B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 3–4 2004

Grażyna TRZPIOT*

O WYBRANYCH WŁASNOŚCIACH MIAR RYZYKA

Powszechnie wykorzystywane do pomiaru ryzyka miary, jakimi są odchylenie standardowe oraz Value-at-risk nie zawsze oddają charakter mierzonego ryzyka. Dla uogólnienia problematyki pomiaru ryzyka zaproponowano podejście związane z koherentnymi miarami ryzyka. W pracy omówiono aksjomatykę związaną z proponowanym podejściem oraz przegląd miar związanych z omawianą aksjomatyką. Przedstawiono również dyskusję omawianych własności oraz możliwości praktycznych zastosowań.

Słowa kluczowe: *ryzyko, VaR, CVaR, koherentne miary ryzyka, transformujące miary ryzyka*

1. Pojęcie ryzyka oraz miar ryzyka

Percepcja ryzyka jest zazwyczaj związana z potencjalnymi stratami naszych inwestycji, zainwestowany kapitał jest wykorzystywany do określenia strat. Kolejne przykłady odniosą się do jakości pomiaru ryzyka przez odchylenie standardowe oraz VaR (Value-at-risk).

Weźmy dwie inwestycje, które mają normalne rozkłady stopy zwrotu. Jeżeli oczekiwane wartości stopy zwrotu są liczbami przeciwnymi (przykładowo –100 i +100) oraz rozkłady te mają takie samo odchylenie standardowe (przykładowo 30), przy interpretacji odchylenia standardowego mamy jednakową ocenę ryzyka obydwu inwestycji.

VaR koncentruje się na stratach, analizując poziom najmniejszych wartości rozkładu stopy zwrotu z inwestycji (*dolny ogon rozkładu*). Weźmy 100 różnych akcji, których stopy zwrotu są niezależne oraz takie, że stopa zwrotu przyjmuje wartości: +5 z prawdopodobieństwem 0,99 oraz –100 z prawdopodobieństwem 0,01. Porównajmy ryzyko dwóch portfeli: pierwszy składa się ze 100 akcji, po jednej sztuce

* Katedra Statystyki, Akademia Ekonomiczna im. K. Adamieckiego w Katowicach, ul. Bogucicka 14, 40-226 Katowice,e-mail: trzpiot@ae.katowice.pl

każdej akcji, drugi to 100 sztuk jednej wybranej akcji. Pierwszy portfel jest zdywersyfikowany. Wyznaczając 95% VaR, uzyskamy odpowiednio dla pierwszego portfela 200, dla niezdywersyfikowanego – 500, co sugeruje, że pierwszy portfel jest bardziej ryzykowny.

Zdefiniujemy pojęcie ryzyka (rynkowego i nierynkowego) oraz omówimy zarys analiz prowadzących do skonstruowania miar ryzyka [2]. Przedstawione miary mogą być wykorzystywane przez uczestników rynku kapitałowego, ubezpieczeniowego oraz indywidualnych inwestorów chcących alokować swój kapitał.

Ryzyko zdefiniujemy jako zmianę wartości zajętych pozycji (wartości posiadanych instrumentów) pomiędzy dwoma momentami w czasie. Ryzyko ma opisywać zmianę przyszłych wartości posiadanych instrumentów na skutek zmian na rynku lub bardziej ogólnie – niepewnych wydarzeń. Zajmujemy się więc tylko przyszłymi wartościami. Ryzyko jest zatem określone jako zmienna losowa. Przedmiotem badań jest zmienna losowa, która jest zbiorem stanów natury w przyszłości, interpretowana jako możliwe przyszłe wartości posiadanych instrumentów lub portfeli.

Dla przykładu weźmy przedział czasu $(0, T)$, pomiędzy dwoma momentami w czasie 0 i T, oraz portfel składający się z instrumentów rozliczanych w różnych walutach. Niech e_i będzie losową wielkością jednostek waluty i $(1 \le i \le I)$, $A_i(T)$ natomiast wielkością przychodu w walucie i w momencie czasu T. Ryzyko to przyszła wartość netto $\sum_{i=1}^{I} e_i A_i(T)$.

Pierwszą możliwością pomiaru ryzyka posiadanych instrumentów jest ustalenie zbioru dopuszczalnych przyszłych wartości posiadanych instrumentów, który jest podzbiorem wszystkich możliwych przyszłych wartości. Jest to taki zbiór, w którym ryzyko jest akceptowane przez decydentów takich jak regulatorzy, zarządzający portfelami czy rozliczający – podzbiór *akceptowalnego ryzyka*.

Zbiór stanów natury zapiszemy jako Ω. Zakładamy, że jest to zbiór skończony. Ponieważ jest to zbiór wyników pewnego eksperymentu, wyznaczymy więc wszystkie możliwe wartości na zajętych pozycjach (posiadanych instrumentów). To jest zmienna losowa, którą oznaczymy jako X. Dodatkowo zapiszemy jako $\mathrm{X}^- = \max(-\mathrm{X}, 0)$ oraz supremum X^- jako $\|\mathrm{X}^-\|$.

Zbiór ryzyk zapiszemy jako $\mathcal{G}$. Jest to zbiór wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych zdefiniowanych na Ω (zmiennych losowych). Ponieważ zakładamy, że zbiór Ω jest skończony, można przyjąć, że $\mathcal{G} = R^n$, gdzie $n = \mathrm{card}(\Omega)$. Stożek dodatnich elementów $\mathcal{G}$ zapiszemy jako L_+, natomiast ujemnych L_-.

Zapiszemy jako $\mathcal{A}_{i,j}$ zbiór przyszłych wartości netto wyrażonych w i-tej walucie, która w kraju i jest akceptowana przez regulatorów j, oraz $\mathcal{A} = \bigcap_j \mathcal{A}_{i,j}$.

Przedstawimy poniżej zbiór aksjomatów dla **podzbioru akceptowalnego ryzyka** [2].

Aksjomat A. Zbiór akceptowalnego ryzyka $\mathcal{A}$ zawiera L_+.

Aksjomat B. Zbiór akceptowalnego ryzyka $\mathcal{A}$ nie ma części wspólnej z L_{--} określonego jako

$$L_{--} = \{X\colon X(\omega) < 0,\ \omega \in \Omega\}.$$

Często ten aksjomat jest zastępowany mocniejszym założeniem.

Aksjomat B2. Zbiór akceptowalnego ryzyka $\mathcal{A}$ spełnia warunek $\mathcal{A} \cap L_- = \{0\}$.

Kolejny aksjomat odnosi się do awersji do ryzyka części decydentów, a następny ma najmniej intuicyjny charakter.

Aksjomat C. Zbiór akceptowalnego ryzyka $\mathcal{A}$ jest wypukły.

Aksjomat D. Zbiór akceptowalnego ryzyka $\mathcal{A}$ jest homogenicznie dodatnio określonym stożkiem.

Zbiór akceptowalnego ryzyka jest punktem wyjścia do opisu obszaru akceptacji lub odrzucenia ryzyka. Przejdziemy do zdefiniowania w sposób naturalny miary ryzyka poprzez określenie położenia zajmowanej pozycji (ryzyka posiadanego instrumentu) w stosunku do zbioru akceptowanego ryzyka.

Definicja 1. *Miara ryzyka jest odwzorowaniem ρ określonym* z $\mathcal{G}$ w R.

W przypadku znanego rozkładu prawdopodobieństwa, mówimy o miarach ryzyka zależnych od modelu (*model–dependent*) lub o miarach niezależnych od modelu (*model–free*). Jeżeli wartość $\rho(X)$ jest dodatnia, jest interpretowana jako minimalna dodatkowa wpłata, która musi być wykonana, aby utrzymać pozycję (zrekompensuje straty do pozycji rynkowej). Jeżeli wartość $\rho(X)$ jest ujemna, jest to poziom możliwej wypłaty, która może być alokowana w dodatkowe instrumenty.

Definicja 2. *Miara ryzyka związana ze zbiorem akceptowalnego ryzyka*.

Jeżeli stopa zwrotu instrumentu wolnego od ryzyka wynosi r, miara ryzyka związana ze zbiorem akceptowalnego ryzyka $\mathcal{A}$ jest odwzorowaniem z $\mathcal{G}$ w R określona jako

$$\rho(X) = \inf\{k\colon k \cdot r + X \in \mathcal{A}\}.$$

Definicja 3. *Zbiór akceptowalnego ryzyka związany z miarą ryzyka.*

Zbiór akceptowalnego ryzyka związany z miarą ryzyka ρ jest określony jako

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{G}\colon \rho(X) \le 0\}.$$

2. Własności miar ryzyka

Rozkłady stóp zwrotu dwóch ryzykownych instrumentów (zajmowanych pozycji) zapiszemy jako X oraz Y. Porównamy przykładowo dwie inwestycje: pierwsza zawiera instrumenty ryzykowne oraz instrument wolny od ryzyka (ze stopą zwrotu r), druga tylko instrumenty ryzykowne. Instrument wolny od ryzyka przynosi pewien stały zysk, który rekompensuje ewentualne straty, mogące przynieść inwestycje w instrumenty ryzykowne. Straty są redukowane wysokością kapitału zainwestowanego w instrument wolny od ryzyka.

Aksjomat 1. Translacja inwariantna
Dla dowolnego $X \in \mathcal{G}$ i $\alpha \in R$ zachodzi $\rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha$.

Jeżeli zatem $\rho(X) = \alpha$, to mamy $\rho(X + \rho(X) \cdot r) = 0$, co pozwala wyznaczyć kapitał niezbędny dla pokrycia ryzyka inwestycji.

Gdy porównujemy dwie ryzykowne inwestycje, wówczas porównujemy zysk (wybierając większy) oraz ryzyko, które chcemy minimalizować. Te relacje mają jedynie stochastyczne znaczenie, ponieważ obserwujemy wysokość zysków (stopy zwrotu) oraz dodatkowo prawdopodobieństwo, z jakim występują.

Aksjomat 2. Monotoniczność
Dla dowolnego $X, Y \in \mathcal{G}$, jeżeli $X \leq Y$, to $\rho(Y) \leq \rho(X)$.

Dywersyfikacja portfela redukuje ryzyko, stąd dołączenie dodatkowego instrumentu do portfela nie powinno zwiększyć ryzyka. Ryzyko portfela nie może zatem przekraczać ryzyka sumy jego składników.

Aksjomat 3. Subaddytywność
Dla dowolnego $X, Y \in \mathcal{G}$, $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Warunki inwestycji oraz oczekiwania inwestora często radykalnie się zmieniają, gdy zmienimy skalę inwestycji. W tym przypadku dywersyfikacja ma mniejsze znaczenie i ryzyko rośnie wraz ze skalą inwestycji.

Aksjomat 4. Dodatnia homogeniczność
Dla dowolnego $X \in \mathcal{G}$ i $\lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

Powyższe cztery aksjomaty są oczekiwanymi własnościami dobrej miary ryzyka.

Definicja 4. Koherencja [2] *Mówimy, że miara ryzyka jest koherentna, jeżeli spełnia aksjomaty 1–4.*

Spośród znanych miar ryzyka nie wszystkie spełniają powyższy układ warunków. Odchylenie standardowe nie spełnia aksjomatów 1 i 2, VaR nie spełnia aksjomatu 3[1]. Obydwie te miary nie są koherentne. Również klasa miar wykorzystujących semiwariancję znanych z analizy portfelowej nie jest koherentna.

[1] Wartość VaR jest stratą, która na ustalonym jednostronnym poziomie ufności nie może być przekroczona w ustalonym okresie czasu: $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x: P(X \leq x) > \alpha\}$.
Dla rozkładu normalnego mamy: $\mathrm{VaR} = -(E(X) + \Phi^{-}(\alpha) \cdot \sigma(X))$, brak subaddytywności.

Przykładowo aksjomat o monotoniczności wyklucza miarę ryzyka określoną jako $\rho(X) = -E(X) + \alpha\cdot\sigma(X)$, gdzie $\alpha > 0$. Aksjomat o subaddytywności wyklucza natomiast miary typu semiwariancja $\rho(X) = -E(X) + \alpha\cdot\sigma((X - E(X)^{-})$.

3. Kwantylowe koherentne miary ryzyka

Pomimo iż VaR nie jest miarą koherentną, jest miarą stosowaną w praktyce. Własność, która decyduje o tym – to koncentracja uwagi na potencjalnych stratach. Zaproponowano miarę, która jest średnim poziomem strat, jeżeli poziom strat przekracza VaR. Tak określona miara nazywa się Expexted shortfall (ES) [1, 6], dolna warunkowa średnia (*tail conditional expectation* – TCE) lub warunkowe Var (CVaR) zapisywane jako

$$C\mathrm{VaR}_{\alpha} = ES_{\alpha}(X) = -E\{X \mid X \leq -\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)\},$$

lub uwzględniając stopę wolną od ryzyka r

$$TCE_{\alpha}(X) = -\inf E\{X/r \mid X/r \leq -\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)\}.$$

CVaR jest definiowany jako średnia z kwantyli najgorszych realizacji wartości stóp zwrotu. Taka definicja zapewnia, że VaR nie przekracza CVaR, czyli portfel z najmniejszym CVaR musi mieć również najniższą wartość VaR. CVaR jest funkcją wartości α dla ustalonego X.

Udowodniono [6], że CVaR jest koherentną miarą ryzyka, ma własność przechodniości, jest dodatnio homogeniczna, wklęsła, monotoniczna zachowuje własność dominacji oraz stochastycznej rzędu pierwszego i drugiego (FSD, SSD).

Analogiczną konstrukcją charakteryzuje się kolejna koherentna miara ryzyka, odnosząca się do potencjalnych strat – najgorsza warunkowa średnia (*worst conditional expectation*), określona następująco:

$$WCE_{\alpha}(X) = -\inf\{E(X/r \mid A) : P(A) > \alpha\}.$$

Stwierdzenie [2]. Pomiędzy określonymi powyżej miarami zachodzi nierówność

$$TCE_{\alpha}(X) \leq WCE_{\alpha}(X).$$

Studia empiryczne prowadziły inną drogą do analitycznych własności miar dominujących wartość VaR, mających porównywalne wartości i lepsze własności.

Twierdzenie [2]. Dla każdego rozkładu ryzyka X zachodzi

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) = -\inf\{\rho(X) : \rho \text{ jest koherentna i } \rho \geq \mathrm{VaR}_{\alpha}\}.$$

4. Transformujące miary ryzyka oraz dolny moment cząstkowy

Funkcja transformująca (*distortion function*) jest rosnącą funkcją g: $[0, 1] \to [0, 1]$ taką, że $g(0) = 0$ oraz $g(1) = 1$. Zadaniem tego odwzorowania jest transformacja dystrybuanty zmiennej losowej tak, aby wyższe wagi odpowiadały większym stratom.

Wykorzystując powyższe określenie funkcji transformującej oraz dystrybuantę rozkładu stopy zwrotu ryzykownego instrumentu $F(\cdot)$, możemy zdefiniować **transformujące miary ryzyka** (*distortion risk measure*) $\rho(\cdot)$ następująco:

$$\rho(X) = \int_{-\infty}^{0} g(1 - F(t))dt .$$

Najczęściej wykorzystywane funkcje transformujące zebrano w tabeli 1 [4].

Tabela 1

Przykłady miar ryzyka wykorzystujących funkcje transformujące*

Miara ryzyka	Funkcja transformująca	Założenia
Transformacja beta	$g(X) = \int_0^x \frac{1}{\beta(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$	$a \le 1,\ b \ge 1$
Proporcjonalna transformacja funkcji hazardu[1]	$g(x) = x^a$	$a \le 1$
Dualna funkcja mocy[1]	$g(x) = 1-(1-x)^a$	$a \le 1$
Zasada Giniego	$g(x) = (1+a)x - ax^2$	$0 \le a \le 1$
Transformacja Wanga	$g(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(c))$	
Expected shortfall	$g(x) = \begin{cases} 1, & 1-c \le x \le 1 \\ \frac{x}{1-c}, & 0 \le x \le 1-c \end{cases}$	
Value at risk[2]	$g(x) = \begin{cases} 1, & 1-c \le x \le 1 \\ 0, & 0 \le x \le 1-c \end{cases}$	

* c oznacza kwantyl rzędu c dystrybuanty rozkładu X, $\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$, $\Phi(\cdot)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego, 1 – proporcjonalna transformacja funkcji hazardu oraz dualna funkcja mocy są szczególnymi przypadkami transformacji beta, 2 – Value at risk nie jest koherentną miarą ryzyka.

Wirch i Hardy [10] pokazali, że tak określona miara ryzyka jest koherentna, jeżeli funkcja transformująca jest wklęsła. Wiadomo, że to założenie towarzyszy zastosowaniom SSD (dominacji stochastycznych rzędu drugiego) i jest równoważne z awersją do ryzyka potencjalnych inwestorów. CVaR nie ma ściśle wklęsłej funkcji transformującej. Miary ryzyka, które nie są koherentne, takie jak VaR czy odchylenie standardowe, również mają specyficzne założenia dotyczące preferencji potencjalnych inwestorów.

Na przykład pokazano [3], że dla dolnej semiwariancji $\sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{0} (X - E(X))^2 dF(X)$, odpowiednia miara ryzyka określona jako

$$\rho(X) = -E(X) - a\sigma_2, \quad \text{dla } 0 \le a \le 1$$

jest koherentna.

Ta miara jest łatwa do zastosowania przez wykorzystujących metodologię VaR, ponieważ przy założeniu rozkładu normalnego stóp zwrotu powyższe wyrażenie jest wyznaczane analogiczne do VaR. Podstawowa różnica polega na tym, że dolna semiwariancja uwzględnia jedynie straty, a nie wszystkie możliwe stopy zwrotu.

Stwierdzenie [3]. Wypukła kombinacja koherentnych miar ryzyka w L^p jest koherentną miarą ryzyka w L^p.

Oczywiście możliwe jest włączenie do tego typu miar ryzyka również wyższych momentów cząstkowych tak, aby urealnić preferencje inwestorów. Definiujemy dolny moment cząstkowy rzędu-n jako

$$\sigma_n^n = \int_{-\infty}^{0} (X - E(X))^n dF(X),$$

dla całkowitych $n \ge 1$. Wówczas dla takiego ciągu, że $a_n \ge 0$ oraz $\sum_{n=1}^{N} a_n \le 1$, dla pewnego $0 \le N \le \propto$ miara ryzyka

$$\rho(X) = -E(X) - \sum_{n=1}^{N} a_n \sigma_n$$

jest koherentna.

Możemy interpretować tę miarę jako ważoną średnią pierwszych N dolnych momentów cząstkowych, gdzie wartości wag a_n odpowiadają znaczeniu danego dolnego momentu cząstkowego rzędu n. Im wyższa jest wartość n, tym większa waga jest nadana największemu ujemnemu odchyleniu od ustalonej wartości krytycznej w wyznaczanym dolnym cząstkowym momencie.

Podsumowanie

Transformujące miary ryzyka znalazły zastosowanie do wyznaczenia premii za ubezpieczenie. W zarządzaniu ryzykiem finansowym nie mają powszechnego zastosowania. Miary koherentne krytykuje się w związku z aksjomatem 3 (subaddytywność). Ten aksjomat można też zinterpretować tak, że ryzyko dużej zdywersyfikowanej inwestycji (firmy) może być mniejsze niż kilku małych niezależnych inwestycji (firm). Pojawiają się argumenty za tym, że w zastosowaniach VaR jest optymalną miarą dla inwestorów, natomiast CVaR jest optymalną miarą dla regulatorów, poziom strat, które doprowadzają do bankructwa nie jest bowiem bezpośrednim przedmiotem rozważań inwestorów.

Bibliografia

[1] ALBRECHT P., *Normal and Lognormal Shortfall Risk*, [in:] Proccedings, 3rd AFIR International Colloquium, Rome, 1993, 2, 417–430.

[2] ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J. -M., HEATH D., *Coherent Measure of Risk*, Mathematical Finance, **9,** 1999, 203–228.

[3] FISCHER T., *Coherent risk measures depending on higher moments*, University of Heidelberg, 2001.

[4] KRAUSE A., *Coherent Measure of Risk: an introduction*, Balance Sheet, **10**, 2002, 13–17.

[5] OGRYCZAK W., RUSZCZYŃSKI A., *Dual Stochastic Dominance and Quantile Risk Measures*, International Transactions in Operational Research, 9, 2002, 661–680.

[6] PFLUG G. Ch., *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk*, [in:] *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[7] ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, Journal of Risk, 2, 2000, 21–41.

[8] SIU T. K., YANG H., *Subjective risk measure: Bayesan predictive scenarious analysis*, Insurance: Mathematics and Economics, **25**, 1999, 157–170.

[9] TRZPIOT G., *Kwantylowe miary ryzyka*, Prace Naukowe AE Wrocław 1022, Taksonomia 11, 2004, 420–430.

[10] WIRCH J. L., HARDY M. R., *Distortion Risk Measure: Coherence and Stochastic Dominance*, working paper, University of Waterloo, 2001.

Some properties of risk measures

The widely used risk measures as standard deviations and value at risk do not always reflect risk preferences accurately. To overcome this problem we show coherent risk approach. For making the overview of the problem of risk measure we propose a coherent risk measure approach. We started from the definition of risk (market and other) and we took a close look at construction of risk measures.

We present a set of axioms according to this approach and a collection of coherent risk measures. In particular, we describe quantile risk measures, distortion risk measures with detailed presentation of the most frequent distortion functions in use.

The next propositions are risk measures based on lower partial moments. We show some properties of these measures and also discuss limitations of such measures in practical applications.

Keywords: *risk, VaR, CVaR, coherent risk measures, distortion risk measure*