Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją

Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Zbigniew Michna
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

PROCESY LÉVY'EGO W MODELACH UBEZPIECZENIOWYCH

Streszczenie: W pracy dokonujemy przeglądu koncepcji teorii ryzyka wykorzystujących procesy Lévy'ego. Kładziemy nacisk na model oparty na procesie gamma i analizujemy prawdopodobieństwo ruiny w tym modelu. Podajemy asymptotyczne własności prawdopodobieństwa ruiny i dokładny wzór na prawdopodobieństwo ruiny dla procesu gamma. Ponadto rozważamy tzw. podporządkowane procesy Lévy'ego. Badamy również rozkład supremum dla pewnych procesów będących całkami stochastycznymi jako pewne uogólnienie poprzednich modeli.

Słowa kluczowe: proces Lévy'ego, α-stabilny proces Lévy'ego, proces gamma, prawdopodobieństwo ruiny na skończonym horyzoncie czasu, prawdopodobieństwo ruiny na nieskończonym horyzoncie czasu.

1. Wstęp

Ryzyko pojawia się w każdej działalności człowieka związanej z jego życiem prywatnym i zawodowym. Podmioty gospodarcze i osoby fizyczne mogą jednak zredukować straty spowodowane przez czynniki losowe przez ubezpieczenie się w danej firmie ubezpieczeniowej. Zatem zakład ubezpieczeń ma na celu redukcję strat poniesionych przez ubezpieczonych. Stąd wielkość wypłat firmy ubezpieczeniowej (główne koszty, jakie ponosi firma ubezpieczeniowa – roszczenia) jest całkowicie losowo uwarunkowana i w przeciwieństwie do innych działalności gospodarczych nie zależy np. od struktury organizacyjnej czy mocy technologicznych. Nie oznacza to jednak, że nie można redukować i kontrolować ryzyka firmy ubezpieczeniowej (zarządzać ryzykiem firmy ubezpieczeniowej). Ryzyko ubezpieczyciela (zakładu ubezpieczeń) jest określone m.in. przez tzw. prawdopodobieństwo ruiny. Szacowanie prawdopodobieństwa ruiny danej firmy ubezpieczeniowej czy danego portfela ubezpieczeń ma na celu zbadanie poziomu ryzyka, jak również służy do wyznaczania kapitału początkowego i wielkości składki, jaką powinni płacić ubezpieczeni. Zatem kapitał początkowy i wielkość składki są podstawowymi narzędziami mogącymi zredukować ryzyko (prawdopodobieństwo ruiny). Poza tymi dwoma narzędziami istnieje jeszcze możliwość reasekuracji, czyli wtórnego ubezpieczenia się ubezpieczyciela, jak również możliwość inwestycji bieżącego kapitału ubezpieczyciela. Tak więc zarządzający ryzykiem ubezpieczyciela ma do dyspozycji kilka narzędzi, które mogą zmniejszyć prawdopodobieństwo ruiny. Jednak aby zarządzać ryzykiem ubezpieczyciela, należy przede wszystkim zbadać poziom ryzyka, czyli wyznaczyć (oszacować) prawdopodobieństwo ruiny firmy ubezpieczeniowej czy danego ubezpieczenia (portfela ubezpieczeń). Analiza i aproksymacja tzw. prawdopodobieństwa ruiny, tj. prawdopodobieństwa, z jakim proces nadwyżki finansowej firmy ubezpieczeniowej staje się ujemny, jest głównym zadaniem teorii ryzyka. Ryzyko ubezpieczyciela, które jest określone przez prawdopodobieństwo ruiny firmy ubezpieczeniowej, powinno podlegać badaniu i ocenie nie tylko ze względu na dobro ubezpieczyciela i ubezpieczonych, ale również całego rynku ubezpieczeń. W celu oszacowania prawdopodobieństwa ruiny zarządzający ryzykiem musi wykonać trzy podstawowe czynności. Po pierwsze, należy zebrać dane z pewnego okresu opisujące wielkości roszczeń i momenty ich pojawienia się. Dane te należy poddać obróbce statystycznej, tzn. należy dopasować do danych odpowiedni rozkład wielkości roszczeń i dobrać odpowiedni proces liczący roszczenia i opisujący momenty ich pojawienia się. Można jeszcze zbadać zależność pomiędzy wielkościami kolejnych roszczeń, jak również uwzględnić losową wielkość płaconych składek. Na tym etapie liczba testów statystycznych jest zależna od modelu ubezpieczeniowego, który musimy dobrać do opisu. Tak więc trzeci etap to dobranie do danych odpowiedniego modelu ubezpieczeniowego. Tu z pomocą przychodzi matematyka ubezpieczeniowa, a właściwie teoria ryzyka ubezpieczeniowego. Dopasowanie odpowiedniego modelu jest zależne od stopnia idealizacji, jaki przyjmujemy, i możliwości obliczeniowych, jakie mamy, jak również dokładności, z jaką chcemy określić prawdopodobieństwo ruiny.

Celem tego artykułu jest zaprezentowanie pewnych modeli ubezpieczeniowych, które mogą służyć do szacowania prawdopodobieństwa ruiny. Rozważymy modele oparte na procesach Lévy'ego. Należy tu jeszcze podkreślić, że modelowanie i szacowanie ryzyka dla całej działalności zakładu ubezpieczeń jest w praktyce niemożliwe. Jednak badanie prawdopodobieństwa ruiny dla poszczególnych portfeli czy ubezpieczeń powinno być wykorzystane w zarządzaniu ryzykiem do pewnych decyzji, które poprawiają bezpieczeństwo finansowe firmy ubezpieczeniowej i chronią przed upadłością.

Przypomnijmy, czym jest proces Lévy'ego.

Definicja 1. *Proces stochastyczny* $\{Z(t),\ 0 \le t < \infty\}$ *o wartościach w* $\mathbb{R}^d$ *jest procesem L´evy'ego, jeśli*

- $Z(0) = 0$ *p.w.,*
- *Z ma niezależne przyrosty,*
- $Z(t) - Z(s)$ *ma taki sam rozkład jak* $Z(t-s)$, *tzn. Z ma stacjonarne przyrosty,*
- *Z jest stochastycznie ciągły.*

Struktura procesów Lévy'ego nie jest skomplikowana. Reprezentacja Lévy'ego--Itô pokazuje budowę stochastyczną procesów Lévy'ego, zgodnie z którą proces Lévy'ego może być przedstawiony następująco

$$Z(t) = B(t) + \int_{|y|<1} y(N_t(dy) - t\nu(dy)) + \int_{|y|\geq 1} yN_t(dy) + at,$$

gdzie $B(t)$ jest procesem Wienera, N jest procesem punktowym generowanym przez skoki Z: $N = \sum_{\{t:\Delta Z(t)\neq 0\}} \delta_{(t,\Delta Z(t))}$. N jest losową miarą Poissona na $[0, \infty) \times \{\mathbb{R}^d \setminus 0\}$ ze średnią $ds \times \nu\,(dy)$, gdzie $\nu\,(dy)$ jest tzw. miarą Lévy'ego na $\mathbb{R}^d \setminus 0$ i $a \in \mathbb{R}^d$ i $N_t(A) = N([0,t] \times A)$.

Podstawowym procesem Lévy'ego w teorii ryzyka jest złożony proces Poissona. Model ten został zaproponowany prze Lundberga i Craméra i nazywany jest klasycznym modelem Craméra-Lundberga. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona o intensywności λ, $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ ciągiem dodatnich zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie F. Ponadto ciąg $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest niezależny od procesu Poissona $N(t)$. Proces

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$$

jest tzw. klasycznym procesem ryzyka, gdzie $c > 0$. Natomiast

$$S(t) = u - R(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k - ct$$

jest procesem nadwyżki roszczeń. Proces $S(t)$ jest procesem Lévy'ego z miarą Lévy'ego $\nu\,(dy) = \lambda\; dF\,(y)$.

Inne procesy związane z procesami Lévy'ego otrzymujemy przez przejścia graniczne procesu nadwyżki roszczeń. Otrzymujemy wtedy:
- ruch Browna – aproksymacja dyfuzyjna,
- α -stabilny ruch Lévy'ego,
- ułamkowy ruch Browna,
- subordynowany (podporządkowany) ruch Browna,
- subordynowany α -stabilny ruch Lévy'ego,
- proces gamma,
- dowolny czysto skokowy proces Lévy'ego (zob. Michna [2011b]).

2. Proces gamma jako aproksymacja klasycznego procesu ryzyka

Proces gamma jest procesem Lévy'ego z jednowymiarowym rozkładem gamma. Dokładniej proces stochastyczny $Z = \{Z\,(t),\ 0 \leq t < \infty\}$ jest procesem gamma z parametrem kształtu a i parametrem skali b, jeśli jest procesem Lévy'ego i $Z\,(1)$

ma rozkład gamma z parametrem kształtu $a > 0$ i parametrem skali $b > 0$, tzn. rozkład z gęstością

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } y \leq 0 \\ \frac{1}{b^a \Gamma(a)} y^{a-1} exp\left(-\frac{y}{b}\right) & \text{jeśli } y > 0 \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie Γ jest funkcją gamma. Wtedy $Z(t)$ ma rozkład gamma z parametrem kształtu at i parametrem skali b.

Proces gamma można otrzymać jako granicę złożonych procesów Poissona (klasycznych procesów skumulowanych roszczeń).

Niech $\{Y_k^{(p)}\}$ będzie ciągiem wielkości kolejnych roszczeń niezależnych między sobą o wspólnym rozkładzie (dystrybuancie) $F^{(p)}$ zależnym od parametru $p > 0$. Dokładniej

$$F^{(p)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \quad y \leq p \\ 1 - \frac{Q(y)}{Q(p)} & \text{jeśli } \quad y > p, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie

$$Q(y) = \int_y^\infty \frac{a}{x} e^{-\frac{x}{b}} dx. \tag{3}$$

Ponadto załóżmy, że $N^{(p)}(t)$ jest procesem Poissona o intensywności $Q(p)$ i niezależnym od ciągu $\{Y_k^{(p)}\}_{k=1}^{\infty}$. Zdefiniujmy proces skumulowanych roszczeń

$$S^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{N^{(p)}(t)} Y_k^{(p)}. \tag{4}$$

Stwierdzenie 1. *Jeśli* $p \downarrow 0$, *to*

$$S^{(p)} \Rightarrow Z$$

słabo w topologii Skorochoda, gdzie Z *jest procesem gamma.*

3. Prawdopodobieństwo ruiny dla procesu gamma

Najpierw rozpatrzymy prawdopodobieństwo ruiny na nieskończonym horyzoncie czasu, tzn.

$$\Psi(u) = P(sup_{t>0} Z(t) - ct > u), \tag{5}$$

gdzie $c > 0$. Zajmiemy się asymptotycznymi własnościami prawdopodobieństwa (5). Skorzystamy tu z wyniku autorów, takich jak Dufresne, Gerber i Shiu [1991], gdzie wyprowadzona jest dokładna asymptotyka prawdopodobieństwa (5). Autorzy korzystają tu z tego, że proces gamma jest granicą złożonego procesu Poissona. Dowód bazuje na wynikach dla złożonego procesu Poissona (tw. Craméra-Lundberga).

Twierdzenie 1 (Dufresne, Gerber i Shiu). *Niech Z będzie procesem gamma z parametrami kształtu a i skali b . Wtedy*

$$\Psi(u) \cong C\, exp\left(-\frac{R}{b}u\right),$$

gdzie: r = R jest rozwiązaniem równania

$$\frac{1}{1-r} = exp\left(\frac{rc}{ab}\right)$$

i

$$C = \frac{(c-ab)(1-R)}{ab-c(1-R)}.$$

Następnie znajdziemy asymptotykę prawdopodobieństwa ruiny na skończonym horyzoncie, tzn.

$$\Psi(u,T) = P(\sup_{t\le T} Z(t) - ct > u).$$

Skorzystamy tu z wyniku Michny i Werona [2007].

Twierdzenie 2 (Michna i Weron). *Niech Z będzie procesem gamma z parametrem kształtu a i skali b. Wtedy dla dowolnego T* > 0

$$C_1 \le \liminf_{u\to\infty} \frac{\Psi(u,T)}{g(u)} \le \limsup_{u\to\infty} \frac{\Psi(u,T)}{g(u)} \le C_2, \tag{6}$$

gdzie

$$g(u) = u^{aT-1}\exp(-u/b), \tag{7}$$

$$C_1 = \frac{\exp(-cT/b)}{b^{aT-1}\Gamma(aT)} \tag{8}$$

i

$$C_2 = \frac{1-\exp(-cT/b)}{cTb^{aT-2}\Gamma(aT)}. \tag{9}$$

Dla procesu gamma znany jest wzór na prawdopodobieństwo ruiny na skończonym horyzoncie (zob. [Dickson, Waters 1993]). Podobnie, dokładny wzór można podać dla α-stabilnego procesu Lévy'ego i ogólniej dla spektralnie dodatnich procesów Lévy'ego (zob. [Michna 2011a; 2011b]).

Twierdzenie 3 (Dickson i Waters)

$$\begin{aligned}\Psi(u,T) &= P(Z(T) - cT > u)\\ &\quad + c\int_0^T P\big(Z(T-s) \le c(T-s)\big)\, f(u+cs,s)\,ds\\ &\quad - ab\int_0^T P\big(Z(T-s+1/a) \le c(T-s)\big)\, f(u+cs,s)\,ds,\end{aligned}$$

gdzie

$$f(y,s)=\frac{1}{b^{as}\Gamma(as)}\,y^{as-1}exp\left(-\frac{y}{b}\right)$$

i

$$P(Z(s)\le x)=\frac{1}{b^{as}\Gamma(as)}\int_0^x y^{as-1}\,exp\left(-\frac{y}{b}\right)dy.$$

4. Teoretyczne uogólnienia i zagadnienia teorii fluktuacji

Niech

$$S_n(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}U_k-c_n t$$

będzie ciągiem procesów nadwyżki roszczeń takim, że $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ należy do obszaru przyciągania rozkładu α-stabilnego z $0<\alpha\le 2$, parametrem skośności β i dla $\alpha=1$ z $\beta=0$, $N(t)$ liczącym procesem odnowy skonstruowanym z ciągu $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ należącego do obszaru przyciągania rozkładu γ-stabilnego z $0<\gamma<1$. Wtedy w granicy otrzymujemy podporządkowany α-stabilny proces Lévy'ego (zob. [Magdziarz i in. 2007]).

Twierdzenie 4. (Magdziarz, Miśta, Weron). *Przy powyższych założeniach i* $\lim_{n\to\infty} n^{-\gamma/\alpha}c_n=c$ *zachodzi*

$$n^{-\gamma/\alpha}S_n(t)\Rightarrow Y(T(t))-ct$$

w sensie rozkładów skończenie wymiarowych, gdy $n\to\infty$. *Proces* T *jest odwrotnym* γ-*stabilnym subordynatorem z* $0<\gamma<1$ *i* Y *jest* α-*stabilnym procesem Lévy'ego z* $0<\alpha\le 2$, *parametrem skali* $\sigma>0$, *parametrem skośności* β *i dla* $\alpha=1$ *z* $\beta=0$.

Przy powyższych założeniach i dla $0<\alpha<2$, $\beta>-1$ możemy znaleźć asymptotykę prawdopodobieństwa ruiny na skończonym horyzoncie czasu (zob. [Michna 2008b])

$$P\left(\sup_{t\le 1} Y(T(t))-ct>u\right)\cong P(Y(T(1))>u)\cong u^{-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}C_\alpha\frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha,$$

gdzie C_α jest pewną stałą zależną od α.

Rozważmy teraz pewne teoretyczne uogólnienia powyższego modelu, tzn. subordynowanego α-stabilnego procesu Lévy'ego.

Niech N będzie procesem Poissona o intensywności $\lambda>0$, Y α-stabilnym procesem Lévy'ego z $0<\alpha<2$, parametrem skali $\sigma>0$, parametrem skośności $\beta>-1$ i dla $\alpha=1$ z $\beta=0$ i d będzie rzeczywistą ograniczoną funkcją określoną na [0, 1]. Wtedy (zob. [Michna 2008b])

$$P\left(\sup_{t\leq 1} Y(N(t)) + d(t) > u\right) \cong P(Y(N(1)) > u) \cong u^{-\alpha}\lambda\, C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha.$$

Niech Z będzie procesem gamma z parametrem kształtu $a > 0$ i parametrem skali $b > 0$, Y jak wyżej, wtedy (zob. [Michna 2008b])

$$P\left(\sup_{t\leq 1} Y(Z(t)) + d(t) > u\right) \cong P(Y(Z(1)) > u) \cong u^{-\alpha} abC_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha.$$

Rozważmy teraz pewne całki stochastyczne względem α-stabilnego ruchu Lévy'ego. Niech

$$X(t) = \int_0^t B_H(s)dY(s) - ct,$$

gdzie $c \in R$, B_H jest standardowym ułamkowym ruchem Browna z $0 < H \leq 1$ i Y jest symetrycznym α-stabilnym procesem Lévy'ego z $1 < \alpha < 2$ i B_H jest niezależny od Y. Wtedy (zob. [Michna 2008a]).

$$P\left(\sup_{t\leq 1}\int_0^t B_H(s)dY(s) - ct > u\right) \cong \frac{1}{2}u^{-\alpha}\sigma^\alpha C_\alpha \frac{2^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{(1+\alpha H)\sqrt{\pi}}.$$

Rozważmy następujący proces

$$X(t) = \int_0^t (Z(s) - ct)\, dY(s),$$

gdzie c jest mierzalną funkcją całkowalną z kwadratem na [0, 1], Z jest procesem gamma z parametrem kształtu $a > 0$ i parametrem skali $b > 0$ i Y jest symetrycznym α-stabilnym procesem Lévy'ego z $1 < \alpha < 2$ i proces Y jest niezależny od Z. Ponadto załóżmy

$$\sup_{t\leq 1} X(t) < \infty \text{ p.w.}$$

Wtedy

$$P\left(\sup_{t\leq 1}\int_0^t (Z(s) - c(s))\, dY(s) > u\right) \cong$$

$$\cong u^{-\alpha}\sigma^\alpha b^\alpha \frac{C_\alpha}{2}\int_0^1 E|Z(s) - c(s)|^\alpha ds.$$

Jeśli $c \equiv 0$, to

$$\int_0^1 E|Z(s) - c(s)|^\alpha ds = \Gamma(\alpha)\int_0^1 \frac{1}{B(as,\alpha)}ds,$$

gdzie $B(x, y)$ jest funkcją beta.

Literatura

Cižek P., Härdle W., Weron R. (2005), *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Dickson D.C.M., Waters H.R. (1993), *Gamma processes and finite time survival probabilities*, „Astin Bulletin" no 23.

Dufresne F., Gerber H.U., Shiu E.S.W. (1991), *Risk theory with the gamma process*, „Astin Bulletin" no 21.

Magdziarz M., Miśta P., Weron A. (2007), *Anomalous diffusion approximation of risk processes in operational risk of non-financial corporations*, „Acta Physica Polonica B" no 38.

Michna Z. (2002), *Modele graniczne w teorii ryzyka ubezpieczeniowego*, UE, Wrocław.

Michna Z. (2008a), *Asymptotic behavior of anomalous diffusions driven by α-stable noise,* „Acta Physica Polonica B" no 39.

Michna Z. (2008b), *Asymptotic behavior of the supremum tail probability for anomalous diffusions*, „Physica A" 387.

Michna Z. (2011a), *Formula for the supremum distribution of a spectrally positive α-stable Lévy process*, „Statistics and Probability Letters" no 81.

Michna Z. (2011b), *Formula for the supremum distribution of a spectrally positive Lévy process,* Arxiv preprint arXiv:1104.1976, 2011 – arxiv.org.

Michna Z., Weron A. (2007), *Asymptotic behavior of the finite ruin probability of a gamma Lévy process,* „Acta Physica Polonica B" no 38.

LÉVY PROCESSES IN INSURANCE MODELS

Summary: In this article we review the concept of Lévy processes in risk theory. We emphasize the risk model with gamma process analyzing ruin probability of gamma process. We give an asymptotic behaviour of ruin probabilities and exact formula for finite time ruin probability for gamma process. We also consider models described by the so-called subordinated Levy processes. As a theoretical generalization we investigate supremum distribution of certain stochastic integrals.

Key words: Lévy process, α-stable Lévy process, gamma process, finite time ruin probability, infinite time ruin probability, asymptotic behaviour of ruin probability, subordinated process, stochastic integral.