROPERTIES OF MEAN-VALUE PRINCIPLE UNDER RANK-DEPENDENT UTILITY MODEL

Summary: The aim of the article is to present the properties of the mean-value principle under rank-dependent utility theory with possibly weakest assumptions about the utility function. So far, the analysis of principles based on the theory of expected utility (mean-value and zero utility principle) has used the utility function which is concave and twice differentiable. However, these assumptions are far away from the reality, which is supported by numerous papers of economists written between 1979 and 2010. The next important observation is that probabilities while making decisions under risk and uncertainty are not linear but they are distorted by some non-decreasing function. The expected utility is then evaluated using Choquet integral. From the mathematical point of view, the proofs of theorems rely on solving functional equations instead of differential equations.

Key words: mean-value principle, distorted probability, theory of perspective.