

*Received: 01.07.2014, accepted: 29.07.2014*

*przenośniki taśmowe  
opór przeginania taśmy  
analiza wymiarowa*

Kazimierz FURMANIK<sup>1</sup>

## **MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA ANALIZY WYMIAROWEJ W BADANIACH OPORU PRZEGINANIA TAŚMY NA BĘBNACH PRZENOŚNIKA**

W dążeniu do zmniejszenia energochłonności przenośników taśmowych poszukuje się możliwości obniżenia ich oporów głównych i skupionych. W przenośnikach kopalń podziemnych, na wymiarowanie ich napędów o stosunkowo małych średnicach i licznych bębnach, istotny wpływ mają opory przeginania taśmy zaliczane do oporów skupionych. Na drodze badań doświadczalnych poszukuje się możliwości dokładniejszego oszacowania tych oporów dla zapewnienia optymalnych cech konstrukcyjnych napędów. W artykule wskazano możliwości wykorzystania analizy wymiarowej w tym zakresie.

### **WSTĘP**

Przenośniki taśmowe są uniwersalnymi środkami transportu materiałów rozdrobnionych, a ich zalety i nowe uwarunkowania rynkowe oraz postępy w technologii produkcji taśm, podzespołów i narzędzi projektowania, umożliwiają osiąganie coraz wyższych ich parametrów eksploatacyjnych. Aktualnym i ważnym zagadnieniem jest także, by rozwiązania przenośników były energooszczędne, niezawodne i przyjazne dla środowiska naturalnego. Wzrost długości przenośników i zainstalowanej w nich mocy wiąże się ze zwiększeniem liczby bębnów napędowych, zwrotnych i kierujących, co przekłada się wprost na zwiększenie oporów przeginania taśmy na nich, zwłaszcza w górnictwie pod-

---

<sup>1</sup> Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie. Corresponding autor: fukaz@agh.edu.pl.

ziemnym, gdzie wobec ograniczeń przestrzeni roboczej przenośników stosuje się mniejsze średnice ich bębnow niż w przenośnikach kopalń odkrywkowych. Opory te są zaliczane do oporów skupionych i badane eksperymentalnie w warunkach laboratoryjnych i eksploatacyjnych dla oszacowania miarodajnych ich wartości (Gładysiewicz i in., 2014; Gładysiewicz, 2003; Żur, Hardygóra, 1979). Badania te wymagają wyboru tych parametrów spośród innych, których wpływ na opory przeginięcia taśmy jest znaczący i który będzie uwzględniany w zależnościach wyznaczonych na podstawie wyników tych badań. Ważnym jest także, by zależności te miały postać wzorów fizycznych wyznaczonych z zachowaniem kryteriów podobieństwa, dla szerszego ich wykorzystania w projektowaniu przenośników taśmowych.

W artykule wskazano możliwości wykorzystania w tym zakresie metody teorii podobieństwa mechanicznego – analizy wymiarowej, której wyniki mogą być przydatne w określaniu postaci zależności fizycznych opisujących opory przeginięcia taśmy na bębnach przenośnika taśmowego, jak również w budowie modeli fizycznych (stanowisk badawczych).

## TEORIA PODOBIEŃSTWA W BADANIACH

Metody stosowane w teorii podobieństwa pozwalają na:

1. określenie warunków badań modelowych poprzez wyznaczenie kryteriów podobieństwa,
2. budowę wzorów strukturalnych, stanowiących zasadniczą postać wzorów fizycznych,
3. planowanie badań doświadczalnych oraz uogólnianie ich wyników,
4. wykorzystanie ich w pracach teoretycznych.

Kryteria podobieństwa – wyznaczone w oparciu o metody teorii podobieństwa – umożliwiają budowę modeli, które uwzględniają interesujące nas w badaniach cechy układu. Za pomocą pomiarów na modelu określamy bezpośrednio wartość rozwiązania w danym punkcie modelu i rozwiązanie to – przy zachowaniu jednakowych wartości kryteriów (liczb) podobieństwa – odpowiada rozwiązaniu w odpowiednim punkcie układu rzeczywistego. Kryteria podobieństwa umożliwiają również budowę wzorów strukturalnych pozwalających na uogólnianie wyników badań doświadczalnych. Pozwalają także na zmniejszenie liczby zmiennych niezależnych w tych badaniach i są istotnym elementem w ich planowaniu.

Przy wyznaczaniu kryteriów podobieństwa można wykorzystywać różne sposoby (Müller, 1961; Nowak, 1969), przy czym najczęściej wyznacza się je przy pomocy równań różniczkowych lub analizy wymiarowej. Jeśli badany układ (czy proces), można opisać równaniami różniczkowymi, to nawet nie rozwiązując ich (nieliczna jest klasa rozwiązań ogólnych takich równań), można w prosty sposób wyznaczyć te kryteria (Buckingham, 1914; Drobot, 1954; Gładysiewicz, 2003). Świat fizyczny można

opisać przy pomocy zaledwie kilku wymiarów (długości, masy, temperatury, czasu, itd.). Każdemu równaniu fizykalnemu można przyporządkować równanie wymiarowe, które posiada taką samą postać jak równanie fizykalne, a wymiary uporządkowane są w ten sam sposób jak wielkości fizyczne. Jednemu równaniu fizykalnemu odpowiada jedno równanie wymiarowe, którego postać zależy od układu wielkości podstawowych.

Analiza wymiarowa stanowi gałąź matematyki stosowanej, której zadaniem jest wyznaczenie poprawnej, pod względem wymiarowym, postaci wzorów fizycznych. Analiza wymiarowa pozwala zarazem na wyrażenie zachowania się układu fizycznego za pomocą najmniejszej liczby zmiennych niezależnych i to w sposób niezależny od zastosowanych jednostek miar.

## WYKORZYSTANIE ANALIZY WYMIAROWEJ W BADANIACH OPORU PRZEGINANIA TAŚMY NA BĘBNIE

Znane z literatury wyniki tych badań (Gładysiewicz i in., 2014; Gładysiewicz, 2003; Żur, Hardygóra, 1979) bazują na modelach empirycznych wyznaczanych metodami statystycznymi i mają one odniesienie tylko do warunków prowadzonych badań doświadczalnych. Wprowadzanie nowych materiałów i technologii do produkcji taśm wymaga prowadzenia nowych badań doświadczalnych, w sposób umożliwiający jak najszerze wykorzystanie ich wyników. Wydaje się uzasadnione wykorzystanie w tym celu analizy wymiarowej, jako metody do budowy zarówno modelowych stanowisk badawczych, jak i wyznaczania w oparciu o wyniki tych badań poprawnej, pod względem wymiarowym postaci wzorów fizycznych opisujących opory przegینania taśmy na bębnie. Zjawiska zachodzące w obiekcie rzeczywistym i jego modelu fizycznym są podobne, gdy zachowane są kryteria podobieństwa, tj. takie same wartości liczb kryterialnych (Buckingham, 1914; Drobot, 1954; Müller, 1961; Nowak, 1969). Dlatego istotnym zagadnieniem jest ustalenie właściwych relacji pomiędzy parametrami modelu i obiektu rzeczywistego (czyli kryteriów podobieństwa) umożliwiającymi przenoszenie wyników badań z jednego na drugi, a także porównywanie wyników badań prowadzonych na różnych stanowiskach badawczych. W wyborze do analizy wymiarowej parametrów jako istotnych przydatne może być zarówno doświadczenie badacza, jak również i wyniki dotychczasowych badań. Parametry te mają dotyczyć zarówno cech taśmy jak i bębna oraz warunków ich współpracy. Opory pojawiające się przy przegینaniu taśmy na bębnie wynikają z jej określonej budowy, sztywności na zginanie, niesprężystych odkształceń na kierunku radialnym oraz obwodowym (w przypadku bębnów napędowych), a także z określonych wymuszeń eksploatacyjnych (np. prędkości, sił w taśmie). Ograniczając się do przegینania taśmy na bębnie nienapędowym, można przyjąć do analizy wymiarowej następujące parametry:

a) jako zmienne niezależne dotyczące:

- taśmy: szerokość  $B$ , grubość  $h$ , siła napięcia  $S$ , wytrzymałość nominalna  $K_n$ , prędkość  $v$
- bębna: średnica  $D$ ,

b) jako zmienną zależną: opór przeginania taśmy  $W_b$ .

Z literatury (Gładysiewicz i in., 2014; Gładysiewicz, 2003; Żur, Hardygóra, 1979) wiadomo, że sztywność taśmy na zginanie zależy od jej szerokości oraz grubości i te parametry uwzględniono w analizie wymiarowej.

Przyjmuje się zatem, że opór przeginania taśmy na bębnie opisuje zależność:

$$W_b = f(D, B, h, S, v, K_n) \quad (1)$$

gdzie  $f$  jest operatorem wyznaczonym w drodze wyrównania wyników badań doświadczalnych.

Z uwagi na wymogi analizy, wymiary zmiennych ujętych w zależności (1) są wyrażone w jednostkach podstawowych układu SI:

$B$  – szerokość taśmy, m

$D$  – średnica bębna, m

$h$  – grubość taśmy, m

$K_n$  – wytrzymałość nominalna taśmy,  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$

$S$  – siła napięcia taśmy,  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

$v$  – prędkość taśmy,  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$W_b$  – opór przeginania taśmy na bębnie,  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Liczby kryterialne podobieństwa mechanicznego można wyznaczyć różnymi metodami; poniżej wykorzystano metodę macierzową analizy wymiarowej (Nowak, 1969).

Macierz wymiarową zmiennych występujących w zależności (1) podano w tab. 1:

Tabela 1. Zmienne uwzględnione w analizie

|     | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | $W_b$ | $D$   | $B$   | $h$   | $S$   | $v$   | $K_n$ |
| $L$ | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     |
| $M$ | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| $T$ | -2    | 0     | 0     | 0     | -2    | -1    | -2    |

gdzie w przyjętym układzie jednostek podstawowych SI:

$L$  – długość, m

$M$  – masa, kg

$T$  – czas, s

natomiast  $p_0 \div p_7$  to nowe zmienne przypisane zmiennym przyjętym do analizy.

Wszystkie założenia stosowalności metody macierzowej są spełnione, a są to:

a)  $m_j = 3$

$$n + 1 = 7 \quad m_j < n + 1$$

gdzie:  $m_j$  – liczba jednostek podstawowych,  $n$  – liczba badanych czynników,

b)  $r = 3 = m_j$ , a macierz zawarta w tablicy (1) nie jest osobliwa, zatem niezerowy wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

stopnia  $r = 3$  można wyjąć z ostatnich trzech kolumn macierzy zawartej w tab. 1.

Zgodnie z twierdzeniem Buckingham'a (Buckingham, 1914) równanie (1) jest równoważne równaniu bezwymiarowemu:

$$\pi_o = \Phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_q) \quad (2)$$

gdzie:  $\pi_q (q = 0, \dots, 3)$  tworzą *zupelny układ liczb kryterialnych* zmiennych  $W_b, D, \dots, K_n$ .

Zgodnie z metodą podaną w pracy (Nowak, 1969) otrzymuje się następujący układ równań wymiarowych:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 &= 0 \\ p_0 + p_4 + p_6 &= 0 \\ -2p_0 - 2p_4 - p_5 - 2p_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

który rozwiązano względem *związanych* niewiadomych  $p_4, p_5, p_6$  otrzymując:

$$\begin{aligned} p_4 &= -p_0 - p_1 - p_2 - p_3 \\ p_5 &= 0 \\ p_6 &= p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Przyjmując następnie dla *swobodnych* niewiadomych  $p_q (0, \dots, 3)$  następujące specjalne ciągi wartości liczbowych:

$$p_{q,0} = 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$p_{q,1} = 0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_{q,4} = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1$$

otrzymuje się odpowiadające *swobodnym* niewiadomym ciągi wartości *związanych* niewiadomych  $p_4, p_5, p_6$ :

$$\begin{aligned} p_{4,0} &= -1 & p_{5,0} &= 0 & p_{6,0} &= 0 \\ p_{4,1} &= -1 & p_{5,1} &= 0 & p_{6,1} &= 1 \\ p_{4,2} &= -1 & p_{5,2} &= 0 & p_{6,2} &= 1 \\ p_{4,3} &= -1 & p_{5,3} &= 0 & p_{6,3} &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Uwzględniając powyższe, wyznaczono macierz rozwiązań, którą podano w tab. 2.

Tabela 2. Wyniki rozwiązań

|         | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\pi_q$ | $W_b$ | $D$   | $B$   | $h$   | $S$   | $v$   | $K_n$ |
| $\pi_0$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     |
| $\pi_1$ | 0     | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | 1     |
| $\pi_2$ | 0     | 0     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     |
| $\pi_3$ | 0     | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 1     |

Z macierzy zawartej w tab. 2 otrzymuje się następujący *zupelny układ* liczb kryterialnych:

$$\pi_0 = \frac{W_b}{S}; \quad \pi_1 = D \frac{K_n}{S}; \quad \pi_2 = B \frac{K_n}{S}; \quad \pi_3 = h \frac{K_n}{S} \quad (6)$$

a po przekształceniach otrzymujemy w postaci:

– bezwymiarowej: 
$$\frac{W_b}{S} = \left( F \frac{h}{D}; B \frac{K_n}{S} \right) \quad (7)$$

– wymiarowej: 
$$W_b = S \cdot \left( F \frac{h}{D}; B \frac{K_n}{S} \right) \quad (8)$$

przy czym postać funkcji  $F$  może być wyznaczona tylko w oparciu o badania doświadczalne.

Wprowadzając do zależności (7) i (8) jednostkowe obciążenie taśmy:

$$K = \frac{S}{B} \quad (9)$$

otrzymamy je w prostszej postaci:

$$\frac{W_b}{S} = F\left(\frac{h}{D}; \frac{K_n}{K}\right) \quad (10)$$

$$W_b = S \cdot F\left(\frac{h}{D}; \frac{K_n}{K}\right) \quad (11)$$

Z zależności (10) widać, że względne opory przegینania taśmy  $\frac{W_b}{S}$  zależą od względnej jej grubości  $\frac{h}{D}$  oraz ilorazu nominalnej wytrzymałości  $K_n$  taśmy i jednostkowego jej obciążenia  $K$ .

W badaniach doświadczalnych oporu przegینania taśmy na bębnie podobieństwo mechaniczne układu rzeczywistego i jego modelu fizycznego – którego parametry oznaczono '(prim) – będzie zachowane gdy:

$$\frac{h}{D} = \frac{h'}{D'}; \quad B \frac{K_n}{S} = B' \frac{K'_n}{S'}; \quad (12)$$

Zachowanie więc w tych badaniach jednakowych liczb kryterialnych, będących argumentami funkcji  $F$  w zależności (10), w modelu i w układzie rzeczywistym czyni zadość wymogom teorii podobieństwa mechanicznego; kryteria te umożliwiają budowę modeli fizycznych (stanowisk badawczych), a otrzymane na nich wyniki badań można odnosić do obiektu rzeczywistego.

## UWAGI KOŃCOWE

1. Analiza wymiarowa pozwala na ocenę wpływu poszczególnych czynników (geometrycznych, kinematycznych, dynamicznych itd.) na badaną wielkość oraz dostarcza kryteriów podobieństwa mechanicznego umożliwiających przenoszenie wyników badań doświadczalnych otrzymanych w modelu na inne geometrycznie podobne urządzenie (obiekt rzeczywisty).

2. Analiza wymiarowa umożliwia budowę wzorów strukturalnych, stanowiących zasadniczą postać wzorów fizycznych.

3. Analiza wymiarowa może stanowić racjonalną podstawę eksperymentu (umożliwia redukcję liczby zmiennych, daje przesłanki do budowy funkcji aproksymujących), a także być szczególnie przydatna w tych badaniach, w których nie mamy dostatecznego rozeznania (opisu) teoretycznego, a dysponujemy dobrą intuicją oraz praktycznym rozeznaniem problemu.

4. W doświadczalnych badaniach względnego oporu przeginania taśmy na bębnie można uwzględniać, jako zmienne niezależne, względną grubość taśmy oraz iloraz nominalnej jej wytrzymałości i jednostkowego obciążenia, zgodnie z zależnością (10).

5. Otrzymane z pomocą analizy wymiarowej kryteria podobieństwa mogą być wykorzystane w budowie modeli fizycznych (stanowisk badawczych); nie dają one jednak pełnych możliwości modelowania wpływu wszystkich czynników, co zmusza do eksperymentalnej oceny kryteriów podobieństwa.

*Praca zrealizowana w ramach projektu badawczego 7062/B/T02/2011/40.*

#### LITERATURA

- BUCKINGHAM E., 1914, *On Physically Similar Systems*. Physical Reviews IV, 4.  
DROBOT S., 1954, *O analizie wymiarowej*. Zast. Mat. 1954.  
GŁADYSIEWICZ L., KRÓL R., KASZUBA D., 2014, *Koncepcja badań oporów przeginania taśmy na bębnie*. XXII Międzynarodowe Sympozjum, Zakopane "Transport taśmowy a optymalizacja pracy pod ziemią", s. 74-81.  
GŁADYSIEWICZ L., 2003, *Przenośniki taśmowe. Teoria i obliczenia*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.  
MÜLLER L., 1961, *Teoria podobieństwa mechanicznego*. WNT, Warszawa.  
NOWAK Z., 1969: *Ogólna metoda wyznaczania zupełnego układu iloczynów bezwymiarowych*. Czasopismo Techniczne, z. 6.  
ŻUR T., HARDYGÓRA M., 1979, *Przenośniki taśmowe w górnictwie*. Wydawnictwo „Śląsk” Katowice.

### POSSIBILITIES OF DIMENSIONAL ANALYSIS IMPLEMENTATION IN THE INVESTIGATIONS OF BELT INCLINATION RESISTANCE ON CONVEYOR DRUMS

The article presents possibilities of implementation of the dimensional analysis in the investigations of belt inclination resistance on conveyor drums. In the aim of decreasing of belt conveyor energy consumption one is looking for the reducing of their main and concentrated resistances. The belt inclination resistances, treated as concentrated ones in underground mine conveyors have an essential influence on dimensioning of their drives with relatively little averages and numerous drums.

On the way of experimental investigations one has been searching the possibilities of more precise estimation of these resistances to assure the optimal drive construction features.