Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

pod redakcją

Walentego Ostasiewicza

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Zbigniew Palmowski

Redaktor Wydawnictwa
Aleksandra Śliwka

Redakcja techniczna
Barbara Łopusiewicz

Korektor
Barbara Cibis

Łamanie
Beata Mazur

Projekt okładki
Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-186-7

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 207
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Agnieszka Mruklik
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

UBEZPIECZENIA NA ŻYCIE ZE STOCHASTYCZNĄ TECHNICZNĄ STOPĄ OPROCENTOWANIA – ZASTOSOWANIE MODELU HULLA I WHITE'A

Streszczenie: Uzyskano zależności na jednorazową składkę netto oraz wariancję obecnej wartości przyszłego świadczenia dla klasycznych ubezpieczeń na życie. Kalkulację wymienionych wielkości przeprowadzono z uwzględnieniem stochastycznej technicznej stopy oprocentowania. Funkcje biometryczne wyrażono *explicite* albo przez wielkości występujące w tablicach trwania życia. Obliczenia przeprowadzono dla przypadku, gdy suma świadczenia wynosi jedną jednostkę pieniężną, a świadczenie jest wypłacane w momencie zajścia zdarzenia ubezpieczeniowego. Rozpatrzono zmienną intensywność oprocentowania będącą sumą zmiennej losowej o zadanym rozkładzie i procesu stochastycznego, o którym założono, iż jest opisany modelem Hulla i White'a.

Słowa kluczowe: chwilowa natychmiastowa stopa procentowa, model Hulla i White'a, momenty obecnej wartości przyszłego świadczenia w ubezpieczeniu na życie, tablice trwania życia.

1. Wstęp

W obliczeniach aktuarialnych korzysta się z założeń demograficznych oraz finansowych. Założenia finansowe dotyczą m.in. tzw. technicznej stopy oprocentowania, uwzględnianej przy kalkulacji składki ubezpieczeniowej. Cechą charakterystyczną ogółu uproszczonych modeli ubezpieczeń na życie jest to, iż wspomniana stopa oprocentowania jest deterministyczna i stała w całym okresie ochrony ubezpieczeniowej. Dzieje się tak bez względu na długość tego przedziału czasowego, a może to być nawet kilkadziesiąt lat, jeżeli za jednostkę obierzemy jeden rok. Wspomniana stopa procentowa stanowi wynik pewnych uśrednień zrealizowanych w przeszłości stóp procentowych oraz przewidywań ich kształtowania się w przyszłości. Techniczną stopę oprocentowania ustala się na bezpiecznie niskim poziomie z dwóch powodów. Po pierwsze, przeszacowanie możliwości osiągnięcia zysku z posiadanego kapitału spowoduje stratę dla zakładu ubezpieczeń. Po drugie, w wyniku niedoszacowania ubezpieczenia staną się nie dość konkurencyjne na rynku finansowym.

Niniejszy artykuł prezentuje modele ubezpieczeń na życie z uwzględnieniem losowo zmieniającej się w czasie technicznej stopy oprocentowania, czyli będącej procesem stochastycznym. Wszystkie metody stochastycznego modelowania oprocentowania, a więc sposoby wykorzystujące teorię procesów stochastycznych, można podzielić na dwie grupy (zob. [Parker 1993b; Ostasiewicz 2004]). Jedną z nich tworzą metody modelujące intensywność oprocentowania. Drugą zaś – metody modelujące funkcję intensywności oprocentowania. Ten oto artykuł reprezentuje pierwsze podejście. Rozpatrywany jest model Hulla i White'a stopy krótkoterminowej. W klasie tego typu modeli jest on jednym z najbardziej popularnych, a co za tym idzie – dobrze zbadanych i opisanych pod kątem własności. Motywami rozważenia akurat tego modelu są jego ważne teoretyczne (m.in. dość duża ogólność modelu, znajomość rozkładów probabilistycznych) i praktyczne (m.in. możliwość kalibracji) zalety.

Problematyka modelowania ubezpieczeń i rent życiowych w zmieniającym się środowisku ekonomicznym była i nadal pozostaje przedmiotem badań wielu naukowców. W światowej literaturze fachowej odnaleźć można liczne publikacje poświęcone temu zagadnieniu. Wymieńmy chociażby prace Bellhouse'a i Panjera [1980], Giaccotto [1986], Beekmana i Shiu [1988], Freesa [1990], Norberga [1990; 1991; 1993], Beekmana i Fuellinga [1990; 1991; 1993], Papachristou i Watersa [1991], Parkera [1993a; 1994] czy autorów, takich jak Perry, Stadje i Rami [2003], Koch i De Schepper [2007] oraz Jang [2007].

2. Chwilowa natychmiastowa stopa procentowa opisana modelem Hulla i White'a

Chwilowa natychmiastowa stopa procentowa (inne określenia to: krótkoterminowa stopa procentowa, stopa kasowa, stopa spot) $r(t)$ (*instantaneous interest rate*, *short term rate, spot rate*) reprezentuje oprocentowanie pożyczki rozpoczętej dzisiaj i trwającej przez dowolnie mały okres $[t, t + dt]$. Proces $r(t)$ wyraża bieżący stan rynku stóp procentowych. Zakładamy, że $r(t)$ jest jednowymiarowym procesem dyfuzji. Przypomnijmy, że procesem dyfuzji nazywa się dowolny proces stochastyczny o mocnej własności Markowa i ciągłych trajektoriach. Poglądowo mówiąc, należy stwierdzić, że procesy te mają własność ciągłości zmian w tym sensie, że prawdopodobieństwo wystąpienia istotnych (dużych) zmian w krótkim czasie jest bardzo małe.

Załóżmy, że dynamika procesu $r(t)$ opisana jest następującym stochastycznym równaniem różniczkowym

$$dr(t) = \psi(r(t), t)dt + \rho(r(t), t)dW(t), \tag{1}$$

gdzie: $\psi(r(t), t)$ – chwilowy dryf procesu $r(t)$,

$[\rho(r(t), t)]^2$ – chwilowa wariancja procesu $r(t)$,

W – jednowymiarowy, standardowy proces Wienera.

Tak określone modele stopy krótkoterminowej tworzą liczną klasę. Są one oparte na pojedynczym źródle niepewności (procesie Wienera). Dlatego też zaliczamy je do klasy modeli jednoczynnikowych, zwanych również jednofaktorowymi.

Istotnym założeniem jest m.in., by funkcje ψ i ρ były dostatecznie regularne, np. były lipschitzowskie, i spełniały warunek liniowego wzrostu ze względu na pierwszą zmienną. Wówczas, przyjmując jeszcze pewne dodatkowe techniczne założenia, stwierdzamy, że równanie (1) z warunkiem początkowym $r_0 > 0$ ma jednoznaczne (silne) rozwiązanie.

Wspomnijmy teraz nieco o krótkoterminowej stopie procentowej w kontekście rynku stóp procentowych. Mianem struktury terminowej stóp procentowych (*term structure of interest rates*) określa się wpływ czasu na stopy procentowe. Pojęcie to jest zazwyczaj definiowane jako zależność stóp zwrotu wolnych od ryzyka obligacji zerokuponowych od ich terminów wykupu (zob. [Weron, Weron 1999, s. 203]).

Jak już nadmieniliśmy, proces $r(t)$ wyraża bieżący stan rynku stóp procentowych. Większą porcję informacji zawierają inne matematyczne sposoby opisania struktury terminowej tego rynku:

- krzywa dochodowości $YTM(t, T)$ (*yield curve*),
- proces ceny obligacji zerokuponowej $P(t, T)$, gdzie $P(t, T)$ – cena w chwili t zerokuponowej obligacji o wartości nominalnej 1 i terminie wykupu T,
- *proces chwilowej stopy terminowej* $f(t, T)$ (*instantaneous forward rate*). $f(t, T)$ reprezentuje oprocentowanie pożyczki trwającej dowolnie krótko $[T, T + dt]$ w przyszłości.

Trzy ostatnie metody charakteryzacji rynku stóp procentowych są równoważne, co wynika z poniższych wzorów:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T},$$

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)\,ds\right\},$$

$$YTM(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)\,ds.$$

Ponadto prawdziwa jest równość $f(t, t) = r(t)$. Chwilową stopę forward $f(t, \cdot)$ można interpretować jako oczekiwaną przez rynek w chwili t ewolucję stopy $r(t)$. Niepewność przyszłych reakcji rynku na różne, opcjonalne bodźce natury społeczno-ekonomicznej lub politycznej sprawia, iż $f(t, T)$ traktuje się jako proces stochastyczny z nielosowym warunkiem początkowym $f(0, T)$. Analogiczna argumentacja przemawia za losowością $r(t)$ oraz $P(t, T)$.

Powróćmy teraz do problematyki matematycznej formy chwilowej natychmiastowej stopy procentowej $r(t)$. Rozpatrzmy zatem konkretny model, a mianowicie model Hulla i White'a (inna nazwa to rozszerzony bądź też uogólniony model Vasicka, zob. [Hull, White 1990]) zdefiniowany przez równanie różniczkowe postaci

$$dr(t) = [\theta(t) - \phi(t)r(t)]dt + \gamma(t)dW(t), \tag{2}$$

gdzie $r(0) = r_0$.

Model Hulla i White'a, tak jak wszystkie modele gaussowskie, dopuszcza przyjmowanie przez stopę procentową ujemnych wartości. Własność ta powoduje występowanie możliwości arbitrażu (tzn. możliwości osiągania nieograniczonego zysku bez ponoszenia ryzyka) w tym modelu. Mogą się również pojawić inne mankamenty. Wśród nich chociażby zdarzenie polegające na tym, że $P(t, T) > 1$ dla pewnych $t < T$. Niemniej model ten ma również niebagatelne atuty. Otóż współczynniki w opisującym go równaniu dyfuzji są zależne od czasu, a to jest zgodne z wymogami praktycznych zastosowań. Oprócz tego ważną cechą rozważanego modelu jest możliwość jego dopasowania (czyli tzw. kalibracji) nie tylko do początkowej struktury terminowej danej na podstawie obserwacji rynku obligacji, ale także do całej krzywej rentowności. Takie dopasowanie można osiągnąć przez odpowiedni wybór funkcji θ, ϕ i γ (zob. [Jakubowski i in. 2003, s. 236]). Ponadto w niektórych sytuacjach model Hulla i White'a pozwala uzyskać analityczne rozwiązania na ceny większości typowych instrumentów pochodnych (szczególnie dla obligacji zerokuponowej i opcji na te obligacje). W istotny sposób wpływa to na możliwość zastosowania danego modelu w praktyce.

Zauważmy, że w rozważanym przez nas przypadku funkcja intensywności oprocentowania (funkcja intensywności akumulacji), oznaczona jako $X(t)$, również jest funkcją losową, czyli procesem stochastycznym. Jeżeli $r(t)$ jest ciągłym (względem czasu) procesem stochastycznym, to $X(t) = \int_0^t r(s)ds$.

Rozwiązując równanie (2), a następnie całkując obustronnie po przedziale $[0, t]$ $[0, t]$, otrzymujemy

$$X(t) = r_0\, A(0,t) + \int_0^t \theta(s)A(s,t)ds + \int_0^t \gamma(s)A(s,t)dW(s),$$

gdzie

$$A(s,t) = \int_s^t \exp\left\{- \int_s^\tau \phi(z)dz\right\} d\tau. \tag{3}$$

$X(t)$ jest procesem gaussowskim ze średnią $\mu_{\{HW\}}(t)$ i wariancją $\sigma^2_{\{HW\}}(t)$ wyrażonymi następująco

$$\begin{cases} \mu_{\{HW\}}(t) = r_0\, A(0,t) + \displaystyle\int_0^t \theta(s)A(s,t)\,ds, \\ \sigma^2_{\{HW\}}(t) = \displaystyle\int_0^t \gamma^2(s)A^2(s,t)\,ds. \end{cases}$$

Zauważmy, że cztery popularne modele krótkoterminowej stopy procentowej są szczególnymi przypadkami modelu Hulla i White'a (zob. np. [Koch, De Schepper 2007]). Mowa mianowicie o modelu Browna, modelu Ho-Lee, modelu Vasicka i moście Browna.

Otóż przyjmując, że $\phi(t) \equiv 0$ oraz $\theta(t)$ i $\gamma(t)$ są stałe, tzn. $\theta(t) \equiv \theta$ i $\gamma(t) \equiv \gamma$, otrzymujemy model Browna opisany następującym stochastycznym równaniem różniczkowym

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Przy tak określonym procesie $r = \{r(t)\}$ wyznaczamy parametry procesu $X = \{x(t)\}$. Ze wzoru (3) uzyskujemy, że $A(s,t) = t - s$, a stąd

$$\begin{cases} \mu_{\{BM\}}(t) = r_0 t + \dfrac{\mu t^2}{2}, \\ \sigma^2_{\{BM\}}(t) = \dfrac{\sigma^2 t^3}{3}. \end{cases}$$

Zaletą tego modelu jest to, że wyznaczanie na jego podstawie różnych wielkości nie nastręcza raczej trudności rachunkowych.

Natomiast przyjmując, że $\phi(t) \equiv 0$ i tylko $\gamma(t)$ jest stała, otrzymujemy model Ho-Lee określony przez następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dr(t) = \theta(t)dt + \gamma dW(t).$$

W tym przypadku dla procesu $X = \{x(t)\}$ na podstawie wzoru (3) mamy, że $A(s,t) = t - s$. Stąd uzyskujemy

$$\begin{cases} \mu_{\{HL\}}(t) = r_0 t + \displaystyle\int_0^t \theta(t)(t-s)ds, \\ \sigma^2_{\{HL\}}(t) = \dfrac{\gamma^2 t^3}{3}. \end{cases}$$

Z kolei by uzyskać model Vasicka, zakładamy, że trzy funkcje $\theta(t)$, $\phi(t)$ i $\gamma(t)$ są stałe, tzn. $\theta(t) \equiv \theta$, $\phi(t) \equiv \phi$ i $\gamma(t) \equiv \gamma$, przy czym θ, ϕ, γ – stałe dodatnie. W tym modelu dynamika procesu $r(t)$ opisana jest następującym stochastycznym równaniem różniczkowym

$$dr(t) = (\theta - \phi r(t))dt + \gamma dW(t).$$

Przy tak określonym procesie $r = \{r(t)\}$ wyznaczamy parametry procesu $X = \{x(t)\}$. Wykorzystując wzór (3), obliczamy $A(s,t) = \int_s^t \exp^{-\theta(\tau - s)} d\tau$ i uzyskujemy

$$\begin{cases} \mu_{\{VA\}}(t) = \dfrac{r_0}{\phi}\left(1 - e^{-\phi t}\right) + \dfrac{\theta t}{\phi} - \dfrac{\theta}{\phi^2}\left(1 - e^{-\phi t}\right), \\ \sigma^2_{\{VA\}}(t) = \dfrac{\gamma^2}{\phi^2}\left(t - \dfrac{2}{\phi}\left(1 - e^{-\phi t}\right) + \dfrac{1}{2\phi}\left(1 - e^{-2\phi t}\right)\right). \end{cases}$$

Proces dyfuzji zaproponowany przez Vasicka ma cechę powracania do średniej (*meanreverting*). Ponadto $r(t)$ jest procesem gaussowskim o stacjonarnym rozkładzie.

Jeśli zaś $\gamma(t) \equiv 1$ i zdefiniujemy $\theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r_\varepsilon}{T-t}$ oraz $\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T-t}$, to będziemy mieć do czynienia z mostem Browna. Dla tego modelu dynamika procesu $r(t)$ może być opisana następującym stochastycznym równaniem różniczkowym

$$dr(t) = \frac{r_\varepsilon - r(t)}{T-t} dt + dW(t), \qquad 0 \leq t < T,$$

gdzie $r_\varepsilon = r(T)$. W tym przypadku dla procesu $X = \{x(t)\}$ wyznaczamy na podstawie wzoru (3) $A(s,t) = \frac{1}{T-s}\left(\frac{(T-s)^2}{2} - \frac{(T-t)^2}{2}\right)$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{cases} \mu_{\{BB\}}(t) = r_0\left(\frac{T^2}{2} - \frac{(T-t)^2}{2}\right) + r_\varepsilon \frac{t^2}{2T}, \\ \sigma^2_{\{BB\}}(t) = \frac{(4T-3t)t^3}{12T}. \end{cases}$$

Przystąpmy teraz do zastosowania modelu Hulla i White'a chwilowej natychmiastowej stopy procentowej w wybranym dziale matematyki aktuarialnej.

3. Stochastyczna techniczna stopa oprocentowania zastosowana do kalkulacji jednorazowej składki netto

3.1. Wprowadzenie

Naczelną ideą ubezpieczenia jest wspólne (wzajemne) pokrywanie przez ubezpieczonych potrzeb powstałych w wyniku zajścia zdarzeń losowych. Według definicji prawnej, ubezpieczenie jest umową, w której zakład ubezpieczeń zobowiązuje się spełnić określone świadczenie w razie zajścia przewidzianego w umowie zdarzenia, a ubezpieczający podejmuje się zapłacić składkę. Składka ubezpieczeniowa jest to cena ochrony ubezpieczeniowej, jaką ponosi ubezpieczający za zapewnienie osobie ubezpieczonej tego rodzaju ochrony.

Matematyczna teoria ubezpieczeń życiowych przyjmuje założenie, iż środki pieniężne są przez cały czas produktywne, tzn. zmienia się ich wartość w czasie. Ubezpieczenia życiowe stanowią przykład długotrwałego inwestowania kapitału. Z tego powodu towarzystwa ubezpieczeń na życie, odgrywające w tym przypadku rolę inwestorów, stosują oprocentowanie złożone.

Ze względu na to, że ubezpieczenia na życie są ubezpieczeniami długoterminowymi, podstawowym czynnikiem przy kalkulacji składki, poza oceną ryzyka wynikającą z losowości dalszego trwania życia osoby ubezpieczonej, jest zakładany zysk z kapitału, na który można liczyć w okresie pomiędzy wpływem składki a wypłatą świadczenia. Wspomniany dochód odzwierciedla tzw. techniczna stopa oprocentowania.

Dla uproszczenia niektórych obliczeń matematyka ubezpieczeniowa operuje pojęciem *jednorazowej składki netto* (wartości aktuarialnej świadczenia – *net single premium*). Składka ta jest wartością oczekiwaną obecnej wartości przyszłego świadczenia, bowiem obecna wartość przyszłego świadczenia z danej polisy jest zmienną losową. Dzieje się tak m.in. ze względu na to, iż wypłata świadczenia wiąże się na ogół ze śmiercią ubezpieczonego, a więc z jego przyszłym czasem życia. Opisana kalkulacja składki opiera się na tzw. zasadzie równoważności:

E(wartość obecna przyszłych wpłat) = E(wartość obecna przyszłych wypłat).

Przy ustalaniu składki netto potrzebna jest znajomość przypuszczalnej długości życia osoby objętej ochroną ubezpieczeniową i przypuszczalnego okresu płacenia składki, a także przypuszczalnego oprocentowania składki obecnie oraz w przyszłości tzw. technicznej stopy oprocentowania.

W praktyce ubezpieczyciel pobiera składkę brutto. Sama składka netto nie wystarcza na pokrycie przyszłych świadczeń. Należy powiększyć ją o dodatek na ryzyko będący pewnym procentem składki netto. Jaki to ma być procent, decyduje wariancja obecnej wartości przyszłych świadczeń. Współczynnik narzutu na bezpieczeństwo wyznacza się tak, aby z zadanym prawdopodobieństwem zagwarantować wypłacalność towarzystwa ubezpieczeniowego. W tych obliczeniach wykorzystuje się Centralne Twierdzenie Graniczne (zob. [Błaszczyszyn, Rolski 2004, s. 107]). Ponadto w składce brutto uwzględnia się koszty obecne oraz przyszłe prowadzenia ubezpieczenia.

Wprowadźmy teraz kilka oznaczeń. Mianowicie niech $b(t)$ oznacza funkcję wypłaty (wielkość świadczenia w momencie t). W przypadku zaistnienia wypadku ubezpieczeniowego taką właśnie kwotę wypłaca osobie uposażonej zakład ubezpieczeniowy. Niech ponadto $v(t)$ oznacza funkcję dyskontującą (funkcję dyskontowania kapitału jednostkowego w chwili t). Geneza omawianej funkcji wiąże się nierozerwalnie z pytaniem: „Jaki kapitał należy zainwestować w chwili $t_0 = 0$, żeby w chwili $t > 0$ uzyskać 1 jednostkę pieniężną?”. Ten kapitał oznacza się właśnie jako $v(t)$. Natomiast przez Z oznaczmy zmienną losową wyrażającą obecną wartość świadczenia z danej polisy (momentem aktualizacji kapitału jest chwila zawarcia umowy ubezpieczeniowej). Oprócz tego niech z_t oznacza wartość obecną wypłaty (zaktualizowaną na moment zawarcia umowy ubezpieczeniowej wielkość świadczenia wypłaconego w momencie t). Zatem

$$z_t = v(t)b(t).$$

Ponieważ czas przyszłego życia osoby ubezpieczonej, będącej w chwili wykupienia polisy w wieku x, jest zmienną losową $T(x)$, więc aktualna wartość świadczenia jest zmienną losową $z_{T(x)}$, którą w tym przypadku oznaczamy przez Z. Analityczny model ubezpieczeń życiowych bazuje wówczas na równaniu:

$$Z = z_{T(x)} = v(T(x))\, b(T).$$

Uwzględniając powyższe rozważania oraz fakt, iż jednorazowa składka netto (składka płacona w całości na początku okresu ubezpieczenia) jest obliczana na podstawie zasady równoważności, dochodzimy do implikacji:

$$Z = z_{T(x)} \Rightarrow \text{jednorazowa składka netto} = E(Z).$$

Zakładamy, że składka jest jednorazowa – płacona w całości na początku okresu ubezpieczenia, świadczenie będzie jednorazowe i nastąpi w momencie zaistnienia zdarzenia ubezpieczeniowego. Zakładamy również, że wypłata będzie jednostkowa, innymi słowy – suma ubezpieczenia = 1 j. p. (jedna jednostka pieniężna).

Rozważamy sytuację, gdy losowa intensywność oprocentowania Δ jest zaburzona przez proces stochastyczny, przy czym $P(\Delta \leq \delta) = F_{\Delta}(\delta)$ dla $0 \leq \delta \leq L$, gdzie L stanowi górne ograniczenie intensywności oprocentowania.

Niech zatem $R(s) = \Delta + r(s)$, $0 \leq s < \infty$, będzie zmienną intensywnością oprocentowania (zmienną intensywnością akumulacji kapitału), gdzie $r(s)$ jest procesem stochastycznym opisanym modelem Hulla i White'a.

Zakładamy, że Δ jest zmienną losową niezależną od zmiennej $T(x)$ oraz od procesu $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$. Przyjmujemy także założenie, że $T(x)$ jest zmienną losową niezależną od procesu $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$.

Ponieważ funkcja dyskontująca $v(t)$ wyraża się w tym przypadku wzorem

$$v(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mathrm{R}(s)ds\right\} = \exp\{-\Delta t - X(t)\},$$

zatem

$$v(T(x)) = \exp\{-\Delta T(x) - X(T(x))\}$$

i

$$Z = b(T(x))\, v(T(x)) = b(T(x)) \exp\{-\Delta T(x) - X(T(x))\}.$$

Postać funkcji wypłaty $b(t)$ i zmiennej losowej Z zależą od typu kontraktu ubezpieczeniowego. Więcej informacji na temat różnych rodzajów ubezpieczeń życiowych znaleźć można np. w [Ostasiewicz 2000b], natomiast o matematyce aktuarialnej w [Bowers i in. 1986].

Tabela 1. Postać funkcji wypłaty $b(t)$ i zmiennej losowej Z dla wybranych ubezpieczeń na życie z wypłatą świadczenia w momencie zaistnienia zdarzenia ubezpieczeniowego

Nazwa ubezpieczenia	Funkcja wypłaty $b(t)$	Zmienna Losowa Z
1	2	3
Whole-Life	1	$\exp\{-\Delta T(x) - X(T(x))\}$
n-Year Term Terminowe na wypadek śmierci	$\begin{cases} 1 & \text{dla } t \leq n \\ 0 & \text{dla } t > n \end{cases}$	$\begin{cases} \exp\{-\Delta T(x) - X(T(x))\} & \text{dla } T(x) \leq n \\ 0 & \text{dla } T(x) > n \end{cases}$

1	2	3
n-Year Pure Endowment Terminowe na dożycie	$\begin{cases} 0 & \text{dla } t \le n \\ 1 & \text{dla } t > n \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{dla } T(x) \le n \\ \exp\{-\Delta n - X(n)\} & \text{dla } T(x) > n \end{cases}$
n-Year Endowment Terminowe na życie i dożycie	1	$\begin{cases} \exp\{-\Delta T(x) - X(T(x))\} & \text{dla } T(x) \le n \\ \exp\{-\Delta n - X(n)\} & \text{dla } T(x) > n \end{cases}$ $Z = Z_{\text{n-Year Term}} + Z_{\text{n-Year Pure Endowment}}$
n-Year Term Increasing Annually	$\begin{cases} [t+1] & \text{dla } t \le n \\ 0 & \text{dla } t > n \end{cases}$	$\begin{cases} [T(x)+1]\exp\{-\Delta T(x) - X(T(x))\} & \text{dla } T(x) \le n \\ 0 & \text{dla } T(x) > n \end{cases}$ (gdzie $[t] = k, k \le t < k+1, k = 0, \pm 1, \ldots$)
n-Year Term Decreasing Annually	$\begin{cases} n - [t] & \text{dla } t \le n \\ 0 & \text{dla } t > n \end{cases}$	$\begin{cases} [n - T(x)]\exp\{-\Delta T(x) - X(T(x))\} & \text{dla } T(x) \le n \\ 0 & \text{dla } T(x) > n \end{cases}$ (gdzie $[t] = k, k \le t < k+1, k = 0, \pm 1, \ldots$)

Źródło: opracowanie własne.

3.2. Wartość oczekiwana i wariancja obecnej wartości przyszłego świadczenia w tradycyjnych ubezpieczeniach na życie

Ciągła i nieujemna zmienna losowa $T(x)$ oznaczająca przyszły czas życia osoby w wieku x (niekiedy używa się również określenia: dalszy czas życia osoby w wieku x) ma gęstość $g(t)$ wyrażającą się wzorem $g(t) = {}_t p_x \, \mu_{x+t}$, $0 \le t < \infty$. Wielkość ${}_t p_x$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje t lat, natomiast μ_{x+t} – intensywność umieralności (natężenie wymierania) osoby w wieku $x + t$.

Ponadto zakładamy, że

$$\int_0^\infty E\left(e^{-X(t)}\right)dt < \infty, \quad \int_0^\infty E\left(e^{-2X(t)}\right)dt < \infty.$$

Rozważmy ubezpieczenie bezterminowe na wypadek śmierci. Ubezpieczenie to może być określone jako zobowiązanie ubezpieczyciela do wypłacenia osobie uposażonej w chwili śmierci ubezpieczonego ustalonej z góry kwoty pieniężnej, niezależnie od tego, kiedy ta śmierć nastąpi.

Wykorzystując założenia niezależności oraz twierdzenie Fubiniego, otrzymujemy

$$E(Z) = E_\Delta \, E_R \left[E_T \left(Z|R,\Delta\right)|\Delta\right] =$$

$$= \int_0^L \int_0^\infty e^{-\delta t} \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, E\left(e^{-X(t)}\right) dt \, dF_\Delta(\delta),$$

gdzie (por. [Parker 1993b])

$$E\left(e^{-X(t)}\right) = \exp\left\{-E[X(t)] + \tfrac{1}{2}\, Var[X(t)]\right\}.$$

Analogicznie wyznaczamy jednorazową składkę netto $E(Z)$ dla innych typów ubezpieczeń na życie.

Tabela 2. Jednorazowa składka netto dla wybranych ubezpieczeń na życie z wypłatą świadczenia w momencie zaistnienia zdarzenia ubezpieczeniowego

Nazwa ubezpieczenia	$E(Z)$
n-Year Term	$\int_0^L \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta)$
n-Year Pure Endowment	$\int_0^L e^{-\delta n}\, {}_n p_x\, E\left(e^{-X(n)}\right) dF_\Delta(\delta)$
n-Year Endowment	$E(Z) = E(Z_{\text{n-Year Term}}) + E(Z_{\text{n-Year Pure Endowment}})$
n-Year Term Increasing Annually	$\int_0^L \int_0^\infty [t+1]\, e^{-\delta t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta)$ (gdzie $[t] = k, k \le t < k+1, k = 0, \pm 1, \ldots$)
n-Year Term Decreasing Annually	$\int_0^L \int_0^\infty (n - [t])\, e^{-\delta t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta)$ (gdzie $[t] = k, k \le t < k+1, k = 0, \pm 1, \ldots$)

Źródło: opracowanie własne.

Rozpatrując nadal ubezpieczenie bezterminowe na wypadek śmierci i wykorzystując założenia niezależności oraz twierdzenie Fubiniego, otrzymujemy

$$E(Z^2) = E_\Delta\, E_R\, [E_T\, (Z^2 | R, \Delta) | \Delta] =$$

$$= \int_0^L \int_0^\infty e^{-2\delta t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-2X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta),$$

gdzie (por. [Parker 1993b])

$$E\left(e^{-2X(t)}\right) = \exp\{-2E[X(t)] + 2\, Var[X(t)]\}.$$

Analogicznie otrzymujemy $E(Z^2)$ dla innych rodzajów ubezpieczeń na życie.

Tabela 3. Drugi moment obecnej wartości przyszłego świadczenia dla wybranych ubezpieczeń na życie z wypłatą świadczenia w momencie zaistnienia zdarzenia ubezpieczeniowego

Nazwa ubezpieczenia	$E(Z^2)$
n-Year Term	$\int_0^L \int_0^n e^{-2\delta t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-2X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta)$
n-Year Pure Endowment	$\int_0^L e^{-2\delta n}\, {}_n p_x\, E\left(e^{-2X(n)}\right) dF_\Delta(\delta)$
n-Year Term Increasing Annually	$\int_0^L \int_0^\infty [t+1]^2\, e^{-2\delta t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-2X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta)$ (gdzie $[t] = k, k \le t < k+1, k = 0, \pm 1, \dots$)
n-Year Term Decreasing Annually	$\int_0^L \int_0^\infty (n-[t])^2\, e^{-2\delta t}\, {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-2X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta)$ (gdzie $[t] = k, k \le t < k+1, k = 0, \pm 1, \dots$)

Źródło: opracowanie własne.

Uwaga. Dla ubezpieczenia terminowego na życie i dożycie mamy $Var(Z) = Var(Z_1) + Var(Z_2) - 2E(Z_1)E(Z_2)$, gdzie $Z_1 = Z_{\text{n-Year Term}}$, $Z_2 = Z_{\text{n-Year Pure Endowment}}$.

3.3. Wartość oczekiwana oraz wariancja obecnej wartości przyszłego świadczenia wyznaczone na podstawie tablic trwania życia

Historia badań demograficznych i aktuarialnych wielokrotnie odnotowuje próby analitycznego opisania śmiertelności występującej w danej populacji. Niestety modele analityczne nie aproksymują wiernie rozkładów życia obserwowanych w rzeczywistości. Dlatego w praktyce ubezpieczeniowej korzysta się z tablic trwania życia skonstruowanych dla danej populacji. Tablice te zawierają wyłącznie dane dla osób w wieku nie większym niż ω (dla Polski jest to 100 lat, dla innych krajów np. 110).

W tej pracy pod uwagę brane są ubezpieczenia życiowe o świadczeniu wypłacanym w momencie zaistnienia zdarzenia ubezpieczeniowego, a więc w dowolnej chwili czasu t. Tablice umieralności dostarczają natomiast informacji o rozkładzie trwania życia tylko dla t oraz x będących nieujemnymi liczbami całkowitymi. Problem ten zostanie rozwiązany dzięki szacowaniu prawdopodobieństwa zgonu w części roku, a nieco dokładniej dzięki zastosowaniu interpolacji.

Istnieje kilka założeń o rozkładzie zgonów w ciągu roku. Są to m.in. założenie o stałości intensywności umieralności, o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku oraz założenie Balducciego (zob. np. [Błaszczyszyn, Rolski 2004 s. 61; Ostasiewicz 2000b, s. 96]). Dla populacji ogółem wykazano (zob. [Jasiulewicz 2001]), że w przedziale wieku x od jednego roku do sześćdziesięciu lat rozpatrywane w cytowanej pracy założenia interpolacyjne (w tym i uprzednio tu wymienione) prowadzą do uzyskania oszacowań niewiele się różniących od siebie. Pokazano również, że w każdej metodzie maleje dokładność aproksymacji prawdopodobieństwa zgonów dla starszych roczników ($x > 60$). W tym podrozdziale zostanie zaprezentowane oraz wykorzystane najprostsze i jednocześnie najbardziej przyjazne pod względem obliczeniowym założenie: założenie o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku. Oznacza to, że

${}_tq_x = tq_x$, $t \in [0, 1]$, czyli prawdopodobieństwo ${}_tq_x$ jest liniowe względem t

i $$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1-tq_x},\ t \in [0, 1],$$

gdzie ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje t lat. Przyjmujemy oznaczenia ${}_1q_x \stackrel{ozn.}{=} q_x$, ${}_1p_x \stackrel{ozn.}{=} p_x$.

Powróćmy do rozpatrywania ubezpieczenia bezterminowego na wypadek śmierci. Ponieważ przyjęliśmy założenie o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku i zachodzą równości

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x},\ p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

$${}_{t+j}p_x = {}_jp_x \cdot {}_tp_{x+j},\quad {}_jp_x = \frac{l_{x+j}}{l_x},$$

gdzie $j \in \{1, 2, \dots\}$ oraz l_x – liczba osób dożywających wieku x spośród początkowej populacji, otrzymujemy zatem

$$E(Z) = \int_0^L \int_0^{100-x} e^{-\delta t}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta) =$$

$$= \int_0^L \sum_{j=0}^{100-x-1} \int_j^{j+1} e^{-\delta t}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, E\left(e^{-X(t)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta) =$$

$$= \int_0^L \sum_{j=0}^{99-x} \int_0^1 e^{-\delta(t+j)}\, {}_{t+j}p_x\, \mu_{x+t+j}\, E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta) =$$

$$= \int_0^L \sum_{j=0}^{99-x} e^{-\delta j}\, {}_jp_x \int_0^1 e^{-\delta t}\, {}_tp_{x+j}\, \frac{q_{x+j}}{1 - tq_{x+j}}\, E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta) =$$

$$= \int_0^L \sum_{j=0}^{99-x} e^{-\delta j} \frac{l_{x+j}}{l_x} q_{x+j} \int_0^1 e^{-\delta t} E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta) =$$

$$= \int_0^L \sum_{j=0}^{99-x} e^{-\delta j} \frac{l_{x+j}}{l_x} \frac{d_{x+j}}{l_{x+j}} \int_0^1 e^{-\delta t} E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta).$$

Stąd

$$E(Z) = \int_0^L \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{99-x} e^{-\delta j} d_{x+j} \int_0^1 e^{-\delta t} E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt\, dF_\Delta(\delta) =$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{99-x} e^{-\delta j} d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-\delta t} E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt \right) dF_\Delta(\delta).$$

Mamy ponadto

$$E(Z^2) = \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{99-x} e^{-2\delta j} d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-2\delta t} E\left(e^{-2X(t+j)}\right) dt \right) dF_\Delta(\delta).$$

Analogicznie otrzymujemy formuły na $E(Z)$ i $E(Z^2)$ dla innych rodzajów ubezpieczeń na życie.

Tabela 4. Jednorazowa składka netto dla wybranych ubezpieczeń na życie z wypłatą świadczenia w momencie zaistnienia zdarzenia ubezpieczeniowego

$\boldsymbol{E(Z)}$ **dla** $\boldsymbol{x \leq 100 - n}$
n-Year Term $\frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\delta j} d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-\delta t} E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt \right) dF_\Delta(\delta)$
n-Year Pure Endowment $e^{-\delta n} \frac{l_{x+n}}{l_x} E\left(e^{-X(n)}\right)$
n-Year Endowment $E(Z) = E(Z_{\text{n-Year Term}}) + E(Z_{\text{n-Year Pure Endowment}})$
n-Year Term Increasing Annually $\frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) e^{-\delta j} d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-\delta t} E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt \right) dF_\Delta(\delta)$
n-Year Term Decreasing Annually $\frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) e^{-\delta j} d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-\delta t} E\left(e^{-X(t+j)}\right) dt \right) dF_\Delta(\delta)$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Drugi moment obecnej wartości przyszłego świadczenia dla wybranych ubezpieczeń na życie z wypłatą świadczenia w momencie zaistnienia zdarzenia ubezpieczeniowego

$E(Z^2)$ **dla** $x \leq 100 - n$
n-Year Term $\frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{n-1} e^{-2\delta j}\, d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-2\delta t}\, E\left(e^{-2X(t+j)}\right) dt\right) dF_\Delta(\delta)$
n-Year Pure Endowment $e^{-2\delta n}\,\frac{l_{x+n}}{l_x}\, E\left(e^{-2X(n)}\right)$
n-Year Term Increasing Annually $\frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 e^{-2\delta j}\, d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-2\delta t}\, E\left(e^{-2X(t+j)}\right) dt\right) dF_\Delta(\delta)$
n-Year Term Decreasing Annually $\frac{1}{l_x}\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^2 e^{-2\delta j}\, d_{x+j} \int_0^L \left(\int_0^1 e^{-2\delta t}\, E\left(e^{-2X(t+j)}\right) dt\right) dF_\Delta(\delta)$

Źródło: opracowanie własne.

Uwaga.

Dla ubezpieczenia terminowego na życie i dożycie mamy $Var(Z) = Var(Z_1) + Var(Z_2) - 2E(Z_1)E(Z_2)$, gdzie $Z_1 = Z_{\text{n−Year Term}}$, $Z_2 = Z_{\text{n−Year Pure Endowment}}$.

4. Podsumowanie

Uzyskano zależności na jednorazową składkę netto oraz wariancję obecnej wartości przyszłego świadczenia dla klasycznych ubezpieczeń na życie. Kalkulację wymienionych wielkości przeprowadzono z uwzględnieniem stochastycznej technicznej stopy oprocentowania. Funkcje biometryczne wyrażono *explicite* albo przez wielkości występujące w tablicach trwania życia.

Wszelkie rozważania prowadzone były dla polis z sumą ubezpieczenia równą 1 j. p. Oczywiście uzyskanie jednorazowej składki netto dla ubezpieczenia z inną wielkością świadczenia, nazwijmy ją dla ustalenia uwagi b_1, wymaga jedynie pomnożenia odpowiedniej, uzyskanej w pracy, formuły na $E(Z)$ przez b_1, natomiast zmodyfikowana wariacja to iloczyn określonej zależności otrzymanej w pracy i b_1^2.

Na zakończenie pozwolimy sobie przedstawić kilka, spośród wielu możliwych, propozycji kierunków dalszych poszukiwań w rozważanym obszarze badawczym. Otóż można przeprowadzić analizę symulacyjną na podstawie uzyskanych do tej pory wyników teoretycznych. Ponadto otrzymane rezultaty mogą stanowić kanwę obliczeniową innych kalkulacji, dać początek nowym wynikom teoretycznym. Mowa m.in. o zależnościach na jednorazowe składki netto dla określonych typów rent życiowych, a także o określeniu postaci rocznych, czy też ogólnie okresowych (najbardziej popularnych), składek netto kalkulowanych przy stochastycznej technicznej stopie procentowej. Oprócz tego można zmodyfikować rozważany model stochastycznej technicznej stopy oprocentowania i rozpatrzyć obciętą stochastyczną techniczną stopę oprocentowania, uwzględniając kilka funkcji obcięcia. Koncepcja obciętej stochastycznej stopy oprocentowania (zob. [Koch, De Schepper 2007]) jest użyteczna przy adaptacji ogólnych modeli stochastycznych do specyficznych potrzeb i wymagań ekonomicznych. Idea ta pozwala również wyeliminować wady niektórych klasycznych modeli. Wspomnijmy bowiem, że np. w odniesieniu do modelu Hulla i White'a zastosowanie odpowiedniej funkcji obcięcia powoduje, że modelowana w ten sposób stopa procentowa nie przyjmuje ujemnych wartości, co jest cechą nader pożądaną. Można także pokusić się o rozważenie stopy krótkoterminowej modelowanej procesem dyfuzji ze skokami (zob. np. [Jang 2007]).

Literatura

Beekman J.A., Fuelling C.P. (1990), *Interest and mortality randomness in some annuities,* „Insurance: Mathematics and Economics" no 9.

Beekman J.A., Fuelling C.P. (1991), *Extra randomness in certain annuity model,* „Insurance: Mathematics and Economics" no 10.

Beekman J.A., Fuelling C.P. (1993), *One approach to dual randomness in life insurance,* „Scandinavian Actuarial Journal" no 2.

Beekman J.A., Shiu E.S.W. (1988), *Stochastic models for bond prices, function space integrals and immunization theory,* „Insurance: Mathematics and Economics" no 7.

Bellhouse D.R., Panjer H.H. (1980), *Stochastic modeling of interest rates with application to life contingencie,* „Journal of Risk and Insurance" no 47.

Bibby B.M., Sørensen M. (1996), *On estimation for discretely observed diffusion: a review,* „Theory of Stochastic Process" no 2.

Błaszczyszyn B., Rolski T. (2004), *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. (1986), *Actuarial Methematics*, Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Frees E.W. (1990), *Stochastic life contingencies with solvency considerations,* „Transactions, Society of Actuaries" no 42.

Giaccotto C. (1986), *Stochastic modeling of interest rates: actuarial vs. equilibrium approach,* „Journal of Risk and Insurance" no 53.

Hull J., White A. (1990), *Pricing interest-rate derivative securities,* „Review of Financial Studies" vol. 3, no 4.

Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2003), *Matematyka finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Jang J. (2007), *Jump diffusion processes and their applications in insurance and finance*, „Insurance: Mathematics and Economics" no 41.

Jasiulewicz H. (2001), *A comparison of methods of approximations for probabilities of death for fractions of a year,* „Applied Stochastic Models in Business and Industry" vol. 17, no 3 .

Koch I., De Schepper A. (2007), *An application of comonotonicity and convex ordering to present values with truncated stochastic interest rates,* „Insurance: Mathematics and Economics" no 40.
Norberg R. (1990), *Payment measures, interest, and discounting: an axiomatic approach with applications to insurance,* „Scandinavian Actuarial Journal".
Norberg R. (1991), *Reserves in life and pension insurance*, „Scandinavian Actuarial Journal".
Norberg R. (1992), *Hattendorff's theorem and Thiele's differential equation generalized,* „Scandinavian Actuarial Journal".
Norberg R. (1993), *A solvency study in life insurance*, Proceedings of the 3rd AFIR International Colloquium.
Ostasiewicz S. (2000a), *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*, AE, Wrocław.
Ostasiewicz S. (red.) (2000b), *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych*, AE, Wrocław.
Ostasiewicz W. (red.) (2004), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, AE, Wrocław.
Papachristou D.J., Waters H.R. (1991), *Some remarks concerning stochastic interest rates in relation to long term insurance policies,* „Scandinavian Actuarial Journal".
Parker G. (1993a), *Distribution of Present Value of Future Cash Flows,* Proceedings of the 3rd AFIR International Colloquium.
Parker G. (1993b), *Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions*, Proceedings of the XXIV ASTIN Colloquium.
Parker G. (1994), *Stochastic analysis of a portfolio of endowment insurance policies,* „Scandinavian Actuarial Journal" no 2.
Perry D., Stadje W., Rami Y. (2003), *Annuities with controlled random interest rates,* „Insurance: Mathematics and Economics" vol. 32, no 2.
Weron A., Weron R. (1999), *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa.

LIFE INSURANCE WITH STOCHASTIC INTEREST RATE – AN APPLICATION OF THE HULL AND WHITE MODEL

Summary: The article presents a model which can be used when interest rates are random and which concerns certain life insurance contracts. Expressions for the mean values and the variances of a future life insurance payment are obtained. Life Table is applied to the calculation of the net single premiums and variances of a future life insurance payment.

Key words: instantaneous interest rate, Hull and White model, moments of the present value of a future life insurance payment, life table.