

Beata Jackowska

Uniwersytet Gdański

e-mail: beata.jackowska@ug.edu.pl

ANALIZA PRZEKROJOWA I KOHORTOWA W BADANIU UMIERALNOŚCI A UBEZPIECZENIA NA ŻYCIE

CROSS-SECTIONAL AND COHORT ANALYSES IN MORTALITY STUDIES IN LIFE INSURANCE CALCULATIONS

DOI: 10.15611/pn.2017.500.04

Streszczenie: W ubezpieczeniach na życie przyjęcie modelu umieralności ma kluczowe znaczenie dla wyników kalkulacji aktuarialnych. Modele umieralności najczęściej konstruuje się w postaci tablic trwania życia. Ze względu na sposób badania umieralności, wyróżnia się tablice przekrojowe i kohortowe. W Polsce ze względów historycznych nie można jeszcze zbudować pełnych tablic kohortowych. Możliwe jest jednak odtworzenie odpowiednio długich fragmentów historii niektórych generacji. Celem artykułu jest analiza retrospektywna kształtowania się jednorazowych składek netto skalkulowanych na podstawie tablic kohortowych i przekrojowych. Dane demograficzne dla Polski posłużyły do wyznaczenia *ex post* poziomu jednorazowych składek netto dla nieżyjących już kohort rzeczywistych. Następnie porównano otrzymane wyniki z analogicznymi, wyznaczonymi na podstawie tablic przekrojowych aktualnych w danym roku.

Słowa kluczowe: tablice trwania życia, analiza kohortowa, analiza przekrojowa, ubezpieczenia na życie, jednorazowa składka netto.

Summary: The assumption of a particular model of mortality made in life insurance has crucial importance to the actuarial calculations. Mortality models are usually constructed as life tables. Considering the methods of mortality analysis, the period and cohort life tables can be distinguished. For historical reasons there is no possibility of constructing full cohort life tables in Poland. Nevertheless, it is possible to reconstruct a long enough history of some generations' lifetime. The aim of this paper is a retrospective analysis of volatility of net single premiums based both on period and cohort life tables. As a source of data analysis, Polish demographic data has been used. Net single premiums have been calculated *ex post* for the real extinct cohorts. Therefore, the results have been compared to the corresponding outcomes calculated on the basis of period life tables from the current year.

Keywords: life table, cohort analysis, cross-sectional analysis, life insurance, net single premium.

1. Wstęp

Do kalkulacji składek w ubezpieczeniach na życie konieczne jest przyjęcie modelu umieralności. W tym celu najczęściej konstruuje się tablice trwania życia, nazywane inaczej tablicami wymieralności, które są nieparametrycznymi modelami umieralności. Ze względu na sposób badania umieralności wyróżnia się tablice przekrojowe i kohortowe. Z powodów historycznych w Polsce nie jest jeszcze możliwe zbudowanie pełnych tablic kohortowych. Jednak do celów kalkulacji w ubezpieczeniach na życie jest już możliwe odtworzenie odpowiednio długich fragmentów historii niektórych generacji.

Celem artykułu jest analiza retrospektywna kształtowania się jednorazowych składek netto skalkulowanych na podstawie tablic kohortowych i przekrojowych. Na przykładzie rzeczywistych modeli umieralności przedstawiono, w jakim stopniu wybór sposobu analizy umieralności przekrojowej lub kohortowej może wpłynąć na wyniki kalkulacji aktuarialnych w różnych rodzajach ubezpieczeń na życie. Analizę wykonano na podstawie danych demograficznych dla Polski. Jako źródło danych wykorzystano bazę *Human Mortality Database* (HMD), w której są zarchiwizowane dane przekrojowe pochodzące z GUS. Dane przekrojowe dla ciągu następujących po sobie lat kalendarzowych pozwalają na odtworzenie fragmentów historii wybranych kohort. Dane w ujęciu przekrojowym i kohortowym wykorzystano do wyznaczenia *ex post* poziomu jednorazowych składek netto dla wybranych ubezpieczeń na życie. Wyniki otrzymane dla nieżyjących już kohort rzeczywistych porównano z analogicznymi wyznaczonymi na podstawie tablic przekrojowych aktualnych w danym roku kalendarzowym.

2. Istota analizy przekrojowej i kohortowej w badaniu umieralności

Modele umieralności powstają w wyniku badań empirycznych, wśród których wyróżnia się badania wzdłużne (kohortowe) oraz badania przekrojowe. Badanie wzdłużne opiera się na obserwacji kohorty osób urodzonych w tym samym czasie (zazwyczaj w ciągu roku kalendarzowego). W ustalonych momentach odnotowuje się stan liczebny badanej generacji, a w okresach pomiędzy tymi momentami zlicza się zgony. Badanie kohorty urodzeniowej nie jest łatwe: aby dane były kompletne, kohortę należy śledzić do zgonu ostatniej jednostki (czyli ponad 100 lat), przy czym uzyskanie danych ewidencyjnych z odległej przeszłości jest często niemożliwe z powodu wydarzeń historycznych. Model umieralności oparty na danych kohortowych opisuje rzeczywisty proces wymierania badanej kohorty, lecz ma znaczenie historyczne, ponieważ dotyczy nieżyjących już generacji. Modele dla następujących po sobie kohort mają zastosowanie do prognozowania umieralności.

Z powodu trudności w badaniu kohort, w praktyce zazwyczaj stosuje się modele umieralności oparte na badaniach przekrojowych. Badanie tego typu obejmuje populację żyjącą na określonym terytorium w krótkim okresie, zwykle w ciągu roku. Model oparty na danych przekrojowych nie opisuje wymierania rzeczywistej kohorty, lecz kohorty hipotetycznej podlegającej wzorcowi umieralności stworzonemu na podstawie wszystkich generacji żyjących w krótkim okresie badania. Jednak badania przekrojowe mają tę zaletę, że umożliwiają obserwację na bieżąco skutków zmieniających się warunków życia. Zestawiając dane przekrojowe z kolejnych lat kalendarzowych można prześledzić umieralność kohort [Jackowska 2013, s. 150–154].

Do kalkulacji jednorazowych składek netto wykorzystano rzeczywiste demograficzne modele umieralności łącznie dla kobiet i mężczyzn w Polsce. Przyjęto tablice przekrojowe z bazy HMD dla lat 1960–2014 [HMD 2017] oraz tablicę dla 2015 r. z GUS (w momencie badania w bazie HMD nie było jeszcze danych za 2015 r. dla Polski). Na podstawie rocznych kohortowych współczynników zgonów lat 1960–2014 pochodzących z bazy HMD [Wilmoth i in. 2007]:

- skonstruowano kohortowe tablice dalszego trwania życia od pewnego ustalonego wieku do wymarcia kohort urodzonych w latach 1900–1925,
- odtworzono fragmenty historii kohort urodzonych w latach 1926–1950.

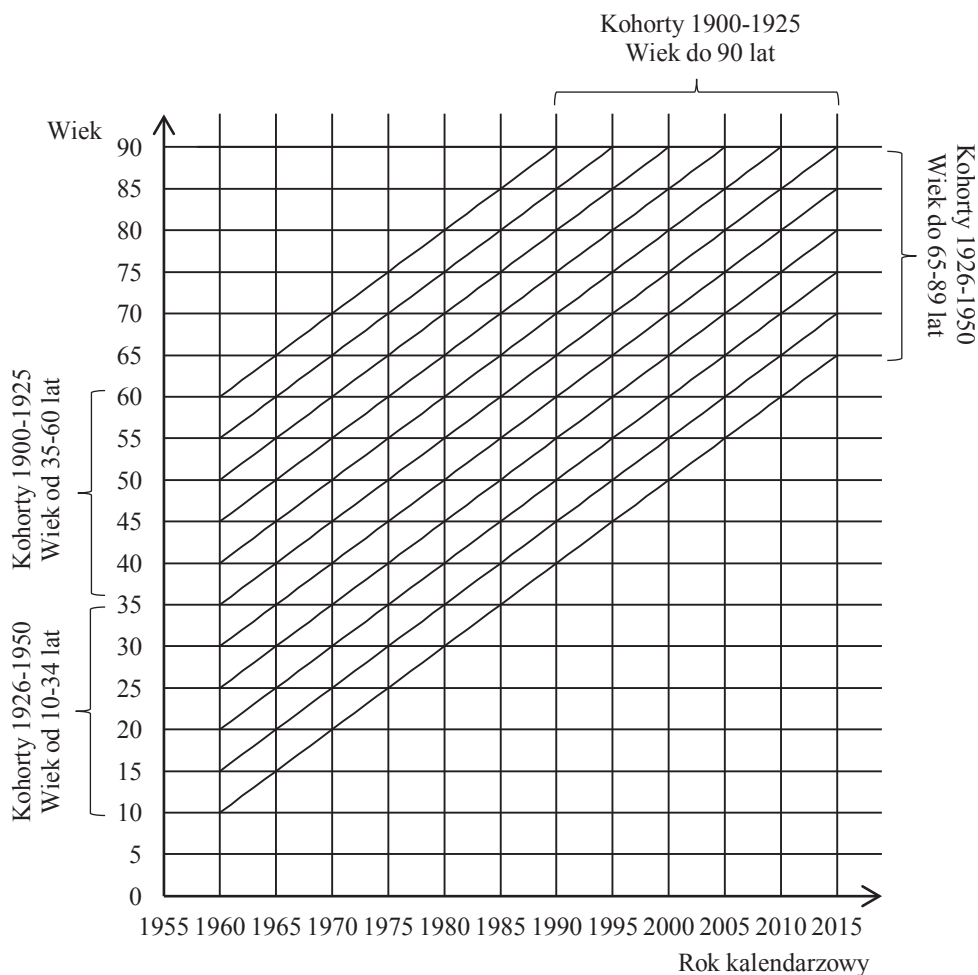
Zakres wykorzystanych danych przedstawiono na diagramie Lexisa (rys. 1) w dwóch przekrojach czasowych: kalendarzowym i własnym kohorty. Kwadraty na diagramie Lexisa reprezentują zbiorowości zgonów sklasyfikowane według wieku i roku kalendarzowego, a trójkąty – zbiorowości zgonów sklasyfikowane według wieku, roku kalendarzowego i kohorty¹.

Kohorty urodzonych w latach 1900–1925 były obserwowane w zależności od roku urodzenia od wieku 35–60 lat do 90. roku życia, a pozostałe kohorty od wieku 10–34 lata do wieku 65–89 lat (rys. 1). W celu skonstruowania tablic dalszego trwania życia dla kohort urodzonych w latach 1900–1925, dokonano ekstrapolacji modelu parametrycznego dla osób powyżej 90. roku życia². Do empirycznych wartości warunkowych prawdopodobieństw zgonu q_x w wieku $x = 70, 71, \dots, 90$ lat została dopasowana funkcja logistyczna następującej postaci:

$$\hat{q}_x = \frac{A + Be^{ax}}{1 + Be^{ax}}.$$

¹ Zasady konstrukcji tablic wymieralności na podstawie danych sklasyfikowanych według wieku, roku kalendarzowego i kohorty można znaleźć m.in. w: [Balicki 2006; Jackowska 2013; Wunsch, Mouchart, Duchene (red.) 2002].

² Nawet przy dysponowaniu danymi powyżej 90. roku życia, zazwyczaj dokonuje się ekstrapolacji modelu dla wieku sędziwego, gdyż ze względu na dożywanie do zaawansowanego wieku zbyt małej liczby osób, oszacowane funkcje biometryczne charakteryzują się dużą nieregularnością.



Rys. 1. Dane wykorzystane w badaniu na diagramie Lexisa

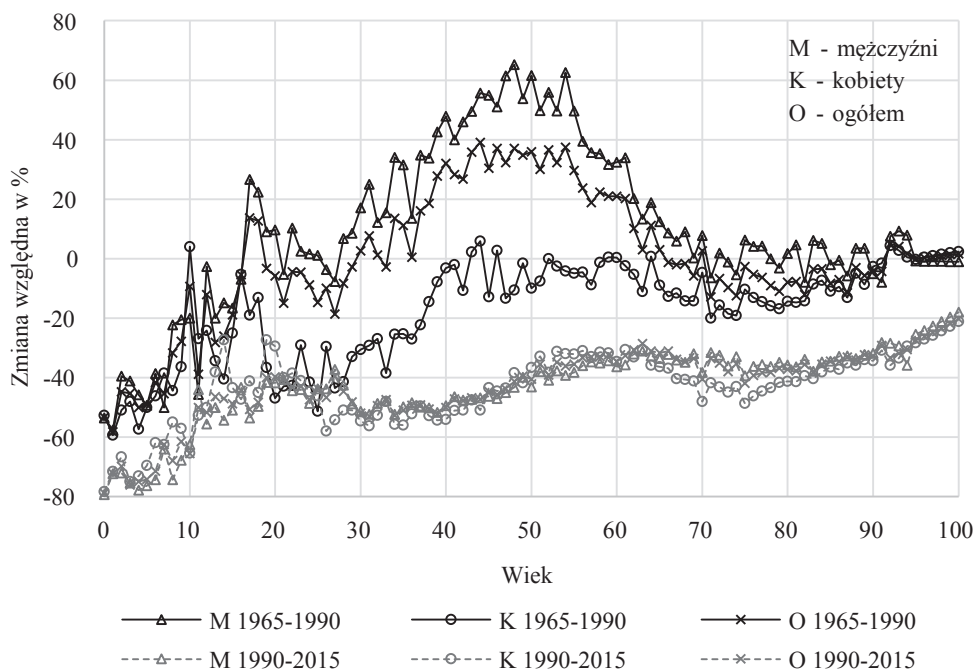
Źródło: opracowanie własne.

Badania wykazują, że dobrze dopasowanym modelem dla prawdopodobieństwa zgonu i intensywności zgonów osób starszych są funkcje logistyczne i odpowiednio zmodyfikowane logistyczne, mające co najmniej 3 parametry³ (por. [Bolesławski, Tabeau 2001; Jackowska 2013; Thatcher, Kannisto, Vaupel 1998]).

³ Najlepiej dopasowane modele parametryczne wskazują, że powyżej 90. roku życia zmniejsza się tempo przyrostu prawdopodobieństwa oraz intensywności zgonów [Jackowska 2013, s. 198–211].

3. Zmiany wzorca umieralności w Polsce

W Polsce w latach 70. i 80. XX w. wystąpiły anomalie w procesie zmian wzorca umieralności, nazywane przez demografów kryzysem zdrowotnym, a polegające na zahamowaniu lub odwróceniu spadkowego trendu intensywności zgonów, przy czym dynamika tych zmian różniła się w zależności od płci i wieku [Okólski 1993]. W latach 50. następował systematyczny spadek intensywności zgonów, po czym na początku lat 60. dynamika zjawiska osłabła. W latach 1965–1991, w przypadku mężczyzn obserwowany był znaczny wzrost prawdopodobieństwa zgonu w wieku od 30 do 70 lat, a w przypadku kobiet – zahamowanie dynamiki spadku lub stagnacja. Po 1991 r. obserwowane jest stosunkowo duże tempo spadku prawdopodobieństwa zgonu kobiet i mężczyzn we wszystkich grupach wieku.

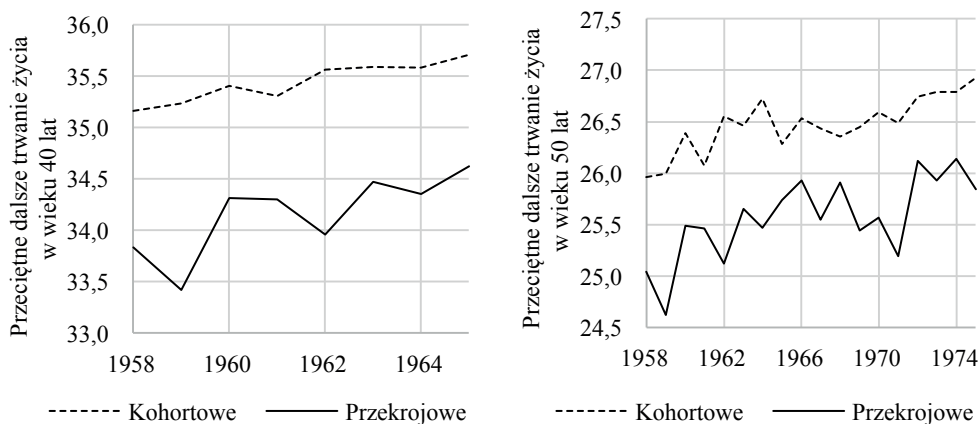


Rys. 2. Zmiana względna w % wartości warunkowego prawdopodobieństwa zgonu w rocznych przedziałach wieku w latach 1965–1990 oraz 1990–2015

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

Na rys. 2 przedstawiona została procentowa zmiana prawdopodobieństwa zgonu w zależności od wieku i płci w dwóch 25-letnich okresach: w latach 1965–1990 oraz 1990–2015. W latach 1965–1990 prawdopodobieństwo zgonu wzrosło dla mężczyzn w wieku od 30 do 70 lat, przy czym w wieku od 40 do 55 lat wzrost ten sięgnął aż 40–65%. W przypadku kobiet przed 1990 r. nastąpił spadek prawdopodobieństwa

zgonu poniżej 40. roku życia, a powyżej tego wieku zmiany nie nastąpiły lub były nieduże jak na okres 25-letni. Od lat 90. utrzymuje się wyraźna tendencja spadkowa. W ostatnich 25 latach spadek prawdopodobieństwa zgonu dla obu płci w wieku od 20 do 50 lat wahał się w granicach ok. 40–50%. W wyniku wystąpienia anomalii przeciętne dalsze trwanie życia uległo skróceniu lub oscyloowało wokół stałego poziomu (w zależności od płci i wieku). Systematyczne wydłużanie przeciętnego dalszego trwania życia w ujęciu przekrojowym jest widoczne dopiero od lat 90.

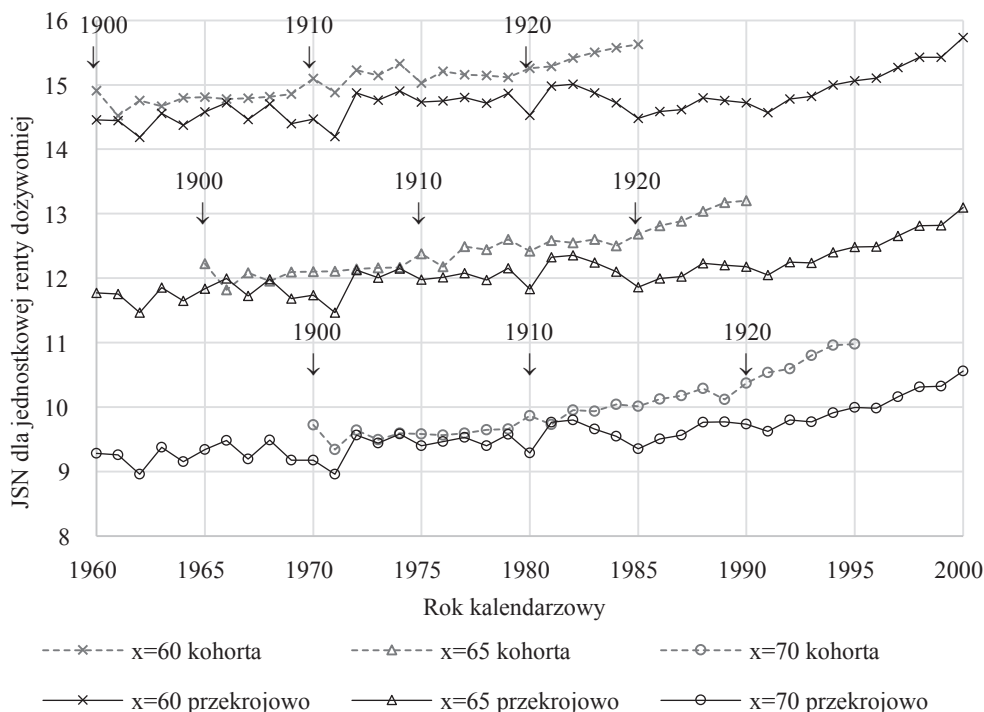


Rys. 3. Przeciętne dalsze trwanie życia w wieku 40 i 50 lat w ujęciu przekrojowym i kohortowym
 Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

Porównując tablice kohortowe z przekrojowymi, można zauważyć prawidłowość. Dla każdej z generacji żyjącej w okresie spadku intensywności zgonów, przeciętne dalsze trwanie życia odczytane z aktualnych w danym momencie tablic przekrojowych jest krótsze niż to, które odczytalibyśmy z tablic kohortowych utworzonych po wymarciu danej kohorty. Oczywiście, im dłuższy okres zmian i większa ich dynamika w czasie życia kohorty, tym większe są różnice między tablicami kohortowymi i przekrojowymi. Biorąc pod uwagę kohorty urodzone w latach 1900–1925, przeciętne dalsze trwanie życia kobiet i mężczyzn łącznie w okresie analizy było dłuższe w ujęciu kohortowym niż w ujęciu przekrojowym średnio o 1,3 roku dla 40-latków, o 0,9 roku dla 50-latków (rys. 3) oraz o nieco więcej niż pół roku dla 60-latków (0,62 roku) i 70-latków (0,56 roku).

4. Tablice przekrojowe i kohortowe a wysokość jednorazowych składek netto w ubezpieczeniach na życie

Na przykładzie rzeczywistych danych demograficznych dla Polski przedstawiono poniżej konsekwencje wyboru przekrojowego lub kohortowego modelu umieralności dla wyników kalkulacji jednorazowych składek netto (JSN). Dokonano analizy retrospektywnej kształtowania się teoretycznego poziomu JSN w ujęciu przekrojowym i kohortowym, zgodnie z ewolucją wzorca umieralności, jaka nastąpiła w Polsce w latach 1960–2015. We wszystkich kalkulacjach przyjęto techniczną stopę procentową 1,5%⁴.



Rys. 4. Jednorazowa składka netto dla jednostkowej renty dożywotniej płatnej z dołu wyznaczona na podstawie przekrojowych i kohortowych tablic trwania życia w Polsce

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

Kohorty urodzone w latach 1900–1925 były obserwowane w latach 1960–2015, co pozwoliło na skonstruowanie kohortowych tablic dalszego trwania życia i wyznaczenia JSN dla renty dożywotniej wykupowanej w wieku od 60 do 70 lat. Na

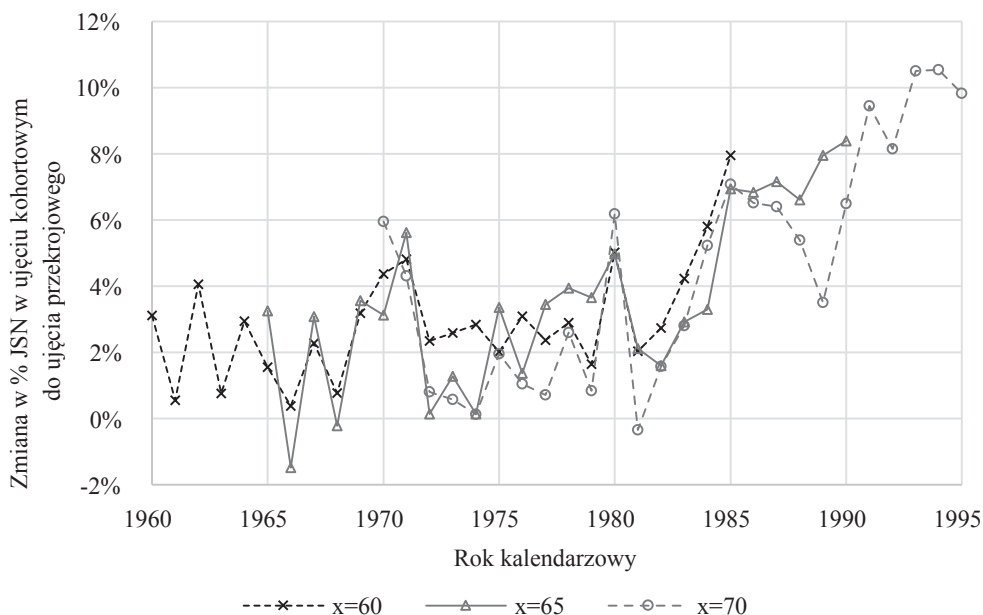
⁴ Zasady kalkulacji JSN w ubezpieczeniach na życie opisują np. [Bowers i in. 1997; Gerber 1990].

rys. 4 dla osób w wybranym wieku 60, 65 i 70 lat przedstawiono JSN dla jednostkowej renty dożywotniej płatnej z dołu wyznaczonej na podstawie przekrojowych i kohortowych tablic trwania życia w Polsce. Przy przyjętych modelach umieralności, składki w ujęciu przekrojowym wyraźnie rosłyby po 1991 r. Natomiast w ujęciu kohortowym zaczęłyby rosnać wcześniej, gdyż okres obserwacji coraz młodszych generacji przesuwa się ku latom 90., kiedy to zaczął się trend spadkowy intensywności zgonów. Kohorta urodzonych w 1900 r. praktycznie nie dotrwała do okresu poprawy w zakresie zdrowotności, natomiast dalsze trwanie życia 70-latków urodzonych po 1920 r. w całości przypadło na okres spadku intensywności zgonów.

Następny wykres (rys. 5) przedstawia dla rozważanej renty procentowy przyrost składek w ujęciu kohortowym w stosunku do ujęcia przekrojowego:

$$\left(\frac{a_x^c(t)}{a_x^p(t)} - 1 \right) \cdot 100\%,$$

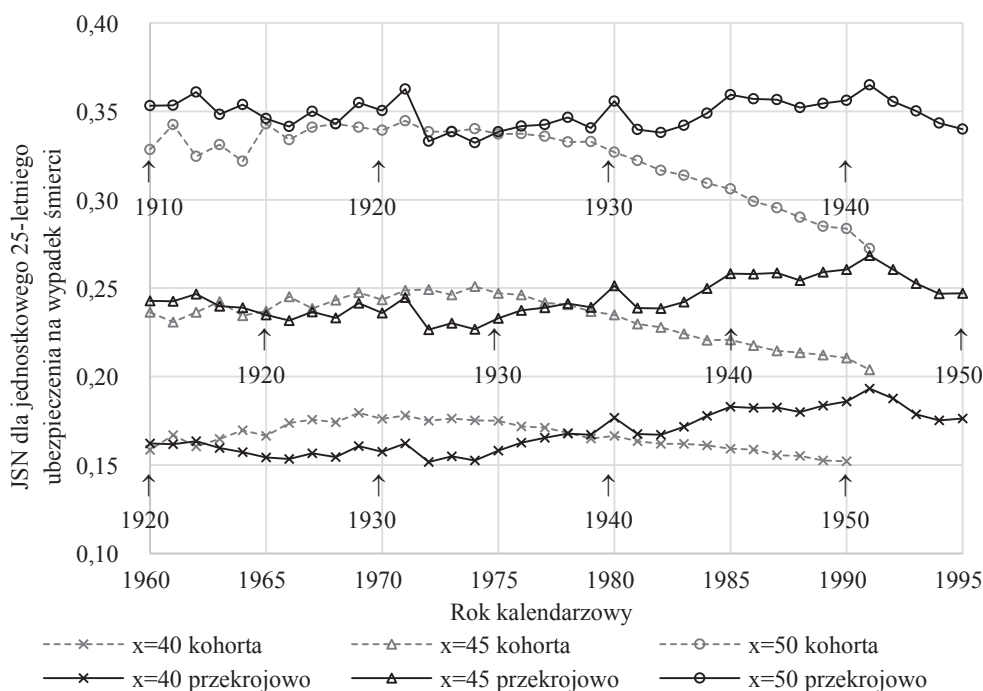
gdzie $a_x(t)$ oznacza jednorazową składkę netto dla jednostkowej renty dożywotniej płatnej z dołu wyznaczoną w roku t dla osoby w wieku x lat (czyli urodzonej w roku $t - x$). Po 1980 r. przyrost ten zwiększa się, osiągając w 1985 r. poziom 6–8%, a w 1995 r. 10%.



Rys. 5. Zmiana względna w % jednorazowej składki netto dla renty dożywotniej wyznaczonej na podstawie tablic kohortowych w stosunku do wyznaczonej na podstawie tablic przekrojowych

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

W ubezpieczeniu na całe życie wyznaczono JSN dla osób w wieku 40–50 lat. Obliczenia dotyczyły generacji urodzonych w latach 1910–1925 i obserwowanych w latach 1960–2015. Przy przyjętych wzorcach umieralności, nie ma dużych różnic między ujęciem kohortowym i przekrojowym, ponieważ w odróżnieniu od rent życiowych, do tego rodzaju ubezpieczenia przystępują osoby młodsze i większa część ich okresu ubezpieczenia przypadłaby przed 1991 r. Z tego powodu w rozważanym okresie JSN w ubezpieczeniu na całe życie w ujęciu kohortowym byłyby niewiele niższe niż w ujęciu przekrojowym, w granicach 0,5–2%.



Rys. 6. Jednorazowa składka netto dla jednostkowego 25-letniego ubezpieczenia na wypadek śmierci wyznaczona na podstawie przekrojowych i kohortowych tablic trwania życia w Polsce

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

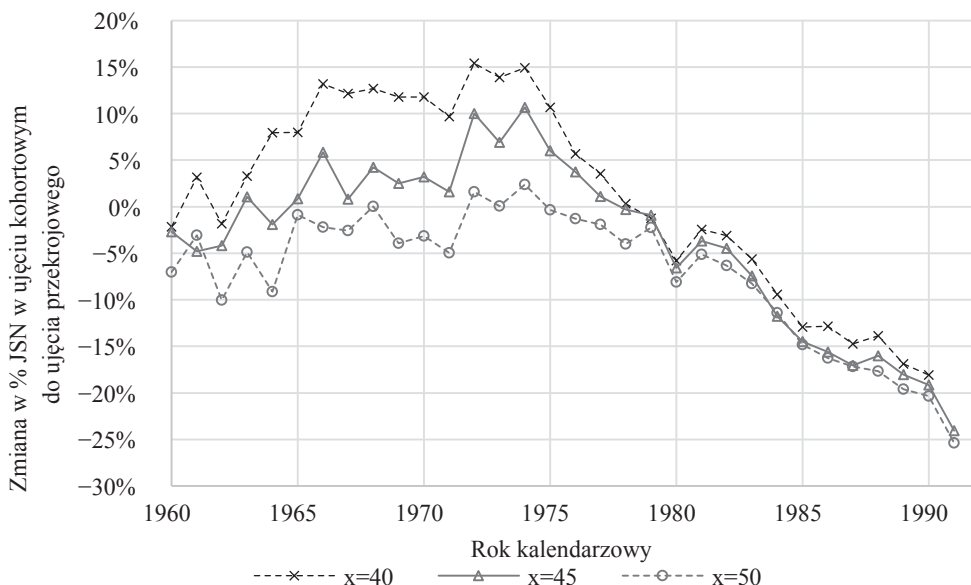
Gdyby w ubezpieczeniu na wypadek śmierci dla osób przystępujących do ubezpieczenia w wieku 40–50 lat, ograniczyć okres ubezpieczenia np. do 25 lat, to można by poddać analizie kolejne kohorty do roku urodzenia 1950. Do kalkulacji w ubezpieczeniu terminowym wystarczy oszacować tylko część modelu umieralności od wieku przystąpienia do wieku, w którym wygasa umowa ubezpieczenia. Dla kolejnych generacji urodzonych po 1925 r., w 25-letnim okresie ubezpieczenia wydłuża się okres z trendem spadkowym prawdopodobieństwa zgonu i rosną różnice między JSN w ujęciu kohortowym i przekrojowym (rys. 6). I tak dla 50-latków uro-

dzonych w 1940 r. oraz 40-latków urodzonych w 1950 r. cały okres ubezpieczenia przypadłby na czas dynamicznej zmiany wzorca umieralności. Na rys. 6 widoczny jest także efekt kryzysu zdrowotnego, w wyniku którego przy przyjętych wzorcach umieralności, w latach 1965–1975 składki w ujęciu kohortowym byłyby wyraźnie wyższe w wieku od 40 do 45 lat.

Procentową zmianę składek w rozważanym ubezpieczeniu terminowym w ujęciu kohortowym w stosunku do ujęcia przekrojowego można zapisać jako:

$$\left(\frac{A_{x:n}^{1-c}(t)}{A_{x:n}^{1-p}(t)} - 1 \right) \cdot 100\%,$$

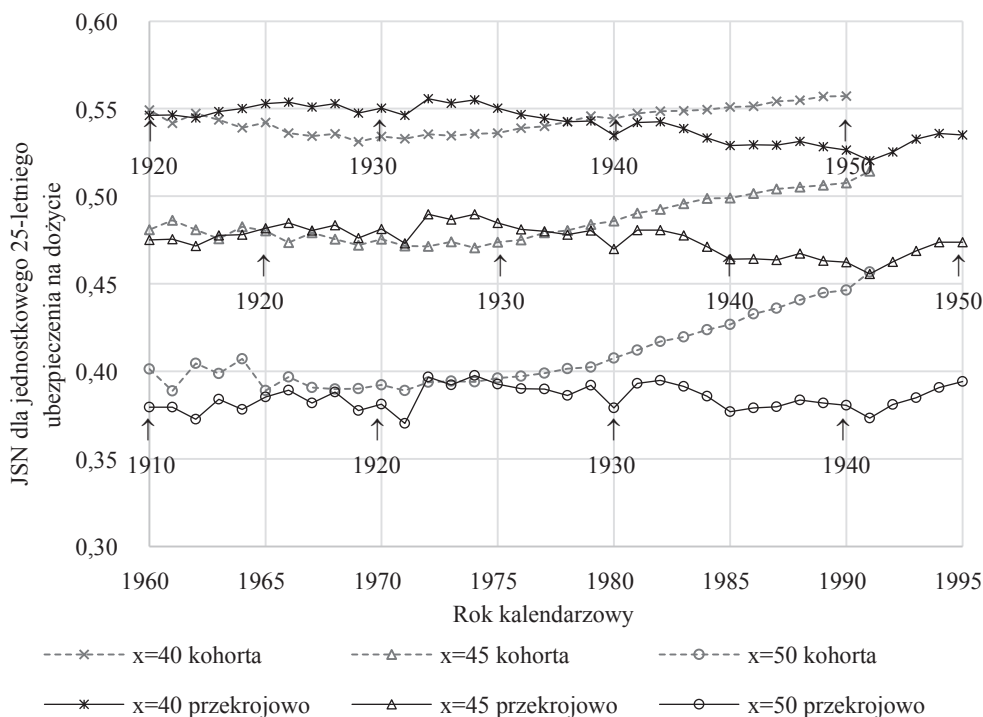
gdzie $A_{x:n}^1(t)$ oznacza jednorazową składkę netto dla jednostkowego n -okresowego ubezpieczenia na wypadek śmierci wyznaczoną w roku t dla osoby w wieku x lat. W wyniku anomalii w procesie zmian wzorca umieralności JSN dla 40-latka w 25-letnim ubezpieczeniu na wypadek śmierci byłaby w latach 1965–1975 wyższa w ujęciu kohortowym o 8–15%. Przy przyjętych wzorcach umieralności wyraźny spadek JSN w ujęciu kohortowym zaczynałby się po 1980 r., a już po 1990 r. składka w ujęciu kohortowym byłaby niższa niż w ujęciu przekrojowym o ponad 20% (rys. 7).



Rys. 7. Zmiana względna w % jednorazowej składki netto dla 25-letniego ubezpieczenia na wypadek śmierci wyznaczonej na podstawie tablic kohortowych w stosunku do wyznaczonej na podstawie tablic przekrojowych

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

Podobnie w 25-letnim ubezpieczeniu na dożycie, przy przyjętym wzorcu umieralności, widoczny jest efekt kryzysu zdrowotnego. Osoby przystępujące do tego ubezpieczenia w wieku od 40 do 50 lat należały do kohort urodzonych w latach 1910–1950 i były obserwowane w latach 1960–2015. Po 1980 r. nastąpiłby wzrost JSN w ujęciu kohortowym, kiedy to większość okresu ubezpieczenia przypadłaby na okres szybkiego spadku intensywności zgonów (rys. 8).



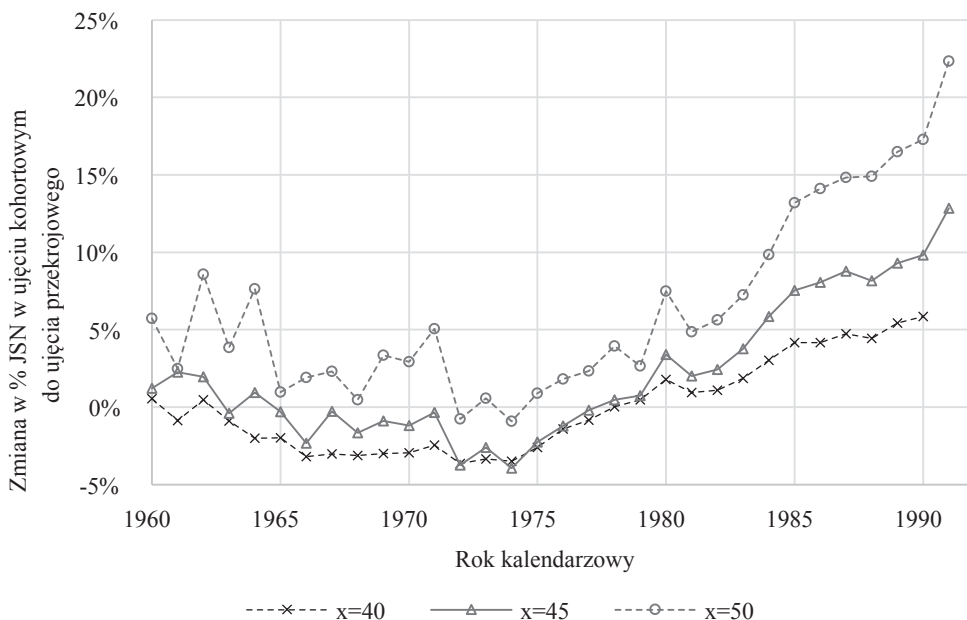
Rys. 8. Jednorazowa składka netto dla jednostkowego 25-letniego ubezpieczenia na dożycie wyznaczona na podstawie przekrojowych i kohortowych tablic trwania życia w Polsce

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

W ubezpieczeniu na dożycie, przy obliczaniu zmian względnych, iloraz jednorazowych składek netto w ujęciu kohortowym i przekrojowym sprowadza się do ilorazu prawdopodobieństw przeżycia okresu ubezpieczenia w ujęciu kohortowym i przekrojowym:

$$\left(\frac{A_{x:\overline{n}|}^{1c}(t)}{A_{x:\overline{n}|}^{1p}(t)} - 1 \right) \cdot 100\% = \left(\frac{{}_n P_x^c(t)}{{}_n P_x^p(t)} - 1 \right) \cdot 100\%,$$

gdzie $A_{x:n}^1(t)$ oznacza jednorazową składkę netto dla jednostkowego n -okresowego ubezpieczenia na dożycie wyznaczoną w roku t dla osoby w wieku x lat, a ${}_n p_x(t)$ to prawdopodobieństwo, że osoba, która dożyła wieku x lat w roku t przeżyje jeszcze n lat. Po 1980 r. w kolejnych latach kalendarzowych kumuluje się przewaga prawdopodobieństwa przeżycia 25 lat w ujęciu kohortowym nad ujęciem przekrojowym. W 1991 r. prawdopodobieństwo to w ujęciu kohortowym było większe niż w ujęciu przekrojowym dla 45-latkka o 13%, a dla 50-latkka aż o 22% (rys. 9).



Rys. 9. Zmiana względna w % jednorazowej składki netto dla 25-letniego ubezpieczenia na dożycie wyznaczonej na podstawie tablic kohortowych w stosunku do wyznaczonej na podstawie tablic przekrojowych

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych HMD.

5. Wnioski

Subpopulacje osób ubezpieczonych różnią się od populacji ogółem, jednak należy spodziewać się występowania w tych subpopulacjach analogicznych trendów w ewolucji wzorca umieralności jak w populacji ogółem. W Polsce nie jest jeszcze możliwa pełna analiza kohortowa, lecz można dokonać do celów ubezpieczeniowych pierwszych analiz porównawczych umieralności w ujęciu przekrojowym i ko-

hortowym, ponieważ stało się możliwe odtworzenie odpowiednio długich fragmentów historii generacji żyjących w okresie wydłużania przeciętnego dalszego trwania życia osób dorosłych. Dla kohort urodzonych w latach 1900–1925 możliwe jest skonstruowanie tablic dalszego trwania życia od pewnego ustalonego wieku do wymarcia kohorty, co ma znaczenie w kalkulacjach składek w ubezpieczeniach i rentach bezterminowych. W przypadku ubezpieczeń i rent terminowych wystarczy odtworzenie części historii kohorty od przystąpienia do wygaśnięcia umowy ubezpieczenia. Dla kohort urodzonych w latach 1926–1950 możliwe jest odtworzenie kilkudziesięcioletnich fragmentów historii życia generacji w dorosłym wieku.

Obserwowany obecnie w Polsce trend w zmianie intensywności zgonów utrzymuje się od lat 90., wcześniej w latach 70. i 80. wystąpiły anomalie w procesie zmian wzorca umieralności. Analiza retrospektywna na podstawie danych demograficznych dla Polski wykazała, że różnice między modelami umieralności dla kohort hipotetycznych i wymarłych kohort rzeczywistych prowadzą do znacznych różnic między wynikami kalkulacji aktuarialnych opartych na tablicach przekrojowych i kohortowych. Różnice między modelami kohortowymi i przekrojowymi powiększają się wraz z wydłużaniem okresu systematycznego spadku intensywności zgonów. Przy utrzymaniu obecnej tendencji, rozbieżności między kalkulacjami w ujęciu kohortowym i przekrojowym będą rosły.

Dla osób przystępujących obecnie do ubezpieczenia prognoza umieralności powinna więc być wykonywana w ujęciu kohortowym. Przy tym, z powodu wystąpienia anomalii ewolucji wzorca umieralności, do prognozy mogą być wykorzystane dane od lat 90., co ogranicza znacznie zasięg prognozy. W Polsce podjęto pierwsze próby prognozowania, głównie przy pomocy modelu Lee-Cartera (por. [Szumlicz (red.), Więckowska, Bijak 2008; Rossa 2011; Papież 2011]). Niewątpliwie jest to dobry kierunek, lecz problemem na razie pozostaje to, że w wielu przypadkach okres wymaganej prognozy dla celów ubezpieczeniowych jest dłuższy niż okres, z którego pochodzą dane, co może skutkować stosunkowo wysoką wartością oceny błędu prognozy (por. [Hu 2013, s. 16, 17; Rossa 2011, s. 122]).

Literatura

- Balicki A., 2006, *Analiza przeżycia i tablice wymieralności*, PWE, Warszawa.
- Bolesławski L., Tabeau E., 2001, *Comparing theoretical age patterns of mortality beyond the age of 80*, [w:] Tabeau E., van den Berg Jeths A., Heathcote C. (red.), *Forecasting Mortality in Developed Countries. Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston, s. 127–155.
- Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J., Jones D., Nesbitt C.J., 1997, *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, IL.
- Gerber H.U., 1990, *Life Insurance Mathematics*, Springer, Zurich.
- HMD, 2017, *Human Mortality Database*, University of California (Berkeley, USA), Max Planck Insti-

- tute for Demographic Research (Rostock, Germany), www.mortality.org (24.03.2017).
- Hu B.J., 2013, *Mortality Models: Comparison and Application in Old-Age Populations of Selected Economies*, www.actuaries.org/lyon2013/papers/LIFE_Hu.pdf (10.06.2017).
- Jackowska B., 2013, *Modele dalszego trwania życia oraz ich zastosowania w przypadku osób starszych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Okólski M., 1993, *Kryzys zdrowotny w Polsce*, *Polityka Społeczna*, nr 1, s. 8–15.
- Papież M., 2011, *Wykorzystanie modelu Lee-Cartera do prognozowania współczynników zgonów w Polsce*, [w:] Balcerowicz-Szkutnik M. (red.), *Współczesne problemy demograficzne w dobie globalizacji – aspekty pozytywne i negatywne*, Zeszyty Naukowe Wydziałowe UE w Katowicach Studia Ekonomiczne, nr 95, s. 83–91.
- Rossa A., 2011, *Model Lee-Cartera dla Polski*, [w:] Rossa A. (red.), *Analiza i modelowanie umieralności w ujęciu dynamicznym*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, s. 115–156.
- Szumlicz T. (red.), Więckowska B., Bijak J., 2008, *Analiza ubezpieczeniowych implikacji wyników prognozy przeciętnego dalszego trwania życia uzyskanej metodą Lee i Cartera*, wydanie specjalne Wiadomości Ubezpieczeniowych, styczeń.
- Thatcher A.R., Kannisto V., Vaupel J.W., 1998, *The force of mortality at ages 80 to 120*, *Monographs on Population Aging*, no. 5, Odense University Press.
- Wilmoth J.R., Andreev K., Jdanov D., Gleij D.A., 2007, *Methods Protocol for the Human Mortality Database*, version 5, www.mortality.org/Public/Docs/MethodsProtocol.pdf (last revised 31.05.2007).
- Wunsch G., Mouchart M., Duchene J. (red.), 2002, *The Life Table. Modelling Survival and Death*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.