B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 4 2008

Bogusław GUZIK*

MODEL CCR-DP
ZE ZDOMINOWANĄ FUNKCJĄ INFLACYJNĄ NAKŁADÓW

W standardowej, ukierunkowanej na nakłady, metodzie DEA przyjmuje się, że krańcowa produktywność nakładów jest stała. Zmiany efektywności dokonywane są wtedy przez proporcjonalne zmiany nakładów. W artykule rozpatrzono sytuację, gdy krańcowa produktywność nakładów jest malejąca. Stosownie do tego zaproponowano modyfikację metod DEA, polegająca na wprowadzaniu osobnych mnożników skali nakładów i osobnych mnożników skali rezultatów. Rozważono przypadek tzw. zdominowanej funkcji inflacyjnej nakładów, która określa mnożniki nakładów jako funkcję rosnącą coraz szybciej i ograniczoną od dołu przez mnożniki dla rezultatów. Podano dwa przykłady funkcji inflacyjnych i przeprowadzono ich dość szczegółową analizę.

Słowa kluczowe: *malejąca produktywność, mnożniki skali nakładów, nieliniowa DEA, model CCR-DP*

1. Wstęp

DEA jest bodaj najpopularniejszą metodą ustalania efektywności względnej obiektów gospodarczych. Za jej autorów powszechnie uważa się Charnesa, Coopera, Rhodese [2]. Od czasu ich publikacji (1978 r.) doczekała się ona bardzo wielu modyfikacji, rozwinięć oraz ogromnej liczby zastosowań zarówno w sektorze non-profit, jak i instytucjach biznesowych[1]. Należy wymienić przede wszystkim:

0. *CCR* – Charnes, Cooper, Rhodes [2],
1. *BCC* – Banker, Charnes, Cooper [3],
2. *CEM* (*cross-efficiency model*) – Sexton, Silkman, Hogan [6],

* Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: b.guzik@ae.poznan.pl

[1] Na przykład opracowana przez Tawares [13] bibliografia metody DEA za lata 1978–2001 zawiera ponad 3000 artykułów, a bibliografia za lata 1978–2005 opracowana przez Seiforda [7] liczy ok. 2800 artykułów naukowych i dysertacji.

3. *SE-CCR* (*super-efficiency-CCR*) – Andersen, Petersen [1] (niekiedy kodowana *AP*),

4. *NR-DEA* (*non-radial DEA*) – Thanassoulis, Dyson [10], Zhu [14],

5. *CEP* (*cross-efficiency profiling*) – Doyle, Green [4], Tofallis [11],

6. *SE-BCC* (*super-efficiency BCC*) – Seiford, Zhu [8],

7. *SE-SBM* (*supper-efficiency-slack-based measure*) – Tone [12][2].

W wymienionych podejściach DEA przyjmuje się, że zmiany efektywności technologicznej obiektów dokonywane są poprzez *proporcjonalne* zmiany wszystkich (lub niektórych) nakładów – w przypadku zadania ukierunkowanego na nakłady, lub rezultatów – w przypadku ukierunkowania na rezultaty. Przykładowo w klasycznej metodzie CCR zorientowanej na nakłady, dla ustalenia efektywności obiektu o-tego, rozwiązuje się zadanie decyzyjne, w którym minimalizowany jest mnożnik poziomu nakładów θ_o, a warunek dla nakładów ma postać[3]

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj}\,\lambda_{oj} \le \theta_o\, x_{no}, \quad (1 \le n \le N), \tag{1}$$

gdzie:

x_{nj} – nakład n-tego rodzaju w j-tym obiekcie ($n = 1, ..., N, j = 1, ..., J$),

λ_{jo} – współczynniki kombinacji technologii cząstkowych poszczególnych obiektów.

Zmiany mnożnika poziomu nakładów oznaczają proporcjonalne zmiany nakładów (prawa strona warunku (1)).

W artykule rozpatruje się częściej spotykaną okoliczność, gdy zmiany krańcowej produktywności nakładów są *malejące*. W ślad za tym zaproponowano uwzględnienie tego faktu poprzez wprowadzenie do modelu CCR tzw. zdominowanych funkcji inflacyjnych nakładów.

W rozdziale 2 zilustrowano zagadnienie proporcjonalnej oraz malejącej produktywności nakładów. W rozdziale 3 przedstawiono sformułowanie „klasycznego” dla DEA modelu CCR, gdyż będzie on podstawą modelu z malejącą produktywnością nakładów CCR-DP. Dla sformułowania tego modelu niezbędna była analiza sposobu modelowania malejącej produktywności nakładów, co zaprezentowano w rozdziale 4. Model CCR-DP sformułowano w rozdziale 5, a w rozdziale 6 podano dwa przykłady zdominowanych inflacyjnych funkcji nakładów. Rozdział 7 zawiera przykład obliczeniowy.

[2] Lista ta oparta jest głównie na artykule Sun, Lu [9].

[3] Cały model CCR przedstawiono w rozdziale 3.

2. Ilustracja proporcjonalnej oraz malejącej produktywności nakładów

Stała krańcowa produktywność nakładów

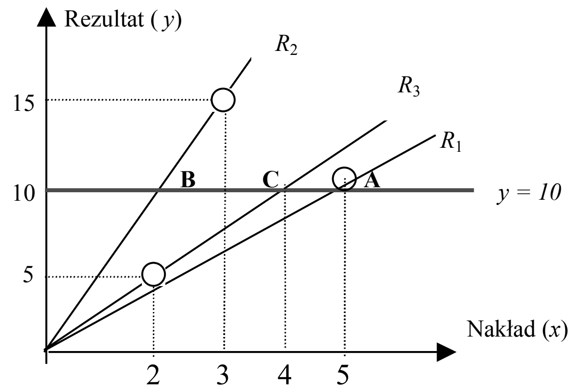
Rozpatrujemy trzy obiekty, które uzyskują jeden rezultat przy użyciu jednego nakładu. Technologie obiektów (nakłady i rezultaty) scharakteryzowano w tabeli 1.

Tabela 1. Dane o trzech obiektach

Obiekty	O1	O2	O3
Nakład	5	3	2
Rezultat	10	15	5

Źródło: Dane umowne.

Przy założeniu proporcjonalnych zmian produktywności, relacje między nakładem a rezultatem charakteryzują liniowe promienie technologiczne R_1, R_2, R_3, podane na rysunku 1.



Rys. 1. Liniowe promienie technologiczne. Jeden nakład, jeden rezultat

Kółka oznaczają technologie poszczególnych obiektów, czyli ich wektory nakładów–rezultatów. Promień technologiczny danego obiektu jest półprostą wychodzącą z początku układu współrzędnych (co reprezentuje zerowy nakład oraz zerowy rezultat) i przechodzącą przez punkt odpowiadający technologii danego obiektu.

Niektóre wnioski z rysunku 1 są następujące:

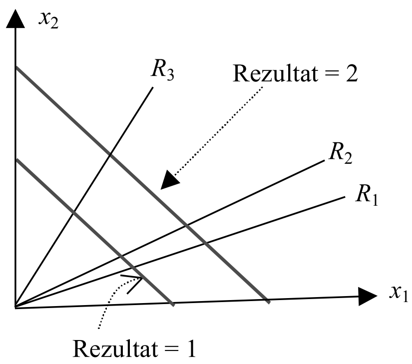
• Zwiększanie rezultatu wymaga proporcjonalnego zwiększania nakładu, co oznacza przesuwanie się ku górze po promieniu technologicznym.

• Rezultat obiektu O1 równy 10 może być uzyskany dzięki technologii obiektu O3 przy nakładzie równym 4 (punkt C) lub dzięki technologii obiektu O2 – przy nakładzie wynoszącym 2 (punkt B)[4], lub – oczywiście – dzięki technologii obiektu O1 przy nakładzie 5.

• Rezultat ten można też uzyskać w wyniku kombinacji technologii poszczególnych obiektów. Oznacza to rozwiązanie równania liniowego:

$$5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 10\ [5].$$

Przypadek dwóch nakładów i jednego rezultatu przedstawiono na rysunku 2. Ukośne warstwice (od lewej do prawej) oznaczają izokwanty jednakowego rezultatu, a promienie – kombinacje obu nakładów.



Rys. 2. Liniowe promienie technologiczne. Dwa nakłady, jeden rezultat

Malejąca krańcowa produktywność nakładów

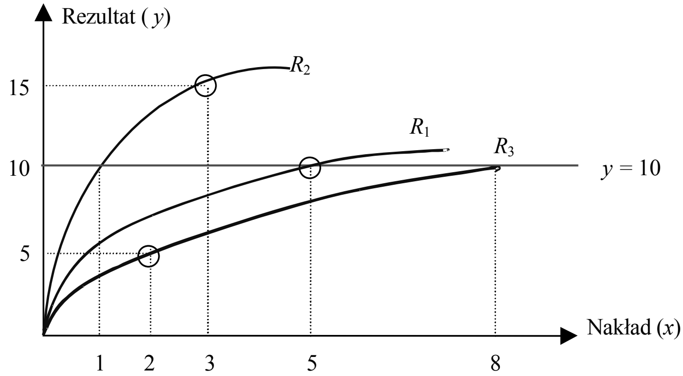
W poprzednim punkcie pracy zakładano, że krańcowa produktywność nakładów jest *stała.* Tymczasem zarówno teoria, jak i praktyka ekonomii pokazują, że krańcowa produktywność czynników produkcji („nakładów") jest raczej *malejąca:* w miarę wzrostu poziomu nakładów, tym samym co do skali przyrostom nakładu odpowiadają coraz to mniejsze przyrosty rezultatów lub tym samym co do skali przyrostom rezultatów odpowiadają coraz to większe przyrosty nakładów. Oznacza to, że promienie technologiczne raczej nie są liniowe, lecz są *nieliniowe, rosnące coraz wolniej.* Ilustruje to rysunek 3.

W tym wypadku punkty przecięcia promieni technologicznych z postulowaną linią efektu (tu $y = 10$) są inne niż w przypadku liniowym, co oznacza, że inne też będą nakłady niezbędne dla uzyskania założonego rezultatu. Przykładowo, gdyby zastosowano technologię obiektu drugiego, wtedy dla uzyskania rezultatu obiektu pierwszego,

[4] Punkty te to, oczywiście, rozwiązanie odpowiednich układów równań: równania promienia technologicznego i równania postulowanego rezultatu, $y = c$ (tu: $y = 10$).

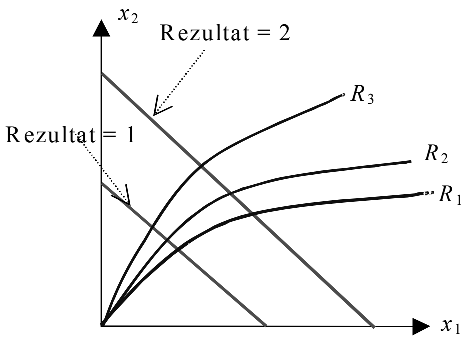
[5] Jednym (z nieskończonej liczby) rozwiązaniem jest, na przykład, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0{,}5$.

y = 10, trzeba by ponieść nakład x = 1 (punkt B), a nie x = 2, jak w przypadku stałej krańcowej produktywności nakładów – por. rys. 1. Zastosowanie technologii obiektu trzeciego wymagałoby natomiast nakładu x = 8 (punkt C), a nie x = 4, jak w przypadku proporcjonalnych zmian nakładów i rezultatów.



Rys. 3. Nieliniowe promienie technologiczne. Jeden rezultat, jeden nakład

Przypadek dwóch nakładów i jednego rezultatu zilustrowano na rysunku 4.



Rys. 4. Nieliniowe promienie technologiczne. Dwa nakłady, jeden rezultat

3. Model CCR

W artykule dokonuje się modyfikacji klasycznego modelu CCR – Charnes, Cooper, Rhodes (1978). Dlatego wygodnie będzie go opisać.

Model CCR dla obiektu o-tego ($1 \leq o \leq J$)

Model CCR (jak większość modeli DEA) formułuje się w odniesieniu do poszczególnych obiektów.

I. Dane:

x_{nj} – nakład n-tego rodzaju w j-tym obiekcie ($n = 1, ..., N, j = 1, ..., J$);

y_{rj} – rezultat r-tego rodzaju uzyskany w j-tym obiekcie ($r = 1, ..., R, j = 1, ..., J$).

II. Zmienne decyzyjne:

nieujemne liczby θ_o; $\lambda_{o1}, \lambda_{o2}, ..., \lambda_{oJ}$.

(Jak już wspomniano, θ_o jest mnożnikiem nakładów, a współczynnik λ_{oj} jest wagą technologii obiektu j-tego).

III. Funkcja celu:

$$\theta_o \to \min. \tag{2}$$

IV. Warunki ograniczające:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj}\,\lambda_{oj} \leq \theta_o x_{no}, \; (n = 1, ..., N), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{J} y_{rj}\,\lambda_{oj} \geq y_{ro}, \; (r = 1, ..., R), \tag{4}$$

$$\theta_o \leq 1. \tag{5}$$

IV. Warunki znakowe

$$\theta_o; \lambda_{o1}, \lambda_{o2}, ..., \lambda_{oJ}. \tag{6}$$

Niektóre własności modelu CCR

• Współczynniki λ_{oj} są wagami w liniowej kombinacji technologii poszczególnych obiektów:

$$\mathbf{T}_o = \lambda_{o1}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{y}_1\end{bmatrix} + \lambda_{o2}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_2\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix} + \ldots + \lambda_{oJ}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_J\\ \mathbf{y}_J\end{bmatrix}, \tag{7}$$

gdzie:

$\mathbf{x}_j = [x_{nj}]_{n\,=\,1,..,\,N}$ oraz $\mathbf{y}_j = [y_{rj}]_{r\,=\,1,..,\,R}$ to wektor nakładów oraz wektor rezultatów obiektu j-tego.

• Technologię (7) można nazwać *wspólną* technologią zbioru badanych obiektów, skierowaną na osiągnięcie rezultatów uzyskanych przez obiekt o-ty. Współczynnik λ_{oj} oznacza krotność technologii obiektu o-tego, zawartą w technologii wspólnej.

• Mnożnik poziomu nakładów obiektu o-tego, θ_o, określa, jaką krotność rzeczywistych nakładów obiektu o-tego wykorzystuje technologia wspólna w celu uzyskania rezultatów tego obiektu.

• Optymalna technologia wspólna jest także *optymalną technologią obiektu o*-tego, a optymalna wartość mnożnika θ_o oznacza *efektywność obiektu o*-tego w sensie Farrella. Przy tym $0 < \theta_o \le 1$.

• W optymalnej technologii wspólnej może uczestniczyć – ale tylko *samodzielnie* – obiekt *o*-ty. Wówczas jego efektywność jest 100-procentowa, tzn. $\theta_o = 1$, a współczynniki lambda wynoszą: $\lambda_{o,o} = 1$ oraz $\lambda_{oj} = o$ dla $j = 1,\dots, J$ ($j \neq o$). Jeśli efektywność obiektu jest mniejsza od 1, to „własny” współczynnik lambda badanego obiektu, czyli $\lambda_{o,o}$, w rozwiązaniu optymalnym zadania CCR jest równy 0, a przynajmniej jeden współczynnik λ_{oj} ($j \neq o$) jest dodatni.

• Warunek (5) w zadaniu CCR jest spełniony automatycznie. Uwzględniamy go, gdyż w innych modelach DEA gra on rolę.

• Minimalne nakłady technologii wspólnej są *proporcjonalne* do nakładów obiektu *o*-tego ze współczynnikiem proporcjonalności wszystkich nakładów równym θ_o[6].

4. Malejąca produktywność nakładów

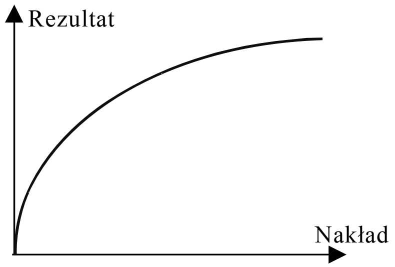
Inflacyjna funkcja nakładów

Spadek krańcowej produktywności nakładów w miarę ich wzrostu może być uwzględniony poprzez:

a) coraz mniejsze przyrosty rezultatów w miarę proporcjonalnych przyrostów nakładów, co można określić mianem *deflacyjnej funkcji rezultatów;*

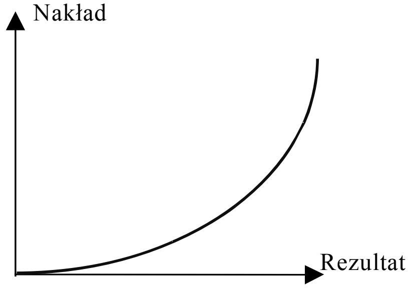
b) coraz większy wzrost nakładów w miarę proporcjonalnego przyrostu rezultatu, co można określić jako *inflacyjną funkcję nakładów*.

Obie funkcje zilustrowano na rysunkach 5 i 6.



Rys. 5. Deflacyjna funkcja dla rezultatów

[6] Dodajmy, że istnieją modele DEA osłabiające ten warunek, np. tzw. *non-radial DEA* Thanassoulisa, Dysona [10], w których dopuszcza się, że wskaźniki efektywności θ są różne dla różnych nakładów.



Rys. 6. Inflacyjna funkcja nakładów

Współczynniki skali nakładów oraz dla rezultatów

Współczynniki λ_{oj} występujące w modelu CCR w warunkach ograniczających dla nakładów oraz dla rezultatów można nazwać *współczynnikami skali*. W CCR współczynniki skali dla rezultatów oraz współczynniki skali dla nakładów są *sobie równe* i wynoszą λ_{oj}.

Uwzględnienie inflacyjnych zmian nakładów oraz deflacyjnych zmian rezultatów jest możliwe w DEA np. poprzez wprowadzenie *innych* współczynników skali dla rezultatów oraz innych współczynników skali dla nakładów.

Jeśli na przykład rozpatruje się produktywność od strony funkcji inflacyjnej nakładów, można przyjąć, że współczynnik skali rezultatów

$$\rho_{oj} = \lambda_{oj}, \tag{8}$$

natomiast współczynnik skali nakładów jest funkcją współczynnika skali rezultatów:

$$\eta_{oj} = g(\lambda_{oj}), \quad (j = 1, ..., J). \tag{9}$$

Będziemy zakładać, że funkcja $g()$ na swojej dziedzinie $\{\lambda_{oj} \geq 0\}$ jest:

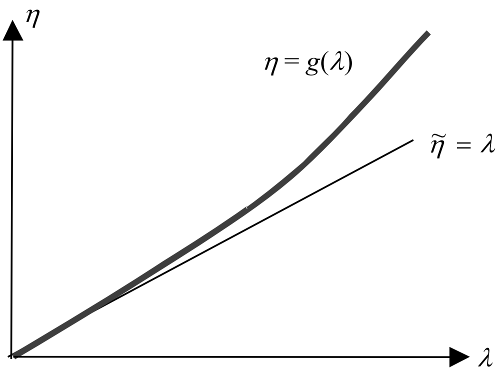
(a) nieujemna,

(b) rosnąca coraz szybciej, (10)

(c) większa od λ_{oj} dla $\lambda_{oj} > 0$,

(d) dla $\lambda_{oj} = 0$ jest nie mniejsza od zera.

Warunek (b) jest oczywisty – aby miała miejsce malejąca produktywność nakładów, funkcja inflacyjna nakładów musi być rosnąca coraz szybciej. Postulat (c) oznacza, że rozpatrujemy klasę inflacyjnych funkcji nakładów, które są ograniczone od dołu (zdominowane od dołu) przez prostą o równaniu $\widetilde{\eta} = \lambda$, co pokazano na rysunku 7.



Rys. 7. Zdominowana od dołu inflacyjna funkcja nakładów η

W wypadku funkcji deflacyjnej dla rezultatów można przyjąć, iż współczynniki skali nakładów wynoszą

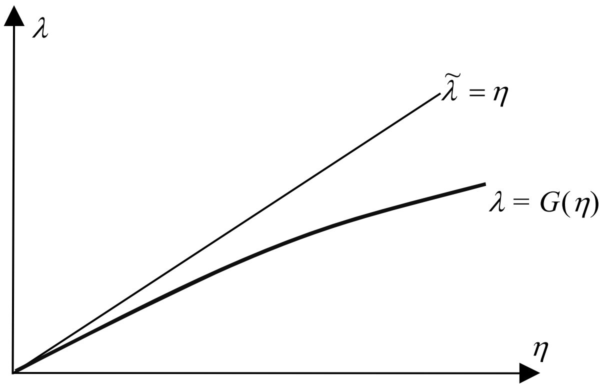
$$\eta_{oj} = \lambda_{oj} , \tag{11}$$

a współczynniki skali dla rezultatów

$$\rho_{oj} = G(\eta_{oj}), \tag{12}$$

gdzie G – funkcja, która na swojej dziedzinie $\{ \eta_{oj} \geq 0 \}$ jest:

(a) nieujemna,
(b) rosnąca coraz wolniej,
(c) mniejsza od η_{oj} dla $\eta_{oj} > 0$,
(d) dla $\eta_{oj} = 0$ nie większa od zera (rys. 8).



Rys. 8. Zdominowana deflacyjna funkcja rezultatów λ

5. Model CCR z malejącą produktywnością nakładów

Sformułowanie modelu CCR-DP

Nawiązujący do CCR, zorientowany na nakłady, model z malejącą krańcową produktywnością nakładów, tzw. model CCR-DP, formułujemy następująco:

I. Dane:

• Wielkości nakładów x_{nj} (n = 1, ..., N) oraz rezultatów y_{rj} (r = 1, ..., R) w poszczególnych obiektach j = 1, ..., J.

• Ogólna postać funkcji $\eta = g()$. Funkcja ta ma własności (10).

II. Zmienne decyzyjne:

$\lambda_{o1}, \lambda_{o2}, ..., \lambda_{oJ}$ – współczynniki skali dla rezultatów,

θ_o – mnożnik poziomu nakładów obiektu o-tego.

Ze współczynnikami λ_{oj} związane są współczynniki skali dla nakładów:

$$\eta_{oj} = g(\lambda_{oj}). \tag{13}$$

III. Funkcja celu:

$$\theta_o \to \text{min – minimalizacja mnożnika nakładów obiektu } o\text{-tego.} \tag{14}$$

IV. Warunki ograniczające:

• Rezultaty technologii wspólnej są nie mniejsze od rezultatów osiągniętych przez obiekt o-ty:

$$\sum_{j=1}^{J} y_{rj}\,\lambda_{oj} \geq y_{ro} \quad (\text{dla } r = 1, ..., R). \tag{15}$$

• Nakłady technologii wspólnej są nie większe od części nakładów poniesionych przez obiekt o-ty:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj}\,\eta_{oj} \leq \theta_o\, x_{no} \quad (\text{dla } n = 1, ..., N). \tag{16}$$

V. Warunki znakowe:

$$\theta_o\,;\ \lambda_{o1}, \lambda_{o2}, ..., \lambda_{oJ} \geq 0. \tag{17}$$

Z uwagi na nieliniowe względem λ warunki ograniczające (16), zadanie CCR-DP jest nieliniowym zadaniem decyzyjnym.

6. Funkcja inflacyjna nakładów

Jak już mówiono, w artykule rozpatruje się przypadek, gdy inflacyjna funkcja nakładów jest *zdominowana* od dołu przez wartości λ:

$$g(\lambda) \geq \lambda. \tag{18}$$

Dla przykładu omówiono następnie dwie funkcje inflacyjne. Pierwsza z nich nawiązuje do funkcji wykładniczej, druga do funkcji potęgowej. Są one stosunkowo proste i znane z uwagi na ich ciekawe i użyteczne własności interpretacyjne. Oczywiście zastosowanie mogą znaleźć inne funkcje, byleby tylko były one rosnące coraz szybciej, monotoniczne i nie mniejsze od λ.

Liniowo-wykładnicza funkcja inflacyjna

Liniowo-wykładnicza funkcja inflacyjna dla nakładów określona jest wzorem

$$g(\lambda) = \lambda e^{\alpha\lambda} \quad (\alpha > 0, \lambda \geq 0). \tag{19}$$

Jest to iloczyn funkcji liniowej (λ) przez funkcję wykładniczą ($e^{\alpha\lambda}$) [7]. W przypadku liniowo-wykładniczej funkcji inflacji nakładów, warunek (16) modelu CCR-DP przybiera postać:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj} \times \lambda_{oj} \exp(\alpha\lambda_{oj}) \leq \theta_o x_{no} \quad (n = 1, ..., N). \tag{20}$$

Liniowo-potęgowa funkcja inflacyjna

$$g(\lambda) = \lambda + \lambda^{\beta} \quad (\beta > 1, \lambda \geq 0). \tag{21}$$

Dla liniowo-potęgowej funkcji inflacyjnej warunek (16) dla nakładów ma formę:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj} [\lambda + (\lambda_{oj})^{\beta}] \leq \theta_o x_{no} \quad (n = 1, ..., N). \tag{22}$$

Parametry α lub β muszą być ustalone przez prowadzącego badanie przed rozwiązaniem zadania CCR-DP, przy czym $\alpha > 0$, $\beta > 1$. (Potraktowanie ich jako zmiennych decyzyjnych bardzo skomplikuje zadanie. Będzie o tym mowa pod koniec obecnego rozdziału).

---

[7] Gdyby „pierwsze" λ podniesione zostało do β, mielibyśmy wtedy tzw. funkcję potęgowo-wykładniczą. Ogólnie ma ona w naszym problemie sens, gdy $\beta \geq 1$.

Reakcja rozwiązania modelu CCR-DP na zmiany wartości λ

Stosowanie zdominowanej od dołu inflacyjnej funkcji nakładów oznacza, że *p*-krotne zwiększenie rezultatu wymaga więcej niż *p*-krotnego zwiększenia nakładów. Wynikają z tego następujące własności modelu CCR-DP ze zdominowaną od dołu inflacyjną funkcją nakładów:

1. Zwiększanie, występującego po lewej stronie warunku (15), rezultatu technologii wspólnej:

$$\tilde{y}_{ro} = \sum_{j=1}^{J} y_{rj}\,\lambda_{oj}\ , \tag{23}$$

poprzez zwiększanie współczynników λ, wymaga większego wzrostu nakładów, niż to wynika z modelu CCR. Mianowicie nakłady wzrastają do poziomu:

$$\tilde{x}_{no} = \sum_{j=1}^{J} x_{nj}\, g(\lambda_{oj}) > \sum_{j=1}^{J} x_{nj}\,\lambda_{oj}\ , \text{ gdyż } g(\lambda) > \lambda \text{ dla } \lambda > 0. \tag{24}$$

Oznacza to, że rzeczywiście w modelach (13)–(17) mamy do czynienia z malejącą krańcową produktywnością, gdy postuluje się wzrost wielkości rezultatu[8].

2. Wobec nierówności $g(\lambda_{oj}) \geq \lambda_{oj}$ oraz postaci warunku (16) dla nakładów:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj}\, g(\lambda_{oj}) \leq \theta_o\, x_{no} \quad (\text{dla } n = 1, ..., N), \tag{25}$$

wartość mnożnika θ_o w rozwiązaniu optymalnym zadania CCR-DP jest *nie mniejsza* od wartości θ_o w rozwiązaniu optymalnym zadania CCR. Uczynienie zadość nierówności (25) wobec $g(\lambda_{oj}) \geq \lambda_{oj}$ wymaga bowiem większej wartości θ_o, niż to jest potrzebne dla uczynienia zadość nierówności $\sum_{j=1}^{J} x_{nj}\,\lambda_{oj} \leq \theta_o\, x_{no}$.

3. Z uwagi na nierówność (25) utrzymanie wskaźnika poziomu nakładów θ_o na założonym poziomie wymaga, by wartości lewej strony były możliwie najmniejsze. A to, przy ustalonych x_{nj} oraz x_{no}, oznacza, że zadanie decyzyjne będzie „wybierało” *możliwie małe* współczynniki λ_{oj}. Można się więc spodziewać, że optymalne wartości λ_{oj} nie powinny być zbyt duże i nie powinny być silnie zróżnicowane. Technologie obiektów będą zatem wybierane do technologii wspólnej z pewnym „umiarem”, bardziej równomiernie niż to się dzieje w modelach klasycznych (np. w CCR).

4. W standardowej CCR własny współczynnik $\lambda_{o,o}$ badanego obiektu jest równy 1 (i wtedy obiekt jest w pełni efektywny w sensie Farella) lub zero – gdy obiekt nie jest efektywny. Obecnie też $\lambda_{o,o} \leq 1$. Dowód, podobnie jak w przypadku modelu CCR, jest oczywisty: większy od 1 własny współczynnik lambda oznaczałby, że dla uzyskania re-

[8] I symetrycznie – z rosnącą krańcową produktywnością, gdy postuluje się mniejsze rezultaty.

zultatów obiektu o-tego należałoby wykorzystać całe nakłady badanego obiektu (wtedy $\lambda_{o,o}$ = 1) i „coś jeszcze". Takie działanie jest pozbawione sensu, bo dla uzyskania rezultatu obiektu o-tego, w najgorszym przypadku, wystarczy jego nakład, bez owego dodatkowego „coś jeszcze".

5. Jeśli zaś chodzi o określenie wartości $\lambda_{o,o}$ w przypadku, gdy obiekt nie jest w pełni efektywny, to – inaczej niż w CCR (gdzie w tym przypadku $\lambda_{o,o} = 0$) – nic nie można przesądzić. Nierówność (16) może być spełniona zarówno przy $\lambda_{o,o} = 0$, jak i przy $\lambda_{o,o} > 0$. Można nawet przypuszczać, że z uwagi na „tendencję" do zmniejszania wartości λ, własne lambda pojawi się w rozwiązaniu, ale na poziomie mniejszym od 1.

6. Również nic nie można przesądzić odnośnie do własnego lambda w przypadku, gdy obiekt jest w pełni efektywny. Tu, ze względu na tendencję do zmniejszania współczynników λ, należy się liczyć z tym, że „raczej na pewno" nie będzie on maksymalny, czyli równy 1, gdyż korzystne będzie, aby znalazło się miejsce na inne, również małe, wartości λ_{oj}.

7. Z uwagi na to, że współczynniki skali dla nakładów, $g(\lambda)$, są większe od λ oraz na to, że własny $\lambda_{o,o}$ może być różny od 1 nawet dla obiektu efektywnego, nie należy się spodziewać, że mnożnik nakładów $\theta_o \leq 1$. Może więc być podobnie jak w profilu *super-efficiency,* w którym mnożniki nakładów mogą przekraczać 1. Z tych powodów θ_o w modelu CCR-DP nie nazywamy efektywnością, lecz tylko *mnożnikiem poziomu nakładów*.

8. W modelu CCE-DP wskaźnik efektywności obiektu o-tego określamy jako

$$E_o = \frac{\theta_o}{\theta_{\max}}, \tag{26}$$

gdzie

$$\theta_{\max} = \max\{\theta_j; \quad j = 1, ..., J\}. \tag{27}$$

Uwagi końcowe

1. Dla wygody zakładaliśmy, że funkcja $g(\lambda)$ jest ściśle monotoniczna, gdyż tak w praktyce jest najczęściej. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, by w proponowanym modelu uwzględniać funkcje słabo monotoniczne, np. funkcje stałe na pewnych podprzedziałach wartości λ (odpowiadałoby to zerowej krańcowej produktywności nakładów). Z uwagi na postulat minimalizacji mnożnika poziomu nakładów θ, wybrany zostanie dolny kraniec przedziału.

2. Przyjęto, że w liniowo-wykładniczej funkcji inflacyjnej nakładów $\eta = \lambda e^{\alpha\lambda}$ parametr α jest dodatni. Przypadek $\alpha = 0$ to oczywiście wariant standardowy CCR, $\eta = \lambda$, z proporcjonalnymi krańcowymi produktywnościami nakładów. Podobnie jest dla liniowo-potęgowej funkcji inflacyjnej $\eta = \lambda + \lambda^\beta$ z parametrem $\beta = 1$. Trzeba tylko pamiętać, że wtedy maksymalny współczynnik θ wyniesie 2.

3. Przy nieuwzględnianych w tym artykule wartościach $0 < \beta < 1$ (lub $\alpha < 0$) mielibyśmy przypadek *rosnących* krańcowych produktywności nakładów, co choć moż-

liwe, występuje bardzo rzadko. Jest to raczej osobliwość w ekonomii niż prawidłowość. Rosnąca produktywność może mieć miejsce np. w początkowej fazie opanowywania procesu technologicznego.

4. Zakładano, że parametr β funkcji potęgowej oraz parametr α funkcji wykładniczej jest dany. W ogólnym przypadku można rozpatrywać sytuacje, gdy jest on *zmienną decyzyjną*. Powstaje jednak wówczas dość skomplikowane zadanie programowania nieliniowego z nieliniowościami typu v^z, gdzie zarówno v, jak i z są zmiennymi decyzyjnymi.

5. Przyjęto, iż parametry funkcji inflacyjnej są takie same dla wszystkich obiektów $j = 1, ..., J$ oraz wszystkich nakładów $n = 1, ..., N$. W ogólnym przypadku można dopuścić, że parametry te zmieniają się ze względu na obiekty (w obiektach są różne technologie) oraz ze względu na rodzaj nakładu (produktywność różnych nakładów może się zmieniać w różnym stopniu). W ogólniejszym więc przypadku warunek dla nakładów miałby postać:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj}\, g_{jn}(\lambda_{oj}) \le \theta_o x_{no} \qquad (\text{dla } n = 1, ..., N). \tag{28}$$

6. Modyfikacja ze względu na malejącą produktywność nakładów może w zasadzie dotyczyć dowolnych modeli DEA, w szczególności ważnych dla DEA modeli nadefektywności oraz modeli efektywności nieradialnej.

7. Przykład ilustracyjny

W tabeli 2 podano informacje o czterech nakładach i dwóch rezultatach w dziesięciu bankach polskich i zagranicznych, działających w 1998 r. na terenie Polski. Zbadamy efektywność tych banków.

Tabela 2. Rezultaty i nakłady banków

Nakłady i rezultaty		Bank									
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
Nakłady	Majątek	626	466	98,7	242	1367	57,2	549	807	13	567
	Wkłady	13292	8762	5881	5449	51182	346	10560	31455	1143	13170
	Zatrudnienie	3997	2152	1250	645	40807	367	6939	25380	249	9363
	Koszty	531	283	75,5	214	2102	32,9	536	900	39,8	476
Rezultaty	Kredyty	9471	5859	1866	3540	17009	529	6761	7756	1069	8027
	Należności	2811	1200	3772	1807	3895	274	1162	5644	118	952

Źródło: Gospodarowicz [5, tab. 3]
Zatrudnienie – osoby, pozostałe wielkości – mln zł.

1. Rozwiązanie „klasycznego” zadania CCR dla tego przykładu przedstawiono w tabeli 3. Przypomnijmy, że zadanie CCR zakłada stałą produktywność nakładów oraz jednolite współczynniki skali zarówno dla nakładów, jak i rezultatów.

Tabela 3. Wyniki CCR ukierunkowanej na nakłady

Bank	Efektywność θ_o	Współczynniki skali rezultatów i nakładów λ_{oj}									
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
B1	0,790	0	0	0,188	0,246	0	3,463	0	0	6,003	0
B2	0,779	0	0	0,149	0	0	0,099	0	0	5,171	0
B3	**1**	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B4	**1**	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
B5	0,353	0	0	0,260	0	0	5,052	0	0	12,957	0
B6	**1**	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
B7	0,586	0	0	0	0	0	4,721	0	0	3,988	0
B8	0,392	0	0	1,186	0	0	2,598	0	0	3,900	0
B9	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
B10	0,643	0	0	0	0	0	0,537	0	0	7,243	0

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

• Przy założeniu, że nakłady są proporcjonalne do rezultatów, metoda CCR sugeruje, iż w badanej zbiorowości cztery banki są w pełni efektywne: B3, B4, B6 oraz B9.

• Najbardziej nieefektywny jest bank B5, którego efektywność wynosi tylko 35% efektywności banków najlepszych.

2. Rozpatrzymy teraz zadanie CCR-DP. Przyjmiemy liniowo-wykładniczą funkcję inflacyjną nakładów:

$$\eta = \lambda\ e^{\alpha\lambda},$$

przy czym $\alpha = 0{,}5$.

Rozwiązanie zadania (13)–(17) przy tej funkcji inflacyjnej podano w tabeli 4.

• W sytuacji, gdy krańcowa produktywność nakładów maleje według przyjętej inflacyjnej funkcji nakładów, zmienia się klasyfikacja obiektów. Okazuje się, że teraz w pełni efektywne są nie cztery, lecz tylko dwa banki: B3 oraz B9. Taka redukcja liczby obiektów efektywnych jest na tle modelu CCR korzystna, gdyż ten ostatni często uznaje wiele obiektów za w pełni efektywne.

• Najbardziej nieefektywny jest bank B8. Bank B5, który według CCR był najmniej efektywny, uplasował się obecnie w grupie banków o umiarkowanej, 60–70%, efektywności.

• Wskazane, dość radykalne zmiany klasyfikacji i wskaźników efektywności wynikają z negatywnej oceny dużych współczynników λ, czyli negatywnej oceny dużych wielokrotności technologii banków w technologii wspólnej. Przy małych krotnościach λ, „strata" z powodu wzrostu współczynnika η jest stosunkowo mała, natomiast przy dużych – bardzo duża. Dlatego też, jak widać z tabeli 5, współczynniki skali nakładów $\eta = \lambda e^{0,5\lambda}$ są bardziej równomierne niż współczynniki $\eta = \lambda$ z tabeli 3, dotyczącej modelu CCR.

Tabela 4. Wyniki zadania CCR-DP przy inflacyjnej funkcji nakładów $\eta = \lambda\, e^{0,5\lambda}$

Bank	Mnożnik nakładów θ_o	Efektywność E_o	Współczynniki skali rezultatów λ_{oj}									
			B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
B1	1,223	0,742	0,402	0,242	0,175	0,194	0,013	0,025	0,188	0,041	0,044	0,188
B2	1,300	0,788	0,351	0,211	0,091	0,174	0	0,015	0,053	0	0,045	0,013
B3	1,649	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B4	1,603	0,972	0,036	0,164	0,145	0,525	0	0	0	0	0,102	0
B5	0,999	0,606	0,078	0,005	0,159	0,055	0,757	0	0	0,308	0,040	0,055
B6	1,644	0,997	0	0	0,027	0,053	0	0,284	0	0	0,062	0
B7	1,007	0,611	0,268	0,159	0,031	0,103	0,011	0,023	0,173	0	0,037	0,190
B8	0,673	0,408	0,043	0,024	0,509	0,146	0,059	0,002	0	0,597	0,037	0,007
B9	1,649	1	0	0,018	0,013	0,046	0,031	0	0,003	0,017	0,048	0,006
B10	1,045	0,634	0,276	0,204	0,088	0,114	0	0,017	0,146	0,095	0,043	0,232

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 5. Wyniki zadania CCR-DP. Współczynniki skali nakładów

Bank	Współczynniki skali nakładów $g = \lambda\exp(0,5\lambda)$									
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
B1	0,491	0,273	0,191	0,214	0,013	0,025	0,207	0,041	0,045	0,206
B2	0,418	0,234	0,095	0,189	0	0,015	0,054	0	0,046	0,013
B3	0	0	1,649	0	0	0	0	0	0	0
B4	0,036	0,179	0,156	0,683	0	0	0	0	0,107	0
B5	0,081	0,005	0,172	0,056	1,105	0	0	0,359	0,041	0,057
B6	0	0	0,027	0,054	0	0,327	0	0	0,064	0
B7	0,306	0,172	0,032	0,109	0,011	0,023	0,189	0	0,037	0,209
B8	0,044	0,025	0,657	0,157	0,061	0,002	0	0,805	0,037	0,007
B9	0	0,019	0,013	0,047	0,031	0	0,003	0,017	0,049	0,006
B10	0,317	0,226	0,092	0,121	0	0,017	0,157	0,1	0,044	0,261

Źródło: Obliczenia własne.

8. Podsumowanie

W artykule zaproponowano modyfikację modelu CCR w kierunku uwzględnienia malejącej krańcowej produktywności nakładów za pomocą tzw. zdominowanych inflacyjnych funkcji nakładów.

W tym wypadku, w modelu standardowym ukierunkowanym na nakłady, charakterystyczny dla modelu CCR liniowy warunek dla nakładów:

$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_{oj} x_{nj} \le \theta_o x_{no} \quad (n = 1, ..., N)$$

zostaje zastąpiony warunkiem nieliniowym

$$\sum_{j=1}^{J} \eta_{oj} x_{nj} \le \theta_o x_{no}, \quad \text{gdzie } \eta = g(\lambda) \quad (n = 1, ..., N).$$

Rozwiązanie modelu CCR-DP z nieliniowymi warunkami dla nakładów może być, i na ogół będzie, inne niż rozwiązanie klasycznego modelu CCR. Model CCR zakłada bowiem proporcjonalny wzrost rezultatów w miarę wzrostu nakładów, zaś CCR-DP dopuszcza, że rezultaty rosną coraz wolniej względem nakładów. Ponieważ druga okoliczność jest bardziej typowa w życiu gospodarczo-społecznym niż pierwsza, model CCR-DP wydaje się lepszy od modelu CCR.

Model CCR jest szczególnym przypadkiem, gdy dla wszystkich nakładów i wszystkich obiektów funkcja $g(\lambda) = \lambda$. Model CCR-DP jest uogólnieniem modelu CCR.

Bibliografia

[1] ANDERSEN P., PETERSEN N.C., *A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis*, Management Science, 1993, 39 (10).

[2] CHARNES A., COOPER W.W, RHODES E., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research, 1978, 2.

[3] BANKER R.D., A. CHARNES, COOPER W.W., *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis*, Management Science, 1984, 30 (9).

[4] DOYLE J., GREEN R., *Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivation, meanings and uses*, Journal of Operational Research Society, 1994, 45 (5).

[5] GOSPODAROWICZ M., *Procedury analizy i oceny banków*, Materiały i Studia, z. 103, NBP, Warszawa 2000.

[6] SEXTON T., SILKMAN R., HOGAN A., *Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions* [w:] R. Silkman (red.), *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis. New Directions for Program Evaluation*, Jossey-Bass, San Francisco 1986.

[7] SEIFORD L.M., *A cyber-bibliography for Data Envelopment Analysis* (1978–2005), http://ioe.engin.umich.edu/people/fac/seiford.html
[8] SEIFORD L.M., ZHU J., *Infeasibility of supper efficiency Data Envelopment Analysis*, INFOR, 1998, 37 (2).
[9] SUN S., LU W-M., *A cross-efficiency profiling for increasing discrimination in Data Envelopment Analysis*, INFOR, 2005, 43 (1).
[10] THANASSOULIS E., DYSON R.G., *Estimating preferred target input-output levels using Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research, 1992, 56.
[11] TOFALLIS C., *Improving discernment in DEA using profiling*, Omega, 1996, 24 (3).
[12] TONE K., *A slacks-based measure of efficiency in Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research, 2001, 130.
[13] TAWARES G., *A bibligraphy of Data Envelopment Analysis, 1978–2001*, BRR, 1/2002 www.rutcor.rutgers.edu.pub/rrr)
[14] ZHU J., *Data Envelopment Analysis with preference structure*, The Journal of Operation Research Society, 1996, 47 (1).

CCR-DP model with dominated inflation function of inputs

In standard input-oriented DEA it is assumed that the marginal productivity of inputs is constant. The efficiency changes can be achieved by proportional changes of all inputs.

The author of the article considers decreasing marginal productivity of inputs and presents the appropriate modification of DEA models. The modification consists in adding the individual scale multipliers of inputs and individual scale multipliers of results. The author considers a function called dominated inflation function of inputs. It describes the input multipliers as an increasing convex function of by multipliers of results.

Two examples of inflation function are suggested: linear-exponential and linear-power function. The appropriate efficiency rate is also presented. Numerical example includes a detailed analysis of efficiency changes.

Keywords: *nonlinear DEA, decreasing productivity, scale multipliers of inputs*