

**Maria Kamińska-Zabierowska\*, Maciej Kamiński\*\***

*Porównywanie modeli kontaktów  
metodą porządkowania stochastycznego*

*Comparison of contact distribution models  
with a stochastic ordering approach*

*Wstęp*

Obecne w literaturze przedmiotu porównania modeli kontaktów czy dystrybucji przestrzennej koncentrują się głównie na przedstawieniach, w jakim zakresie jeden model jest różny od drugiego [1]. Zwykle opisuje się ich podstawy, sposoby zachowania i brane pod uwagę czynniki. Często wskazuje się zakres obszarów czy przypadków użycia, w których dany model sprawdza się lepiej niż inne. Opis ludzkiego zachowania, ujęty w postaci zwartej wzoru, pozwala na zastosowanie w modelach symulacji. Model taki może być użyty przy planowaniu nowej magistrali komunikacyjnej, nowego osiedla, a także w modelowaniu ludzkich oddziaływań społecznych.

W niniejszej pracy pragniemy wykazać, że nawet istotne różnice w podejściu, które stoją za powstaniem modeli, mogą przełożyć się na podobne ich działanie. Dodatkowo zastosowana autorska metoda może być użyta do porównywania ze sobą dowolnych modeli kontaktów i ukazania różnic w ich sposobie działania.

*Introduction*

Comparisons of contact distribution models or a spatial distribution, which at present exist in literature, focus mainly on presentations of the extent to which one model is different from another [1]. Usually their bases, ways of behaviours and considered factors are described. The range of areas or cases of uses in which a given model works better than others are often indicated. A description of human behaviour presented in the form of a coherent scheme allows the application of simulation models. This model can be used when planning a new road network, a new housing estate as well as when modelling human social interactions.

In this paper we wish to show that even significant differences in the approach, which are behind the origins of models, can be reflected in their similar actions. Moreover, the author's method, which is applied here, can be used to compare any contact distribution models and show differences in their mode of action.

*Contact distribution models*

Literature of the subject [1]–[3] formulates a variety of contact exchange models. In this study, special attention will be paid to models which are described by means of concise mathematical formulas giving the number of contacts exchanged between the source and the destination. Exchanged contacts can be understood as the number of people travelling from a source to a destination, e.g. from

\* Wydział Nauk o Bezpieczeństwie Wyższej Szkoły Oficerskiej Wojsk Lądowych imienia generała Tadeusza Kościuszki we Wrocławiu/Faculty of Security Affairs, The General Tadeusz Kościuszko Military Academy of Land Forces.

\*\* Wydział Architektury Politechniki Wrocławskiej/Faculty of Architecture, Wrocław University of Science and Technology.

## Modele kontaktów

W literaturze przedmiotu [1]–[3] formułuje się różne modele wymiany kontaktów. W niniejszej pracy szczególną uwagę poświęcimy modelom opisanym zwięzłymi matematycznymi formułami podającymi liczbę kontaktów wymienianych między źródłem i celem. Wymieniane kontakty mogą być rozumiane jako liczba osób podróżujących od źródła do celu, np. od miejsca zamieszkania do pracy. Jednak kontakt może mieć szersze znaczenie i ukazywać inne relacje pomiędzy obiektami. Modele odpowiadają na pytanie o liczbę kontaktów źródło–cel, biorąc pod uwagę takie czynniki jak: wielkość źródła, wielkość celu, wzajemną odległość między źródłem a celem, wzajemne relacje pomiędzy celami. Wszystkie te czynniki modeli wpływają na wynik i wybór celów przez podróżnych ze źródła. Relacje źródło–cel są praktycznie zawsze zależne od wielkości źródła kontaktu, czyli potencjału wyjściowego. W niniejszej pracy pominiemy jednak wpływ wielkości źródeł na liczbę kontaktów. Wpływ ten jest przeważnie liniowy, a więc zamiast wyliczać dokładną liczbę realizowanych kontaktów źródła w celu, wystarczające tu będzie korzystanie jedynie z jego frakcji. Liczbę kontaktów można w prosty sposób odzyskać, mnożąc frakcję przez wielkość potencjału źródłowego.

Pierwszym modelem, który przedstawimy, będzie model *production constrained* [1]. Używany jest, gdy odległość pełni kluczową funkcję dla liczby kontaktów (im dalej, tym mniej kontaktów), a liczba celów przekłada się bardziej na atrakcyjność niż na liczbę podróży, które faktycznie się w nich kończą [2]. Liczba kontaktów  $T_{ij}$  między źródłem  $i$  oraz celem  $j$  w tym modelu opisana jest wzorem (1). Jak widać, odległość znajduje się w wykładniku, więc atrakcyjność celu spada wykładniczo (szybko) w zależności od odległości.

$$T_{ij} = O_i \frac{D_j e^{-\beta d_{ij}}}{\sum_k D_k e^{-\beta d_{ik}}} \quad (1)$$

gdzie:

- $d_{ij}$  – odległość (opór) pomiędzy  $i$  i  $j$ ,
- $D_j$  – liczba celów (atrakcyjność) w  $j$ ,
- $O_i$  – liczba źródeł w  $i$ ,
- $\beta$  – parametr kalibrujący modelu.

Model ten w liczniku ułamek określa atrakcyjność celu  $j$ . Mianownik jest elementem normalizującym (suma wszystkich atrakcyjności). W ten sposób atrakcyjność pojedynczego celu przekłada się na procent podróży zakończonych w celu  $j$  od źródła  $i$ .

Innym modelem spotykanym w literaturze [1], [2], [4], [5] jest model pośrednich możliwości (*intervening opportunity*). Zasadniczą jego cechą jest to, że ograniczenie kontaktu między źródłem i celem nie wynika bezpośrednio z odległości pomiędzy nimi, lecz jedynie z liczby (i jakości) celów pośrednich. Model uznaje, że każdy podróżny układa możliwe cele swojej podróży kolejno w miarę rosnącej ich odległości od źródła. Następnie podróżny, kolejno, rzuca monetą (losuje) z prawdopodobieństwem

the place of residence to the workplace. However, a contact may have a broader meaning and reveal other relationships between objects. Models respond to the question about the number of source–destination contacts taking into account such factors as the source size, the destination size, a mutual distance between the source and the destination, and relationships between destinations. All these factors of models influence the result and choice of destinations by travellers from the source. Source–destination relations are practically always dependent on the size of the contact source, i.e. the initial potential. In this study, however, we will ignore the influence of the size of sources on the number of contacts. This influence is mostly linear, therefore instead of calculating the exact number of ongoing source contacts in the destination, it is sufficient here to use its fractions only. The number of contacts can be easily regained by multiplying the fraction by the source potential size.

The first model to be introduced is production constrained model [1]. It is used when a distance performs a key function for the number of contacts (the farther, the fewer contacts) and the number of destinations refers more to attractiveness than to the number of travels which actually end in them [2]. In this model the number of contacts  $T_{ij}$  between source  $i$  and destination  $j$  is described by formula (1). As it can be seen, the distance is in the exponent, therefore the attractiveness of a destination exponentially (quickly) decreases depending on the distance.

$$T_{ij} = O_i \frac{D_j e^{-\beta d_{ij}}}{\sum_k D_k e^{-\beta d_{ik}}} \quad (1)$$

where:

- $d_{ij}$  – distance (resistance) between  $i$  and  $j$ ,
- $D_j$  – number of destinations (attractiveness) in  $j$ ,
- $O_i$  – number of sources in  $i$ ,
- $\beta$  – model calibration parameter.

This model in the fraction numerator determines the attractiveness of destination  $j$ . The denominator is a normalizing element (the sum of all types of attractiveness). In this way, the attractiveness of a single destination reflects a percentage of travels finished in destination  $j$  from source  $i$ .

Another model which can be found in literature [1], [2], [4], [5] is intervening opportunity model. An essential feature of this model is that a contact limitation between a source and a destination does not result directly from the distance between them, but only from the number (and quality) of indirect destinations. The model recognizes that all travellers plan possible destinations of their travels in succession as their distance from the source increases respectively. Then a traveller, respectively, throws a coin (draws) with the probability of success  $\lambda$  – at each of the destinations. The travel is made to the first destination at which the coin showed success. The probability distribution of travels from the source to  $k$ -one in the order of the arrangement of the destination has therefore a geometric distribution with parameter  $\lambda$ , i.e.  $\lambda(1-\lambda)^{k-1}$ . Of course, in the area of our interests there are regions (e.g. cities, hous-

sukcesu  $\lambda$  – przy każdym z celów. Podróż odbywana jest do pierwszego celu, przy którym moneta pokazała sukces. Rozkład prawdopodobieństw podróży od źródła do  $k$ -tego w kolejności ułożenia celu ma zatem rozkład geometryczny z parametrem  $\lambda$ , tj.  $\lambda(1-\lambda)^{k-1}$ . Oczywiście w obszarze naszych zainteresowań leżą rejony (np. miasta, osiedla, kwartały), w których zajmowanie się każdym pojedynczym celem byłoby niepraktyczne. Dlatego też w modelu pośrednich możliwości [2], [5] rozkład geometryczny zostaje uciążlony (potraktowany jako ciągły, a nie dyskretny) do rozkładu wykładniczego z parametrem  $\lambda$ , a na osi odciętych przedstawiane są nie poszczególne cele, lecz zakresy (przedziały) odpowiadające wielkości poszczególnych rejonów.

Podejście takie symuluje swoisty chaos związany z losową niemożnością zaspokojenia potrzeb we wcześniejszych – bliższych – celach, jednocześnie odcinając się od odległości jako wiążącego parametru. Odległość, jako kryterium do realizowania potrzeby blisko, nie zawsze jest uzasadniona (np. pobliski sklep może nie oferować odpowiedniego asortymentu).

Liczba  $H_{ij}$  zaspokojonych kontaktów rejonu  $i$  w celach leżących nie dalej niż rejon  $j$  w modelu pośrednich możliwości opisana jest wzorem:

$$H_{ij} = O_i(1 - e^{-\lambda G}) \quad (2)$$

gdzie

$$G = \sum_{\{k:d_{ik} \leq d_{ij}\}} D_k \quad (3)$$

gdzie:

- $d_{ij}$  – odległość (opór) pomiędzy  $i$  i  $j$ ,
- $D_k$  – liczba celów (atrakcyjność) w  $k$ ,
- $O_i$  – liczba źródeł w  $i$ ,
- $\lambda$  – prawdopodobieństwo zaakceptowania celu.

W realnym użyciu każdego modelu wymagana jest jego kalibracja, tj. odpowiednie dobranie parametrów modelu. Omawiane w niniejszej pracy modele mają po jednym parametrze. Parametry w obydwu modelach mają różną naturę i działanie. W modelu *production constrained* parametr  $\beta$ , będący czynnikiem wykładnika, skaluje to, jak bardzo odległość negatywnie wpływa na chęć kontaktu. Im większy będzie ten parametr, tym wyraźniej zaznaczany jest fakt, że podróżny jest niechętny do realizowania dalekich kontaktów. Oczywiście, dla różnych obszarów i skal modelowania wartości tego parametru będą się wahać. W skali miasta czy regionu spodziewalibyśmy się, że model najlepiej odtworzy istniejące już kontakty, gdy parametr będzie dodatni. Będzie to wytłumaczalne naturalną niechęcią do podróżowania do np. bardzo odległego sklepu. Dla odróżnienia, w pracy [1] podróże w skali kraju (przeprowadzki) wykazywały zgodność, gdy wartość parametru była nieznacznie ujemna, a więc odległość była wręcz pobudzająca. Sytuacja, w której im większa odległość, tym większa liczba kontaktów, przeczy intuicji. Wyjaśnieniem takiego zjawiska może być szukanie miejsc pracy dla specjalistów

(ing estates, quarters), where dealing with every single destination would be impractical. Therefore, in the model of intervening opportunities [2], [5] the geometric distribution is made constant (treated as continuous rather than discrete) for the exponential distribution with parameter  $\lambda$ , whereas on the abscissa axis the ranges (sections) which correspond to the size of individual regions are presented rather than specific destinations.

This approach simulates peculiar chaos which is associated with a random inability to meet the needs in earlier – closer – destinations and at the same time cutting off the distance as a binding parameter. The distance, as a criterion for implementing a need of “to be close”, is not always justified (e.g. a nearby shop may not offer an appropriate assortment).

Number  $H_{ij}$  of satisfied contacts of region  $i$  in destinations situated no further than region  $j$  in the model of intervening opportunities is described by the following formula:

$$H_{ij} = O_i(1 - e^{-\lambda G}) \quad (2)$$

where

$$G = \sum_{\{k:d_{ik} \leq d_{ij}\}} D_k \quad (3)$$

where:

- $d_{ij}$  – distance (resistance) between  $i$  and  $j$ ,
- $D_k$  – number of destinations (attractiveness) in  $k$ ,
- $O_i$  – number of sources in  $i$ ,
- $\lambda$  – probability of accepting a destination.

In the real use of each model its calibration is required, namely an appropriate choice of model parameters. The models, which are discussed in this paper, have one parameter each. The parameters in two models have a different nature and operation. In the production constrained model parameter  $\beta$ , which is a factor of the exponent, scales how much the distance negatively affects the willingness to contact. The bigger this parameter is, the more clearly the fact is pointed out that a traveller is reluctant to realise distant contacts. Of course, for various areas and scales of modelling the values of this parameter will vary. In the scale of a city or region we would expect that the model will bring back already existing contacts when the parameter is positive. It will be explainable in terms of natural reluctance to travel to, for example, a very distant store. In contrast, the business [1] travels on a national scale (moving) showed a compliance when the parameter value was insignificantly negative, so the distance was quite stimulating. The situation in which the greater the distance, the greater the number of contacts, denies intuition. The explanation of this phenomenon can be found in the search for jobs for specialists (in distant branches of companies outside the area of training) or the psychological background (e.g. cases of escapes from the place of residence).

The model of intervening opportunities has the selectivity parameter  $\lambda$  (which can be transferred from the analogy to the parameter of exponential distribution) be-

(w odległych filiach firm, poza obszarem ich szkolenia), lub podłoże psychologiczne (np. ucieczki z miejsca zamieszkania).

Model pośrednich możliwości ma parametr selektywności  $\lambda$  będący (co można przenieść z analogii do parametru rozkładu wykładniczego) odwrotnością średniej liczby celów, po której następuje akceptacja. Wraz ze spadkiem parametru podróży stają się mniej chętni, aby zakończyć podróż szybko. Rośnie średnia odległość kontaktu, rozumiana tu bardziej jako liczba pomijanych celów niż jako dystans geograficzny.

Parametry modeli mogą być wybrane na podstawie wiedzy eksperckiej i uwzględnić takie aspekty jak koszt podróży, stopień zaopatrzenia punktów usługowych itp. [4].

W przypadku dowolnego modelu opisującego liczbę kontaktów można tak dobrać parametr modelu, aby jak najlepiej oddać kontakty realizowane pomiędzy źródłami i celami w modelowanym obszarze. Można w ten sposób badać jakość modeli, sprawdzając, czy i jak odpowiedni dobór parametrów potrafi odzwierciedlić rzeczywisty, istniejący układ kontaktów [1]. W pracy będziemy się starać znaleźć i wykazać, że istnieją doборы parametrów takie, przy których modele się zblizają i zgadzają – nie tyle z rzeczywistością, ile ze sobą wzajemnie.

Dodatkowym aspektem jest ocena wyników samego modelu i rozwianie pojawiających się wątpliwości. Należy pamiętać, że w modelu pośrednich możliwości zakończenie wszystkich podróży (zaspokojenie wszystkich kontaktów od źródła) jest gwarantowane dopiero po rozpatrzeniu nieograniczonego (nieskończonego) zbioru celów. Zauważmy, że wzór (2) daje 1 dla  $G \rightarrow \infty$ . Jest to dlatego kłopotliwe, że nigdy nie spotykamy się z nieskończoną (w matematycznym sensie) liczbą możliwych celów. Nawet dla obszaru całego świata jest to zawsze liczba skończona. Korygowane jest to najczęściej poprzez zewnętrzną (sztuczną) normalizację, która uwzględni jednak ograniczoną liczbę celów w obszarze modelowania. Bez takiej poprawki frakcja źródeł znajdujących swój cel nigdy nie osiągnęłaby jedności, sprawiając, że część podróży donikąd by nie docierała.

### Porównanie modeli

Podjętym przez nas problemem jest porównanie modeli kontaktów na przykładzie modeli: *production constrained* i pośrednich możliwości. Wzory (1) i (2) nie ukazują praktycznego działania ani nie niosą wprost informacji (obrazu), jak rozkładany jest ruch. Należy zauważyć, że powyższe wzory nie opisują nawet tej samej wartości. W jednym przypadku jest to konkretna liczba podróży źródło–cel, a w drugim zrealizowane kontakty „wcześniej niż”. Zasadniczo różnią się również założenia stojące u podstaw sformułowania modeli. Chcąc porównywać ich działanie, należy wybrać wspólne kryterium.

Możliwym sposobem porównania działania modeli jest obliczenie wymiany kontaktów dla obydwu wariantów na konkretnym przykładzie, np. w wybranym mieście czy kraju. Takie porównania [1] są wykonywane, aby zobrazować różnice pomiędzy modelami i aby ocenić, który jest lepszy na potrzeby danych zastosowań. Ocena róż-

ing the reciprocal of the average number of destinations followed by acceptance. Along with the decrease of the parameter travellers become less willing to end the travels quickly. The average contact distance grows and it is understood here more as the number of skipped destinations than as a geographical distance.

Model parameters can be selected on the basis of the expert knowledge and take into account aspects such as travel costs or a degree of service points' supply, etc. [4].

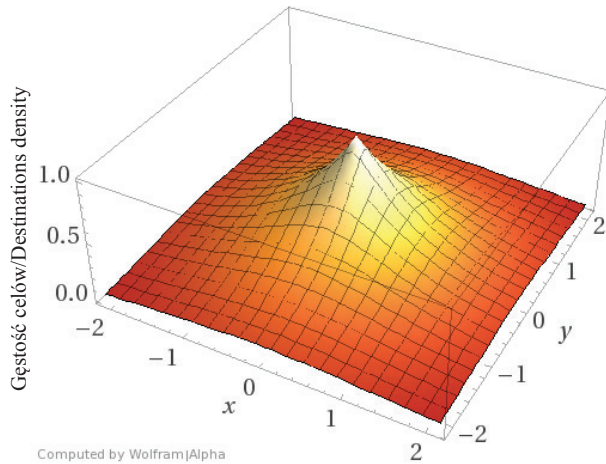
In the case of any model which describes the number of contacts, the model parameter can be chosen in such a way so that the contacts between sources and destinations will be carried out in the best way in the modelled area. It is possible to examine the quality of models in this way and to check if and how an appropriate selection of parameters can reflect the actual and existing system of contacts [1]. In this study we will try to find and demonstrate that there are selections of parameters at which models come together and agree – not so much with the reality but more with each other.

Another aspect is to evaluate the results of the model itself and to dispel any doubts. It should be noted that in the model of intervening opportunities the completion of all travels (satisfying all of the contacts from the source) is guaranteed only after taking into consideration an unlimited (infinite) set of destinations. We must bear in mind that formula (2) provides 1 for  $G \rightarrow \infty$ . It is confusing because we never encounter the infinite (in the mathematical sense) number of possible destinations. Even for the area of the whole world this number is always finite. It is most often corrected through external (artificial) normalization which, however, takes into account a limited number of destinations in the area of modelling. Without this correction the fraction of sources which find their destination would never have achieved unity and would have made part of the travellers reach nowhere.

### Comparison of models

The purpose of this study is to compare contact models on the example of models of production constrained and intervening opportunities. Formulas (1) and (2) do not show practical action and they do not carry direct information (image) about how motion is distributed. It must be noted that the above mentioned formulas do not even describe the same value. In one case, it is a particular number of source–destination travels, whereas in the second case contacts are realised as “earlier than”. Basically, the assumptions which constitute the basis of model formulation also differ from one another. In order to compare their performance, a common criterion must be chosen.

A possible method of comparing the performance of models is to calculate the exchange of contacts for both variants on a specific example, e.g. in a given city or country. Such comparisons [1] are performed to illustrate the differences between models and to evaluate which one is better for the needs of particular applications. The assessment of differences in the results of these types of modelling is, however, burdened with consequences of the choice of initial conditions – a designated area of a city,



Il. 1. Gęstość rozkładu celów w ujęciu 3D. W początku układu współrzędnych znajduje się źródło kontaktów (centrum)

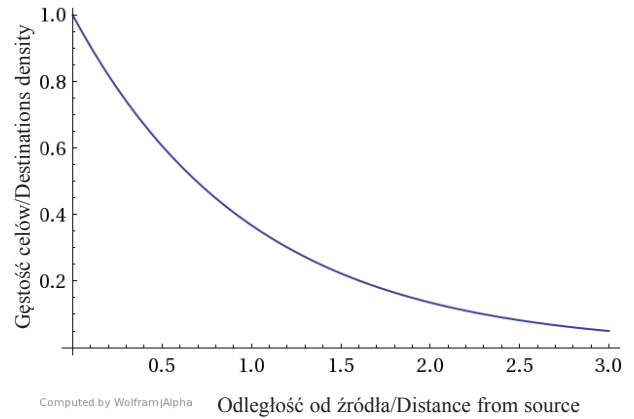
Fig. 1. Destinations distribution density in 3D. The contact source is in point (0,0) of the coordinate system (centre)

nic w wynikach tych modelowań jest jednak obciążona konsekwencjami wyboru warunków wstępnych – wskazanego obszaru miasta, regionu, państwa, czy też określonych typów interakcji źródła i celu, tj. wybór ruchów do handlu czy pracy. W pracy zaproponujemy alternatywną metodę porównania modeli, poprzez zadanie właściwego rozmieszczenia celów, które odpowiada pewnej koncepcji rzeczywistości, jednocześnie konkretną rzeczywistością nie będąc. Wybierzemy ciągle rozkłady naśladowujące badane obszary i na nich uruchomimy modele. Ciągłość rozkładów indukuje konieczność uciąglenia samych modeli, czyli zmianę ich tak, aby operowały na danych ciągłych. Nie jest to wadą, wręcz przeciwnie, poprawia ogólność rozwiązania. Aby umożliwić porównanie i zestawienie, uzależnimy od odległości frakcję zaspokojonych kontaktów. Jednym słowem, na osi odciętych będzie znajdowała się odległość od źródła, a na osi rzędnych znajdować się będzie frakcja podróży zaspokojonych wcześniej niż ta odległość. Używając terminologii statystycznej, można powiedzieć, że będziemy porównywali dystrybuanty (porządek stochastyczny) zakończonych podróży.

Dla uproszczenia, źródło kontaktów będzie znajdowało się w początku układu współrzędnych. Takie zabiegi pozwolą nam analitycznie i ogólnie porównać modele wymiany kontaktów.

#### Wykładniczy związek liczby celów i odległości

W pierwszym badanym przez nas rozkładzie celów (il. 1) gęstość  $\rho$  spada wykładniczo wraz z odległością  $r$  od źródła, tj.  $\rho(r) = \rho_0 e^{-\theta r}$  dla pewnych parametrów  $\rho_0, \theta$  (il. 2). Rozkład ten został opisany przez H. Bleichera i potwierdzony przez C. Clarka [6] dla struktury zaludnienia w mieście, która może być liniowo zależna od rozmieszczenia celów. Inaczej mówiąc, rozkładu udowodnionego dla gęstości zaludnienia używamy jako podstawy do przyjęcia rozkładu gęstości celów. Należy jednak w tym miejscu podkreślić, że odpowiedniość ta nie musi być w ogólnym przypadku prawdziwa.



Il. 2. Gęstość rozkładu celów w zależności od odległości

Fig. 2. Destinations distribution density as a function of a distance

region, state, or specific types of source and destination interactions, namely the choice of movements to work or trade. In this paper we propose an alternative method of a model comparison by means of the task consisting in proper distribution of destinations, which corresponds to a certain conception of reality and at the same time is not a concrete reality. We will choose continuous distributions which imitate the researched areas and we will start models on them. Continuity of distributions induces the necessity to continue the models themselves so that the change will make them operate on continuous data. This is not a disadvantage, on the contrary, it improves the generality of the solution. In order to make the comparison and juxtaposition possible, we will make the fraction of satisfied contacts dependent on the distance. In short, on the abscissa axis there will be a distance from the source, whereas on the axis of ordinates there will be a fraction of satisfied travels earlier than this distance. Using the statistical terminology, it can be concluded that we will compare distribution functions (stochastic order) of completed travels.

To simplify, the contact source will be located at the beginning of the coordinate system. This will allow us to compare the contact exchange models analytically and generally.

#### Exponential connection of the number of destinations and distances

In the first studied distribution of destinations (Fig. 1), density  $\rho$  decreases exponentially along with distance  $r$  from source, i.e.  $\rho(r) = \rho_0 e^{-\theta r}$  for some parameters  $\rho_0, \theta$  (Fig. 2). This distribution was described by H. Bleicher and confirmed by C. Clark [6] for population structure in the city which might be linearly dependent upon distribution of destinations. In other words, we use a distribution that is proved for population density as a base for accepting a destination density distribution. It must be emphasized at this point, however, that this appropriateness does not have to be true in the general case.

With the above distribution, the number of destinations which are within distance  $r$  from the source is proportional to a value that is expressed by the following formula:

Przy takim rozkładzie liczba celów, które znajdują się w odległości  $r$  od źródła, jest proporcjonalna do wartości wyrażonej wzorem:

$$G(r) = \int_0^r 2\pi t e^{-t} dt = 2\pi(1 - (r+1)e^{-r}) \quad (4)$$

Dla omawianej metody porównania istotny jest w tym wypadku kształt rozkładu gęstości celów, a nie jego konkretne wartości w punkcie i dokładne wyskalowanie, więc we wzorze (4) przyjęliśmy  $\theta = 1$ . Wielkości odległości  $r$  oraz gęstości można traktować symbolicznie jako wyrażone w pewnych niedookreślonych jednostkach, które nie mają znaczenia dla obliczeń i rozumowania.

Wartość funkcji (4) jest analogonem liczby  $G$  ze wzoru (3), zatem – przy modelu pośrednich możliwości – frakcja podróży zakończonych w odległości od źródła nie większej niż  $r$  jest proporcjonalna do wartości:

$$1 - e^{-\lambda G(r)} = 1 - e^{-\lambda 2\pi(1 - (r+1)e^{-r})} \quad (5)$$

Natomiast przy modelu *production constrained* frakcja ta jest proporcjonalna do wartości:

$$F_{PC}(r) = \frac{\int_0^r 2\pi t e^{-t} e^{-\beta t} dt}{\int_0^\infty 2\pi t e^{-k} e^{-\beta k} dk} = 1 - (1 + r + \beta r) e^{-(1+\beta)r} \quad (6)$$

Warto zwrócić uwagę, że model *production constrained* został w tym momencie uciąglony, tj. suma (po celach) z mianownika została zamieniona na całkę (po całym obszarze modelowania), tworząc w ten sposób analogiczny parametr normalizujący jak we wzorze (1). Druga z całek od 0 do  $r$  (do pewnej odległości od źródła) jest konieczna, aby uciąglony rozkład zakończonych podróży przedstawić jako zależną od odległości dystrybucję, którą następnie można porównywać. Na początku pracy pominięty został wpływ wielkości źródła na wynik (parametr  $O_j$ ). Przyjmując go jako jednostkowy i pomijając we wzorach, możemy skupić się na sednie, czyli frakcji zakończonych podróży.

Frakcja podróży wyrażona wzorem (4) zamyka obszar modelowania w zaledwie  $2\pi$  celów (granica funkcji  $G$  dla  $r \rightarrow \infty$ ), nie dając możliwości na zakończenie wszystkich kontaktów. Łukę tę warto uzupełnić, odpowiednio skalując (bez utraty ogólności) funkcję ze wzoru (5) poprzez normalizację wartością granicy tej funkcji dla  $r \rightarrow \infty$ . Pozwoli to na traktowanie zbioru celów jako pełnego (skaluje wynik modelu). Takie normalizacje są praktykowane przy używaniu tego modelu [4]. Korekta prowadzi do następującego wzoru (7) na frakcję podróży zakończonych w odległości od źródła nie większej niż  $r$ :

$$F_{IO}(r) = \frac{1 - e^{-\lambda 2\pi(1 - (r+1)e^{-r})}}{1 - e^{-\lambda 2\pi}} \quad (7)$$

Podobnie jak postąpiliśmy przy formułowaniu wzoru (4), z chęci uproszczenia obliczeń, nie zajmujemy się skalowaniem jednostek parametrów odległości czy liczby celów. Nie należy zatem dziwić się wielkościom takim jak  $2\pi$  celów, gdyż może ona oznaczać i być wy-

$$G(r) = \int_0^r 2\pi t e^{-t} dt = 2\pi(1 - (r+1)e^{-r}) \quad (4)$$

For purposes of the discussed method of comparison, the shape of a destination density distribution is significant rather than its particular values in the point and accurate scaling, hence in formula (4) we assumed  $\theta = 1$ . Numbers of distance  $r$  and density can be treated symbolically as expressed in some undefined units which are irrelevant for calculations and reasoning.

Value of function (4) is an analogue of number  $G$  from formula (3), therefore – within the intervening opportunity model – the fraction of travels ended in the distance from the source not greater than  $r$  is proportional to the following value:

$$1 - e^{-\lambda G(r)} = 1 - e^{-\lambda 2\pi(1 - (r+1)e^{-r})} \quad (5)$$

Whereas with production constrained model, this fraction is proportional to the following value:

$$F_{PC}(r) = \frac{\int_0^r 2\pi t e^{-t} e^{-\beta t} dt}{\int_0^\infty 2\pi t e^{-k} e^{-\beta k} dk} = 1 - (1 + r + \beta r) e^{-(1+\beta)r} \quad (6)$$

We must bear in mind that production constrained model was made constant in this case, i.e. the sum (after destinations) from a denominator was changed into an integral (within the whole modelling area), in this way forming an analogous normalising parameter as in formula (1). It is necessary to introduce another integral from 0 to  $r$  (up to a certain distance from the source) so that a constant distribution of finished travels could be presented as a cumulative distribution dependant on a distance which can subsequently be used for comparison. At the beginning of the study we ignored the influence of the source size on the result (parameter  $O_j$ ). By accepting this as individual and ignoring it in formulas, we can focus on the essence, i.e. a fraction of the finished travels.

The fraction of travels expressed by formula (4) closes the area of modelling in only  $2\pi$  of destinations (function limit  $G$  for  $r \rightarrow \infty$ ), without yielding a possibility to finish all contacts. This gap ought to be supplemented by the adequate scaling (without losing generality) of the function using normalization of the value of this function limit for  $r \rightarrow \infty$ . This shall enable us to treat the collection of destinations as a full unit (it scales the model result). Such normalizations are often used in practice when applying this model [4]. The correction leads us to the following formula (7) pertaining to the fraction of travels ended within the distance from the source not greater than  $r$ :

$$F_{IO}(r) = \frac{1 - e^{-\lambda 2\pi(1 - (r+1)e^{-r})}}{1 - e^{-\lambda 2\pi}} \quad (7)$$

Similarly to the procedures taken when creating formula (4), for the sake of simplifying calculations, we are not concerned with scaling units of distance parameters or the number of destinations. Hence, we should not be surprised at values such as  $2\pi$  of destinations, as they may

skalowana (przyjmować jednostki) jako setki tysięcy miejsc pracy czy połówki hektarów powierzchni handlowych.

Skonstruowaliśmy zatem dwie funkcje – dystrybuanty –  $F_{IO}$  oraz  $F_{PC}$ , które reprezentują odpowiednio modele pośrednich możliwości i *production constrained*.

Porównywanie modeli zaczniemy od analizy przypadków najprostszych. Gdy  $\beta=0$ , wzór (6) upraszcza się do:

$$F_{PC}(r) = 1 - (1+r)e^{-r} \quad (8)$$

Jednocześnie, gdy obliczymy  $F_{IO}$  ze wzoru (7), a parametr  $\lambda$  dąży do 0, otrzymamy:

$$F_{IO}(r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda 2\pi(1-(r+1)e^{-r})}}{1 - e^{-\lambda 2\pi}} = 1 - (1+r)e^{-r} \quad (9)$$

zatem modele te (dla wybranych parametrów) są równoważne pod względem frakcji kontaktów zakończonych w konkretnej odległości od źródła.

W tym miejscu warto zawrzeć pewne wyjaśnienia. Porównanie dla  $\lambda \rightarrow 0$  kłóci się w pierwszej chwili z ogólną ideą przyjęcia parametru jako oczekiwanej wartości odwrotności średniej liczby celów, po której następuje akceptacja. Jednak nie jest to błędne, gdyż normalizacja sprawia, że parametr działa teraz jako skala koncentracji zakończonych kontaktów i dla parametru  $\lambda \rightarrow 0$  rozkład jest identyczny z rozkładem celów. Sprawdzenie zachowania się wzorów przy takich wartościach, choć czysto akademickie i bynajmniej niewymagające wiedzy eksperckiej, jest jednak warte przedstawienia. Badany rozkład (4) (il. 1) zawiera w przedziale [0,6] około 98,2% wszystkich swoich celów, co może być utożsamiane z granicami zurbanizowanego obszaru funkcjonalnego (*functional urban area* – FUA), np. wielkości aglomeracji występującej w kontekście regionu. Modelowanie takich spójnych funkcjonalnie obszarów wydaje się uzasadnione i jest praktykowane [4]. W tym obszarze znormalizowany model pośrednich możliwości dla parametru  $\lambda \rightarrow 0$  przydziela (kończy) około 98,2% kontaktów, a dla  $\lambda = 0,1$  około 98,7%. Są to standardowe wartości spotykane w opracowaniach i modelowaniach (por. [4]). Dla porównania, przy parametrze  $\lambda = 1$  w obszarze [0,6] realizowane jest 99,97% kontaktów, a maksymalnym stosowanym w opracowaniach jest 99,9% (por. [4]).

Wyniki kolejnego porównania, przeprowadzonego dla  $\lambda = 1$  oraz  $\beta = 1,95$ , zostały przedstawione na ilustracji 3. Jak widać, nawet dla takich parametrów wykresy te są niemal identyczne. Supremum bezwzględnej różnicy badanych funkcji wynosi nieco ponad 0,015, co oznacza 1,5% różnicy we frakcji przydzielanych kontaktów. Oczywiście z ciągłości obydwu funkcji (7)(8) można wywnioskować, że dla każdego  $\lambda$  w przedziale [0,1] istnieje takie  $\beta$  w przedziale [0,1.95], żeby wykresy wykazywały dopasowanie. Dla większych wartości  $\lambda$ , przekładających się na mocną (a więc i niespotykaną w rzeczywistości) koncentrację zaspokojonych kontaktów wokół źródła, różnice pomiędzy (7) i (8) rosną, choć nie jest to wzrost mogący przekreślać względnie dobre dopasowanie wykresów tych funkcji.

mean and be scaled (assume units) as hundreds of thousands of workplaces of halves of hectares of commercial space.

Therefore, we constructed two functions – distribution functions –  $F_{IO}$  and  $F_{PC}$ , which represent models of intervening opportunities and the production constrained, respectively.

We will start comparing models with the analysis of the simplest cases. When  $\beta = 0$ , formula (6) simplifies to:

$$F_{PC}(r) = 1 - (1+r)e^{-r} \quad (8)$$

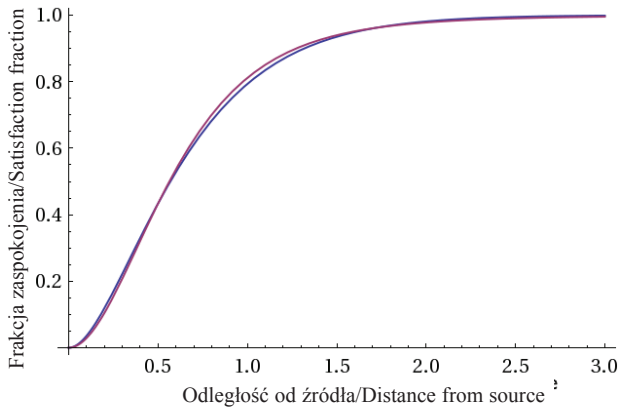
At the same time, when we calculate formula  $F_{IO}$  from formula (7), and parameter  $\lambda$  tends to achieve 0, we obtain:

$$F_{IO}(r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda 2\pi(1-(r+1)e^{-r})}}{1 - e^{-\lambda 2\pi}} = 1 - (1+r)e^{-r} \quad (9)$$

thus, these models (for selected parameters) are equivalent in terms of fractions of completed contacts at the particular distance from the source.

It is worth including some explanations here. A comparison for  $\lambda \rightarrow 0$  is at odds, at first, with a general idea of accepting the parameter as the expected value of the inverse of the mean number of destinations which are followed by acceptance. However, it is not wrong because now the normalization makes the parameter work as a concentration scale of terminated contacts and for parameter  $\lambda \rightarrow 0$  the distribution is identical to the destination distribution. Checking the behaviour of formulas at such values, although purely academic and not requiring any expert knowledge, is worth presenting. The researched distribution (4) (Fig. 1) contains about 98.2% of all of its destinations in range [0,6], which can be identified with boundaries of the functional urban area (FUA), for example, sizes of agglomeration occurring in the context of a region. Modelling such functionally coherent areas seems reasonable and is put into practice [4]. In this area, a standardized model of intervening opportunities for parameter  $\lambda \rightarrow 0$  assigns (ends) approximately 98.2% of contacts and for  $\lambda = 0.1$  approximately 98.7%. These are standard values found in studies and modelling (cf. [4]). For comparison, with parameter  $\lambda = 1$  in [0,6], 99.97% of contacts is realised and the maximum used in studies is 99.9% (cf. [4]).

The results of another comparison which was carried out for  $\lambda = 1$  and  $\beta = 1.95$  have been presented in Figure 3. As it can be seen, even for such parameters these graphs are almost identical. Upper and lower bounds of the absolute difference of the researched functions are slightly more than 0.015, which means 1.5% of the difference in the fraction of the assigned contacts. Of course, from the continuity of both functions (7) (8) it can be concluded that for each  $\lambda$  in range [0,1] there exists such  $\beta$  in range [0,1.95] so that the graphs show compatibility. For larger values of  $\lambda$  reflected in strong (and thus not experienced in the reality) concentration of satisfied contacts around the source, the differences between (7) and (8) grow although it is not an increase which could eliminate relatively good compatibility of these functions' graphs.



Il. 3. Porównanie modeli pośrednich możliwości i *production constrained* dla  $\lambda = 1$  oraz  $\beta = 1,95$

Fig. 3. Intervening opportunity and production constrained comparison of models for  $\lambda = 1$  and  $\beta = 1.95$  parameters

### Ustalony związek liczby celów i odległości

Podobnie jak poprzednio, celem rozważań jest sformułowanie wzorów na frakcje zrealizowanych kontaktów w zależności od odległości od źródła. Jednak w tej części przyjmujemy taki rozkład celów (il. 4), że na każdym okręgu (o środku w źródle) jest ta sama liczba celów. Wówczas gęstość  $\rho$  w zadanej odległości  $r$  jest równa  $\rho(r) = \theta/r$  dla pewnego parametru  $\theta$ , a liczba celów, które znajdują się w odległości  $r$  od źródła, jest proporcjonalna do wartości:

$$G(r) = \int_0^r \frac{2\pi x}{x} dx = 2\pi r \quad (10)$$

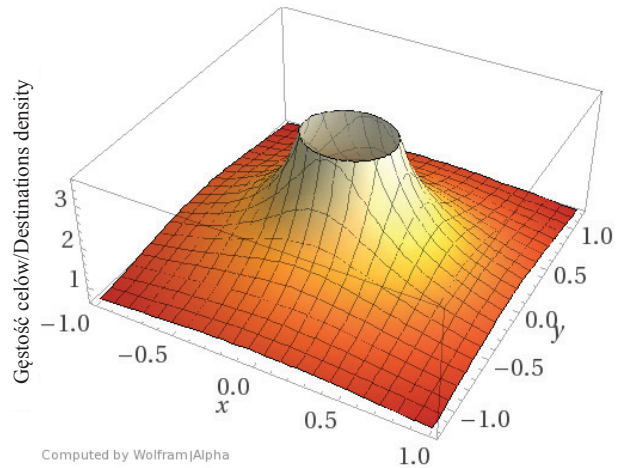
Taki rozkład celów może być rozumiany np. jako istniejący tylko w percepcji podróżnego, a wynikający z ograniczonej wiedzy lub ograniczonej możliwości poznania całego otoczenia. Rozkład taki można również uzasadnić faktem, że wielkości skupisk ludności na pewnym obszarze spełnia prawo Zipfa [7]. Dla przyjętego rozkładu celów frakcje zrealizowanych kontaktów w obydwu modelach są wyrażone przez:

$$F_{IO}(r) = 1 - e^{-\lambda G(r)} = 1 - e^{-\lambda 2\pi r} \quad (11)$$

oraz

$$F_{PC}(r) = \int_0^r \frac{2\pi t e^{-\beta t}}{\int_0^\infty 2\pi e^{-\beta k} dk} dt = 1 - e^{-\beta r} \quad (12)$$

Oba modele będą działały identycznie wtedy, gdy  $\beta = 2\pi\lambda$ . Dla innych wartości parametrów jedna z funkcji  $F_{IO}$  lub  $F_{PC}$  dominuje nad drugą w każdym punkcie, zatem jeden z modeli zawsze realizuje większą frakcję zakończonych podróży: model pośrednich możliwości dla  $\beta > 2\pi\lambda$ , a model *production constrained* w pozostałych przypadkach. Kierując się wzorem (10), można zauważyć, że liczba celów nie jest tutaj ograniczona (rośnie wraz z odległością od źródła). Nie jest zatem konieczna do-



Il. 4. Gęstość rozkładu celów w ujęciu 3D.

W początku układu współrzędnych znajduje się źródło kontaktów (centrum)

Fig. 4. Destinations distribution density in 3D.

The contact source is in point (0,0) of the coordinate system (centre)

### Established relation of the destination and distance number

As before, the purpose of this study is to create formulas for the fractions of realized contacts depending on the distance from the source. However, in this part of the paper we will assume the distribution of destinations (Fig. 4) that will have the same number of destinations (with a centre in the source) on each circle. Then, density  $\rho$  in predetermined distance  $r$  is equal to  $\rho(r) = \theta/r$  for certain parameter  $\theta$  and the number of destinations which are located at distance  $r$  from the source is proportional to the value of:

$$G(r) = \int_0^r \frac{2\pi x}{x} dx = 2\pi r \quad (10)$$

This distribution of destinations can be understood, for example, as existing only in the perception of a traveller and resulting from a limited knowledge or a limited opportunity of getting to know the entire surrounding. This distribution can also be justified by the fact that the size of the population concentrations in a certain area obeys Zipf's law [7]. For the adopted distribution of destinations the fractions of realised contacts in both models are expressed by:

$$F_{IO}(r) = 1 - e^{-\lambda G(r)} = 1 - e^{-\lambda 2\pi r} \quad (11)$$

and

$$F_{PC}(r) = \int_0^r \frac{2\pi t e^{-\beta t}}{\int_0^\infty 2\pi e^{-\beta k} dk} dt = 1 - e^{-\beta r} \quad (12)$$

Both models will work identically when  $\beta = 2\pi\lambda$ . For other parameter values one of the functions  $F_{IO}$  or  $F_{PC}$



datkowa normalizacja wyniku dla modelu pośrednich możliwości, inaczej niż w poprzednim podrozdziale (wzór 7).

### Liczebność celów nie zależy od odległości

Ostatnim rozkładem, na którym porównamy modele, jest rozkład równomierny, cechujący się występowaniem tej samej liczby (gęstości) celów w każdym punkcie. Dzięki temu rozkład celów jest płaszczyzną. Przyjmując jednostkową gęstość rozłożenia celów, tzn.  $\rho(r) = 1$ , liczba celów, które znajdują się w odległości  $r$  od źródła, wyraża się wzorem:

$$G(r) = \int_0^r 2\pi x dx = \pi r^2 \quad (13)$$

Opisując frakcje zrealizowanych kontaktów dla obydwu modeli, otrzymujemy następujące wzory:

$$F_{IO}(r) = 1 - e^{-\lambda G(r)} = 1 - e^{-\lambda \pi r^2} \quad (14)$$

dla modelu pośrednich możliwości oraz

$$F_{PC}(r) = \int_0^r \frac{2\pi t e^{-\beta t}}{\int_0^\infty 2\pi k e^{-\beta k} dk} dt = 1 - (\beta r + 1)e^{-\beta r} \quad (15)$$

dla modelu *production constrained*.

Również w tym przypadku liczba celów jest nieograniczona, dlatego nie jest wymagana normalizacja dla modelu pośrednich możliwości (14).

Do przeprowadzenia porównania wybierzemy parametr  $\lambda = 1$ . Okazuje się, że wówczas model pośrednich możliwości przydziela niemal 99% wszystkich kontaktów dla  $r$  z przedziału  $[0, 1.2]$ . W związku z tym przyjmujemy ten przedział jako referencyjny dla porównań z modelem *production constrained*. Ze względu na przecinanie się wykresów frakcji (14) i (15) kryterium porównań modeli stało się supremum bezwzględnej różnicy funkcji  $F_{IO}$  i  $F_{PC}$  we wskazanym wyżej przedziale. Przeprowadziliśmy analizę wartości tego supremum w zależności od pa-

dominates over the other at each point, therefore one of the models always pursues a bigger fraction of completed travels, namely a model of intervening opportunities for  $\beta > 2\pi\lambda$  and the production constrained model in other cases. According to formula (10), it can be noticed that the number of destinations is not limited here (it increases along with the distance from the source). That is why the further normalisation of the result for the model of intervening opportunities is not necessary, unlike in the previous section (formula 7).

### The number of destinations does not depend on the distance

The last distribution on which we will compare the models is a uniform distribution characterized by the presence of the same number (density) of destinations at each point. As a consequence, the distribution of destinations is a plane. Assuming unit density of the destination distribution, i.e.  $\rho(r) = 1$ , the number of destinations which are located at distance  $r$  from the source is expressed by the following formula:

$$G(r) = \int_0^r 2\pi x dx = \pi r^2 \quad (13)$$

Describing fractions of completed contacts for both models, we receive the following formulas:

$$F_{IO}(r) = 1 - e^{-\lambda G(r)} = 1 - e^{-\lambda \pi r^2} \quad (14)$$

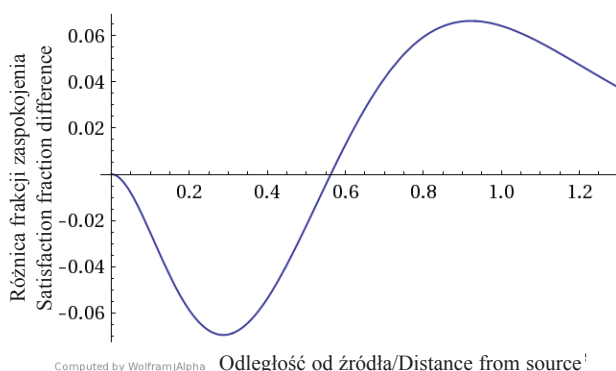
for intervening opportunities model and

$$F_{PC}(r) = \int_0^r \frac{2\pi t e^{-\beta t}}{\int_0^\infty 2\pi k e^{-\beta k} dk} dt = 1 - (\beta r + 1)e^{-\beta r} \quad (15)$$

for production constrained model.

Also in this case, the number of destinations is unlimited, therefore normalisation for the model of intervening opportunities is not required (14).

For comparison purposes, we will choose parameter  $\lambda = 1$ . It turns out that the model of intervening opportunities allocates almost 99% of all contacts for  $r$  from range  $[0, 1.2]$ . Therefore, we will assume this range as referential for comparisons with production constrained model. Due to the intersection of fraction graphs (14) and (15), a criterion for model comparisons became upper and lower bounds of absolute difference of functions  $F_{IO}$  i  $F_{PC}$  in the abovementioned range. We analyzed the value of these upper and lower bounds depending on parameter  $\beta$ . As a result, we selected parameter  $\beta$  equal to about 3.8 as the one to minimize the value of the considered criterion. It is claimed that for  $\beta = 3.8$  there appears approximately four times larger discrepancy of models (circa 6%) than in the case of the exponential relation of destinations and distances. The analysis of the difference fraction (Fig. 5) shows that the production constrained model, which prefers shorter travels, assigns a greater contact fraction closer to the source.



Il. 5. Różnica pomiędzy wzorami (14) i (15) dla parametrów  $\lambda = 1$  i  $\beta = 3,8$

Fig. 5. Difference between formulas (14) and (15) for  $\lambda$  parameters = 1 and  $\beta = 3.8$

rametru  $\beta$ . W jej wyniku wyłonił się parametr  $\beta$  równy około 3,8 jako minimalizujący wartość rozważanego kryterium. Dla  $\beta=3,8$  stwierdza się około czterokrotnie większą rozbieżność modeli (ok. 6%) niż w przypadku wykładniczego związku liczby celów i odległości. Analiza przebiegu różnicy frakcji (il. 5) pozwala stwierdzić, że model *production constrained*, preferując krótsze podróże, przydziela większą frakcję kontaktów bliżej źródła.

### Wnioski

Charakterystyki realizowanych kontaktów opisywane przez dwa modele, w tym przypadku *production constrained* i pośrednich możliwości we wzorach (1) i (2), mogą nie być wprost porównywalne. Zaproponowana przez autorów metoda polega na zadaniu ciągłego rozkładu celów i wyprowadzeniu dla takich warunków wzorów na frakcje kontaktów realizowanych w zadanej odległości od źródła. Przyjęty rozkład celów na płaszczyźnie może być opisany poprzez gęstość rozkładu celów w odległości  $r$  od źródła, oznaczaną przez  $\rho(r)$ . Wówczas frakcje zrealizowanych kontaktów są proporcjonalne, odpowiednio dla modeli *production constrained* i pośrednich możliwości, do

$$\int_0^{\infty} \frac{2\pi t \rho(t) e^{-\beta t}}{\int_0^{\infty} 2\pi \rho(k) e^{-\beta k}} dt \quad (16)$$

oraz

$$1 - \exp\left(-\lambda \int_0^r 2\pi \rho(t) dt\right) \quad (17)$$

Frakcje zostały doprowadzone do postaci funkcji, które mogą być interpretowane jako dystrybuanty, a więc porównywane w kategoriach porządków stochastycznych. Do naszych celów frakcje porównywane były w każdym punkcie (m.in. il. 3), tj. w zwykłym porządku stochastycznym (por. [8] rozdz. 17).

Opisane szczegółowe wyniki porównań świadczą o znaczącym wpływie obranego rozkładu celów na działanie modeli. Chociaż dla zaproponowanych rozkładów nie jest możliwe jednoznaczne wskazanie, w którym modelu podróże szybciej się kończą, jednak obliczono, jakie są różnice między frakcjami w obydwu modelach.

Przedstawione porównania można przeprowadzić dla różnych modeli wymiany kontaktów i innych rozkładów celów. Zadaniem tej pracy jest zatem zdefiniowanie i pokazanie odmiennej metody porównywania modeli, abstrahującej od konkretnych realizacji.

Porównanie modeli prowadzi do spostrzeżenia, że rozważane modele nie wykazują na takich rozkładach znaczących różnic. Jednocześnie istnienie modeli wymiany kontaktów jest związane z chęcią jak najlepszego oddania rzeczywistości. Rzeczywistość i rozkładanie kontaktów musi być możliwie bliskie, tj. musi odpowiadać wynikom każdego modelu niezależnie od tego, w jakiej rzeczywistości (na jakim wejściu) zostanie uru-

### Conclusions

The characteristics of the realised contacts which were described by two models, including in this case production constrained and intervening opportunities in formulas (1) and (2), cannot be directly comparable. The method, which is proposed by the authors, consists in the task of continuous destination distribution and deriving formulas for contact fractions realised at a predetermined distance from the source in such conditions. The adopted destination distribution on the plane can be described by the density of destination distribution at distance  $r$  from the source marked by  $\rho(r)$ . Then the fractions of realized contacts are proportional, respectively, for models of production constrained and intervening opportunities, to

$$\int_0^{\infty} \frac{2\pi t \rho(t) e^{-\beta t}}{\int_0^{\infty} 2\pi \rho(k) e^{-\beta k}} dt \quad (16)$$

and

$$1 - \exp\left(-\lambda \int_0^r 2\pi \rho(t) dt\right) \quad (17)$$

The fractions were reduced to a function which can be interpreted as a cumulative distribution, therefore they can be compared in terms of stochastic orders. For our purposes, the fractions were compared at each point (e.g. Fig. 3), namely in the ordinary stochastic order (cf. [8] Chapter 17).

The comparison results which were described in detail show a significant influence of the chosen distribution of destinations on the models' operation. Although for the proposed distributions it is not possible to clearly indicate in which model travels end more quickly, however, the differences between the fractions in both models were calculated.

The presented comparisons can be carried out for different models of contact exchange and other distributions of destinations. The purpose of this work is therefore to define and demonstrate a different method of comparing models, which abstracts from the concrete implementations.

A comparison of models leads to the observation that the considered models do not show significant differences on such distributions. At the same time, the existence of contact exchange models is connected with a desire to reflect reality in the best way. Reality and distribution of contacts must be as close as possible, i.e. it must correspond to the results of each model, regardless of the fact in which reality (at which point) it will start. It is not surprising, therefore, that for distributions which are close to ideal ones (Fig. 1 and 4), the models show a high compatibility. If the models were incompatible, it would mean that one of them reflects the reality significantly and qualitatively in a different way (better or worse) even for such a simple case as the one discussed in this study. Eventually, this would result in the lack of popularity of one of the models.

chomione. Nie dziwi zatem, że dla rozkładów, które zbliżone są do idealnych (il. 1 i 4), modele wykazują dużą zgodność. Gdyby modele były niezgodne, oznaczałoby to, że jeden z nich oddaje rzeczywistość znacząco i ja-

kościowo inaczej (lepiej lub gorzej) nawet dla tak prostego przypadku, jak rozważany w niniejszej pracy. Ostatecznie skutkowałyby to brakiem popularności jednego z modeli.

### Bibliografia/References

- [1] Akwawua S., Pool J.A., *The development of an intervening opportunity model with spatial dominance effects*, „Journal of Geographical Systems” 2001, No. 3, 69–86.
- [2] Wilson A.G., *A statistical theory of spatial distribution models*, „Transportation Research” 1967, Vol. 1, 253–269.
- [3] Zipser T., *Modele symulacyjne w rozwoju sieci osadniczej*, Raporty Instytutu Architektury i Urbanistyki PWr, Wrocław 1975.
- [4] Zipser T., Sławski J., *Modele procesów urbanizacji – teoria i jej wykorzystanie w praktyce planowania*, PWE, Warszawa 1988.
- [5] Stouffer S., *Intervening Opportunities: a theory relating mobility and distance*, „American Sociological Review” 1940, Vol. 5, 845–867.
- [6] Clark C., *Urban population densities*, „Bulletin de Insitute Internationale de Statistique” 1958, Vol. 36, 60–68.
- [7] Auerbach F., *Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration*, „Petermann’s Geographische Mitteilungen” 1913, Vol. 59, 74–76.
- [8] Marshall A.W., Olkin I., *Inequalities: theory of majorization and its applications*, Academic Press, New York 1979.

### Streszczenie

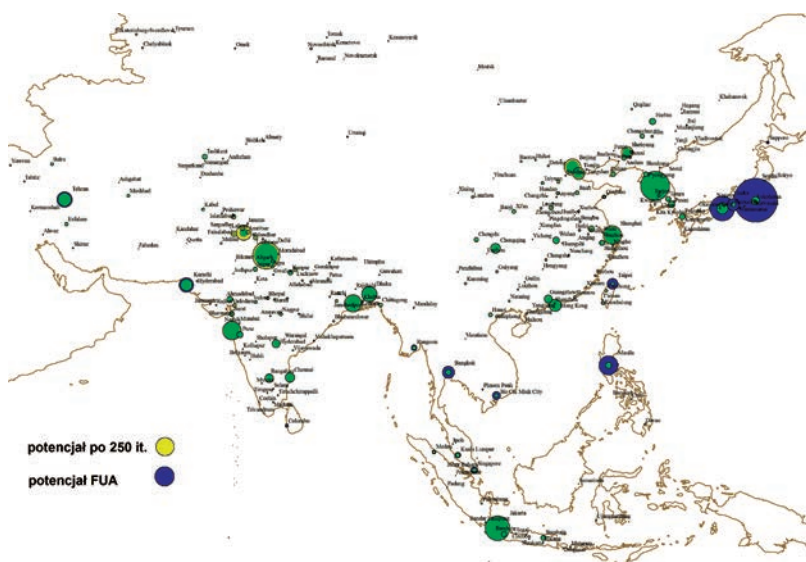
Nie jest znana uniwersalna metoda porównywania modeli kontaktów. Modele spotykane w literaturze są najczęściej zadane wzorem matematycznym, który opisuje swoistą charakterystykę modelu, ale niewiele mówi o jego działaniu. W niniejszej pracy zaproponowano sposób porównywania modeli kontaktów. Dzięki analitycznemu uruchomieniu modeli na idealnych, teoretycznych rozkładach porównano, jakie typy podróży preferuje model, jak rozkłada ruch oraz jak przedstawiają się te cechy w zestawieniu z innymi modelami. Kryterium porównawczym uczyniliśmy stochastyczne porządkowanie frakcji zrealizowanych kontaktów. Pomysł ten wydaje się dobrą alternatywą dla porównywania modeli na konkretnych miastach. Porównania dokonano dla modeli *production constrained* oraz *intervening opportunity* (modelu pośrednich możliwości). Wyniki otrzymane dla przyjętych rozkładów celów ukazują, że choć obydwa modele bardzo się różnią w swoich założeniach, w szczególnych przypadkach mogą podobnie realizować kontakty.

**Słowa kluczowe:** planowanie przestrzenne, modele kontaktów, model pośrednich możliwości, porządek stochastyczny

### Abstract

No universal method for comparing contact models is known. Models we met in literature are usually stated by a complicated mathematical formula, which does not provide any information about the model’s specific behaviour, although it characterizes the model. In this paper the authors present their own way of comparing contact models. We run models in analytic theory on ideal theoretical distributions. Thanks to this we are able to compare multiple models and their behaviour in terms of arriving distribution or short/long trips preferences. We use stochastic ordering approach for fractions of completed contacts as the criterion for comparing models. The presented idea seems to be a good alternative to a comparison based on the model’s output for fixed city instances. Comparison is made for production constrained and intervening opportunity models. The results for chosen distributions show that, even if both models differ much in their assumptions, they can give very similar outputs.

**Key words:** spatial planning, contact models, intervening opportunity model, stochastic order



Wynik modelowania samosterującego dla kontynentu azjatyckiego, porównanie wyniku 250 iteracji z rzeczywistą wielkością miast w ramach funkcjonalnych obszarów zurbanizowanych (FUA)

Result of a self-learning model for the Asian continent, comparison of the results of 250 iterations with the actual size of the cities within the framework of functional urban areas (FUA)

Źródło/Source: Zipser W., *Wpływ determinant geograficznych na tworzenie się poza Europą ponadregionalnych struktur osadniczych w skali kontynentalnej*, raport serii SPR. NR I-12/S-018/11