

Bogusław GUZIK*

SZACOWANIE MODELU RYNKOWEGO CYKLU ŻYCIA PRODUKTU

Przedstawiono zasadnicze podejścia do statystycznego szacowania modelu rynkowego cyklu życia produktu. Omówiono najczęstsze trudności estymacji w związku z niekompletnością (fragmentarycznością) danych statystycznych. Sporo uwagi poświęcono wynikającym z potrzeb praktyki modyfikacjom modeli tradycyjnych. Opisano budowę modelu cyklu życia produktu za pomocą funkcji typu „wzrost-spadek”. Najogólniejsze, i dające najwięcej możliwości, jest zaproponowane podejście, polegające na szacowaniu modelu segmentowego, złożonego z rosnącej oraz malejącej funkcji logistycznej.

Słowa kluczowe: *modele cyklu życia produktu, funkcje wzrost-spadek, funkcja logistyczna*

1. Rynkowy cykl życia produktu

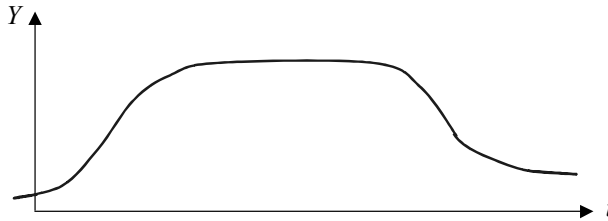
Rynkowy cykl życia produktu to pewna funkcja zmiennej czasowej t , która opisuje kształtowanie się sprzedaży produktu od chwili wprowadzenia go na rynek, po zakończenie sprzedaży. Rynkowy cykl życia produktu to ten fragment cyklu życia produktu, w którym ma miejsce jego sprzedaż. Jest to swego rodzaju trend sprzedaży. Nie jest to jednak trend tradycyjny, lecz funkcja spełniająca pewne założenia wynikające z teorii ekonomii i praktyki. Przede wszystkim musi to być funkcja obejmująca przynajmniej dwie podstawowe fazy zmian sprzedaży – fazę wzrostu sprzedaży oraz fazę spadku.

Standardowy rynkowy model cyklu życia produktu obejmuje trzy fazy: wzrost, dojrzałość i spadek¹, co zilustrowano na rysunku 1. Symbol Y oznacza wielkość sprzedaży

* Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: Boguslaw.Guzik@ae.poznan.pl

¹ Nie ma zgodności autorów co liczby etapów cyklu życia produktu. Niektórzy autorzy wyodrębniają tylko dwie fazy (cykl życia i recykl), inni – trzy, cztery, a nawet sześć; por. B. Sojkin, *Etap wprowadza-*

produktu, t jest zmienną czasową. Umówimy się, że $t = 1$ oznacza moment dokonania pierwszej obserwacji empirycznej (który niekoniecznie oznacza moment rozpoczęcia sprzedaży); przy tym kolejne obserwacje empiryczne mają numery $t = 1, 2, 3, \dots, T$.



Rys. 1

Próbując zidentyfikować cykl życia produktu na podstawie danych statystycznych, spotyka się różne sytuacje, niekoniecznie zgodne z modelem standardowym:

1. Przede wszystkim dane mogą być *fragmentaryczne* i obejmować tylko albo fazę wzrostu (lub jej część), albo fazę spadku (lub jej część), albo jakiś inny fragment cyklu życia produktu.

2. Faza wzrostowa może charakteryzować się jednolitym kierunkiem zmian, na przykład wzrostem coraz szybszym albo coraz wolniejszym. Może też charakteryzować się zmienną prędkością: najpierw wzrost coraz szybszy, potem coraz wolniejszy (lub odwrotnie). To samo dotyczy fazy spadkowej.

3. Dolny poziom fazy spadkowej może być zerowy (sprzedaż spada do zera), ale może być dodatni (sprzedaż stabilizuje się na pewnym niskim poziomie). Podobnie jest z dolnym poziomem w fazie wzrostowej – sprzedaż może rozwijać się początkowo bardzo powoli, może też od razu osiągnąć dużą wartość.

4. Możliwe są też różnego rodzaju zaburzenia cyklu – recykle, zaburzenia sezonowe.

Z krótkiego przeglądu możliwych sytuacji wynika, że skonstruowanie *jednolitego* modelu cyklu życia produktu odpowiadającego wszystkim sytuacjom jest – praktycznie biorąc – niemożliwe.

Dalej zajmujemy się następującym przypadkiem szczególnym (podobnym jak na rysunku 1):

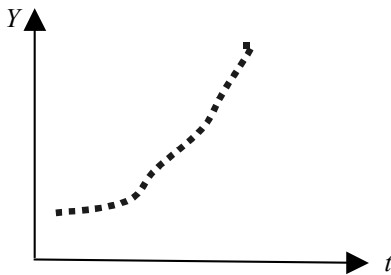
- faza wzrostu charakteryzuje się początkowo wzrostem coraz szybszym, a potem coraz wolniejszym i ma górną asymptotę poziomą (górną pułap);

nia w cyklu życia produktu [w:] *Wprowadzanie nowego produktu na rynek* (red. B. Sojkin), Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2003. Jeśli zaś wziąć pod uwagę cały cykl życia produktu, który rozpoczyna się etapami początkowymi: (1) badania nad produktem, (2) wprowadzenie produktu na rynek, a kończy etapem zaprzestania sprzedaży (lub produkcji) i utylizacji niesprzedanych produktów oraz środków technicznych służących do sprzedaży (produkcji) itp., to tych etapów będzie jeszcze więcej – nawet 10. O cyklu życia produktu obszernie napisano w książce: L. Garbarski, I. Rutkowski, W. Wrzosek, *Marketing – punkt zwrotny nowoczesnej firmy*, PWE, 2000.

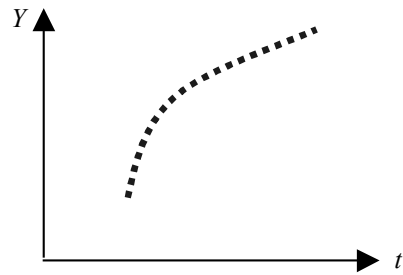
- faza spadku charakteryzuje się początkowo spadkiem coraz szybszym, a potem coraz wolniejszym i ma dolną asymptotę poziomą (dolny pułap);
- faza środkowa (faza stabilizacji) może być bardzo krótka lub długa;
- materiał statystyczny może dotyczyć tylko jednej z faz (albo wzrostu, albo spadku), albo obu tych faz.

2. Estymacja modelu na podstawie fragmentarycznych danych z fazy wzrostowej

Niekiedy jest tak, że obserwowane dane statystyczne dotyczą tylko fragmentu fazy wzrostowej (początkowego² – rys. 2 lub końcowego³ – rys. 3).



Rys. 2



Rys. 3

Patrząc „czysto statystycznie” na zaprezentowane przebiegi, należałoby powiedzieć, że dane z rysunku 2 upoważniają tylko do oszacowania trendu rosnącego coraz szybciej (na przykład trendu wykładniczego lub potęgowego). Z kolei dane z rysunku 3 upoważniają do oszacowania trendu rosnącego coraz wolniej (np. logarytmicznego lub hiperbolicznego)⁴.

Trendy te nie mogą być jednak uznane za modele rynkowego cyklu życia produktu, gdyż z teorii i praktyki badania cyklu życia produktów wiadomo, że przebieg jest niemonotoniczny (zmienia kierunek): po fazie wzrostu wystąpi faza stabilizacji, a następnie – faza spadku. Ekstrapolacja takich trendów zaś jest monotoniczna.

² Na przykład dlatego, że sprzedaż produktu rozpoczęła się stosunkowo niedawno.

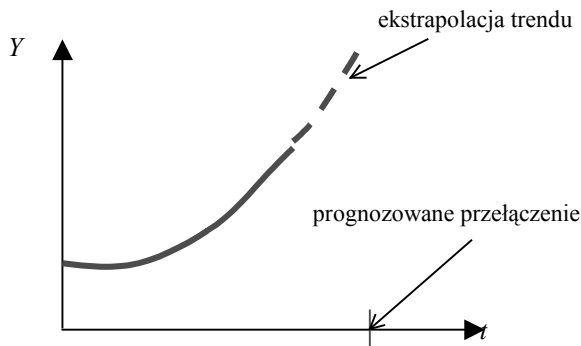
³ Ponieważ sprzedaż trwa od tak dawna, że nie ma danych z okresu wprowadzenia produktu na rynek.

⁴ Przeglądy najczęściej używanych w ekonomii modeli ekonometrycznych zawiera prawie każdy podręcznik ekonometrii, na przykład: B. Guzik, *Ekonometria*, Wyd. AE Poznań, Poznań 2005, rozdz. 8–10. W książce tej opisano też najpopularniejsze metody estymacji takich modeli.

Jeśli dane statystyczne są fragmentaryczne, można zastosować jedno z trzech następujących podejść, w zależności od tego, który fragment cyklu życia produktu chcemy oszacować.

Podejście 1. Szacujemy odpowiedni trend monotoniczny, traktując go jako model tego *fragmentu* cyklu życia produktu, którego dotyczą posiadane dane statystyczne.

Poprzestanie tylko na jednym fragmencie fazy nie jest jednak ciekawe. W oczywisty sposób interesuje nas bowiem dalszy przebieg zjawiska, czyli prognozy sprzedaży w przyszłości, a wiemy, że ekstrapolacja trendu (np. wykładniczego) nie może być długotrwała wobec – wynikającej z natury cyklu życia produktu – pewności przełączenia (rys. 4); najpierw na wzrost coraz wolniejszy, potem wręcz na spadek.



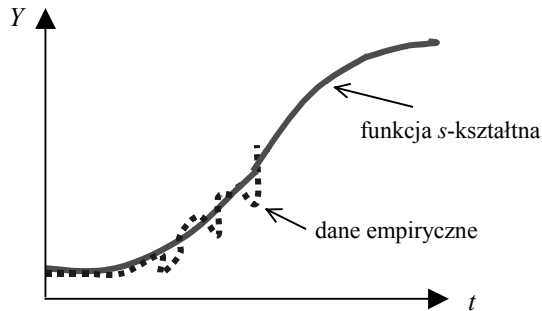
Rys. 4

W każdym razie ekstrapolować taki trend możemy tylko do momentu przełączenia. Moment ten trzeba prognozować na podstawie dodatkowych badań, co samo w sobie może być bardzo trudne.

Jeśli idzie o modelowanie przebiegu sprzedaży produktu poza materiał statystyczny (ekstrapolacja w przód lub/i wstecz), to można byłoby wykorzystać analogie do sprzedaży podobnych produktów, dla których oszacowany został praktycznie cały cykl życia.

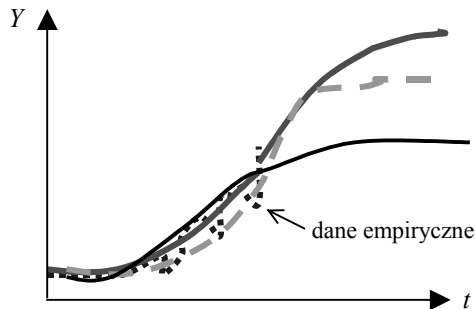
Podejście 2. Określa się *a priori* ogólną postać trendu dla całej fazy wzrostowej i na podstawie fragmentarycznych danych szacowany jest ów trend jako *model całej fazy wzrostowej*.

Jest to trudne, ale – poprzez dobór odpowiednich funkcji matematycznych – możliwe. Na przykład można oszacować, omówioną w następnym rozdziale, funkcję logistyczną lub funkcję wykładniczo-hiperboliczną, lub podobnego typu funkcję tzw. *s-kształtną* (por. rys. 5).



Rys. 5

To podejście jest ciekawsze od poprzedniego, gdyż na podstawie danych fragmentarycznych próbuje się odgadnąć (prognozować) dalszy przebieg cyklu życia produktu. Jest zrozumiałe, że trzeba tu bardzo rozważnie określić ogólną postać modelu cyklu życia w fazie wzrostowej, gdyż informacja statystyczna dotyczy np. tylko 1/2 fazy i łatwo o pomyłki, skutkujące zaskakującymi i różnorodnymi przebiegami poza zakresem danych empirycznych (rys. 6).

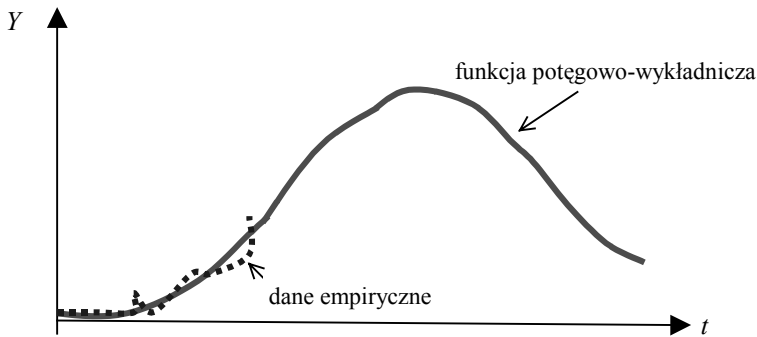


Rys. 6

Podejście 3. Określa się *a priori* ogólną postać modelu *całego* cyklu życia produktu i szacuje się ów model na podstawie danych fragmentarycznych z fazy wzrostowej.

Podobnie jak wcześniej, jest to wprawdzie kłopotliwe, wymaga bowiem ustalenia hipotetycznego kształtu, i to całego, modelu cyklu życia produktu oraz – dodatkowo – zapewnienia w procesie estymacji postulatów co do wartości parametrów, ale możliwe do wykonania. W szczególności można oszacować omówione w rozdziale 4 funkcje typu „wzrost-spadek”, na przykład funkcję potęgowo-wykładniczą⁵ (rys. 7).

⁵ Funkcja wyraża się równaniem $Y = At^a e^{ct}$.

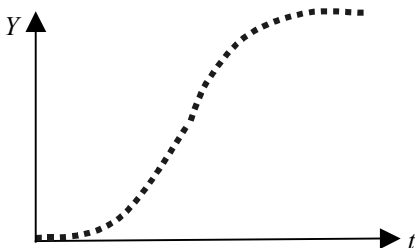


Rys. 7

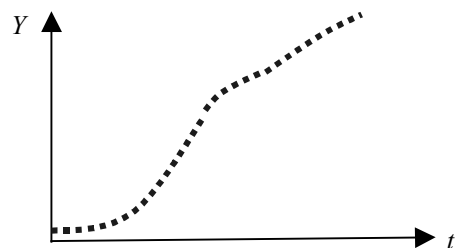
Pewnym kłopotem w tego typu obliczeniach jest niestabilność oszacowań modelu, gdyż cały model jest szacowany na podstawie małego fragmentu cyklu. Można wskazać wiele modeli, które będą praktycznie tak samo dobre w obszarze posiadanych danych statystycznych, a przy tym będą się wyraźnie różniły w dalszych odcinkach cyklu.

2. Estymacja modelu na podstawie pełnych danych dla fazy wzrostu

Rozpatrujemy sytuację, gdy dane statystyczne dotyczą całej (rys. 8) lub prawie całej (rys. 9) fazy wzrostu:



Rys. 8

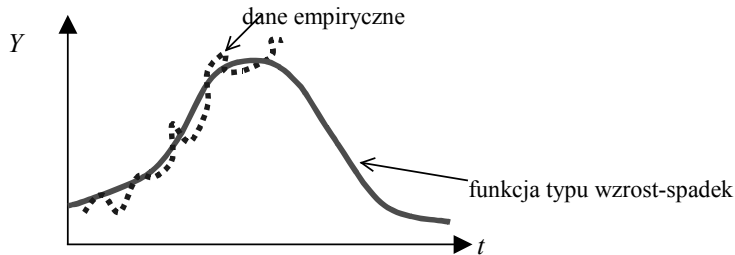


Rys. 9

Generalnie biorąc, można byłoby zastosować dwa podejścia:

Podejście 1. Na podstawie danych dotyczących fazy wzrostowej szacujemy *cały* model cyklu życia produktu.

Można tu wykorzystać wspomniane funkcje typu „wzrost-spadek” (niektóre z nich opisano w rozdziale 4). Podejście to wymaga sformułowania *hipotezy* co do postaci modelu dla całego cyklu życia produktu (rys. 10).



Rys. 10

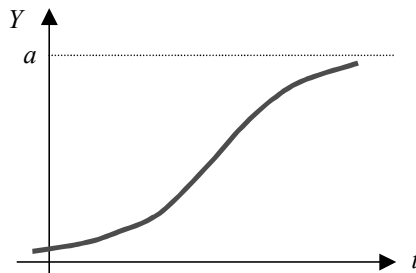
Podejście 2. Na podstawie danych dotyczących fazy wzrostowej szacujemy model *tylko dla fazy wzrostowej* i przyjmujemy ten trend za model cyklu życia produktu w fazie wzrostu.

Szacując model dla fazy wzrostowej na podstawie danych z fazy wzrostowej, można zastosować tzw. funkcje *s*-kształtne (sigmoidalne), wśród których w analizach ekonomicznych najważniejsze znaczenie ma funkcja *logistyczna* oraz funkcja *wykładniczo-hyperboliczna*.

1. *Rosnący trend logistyczny* (rys. 11) wyraża się, jak wiadomo, wzorem:

$$Y = \frac{a}{1 + be^{ct}}, \quad (1)$$

gdzie parametry $a, b > 0$, natomiast $c < 0$ ⁶.



Rys. 11

⁶ W Polsce na temat tej funkcji pisano już dawno, na przykład: O. Lange, *Wstęp do ekonometrii*, wyd. II, PWN, Warszawa 1961; Z. Pawłowski, *Uwagi o warunkach wyznaczania trendu logistycznego*, Przegląd Statystyczny nr 1, 1967; W. Szwarz, *Uwagi o metodzie tempa wzrostu*, Handel Wewnętrzny, nr 2–3, 1966; Z. Czerwiński, *Matematyka na usługach ekonomii*, wyd. III, PWN, Warszawa 1972.

- Parametr a jest oszacowaniem maksymalnego poziomu sprzedaży produktu.

W literaturze proponuje się różne metody szacowania modelu logistycznego – na przykład metodę Hotellinga lub metodę arbitralnie ustalanego parametru a (poziomu nasycenia)⁷. Można też korzystać z profesjonalnych pakietów obliczeń statystycznych. Jeśli jednak idzie o powszechnie dostępne oprogramowanie komputerowe, to poleca się wykonywanie odpowiednich obliczeń w *Solverze* arkusza kalkulacyjnego *Excel*⁸.

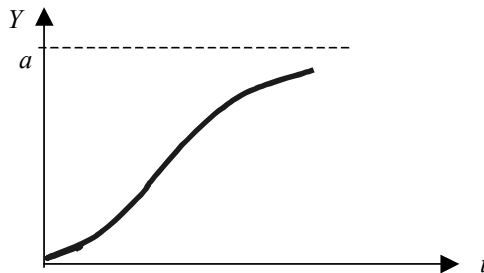
2. *Rosnący trend wykładniczo-hiperboliczny* jest określony wzorem:

$$Y = Ae^{b/t}, \quad (2)$$

gdzie parametr $A > 0$, natomiast $b < 0$, przy tym $t > 0$.

- Parametr A określa górną asymptotę, czyli maksymalny poziom zjawiska (jest on odpowiednikiem parametru a funkcji logistycznej).

Przebieg trendu wykładniczo-hiperbolicznego⁹ jest podobny do przebiegu standardowego trendu logistycznego, z tym że początkowa faza wzrostu coraz szybszego jest w przypadku trendu wykładniczo-hiperbolicznego znacznie krótsza. Wartość z trendu dla $t = 0$ jest równa zero¹⁰.



Rys. 12

Trend wykładniczo-hiperboliczny można oszacować pośrednio poprzez oszacowanie formy zlinearyzowanej albo – jak w przypadku trendu logistycznego – korzy-

⁷ Por. np. B. Guzik, *Ekonometria*, Wyd. AE, Poznań 2005, s. 206–212.

⁸ *Solver* to, jak wiadomo, moduł obliczeń optymalizacyjnych. Może być jednak z powodzeniem zastosowany w estymacji ekonometrycznej, gdyż zagadnienia dopasowania modelu do danych empirycznych to także zagadnienia optymalizacji. Zaletą *Solwera* jest to, że może być użyty do realizacji szerokiej klasy metod estymacji: przy różnych kryteriach dopasowania (np. dla minimalizacji zwykłej lub uogólnionej sumy kwadratów, minimalizacji sumy modułów reszt, minimalizacji reszt względnych itd.) oraz przy szerokiej klasie liniowych lub nieliniowych warunków pobocznych. Wadą jest to, że jest to procedura iteracyjna, niekoniecznie dająca dokładne optimum. Dla celów praktycznych jest ona jednak wystarczająca.

⁹ Niekiedy zwanego funkcją Gompertza lub trendem odwrotnie wykładniczym.

¹⁰ Bo przy $b < 0$ wykładnik b/t będzie równy $-\infty$, a funkcja e^x dla $x = -\infty$ jest równa 0.

stając z pakietów obliczeń statystyczno-ekonometrycznych, albo za pomocą *Solvera* arkusza *Excel*.

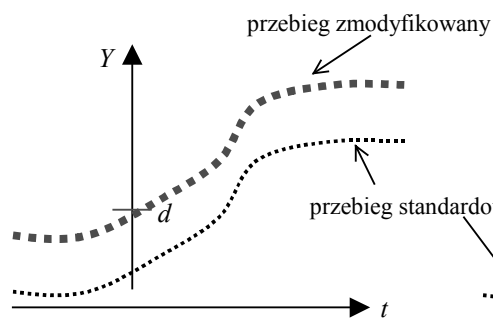
Modelowanie faz wzrostowych za pomocą funkcji logistycznej lub funkcji wykładniczo-hiperbolicznej jest znane i dlatego nie będziemy rozwijać tej problematyki¹¹.

Chcielibyśmy jeszcze przedstawić dwie modyfikacje „klasycznej” funkcji logistycznej.

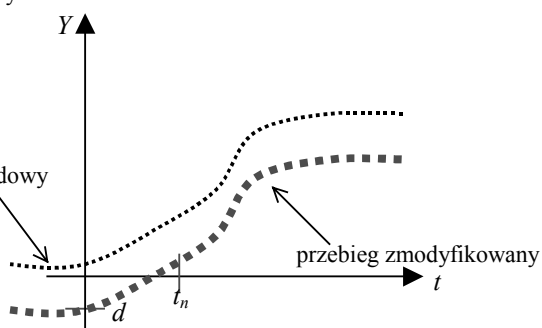
Modyfikacja 1 – przesunięcie po osi Y

Standardowa funkcja logistyczna (przy parametrze c ujemnym i parametrach a oraz b dodatnich) dla momentów czasu t położonych na lewo od $t = 0$ ma wartości dodatnie, ale bliskie zeru¹². W odniesieniu do modelu cyklu życia produktu oznacza to sugestię, iż prawie zerowy poziom sprzedaży występuje dopiero w „bardzo odległej” przeszłości, po czym początkowo sprzedaż rośnie bardzo wolno (i dla $t = 0$ osiąga poziom dodatni). Jednak nie zawsze ma to miejsce:

1° Sprzedaż produktu mogła być prowadzona od dawna; stąd już nawet dla $t < 0$ mogła osiągać wartość wyraźnie dodatnią, czyli pewne *minimum*, równe powiedzmy $d > 0$ (rys. 13).



Rys. 13



Rys. 14

2° Może być też odwrotnie – sprzedaż osiąga niezerowy poziom dopiero dla momentu $t_n > 0$ (rys. 14). Wtedy – formalnie – poziom zjawiska dla $t < t_n$ będzie ujemny. Aby to zapisać, trzeba przyjąć, że minimalny poziom d jest (formalnie) ujemny¹³.

Ten minimalny poziom d jest jeszcze jednym parametrem modelu. Zmodyfikowane równanie modelu ma postać:

¹¹ Doświadczenia empiryczne wskazują, że lepszy opis faz wzrostu otrzymuje się częściej za pomocą trendu logistycznego niż trendu wykładniczo-hiperbolicznego.

¹² Bardziej poprawnie: dla $t \rightarrow -\infty$ standardowa funkcja logistyczna dąży do zera.

¹³ Ale funkcja jest modelem cyklu życia produktu dopiero dla $t > t_n$.

$$Y = \frac{a}{1 + be^{ct}} + d, \quad (a, b > 0; c < 0). \quad (3)$$

W tym wypadku oszacowanie maksymalnego poziomu sprzedaży zapiszemy jako

$$g = a + d. \quad (4)$$

Podobnie można proponować uwzględnienie dolnego poziomu dla funkcji wykładniczo-hiperbolicznej:

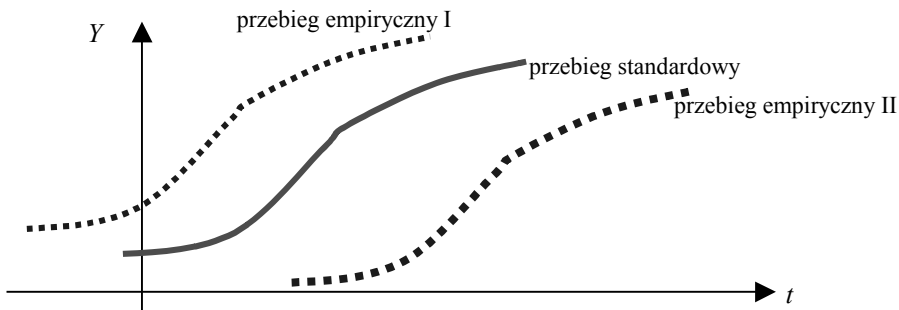
$$Y = Ae^{b/t} + d, \quad (A > 0, b < 0). \quad (5)$$

Oszacowaniem maksymalnego poziom sprzedaży jest

$$g = A + d. \quad (6)$$

Modyfikacja 2 – przesunięcie po osi t

Standardowy przebieg logistyczny zazwyczaj nie odpowiada spotykanej niekiedy w praktyce sytuacji, że sprzedaż od razu, od momentu uruchomienia, jest duża, a jej przebieg w fazie początkowej jest zbliżony do przebiegu w środkowej fazie wzrostu standardowego. Uwzględnienie tego postulatu praktycznego prowadzi do *przesunięcia* przebiegu standardowego po osi czasu na lewo, czyli ustawienia punktu odliczania na lewo od $t = 0$ (zob. rys. 15 – przebieg empiryczny I).



Rys. 15.

Może też być inaczej – sprzedaż rozpoczyna się później niż w momencie $t=1$, co oznacza przesunięcie przebiegu standardowego po osi czasu na prawo (rys. 15 – przebieg empiryczny II). Punktem odliczania jest wówczas pewien moment na prawo.

Formalnie przesunięcia takie można zapisać jako *przenumerowanie* zmiennej czasowej. Zamiast zmiennej oryginalnej t bierze się wtedy zmienną pomocniczą:

$$x = t + p^{14}. \quad (7)$$

¹⁴ Na przykład przesunięcie $p = 5$. Wtedy obserwacja dotycząca czasu $t = 0$ ma numer $x = 5$, a obserwacja dotycząca $t = -5$ ma numer $x = 0$ i będzie nowym punktem odliczania.

Parametr p może być ustalany *a priori* lub *szacowany*. Przesunięty model logistyczny ma postać:

$$Y = \frac{a}{1 + be^{cx}} + d, \quad (a, b > 0; c < 0), \quad (8)$$

gdzie $x = t + p$.

Podobnego typu przesunięcia po osi czasu, czyli przenieście zmiennej czasowej mogą dotyczyć innych funkcji, np. funkcji wykładniczo-hyperbolicznej¹⁵ i innych¹⁶. Przesunięcie p musi być takie, aby odpowiednia funkcja była dobrze określona¹⁷. Funkcje standardowe są szczególnym przypadkiem funkcji z przesunięciem $p = 0$.

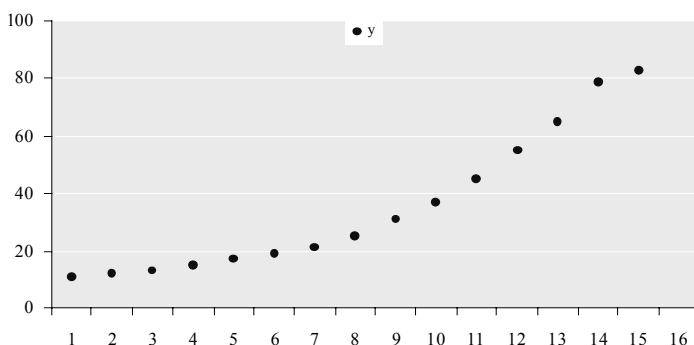
Przykład

Dysponujemy następującymi danymi dotyczącymi wielkości sprzedaży:

Y	11	12	13	15	17	19	21	25
t	1	2	3	4	5	6	7	8

Y	31	37	45	55	65	79	83
t	9	10	11	12	13	14	15

Dane empiryczne zaprezentowano na rysunku 16.



Rys. 16

Chcemy oszacować logistyczny model fazy wzrostowej cyklu życia produktu:

¹⁵ Wtedy $Y = Ae^{b/x} + d$, ($A > 0$, $b < 0$; $x > 0$).

¹⁶ Dodajmy, że przesunięcie jest nieistotne (niepotrzebne), np. gdy zmienna zależna jest wielomianową funkcją zmiennej t . Przykładowo jest ono nieistotne dla trendu wykładniczego, gdyż w przypadku trendu wykładniczego trend dla $\ln Y$ jest liniową funkcją t .

¹⁷ Na przykład dla funkcji wykładniczo-hyperbolicznej musi być $p \geq 0$.

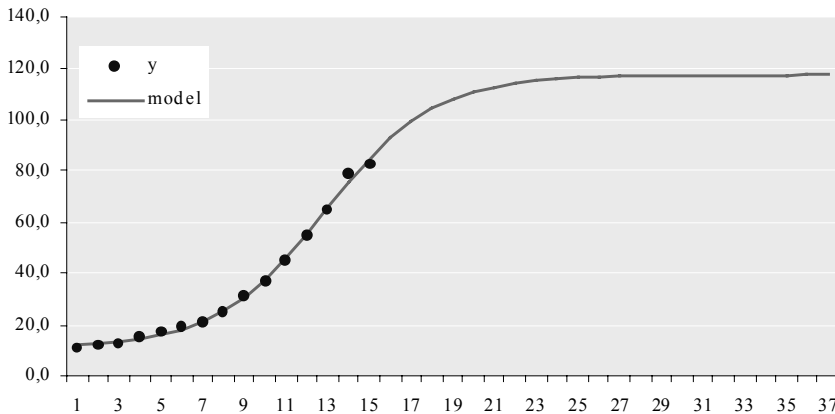
$$Y = \frac{a}{1 + be^{ct}} + d, \quad (ba > 0; c < 0).$$

Uwzględniamy poziom minimalny d , gdyż wartość zjawiska w momencie $t = 1$ jest zbyt duża w porównaniu z wynikającym ze standardowego przebiegu funkcji logistycznej¹⁸.

Po zastosowaniu klasycznej metody najmniejszych kwadratów (realizowanej przez *Solver Excela*) otrzymano następujące oszacowanie fazy wzrostowej cyklu życia produktu:

$$Y = \frac{106,5}{1 + 140,4e^{-0,384t}} + 10,9, \quad R^2 = 0,002^{19}.$$

- Model pasuje bardzo dobrze do wyników obserwacji, gdyż wyjaśnił aż 99,8% zaobserwowanej zmienności sprzedaży.
 - Oszacowano, że maksymalny poziom sprzedaży (w fazie wzrostowej i ewentualnej fazie dojrzałości) wynosi około 117,4 jednostek²⁰.
 - Oszacowano też, że minimalny poziom sprzedaży wynosił 10,9 jednostek.
- Przebieg modelu w fazie wzrostowej (i ewentualnej fazie dojrzałości) podano na rysunku 17.



Rys. 17

¹⁸ W każdym razie nie zaszkodzi uwzględnić poziom minimalny d . Gdyby go nie było, wtedy w wyniku estymacji otrzymamy d bardzo małe lub zerowe.

¹⁹ R^2 – współczynnik zgodności (determinacji), czyli stopnia wyjaśnienia zmienności zmiennej Y przez oszacowany model.

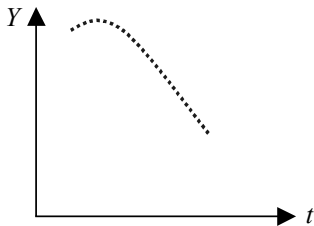
²⁰ $a + d = 106,5 + 10,9 = 117,4$.

Jak długo będzie trwała faza dojrzałości oraz jaka będzie faza spadkowa nie wiadomo, gdyż funkcja logistyczna takich sugestii nie daje. Trzeba byłoby – o ile odważylibyśmy się na szacowanie *całego* cyklu życia produktu na podstawie *fragmentarycznych* danych – zastosować inne funkcje, na przykład funkcje typu „wzrost-spadek”.

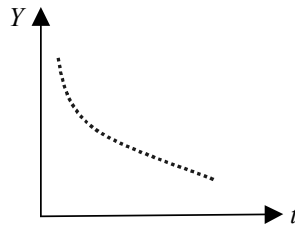
Przebieg fazy spadkowej można by też odgadywać poprzez analogie do cyklu życia innych produktów, znajdujących się już w fazie spadkowej.

3. Estymacja modelu cyklu życia produktu na podstawie danych z fazy spadkowej

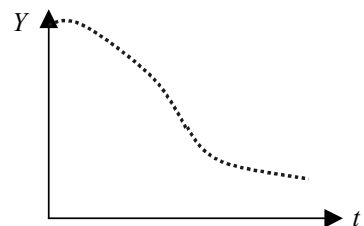
Przyjmijmy teraz, że dane statystyczne dotyczą tylko fazy spadku – całej (rys. 20) lub jej fragmentu (rys. 18, 19).



Rys. 18



Rys. 19



Rys. 20

Jeśli idzie o podstawowe ujęcia, to idee estymacji modelu cyklu życia są analogiczne do omówionych dla przypadku fazy wzrostowej. W szczególności można mówić o trzech podejściach:

Podejście 1. Estymacja modelu tylko dla tego *fragmentu* cyklu życia produktu, którego dotyczą *posiadane dane* (np. estymacja modelu dla okresu coraz wolniejszego spadku, jeśli dane dotyczą tego okresu – rys. 19 lub estymacja modelu fazy spadkowej na podstawie danych z całej fazy spadku – rys. 20).

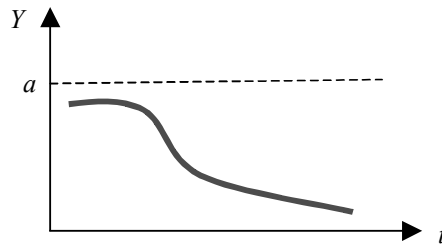
Podejście 2. Estymacja modelu dla *całej fazy spadku* na podstawie danych fragmentarycznych (np. na podstawie danych z początku fazy spadkowej – por. rys. 18). Modelem fazy spadkowej może być, na przykład, malejący trend logistyczny lub malejący trend wykładniczo-hiperboliczny.

Podejście 3. Estymacja *całego modelu* cyklu życia produktu na podstawie danych z fazy spadkowej (całej lub części). Można tu wykorzystać cytowane już funkcje „wzrost-spadek”, na przykład funkcję potęgowo-wykładniczą.

Modelowanie fazy spadku za pomocą funkcji logistycznej

Mówiąc o funkcji logistycznej, zazwyczaj ma się na myśli funkcję rosnącą, taką jak omawianą w poprzednim rozdziale. Funkcja logistyczna ma jednak jeszcze inne przebiegi w zależności od wartości parametrów. W szczególności jest ona malejąca (początkowo coraz szybciej, potem coraz wolniej), jeśli parametr c jest dodatni, a pozostałe parametry są też dodatnie (rys. 21):

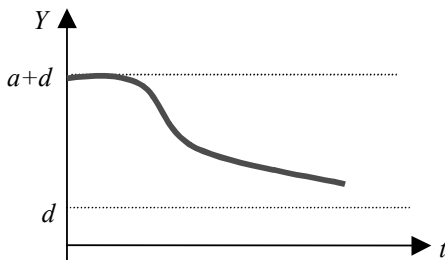
$$Y = \frac{a}{1 + be^{ct}}; \quad a, b > 0; \quad \text{ale przy tym również } c > 0. \quad (9)$$



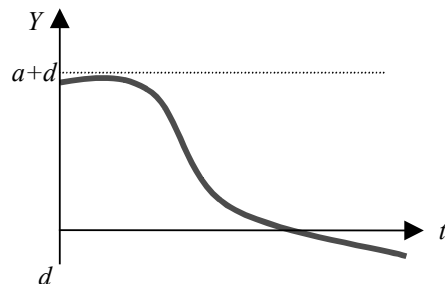
Rys. 21

- Parametr a określa górny pułap sprzedaży w fazie spadkowej.
- Dolny pułap sprzedaży w fazie spadkowej wynosi 0.

Malejąca funkcja logistyczna (9) sugeruje, że w miarę upływu czasu sprzedaż zmierza do zera. Nie zawsze jest to usprawiedliwione i w wielu przypadkach można założyć, że w przyszłości sprzedaż będzie malała, ale nie do zera, lecz do pewnego minimalnego poziomu $d > 0$ (rys. 22). Może też być tak, że sprzedaż szybko spadnie do zera, wtedy $d < 0$ (rys. 23).



Rys. 22



Rys. 23

Ogólniejsza wersja funkcji logistycznej malejącej jest więc następująca:

$$Y = \frac{a}{1 + be^{ct}} + d, \quad (b, a > 0; c > 0). \quad (10)$$

Dolny poziom sprzedaży określa wartość d , natomiast górny pułap w fazie spadkowej to

$$g = d + a. \quad (11)$$

Dodatkowo może być konieczne „przesunięcie” wykresu funkcji po osi czasu²¹, tzn. przenumeroowanie zmiennej czasowej. Mielibyśmy wtedy malejący model logistyczny:

$$Y = \frac{a}{1 + be^{cx}} + d, \quad (a, b > 0; c > 0), \quad (12)$$

gdzie $x = t + p$.

Modelowanie fazy spadku za pomocą funkcji wykładniczo-hiperbolicznej

Malejący trend wykładniczo-hiperboliczny to funkcja o wzorze:

$$Y = Ae^{b/t}, \quad (A > 0, t > 0; \text{przy tym parametr } b > 0). \quad (13)$$

- Przebieg jest podobny do przebiegu malejącego trendu logistycznego, zob. rys. 21.
- Zasadnicza różnica jest taka, że malejący trend wykładniczo-hiperboliczny ma asymptotę dolną równą A , a więc określa minimalny (równy A) poziom sprzedaży dla fazy spadkowej²².

W ogólnym ujęciu malejąca funkcja wykładniczo-hiperboliczna jest określona wzorem:

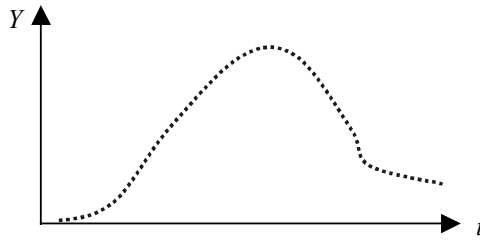
$$Y = Ae^{b/x} + d, \quad (A > 0; b > 0; x > 0). \quad (14)$$

4. Modelowanie dwufazowego cyklu życia produktu za pomocą funkcji typu „wzrost-spadek”

Obecnie zajmiemy się szacowaniem modelu cyklu życia produktu, gdy dane statystyczne dotyczą zarówno fazy wzrostu, jak i fazy spadku. Przy tym faza środkowa (stabilizacja) albo jest bardzo krótka, albo nie występuje.

²¹ Na przykład konieczne jest przesunięcie na prawo, gdy chcemy, aby obserwacje z (niewidocznej, ale istniejącej) fazy wzrostowej miały numery dodatnie $1, 2, 3, \dots, p$. Wtedy obserwacje z fazy spadkowej mają numery $p + 1, p + 2, \dots$.

²² Dodajmy, że dla $t = 0$ wartość z malejącego trendu wykładniczo-hiperbolicznego jest nieoznaczona i dlatego konieczne jest przenumeroowanie obserwacji, tak aby dla pierwszej obserwacji fazy spadkowej wartość zmiennej zależnej była oznaczona.

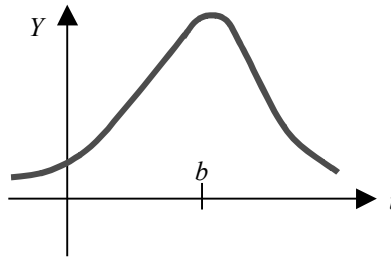


Rys. 24

Modeli dla zjawiska pokazanego na rysunku 24 można poszukiwać w obrębie funkcji początkowo rosnących, a potem malejących, czyli funkcji typu „wzrost-spadek”. Oto przykłady takich funkcji.

Krzywa „normalna”²³ (rys. 25):

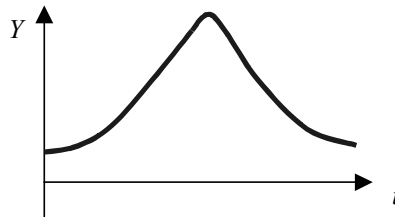
$$Y = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{(t-b)^2}{c}\right) \quad (a, c > 0). \quad (15)$$



Rys. 25

Krzywa stopnia trzeciego (rys. 26):

$$Y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}, \quad (a > 0, \Delta = 4ac - b^2 > 0, x = t + p \geq 0). \quad (16)$$

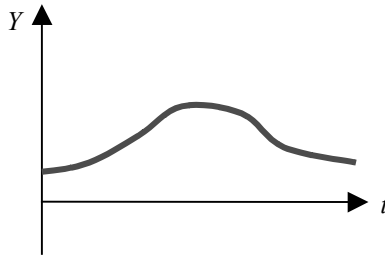


Rys. 26

²³ Jest to funkcja „podobna” do krzywej rozkładu normalnego.

Funkcja wykładniczo-kwadratowa (rys. 27):

$$Y = Ae^{bx^2+cx}, \quad (A > 0, c < 0, x = t + p \geq 0). \quad (17)$$

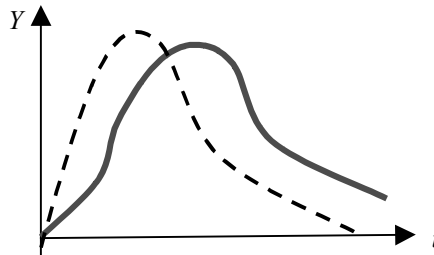


Rys. 27

Funkcja potęgowo-wykładnicza (rys. 28):

$$Y = Ax^b e^{cx}, \quad (A > 0, b > 0, c < 0, x = t + p \geq 0); \quad (18)$$

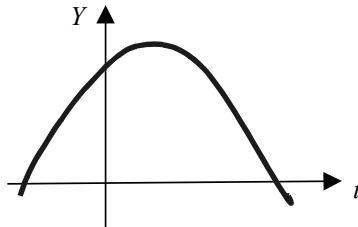
$p \geq 0$ – przesunięcie zmiennej t .



Rys. 28

Parabola kwadratowa (rys. 29):

$$Y = at^2 + bt + c \quad (a > 0, \Delta = b^2 - 4ac < 0, c < 0). \quad (19)$$



Rys. 29

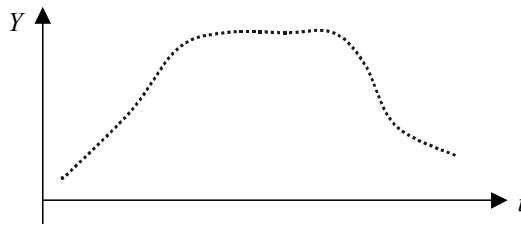
Zaletą tych funkcji jest to, że można oszacować cały cykl życia produktu na podstawie tylko fragmentarycznych danych, np. obejmujących jedynie fazę wzrostu lub jej część, co ilustrowano w poprzednich rozdziałach na przykładzie funkcji potęgowo-wykładniczej (16).

Podane funkcje mają jednak dwie podstawowe wady z punktu widzenia modelowania cyklu życia produktu. Pierwszą jest to, że po fazie wzrostu od razu następuje faza spadku (nie ma fazy dojrzałości) i z tego powodu nadają się one do modelowania tylko wąskiej klasy cykli życia (bez fazy dojrzałości lub z tą fazą bardzo krótką). Drugą zaś jest to, że (z wyjątkiem funkcji potęgowo-wykładniczej) są one symetryczne i dlatego ich stosowanie jest ograniczone tylko do przypadków, gdy faza spadku jest symetrycznym odwzorowaniem fazy wzrostu. W przypadku paraboli (17) funkcja ta może być stosowana jako model cyklu życia dla tych t , dla których wartość funkcji jest nieujemna.

Podane funkcje można oszacować klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (poprzez linearyzację lub bezpośrednio – według kryterium minimalizacji sumy kwadratów reszt).

5. Szacowanie trójfazowego cyklu życia produktu za pomocą segmentów logistycznych

Obecnie rozpatrujemy sytuację, gdy punkty empiryczne dotyczą trzech podstawowych faz cyklu życia produktu: wzrostu, dojrzałości, spadku (rys. 30).

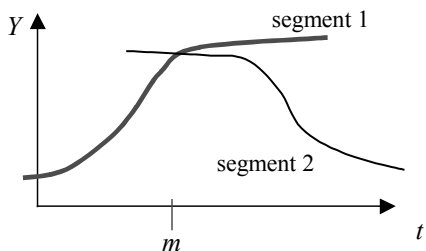


Rys. 30

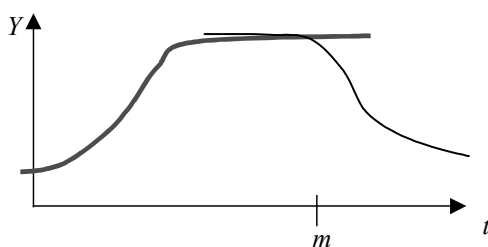
W tej sytuacji trzeba zastosować funkcję trzyfazową: najpierw wzrost, potem stabilizacja (lub prawie stabilizacja) i na koniec spadek. Tego typu przebiegi trójfazowe źle modeluje się funkcjami typu „wzrost-spadek”, podanymi w poprzednim paragrafie, i to tym gorzej, im faza dojrzałości jest dłuższa.

Wydaje się, że najwygodniejsze podejście do modelowania trójfazowego cyklu życia produktu to konstruowanie modelu złożonego z *dwóch segmentów logistycznych*, przy czym pierwszy segment logistyczny jest rosnący, a drugi jest malejący.

Jest to model ogólny, gdyż pozwala opisywać cykle życia produktu zarówno z krótką, jak i z długą fazą stabilizacji. Przy tym modelowanie fazy stabilizacji jest proste i sprowadza się do przesuwania względem siebie rosnącego i malejącego segmentu logistycznego, co zilustrowano na rysunkach 31 oraz 32.



Rys. 31



Rys. 32

• Jeśli segmenty „dość wcześnie” nakładają się na siebie, to otrzymujemy model z bardzo krótką fazą środkową (rys. 31), jeśli zaś są one mocno „rozsunięte”, otrzymujemy model z długą fazą środkową (rys. 32).

• Pierwszy segment dotyczy przedziału czasu kończącego się momentem m , drugi segment dotyczy przedziału czasu po momencie m . Moment ten to tzw. *modulator* (*przełącznik*).

Proponowany model segmentowy cyklu życia produktu określony jest wzorem:

$$Y = \begin{cases} \frac{a_1}{1 + b_1 e^{c_1 t}} + d_1 & \text{dla fazy wzrostu, tzn. dla } t \leq m; \quad (a_1, b_1 > 0; \quad c_1 < 0); \\ \frac{a_2}{1 + b_2 e^{c_2 t}} + d_2 & \text{dla fazy spadku, tzn. dla } t > m \quad (a_2, b_2 > 0; \quad c_2 > 0). \end{cases} \quad (20)$$

Parametry modelu oznaczono literami a , b , c , d (przy czym indeks 1 dotyczy pierwszego segmentu, a indeks 2 – drugiego segmentu. Interpretację parametrów podano powyżej, na przykład d_1 to dolny poziom fazy wzrostowej, zaś d_2 to dolny poziom fazy spadkowej (mogą to być zarówno liczby dodatnie, jak i ujemne). Maksymalny poziom sprzedaży w fazie wzrostowej wynosi $a_1 + d_1$, a w fazie spadkowej jest to $a_2 + d_2$. Parametrem zadania jest też moment m (modulator), w którym następuje przełączenie z segmentu wzrostowego na segment spadkowy.

Modulator oraz inne parametry, na przykład poziomy dolny, mogą być ustalone *a priori* lub szacowane na podstawie danych statystycznych.

Model (18) to najprostszy model segmentowy o segmentach logistycznych. W zastosowaniach trzeba go jednak dość często modyfikować. Po pierwsze, trzeba zapewnić, by wartości obu segmentów w modulatorze były sobie równe (jak na rys. 31, 32), aby nie powstawały trudne do wytłumaczenia „uskoki” segmentów. Po drugie, konieczne jest

przenumerowanie zmiennej czasowej dla drugiego segmentu, aby jego punktem odliczenia był modulator, czyli moment, w którym zaczyna się drugi segment²⁴.

Tak rozbudowany model o dwóch segmentach logistycznych – rosnącym f_1 oraz malejącym $-f_2$ ma więc postać:

$$Y = \begin{cases} f_1(t) & \text{dla } t \leq m, \\ f_2(t) & \text{dla } t > m, \end{cases} \quad (21)$$

gdzie:

$$f_1(t) = \frac{a_1}{1 + b_1 e^{c_1 t}} + d_1, \quad (22)$$

$$f_2(t) = \frac{a_2}{1 + b_2 e^{c_2(t-m)}} + d_2. \quad (23)$$

Spełniony jest przy tym warunek poboczny, że oba segmenty „stykają” się w modulatorze, czyli że mają tę samą wartość dla momentu $t = m$:

$$f_1(m) = f_2(m), \quad (24)$$

a parametry:

$$a_1, a_2 > 0; \quad b_1, b_2 > 0; \quad c_1 < 0, c_2 > 0; \quad (25)$$

$$1 < m < T \quad (T - \text{liczba obserwacji}).$$

W procesie estymacji należy zapewnić spełnienie warunku pobocznego (22). Warunki znakowe (23), o ile przebieg ma kształt taki, jak na rysunku 30 (początkowo wzrost, potem spadek), są spełnione niejako automatycznie. Oczywiście jeśli nie ma podstaw, by wprowadzać dolny poziom fazy wzrostowej lub/i fazy spadkowej, to nie uwzględniamy odpowiedniego parametru d_1 lub d_2 .

Estymacja modelu wymaga procedur ogólniejszych niż na przykład „szkolna” metoda najmniejszych kwadratów. W szczególności obliczenia można przeprowadzić pod *Solverem Excela* lub za pomocą pakietów profesjonalnych.

Przykład

W tabeli podano informacje o sprzedaży produktu w ciągu 50 kolejnych miesięcy. Informacje te przedstawiono też na rysunku 33.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	31	38	45	54	69	66	70	79	83	87

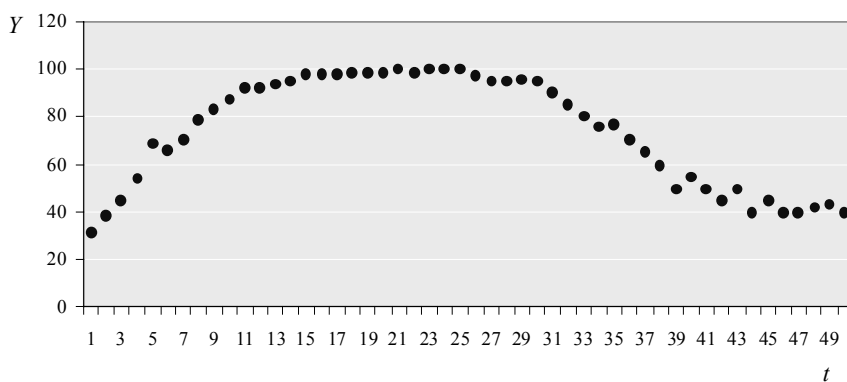
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	92	92	94	95	98	98	98	99	99	99

²⁴ O przenumerowaniu obserwacji mówiono na przykład pod koniec rozdziału 3.

t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Y	100	99	100	100	100	97	95	95	96	95

t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Y	90	85	80	76	77	70	65	60	50	55

t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Y	50	45	50	40	45	40	40	42	43	40



Rys. 33

Do przedstawionych danych dopasowano, według klasycznej metody najmniejszych kwadratów, model segmentowy (19), złożony z rosnącego oraz malejącego segmentu logistycznego. Przyjęto, że w modulatorze wartości obu segmentów będą równe. Oszacowany model cyklu życia produktu przyjął postać²⁵:

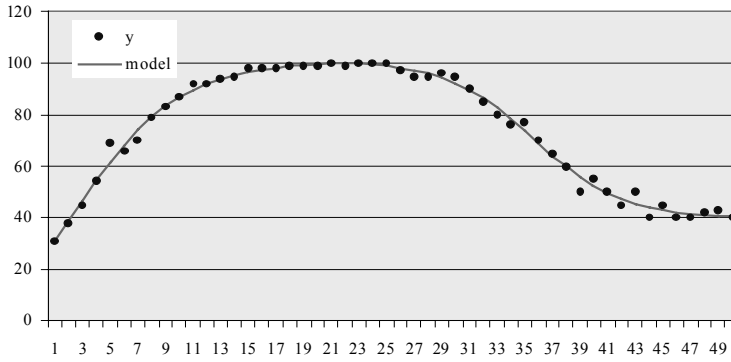
$$Y = \begin{cases} \frac{123,8}{1 + 1,692e^{-0,261t}} - 23,2 & \text{dla } t \leq 22 \\ \frac{60,9}{1 + 0,0142e^{0,317(t-22)}} + 39,9 & \text{dla } t > 22 \end{cases}; R^2 = 0,991.$$

- Oszacowano, że maksymalny poziom sprzedaży w fazie wzrostu wynosi 100,5²⁶.
- Również mniej więcej tyle samo wynosi oszacowany maksymalny poziom w fazie spadku, mianowicie 100,8²⁷.

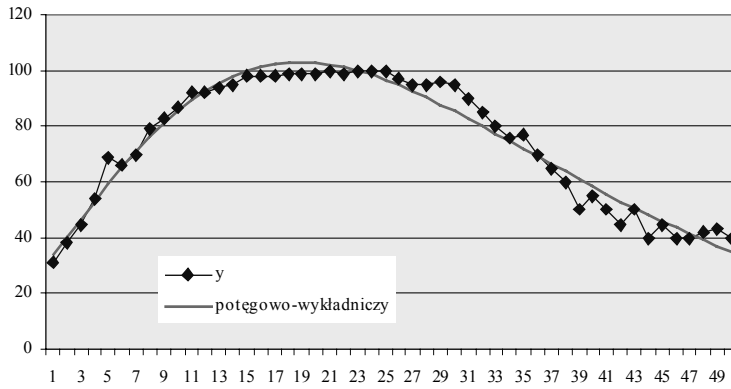
²⁵ Obliczenia wykonano metodą Newtona pod *Solverem Excela*, według własnego arkusza obliczeniowego.

²⁶ $g_1 = a_1 + d_1 = 123,8 + (-23,2) = 100,5$.

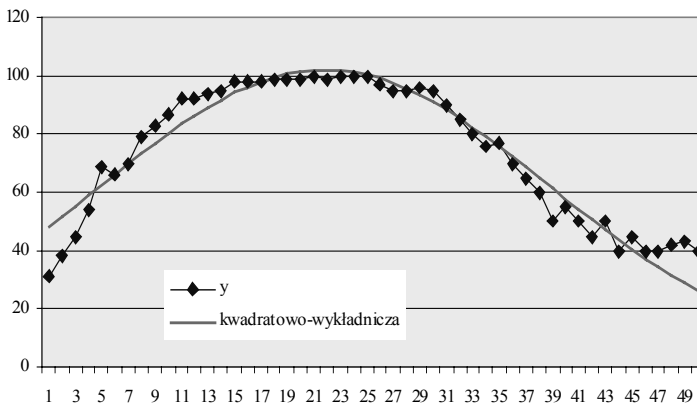
²⁷ $g_2 = a_2 + d_2 = 60,9 + 39,9 = 100,8$.



Rys. 34



Rys. 35



Rys. 36

- Oszacowany minimalny poziom sprzedaży w fazie spadkowej wynosi ok. 39,9²⁸.
- To, że oszacowany minimalny poziom w fazie wzrostowej jest liczbą ujemną ($d_1 = -23,2$) oznacza, że pierwszy segment przecina oś czasu w pewnym momencie $t < 0$. Jest to oszacowanie momentu rozpoczęcia sprzedaży.

Po przyrównaniu wartości pierwszego segmentu do zera i rozwiązaniu równania względem t otrzymujemy, że oszacowany moment rozpoczęcia sprzedaży to $t_p = -3$ (czyli 4 miesiące wcześniej niż moment rozpoczęcia obserwacji sprzedaży, $t = 1$).

- Dopasowanie modelu jest bardzo dobre, gdyż wyjaśnił on aż 99,1% zaobserwowanej zmienności sprzedaży. Bardzo dobre dopasowanie widać też na rysunku 34.

Dodajmy, że modele „wzrost-spadek”, przedstawione w rozdziale 4, pasują gorzej od oszacowanego powyżej modelu o segmentach logistycznych. Współczynniki determinacji przykładowo wynoszą:

- dla funkcji potęgowo-wykładniczej 96,4% (rys. 35);
- dla krzywej stopnia trzeciego 93,2% (rys. 36);
- dla funkcji wykładniczo-kwadratowej 93,1%.

Oprócz gorszego dopasowania istotne jest też to, że funkcje te – w odróżnieniu od pokazanego na rysunku 34 modelu o dwóch segmentach logistycznych – niezbyt dobrze modelują fazę środkową oraz „końce” przebiegu.

* * *

Model rynkowego cyklu życia produktu w postaci trendu o dwóch segmentach logistycznych traktujemy jako podstawową propozycję. Ważne jest to, że za pomocą owego modelu można opisać *bardzo szeroką klasę* rynkowych cykli życia produktów, a szczególnie:

1. Można modelować fazę środkową, niezależnie od tego, czy jest ona bardzo krótka, czy też bardzo długa. Funkcje typu „wzrost-spadek” tej możliwości nie dają.
2. Faza spadkowa nie musi być symetrycznym odwzorowaniem fazy wzrostowej; na przykład może mieć inną długość, inną intensywność zmian i inny poziom dolny.
3. Na podstawie minimalnego poziomu segmentu wzrostowego można oszacować początkowy moment sprzedaży (w przypadku $d_1 < 0$) lub minimalny poziom sprzedaży w „dalekiej” przeszłości (w przypadku $d_1 > 0$).
4. Oszacowany minimalny poziom segmentu spadkowego umożliwia prognozowanie momentu zakończenia sprzedaży (w przypadku gdy $d_2 < 0$) lub prognozowanie minimalnego poziomu sprzedaży w przyszłości (w przypadku $d_2 > 0$).
5. Można oszacować maksymalny poziom sprzedaży w fazie wzrostowej oraz w fazie spadkowej.

²⁸ $d_2 = 39,9$.

6. Modele cyklu życia produktu mogą być standardowe, ale mogą być poprzesuwane na osi czasu w lewo bądź w prawo.

7. Modele te mogą dotyczyć przebiegów początkowo silnie rosnących, a następnie silnie malejących – czyli tzw. przebiegów \cap -kształtnych; osiąga się to przez wprowadzenie ujemnych dolnych poziomów w fazie wzrostowej oraz fazie spadkowej.

8. Można oszacować stopy wzrostu (spadku) sprzedaży w fazie wzrostowej oraz w fazie spadkowej²⁹.

Jest zrozumiałe, że opisane podejście – model cyklu życia w postaci funkcji segmentowej – może być zastosowane w przypadku innych postaci analitycznych segmentów, np. wykładniczo-hyperbolicznych, liniowych, potęgowych. Nie jest przy tym konieczne, aby wszystkie segmenty miały tę samą ogólną postać analityczną, np. jeden może być logistyczny rosnący, drugi – wykładniczy malejący.

Bibliografia

- [1] CZERWIŃSKI Z., *Matematyka na usługach ekonomii*, wyd. III, PWN, Warszawa 1972.
- [2] GARBARSKI L., RUTKOWSKI I., WRZOSEK W., *Marketing – punkt zwrotny nowoczesnej firmy*, PWE, Warszawa 2000.
- [3] GUZIK B., *Ekonometria*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2005.
- [4] LANGE O., *Wstęp do ekonometrii*, wyd. II, PWN, Warszawa 1961.
- [5] PAWŁOWSKI Z., *Uwagi o warunkach wyznaczania trendu logistycznego*, Przegląd Statystyczny, 1967, nr 1.
- [6] SZWARC W., *Uwagi o metodzie tempa wzrostu*, Handel Wewnętrzny, 1966, nr 2–3.
- [7] *Wprowadzanie nowego produktu na rynek* (red. B. Sojkin), Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2003.

Estimation of the Product Life Cycle market model

The article presents basic approaches to statistical estimation of the Product Life Cycle (PLC) market model: a) when data doesn't include all phases of the cycle (incomplete data), b) when data includes all phases of the cycle.

The author describes the problems with estimation of the full and partial PLC-models based on the incomplete data. The paper considers some modifications of the standard models that consist in displacement of the function or displacement of the function arguments.

The author also describes assessment of the PLC model which includes the “increase-decrease” function, e.g. parabolic functions, power-exponential functions, exponential-quadratic functions and considers their disadvantages. In order to avoid the mentioned problems, the author suggests using the logistic-segments model where the first segment is increasing and the second decreasing.

Keywords: *Product Life Cycle (PLC) models, “increase-decrease” functions, logistic function*

²⁹ Wzory dotyczące stopy wzrostu wielkości opisanej funkcją logistyczną podaje na przykład Z. Czerwiński w książce *Matematyka na usługach ekonomii*, PWN, wyd. III, Warszawa 1972, s. 459.