

Rafał Bula

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
e-mail: rafal.bula@ue.katowice.pl

ANALIZA WYMIARU FRAKTALNEGO SPÓŁEK NOTOWANYCH NA GIEŁDZIE PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE – ASPEKTY METODYCZNE

ANALYSIS OF FRACTAL DIMENSION OF SHARES TRADED AT THE WARSAW STOCK EXCHANGE – METHODOICAL ISSUES

DOI: 10.15611/nof.2017.1.01
JEL Classification: G17

Streszczenie: Artykuł jest poświęcony problematyce szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych. Ze względu na mnogość metod szacowania owego wymiaru zasadne jest pytanie, czy oszacowania uzyskiwane za pomocą odmiennych metod cechują się podobnymi własnościami w sensie statystycznym. Głównym celem artykułu jest zatem uzyskanie odpowiedzi na tak postawione pytanie w odniesieniu do metody segmentowo-wariacyjnej, podziału pola oraz metody Higuchiego. Badania zostały przeprowadzone w oparciu o ceny akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Oszacowania dostarczane przez metodę podziału pola okazały się istotnie odmienne w porównaniu z oszacowaniami uzyskiwanymi za pomocą pozostałych metod. Ponadto sformułowano konkluzję, że hipotez o wykładniczym bądź liniowym związku pomiędzy oszacowaniami otrzymywanymi za pomocą metody segmentowo-wariacyjnej i podziału pola w świetle dostępnych danych nie można odrzucić.

Słowa kluczowe: wymiar fraktalny, metoda segmentowo-wariacyjna, metoda podziału pola, metoda Higuchiego.

Summary: This article is devoted to the problem of proper estimation of fractal dimension. Three methods of estimation are discussed: variation method, division of area method and Higuchi method. In the second part of the article real financial time series are used to examine properties of estimates received using abovementioned methods. These are closing prices of shares quoted at Warsaw Stock Exchange. Multiple statistical tools were used to describe properties of empirical distributions of fractal dimension estimates, i.e. normality tests, goodness of fit tests, etc. It was shown that estimates received using division of area method are strongly different than others.

Keywords: fractal dimension, variation method, area division method, Higuchi method.

1. Wstęp

Metody badawcze opierające się na idei obiektów fraktalnych od czasu wydania fundamentalnego dzieła B. Mandelbrota (zob. [Mandelbrot 1983]) zaczęto wykorzystywać w analizach najrozmaitszych zjawisk i procesów. Obecnie uczeni posiłkują się nimi zarówno w naukach przyrodniczych, np. w geofizyce [De la Torre i in. 2013], astronomii [Movahed i in. 2006; 2011], naukach społecznych (np. w nauce o komunikacji społecznej) [Mularczyk, Zdonek 2013] oraz medycynie [Harne 2014]. Metody te znalazły także zastosowanie w naukach ekonomicznych [Klonowski i in. 2004].

Wśród zagadnień analizowanych w oparciu o pojęcie fraktala i samopodobieństwa obiektów należy wymienić kwestię oceny ryzykowności podejmowanych decyzji inwestycyjnych – szczególnie odnoszących się do lokowania kapitałów na rynku finansowym. Przyjmuje się bowiem, że finansowe szeregi czasowe, w tym ceny czy stóp zwrotu z papierów wartościowych, cechują się samopodobieństwem (w sensie statystycznym). Fakt ten umożliwia dokonanie ich analizy i opisu z wykorzystaniem metod oraz aparatu pojęciowego właściwego geometrii fraktalnej.

Pojęciem kluczowym w badaniu finansowych szeregów czasowych w ujęciu fraktalnym jest wymiar fraktalny. To obszerne określenie obejmuje całe spektrum rozmaitych miar, z których każda opisuje strukturę badanych obiektów. W odniesieniu do tworów abstrakcyjnych (o naturze zarówno stochastycznej, jak i deterministycznej) możliwe jest (nawet jeśli byłoby to niezmiernie skomplikowane) określenie teoretycznego wymiaru fraktalnego danej struktury. Dla fraktali naturalnych jest to zasadniczo niemożliwe, co wymusza uciekanie się do korzystania ze stosownych metod estymacji wymiaru fraktalnego.

Dotychczas powstało wiele metod szacowania wymiaru fraktalnego, przy czym należy nadmienić, że niektóre są wykorzystywane właściwie sporadycznie. Ponadto część metod skutkuje uzyskaniem oszacowań wielkości powiązanych z wymiarem fraktalnym jedynie pod warunkiem spełnienia określonych założeń. Z tego też względu przedmiotem badań autora są metody odwołujące się bezpośrednio do definicji wymiaru fraktalnego, tj. metoda segmentowo-wariacyjna, metoda podziału pola oraz metoda Higuchiego.

Głównym celem artykułu jest zbadanie, czy poziom oszacowań wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych jest niezależny od wyboru metody estymacji. Z tak sformułowanym celem zasadniczym w naturalny sposób wiąże się cel cząstkowy, jakim jest określenie, czy odkryta uprzednio przez autora na drodze rozważań teoretycznych zależność między oszacowaniami wymiaru fraktalnego otrzymanymi wskutek zastosowania metody segmentowo-wariacyjnej oraz Higuchiego a za pomocą metody podziału pola występuje w odniesieniu do danych empirycznych.

Mając na względzie zakreślony cel badań, autor sformułował zasadniczą hipotezę badawczą następująco: oszacowania uzyskiwane za pomocą metody podziału

poła oraz pozostałych metod różnią się istotnie. Wspomniana rozbieżność dotyczy zarówno typu rozkładu, jak i parametrów cechujących odnośne rozkłady. Ponadto, nawiązując do cząstkowego celu artykułu, próbie falsyfikacji poddano hipotezę głoszącą, że między wymiarem fraktalnym szacowanym za pomocą metody podziału poła oraz pozostałymi występuje zależność wykładnicza.

Ze względu na konieczność dokonania wyboru odpowiedniego zbioru danych podlegających analizie autor podjął decyzję o badaniu szeregów czasowych stóp zwrotu z akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W obliczeniach wykorzystano logarytmiczne stopy zwrotu dla cen zamknięcia. Wszelkie kalkulacje autor prowadził z wykorzystaniem pakietu Microsoft Excel oraz języka programowania Visual Basic for Applications, a także posiłkując się programem Statistica.

2. Wymiar fraktalny i jego zastosowanie w pomiarze ryzyka inwestycyjnego

Począwszy od drugiej połowy XIX wieku, początkowo wśród praktyków, a następnie także wśród uczonych pojawiło się dążenie, by fluktuacje cen instrumentów finansowych scharakteryzować w sposób ilościowy. Już w pierwszych pracach poświęconych owej problematyce zaproponowano wykorzystanie statystycznych mierników opisujących empiryczne rozkłady prawdopodobieństwa – w szczególności popularne i szeroko wykorzystywane wówczas odchylenie prawdopodobne, a także odchylenie kwadratowe (czyli według obecnej nomenklatury – odchylenie standardowe) [Regnault 1863; Buła 2014]. Idea ta została następnie utrwalona w pracach L. Bacheliera [Bachelier 1900], by stać się fundamentem współczesnej teorii inwestycji zapoczątkowanej przez H. Markowitza [Markowitz 1952]. Mimo jej ogromnego i niezaprzecznego wpływu na rozwój i bieżący stan wiedzy w owym zakresie, można stwierdzić, że w swej klasycznej postaci ma ona w chwili obecnej znaczenie jedynie teoretyczne, stosunkowo nikłe zaś praktyczne¹. Model błędzenia losowego cen papierów wartościowych, którego prawdziwość stanowiłaby istotną przesłankę do stosowania metodyki Markowitza, również jest obecnie kwestionowany. Jednocześnie nie wydaje się prawdopodobne, by którakolwiek z konkurencyjnych modyfikacji modelu wyjściowego zdobyła choćby zbliżony status. Wspomniane względy sprawiają, że w ramach dotychczasowego paradygmatu możliwości eksplanacyjne wydają się zdecydowanie niewystarczające². Z tego też powodu na

¹ Nie można jednak orzec o owej koncepcji, że została sfalsyfikowana, jak bowiem zauważa W. Sharpe, „Przyjęta w finansach klasyfikacja odróżnia teorie *normatywne* (preskryptywne) i *pozytywne* (deskryptywne). Przełomowa teoria portfela oparta na średniej i wariancji stworzona przez Markowitza (1952) niewątpliwie należy do pierwszej kategorii [...]” [Sharpe 1991].

² Co zgodnie z koncepcją Thomasa Kuhna winno prowadzić do jego zmierzchu i powstania nowego paradygmatu [Kuhn 2011].

znaczeniu zyskuje koncepcja zakładająca wykorzystanie pojęć i metod właściwych geometrii fraktalnej.

Najistotniejszymi pojęciami w owej koncepcji są pojęcia obiektu fraktalnego oraz wymiaru fraktalnego. Wśród definicji obiektu fraktalnego można odnaleźć zarówno określenia sformalizowane, jak i sformułowane mniej rygorystycznie, uwzględniające zmienny przedmiot badań. Za najdogodniejszą w analizie finansowych szeregów czasowych autor uznał definicję głoszącą, że „Ogólnie rzecz biorąc, fraktale matematyczne i naturalne to obiekty, których chropowatość i rozdrobnienie nie zanika ani nie fluktuuje, lecz pozostaje nie zmienione w istotnym stopniu przy kolejnych przybliżeniach” [Mandelbrot 2010]. Na potrzeby niniejszego artykułu przyjęto zatem, że mianem fraktali należy określać obiekty cechujące się pewnymi formami samopodobieństwa (z konieczności o charakterze statystycznym). Jako że przedmiotem odnośnych badań są finansowe szeregi czasowe, zakłada się, że można je opisać jako samopodobne, a zatem jako obiekty o własnościach fraktalnych. Owo założenie ma charakter przyjętej w pewnym sensie apriorycznie hipotezy naukowej, której potwierdzenie bądź fałsyfikacja mogą nastąpić dopiero w drodze obszernych i intensywnych badań. Ponieważ jej odrzucenie nie jest w chwili obecnej możliwe, autor uznaje ją na potrzeby prowadzonych badań za niefałszywą, a co najmniej za potencjalnie użyteczną.

Wśród charakterystyk opisujących strukturę fraktali najistotniejszą jest wymiar fraktalny³. Spośród rozmaitych definicji tej wielkości za najbardziej użyteczną ze względu na obrany przedmiot badań autor uznał wymiar pudełkowy (pojemnościowy, Minkowskiego-Bouliganda, nazywany czasem entropią Kołmogorowa czy wymiarem entropijnym), stąd też w dalszych rozważaniach określenia „wymiar fraktalny” i „wymiar pudełkowy” będą stosowane zamiennie. Określeniem równoważnym podanemu przez twórców tej wielkości, a nie zmuszającym do posilkowania się pojęciem pokrycia Minkowskiego, jest następujące⁴:

$$\dim_B(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

gdzie $N_\varepsilon(X)$ jest liczbą hipersześcianów siatki o boku ε mających co najmniej jeden punkt wspólny z analizowanym obiektem X . Zapisane w innej postaci:

$$N_\varepsilon(X) \sim \varepsilon^{-\dim_B(X)}$$

dla $\varepsilon \rightarrow 0$. Wymiar pudełkowy obrazuje zatem fluktuacje liczby kwadratów niezbędnych do pokrycia analizowanego obiektu w sytuacji, gdy długość boku siatki kwadratowej zmniejszamy w granicy do zera.

W zależności od konstrukcji danego tworu wymiar fraktalny może opisywać strukturę jedynie lokalnie bądź globalnie. W odniesieniu do graficznej reprezentacji

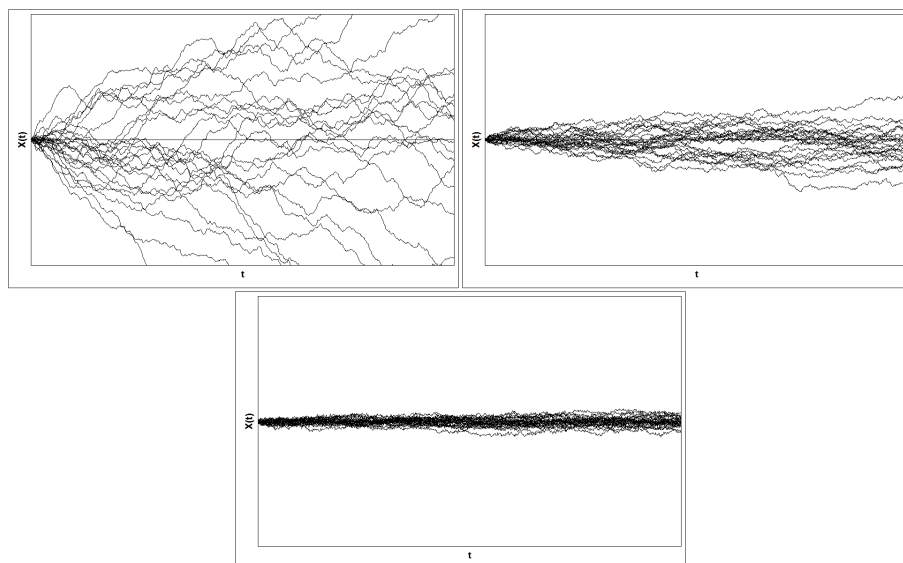
³ Łac. *fractus* – złamany.

⁴ Możliwe jest także inne, ekwiwalentne zdefiniowanie $N_\varepsilon(X)$, jednak ze względu na specyficzny przedmiot badań niniejszego artykułu pozostałe określenia są mało użyteczne [Falconer 2003].

procesów stochastycznych⁵ można uznać, że wymiar fraktalny charakteryzuje globalne fluktuacje danej wielkości, jeżeli mamy do czynienia z procesem o samopodobnych stacjonarnych przyrostach, tj. spełniającym warunek:

$$X(t_0 + \tau) - X(t_0) \stackrel{d}{=} r^{-H} [X(t_0 + r\tau) - X(t_0)], \quad t_0 \geq 0$$

dla dowolnego $r > 0$ oraz $\tau > 0$, gdzie $X(t), t \geq 0$ jest rozpatrywanym procesem, a H wykładnikiem samopodobieństwa powiązany z wymiarem fraktalnym relacją $H = 2 - \dim_B(X)$. Gdy prezentowana zależność pozostaje prawdziwa jedynie dla $\tau \rightarrow 0$, wówczas wymiar fraktalny opisuje zachowanie procesu wyłącznie lokalnie, dla zmian zachodzących w relatywnie krótkich okresach.



Rys. 1. Szeregi czasowe o zróżnicowanym wymiarze fraktalnym: 1,2; 1,5 oraz 1,8 uzyskane w drodze symulacji

Źródło: opracowanie własne.

Jeżeli analizuje się proces skumulowanych stóp zwrotu⁶ z pewnego instrumentu finansowego, cechujący się wspomnianymi własnościami w ujęciu globalnym, to wówczas wymiar fraktalny procesu jest ściśle powiązany z poziomem zmienności. Jeśli utożsamia się zmienność z ryzykiem, to, jak wykazano [Buła 2013] dla nieskończenie krótkich horyzontów inwestycyjnych, wzrost wymiaru fraktalnego skut-

⁵ Sformułowanie „wymiar fraktalny procesu stochastycznego” jest uproszczeniem, w rzeczywistości bowiem chodzi o wymiar fraktalny krzywej przedstawiającej trajektorię procesu.

⁶ Najczęściej wykorzystuje się w tym przypadku stopy logarytmiczne ze względu na ich addytywność.

kuje zwiększeniem się poziomu ryzyka. Z kolei w nieskończenie długiej perspektywie czasowej wzrost wymiaru fraktalnego powoduje zmniejszenie się ryzykowności, którą obarczony jest rozpatrywany instrument finansowy. Wymiar fraktalny jest zatem istotnym, choć jeszcze niedostatecznie rozpoznanym miernikiem ryzyka [Buła, Pera 2015].

3. Metody estymacji wymiaru fraktalnego

Istotnym problemem związanym z badaniem finansowych szeregów czasowych w ujęciu fraktalnym jest fakt, że ich reprezentacje graficzne należałoby zaliczyć do klasy fraktali naturalnych stochastycznych. Ze względu na niemożność apriorycznego określenia praw rządzących fluktuacjami badanych wielkości, niemożliwe jest także obliczenie wymiaru fraktalnego i z konieczności trzeba się posilkować odpowiednimi metodami estymacji. Dotychczas zaproponowano wiele rozmaitych metod, spośród których autor w niniejszym artykule, ze względów opisanych uprzednio, wykorzystał metodę segmentowo-wariacyjną, metodę podziału pola oraz metodę Higuchiego. Każda z użytych metod reprezentuje odmienną filozofię kalkulacji: w przypadku krzywych położonych na płaszczyźnie w metodzie segmentowo-wariacyjnej analizowana jest zależność między polem prostokątów pokrywających daną strukturę w kolejnych segmentach a długością ich podstawy, w metodzie podziału pola – między kolejno uzyskiwanymi polami, w metodzie Higuchiego zaś – między długością krzywej a długością podstawy segmentu.

Metoda segmentowo-wariacyjna stanowi modyfikację metody wariacyjnej zaproponowaną przez M. Zwolankowską (zob. [Zwolankowska 2000; Zeug-Zebro 2015]). Opiera się ona na zależności wiążącej „objętość” (w szczególności zatem pole) hipersześcianów mających co najmniej jeden punkt wspólny z analizowanym obiektem:

$$\dim_B(X) = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma_\varepsilon(X)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma_\varepsilon(X) / \varepsilon^2}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

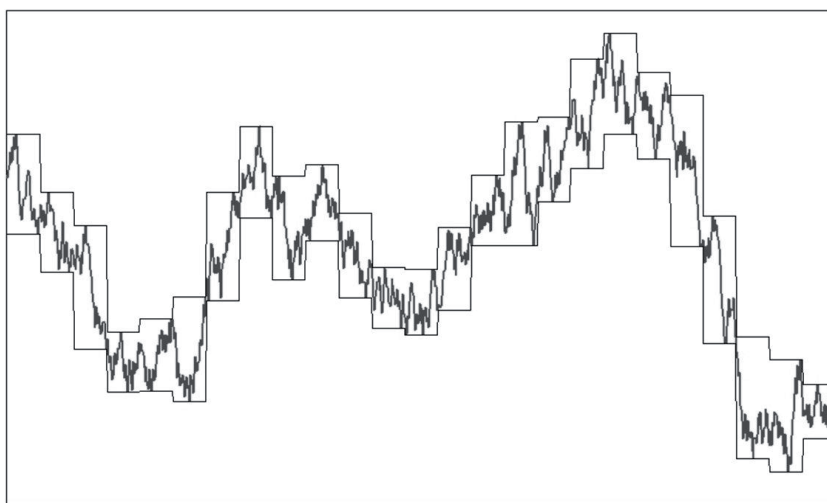
gdzie $\Gamma_\varepsilon(X)$ jest wspomnianą „objętością” dla hipersześcianów o boku ε . Dla empirycznych szeregów czasowych kluczowe jest właściwe oszacowanie $\Gamma_\varepsilon(X)$. W metodzie segmentowo-wariacyjnej wykres szeregu⁷ przeskalowuje się tak, by pierwsza obserwacja przypadła na chwilę zerową, a ostatnia – na koniec okresu jednostkowego. Następnie jest on dzielony na segmenty obejmujące m obserwacji (ostatni segment może zawierać ich mniej niż m). $\Gamma_\varepsilon(X)$ oblicza się jako⁸:

$$\Gamma_\varepsilon(X) = \sum_{i=1}^{[(n-1)/(m-1)]} h_i \cdot \varepsilon + h' \cdot (1 - \varepsilon \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor),$$

⁷ W sensie łamanej zbudowanej z odcinków łączących kolejne punkty reprezentujące obserwacje.

⁸ W niniejszym artykule symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ jest wykorzystywany wyłącznie do oznaczenia cechy liczby.

gdzie n to liczba obserwacji, h_i – różnica między maksymalną a minimalną wartością danej wielkości w i -tym segmencie, ε – długość segmentu, h' – różnica między maksymalną a minimalną wartością danej wielkości w segmencie zawierającym mniej niż m obserwacji (jeśli $m - 1$ dzieli $n - 1$ bez reszty, to można przyjąć $h' = 0$). Postępowanie to powtarza się dla wielokrotności m (przy czym liczba segmentów nie może być mniejsza niż dwa). Wymiar fraktalny jest szacowany za pomocą regresji liniowej $\ln \Gamma_\varepsilon(X)/\varepsilon^2$ względem $\ln \frac{1}{\varepsilon}$. Dla $m = 2, m = 3, m = 5, m = 7$ uzyskuje się kolejne oszacowania wymiaru fraktalnego. Jeśli ich średnia arytmetyczna wynosi $1\frac{1}{2}$, wówczas za finalne oszacowanie przyjmuje się $1\frac{1}{2}$, gdy średnia jest mniejsza – wartość minimalną, gdy większa zaś – maksymalną.



Rys. 2. Przykładowy podział na segmenty wykresu szeregu czasowego w metodzie segmentowo-wariacyjnej

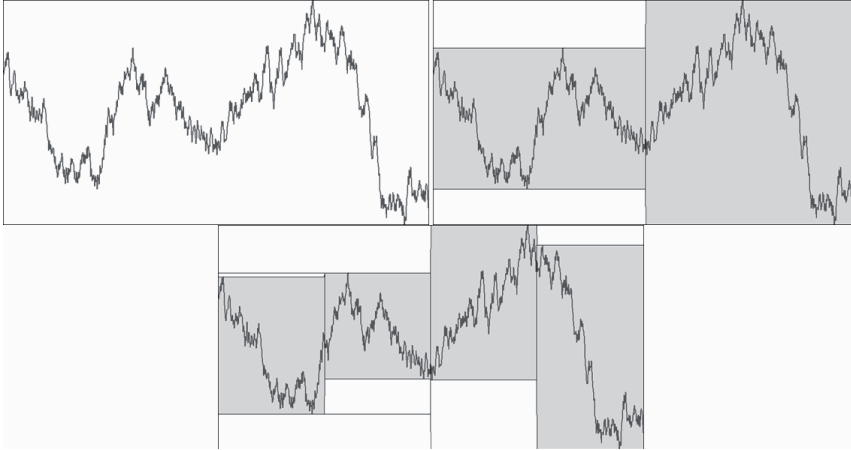
Źródło: opracowanie własne.

Metoda podziału pola opracowana przez G. Przekotę (zob. [Przekota 2003]) opiera się na zależnościach występujących między polami kolejnych prostokątów pokrywających wykres badanego szeregu. W pierwszej kolejności jest on pokrywany prostokątem o bokach równoległych do osi kartezjańskiego układu współrzędnych, przy czym wysokość jest równa różnicy między maksymalną a minimalną wartością obserwowanej wielkości, podstawa zaś – długości szeregu⁹. Następnie dzieli się go na połowy, a prostokątami są pokrywane fragmenty wykresu znajdujące się w każdym z segmentów. Finalnie oblicza się sumę ich pól (p) oraz pole prostokąta pierwotnego (P). Zależność postulowana przez Przekotę jest postaci:

$$p = \dim_B(X) \cdot \frac{p}{2} \cdot$$

⁹ Rozumianej jako liczba obserwacji pomniejszona o jednostkę.

Powtarzając opisaną procedurę i traktując nowo powstałe prostokąty jako pierwotne, uzyskamy zbiór punktów postaci $(\frac{p}{2}, p)$ umożliwiający otrzymanie oszacowania wymiaru fraktalnego za pomocą regresji liniowej (bez wyrazu wolnego).



Rys. 3. Idea podziału prostokątów pokrywających wykres szeregu czasowego w metodzie podziału pola

Źródło: opracowanie własne.

Metoda Higuchiego opiera się na badaniu długości analizowanych krzywych [Higuchi 1988]. W tym celu obierane jest pewne naturalne k , a następnie z szeregu pierwotnego $X(1), X(2), \dots, X(n)$ tworzy się k szeregów postaci:

$$X(m), X(m+k), X(m+2k), \dots, X(m + \lfloor \frac{n-m}{k} \rfloor \cdot k), m = 1, 2, 3, \dots, k.$$

W kolejnym kroku oblicza się długość odpowiedniej krzywej dla każdego podszeregu:

$$L_m(k) = \frac{n-1}{\lfloor \frac{n-m}{k} \rfloor k} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m}{k} \rfloor} |X(m+k) - X(m+(i-1)k)| / k$$

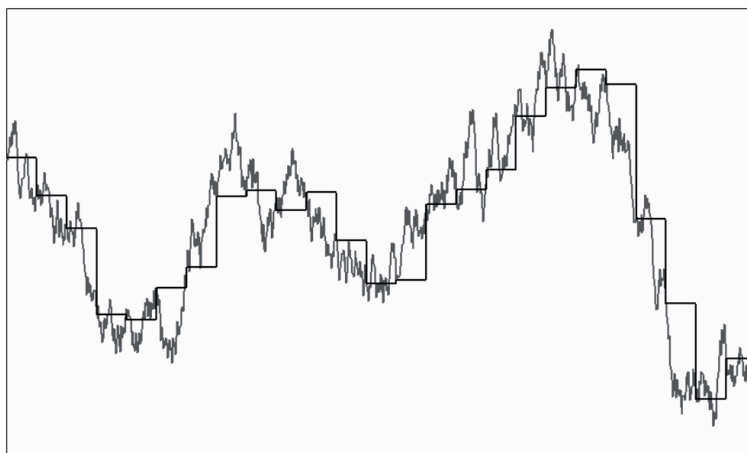
oraz średnią tak uzyskanych wielkości $\langle L(k) \rangle$. Wymiar fraktalny uzyskuje się z zależności $\langle L(k) \rangle \sim k^{-\dim_B(X)}$, korzystając najczęściej z metody najmniejszych kwadratów dla $\ln \langle L(k) \rangle \sim \dim_B(X) \ln \frac{1}{k}$.

W artykule [Hasegawa i in. 2013] zaproponowano także modyfikację metody Higuchiego polegającą na przypisywaniu większego znaczenia obserwacjom najnowszym. W tym celu wykorzystano wagi wykładnicze¹⁰:

¹⁰ We wzorze podanym w [Hasegawa i in. 2013] zbędne jest w mianowniku czynnika korygującego wyrażenie $\lfloor \frac{n-m}{k} \rfloor$.

$$L'_m(k) = \frac{n-1}{kA} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m}{k} \rfloor} (1-\alpha)^{\lfloor \frac{n-m}{k} \rfloor - i} |X(m+ik) - X(m+(i-1)k)| / k,$$

gdzie $A = \frac{1}{\alpha} \left(1 - (1-\alpha)^{\lfloor \frac{n-m}{k} \rfloor}\right)$. Wartość współczynnika α uzależniona jest od liczby dostępnych obserwacji – w niniejszym artykule autor przyjął za Hasegawą, że $\alpha = \frac{1}{n}$.



Rys. 4. Idea konstrukcji krzywych w metodzie Higuchiego

Źródło: opracowanie własne.

Wspomniane metody są coraz częściej stosowane w badaniach empirycznych do określania wymiaru fraktalnego najrozmaitszych wielkości. Jednocześnie w niedostatecznym stopniu rozpoznano własności oszacowań uzyskiwanych za ich pomocą. Dotychczasowe badania porównawcze odnosiły się do wielkości uzyskanych w drodze symulacji stochastycznej Monte Carlo, natomiast w przypadku danych empirycznych dotyczyły niezmiernie szczupłych zbiorów danych [Buła 2012a; 2012b].

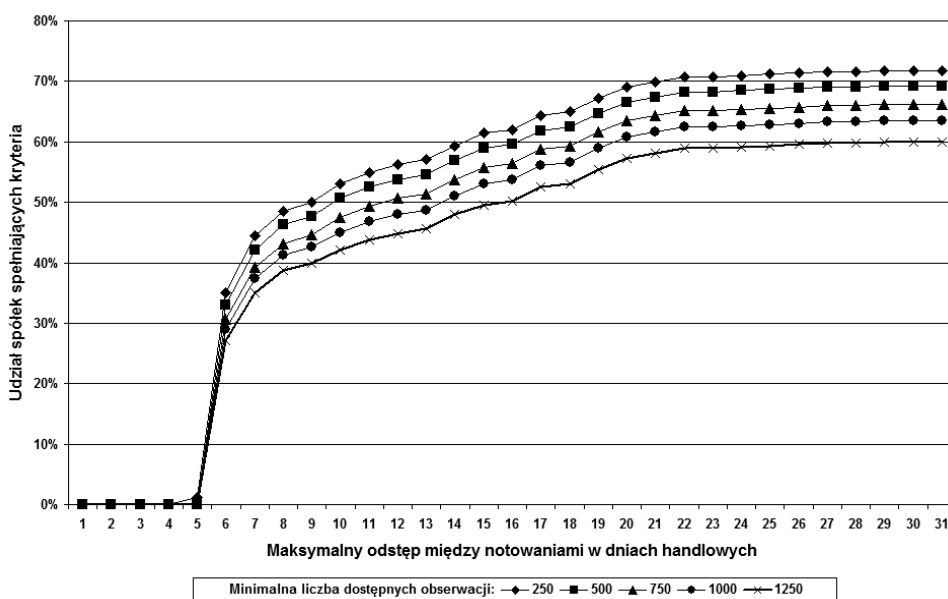
Z powyższych względów w kolejnym punkcie zostaną zaprezentowane wyniki badań dla zdecydowanie liczniejszego zbioru danych. W tym celu za pomocą przedstawionych metod autor zamierza oszacować wymiary fraktalne wybranych empirycznych szeregów czasowych. Następnie uzyskane rezultaty zostaną poddane analizie porównawczej z wykorzystaniem instrumentarium statystycznego, by można było otrzymać odpowiedź na pytanie, jakie są ich podstawowe własności oraz jakie zachodzą między nimi relacje.

4. Wyniki badań

Przedstawione metody zastosowano do oszacowania wymiaru fraktalnego szeregów czasowych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Dane wykorzystane przez autora zostały udostępnione przez serwis stooq.pl. Motywacją do posiłkowania się kwotowaniami dostarczonymi przez ten serwis jest fakt, że w odniesieniu do akcji ich notowania są systematycznie przeliczane wstecznie tak, by uwzględnić wypłatę pożytków, a zatem odzwierciedlają rzeczywisty poziom dochodowości inwestycji.

Według stanu na 31 lipca 2016 r. na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie notowano 482 spółki [Biuletyn statystyczny GPW 2016]. W obliczeniach posiłkowano się danymi dziennymi. Wykorzystano notowania, począwszy od 3 października 1994 r. (od kiedy to sesje na warszawskiej giełdzie mają miejsce codziennie). W skład tak określonej populacji spółek wchodzi jednak podmioty, których historia notowań jest relatywnie krótka bądź pomiędzy kolejnymi notowaniami występują przerwy o znacznej długości. Jako że takie zjawiska mogłyby zaburzać uzyskiwane oszacowania, wyjściowy zbiór spółek postanowiono ograniczyć. W tym celu sformułowano trzy kryteria – pominięto w analizach (przy założeniu, że w roku odbywa się 250 sesji):

a) spółki, których historia notowań obejmowała mniej niż 1250 obserwacji (tj. mniej niż 5 lat),



Rys. 5. Udział spółek, dla których przeciętna liczba notowań w ciągu roku była nie mniejsza niż 225

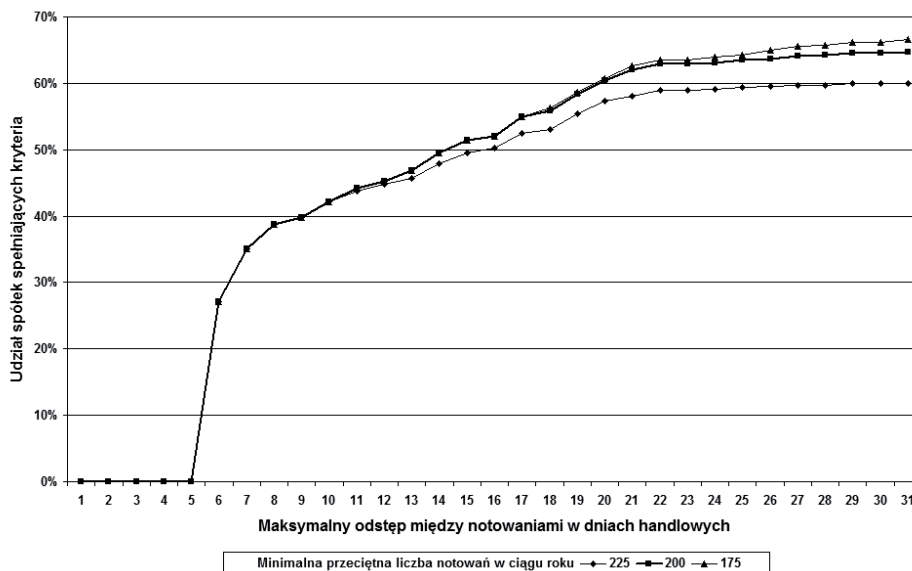
Źródło: opracowanie własne.

b) spółki, dla których przeciętna liczba notowań w ciągu roku była mniejsza niż 225 (tj. o więcej niż 10% teoretycznej liczby notowań),

c) spółki, w przypadku których choć jeden odstęp pomiędzy notowaniami był dłuższy niż 21 dni.

Analiza danych w świetle kryterium dostatecznej liczby obserwacji, minimalnej przeciętnej liczby notowań w ciągu roku oraz maksymalnej długości przerwy pomiędzy kolejnymi notowaniami wskazuje bowiem, że dla przyjętych wielkości granicznych następuje pewna stabilizacja liczby spółek spełniających wspomniane obostrzenia. Z tego też względu autor zdecydował o sformułowaniu wspomnianych kryteriów w prezentowanym brzmieniu.

Ostatecznie badaniom poddano 280 spółek notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W analizach wykorzystano dzienne logarytmiczne stopy zwrotu oraz skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu obliczone na podstawie cen zamknięcia w okresie 3.10.1994–31.07.2016.



Rys. 6. Udział spółek, dla których liczba dostępnych notowań była nie mniejsza niż 1250

Źródło: opracowanie własne.

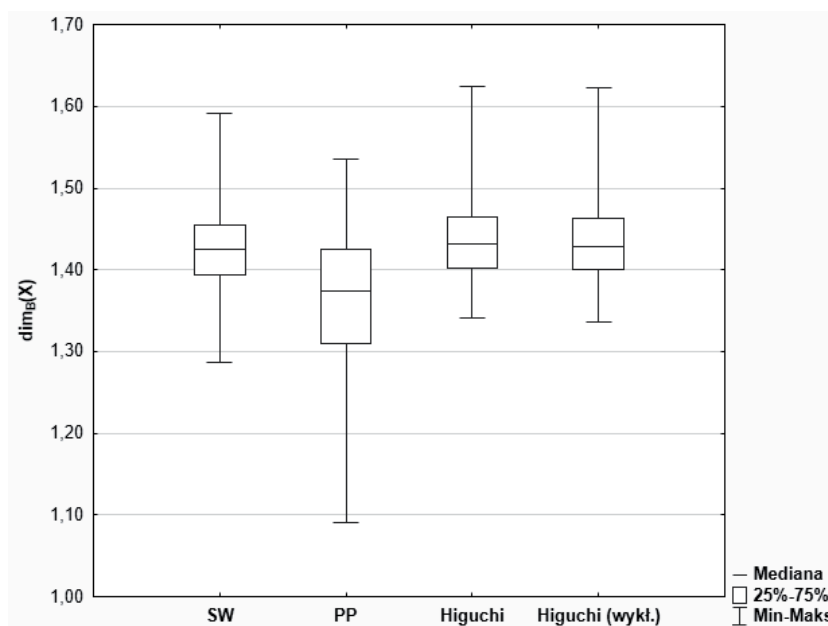
Wykorzystując dostępne dane, w pierwszej kolejności oszacowano wymiar fraktalny wykresów szeregów czasowych skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu za pomocą przedstawionych uprzednio metod. Podstawowe statystyki opisowe uzyskanych oszacowań przedstawiono w tab. 1 oraz na rys. 7.

Można zauważyć, że oszacowania uzyskiwane za pomocą metody podziału pola cechują się niższym przeciętnym poziomem, a jednocześnie większą dyspersją

Tabela 1. Statystyki opisowe uzyskanych oszacowań wymiaru fraktalnego

Metoda estymacji	\bar{x}	Me	Min	Maks	Q_1	Q_3	σ	CV	$\sqrt{\beta_1}$	β_2
SW	1,4276	1,4254	1,2861	1,5916	1,3933	1,4555	0,0507	0,0355	0,23	3,35
PP	1,3591	1,3741	1,0908	1,5349	1,3092	1,4246	0,0908	0,0668	-0,64	2,99
Higuchi	1,4369	1,4314	1,3405	1,6238	1,4020	1,4650	0,0488	0,0340	0,71	3,72
Higuchi (wykl.)	1,4353	1,4282	1,3359	1,6232	1,3997	1,4623	0,0490	0,0341	0,73	3,78

Źródło: opracowanie własne.



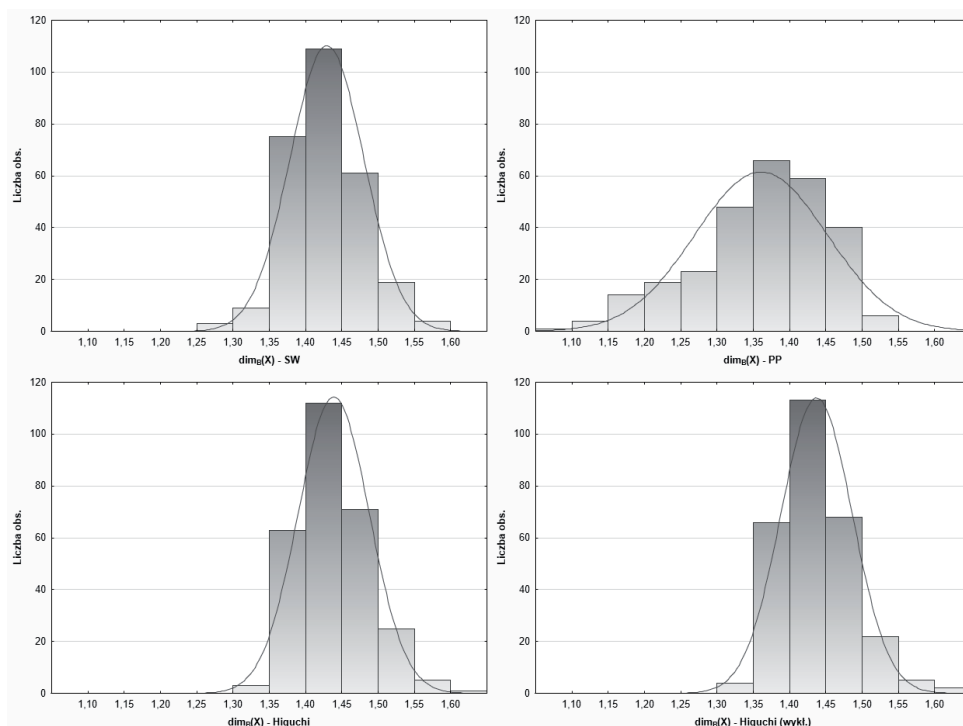
Rys. 7. Wykres pudełkowy dla oszacowań wymiaru fraktalnego uzyskanych za pomocą metody segmentowo-wariacyjnej, podziału pola i Higuchiego

Źródło: opracowanie własne.

w stosunku do oszacowań otrzymywanych z wykorzystaniem pozostałych metod. Podobne wnioski można sformułować, analizując histogramy.

Następnie zbadano, czy rozkład oszacowań wymiaru fraktalnego można uznać za normalny. W tym celu (ze względu na stosunkowo pokąźną liczbę obserwacji) wykorzystano test χ^2 , Jarque-Bera oraz Shapiro-Wilka. Ponadto ewentualne odchylenia od normalności zilustrowano na wykresach typu kwantyl-kwantyl.

Hipotezy o normalności rozkładu nie udało się odrzucić (dla poziomu istotności 0,05) jedynie w odniesieniu do oszacowań uzyskanych za pomocą metody segmentowo-wariacyjnej.



Rys. 8. Histogramy oszacowań wymiaru fraktalnego uzyskanych za pomocą metody segmentowo-wariacyjnej, podziału pola i Higuchiego

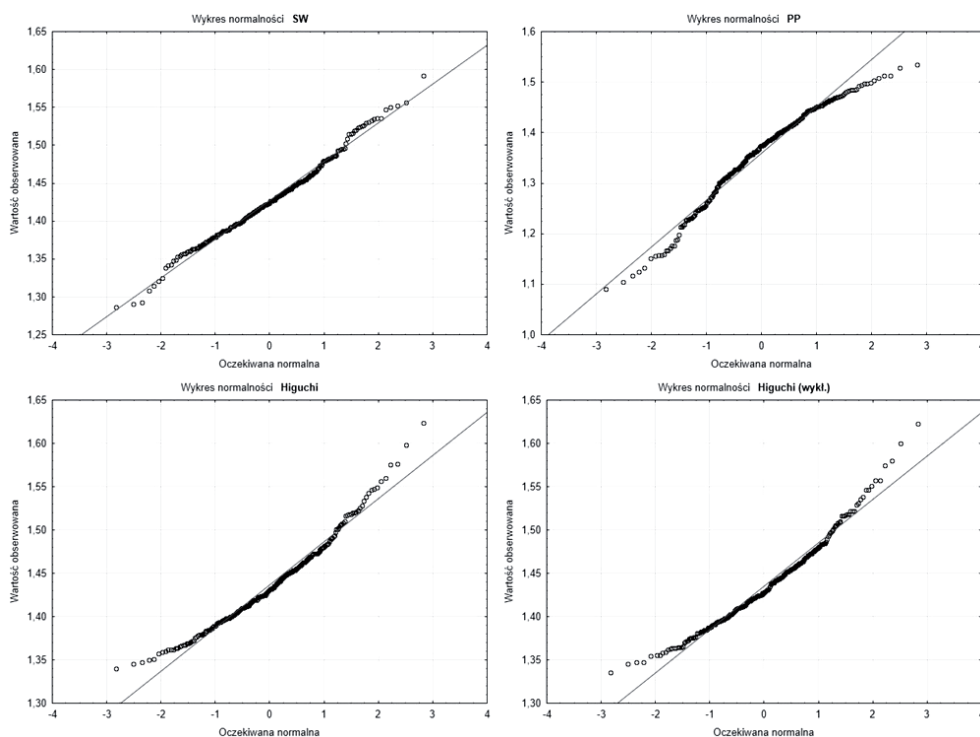
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Rezultaty testów normalności rozkładu

Test	Metoda estymacji			
	SW	PP	Higuchi	Higuchi (wykl.)
χ^2	5,68	20,79	6,10	9,42
p -value	0,128	0,002	0,107	0,024
Jarque-Bera	3,78	18,85	28,99	31,13
p -value	0,151	0,000	0,000	0,000
W	0,991	0,966	0,971	0,970
p -value	0,078	0,000	0,000	0,000

Źródło: opracowanie własne.

W następnym kroku postanowiono zbadać, czy za uprawnioną można uznać hipotezę, iż rozkład oszacowań wymiaru fraktalnego jest niezależny od wyboru metody jego estymacji. W tym celu wykorzystano zarówno testy nieparametryczne (Kolmogorowa oraz znaków), jak i parametryczne, w odniesieniu do oszacowanych średnich i wariancji.



Rys. 9. Wykresy kwantyl-kwantyl oszacowań wymiaru fraktalnego uzyskanych za pomocą metody segmentowo-wariacyjnej, podziału pola i Higuchiego

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Rezultaty testów zgodności rozkładów

Test znaków	Test Kolmogorowa	Metoda estymacji			
		SW	PP	Higuchi	Higuchi (wykl.)
Metoda estymacji	SW	–	4,39	0,76	0,63
	PP	47	–	4,90	4,94
	Higuchi	120	51	–	0,21
	Higuchi (wykl.)	124	54	76	–

Pogrubioną czcionką oznaczono wyniki skutkujące odrzuceniem hipotezy o zgodności rozkładów dla poziomu istotności wynoszącego 0,05.

Źródło: opracowanie własne.

Ponadto postanowiono dodatkowo zbadać, czy można uznać wartości oczekiwane oraz wariancje opisujące owe rozkłady za równe. Jako że apriorycznie można zakładać, że oszacowania są silnie ze sobą skorelowane, sporządzono macierz kore-

Tabela 4. Macierz korelacji oszacowań wymiaru fraktalnego

Współczynnik korelacji		Metoda estymacji			
		SW	PP	Higuchi	Higuchi (wykl.)
Metoda estymacji	SW	–	0,608	0,626	0,607
	PP	–	–	0,244	0,227
	Higuchi	–	–	–	0,997
	Higuchi (wykl.)	–	–	–	–

Pogrubioną czcionką oznaczono wyniki skutkujące odrzuceniem hipotezy o zerowym współczynniku korelacji dla poziomu istotności wynoszącego 0,05.

Źródło: opracowanie własne.

lacji. Wszystkie współczynniki okazały się istotnie różne od zera (dla poziomu istotności 0,05), dlatego też klasyczne testy równości średnich i wariancji nie mają zastosowania. Z tego też względu wykorzystano testy właściwe dla zmiennych połączonych, tj. test t oraz test Morgana, ponieważ rozkłady okazały się jednak zbliżone do normalnego.

Tabela 5. Rezultaty testów równości średnich i wariancji

Test Morgana równości wariancji	Test t równości średnich	Metoda estymacji			
		SW	PP	Higuchi	Higuchi (wykl.)
Metoda estymacji	SW	–	15,83	0,79	0,70
	PP	-12,96	–	-14,13	-13,69
	Higuchi	-3,63	11,36	–	7,84
	Higuchi (wykl.)	-2,91	11,24	-0,85	–

Pogrubioną czcionką oznaczono wyniki skutkujące odrzuceniem hipotezy o równości parametrów dla poziomu istotności wynoszącego 0,05.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Przeciętna wartość bezwzględna różnic oszacowań

Przeciętna wartość bezwzględna różnic			Bezwzględna			
			Metoda estymacji			
			SW	PP	Higuchi	Higuchi (wykl.)
Względna	Metoda estymacji	SW	–	0,0779	0,0343	0,0348
		PP	5,7%	–	0,0914	0,0906
		Higuchi	2,4%	6,7%	–	0,0031
		Higuchi (wykl.)	2,4%	6,6%	0,2%	–

Źródło: opracowanie własne.

Przeprowadzone testy wskazują na konieczność odrzucenia hipotezy o zgodności rozkładu oszacowań wymiaru fraktalnego uzyskanych za pomocą metody podziału pola oraz otrzymanych z wykorzystaniem pozostałych metod – rozkłady owe różnią się istotnie zarówno kształtem, jak i parametrami. W przypadku oszacowań otrzymanych za pomocą metody Higuchiego wydaje się, że stosowanie mechanizmu wykładniczego ważenia obserwacji w niewielkim stopniu wpływa na uzyskiwane rezultaty. Efektem jest co prawda istotne statystycznie obniżenie przeciętnej wartości oszacowań, jednak przy zbliżonym kształcie rozkładu oraz praktycznie jednostkowej korelacji¹¹. Wydaje się zatem, że do celów praktycznych można uznać owe oszacowania za nieodróżnialne.

Porównując rozkład oszacowań wymiaru fraktalnego uzyskanych za pomocą metody segmentowo-wariacyjnej oraz Higuchiego, należy stwierdzić, że metody te dostarczają, przeciętnie rzecz ujmując, zbliżonych oszacowań. Różnice pomiędzy tymi rozkładami wynikają z większej dyspersji rezultatów otrzymywanych metodą Zwolankowskiej (choć w liczbach bezwzględnych – stosunkowo nieznacznej), dlatego też hipoteza o zgodności owych rozkładów musi zostać odrzucona. Rozstrzygnięcie, którą ze wzmiankowanych metod należy uznać za preferowaną, pozostaje problematyczne.

W toku prowadzonych rozważań teoretycznych autor sformułował hipotezę o występowaniu wykładniczej zależności między wymiarem fraktalnym szacowanym za pomocą metody segmentowo-wariacyjnej oraz Higuchiego a otrzymywanym z wykorzystaniem metody podziału pola. Postulowany związek ma postać:

$$D = 2^{d-1},$$

gdzie d oznacza wymiar szacowany metodą Zwolankowskiej bądź Higuchiego, D zaś – metodą Przekoty. Wykorzystując zgromadzone dane, przeprowadzono także analizę ukierunkowaną na zweryfikowanie hipotezy o istnieniu takiej zależności bądź związku liniowego. W tym celu oszacowano parametry regresji w odniesieniu do zależności:

$$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i,$$

$$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2^{d_i-1} + \xi_i,$$

$$\log_2 D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i,$$

przyjmując, że założenia lematu Gaussa-Markowa są w przybliżeniu spełnione. Uzyskane rezultaty przedstawiono w tab. 7.

Obliczone wielkości skłaniają do odrzucenia hipotezy o występowaniu rzeczonyj zależności – zarówno wykładniczej, jak i liniowej – w sytuacji, gdy zmienną objaśniającą jest wymiar fraktalny szacowany za pomocą metody Higuchiego. Nato-

¹¹ Jeśli pominąć różnice między średnimi owych rozkładów, statystyka testowa testu znaków przybiera wartość 129, co oznacza brak przesłanek do odrzucenia hipotezy o zgodności rozkładów.

Tabela 7. Wyniki analizy regresji

Typ zależności	Metoda estymacji	Wielkość					
		$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\sigma}$	$t_{\hat{\alpha}_0}$	$t_{\hat{\alpha}_1}$	R^2
$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i$	SW	-0,1965	1,0897	0,0722	1,61	1,05	0,370
$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i$	Higuchi	0,7061	0,4544	0,0882	4,54	5,04	0,060
$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i$	Higuchi (wykl.)	0,7566	0,4198	0,0886	4,87	5,36	0,051
$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2^{d_i-1} + \xi_i$	SW	-0,1981	1,1571	0,0724	1,61	1,72	0,366
$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2^{d_i-1} + \xi_i$	Higuchi	0,7115	0,4781	0,0882	4,61	4,59	0,060
$D_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2^{d_i-1} + \xi_i$	Higuchi (wykl.)	0,7600	0,4428	0,0886	4,93	4,89	0,052
$\log_2 D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i$	SW	-1,2431	1,1785	0,0791	1,82	1,91	0,364
$\log_2 D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i$	Higuchi	-0,2524	0,4814	0,0963	4,40	4,39	0,056
$\log_2 D_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \xi_i$	Higuchi (wykl.)	-0,1951	0,4421	0,0968	4,74	4,72	0,048

Pogrubioną czcionką oznaczono wyniki skutkujące odrzuceniem hipotezy zerowej dla poziomu istotności wynoszącego 0,05.

Źródło: opracowanie własne.

miast w przypadku metody segmentowo-wariacyjnej nie udało się odrzucić żadnej ze wspomnianych hipotez. Ustalenie, czy związek między tymi zmiennymi ma charakter liniowy, czy też nie, wymaga zatem przeprowadzenia dodatkowych analiz.

Warto jednocześnie zauważyć, że rozkład oszacowań wymiaru fraktalnego nie jest rozkładem jednopunktowym skoncentrowanym w $1\frac{1}{2}$, co sugerowałby klasyczny model błędzenia losowego. W rzeczywistości na giełdzie mamy do czynienia z całym spektrum wymiarów fraktalnych, przy czym zdecydowanie dominują tu szeregi czasowe o charakterze persystentnym (udział spółek o wymiarze fraktalnym mniejszym niż $1\frac{1}{2}$ wynosi od 89% do 98% w zależności od metody estymacji). Uwzględnienie tego stanu rzeczy w metodyce kwantyfikacji ryzyka inwestycyjnego jest problemem wymagającym podjęcia intensywnych badań.

5. Zakończenie

Rozważania oraz wyniki badań przedstawione w niniejszym artykule skłaniają do sformułowania kilku podsumowujących wniosków.

Po pierwsze, zaprezentowane metody estymacji wymiaru fraktalnego dostarczają zróżnicowanych rezultatów. Oszacowania otrzymywane za pomocą metody podziału pola są zdecydowanie niższe oraz cechują się większą dyspersją niż uzyskane za pomocą pozostałych metod. Rezultat ten stanowi potwierdzenie dotychczas-

wych wniosków z badań autora prowadzonych w oparciu o dane otrzymane wskutek zastosowania symulacji stochastycznej Monte Carlo, sugerujących stosowanie owej metody co najmniej z daleko idącą ostrożnością.

Ponadto pokazano, że w praktyce posiłkowanie się zaproponowanym przez Hasegawę i in. mechanizmem wykładniczego ważenia obserwacji w metodzie Higuchiego nie prowadzi do zdecydowanie odmiennych rezultatów. Ewentualne różnice w przeciętnym poziomie oszacowań (choć statystycznie istotne) są na tyle mało znaczące, że nie mogą skutkować uznaniem owych metod (w sensie uzyskiwanych wyników) za różniące się.

Niezbędne są natomiast dalsze badania dotyczące metody segmentowo-wariacyjnej i metody Higuchiego. Choć zbliżone w sensie wartości przeciętnej, to jednak otrzymane oszacowania są na tyle istotnie różne, że nie można ich ze sobą utożsamiać. Pozostaje zatem rozstrzygnięcie kwestii, którą metodą i w jakich warunkach należy się posługiwać, by otrzymywać wartości możliwie najbliższe rzeczywistym. Ta kwestia musi się stać przedmiotem dalszych badań.

Jednocześnie analiza materiału empirycznego nie skłania do odrzucenia hipotezy o wykładniczym bądź liniowym związku pomiędzy oszacowaniami otrzymywanymi w metodzie podziału pola i segmentowo-wariacyjnej. Taką hipotezę należy natomiast odrzucić dla metody Higuchiego. Problem, czy wyprowadzona na gruncie teoretycznym i dla przypadku granicznego zależność pomiędzy analizowanymi oszacowaniami występuje w odniesieniu do danych rzeczywistych, pozostaje zatem nadal nierozwiązany.

Należy jednocześnie podkreślić, że przedstawione cząstkowe rezultaty dotyczą określonego (choć stosunkowo licznego) zbioru spółek i ich uogólnianie bez przeprowadzenia dodatkowych badań jest nieuprawnione. W szczególności autor uznaje za celowe przeanalizowanie danych dotyczących innych rynków – zarówno w odniesieniu do przedmiotu obrotu, jak i w ujęciu geograficznym.

Na marginesie rozważań metodycznych trzeba podkreślić, że wymiar fraktalny jest istotnie zróżnicowany w populacji badanych akcji. Stwierdzenie to jest przesłanką do podważenia rozpowszechnionych w nowoczesnej teorii finansów metod kwantyfikacji i zarządzania ryzykiem inwestycyjnym. Problematyce tej autor poświęci odrębne opracowanie.

Literatura

- Bachelier L., 1900, *Théorie de la Spéculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3^e série, tome 17, s. 21-86.
- Biuletyn statystyczny GPW, 2016, https://www.gpw.pl/pub/statystyki_miesieczne/201608_GPW.pdf (dostęp 19.09.2016).
- Buła R., 2012a, *Aspekty metodyczne szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych*, [w:] Kuczera M. (red.), *Młodzi naukowcy dla polskiej nauki*, Creativetime, Kraków.

- Buła R., 2012b, *Metoda podziału pola a metoda segmentowo-wariacyjna szacowania wymiaru fraktalnego*, [w:] Kuczera M. (red.), *Nowe trendy w naukach humanistycznych i społeczno-ekonomicznych*, Creativetime, Kraków.
- Buła R., 2013, *Ryzyko inwestycji a wymiar fraktalny*, *Studia Ekonomiczne*, nr 155, s. 450-466.
- Buła R., 2014, *O teorii spekulacji i inwestycji Julesa Regnaulta*, *Studia Ekonomiczne*, nr 204, s. 7-29.
- Buła R., Pera K., 2015, *Применение концепции фрактальной размерности для оценки инвестиционного риска на финансовых рынках*, [w:] Белозеров С.А. (red.), *Международный экономический симпозиум – 2015: материалы Международных научных конференций, посвященных 75-летию экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета 22-25 апреля 2015 г. Сборник статей*, Скифия-принт, Санкт-Петербург, s. 217-235.
- De la Torre C., González-Trejo J., Real-Ramírez C., Hoyos-Reyes L., 2013, *Fractal dimension algorithms and their application to time series associated with natural phenomena*, *Journal of Physics*, vol. 475, s. 1-10.
- Falconer K., 2003, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Harne B., 2014, *Higuchi Fractal dimension analysis of EEG signal before and after OM chanting to observe overall effect on brain*, *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 4, no. 4, s. 585-592.
- Hasegawa S., Anada H., Kanagawa S., 2013, *Pursuit fractal analysis of time-eries data*, <https://arxiv.org/pdf/1310.3564v1> (dostęp 18.07.2016).
- Higuchi T., 1988, *Approach to an irregular time series on the basis of the fractal geometry*, *Physica D*, vol. 31, s. 277-283.
- Klonowski W., Olejarczyk E., Stepien R., 2004, *'Epileptic seizures' in economic organism*, *Physica A*, vol. 342, s. 701-707.
- Kuhn T., 2011, *Struktura rewolucji naukowych*, Aletheia, Warszawa.
- Mandelbrot B., 1983, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman & Company, New York.
- Mandelbrot B., 2010, *A Geometry Able to Include Mountains and Clouds*, [w:] Lesmoir-Gordon N. (ed.), *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*, Springer, London.
- Markowitz H., 1952, *Portfolio selection*, *Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, s. 77-91.
- Movahed S., Jafari G., Ghasemi F., Rahvar S., Tabar R., 2006, *Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series*, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2.
- Movahed S., Jafari G., Ghasemi F., Rahvar S., Tabar R., 2011, *Erratum: Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series*, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 9.
- Mularczyk A., Zdonek I., 2013, *Analiza statystyk stron internetowych Politechniki Śląskiej metodami fraktalnymi*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Organizacja i Zarządzanie*, z. 64, nr 1894, s. 189-201.
- Przekota G., 2003, *Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola*, *Zeszyty Studiów Doktoranckich*, z. 12, s. 47-68.
- Regnault J., 1863, *Calcul des chances et philosophie de la bourse*, Mallet-Bachelier & Castel, Paris.
- Sharpe W., 1991, *Capital asset prices with and without negative holdings*, *Journal of Finance*, vol. 46, no. 2, s. 489-509.
- Zeug-Zebro K., 2015, *Zastosowanie wybranych metod szacowania wymiaru fraktalnego do oceny poziomu ryzyka finansowych szeregów czasowych*, *Studia Ekonomiczne*, nr 227, s. 109-124.
- Zwolankowska M., 2000, *Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja szacowania wymiaru fraktalnego*, *Przegląd Statystyczny*, nr 1-2, s. 209-224.