TEORYA PŁYT

PROSTOKĄTNIE-RÓŻNOKIERUNKOWYCH

WRAZ Z TECHNICZNEMI ZASTOSOWANIAMI DO PŁYT BETONOWYCH, KRAT BELKOWYCH I T. P.

NAPISAŁ

MAKSYMILIAN T. HUBER

Z 29 rysunkami w tekście

Praca wykonana z zasiłkiem Ministerstwa W. R. i O. P.

WE LWOWIE
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO
1921.

Maksymilian T. Huber.

Teorya płyt.

Ważniejsze omyłki druku.

Na str. 16 [74] we wzorze (7) zamiast $\frac{2C}{D}$ ma być $\frac{D}{2C}$

" " 25 [83] " " (10*) zamiast $-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ ma być $-B_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$

" " 27 [85] wiersz 2 od dołu zamiast a ma być a

" " 35 [93] w drugim z wzorów (19) symbol po pierwszym znaku równości ma wyglądać: $-(V_2)_{y=0}$

" " 36 [94] na końcu drugiego z wzorów [20] (dla R_2) zamiast a ma być a

" " 38 [96] we wzorze (25) (dla $\hat{R}$) zamiast π ma być π^2

" " 40 [98] pierwszy z wzorów (31) ma mieć postać:

$$|R_1| = |R_1|_{max} \cdot \cos\frac{\pi y}{b}$$

" " 56 [114] na dole w równaniu dla $2L$ należy znaki całek opatrzyć granicami 0 do a i 0 do b jak powyżej.

" " 60 [118] we wzorze (49) zamiast a ma być a

" " 64 [122] w wierszach 9, 12, 15 i 16 zamiast μ_{r_1} ma być μ_{r1}

" " 71 [129] wiersz 2 z góry, w mianowniku ułamka, którego licznikiem jest b... zamiast B_1 ma być $\bar{B}_1$

" " 73 [131] w pierwszym z wzorów (77. I.) pod ostatnim znakiem pierwiastka... zamiast $\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}$ ma być $\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}$

" " 77 [135] wiersz 1 od góry zamiast $(V_2)_{y-\frac{b}{2}}$ ma być $(V_2)_{y-\frac{b}{2}}$

" " " " koniec wzoru (82. I) należy zamknąć klamrą]

" " 79 [137] w pierwszym z wzorów (77, II) ma być wykładnik potęgowy liczby e opatrzony znakiem $-$, czyli: $e^{-\frac{n\pi}{\gamma}}$; w drugim z wzorów (78. II) zamiast $\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}$ ma być $\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}$

" " 98 [156] wiersz 5 od góry zamiast *iob.* ma być (ob.

" " 99 [157] wiersz 7 od góry ma być pod obu znakami pierwiastka ułamek $\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}$

" " 101 [159] we wzorze (109. III) zamiast $4qb^2$ ma być $4qb^4$

" " 109 [167] wiersz 7 od góry zamiast $\int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}}$ ma być $\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}$

2

Na str. 109 [167] w równaniu $F_2 = F_{2b} + \boldsymbol{n} . F_{2f}$ ma być $\boldsymbol{n}$ tłuste dla odróżnienia od $n = 1, 2, 3, \ldots$

„ „ 110 [168] wiersz 4 od góry po prawej stronie znaku = ma być górną granicą całki nie $-\frac{b}{2}$ lecz $+\frac{b}{2}$

„ „ 111 [169] wiersz 4 od góry zamiast ε_2 ma być ε_n

„ „ 117 [175] w pierwszym z wzorów (139.I) zamiast m_1 ma być m_2; w pierwszym wierszu drugiego z wzorów (139.I) t. j. wzoru dla V_2 zamiast $\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}$ ma być $\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2}$; we wzorze (140) w mianowniku ułamka pod znakiem sumy zamiast π^2 ma być n^2; we wzorze (141) zamiast R ma być R_1

„ „ 118 [176] na końcu wzoru (143.I) ma być wykładnik potęgowy liczby e opatrzony znakiem —, czyli $e^{-\frac{nx}{\beta}}$

„ „ 122 [180] wiersz 7 od dołu zamiast c' ma być c'_n

„ „ 125 [183] w pierwszym wierszu wzoru (150.I) zamiast

$$\left(1 - \frac{1}{m_1\pi^2\beta^2}\right) \text{ ma być } \left(1 - \frac{b^2}{m_1\pi^2\beta^2}\right)$$

„ „ 127 [185] wiersz 7 od góry (w samym środku stronicy) w trzecim wyrazie równania zamiast ${}_{y+b}$ ma być ${}_{y-b}$

„ „ 128 [186] we wzorze (154.II) po prawej stronie znaku = zamiast $-\frac{b^2}{\pi^2}$ ma być $+\frac{b^2}{\pi^2}$

„ „ 134 [192] wiersz 2 od dołu zamiast 0,3011 ma być 0,0311

„ „ 136 [194] we wzorze (161.I) po prawej stronie znaku = zamiast b^3 ma być b^4

„ „ „ „ wiersz 5 od góry zamiast § 14 ma być § 18

„ „ 137 [195] w pierwszym wierszu wzoru (163.I) zamiast

$$\left[\frac{}{2}\left(\cdots \right.\right. \text{ ma być } \left[\frac{a}{2}\left(\cdots\right.\right.$$

„ „ 139 [197] wiersz 3 od dołu zamiast $-\alpha_{an}\, Ch\frac{nx}{\beta}$ ma być $-\alpha_{an} Ch\frac{nx}{\alpha}$

„ „ 148 [206] w pierwszym z wzorów (177.I) zamiast α_{au} ma być α_{an}

„ „ 148 [206] w drugim wierszu pierwszego z wzorów (180.I) t. j. wzoru dla V_1 zamiast B_1 ma być $\overline{B}_1$

„ „ 149 [207] we wzorze (184.I) zamiast α_{au} ma być α_{an}

„ „ 154 [212] we wzorze (197) zamiast $\frac{\sigma x^2}{\mathfrak{A}_1} + \frac{\sigma y^2}{\mathfrak{A}_2}$ ma być $\frac{\sigma_x^2}{\mathfrak{A}_1} + \frac{\sigma_y^2}{\mathfrak{A}_2}$

„ „ 156 [214] wiersz 2 od góry zamiast $\mathfrak{A} =$ ma być $\mathfrak{A}_0 =$

„ „ 172 [230] pierwszy wyraz wiersza 13 od góry ma brzmieć: ściskania.

Na str. 187 [245] w trzecim z wzorów (213 . II) t. j. we wzorze dla μ_{12} po prawej stronie znaku równości:

$$\text{zamiast } \frac{4}{\pi^3} \text{ ma być } \frac{2}{\pi^3}$$

Nadto na tejże stronicy i paru następnych należy wyrażenia $n\pi\varepsilon\frac{x}{a}$ umieszczone po symbolach funkcyj hiperbolicznych *Sh* i *Ch* pojmować jako argumenty tych funkcyj, t. j. tak, jak gdyby było wydrukowane;

$$Sh\frac{n\pi\varepsilon x}{a}, \quad Ch\frac{n\pi\varepsilon x}{a}.$$

" " 217 [267] wiersz 4 od góry zamiast $I_1 = 152{,}06$ ma być $I_1' = 152{,}06$

" " 224 [274] wiersz 1 od dołu (druga część wzoru 242.I) ma wyglądać:

$$-a\vartheta_n Sh\frac{nx}{a}\Big\}-\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{4C}{\overline{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\beta, \vartheta_n)\, Ch\frac{nx}{\beta}-\beta\vartheta_n Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\Big]$$

Teorya płyt prostokątnie-różnokierunkowych

wraz z technicznemi zastosowaniami do płyt żelazno-betonowych, krat belkowych i t. p.

Napisał

Maksymilian T. Huber.

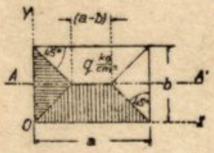
Wstęp.[1]

Przy obliczeniu płyt żel.-betonowych stosowano pierwej powszechnie rozkład płyty na równoległe skrawki i traktowano te ostatnie jak zwykłe belki. Ten sposób obliczenia daje jak wiadomo, wyniki dostatecznie dokładne tylko w jedynym praktycznie ważnym przypadku płyty całkowicie równomiernie obciążonej o postaci bardzo długiego prostokąta, albowiem warunki podporowe krótkich boków tego prostokąta mogą mieć oczywiście tylko bardzo mały wpływ na stan odkształcenia i napięcia w środkowej części płyty. Począwszy od wielkości stosunku boków $a:b=3$ zbliża się istotnie stan napięcia w środkowej, najbardziej wytężonej części płyty, do stanu, jaki panuje w płycie „nieskończenie długiej" ($a:b=\infty$), tak, iż powyższy sposób obliczenia jest teoretycznie i praktycznie dopuszczalny. Atoli przy mniejszych wartościach stosunku $a:b$ daje ten sposób w przypadku wszechstronnego podparcia brzegów płyty wyniki zbyt niekorzystne, które nawet u płyty

[1] Część pracy była pierwotnie przeznaczona do publikacyi technicznych i tem się tłumaczy syntetyczny, elementarny charakter ogólnej teoryi, traktowanej, jak się później pokazało, już przez J. Boussinesq'a inną metodą, bardziej ścisłą. (Ob. uwaga w § 5).

kwadratowej ($a : b = 1$) prowadzą do trzykrotnego przecenienia wytężenia materyału. Nieco lepsze wyniki daje sposób, zalecany przez Bach'a, polegający na tem, że nader łatwo obliczyć ściśle średnią wartość momentu zginającego w przekątnym przekroju płyty prostokątnej, dokoła swobodnie podpartej i symetrycznie obciążonej. Ale ta wartość średnia może różnić się bardzo znacznie od wartości największej, pomijając już tę okoliczność, że wytężenie elementu płyty, ograniczonego dwiema parami przekrojów wzajemnie prostopadłych, nie jest jeszcze określone podaniem wartości momentu zginającego w jednej tylko płaszczyźnie przekroju[1].

[1] Jeszcze korzystniejszym okazuje się prosty przybliżony sposób, jaki podałem słuchaczom moich wykładów mechaniki technicznej już około r. 1913. Sposób ten opiera się na przyjęciu, że reakcye brzegów płyty równomiernie obciążonej rozkładają się w przybliżeniu według schematu uwidocznionego na rys. 1., jeżeli sztywność przy zginaniu płyty jest jednakowa w obu kierunkach X i Y. Stosownie do tego wypada dla średniej wartości momentu zginającego w niebezpiecznym przekroju podłużnym AA'



Rys. 1.

$$M = \frac{1}{24}\left(3 - 2\frac{b}{a}\right) b^2 q \tag{a}$$

i można okazać, że ta wartość średnia o wiele mniej się różni od dokładnej największej wartości momentu zginającego, aniżeli średnia wartość w przekroju przekątnym:

$$M = \frac{1}{12} \frac{b^2 q}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \tag{b}$$

Tylko dla płyty kwadratowej dają oba wzory to samo, a mianowicie:

$$\frac{1}{24} b^2 q$$

W innym krańcowym przypadku $a = \infty$ wypada z przybliżonego wzoru a): $\frac{1}{8} b^2 q$, a więc dokładnie, zaś ze wzoru (b): $\frac{1}{12} b^2 q$, czyli o jedną trzecią za mało. Wywód wzoru (a), na podstawie powyższego przybliżonego rozkładu reakcyi, jest nadzwyczaj prosty. Można go zresztą znaleźć w artykule ogłoszonym w Czasop. techn. z r. 1919, str. 53.

Ta okoliczność, że w doświadczeniach Bacha z płytami kwadratowemi pęknięcie zachodziło w istocie wzdłuż przekątnego przekroju, nie jest zgoła w sprzeczności z oczywistym wynikiem teoryi, wedle której we wszystkich przekrojach elementarnych w środku równokierunkowej płyty kwadratowej pa-

Wobec tego próbowano w nowszych czasach zwiększyć dokładność obliczenia, rozkładając płytę na dwa, albo też trzy układy skrawków krzyżujących się nawzajem [1]. Ten drugi sposób stosował już, mówiąc nawiasem, młodszy Jakób Bernoulli w roku 1788 do nieudanej teoryi doświadczeń Chladni'ego nad drganiem płyt. Tutaj przyjmowano, że wszystkie poszczególne skrawki są narażone tylko na zginanie i ścinanie, jakkolwiek elementy płyty są w rzeczywistości poddane także skręcaniu, co można pominąć wobec zginania tylko u istotnych krat belkowych, a i w tym przypadku tylko pod pewnymi warunkami. To pominięcie pracy skręcenia, jakoteż i zwężenia poprzecznego mogłoby wprawdzie często okazać się praktycznie dopuszczalnem, albowiem przez to zwiększa się wogóle pewność obliczenia; atoli nie podlega wątpliwości, że zarówno w interesie nauki jak i praktyki, leży możliwie dokładne zbadanie warunków rzeczywistych. To uda się w zupełności dopiero po licznych, bardzo starannych doświadczeniach, któremi jednak powinna kierować ściśle naukowa teorya [2]. Posiadamy ją od dawna dla płyt jednolitych i równokierunkowych, a wyniki teoryi zgadzają się bardzo dobrze z doświadczeniami [3].

nuje ten sam stan napięcia. To potwierdza tylko pewien wynik z teoryi płyt, głoszący, iż momenty zgięcia są najrównomierniej rozłożone w przekroju przekątnym, a w innych przekrojach środkowych spadają ich wartości szybko w miarę zbliżenia ku brzegom płyty.

[1] Por. prace inżyniera Danusso A. we włoskiem piśmie Il Cemento z r. 1911, albo niemiecką przeróbkę w Forscherarb. auf d. Gebiete des Eisenbetons, XXI, Berlin 1913 (Dipl.-Ing. H. v. Bronneck). Nadto Calcul des hourdis en béton armé. Ann. d. Ponts et Ch. 1912, IV, pag. 469—529. Dr. Ing. Stephan, Ueber die Berechnung der homogenen quadratischen Platte... Berlin—Steglitz.

[2] W toku niniejszej pracy nie można było niestety zużytkować ważnych wyników doświadczeń z płytami, wykonanych staraniem „Niemieckiego Wydz. żel.-betonowego" w latach 1912 do 1914, a ogłoszonych drukiem przez C. v. Bacha i O. Grafa w r. 1915. Dopiero po powrocie z rosyjskiej niewoli, w jesieni r. 1918, dołączyłem niektóre porównawcze rozważania w odpowiadających miejscach pracy. Tak powstał między innemi cały § 24a.

[3] Föppl A. Mitt. aus d. mech.-techn. Labor. d. kön. Tech. Hochschule, München. J. 1900, H. 27; Estanave E., Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire... Thèse. Paris 1900; Ensslin M., Studien über die Beanspruchung und Formänderung kreisförmiger Platten. Dingl. Polyt. Journ. 1904, Bd. 319; Dr.-Ing. Nádai A., Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten. Berlin 1915. Forschungs-

Ale ta teorya nie da się wogóle stosować do płyt żel.-betonowych, ponieważ sztywność przy zginaniu takiej płyty może zależnie od uzbrojenia mieć bardzo różne wartości w przekrojach o rozmaitych kierunkach. Z tego powodu rozwinę w niniejszej pracy ogólną teoryę płyt żel.-betonowych drogą możliwie elementarną i zastosuję ją w niektórych praktycznie ważnych przypadkach płyty prostokątnej. Szczególną uwagę poświęcę nadto ważnej kwestyi „współdziałania płyty“ u belek o przekroju T (belek płytowych, lub płyt z żebrami), ponieważ to zagadnienie nie było, jak się zdaje, dotychczas traktowane ani teoretycznie[1]), ani też doświadczalnie[2]. Teoretyczne badania, rozwinięte w §§ 16, 19 i 23 pozwalają oświetlić krytycznie odpowiadające miejsca w urzędowych przepisach dla żel.-betonu i mogą posłużyć, w połączeniu z przyszłemi doświadczeniami, do ustanowienia nowych reguł, naukowo uzasadnionych. Podobnież wypada się spodziewać, że i inne tutaj podane rozwiązania, uwzględniające możliwie dokładnie nierównokierunkowość właściwą płycie żel.-betonowej, wyrugują prędzej czy później niejeden z najrozmaitszych „praktycznych“ wzorów. Te ostatnie należy uważać za tymczasowe środki pomocnicze,

arb. herausg. v. V. d. I. Heft 170—171. Z nowszych prac czysto teoretycznych, traktujących ściśle ważne praktycznie zagadnienia płyt równokierunkowych, przytoczymy tutaj następujące: Dr.-Ing. Hencky H., Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, München 1913, (R. Oldenbourg); Dr.-Ing. Leitz H., Berechnung der frei aufliegenden rechteckigen Platten, Berlin 1914; Mesnager M., Moments et flèches des plaques rectangulaires minces, Ann. d. P. et. Ch. 1916—III. Nadto w języku rosyjskim: Bubnow I. G., Mechanika budowlana okrętu. Część II, str. 465. Timoszenko S. P., Teorya sprężystości. Petrograd 1916, t. II, str. 285; Galjerkin B. G., Płyty prostokątne, swobodnie podparte. Petrograd 1915; Tenże. Zgięcie prostokątnych płyt i ścian. Petrograd 1917. Rozwiązaniami przybliżonemi zajmują się następujące prace: Dr Simič J., Zeit. d. öst. Ing. u. Arch.-Ver. 1908; Öst. Woch. f. d. öff. Baud. 1909; Hager K., Berechnung ebener rechteckiger Platten mittels trigonometrischen Reihen, 1911; Huber M. T., O wytrzymałości płyty prostokątnej... Przegl. techn. LII. 1914, str. 261; Galjerkin B. G., Pręty i płyty. (Po rosyjsku). Petrograd 1915; Föppl A. i L., Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure, München u Berlin 1920. R. Oldenbourg.

[1] Praca inż. Eggenschwyler'a A. w „Eisenbau“ z r. 1917, str. 229, traktująca jeden szczególny przypadek, doszła do moich rąk dopiero po powrocie z Rosyi w jesieni r. 1918. Ob. odpowiadający odsyłacz w § 21.

[2] Interesująca pod wielu względami praca Bacha i Grafa z r. 1910, Mitteil. ü. Forschungsarb. H. 90 u. 91, nic niestety w tej sprawie nie wyjaśnia.

dopóki ścisłe badanie nie dostarczy czegoś lepszego. W przypadku uzbrojenia jednakowego w obu kierunkach głównych przyniosły już liczne nowsze prace o płytach prostokątnych równokierunkowych rozwiązania praktycznie zadowalające; to jednak nie przeszkadzało, ażeby nawet w najnowszych podręcznikach technicznych umieszczano na pierwszem miejscu wzory, zalecane przez dawniejsze książki i urzędowe przepisy, przytaczając natomiast dopiero na miejscu drugiem spółczynniki, wyprowadzone ze ścisłych rozwiązań, obok wzorów interpolacyjnych, bez słowa krytycznej uwagi [1].

Zboczenia od prawa Hooke'a, właściwe betonowi, można oczywiście w teoryi płyt uwzględnić tylko w przybliżeniu, wprowadzając w konkretnych przypadkach dla stałych sprężystości betonu: E_b (rozciąganie i ściskanie), G_b (odkształcenie postaciowe) i m_b (liczba Poisson'a), średnie wartości, odpowiadające wynikom doświadczeń. Przyjęcie: $(E_b)_{śr} = 200.000$, kg/cm² $(m_b)_{śr} = 6$, jakie zaproponowałem w pierwszem opracowaniu teoryi [2], odpowiada $G_b = \sim \frac{3}{7} E_b$ i $n = E_j : E_b = 10$ do 11, jeżeli E_j oznacza moduł sprężystości żelaznych prętów uzbrojenia. Mniejsza wartość n odpowiada żelazu spawalnemu, większa zaś żelazu zlewnemu lub stali. To jednak nie wystarcza do wyznaczenia sprowadzonych momentów bezwładności przekroju z jaką taką dokładnością, jak już dowiodły liczne doświadczenia z uzbrojonemi belkami betonowemi. Ta ważna kwestya będzie poniżej przedmiotem szczegółowego rozważania.

Pożądanem byłoby oczywiście potwierdzenie teoretycznych wywodów wynikami doświadczeń, atoli tego nie można było na razie dokonać już z tego powodu, ponieważ cała praca zawdzięcza swoje powstanie przymusowym wywczasom po trudach wojennych w rosyjskiej niewoli. Nie uważałem za wskazane zwlekać z ogłoszeniem badań teoretycznych aż do czasu, kiedy się zbierze potrzebny materyał doświadczalny, gdyż teoretyczne wyniki mogą posłużyć

[1] Ob. np. Beton-Kalender na rok 1916.

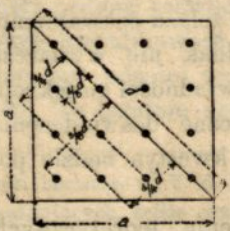
[2] Huber M. T., Ogólna teorya płyt żel.-betonowych i jej praktyczne zastosowanie do płyty prostokątnej podpartej wzdłuż całego obwodu. Czas. techn. Lwów 1914. Albo też: Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. Zeitschr. d. öster. Ing. u. Arch.-Ver. 1914. nr. 30. Ogólna teorya w tych publikacyach rozwinięta będzie w niniejszej pracy zasadniczo ulepszona i uproszczona.

z pożytkiem wielu badaczom doświadczalnym jednocześnie, co przyspieszy ostateczne rozwiązanie niejednego ważnego zagadnienia[1].

Wyprzedzenie badań doświadczalnych przez teoryę przedstawia jeszcze pewne inne korzyści, które oświetlą bliżej następujące rozważania.

Nauka o wytrzymałości ma bez wątpienia bardzo wiele do zawdzięczenia nowoczesnym badaniom doświadczalnym, nie można

[1] Wspomniane powyżej doświadczenia „Niemieckiego Wydziału żel.-betonowego" dostarczają obfitego materyału do porównania z teoretycznymi wynikami niniejszej pracy. Przytem jednakże trzeba mieć przedewszystkiem na oku tę ważną okoliczność, że w owych doświadczeniach urzeczywistniono równomierne obciążenie tylko w przybliżeniu. Mianowicie w przypadku płyty kwadratowej składało się obciążenie z 16 równych sił skupionych, o wielkości $\frac{P}{16}$, rozłożonych równomiernie w obu kierunkach głównych. Wprawdzie ten sposób obciążenia prowadzi dla podłużnych i poprzecznych skrawków płyty, traktowanych jako belki, do zupełnie tych samych wartości największych momentów zgięcia, co przy ciągłem równomiernie rozłożonem obciążeniu, atoli w przekrojach przekątnych ma się rzecz niewątpliwie inaczej. Jakoż otrzymujemy dla całkowitego momentu zgięcia w przekroju przekątnym o długości d (ob. rys. 29) wartość:



Rys. 29.

$$\frac{P}{4}\cdot\frac{d}{4}+\frac{P}{4}\cdot\frac{d}{4}-\frac{P}{16}\cdot\frac{3}{8}d-\frac{2P}{16}\cdot\frac{2}{8}d-3\frac{P}{16}\cdot\frac{1}{8}d=\frac{3}{64}Pd,$$

zamiast $\frac{1}{24}Pd$ w przypadku obciążenia P, równomiernie rozłożonego w sposób ciągły, a więc około 12,5% więcej. Z tego powodu należy się spodziewać, że spółczynniki wzorów dla momentów, wyprowadzone z doświadczeń, wypadną nieco za wielkie w porównaniu do spółczynników teoretycznych. To przewidywanie sprawdziło się w istocie, jak zobaczymy poniżej. Obciążenie rozłożone równomiernie w sposób ciągły można, jak się zdaje, urzeczywistnić bez szczególnych trudności zapomocą naporu hydrostatycznego, w naczyniu z dnem z materyału szczelnego a wiotkiego i nierozciągliwego o rozmiarach obciążonego pola. Jakkolwiek w omawianych doświadczeniach tego sposobu nie użyto, to jednak na podstawie rozwiązania w § 24 dla przypadku siły skupionej w dowolnym punkcie płyty da się wcale dobrze przeprowadzić dokładne porównanie z teoryą. O innych mniej lub więcej ważnych zboczeniach warunków doświadczeń od założeń, uczynionych przy wywodzie najprostszych ścisłych wzorów teoretycznych, będzie mowa w dodatkowym § 24a.

jednakże przemilczeć faktu, stwierdzonego wielokrotnie, że niektórzy, nawet bardzo zasłużeni, badacze doświadczalni zaniedbują zbyt często naukową teoryę, zadawalając się wyprowadzeniem z wyników doświadczeń empirycznych reguł, które nierzadko kolidują z podstawowemi prawami ogólnej teoryi sprężystości, ugruntowanej całowiekowem doświadczeniem. Klasycznym przykładem zagmatwania pojęć, wywołanego przez to w szerokich warstwach inżynierów, jest bardzo rozpowszechnione nierozróżnianie dwu rodzajów wytrzymałości, na które Niemcy posiadają nazwy: „die Schubfestigkeit“ i „die Scherfestigkeit“. U nas niestetety używa się dotąd najczęściej jednej nazwy „wytrzymałość na ścinanie“, co oczywiście nader sprzyja utożsamieniu obu, tak wielce różnych pojęć. Ja sam, lubo od dawna zwróciłem uwagę na tę sprawę, używałem w moich wykładach i pracach tej jednej nazwy, podkreślając jednak starannie obadwa znaczenia. Atoli teraz widzę, jak dalece pożytecznem byłoby wprowadzenie obu nazw odrębnych. Tylko tym sposobem będzie można z czasem wykorzenić dotyczące błędne poglądy.

Pierwszy z wymienionych rodzajów wytrzymałości określa się jako ta graniczna wartość naprężenia przy prostem odkształceniu postaciowem (albo przy prostem posunięciu), której przekroczenie prowadzi do pęknięcia, lub niedopuszczalnego trwałego odkształcenia materyału. Tę wielkość można uważać praktycznie za stałą materyału, gdyż jest w bardzo obszernych granicach z wielkiem przybliżeniem niezależna od postaci i rozmiarów badanego ciała. Proponuję dla niej nazwę: „prosta wytrzymałość postaciowa“, jako wygodny skrót zamiast: „wytrzymałość przy prostem odkształceniu postaciowem“, albo też: „teoretyczna wytrzymałość na ścinanie“.

Drugi z wymienionych rodzajów wytrzymałości pojmujemy jako wielkość, mierzoną ilorazem siły w technologicznym procesie cięcia (ścinania) przez ścięte pole, która to wielkość musi byś widocznie zależną nietylko od materyału badanego ciała (próbki), lecz także od jego postaci, oraz od materyału i postaci organów tnących. Wobec tego nie można ją żadną miarą uważać za stałą materyału i wiązać z wartością fikcyjnych naprężeń ścinających w przekroju ścinania. Stosowną nazwą dla tego rodzaju wytrzymałości byłaby: „technologiczna wytrzymałość na ścinanie“.

Z niesłusznego utożsamienia obu powyższych pojęć wynika bardzo rozpowszechniony błąd w interpretacyi kierunku powierzchni pęknięcia przy niektórych doświadczeniach. Skoro np. zaobserwowano po powstaniu pęknięcia wzajemne przesunięcie obu rozdzielonych pęknięciem części wzdłuż powierzchni pęknięcia, co z natury rzeczy zwykle nastąpić musi, to wypowiada się jako coś oczywistego zdanie, że pęknięcie powstało wskutek ścięcia w owej powierzchni, mając przytem najczęściej na myśli przezwyciężenie teoretycznej wytrzymałości na ścinanie. Natychmiast oblicza się w przybliżeniu naprężenia ścinające (styczne), które prawie zawsze odnaleźć można, gdyż znikają tylko w trzech płaszczyznach głównych i takim pozorem dowodu okrywa się zupełnie błędne tłumaczenie zjawiska. A przecież niezliczone doświadczenia ze zginaniem belek żel.-betonowych o przekroju prostokątnym, jakoteż doświadczenia ze skręcaniem walców betonowych, pouczają, że pierwsze rysy nigdzie nie mają kierunku największych naprężeń stycznych, a tam, gdzie jedno z naprężeń głównych jest ciągnieniem, są doń prostopadłe. W miejscach, gdzie niema ciągnień, pojawiają się pierwsze rysy w kierunku ciśnień głównych, ale tylko przy wysokim stopniu jednolitości materyału; inaczej mają przebieg dość nieregularny tak, iż obraz zniszczenia przedstawia się rozmaicie, zależnie od przypadkowego rozkładu miejscowych niejednolitości i od rodzaju pola naprężeń. Te reguły doświadczalne można zebrać w jedną następującą: Pierwsze pęknięcia w obciążonem ciele z betonu (lub innego kruchego i w przybliżeniu jednolitego materyału) są prostopadłe do algebraicznie największego wydłużenia głównego.

Należy zwrócić uwagę, że ta reguła nie daje jeszcze odpowiedzi na bardzo ważne pytanie, czem się mierzy wytężenie materyału w ogólnym stanie napięcia (czyli co jest ogólną miarą niebezpieczeństwa pęknięcia, względnie przekroczenia granicy sprężystości). Jak dotychczas badania doświadczalne dały zadawalającą odpowiedź na to pytanie tylko dla plastycznych metali. Miarą wytężenia jest dla nich największa różnica naprężeń głównych[1].

[1] Teoryi tem zdaniem wyrażonej niewiele ustępuje hypoteza autora ogłoszona częściowo w r. 1904 („O podstawach teoryi wytrzymałości", Prace mat.-fiz., abo: „Właściwa praca odkształcenia jako miara wytężenia materyału", Czas. tech.), a omówiona wyczerpująco w dziele Föppl'a A. i L.: Drang u. Zwang, Monachium 1920.

Według tego będzie np. proste naprężenie ścinające równie niebezpieczne, jak dwa razy tak wielkie proste ciągnienie, lub ciśnienie. Materyały kruche nie stosują się do tego prawidła, jak to widać już stąd, że ich wytrzymałość przy rozciąganiu jest o wiele mniejszą od wytrzymałości przy ściskaniu.

Prawie nie potrzeba zaznaczać, że ewentualne rysy skurczowe (Schwindrisse), lub grube błędy materyału, mogą nierzadko spowodować mniej lub więcej znaczne zboczenia od powyższych reguł. Ta okoliczność w połączeniu z tem, że po ukazaniu się pierwszych pęknięć rozkład naprężeń ulega natychmiastowej, zwykle znacznej, zmianie, nawołuje do jak największej ostrożności przy wysnuwaniu wniosków z końcowych obrazów zniszczenia, gdyż w stadyum końcowem jest stan napięcia prawie nieznany.

Dość często także spotyka się w literaturze technicznej z mylną interpretacyą wzajemnego o d z i a ł y w a n i a sąsiednich elementów ciała i p r z e n i e s i e n i a sił przez wewnętrzne naprężenia. Pewien wielce zasłużony badacz niemiecki pisze np., że poszczególne włókna pręta, narażonego na proste rozciąganie działają na siebie nawzajem także przy zupełnie równomiernym rozkładzie naprężeń w przekrojach poprzecznych rozpatrywanej części i wnioskuje stąd, że postać przekroju musi mieć wpływ na stałe sprężystości i wytrzymałości. Pozostawiwszy tymczasem na boku część tego wniosku, odnoszącą się do stałych wytrzymałości, musielibyśmy, gdyby reszta była prawdą, odrzucić całą teoryę sprężystości. A przecież ta teorya oddaje zawsze znakomite usługi, przy rozwiązaniu zagadnień nauki o wytrzymałości. Nawet dla materyałów niepodlegających dokładnie prawu Hooke'a, przyjętemu za podstawę teoryi sprężystości, daje ta teorya w wielu wypadkach wcale dobre wyniki. Wystarczy wskazać na historyczny rozwój teoryi sklepień, którą doprowadzono dopiero wówczas do zgodności z doświadczeniem, gdy ją oparto na teoryi sprężystości. Nikomu przeto nie przyjdzie na myśl, aby wyrugować klasyczną teoryę sprężystości z technicznej nauki o wytrzymałości. Ta teorya jest po dziś dzień i pozostanie nadal jedyną pewną przewodniczką, która umożliwia n a u k o w ą, a więc n a j p r o s t s z ą, s ł u s z n ą interpretacyę wyników doświadczalnych i jeżeli w pewnych, co prawda, dość częstych przypadkach nie prowadzi do celu, to tylko z powodu trudności matematycznych, któremi droga do rozwiązania jest najeżona.

Lecz w czemże tkwi błąd przytoczonego powyżej wniosku?

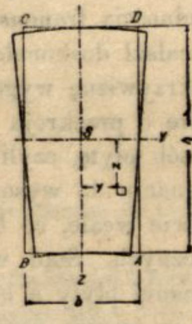
Wszak z filozoficznego stanowiska nie można oczywiście zaprzeczyć, że sąsiednie włókna pręta działają na siebie nawzajem siłami cząsteczkowemi (molekularnemi). Otóż miara tego działania, t. zn. naprężenie w przekrojach podłużnych, musi w tym przypadku, według fundamentalnych praw statyki być równe zeru i dlatego to działanie nie może mieć żadnych skutków. Praktycznie biorąc, n i e m a g o zatem i jak długo ciągnienia są we wszystkich przekrojach poprzecznych równe i równomiernie rozłożone, nie może postać przekroju mieć żadnego wpływu na wydłużenia i co zatem idzie, na moduł wydłużenia *E*. Inaczej przedstawia się sprawa, skoro w jakimkolwiek miejscu pręta rozpocznie się tworzyć zwężenie, czyli t. zw. „szyjka". Atoli wtedy niema już mowy o równomiernym rozkładzie ciągnień; także w pierwotnych przekrojach podłużnych powstają naprężenia, których przedtem nie było; krótko mówiąc: d z i a ł a n i e s i ę p o j a w i a. Całkiem podobnie ma się rzecz z często mylnie interpretowanem wzajemnem działaniem podłużnych włókien belki zginanej.

Powyższe wywody mają nie tylko na celu podkreślenie rozpowszechnionych błędów w interesie nauki, lecz także służą do tego, aby wykazać wielką ważność praktyczną teoretycznej podstawy dla każdego badania doświadczalnego na polu technicznej nauki o wytrzymałości Jesteśmy w położeniu o wiele korzystniejszem, jeżeli przed wykonaniem seryi doświadczeń rozporządzamy pewną teoretyczną podstawą, albowiem wtedy wystarczy znacznie mniejsza liczba doświadczeń do otrzymania zadowalającej odpowiedzi na pytanie, stawiane przyrodzie w każdem naukowem doświadczeniu. Bez teoretycznej wskazówki pracujemy prawie zawsze po omacku, dochodząc w końcu, po wielkiej liczbie doświadczeń do wzoru empirycznego, który można stosować tylko w bardzo zbliżonych warunkach i to bez ekstrapolacyi. Natomiast sprawdzenie wzoru teoretycznego wymaga tylko niewielkiej liczby doświadczeń, a w przypadku potwierdzenia teoryi dostarcza pewnej podstawy obliczenia w całym zakresie ważności założeń teoryi, dających się zawsze określić jasno i niedwuznacznie.

I. Ogólna teorya.

§ 1. Proste zgięcie belki i płyty.

Rozpatrzmy najpierw przypadek czystego zgięcia belki jednolitej i równokierunkowej o przekroju prostokątnym $ABCD$ (rys. 2). Niech będzie XZ płaszczyzną zgięcia, a M_1 momentem zginającym pary sił, leżącej w tej płaszczyźnie. Odpowiadający stan napięcia jest, jak wiadomo, określony jednem tylko równaniem:



Rys. 2.

(a) $$\sigma_x = \frac{M_1}{I_1} \cdot z$$

w którem σ_x oznacza naprężenie normalne w dowolnym punkcie przekroju (y, z), zaś I_1 moment bezwładności przekroju względem osi Y-ów, jako linii obojętnej. Drugie równanie:

(b) $$\varrho_1 = \frac{EI_1}{M_1}$$

wyznacza promień krzywizny osi belki OX po zgięciu. Ale oba równania wystarczają do dokładnego opisania stanu napięcia tylko przy niezbyt wielkich wartościach stosunku $b:h$. Rozkład naprężeń, przedstawiony równaniem (a), warunkuje nietylko krzywiznę $1/\varrho_1$ w płaszczyźnie XZ, lecz także krzywiznę $1/\varrho_2$ w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, równoległej do YZ. Każdy bowiem element belki $dx\,dy\,dz$ doznaje według prawa sprężystości następujących właściwych wydłużeń głównych:

(c) $$\lambda_x = \frac{\sigma_x}{E},\ \lambda_y = -\frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{E},\ \lambda_z = -\frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{E}$$

a podobnie, jak wydłużenia λ_x wywołują wzajemne nachylenie przekrojów poprzecznych, pierwotnie równoległych do YZ, tak też wydłużenia λ_y powodują odpowiadające nachylenia podłużnych przekrojów XZ (zawartych między dwoma sąsiednimi przekrojami poprzecznymi). Jedyna różnica między obu odkształceniami polega na tem, że krzywizna poziomych włókien poprzecznych, czyli „krzywizna poprzeczna" $1/\varrho_2$, jest mniejszą od krzywizny podłużnej i ma kierunek przeciwny tej ostatniej. Pierwszą określa widocznie równanie:

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{m\varrho_1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{M_1}{EI_1}$$

znane wprawdzie od dawna, lecz pomijane pierwej w technicznej nauce o sprężystości. W teoryi płyt gra ono wybitną rolę.

Krzywiznę poprzeczną przy zgięciu mierzył już z wielką dokładnością francuski fizyk A. Cornu[1] na beleczkach szklanych i znalazł doskonałą zgodność z równaniem (d); gołem okiem można tę krzywiznę wygodnie obserwować, zginając grube pręty kauczukowe o przekroju prostokątnym. Skoro jednak zginamy w ten sam sposób płytę, czyli belkę o wielkiej szerokości przekroju b w porównaniu do wysokości h, to krzywizna poprzeczna nie pojawi się prawie wcale, co łatwo przewidzieć na podstawie rozważań geometrycznych. Stąd wypływa ważna różnica między stanem napięcia zginanej płyty a belki. Przy zgięciu płyty powstają oprócz naprężeń σ_x jeszcze naprężenia σ_y, które w przypadku nieskończonej (lub praktycznie bardzo wielkiej) szerokości b nader łatwo obliczyć z warunku $\lambda_y = 0$. Ten sam stan napięcia panuje oczywiście także i w tych elementach skończonej płyty, które doznają walcowego zginania. Zamiast równania (c) musimy teraz napisać:

$$\lambda_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\,\sigma_y\right), \quad \lambda_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\,\sigma_x\right) = 0.$$

Stąd

$$\sigma_y = \frac{1}{m}\,\sigma_x, \quad \lambda_x = \frac{m^2-1}{m^2 E}\,\sigma_x,$$

albo

$$\text{(e)} \qquad \lambda_x = \frac{\sigma_x}{E'};$$

jeżeli dla skrócenia wprowadzimy oznaczenie:

$$\text{(f)} \qquad E' = \frac{m^2}{m^2-1} \cdot E$$

Ponieważ równanie (a) nie traci swej ważności, a wogóle jest

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\lambda_1}{z},$$

[1] C. R. 1869, 69, S. 333.

więc otrzymujemy zamiast równania (b):

(g)
$$\varrho_1 = \frac{E' I_1}{M_1} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{I_1}{M_1}$$

Siły wewnętrzne w przekrojach XZ dają wskutek związku

$$\sigma_y = \frac{1}{m} \sigma_x$$

także wypadkowy moment zginający o wartości:

(h)
$$M_2 = \frac{1}{m} M_1$$

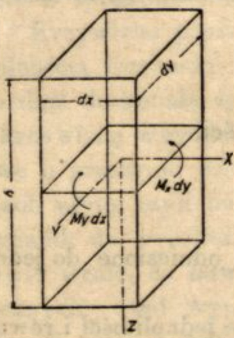
jeżeli obie wielkości M_1 i M_2 pojmujemy jako odniesione do jednostki szerokości przekroju.

Odrzuciwszy teraz ograniczające założenie jednolitości i równokierunkowości materyału, oraz przyjąwszy w płycie dwa wybitne kierunki, zgodne z osiami spółrzędnych i odznaczające się różnemi własnościami sprężystemi, dostrzeżemy łatwo, że w związku (*h*) zmieni się tylko fizyczne znaczenie spółczynnika $1/m$. Ten spółczynnik nie będzie teraz więcej określać stosunku poprzecznego skurczenia do podłużnego rozszerzenia dowolnego elementu materyału płyty, lecz będzie określać ogólnie stosunek $M_2 : M_1$, odpowiadający walcowemu zgięciu w płaszczyźnie momentu M_1. Przy przejściu do drugiego kierunku głównego, t. j. do walcowego zginania w płaszczyźnie YZ, przybierze przeto analogiczny stosunek $M_1 : M_2$ inną wartość stałą. Z tego powodu napiszemy w pierwszym przypadku $1/m_1$ zamiąst $1/m$, a w drugim $1/m_2$. Prócz tego należy uwzględnić, że i sztywność zginania, odniesiona do jednostki szerokości przekroju, może mieć dla obu kierunków głównych różne wartości w rozpatrywanym uogólnionym przypadku prostokątnej nierównokierunkowości materyału płyty, która to nierównokierunkowość odpowiada dobrze strukturze płyty betonowej, równomiernie w obu kierunkach głównych uzbrojonej. Dlatego oznaczymy odpowiednio przez B_1 i B_2 „sztywność belkową" w płaszczyznach XZ i YZ, to znaczy sztywność odpowiadających skrawków elementarnych płyty przy ich zginaniu jako belki. Dla płyty równokierunkowej będzie oczywiście

$$B_1 = B_2 = \frac{E h^3}{12}.$$

§ 2. Ogólne czyste zgięcie elementu płyty.

Przechodzimy teraz do rozpatrzenia elementu płyty, na którego boczne ściany (rys. 3.) działają same tylko momenty zginające. Dobrze będzie przytem podkreślić zasadę używanego już sposobu oznaczania wielkości statycznych. Pomyślmy sobie całą płytę rozdzieloną na równoległe skrawki, raz w kierunku jednego układu żelaznych prętów uzbrojenia, idących równolegle do płaszczyzny XZ, drugi raz w kierunku drugiego układu i równolegle do płaszczyzny YZ. Wszystkie wielkości odpowiadające przekrojom poprzecznym pierwszego pomyślanego układu skrawków, lub krócej: układu X, otrzymują wskaźnik 1; takież wielkości drugiego układu, czyli układu Y, odróżnia wskaźnik 2 [1].



Rys. 3

Moment zginający M_1 wywołuje w pionowej płaszczyźnie XZ krzywiznę M_1/B_1, a w płaszczyźnie YZ krzywiznę $-\frac{1}{m_1}\cdot\frac{M_1}{B_1}$; odpowiadające zaś krzywizny, wywołane przez moment M_2 są $-\frac{1}{m_2}\cdot\frac{M_2}{B_2}$ i $\frac{M_2}{B_2}$. Na zasadzie superpozycyi [2] wynikają stąd dwa równania:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{M_1}{B_1}-\frac{1}{m_2}\frac{M_2}{B_2},\quad \frac{1}{\varrho_2}=\frac{M_2}{B_2}-\frac{1}{m_1}\frac{M_1}{B_1}$$

Rozwiązawszy je względem M_1 i M_2 otrzymamy:

$$(1)\quad M_1=\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2-1}B_1\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{m_2}\frac{1}{\varrho_2}\right),\quad M_2=\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2-1}B_2\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{m_1}\frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Wielkości:

$$(2)\qquad \overline{B}_1=\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2-1}\cdot B_1,\qquad \overline{B}_2=\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2-1}B_2$$

---

[1] Ta zasada oznaczania, odmienna od użytej w pierwszem opracowaniu teoryi (por. cytat na str. 7), okazała się dogodniejszą od poprzedniej.

[2] Zasada superpozycyi stosuje się, biorąc ściśle, tylko do przypadku zakrzywień nieskończonie małych. Wtedy byłyby powyższe równania zupełnie ściśle. W przypadku obu krzywizn skończonych będą te równania przybliżone i to tem więcej, im mniejsze są krzywizny.

mają znaczenie „sztywności płytowych“ przy walcowem zginaniu w płaszczyźnie XZ, względnie YZ.

Dla płyty betonowej, uzbrojonej równomiernie w obu kierunkach X i Y, można sztywności belkowe przedstawić wyrażeniami:

$$B_1 = E_b I_{1b} + E_f I_{1f}, \qquad B_2 = E_b I_{2b} + E_f I_{2f}.$$

Tutaj oznaczają E_b i E_f moduły wydłużenia dla betonu i żelaza, zaś I_{1b}, I_{2b}, I_{1f}, I_{2f} są momentami bezwładności przekrojów betonu, względnie żelaza, względem odpowiadających obu osi obojętnych, które leżą w ogóle w różnej wysokości. Po wprowadzeniu znanej liczby stosunkowej

$$n = \frac{E_f}{E_b} \tag{3}$$

wyrazimy sztywności belkowe w postaci:

$$B_1 = E_b (I_{1b} + n I_{1f}) = E_b I_1, \qquad B_2 = E_b (I_{2b} + n I_{2f}) = E_b I_2. \tag{4}$$

Wielkości I_1 i I_2 mają tutaj zwykłe znaczenie sprowadzonych (zredukowanych, lub też „idealnych“) momentów bezwładności takichże przekrojów żel.-betonu o polach:

$$F_1 = F_{1b} + n F_{1f}, \qquad F_2 = F_{2b} + n F_{2f}. \tag{5}$$

Wartości sprowadzonych liczb Poisson'a $1/m_1$ i $1/m_2$ muszą przypuszczalnie leżeć pomiędzy $1/m_b$ (dla betonu) a $1/m_f$ (dla żelaza). Im mniejszym będzie wpływ uzbrojenia X, lub Y, na odpowiadającą sztywność zginania, tem bardziej zbliży się wartość m_1, względnie m_2 do m_b i naodwrót. Możnaby zatem przyjąć w przybliżeniu:

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_b}\frac{I_{1b}}{I_1} + \frac{1}{m_f} n \frac{I_{1f}}{I_1}, \qquad \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_b}\frac{I_{2b}}{I_2} + \frac{1}{m_f} n \frac{I_{2f}}{I_2}, \tag{6}$$

o ile skrajne warstwy betonu przenoszą ciągnienia. Na razie wystarczy zapewne uproszczone przyjęcie: $m_1 = m_2 = 6$, a więc:

$$\overline{B}_1 = \frac{36}{35} E_b I_1, \qquad \overline{B}_2 = \frac{36}{35} E_b I_2, \tag{2a}$$

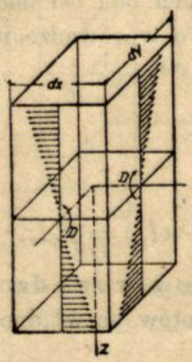
dopóki wyniki doświadczeń nie pozwolą na dokładniejsze wyznaczenie wartości m_1 i m_2.

Dla płyty uzbrojonej w dwu do siebie prostopadłych kierunkach i narażonej w tych obu kierunkach na proste zginanie momentami M_1 i M_2 (odniesionemi do jednostki szerokości przekroju), mamy tedy, w związku z powyższemi formułami pomocniczemi, następujące równania zgięcia:

$$(1') \qquad M_1 = \bar{B}_1\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{m_2}\frac{1}{\varrho_2}\right), \qquad M_2 = \bar{B}_2\left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{m_1}\frac{1}{\varrho_1}\right).$$

§ 3. Skręcenie elementu płyty.

Rozpatrując teraz działanie momentów skręcających na dwie przecinające się boczne ściany elementu płyty, należy najpierw uwzględnić, że podług twierdzenia o równości odpowiadających sobie naprężeń stycznych (działających na tychże ścianach równolegle do płaszczyzny płyty), różnią się wartości obu tych momentów tylko znakiem (rys. 4). To pozostaje ważnem także w przypadku prostokątnej nierównokierunkowości materyału płyty, gdyż wtedy zmienić się może rozkład naprężeń stycznych (skręcających) tylko w kierunku grubości płyty (kierunku Z), przestając być liniowym. Działanie tych momentów skręcających o wielkości D (odniesionej do jednostki szerokości przekroju) na element płyty jest wogóle statycznie równoważne działaniu dwu równych i wprost przeciwnych momentów zginających, o bezwzględnej wartości



Rys. 4.

$$|M| = |D|,$$

na dwa pionowe przekroje nachylone odpowiednio pod kątem 45° względem osi X i Y. Z tego powodu da się sztywność skręcenia $2C$ płyty żel.-betonowej (lub wogóle prostokątnie nierównokierunkowej) wyrazić przez sztywność belkową B' w obu tychże przekrojach widocznie równą. Odpowiadające krzywizny główne różnią się tylko znakiem, a ich wielkość zależy od kąta skręcenia elementu płyty. Oznaczywszy przez $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} dx$ względny kąt skręcenia obu pierwotnie równoległych boków dy elementu pola $dx\, dy$, obranego w odpowiadającej warstwie obojętnej (rys. 5), a przez $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dy$ względny kąt skręcenia drugiej pary boków tegoż elementu, można okazać, że wspólną wartością powyższych krzywizn głównych jest:

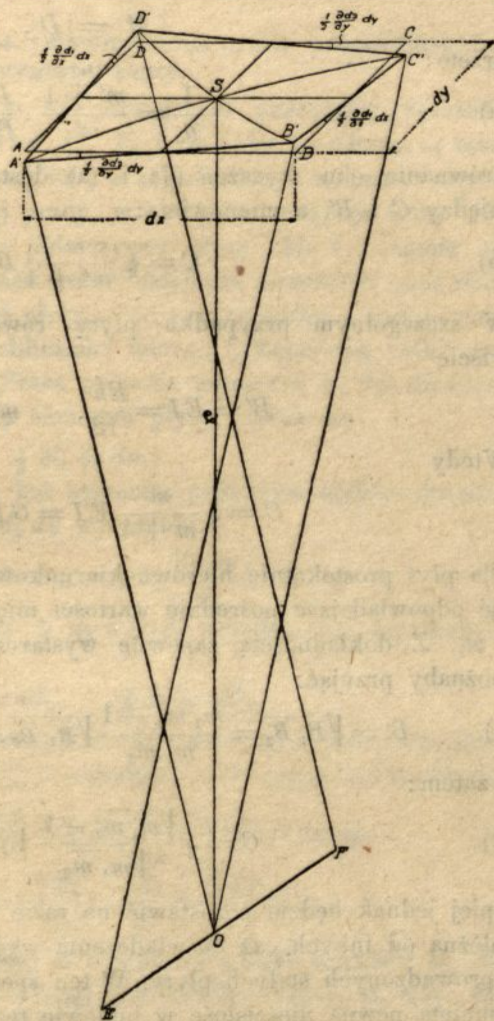
$$(7) \qquad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} = \frac{1}{\varrho_d} = \vartheta' = \cancel{\frac{C}{D}} \cdot \frac{D}{2C}$$

Istotnie, jeżeli poprowadzimy przez wierzchołki odkształconego elementu pola $A'B'C'D'$, leżące na jednej przekątnej, t. j. przez A' i C', oraz przez B' i D', po dwie płaszczyzny prostopadłe do boków, pierwotnie równoległych o wielkości dx, oraz dy, t. j. do boków $A'B'$ i $C'D'$, oraz $A'D'$ i $B'C'$, to te płaszczyzny przecinają się w dwu prostych, leżących po obu stronach płaszczyzny $ABCD$ i zamykają przytem odpowiednio kąty $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} dx$ i $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dy$. Rys. 5 uzmysławia tylko prostą przecięcia się EF płaszczyzny $A'D'FO$ prostopadłej do $A'B'$ z płaszczyzną $B'C'OE$ prostopadłą do $D'C'$. Na tej prostej leży środek krzywizny O zgiętej przekątnej $A'SC'$, a ponieważ obie płaszczyzny tworzą kąt $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dy$, więc:

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dy = \frac{dx}{\varrho_d}.$$

Podobnież otrzymujemy dla promienia krzywizny drugiej przekątnej:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} dx = \frac{dy}{\varrho_d}.$$



Rys. 5.

Jeżeli przekroje przekątne są nawzajem prostopadłe, to $dx = dy$ i dochodzimy bezpośrednio do związku (7). Z drugiej strony wyznacza, według poprzedniego rozważania tę samą krzywiznę wyrażenie:

$$\frac{1}{\varrho_d} = \frac{M}{B'} + \frac{1}{m'} \frac{M}{B'},$$

skoro M i $-M$ oznacza momenty zginające w przekrojach przekątnych, wzajemnie prostopadłych, a m' odpowiadającą sprowadzoną liczbę Poisson'a. Ponieważ przytem jest:

$$|M| = |D|,$$

przeto:

$$\frac{1}{\varrho_d} = \frac{m'+1}{m'} \cdot \frac{D}{B'}. \tag{a}$$

Zrównanie obu wyrażeń (7) i (a) dostarcza szukanego związku między C i B', a mianowicie:

$$C = \tfrac{1}{2} \frac{m'}{m'+1} B'. \tag{b}$$

W szczególnym przypadku płyty równokierunkowej jest oczywiście

$$B' = EI = \frac{Eh^3}{12}, \qquad m' = m.$$

Wtedy

$$C = \tfrac{1}{2} \frac{m}{m+1} EI = GI = \frac{Gh^3}{12}.$$

Dla płyt prostokątnie nierównokierunkowych muszą B' i m' przyjąć odpowiadające pośrednie wartości między B_1 i B_2, względnie m_1 i m_2. Z dokładnością zapewne wystarczającą dla naszych celów możnaby przyjąć:

$$B' = \sqrt{B_1 B_2} = \frac{m_1 m_2 - 1}{m_1 m_2} \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}, \qquad m' = \sqrt{m_1 m_2}, \tag{c}$$

a zatem:

$$C = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{m_1 m_2} - 1}{\sqrt{m_1 m_2}} \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}; \tag{d}$$

lepiej jednak będzie pozostawić na razie wielkość C jako stałą niezależną od innych, aż doświadczenia wyjaśnią związek wszystkich wprowadzonych stałych płyty. W ten sposób będzie także zapewne usunięta pewna nieścisłość w budowie teoryi [1], polegająca na przyjęciu, że przy czystem skręcaniu kwadratowego elementu płyty obadwa przekątne przekroje zlewają się z płaszczyznami głównych krzywizn odpowiadającego elementu powierzchni ugięcia, co jest

[1] Ta nieścisłość nie wywarła na szczęście wpływu na główny wynik teoryi, t. j. na postać równania różniczkowego powierzchni ugięcia (Ob. § 5).

oczywistem tylko w przypadku równości głównych sztywności ($\bar{B}_1 = \bar{B}_2$), względnie w przypadku równokierunkowości materyału płyty.

§ 4. Energia potencyalna (wewnętrzna praca odkształcenia) wygiętej płyty.

Elementy płyty są w najogólniejszym przypadku narażone nadto na siły poprzeczne V_1, V_2 i na siły podłużne; atoli te ostatnie nie wchodzą w rachubę w zagadnieniach rozpatrywanych w dalszym ciągu niniejszej pracy, w których występują tylko siły zewnętrzne prostopadłe do płaszczyzny płyty. Ale i działanie sił poprzecznych można pominąć wobec działania momentów przy obliczeniu energii potencyalnej płyty, i to przynajmniej z tem samem przybliżeniem, z jakiem obliczamy energię potencyalną belki, pomijając energię ścinania. Praca zginania momentu $M_1\, dy$, działającego na ścianę boczną $h\, dy$ elementu płyty, równa się:

$$\tfrac{1}{2} M_1\, dy\, d\alpha_1,$$

jeżeli $d\alpha_1 = dx/\varrho_1$ oznacza kąt zginania; podobnież będzie określać pracę zginania momentu $M_2\, dx$ wyrażenie:

$$\tfrac{1}{2} M_2\, dx\, d\alpha_2 = \tfrac{1}{2} M_2 \frac{dx\, dy}{\varrho_2}.$$

Prace skręcenia momentami $D.dy$ i $D.dx$ przedstawią odpowiednio iloczyny:

$$\tfrac{1}{2} D\, dy . d\vartheta_1, \qquad \tfrac{1}{2} D\, dx . d\vartheta_2.$$

Całkowita energia potencyalna nagromadzona w elemencie płyty objętości $h\, dx\, dy$ będzie tedy, z uwzględnieniem związku (7), równa:

$$d L_i = \tfrac{1}{2} M_1 \frac{dx\, dy}{\varrho_1} + \tfrac{1}{2} M_2 \frac{dx\, dy}{\varrho_2} + D . \vartheta' \, dx\, dy,$$

albo (8) $$d L_i = \tfrac{1}{2} \left(\frac{M_1}{\varrho_1} + \frac{M_2}{\varrho_2} + \frac{2D}{\varrho_d} \right) dx dy.$$

Skoro jeszcze wstawimy z równań (1') i (7) wartości M_1, M_2 i D, tudzież zcałkujemy na całej powierzchni płyty, to wzór dla energii potencyalnej płyty betonowej, równomiernie na krzyż uzbrojonej (lub wogóle płyty prostokątnie nierównokierunkowej podobnego rodzaju), przybierze postać następującą:

(9) $$L_i = \tfrac{1}{2} \int\!\!\int \left[\bar{B}_1 \left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \right) + \bar{B}_2 \left(\frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{m_1} \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \right) + \right.$$
$$\left. + 4C . \frac{1}{\varrho_d^2} \right] dx\, dy.$$

Wielkości ϱ_1, ϱ_2 i ϱ_d są wyznaczone kształtem powierzchni ugięcia. Do ich analitycznego przedstawienia obierzemy jakąkolwiek płaszczyznę środkową płyty za płaszczyznę XY, np. jednę z obu płaszczyzn obojętnych. Oznaczywszy przez ζ ugięcie punktu (x, y) tej płaszczyzny, czyli spółrzędną z powierzchni ugięcia, można z takiem samem, jak w teoryi belek, przybliżeniem napisać:

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{\varrho_1} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$$

Ponieważ dalej prostokąt elementarny $dx\,dy$, leżący w tej płaszczyźnie, zamienia się na czworokąt przestrzenny o prawie tym samym rzucie poziomym, więc pochodne cząstkowe $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ wyznaczają kąty nachylenia boków tego prostokąta, wychodzących z punktu (x, y), względem płaszczyzny XY. Zmiany, jakich doznają te kąty przy przesunięciu o dy, względnie dx, są oczywiście, z wyjątkiem znaku, identyczne z odpowiadającymi kątami skręcenia, a mianowicie:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) dy = d\vartheta_2, \quad -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dx = d\vartheta_1.$$

Stąd bezpośrednio wynika:

$$\text{(b)} \qquad \vartheta' = \frac{1}{\varrho_d} = \frac{d\vartheta_1}{dx} = \frac{d\vartheta_2}{dy} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}$$

Po wstawieniu wartości z obu równań (a) i (b) we wzór dla energii (9). otrzymamy go w następującej postaci:

$$\text{(9')} \quad L_i = \tfrac{1}{2} \int\!\!\int \left[\overline{B}_1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 + \overline{B}_2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{B}_1}{m_2} + \frac{\overline{B}_2}{m_1}\right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \right.$$
$$\left. + 4C \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] \partial x \, \partial y$$

To samo podstawienie przekształca równania zgięcia (1′) równanie skręcenia (7) na

$$\text{(10)} \quad M_1 = -\overline{B}_1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right), \; M_2 = -\overline{B}_2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right),$$

$$D = -2C \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}$$

W szczególnym przypadku płyty jednolitej i równokierunkowej, czyli dla

$$\overline{B}_1 = \overline{B}_2 = E'I,\ C = GI = \tfrac{1}{2}\frac{m}{m+1}EI = \tfrac{1}{2}\frac{m-1}{m}E'I,\ I = \frac{h^3}{12},$$

upraszczają się powyższe wzory i przybierają znaną postać:

$$(11)\quad \left|\begin{aligned} L_i &= \tfrac{1}{2}\int\int E'I\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{2}{m}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \right.\\ &\qquad\left. + 2\,\frac{m-1}{m}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,\\ M_1 &= -E'I\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right),\quad M_2 = -E'I\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right),\\ D &= -\frac{m-1}{m}E'I\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right.$$

§ 5. *Siły poprzeczne i równanie różniczkowe powierzchni ugięcia.*

Odniesione do jednostki szerokości przekroju siły poprzeczne V_1 i V_2 są związane warunkami równowagi z momentami zgięcia i skręcenia. Do obliczenia V_1 posłuży warunek momentów względem jakiejkolwiek osi równoległej do kierunku Y. Poprowadziwszy tę oś przez środek elementu płyty, znajdziemy:

$$M_1 dy - \left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x}dx\right)dy + D dx - \left(D + \frac{\partial D}{\partial y}dy\right)dx + V_1 dy\,.\,\frac{dx}{2} + $$
$$+ \left(V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}dx\right)dy\,.\,\frac{dx}{2} = 0,$$

a stąd otrzymamy pierwsze z równań:

$$(12)\qquad V_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y},\quad V_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}$$

Drugie z tych równań wynika analogicznie z warunku momentów względem osi równoległej do X. Obadwa mają widocznie znaczenie ogólne, są zatem ważne także i dla rozpatrywanych płyt nierównokierunkowych, względnie żel.-betonowych. Po wprowadzeniu w równanie (12) wartości z równań (10), otrzymamy dla sił poprzecznych płyty nierównokierunkowej tego rodzaju wzory następujące:

$$(12') \qquad V_1 = -\bar{B}_1 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} - \left(\frac{\bar{B}_1}{m_2} + 2C\right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x\, \partial y^2},$$

$$V_2 = -\bar{B}_2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} - \left(\frac{\bar{B}_2}{m_1} + 2C\right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2\, \partial y}$$

Jako jedyna niewiadoma we wszystkich dotychczasowych wyrażeniach dla momentów, sił poprzecznych i energii potencyalnej występuje jeszcze ugięcie ζ. To ugięcie należy obliczyć z niewyzyskanego dotąd warunku równowagi, a mianowicie z warunku rzutów na oś Z. Oznaczywszy przez p (w kg/cm²) ciśnienie obciążenia na powierzchnię płyty, mamy tedy według warunku rzutów:

$$p\, dx\, dy - V_2\, dx + \left(V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y} dy\right) dx - V_1 dy + \left(V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x} dx\right) dy = 0,$$

czyli

$$\text{(a)} \qquad p + \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0$$

Stąd, po wstawieniu wartości z równań (12'), wypływa **równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty betonowej, równomiernie na krzyż uzbrojonej**, lub też wogóle płyty prostokątnie nierównokierunkowej podobnego rodzaju, w postaci:

$$(13) \qquad \bar{B}_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2\, \partial y^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = p$$ [1]

jeżeli dla skrócenia wprowadzimy oznaczenie:

$$(13\text{a}) \qquad 2H = \frac{\bar{B}_1}{m_2} + \frac{\bar{B}_2}{m_1} + 4C.$$

W szczególnym przypadku płyty jednolitej i równokierunkowej, t. j. dla

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = E'I, \quad m_1 = m_2 = m, \quad C = \tfrac{1}{2} \frac{m-1}{m} E'I,$$

[1] Z ogólnych badań Boussinesq'a J., ogłoszonych już w roku 1879 w Journ. de Math. t. V, str. 329—344, okazuje się, że wyprowadzone tutaj równanie różniczkowe (13) jest **ściśle ważne** pod warunkiem, że osie spółrzędnych są głównemi osiami sprężystości nierównokierunkowego materyału płyty.

przybiera to równanie znaną postać następującą:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p}{E'I}. \tag{14}$$

§ 6. Warunki krańcowe. Płyty z blachy falistej, żel.-betonowe stropy żebrowane i kraty belkowe.

Pozostaje jeszcze rozpatrzyć kwestyę warunków krańcowych. Ale widać odrazu, że te warunki są zupełnie niezależne od struktury płyty i że się nie zmieniają, jeżeli przechodzimy od płyty równokierunkowej do nierównokierunkowej. Ponieważ tę ważną i nader interesującą kwestyę traktowano już wyczerpująco w nowszej literaturze płyt równokierunkowych, więc nie ma koniecznej potrzeby rozpatrywania jej tutaj. Czytelnik nieobznajomiony z przedmiotem, zechce przestudyować np. odpowiadające miejsce w cennej monografii dra A. Nádai'a, przytoczonej już powyżej.

Podobnie jak teoryę cienkich prętów pryzmatycznych uogólniono w technicznej nauce o sprężystości i wytrzymałości z praktycznie wystarczającem przybliżeniem dla prętów o słabo zmiennym przekroju, tak też można ustawione powyżej równania płyty prostokątnie nierównokierunkowej o stałej grubości zastosować do przypadku grubości słabo zmiennej (względnie zmiennego uzbrojenia). Trzeba tylko współczynniki $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2, \ldots$, uważane dotychczas za stałe, traktować jako funkcye miejsca na płaszczyźnie XY. — Uzbrojenie płyty żel.-betonowej nie jest zwykle rozłożone zupełnie równomiernie na całej płycie, już z powodu odginania prętów w miejscach, gdzie momenty zginające zmieniają znak. Atoli z tego tylko powodu nie należy powątpiewać w stosowalność ogólnej teoryi przy upraszczającem założeniu równomierności uzbrojenia, byleby tylko części prętów w obszarze ujemnych momentów były tak samo ułożone względem rozciąganej warstwy betonu, jak części leżące w obszarze momentów dodatnich (do czego oczywiście praktyka zdąża), a nadto, o ile obciążenie, przyjęte za podstawę obliczenia, warunkuje w przybliżeniu to samo rozgraniczenie obu obszarów, jakie odpowiada konstrukcyjnemu wykonaniu. Doświadczenia ze statycznie niewyznaczalnemi belkami żel.-betonowemi potwierdziły, jak wiadomo, wcale dobrze odpowiadające wywody teoretyczne, chociaż przy obliczeniu odpowiadających statycznie niewyznaczalnych sił i momentów zakładano stałość wielkości przekrojowych wzdłuż belki. To nie było jednakże całkiem zgodne z rzeczywistością, gdyż podłużne uzbrojenie objektów doświadczalnych było, jak zwykle, dostosowane do linii momentów[1].

Podobnież należy się spodziewać, że i doświadczenia z żel.-betonowemi płytami potwierdzą główne wyniki dalszych teoretycznych wywodów niniejszej pracy, bez względu na pewne zboczenia rzeczywistych płyt od uproszczonych założeń rachunku A już zgoła podrzędne znaczenie ma np. fakt, iż w obszarach dodatnich i ujemnych momentów zgięcia mogą odpowiadające warstwy obojętne leżeć w różnej wysokości i nie będą wogóle zlewać się z płaszczyzną XY. To oczywiście nie będzie miało żadnego dostrzegalnego wpływu na obliczenie ugięć ζ. Przy pomiarze ugięcia jest bowiem praktycznie wszystko jedno, czy wyznaczymy pionowe przesunięcie punktu górnej czy też odpowiedniego punktu dolnej powierzchni płyty, ponieważ zmiany grubości wskutek obciążenia można zawsze pominąć w porównaniu do ugięć u płyt niezbyt grubych.

Jak w odpowiadających miejscach zaznaczono, są podstawowe równania teoryi płyt żel.-betonowych ogólnie ważne dla wszelkich płyt nierównokierunkowych o prostokątnej symetryi struktury, a więc np. dla płyt drewnianych i szyb ze szkła drutowego. Podobnież da się ogólna teorya zastosować dobrze i do odpowiednio zbudowanych płyt z materyału równokierunkowego, jakiemi są płyty z blachy falistej i dostatecznie gęste kraty belkowe. Potrzeba tylko w każdym szczególnym przypadku przypisać stałym $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, m_1, .. odpowiadające wartości, wyznaczone teoretycznie lub doświadczalnie.

Jeżeli np. w przypadku blachy falistej obierzemy kierunek tworzących powierzchni blachy za oś Y, to z zupełnie wystarczającą dokładnością będzie płytowa sztywność zginania

$$\bar{B}_2 = EI_2,$$

przyczem E oznacza moduł sprężystości materyału blachy, a I_2 moment bezwładności przekroju jednej fali, podzielony przez jej długość. Albowiem zgięcie w płaszczyźnie XZ ma teraz bardzo mały wpływ na zgięcie w płaszczyźnie YZ, o ile grubość blachy jest dość mała w porównaniu do wysokości fali. Płytowa sztywność

[1] Prof. Dr Ing. E. Mörsch, „Der Eisenbetonbau", wyd. IV, 1912, str. 349 do 361.

zginania B_1 będzie oczywiście mniejsza od takiejże sztywności płaskiej blachy o tej samej grubości δ, a mianowicie w stosunku rzeczywistej długości fali do długości jej krzywej linii środkowej. Jeżeli przez a_0 oznaczymy pierwotną długość prostokątnej płaskiej blachy, którą zamieniono następnie przez pofałdowanie w kierunku szerokości na blachę falistą o długości a (bez zmiany grubości blachy δ), to

$$\overline{B}_1 = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{\delta^3}{12},$$

Dokładność tego wyrażenia dla $\overline{B}_1$ jest widocznie tem większa, im mniejsze jest δ w porównaniu do promienia krzywizny ϱ_w fali. Natomiast sztywność skręcania będzie większa od tej, która odpowiada płaskiej płycie o grubości δ, a mianowicie mniej więcej w stosunku $a_0 : a$ i to znowu tem dokładniej, im mniejsze jest $\delta : \varrho_w$. A zatem:

$$C = \frac{a_0}{a} G \frac{\delta^3}{12},$$

jeżeli $G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$ oznacza moduł sprężystości postaciowej materyału blachy. Związki między momentami zgięcia i promieniami krzywizny powierzchni ugięcia (rów. 1, wzgl. 10), przybierają teraz następującą uproszczoną postać:

$$(10^*) \qquad M_1 = \frac{\overline{B}_1}{\varrho_1} = -\overline{B}_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad M_2 = \frac{\overline{B}_2}{\varrho_2} = -\overline{B}_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$$

Dodawszy do tego wyrażenie dla momentu skręcenia w niezmienionej widocznie postaci:

$$D = -2C \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y},$$

łatwo zrozumieć, że we wzorach ogólnej teoryi trzeba przyjąć $1/m_1 = 1/m_2 = 0$, aby otrzymać odpowiadające wzory dla płyt z blachy falistej. W szczególności będzie stała

$$H = 2C.$$

Z wystarczającem dla wszelkich praktycznych celów przybliżeniem można ogólną teoryę zastosować także bezpośrednio do zwykłych żel.-betonowych stropów żebrowanych i t. p., o ile odstęp żeber jest dość mały w porównaniu do ich rozpiętości. Wtedy jednakże trzeba uwzględnić tę okoliczność, że średnia sztywność zginania płyty $\overline{B}_1$ w płaszczyźnie XZ, prostopadłej do żeber, musi być większa, aniżeli odpowiadająca sztywność zginania $\overline{B}_1^P$, samej płyty. Oznaczywszy przez a odstęp żeber w świetle, przez g (górną) szerokość żebra, a przez $\overline{B}_1^R$ odniesioną do jednostki szerokości przekroju sztywność zginania pomyślanej płyty, utworzonej ze zsuniętych razem żeber, znajdziemy jako wartość kąta zgięcia na długości $a+g$, odpowiadającą stałemu momentowi zgięcia $M_1 = 1$:

$$\alpha = \frac{a+g}{\overline{B}_1} = \frac{a}{\overline{B}_1^P} + \frac{g}{\overline{B}_1^R},$$

a stąd

$$\overline{B}_1 = \overline{B}_1^P \cdot \frac{a+g}{a + \dfrac{\overline{B}_1^P}{\overline{B}_1^R}\, g}$$

Ponieważ w przybliżeniu jest $\overline{B}_1^P : \overline{B}_1^R = h^3 : h_R^3$, jeżeli h_R oznacza wysokość żeber, więc można pominąć w mianowniku wielkość $\overline{B}_1^P g : \overline{B}_1^R$ wobec a i napisać z dostateczną dokładnością:

$$(14{,}1) \qquad \overline{B}_1 = \sim \overline{B}_1^P \left(1 + \frac{g}{a}\right)$$

Nietrudno ocenić średnią wartość $\overline{B}_1$ także w przypadku, gdy grubość płyty między żebrami się zmienia.

Uogólnione liczby Poisson'a $\frac{1}{m_1}$ i $\frac{1}{m_2}$ będą oczywiście w obu przypadkach wcale małe, podobnie jak dla płyt z blachy falistej, i można je w przybliżeniu przyjąć równe zeru.

Chcąc rachować dokładniej, musimy obrać tę samą drogę, co w § 2, a mianowicie: Przy działaniu momentu zginającego M_1 na element samej płyty, powstałaby w płaszczyźnie XZ krzywizna $\frac{M_1}{\overline{B}_1^P}$ (jeżeli $\overline{B}_1^P$ oznacza belkową sztywność zginania skrawków X płyty), a w płaszczyźnie YZ krzywizna $-\frac{1}{m_1^P} \cdot \frac{M_1}{\overline{B}_1^P}$. — (Wszystkie wielkości odnoszące się do samej płyty odróżnimy tutaj wskaźnikiem P u góry). Połączenie z żebrami ma ten skutek, że dla płyty żebrowanej zmniejsza się pierwsza krzywizna w stosunku $\overline{B}_1^P$ do $\overline{B}_1$, czyli przybiera wartość $\frac{M_1}{B_1}$. Na krzywiznę poprzeczną mają żebra wpływ znacznie silniejszy, redukując ją mianowicie w stosunku $B_2^p : B_2$. Ta krzywizna przybiera tedy wartość

$$-\frac{1}{m_1^p}\cdot\frac{B_2^p}{B_2}\cdot\frac{M_1}{B_1^p} = -\frac{1}{m_1^p}\,\frac{B_2^p}{B_2}\,\frac{a+g}{a}\cdot\frac{M_1}{B_1}.$$

Działanie momentu zginającego M_2 wywołuje w płaszczyźnie YZ krzywiznę płyty żebrowanej o wielkości $\frac{M_2}{B_2}$, a w płaszczyźnie XZ krzywiznę $-\frac{1}{m_2}\cdot\frac{M_2}{B_2}$. Ale z momentu M_2 przenosi się widocznie tylko część o wielkości $\frac{B_2^p}{B_2} M_2$ na płytę, a tej części odpowiada poprzeczna krzywizna płyty $-\frac{1}{m_2^p}\cdot\frac{B_2^p}{B_2}\cdot\frac{M_2}{B_2^p} = -\frac{1}{m_2^p}\cdot\frac{M_2}{B_2}$. Dla odpowiadającej krzywizny poprzecznej płyty żebrowanej wypada podobnie jak powyżej przyjąć wartość $\frac{1}{m_2^p}\cdot\frac{a}{a+g}\cdot\frac{M_2}{B_2}$. Stąd wypływają dla płyty żebrowanej w kierunku Y następujące przybliżone wartości uogólnionych liczb Poisson'a:

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_1^p}\,\frac{B_2^p}{B_2}\cdot\frac{a+g}{a},\quad \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_2^p}\cdot\frac{a}{a+g}.$$

Z nich, jak widać odrazu, tylko właściwie $\frac{1}{m_1}$ można pominąć bez skrupułów wobec 1, podczas gdy $\frac{1}{m_2}$ bywa nie wiele mniejsze od odpowiadającej uogólnionej liczby Poissona dla gładkiej płyty.

Pozostaje jeszcze wyrazić średnią sztywność skręcania $2C$ płyty żebrowanej przez sztywność skręcania $2C^p$ samej płyty (bez żeber) i takąż sztywność żebra C^R (odniesioną podobnie jak C, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2 \ldots$ do jednostki szerokości przekroju). Otóż po prostu możemy napisać z wystarczającem przybliżeniem

$$2C = \frac{2C^p . a + C^R . g}{a+g} = 2\,C^p + \frac{g}{a+g}\,C^R = 2C^p + \frac{C_r}{a+g},$$

jeżeli C_r oznacza bezwzględną sztywność skręcania jednego żebra.

Zagadnienie gęstych prostokątnych krat belkowych traktowano już dawno, ale z pominięciem pracy skręcenia, t. j. na podstawie równania różniczkowego równowagi o postaci:

$$\bar{B}_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \bar{B}_2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = p. \tag{15}$$

Odpowiadające rozwiązania zastosowano w nowszych czasach do płyt betonowych uzbrojonych na krzyż [1]. Dość grube przybliżenie wyników, otrzymanych tym sposobem w niektórych zadaniach, nie odpowiada jednakże matematycznemu aparatowi, jakiego wypadło użyć. Prawda, że rozwiązanie powyższego równania różniczkowego zgadza się z rozwiązaniem ogólnego równania (13) w trywialnym przypadku walcowego zgięcia w jednej z płaszczyzn głównych, a im mniejszą rolę grają momenty skręcające, tem mniejszą wogóle będzie liczbowa różnica obu rozwiązań, atoli ta różnica osiąga w praktycznych przypadkach najczęściej zbyt wielkie wartości, aby usprawiedliwić ogólne stosowanie równania różniczkowego (15).

§ 7. Kwestya stosowalności dotychczasowych rozwiązań równania różniczkowego płyty równokierunkowej. Ściślejsze traktowanie zagadnienia krat belkowych. Trudności przy zastosowaniu ogólnej teoryi do płyt żel.-betonowych.

Równanie różniczkowe równowagi płyty jednolite i równokierunkowej ma, jak wiadomo, postać:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p}{\bar{B}}, \tag{14'}$$

jeżeli

$$\bar{B} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12}$$

oznacza płytową sztywność przy (walcowem) zginaniu. Nasuwa się pytanie, pod jakimi warunkami można rozwiązanie tego równania różniczkowego zużytkować do rozwiązania ogólniejszego równania

[1] Calcul des hourdis en béton armé. Note jointe à l'avis du Conseil Général des Ponts et Chaussées. Ann. d. P. et Ch. 1912, VI.

różniczkowego (13). Łatwo się przekonać, że, skoro między stałemi $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ i H zachodzi prosty związek:

$$\text{(a)} \qquad H = \sqrt{\overline{B}_1 \, \overline{B}_2},$$

to równanie różniczkowe (13) przekształca się na postać (14') zapomocą podstawienia:

$$x = x' \sqrt[4]{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}}}, \qquad y = y' \sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}}}.$$

W tym więc przypadku zachodzi związek pokrewieństwa między powierzchniami ugięcia płyty nierównokierunkowej i odpowiadającej płyty równokierunkowej. Tak np. odpowiada kulistemu zgięciu płyty równokierunkowej, elipsoidalne zgięcie płyty nierównokierunkowej, o ile zachodzi związek (a). Dla równomiernie obciążonej płyty prostokątnej o wymiarach a i b wypada, jak zobaczymy poniżej, rozwiązanie równania różniczkowego (14) w postaci:

$$\zeta = \frac{q\, b^4}{\overline{B}} \, \Psi\left(\frac{b}{a}, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right).$$

Gdy warunek (a) jest spełniony, to można stąd według powyższego otrzymać wprost odpowiadające rozwiązanie ogólniejszego równania (13). Wystarcza w tym celu zastąpić $\overline{B}$ przez $\overline{B}_2$, a przez $a \sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}$ i x przez $x \sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}$. Skoro obliczono liczebne wartości funkcyi Ψ przy różnych wielkościach argumentów $\frac{b}{a}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ dla płyty równokierunkowej, to te wartości pozostają ważne i dla równych odpowiadających wielkości $\frac{b}{a}\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ danej płyty nierównokierunkowej o wymiarach a i b.

Powyższa okoliczność jest doniosłego znaczenia dla teoryi płyt żel.-betonowych. albowiem związek (a) zachodzi zapewne przynajmniej w przybliżeniu, w licznych praktycznych przypadkach. Ostatniego słowa w tej sprawie należy oczywiście oczekiwać od wyników doświadczeń.

Na podstawie przyjęcia zrobionego w § 3 co do sztywności skręcania płyty żel.-betonowej, wynika łatwo związek:

$$\text{(b)} \qquad H = \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2} + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{m_2}} - \sqrt{\frac{\bar{B}_2}{m_1}}\right)^2.$$

Stosownie do tego byłoby wogóle

$$H > \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2},$$

a tylko w szczególnym przypadku, gdy spełnia się warunek

$$\frac{\bar{B}_1}{m_2} = \frac{\bar{B}_2}{m_1},$$

będzie jednocześnie $H = \sqrt{\bar{B}_2 \bar{B}_1}$.

Inaczej ma się rzecz u prostokątnych krat z belek nitowanych i t. p, ponieważ takie belki objawiają z reguły tylko małą sztywność skręcania w porównaniu do sztywności zginania, jakoteż znikomo małe sprowadzone liczby Poisson'a $\frac{1}{m_1}$ i $\frac{1}{m_2}$. W tym przypadku jest

$$H < \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$$

i może będzie przyjąć, tak samo, jak dla płyt z blachy falistej

$$H = 2C.$$

Jeżeli $2C_1$ i $2C_2$ oznacza odpowiednio sztywność skręcenia belek X i Y kraty, odniesioną do jednostki szerokości przekroju, to trzeba oczywiście przyjąć:

$$2C = C_1 + C_2.$$

Już teraz widać, że stosunek $H : \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$ musi w ogólnej teoryi grać ważną rolę. Nazwiemy go charakterystyką (sztywności) płyty i wprowadzimy dlań oznaczenie:

$$\frac{H}{\sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}} = \eta.$$

Dla płyt żel.-betonowych będzie najczęściej $\eta > 1$, w przypadku równokierunkowości materyału płyty staje się $\eta = 1$ a dla płyt z blachy falistej, krat belkowych i t. d. będzie $\eta < 1$.

Główną trudność, jaką napotykamy przy stosowaniu ogólnej teoryi do uzbrojonych płyt betonowych, nastręczają, jak już zaznaczyłem powyżej, znaczne zboczenia betonu od prawa Hooke'a. Ta trudność wychodziła na jaw już przy licznych doświadczeniach ze zginaniem żel.-betonowych belek; obserwowane ugięcia pod obciążeniem 1 do 2 razy większem od użytkowego były bowiem 3 do 2 razy mniejsze od obliczonych, skoro, jak to się czyni w praktyce, wyznaczono sztywność zgięcia na podstawie tych założeń upraszczających, jakie z wystarczającą dokładnością odpowiadają dopiero tak zwanej fazie II b. przy zginaniu. Do tych założeń należą, jak wiadomo:

1) Pominięcie ciągnień w betonie;

2) liniowy rozkład ciśnień;

3) $n = 15$ jako średnia wartość stosunku $E_f : E_b$.

Samemu obciążeniu użytkowemu będzie niewątpliwie odpowiadać lepiej przyjęcie fazy I, atoli przy zwiększaniu obciążenia nie może żadne z obu powyższych założeń uczynić zadość najskromniejszym wymaganiom co do dokładności, ponieważ przejście między warunkami obu faz, tak znacznie różniącymi się nawzajem, zachodzi naturalnie w sposób ciągły. Zadowalająca do pewnego stopnia zgodność obliczonych i obserwowanych wielkości dałaby się może osiągnąć przez przyjęcie zmiennej i od naprężenia skrajnego w betonie zależnej średniej wartości E_b w całym przekroju belki. Jeszcze bardziej wikła się sprawa u uzbrojonych płyt betonowych, po części z powodu dwu wymiarowego stanu napięcia, częścią zaś wskutek nieskończenie wielokrotnej statycznej niewyznaczalności działania płytowego. Doświadczenia muszą przedewszystkiem wyjaśnić, czy w elemencie płyty, narażonym na momenty M_1 i M_2, faza II b warunkuje zawsze obie sztywności zginania jednocześnie, albo też, czy jest możliwem, aby sztywność zginania, odpowiadająca większemu, względnie niebezpieczniejszemu momentowi, osiągnęła już fazę II b, a druga pozostała równocześnie jeszcze w fazie wcześniejszej. Jest bowiem rzeczą jasną, że odpowiedź na to pytanie będzie miała wielki wpływ na znaczenie działania płytowego, ponieważ sztywność zginania ubywa znacznie w po sobie następujących fazach.

W fazie I określa sprowadzony moment bezwładności przy jednostronnem uzbrojeniu łatwy do wyprowadzenia wzór:

$$I' = \frac{h}{12}\left[h^2 + 12\left(\frac{h}{2} - c\right)^2 \frac{nf'}{h + nf'}\right]^1, \tag{16}$$

[1] Biorąc ściśle, należy tutaj zastąpić n przez $(n - 1)$, albowiem w przekroju nie ma betonu tam, gdzie znajduje się żelazo. Powyższy wzór wyprowadza się najprościej, obliczając najpierw moment bezwładności I' względem prostej połowiącej grubość płyty h. Oznaczywszy przez z_0 odległość tej linii od środka ciężkości sprowadzonego przekroju F, mamy, jak wiadomo:

w którym c oznacza osiową odległość prętów uzbrojenia od krawędzi przekroju a f' pole przekroju tych prętów, przypadające na jednostkę szerokości przekroju. Odpowiadającą odległość z osi obojętnej od ściskanej warstwy skrajnej (po nieuzbrojonej stronie przekroju) daje równanie:

$$z - \frac{h}{2} = \left(\frac{h}{2} - c\right)\frac{h}{h + nf'}.$$

Natomiast dla fazy IIb jest, jak wiadomo:

$$z = nf'\left(\sqrt{1 + \frac{2h_1}{nf'}} - 1\right)$$

$$I^{(IIb)} = \frac{z^3}{3} + nf'(h_1 - z)^2,\ ^1 \qquad (17)$$

jeżeli $h_1 = h - c$.

Ta wartość I musi być zawsze o wiele mniejszą od poprzedniej, a nadto odpowiada fazie IIb mniejsza wartość E_b niż fazie I. Np. dla obu głównych przekrojów płyty na krzyż uzbrojonej, przedstawionych na rys. 6, otrzymujemy według wzoru (16) przy wartości $n = 10$:

$$I_1 = 147{,}65\ cm^3, \quad I_2 = 155{,}86\ cm^3, \quad I_2 : I_1 = 1{,}06;$$

$$I = I' - Fz_0^2.$$

Tym sposobem znajdujemy najpierw:

$$I' = \frac{h^3}{12} + (n-1)f'\left(\frac{h}{2} - c\right)^2,$$

następnie

$$z_0 = \frac{(n-1)f'\left(\frac{h}{2} - c\right)}{h + (n-1)f'},$$

tudzież

$$I = \frac{h^3}{12} + (n-1)f'\left(\frac{h}{2} - c\right)^2 - \frac{(n-1)^2 f'^2\left(\frac{h}{2} - c\right)^2}{h + (n-1)f'},$$

a stąd po uproszczeniu wzór (16) z wielkością $(n-1)$ zamiast n.

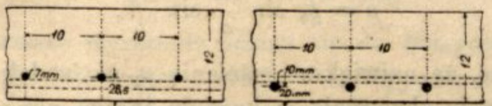
[1] Po wstawieniu powyższej wartości z i uproszczeniu przybierze ten wzór następującą postać:

$$I^{IIb} = \frac{nf'}{3}\left[3(h_1 + nf')^2 - 2(2h_1 + nf')\sqrt{nf'(2h_1 + nf')} - n^2 f'^2\right] \qquad (17')$$

a według wzoru (17) przy $n = 15$:

$$I_1 = 30{,}27, \quad I_2 = 63{,}84, \quad I_2 : I_1 = 2{,}11.$$

Wpływ uzbrojenia na sztywność zginania jest zatem z początku stosunkowo mały i rośnie dopiero silnie ze zbliżeniem do fazy IIb, t. zn. z powiększeniem obciążenia.



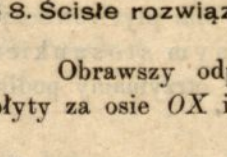
Rys. 6.

Gdyby było możliwem, ażeby B_2 już się zbliżało do fazy IIb podczas gdy B_1 pozostaje jeszcze w pobliżu fazy I, to stosunek $I_2 : I_1$ mógłby osiągnąć nawet wartości, graniczące z $63{,}8 : 147{,}7 = 0{,}43$. Tak wielkie wahania stosunku $I_2 : I_1$, względnie $B_2 : B_1$ grającego widocznie w teoryi płyt żel.-betonowych nader ważną rolę, powinnyby przy doświadczeniach wyjść na jaw bardzo wyraźnie; w § 10 będzie jeszcze o tem mowa.

II. Płyta prostokątna swobodnie podparta na całym obwodzie.

§ 8. Ścisłe rozwiązanie w przypadku obciążenia sinusowego.

Obrawszy odpowiednio boki a i b prostokątnego konturu płyty za osie OX i OY układu spółrzędnych (rys. 7), przyjmiemy jako równanie powierzchni ugięcia prostą funkcyę:



Rys. 7

$$\zeta = f \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

czyniącą zadość warunkom krańcowym:

$\zeta = 0$ dla $x = 0$, $x = a$; $y = o$, $y = b$ i

$\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0$, a więc $M_1 = 0$, $M_2 = 0$ dla

$$x = 0, \; x = a; \quad y = 0, \; y = b.$$

Po wstawieniu w równanie różniczkowe (13) znajdujemy

$$\pi^4\left(\frac{B_1}{a^4}+\frac{2H}{a^2b^2}+\frac{B_2}{b^4}\right)f\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}=p$$

jako równanie odpowiadającej powierzchni obciążenia. To równanie można napisać w postaci:

$$p=p_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

z której widać, że największe ciśnienie p_0 na środek płyty określa zupełnie ciśnienie obciążenia w każdym innym punkcie powierzchni płyty. Z porównania obu powyższych wyrażeń dla p wypada dla strzałki ugięcia f wzór:

(a) $$f=\frac{a^2b^2p_0}{\pi^4\left(\frac{b^2}{a^2}B_1+2H+\frac{a^2}{b^2}B_2\right)}$$

Przy pomocy oznaczeń

$$\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}}=\varepsilon,\quad \frac{H}{\sqrt{B_1B_2}}=\eta$$

przekształci się wzór powyższy na następujący:

(a') $$f=\frac{1}{\pi^4}\frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^4+2\varepsilon^2\eta+1}\cdot\frac{p_0b^4}{B_2}$$

Nowo wprowadzona wielkość ε gra w teoryi płyt nierównokierunkowych tę samą rolę, co stosunek $a:b$ dla płyt równokierunkowych. Dlatego nazwiemy ε *sprowadzonym stosunkiem boków*. Dla momentów i sił poprzecznych otrzymamy podług wzorów (10) wyrażenia:

(18) $$\left|\begin{aligned}
M_1&=\pi^2B_1\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{m_2b^2}\right)f\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\\
M_2&=\pi^2B_2\left(\frac{1}{m_1a^2}+\frac{1}{b^2}\right)f\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\\
D&=-2\pi^2C\frac{f}{ab}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},\\
V_1&=\pi^3\left[\frac{B_1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{B_1}{m_2}+2C\right)\right]\frac{f}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\\
V_2&=\pi^3\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{B_2}{m_1}+2C\right)+\frac{B_2}{b^2}\right]\frac{f}{b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}
\end{aligned}\right.$$

Reakcye podporowe, identyczne z odpowiadającemi siłami poprzecznemi na brzegach płyty są następujące:

$$
(19)\left\{\begin{aligned}
R_1' &= -(V_1)_{x=0} = (V_1)_{x=a} = -\pi^3\left[\frac{B_1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{B_1}{m_2} + 2C\right)\right]\frac{f}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\
R_2' &= -(V_2)_{y=0} = (V_2)_{y=b} = -\pi^3\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{B_2}{m_1} + 2C\right) + \frac{B_2}{b^2}\right]\frac{f}{b}\sin\frac{\pi x}{a}
\end{aligned}\right.
$$

przyczem pierwsze wyrażenie odnosi się do brzegów płyty o długości b, a drugie do brzegów o długości a. Wypadkowa tych reakcyj

$$
2\int_0^a R_2'\,dx + 2\int_0^b R_1'\,dy = -4\pi^2 abf\left(\frac{B_1}{a^4} + \frac{2H}{a^2b^2} + \frac{B_2}{b^4}\right) = -\frac{4}{\pi^2}ab\,p_0
$$

znosi się wprawdzie z całkowitem obciążeniem

$$
P = \int_0^a\int_0^b p_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{4}{\pi^2}ab\,p_0,
$$

ale ponieważ momenty skręcające D nie znikają na podpartych brzegach płyty, więc muszą powstać jeszcze reakcye dodatkowe, tworzące dla siebie układ sił w równowadze. Według twierdzenia Kelvin'a i Tait'a[1] ten układ składa się z rozmieszczonych wzdłuż brzegu reakcyj dodatkowych o wielkości

$$
R_1'' = -\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)_{x=a}
$$

dla boków b,

$$
R_2'' = -\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{y=b}
$$

dla boków a i ze skupionych reakcyj narożnych

$$
\hat{R} = -2(D)_{\substack{x=0\\y=0}} = 2(D)_{\substack{x=0\\y=b}} = -2(D)_{\substack{x=a\\y=b}} = 2(D)_{\substack{x=a\\y=0}} = 4\pi^2 C\frac{f}{ab},
$$

skierowanych pionowo w dół. W przypadkach konkretnych, kiedy brzegi płyty wystają poza proste podporowe, można te narożne reakcye zastąpić statycznie równowartemi siłami i momentami, roz-

[1] Wyczerpujący wykład tego nader ważnego twierdzenia teoryi płyt znajdzie czytelnik w powyżej przytoczonej pracy A. Nádai'a.

mieszczonemi w pobliżu rogów płyty w nieskończenie różnorodny sposób. Całkowite reakcye przedstawią przeto następujące wzory:

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
&R_1 = R_1' + R_1'' = -\pi^3 \left[\frac{\bar{B}_1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\bar{B}_1}{m_2} + 4C\right)\right] \frac{f}{a} \sin\frac{\pi y}{b},\\
&\qquad\text{(właściwa reakcya podporowa brzegów } b),\\
&R_2 = R_2' + R_2'' = -\pi^3 \left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{\bar{B}_2}{m_1} + 4C\right) + \frac{\bar{B}_2}{b^2}\right] \frac{f}{b} \sin\frac{\pi x}{a},\\
&\qquad\text{(właściwa reakcya podporowa brzegów } a),\\
&\hat{R} = 4\pi^2 C \frac{f}{ab}\\
&\qquad\text{(reakcya narożna).}
\end{aligned}
\right.
$$

Istnienie narożnej reakcyi jest, jak widać uwarunkowane sztywnością skręcenia płyty. Te reakcye znikłyby przy dowolnem obciążeniu, gdyby było $C = 0$, nie wystąpiłyby zatem u krat belkowych, dla których obowiązuje, co prawda tylko w przybliżeniu, równanie różniczkowe (15). Ale i u płyt podpartych na obwodzie w zwykły sposób, t. j. tylko od spodu, nie mogą oczywiście powstać narożne reakcye; wtedy jednak muszą rogi płyty podnieść się wskutek obciążenia. To pociągnie za sobą małe zwiększenie strzałki ugięcia i największych momentów (w środku płyty), ale za to dość znaczną zmianę charakteru powierzchni ugięcia i rozkładu, oraz wielkości reakcyj podporowych brzegów płyty.

Z równań (18) znajdujemy z uwzględnieniem poprzedniego wyrażenia dla f następujące wzory dla największych wartości momentów zginających w środku płyty[1]:

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
&M_{1\,max} = \frac{p_0}{\pi^2}\,\frac{\left(\frac{a^2}{m_2} + b^2\right)\bar{B}_1}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2} = \frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{1 + 2\varepsilon^2\eta + \varepsilon^4}\cdot\frac{p_0 a^2}{\pi^2},\\
&M_{2\,max} = \frac{p_0}{\pi^2}\cdot\frac{\left(a^2 + \frac{b^2}{m_1}\right)\bar{B}_2}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2} = \frac{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 + \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)}{1 + 2\varepsilon^2\eta + \varepsilon^4}\cdot\frac{p_0 b^2}{\pi^2}
\end{aligned}
\right.
$$

[1] Aby nie zwiększać zbytnio objętości publikacyi i uczynić ją bardziej przejrzystą, opuszczono po największej części rachunki pomocnicze; wszystkie

Największe reakcye podporowe, a zarazem największe (bezwzględnie biorąc) siły poprzeczne, panują w środkach boków prostokąta, t. j. w punktach $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ i $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Ich wartości są według równań (20):

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
|R_1|_{max} &= \frac{p_0}{a\pi}\cdot\frac{\left(\frac{a^2}{m_2}+b^2\right)\bar{B}_1+4a^2C}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1+2H+\frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2},\\
|R_2|_{max} &= \frac{p_0}{b\pi}\cdot\frac{\left(a^2+\frac{b^2}{m_1}\right)\bar{B}_2+4b^2C}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1+2H+\frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2},
\end{aligned}
$$

albo po wprowadzeniu sprowadzonego stosunku boków ε i charakterystyki sztywności płyty η, tudzież przy uwzględnieniu związku (13a) między stałemi płyty:

$$
(22')\qquad
\begin{aligned}
|R_1|_{max} &= \frac{p_0 a}{\pi}\cdot\left\{1-\frac{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2+\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)}{1+2\varepsilon^2\eta+\varepsilon^4}\right\},\\
|R_2|_{max} &= \frac{p_0\cdot b}{\pi}\cdot\left\{1-\frac{1+\frac{\varepsilon^2}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{1+2\varepsilon^2\eta+\varepsilon^4}\right\}
\end{aligned}
$$

W dowolnym punkcie boków b i a mamy tedy:

$$
(23)\qquad R_1 = -|R_1|_{max}\cdot\sin\frac{\pi y}{b},\quad R_2 = -|R_2|_{max}\cdot\sin\frac{\pi x}{a},
$$

z czego znajdziemy wartości całkowitego obciążenia $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ prostych podporowych b i a przez całkowanie, a mianowicie:

wyprowadzone wzory kontrolowano zato różnemi drogami, tak iż mogą zawierać chyba tylko błędy drukarskie. Tym sposobem można było objętość pracy zredukować co najmniej do połowy.

(24) $$\bar{R}_1 = \int_0^b R_1\, dy = -\frac{2b}{\pi}\left|R_1\right|_{max}, \quad \bar{R}_2 = \int_0^a R_2\, dx = -\frac{2a}{\pi}\left|R_2\right|_{max}$$

Nakoniec narożna reakcya

(25) $$\hat{R} = \frac{4ab}{\pi^2}\cdot\frac{p_0 C}{\frac{b^2}{a^2}B_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}B_2}$$

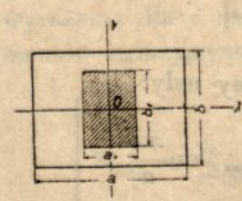
albo, ze względu na związek (13a):

(25′) $$\hat{R} = \frac{p_0 ab}{\pi^2}\cdot\frac{2\eta - \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{B_2}{B_1}} - \frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}}{\varepsilon^2 + 2\eta + \frac{1}{\varepsilon^2}}$$

Na podstawie powyższych wzorów można, w razie potrzeby, wykonać wszystkie obliczenia wytrzymałości.

§ 9. Przybliżone rozwiązanie w przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego. Zwiększenie odporności płyty wskutek wystawania poza linie podporowe.

Tem rozwiązaniem zajmowało się już pierwsze opracowanie ogólnej teoryi, cytowane powyżej. Ono polega na przyjęciu, że sinusowa powierzchnia ugięcia jest w przybliżeniu ważna także dla rozpatrywanego przypadku, przyczem strzałkę ugięcia oblicza się z warunku równości energii potencyalnej i pracy sił wewnętrznych. Równie łatwo da się załatwić przypadek nieco ogólniejszy, w którym obciążenie pokrywa równomiernie tylko prostokąt $a_1 b_1$, spółśrodkowy i równoległy względem obwodu płyty (rys. 8). Przesunąwszy teraz dla wygody początek spółrzędnych do środka płyty, i zmieniwszy, stosownie do tego, równanie powierzchni ugięcia na



Rys. 8.

(26) $$\zeta = f \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$

znajdziemy

$$f = \frac{16}{\pi^6} \cdot \frac{a^2 b^2 q \,.\, \sin \dfrac{a_1}{a}\dfrac{\pi}{2} \,.\, \sin \dfrac{b_1}{b}\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{b^2}{a^2} B_1 + 2H + \dfrac{a^2}{b^2} B_2} \tag{27}$$

albo, po wprowadzeniu wielkości ε i η:

$$f = \frac{16}{\pi^6} \cdot \frac{\varepsilon^4 \sin \dfrac{a_1}{a}\dfrac{\pi}{2} \,.\, \sin \dfrac{b_1}{b}\dfrac{\pi}{2}}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2 \eta + 1} \cdot \frac{qb^4}{B_2} \tag{27'}$$

W przypadku całkowitego obciążenia płyty ($a_1 = a$, $b_1 = b$) staje się wyrażenie

$$\sin \frac{a_1}{a}\frac{\pi}{2} \,.\, \sin \frac{b_1}{b}\frac{\pi}{2}$$

równem 1. (W ogólnym przypadku niechaj je oznacza dla skrócenia symbol $[a_1, b_1]$). Wtedy wypada, przy równych wartościach f z wzoru (17) i odpowiadającego wzoru w § 8:

$$p_0 = \frac{16}{\pi^2} q \tag{28}$$

co można także wyprowadzić[1] z warunku, aby powierzchnia obciążenia

$$p = p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

zastępowała jak najlepiej powierzchnię

$$p = q = \text{const.},$$

jeżeli jako ten warunek przyjmiemy, że całka

$$\int\!\!\int \left(p_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} - q\right)^2 dy\, dx$$

ma być minimum. — Dalsze wzory przybliżonego rozwiązania w przypadku prostokątnego obciążenia $a_1 b_1 q$, potrzebne do obliczeń praktycznych, są następujące:

[1] Szczegół podkreślony już przy rozpatrywaniu analogicznego zadania płyty równokierunkowej przez Dra A. Nádai'a (ob. str. 46 cytowanej pracy).

$$
(29)\quad \begin{cases}
M_{1\,max} = \dfrac{16}{\pi^4}\cdot q\,\dfrac{\left(\dfrac{a^2}{m_2}+b^2\right)\overline{B}_1[a_1,b_1]}{\dfrac{b^2}{a^2}\overline{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\overline{B}_2}, \\[2ex]
M_{2\,max} = \dfrac{16}{\pi^4}\cdot q\,\dfrac{\left(a^2+\dfrac{b^2}{m_1}\right)\overline{B}_2[a_1,b_1]}{\dfrac{b^2}{a^2}\overline{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\overline{B}_2}, \\[2ex]
(D)_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}} = -\dfrac{32}{\pi^4}\,q\,\dfrac{ab\,C[a_1,b_1]}{\dfrac{b^2}{a^2}\overline{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\overline{B}_2}\ {}^{1}
\end{cases}
$$

$$
(30)\quad \begin{cases}
|R_1|_{max} = \dfrac{16}{\pi^3}\dfrac{q}{a}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{a^2}{m_2}+b^2\right)\overline{B}_1+4a^2C}{\dfrac{b^2}{a^2}\overline{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\overline{B}_2}[a_1,b_1], \\[2ex]
|R_2|_{max} = \dfrac{16}{\pi^3}\dfrac{q}{b}\cdot\dfrac{\left(a^2+\dfrac{b^2}{m_1}\right)\overline{B}_2+4b^2C}{\dfrac{b^2}{a^2}\overline{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\overline{B}_2}[a_1,b_1]
\end{cases}
$$

$$
(31)\quad \begin{cases}
|R_1| = |R_2|_{max}.\cos\dfrac{\pi y}{b}, \quad |R_2| = |R_1|_{max}.\cos\dfrac{\pi x}{a}; \\[2ex]
|\overline{R}_1| = \dfrac{2b}{\pi}|R_1|_{max}, \quad |\overline{R}_2| = \dfrac{2a}{\pi}|R_2|_{max}; \\[2ex]
\hat{R} = \dfrac{64}{\pi^4}\cdot q\cdot\dfrac{ab\,C[a_1,b_1]}{\dfrac{b^2}{a^2}\overline{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\overline{B}_2}
\end{cases}
$$

przyczem

$$
(32)\qquad [a_1,b_1] = \sin\frac{a_1}{a}\frac{\pi}{2}\,\sin\frac{b_1}{b}\frac{\pi}{2}
$$

Wprowadziwszy znowu wielkości ε i η, oraz uwzględniwszy równanie (13a), przekształcimy niektóre z powyższych wzorów na następujące:

[1] Moment skręcający w rogach płyty.

$$M_{1\max} = \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{m_2}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\right)[a_1, b_1]}{1 + 2\varepsilon^2 \eta + \varepsilon^4} \cdot qa^2,$$

(29′)

$$M_{2\max} = \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 + \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{B_2}{B_1}}\right)[a_1, b_1]}{1 + 2\varepsilon^2 \eta + \varepsilon^4} \cdot qb^2$$

$$|R_1|_{\max} = \frac{16}{\pi^3} qa[a_1, b_1] \left| 1 - \frac{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 + \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{B_2}{B_1}}\right)}{1 + 2\varepsilon^2 \eta + \varepsilon^4} \right|,$$

(30′)

$$|R_2|_{\max} = \frac{16}{\pi^3} qb[a_1, b_1] \cdot \left| 1 - \frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{m_2}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}}{1 + 2\varepsilon^2 \eta + \varepsilon^4} \right|$$

(31′) $$\hat{R} = -2(D)_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}} = \frac{16}{\pi^4} q\, ab\, [a_1, b_1] \frac{2\eta - \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{B_2}{B_1}} - \frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}}{\varepsilon^2 + 2\eta + \frac{1}{\varepsilon^2}}$$

Stopień przybliżenia wzorów dla momentów, zawierających drugie pochodne ζ nie będzie mógł być tak wysoki, jak u wzorów dla ugięcia. Jeszcze niższego stopnia przybliżenia należy się spodziewać u wzorów dla reakcyj podporowych. Jakoż łatwo się przekonać, że suma algebraiczna wszystkich reakcyj nie daje $-a_1 b_1 q$ jak wymagają warunki równowagi, lecz, że ta suma:

$$2\bar{R}_1 + 2\bar{R}_2 + 4\hat{R} = -\frac{64}{\pi^4} abq\, [a_1, b_1]$$

W przypadku całkowitego obciążenia jest różnica obu powyższych wartości bardzo znaczna; zamiast $-abq$ wypada po prawej stronie ostatniego równania $-0{,}657\, abq$. Różnica zmniejsza się, gdy zmniejszamy wielkość obciążonego pola prostokątnego i znika nawet zupełnie przy

$$a_1 : a = b_1 : b = \sim 0{,}748,$$

aby przy dalszem ubywaniu obciążonego pola zmienić znak i znowu wzrastać co do bezwzględnej wartości. Stąd można wnosić, że rozpatrywane przybliżone rozwiązanie odpowiada najlepiej przypadkowi obciążenia pola prostokątnego o wymiarach

$$a_1 = 0{,}748\, a \quad \text{i} \quad b_1 = 0{,}748\, b.$$

W tym szczególnym przypadku jest

$$\frac{a_1}{a}\frac{\pi}{2} = \frac{b_1}{b}\frac{\pi}{2} = \text{arc } 67^0 19',2, \quad \sin\frac{a_1}{a}\frac{\pi}{2} = \sin\frac{b_1}{b}\frac{\pi}{2} = 0{,}92267;$$

$$[a_1, b_1] = 0{,}8513, \quad a_1 b_1 = 0{,}5595\, ab, \quad Q = a_1 b_1 q = 0{,}5595\, abq,$$

a wzory dla obliczeń przybierają postać:

$$(33) \quad f = \frac{1}{39{,}49} \cdot \frac{Qab}{\frac{b^2}{a^2}B_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}B_2} = \frac{1}{39{,}49} \cdot \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\eta + 1} \cdot \frac{Qb^2}{\bar{B}_2 a}$$

$$(34) \quad \left|\begin{aligned} M_{1max} &= \tfrac{1}{4}\frac{Q}{ab} \cdot \frac{\left(\frac{a^2}{m_2} + b^2\right) B_1}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2} = \tfrac{1}{4}Q\frac{a}{b}\,\frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\eta + 1}, \\ M_{2max} &= \tfrac{1}{4}\frac{Q}{ab} \cdot \frac{\left(a^2 + \frac{b^2}{m_1}\right)\bar{B}_2}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2} = \tfrac{1}{4}Q\frac{b}{a}\,\frac{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 + \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\eta + 1} \end{aligned}\right.$$

$$(35) \quad (D)_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}} = -\tfrac{1}{2}\frac{CQ}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2} =$$

$$= -\tfrac{1}{8}Q\,\frac{2\eta - \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{\varepsilon^2 + 2\eta + \frac{1}{\varepsilon^2}} = -\tfrac{1}{2}\hat{R}$$

$$(36) \quad \left|\begin{aligned} |R_1|_{max} &= 0{,}785_2\frac{Q}{a^2 b} \cdot \frac{\left(\frac{a^2}{m_2} + b^2\right)\bar{B}_1 + 4a^2 C}{\frac{b^2}{a^2}\bar{B}_1 + 2H + \frac{a^2}{b^2}\bar{B}_2} = \\ &= 0{,}785_2\frac{Q}{b}\left|1 - \frac{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 + \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\eta + 1}\right|, \end{aligned}\right.$$

$$
(36)\quad \begin{cases}
|R_2|_{max} = 0{,}785\,\dfrac{Q}{ab^2}\cdot\dfrac{\left(a^2+\dfrac{b^2}{m_1}\right)\bar{B}_2+4b^2C}{\dfrac{b^2}{a^2}\bar{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\bar{B}_2}= \\[2ex]
=0{,}785\,\dfrac{Q}{a}\left|1-\dfrac{1+\dfrac{\varepsilon^2}{m_2}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{\varepsilon^4+2\varepsilon^2\eta+1}\right|
\end{cases}
$$

$$
(37)\quad \begin{cases}
|R_1| = \frac{1}{2}\,\dfrac{Q}{a^2}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{a^2}{m_1}+b^2\right)\bar{B}_1+4a^2C}{\dfrac{b^2}{a^2}\bar{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\bar{B}_2}= \\[2ex]
=\frac{1}{2}\,Q\left|1-\dfrac{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2+\dfrac{1}{m_1}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)}{\varepsilon^4+2\varepsilon^2\eta+1}\right|, \\[2ex]
|R_2| = \frac{1}{2}\,\dfrac{Q}{b^2}\cdot\dfrac{\left(a^2+\dfrac{b^2}{m_1}\right)\bar{B}_2+4b^2C}{\dfrac{b^2}{a^2}\bar{B}_1+2H+\dfrac{a^2}{b^2}\bar{B}_2}= \\[2ex]
=\frac{1}{2}\,Q\left|1-\dfrac{1+\dfrac{\varepsilon^2}{m_2}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{\varepsilon^4+\varepsilon^2\eta+1}\right|
\end{cases}
$$

$$
\left(R_{1max}=1{,}57\,\frac{\bar{R}_1}{b},\quad R_{2max}=1{,}57\,\frac{\bar{R}_2}{a}\right)
$$

Tutaj nasuwa się myśl, aby do praktycznych obliczeń na podstawie równomiernego obciążenia całej płyty polecić wzory (27) i (29) dla strzałki ugięcia i momentów zginających, a wzory (36) i (37) dla reakcyj i momentów skręcających (podstawiwszy w ostatnich wzorach $Q = abq$). Tym sposobem będą obliczone wielkości najczęściej przecenione (na korzyść pewności), atoli popełnione błędy nie będą przekraczać paru odsetek, o ile wartości stosunków $a:b$ i $\bar{B}_1 : \bar{B}_2$ nie zbaczają zbyt wiele od 1. W szczególnym przypadku $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$ wystarczy takie obliczenie zapewne dla

$$
1 \leqq \frac{a}{b} \leqq 1{,}5 ,
$$

ponieważ np. odpowiadający wzór dla strzałki ugięcia płyty jednolitej i równokierunkowej daje przy $a : b = 1{,}5$ wartości za duże o $2{,}5\%$, a dopiero przy $a : b = 2$ dochodzi błąd (tego samego znaku) do $5{,}2\%$[1].

Poza temi granicami stosunku $a : b$ rośnie błąd bardzo znacznie. Jeżeli jednak $\bar{B}_1 \neq \bar{B}_2$, to w myśl poprzednich wywodów (w § 7) warunkuje „działanie płytowe" nie stosunek $a : b$, lecz sprowadzony stosunek $\varepsilon = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$. Z tego powodu należy się spodziewać tej samej, co w poprzednim szczególnym przypadku, dokładności, gdy ten stosunek leży między granicami 1 a 1,5, czyli, gdy:

$$1 \leqq \varepsilon \leqq 1{,}5.$$

Wyrażenie „działanie płytowe" ma tutaj znaczenie rozpowszechnione i oznacza niejako działanie podłużnych skrawków płyty, zmniejszające moment zgięcia w skrawkach poprzecznych, traktowanych jako belki. Tak określone działanie płytowe zależy także od sposobu obciążenia i występuje najdobitniej przy obciążeniu siłami skupionemi. Przy równomiernem obciążeniu płyty prostokątnej gra działanie płytowe większą rolę tylko w powyższych granicach stosunku ε i dalej jeszcze, aż do wartości $\varepsilon = \sim 2$. Poza temi granicami maleje działanie płytowe bardzo szybko i wyjąwszy części płyty przylegające do krótkich boków b, zachodzi zgięcie poprzecznych skrawków, praktycznie biorąc, dokładnie tak samo, jak układu belek równoległych o tej samej rozpiętości b.

To jest przyczyną, dla której obowiązujące przepisy dla żel.-betonu, dyktowane roztropną troską o pewność budowli, ograniczają uwzględnianie korzystnego działania płytowego, nawet w przypadku uzbrojenia „na krzyż" płyty betonowej; nie da się jednak zaprzeczyć, że odnośne przepisy, po największej części pozbawione naukowej podstawy, posuwają ostrożność zbyt daleko i udaremniają przez to racyonalne wyzyskanie materyału. Tak np. czytamy w pruskich przepisach ministeryalnych z r. 1907 (§ 14, p. 7):

„Płyty dokoła podparte, opatrzone krzyżującemi się wkładkami żelaznemi, można przy równomiernie rozłożonem obciążeniu

[1] Por. Huber M. T., Die Grundlagen...

obliczać według wzoru $M = \frac{qb^2}{12}$, jeżeli ich długość a nie dochodzi 1,5-krotnej szerokości b".

W przeciwstawieniu do tego zalecają francuskie przepisy z r. 1906 w tym samym przypadku wogóle użycie wzoru

$$M_{max} = \tfrac{1}{8} qb^2 \frac{a^4}{a^4 + 2b^4}$$

z jedynym ograniczającym warunkiem: $a > b$, co daje dla płyty kwadratowej (w obu kierunkach jednakowo uzbrojonej)

$$M_{max} = \frac{1}{24} qb^2,$$

a więc dokładnie połowę wartości, przepisanej w Prusiech! Jak widać, zadowalają się we Francyi z dobrym skutkiem już drugi dziesiątek lat dwa razy słabszemi płytami (w tym szczególnym przypadku), niż w Prusiech, oraz licznych innych krajach wzorujących swoje przepisy na pruskich. W rzeczywistości, jak się pokaże w dalszym ciągu, ścisła teoretyczna wartość momentu zginającego zbliża się w rozpatrywanym przypadku daleko więcej do wartości unormowanej przepisami francuskiemi, jakkolwiek i odpowiadający wzór francuski ma właściwie charakter praktycznej reguły lub „półempirycznego" wzoru interpolacyjnego, a nadto nie uwzględnia zupełnie ewentualnych różnic w obu uzbrojeniach.

Pewien postęp wykazują niemieckie przepisy z r. 1915, prowadzące do obliczenia największego momentu podług wzoru:

$$M_{max} = \tfrac{1}{8} qb^2 \frac{a^4}{a^4 + b^4} \quad (a > b)$$

Stąd wypada w szczególnym przypadku płyty kwadratowej $(a = b)$:

$$M_{max} = \frac{1}{16} qb^2$$

Ta wartość leży dokładnie w pośrodku między wypływającą z dawniejszych pruskich przepisów, a unormowaną francuskimi przepisami z r. 1906 i jest jeszcze około 1,5 razy większą od prawdziwej wartości największego momentu.

Jedyne urzędowe przepisy, które uwzględniają obadwa uzbrojenia, są, jak się zdaje, austryackie (z r. 1911), jednakowoż podany tam sposób obliczenia nie ma także pretensyi do naukowego uzasadnienia. Ten sposób prowadzi w przypadku płyty kwadratowej do wartości:

$$M_{max} = \frac{1}{16} qb^2,$$

leżącej dokładnie w środku między dawniejszą pruską a francuską normą. Tenże sam wynik dają praktyczne wzory przepisów szwajcarskich.

Na „płytowe działanie“ pozwalają zresztą liczyć tak austryackie, jak i (dawniejsze) pruskie przepisy, tylko wtedy, gdy

$$1 \leqq \frac{a}{b} < 1{,}5$$

Jak z poprzednich rozważań wynika, powinien tutaj właściwie stać, zamiast $a : b$ sprowadzony stosunek boków

$$\varepsilon = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}.$$

W praktyce muszą brzegi płyty wystawać nieco poza proste podporowe, przez co jej sztywność i wytrzymałość ulegają zwiększeniu podobnie, jak się rzecz ma z płytami okrągłemi. Przy interpretacyi wyników doświadczeń zachodzi potrzeba wyznaczenia tego zwiększenia na drodze teoretycznej. Z wystarczającem najczęściej przybliżeniem można tego dokonać w ten sposób, że przy wyznaczaniu f z warunku pracy:

$$L_i = \frac{\pi^4}{8} \frac{f^2}{a^3 b^3} (\bar{B}_2 a^4 + 2Ha^2b^2 + \bar{B}_1 b^4) = \tfrac{1}{2} \int\int q \zeta \, dx \, dy = L$$

dodaje się po lewej stronie wyraz ΔL_i, przedstawiający pracę odkształcenia wystającej części. Przyjąwszy stosunkowo małą szerokość Δa i Δb wystających skrawków płyty, można widocznie pominąć bardzo małe momenty zginające i napisać

$$\Delta L_i = \tfrac{1}{2} \int\int 4C \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 dx \, dy,$$

przyczem całkowanie rozpościera się na wystające pole. Uważając nadto w przybliżeniu momenty skręcające za niezmienne w kierunku poprzecznym wystających skrawków, napiszemy wyrażenie dla ΔL_i w postaci:

$$\Delta L_i = 4\,.\,\tfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{a+\Delta a}{2}} 4C\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{y=\frac{b}{2}} \Delta b\,.\,dx + 4\,.\,\tfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{b+\Delta b}{2}} 4C\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}\right)^2_{x=\frac{a}{2}} \Delta a\,.\,dy$$

Po wstawieniu wartości $\zeta = f \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}$ i wykonaniu całkowań otrzymujemy:

$$\Delta L_i = \tfrac{1}{2}\, 4C\, \frac{\pi^4}{a^2\, b^2}\, f^2\, [(a+\Delta a)\,\Delta b + (b+\Delta b)\,\Delta a],$$

albo

$$\Delta L_i = 2C\,.\,\frac{\pi^4}{a^2 b^2}\, f^2\,.\,\frac{\Delta F}{2},$$

jeżeli ΔF oznacza całkowite pole wystającej części płyty. Wyrażenie dla energii potencyalnej przybiera teraz postać:

$$L_i = \frac{\pi^4}{8}\,.\,\frac{f^2}{a^3\, b^3}\,(\bar{B}_2 a^4 + 2\,H a^2 b^2 + \bar{B}_1 b^4 + 8 C a b\,\Delta F).$$

Z tego wynika, że strzałka ugięcia f zmniejsza się wskutek wystawania płyty w stosunku

$$(B_2\, a^4 + 2 H a^2 b^2 + B_1\, b^4) : (B_2\, a^4 + 2 H a^2 b^2 + B_1\, b^4 + 8 C a b\, \Delta F)$$

i w tymże stosunku zmniejszają się momenty zgięcia M_1, M_2, jakoteż pozostałe wielkości statyczne. Odpowiadający spółczynnik zmniejszenia

$$\frac{1}{1 + \dfrac{8 C a b\, \Delta F}{\bar{B}_2\, a^4 + 2\, H a^2 b^2 + \bar{B}_1\, b^4}} = \frac{1}{1 + \dfrac{8\, C\, a b\, \Delta F}{\bar{B}_1\, b^4}\,.\,\dfrac{1}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2 \eta + 1}}$$

ubywa z powiększeniem sprowadzonego stosunku boków ε, zdążając, jak było do przewidzenia, do granicy 1, gdy ε staje się bardzo wielkie. Największą wartość osiąga ten spółczynnik dla $\varepsilon = 1$; w przypadku $a = b$, $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$, $m_1 = m_2 = m$, otrzymujemy dlań wyrażenia:

$$\frac{1}{1 + \dfrac{2C}{\bar{B}}\, \dfrac{\Delta F}{a^2}} \quad \text{albo} \quad \frac{1}{1 + \dfrac{m-1}{m}\, \dfrac{\Delta F}{a^2}}.$$

§ 10. Jeszcze o trudnościach przy stosowaniu wzorów teoretycznych do płyt żel.-betonowych. Warunki powstania ujemnych momentów zginających i narożnych reakcyj. Krytyka urzędowych przepisów i niektórych wzorów.

Wracając teraz do końcowych rozważań §-u 7-go, weźmy jako przykład płytę prostokątną o stosunku boków $a:b = 1{,}3$, uzbrojoną w kierunku a według rysunek 6, fig. (a), w kierunku zaś b według rysunku 6, fig. (b). Największe momenty zginające obliczymy według przybliżonych wzorów (29), przyjąwszy w przybliżeniu $H = \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$, $m_1 = m_2 = 6$. Po obliczeniu liczbowego spółczynnika i drobnem przekształceniu będzie zatem wogóle:

$$(38) \qquad M_{1max} = \frac{qb^2}{6{,}10} \cdot \frac{1 + \frac{1}{m}\frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2}\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} + 2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} + \frac{b^2}{a^2}},$$

$$M_{2max} = \frac{qb^2}{6{,}10} \cdot \frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{m}}{\frac{a^2}{b^2} + 2\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} + \frac{b^2}{a^2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}$$

Dla fazy I będzie, przy $n = 10$:

$$I_1 = 147{,}_{65}\ \mathrm{cm}^3,\quad I_2 = 155{,}_{86},\quad I_2 : I_1 = 1{,}_{056},$$

$$\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 1{,}028,\quad \sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} = 1{,}014,\quad \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} = 1{,}32.$$

Dla fazy IIb wypada przy $n = 15$:

$$z_1 = 2{,}71\ \mathrm{cm},\quad z_2 = 3{,}83,\quad I_1 = 30{,}27,\quad I_2 = 63{,}84\ \mathrm{cm}^3,$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 2{,}109,\quad \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 1{,}452,\quad \sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} = 1{,}205,\quad \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} = 1{,}57.$$

Przyjąwszy jako trzecią alternatywę, że dla $\bar{B}_2$ już zachodzi faza IIb, podczas gdy $\bar{B}_1$ pozostaje jeszcze w fazie I, mamy, przy użyciu odpowiadających wartości I_1 i I_2:

$$\frac{I_2}{I_1} = 0{,}432,\quad \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 0{,}658,\quad \sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} = 0{,}811,\quad \varepsilon = 1{,}05.$$

Przyjąwszy jeszcze w przybliżeniu równe wartości E_b w obu odpowiadających sobie sztywnościach zgięcia, mamy:

$$\bar{B}_2 : \bar{B}_1 = I_2 : I_1,$$

a równania (38) dają odpowiednio przy pierwszem, drugiem i trzeciem z powyższych założeń:

$$\frac{M_{1max}}{qb^2} = \frac{1}{21,1}, \quad \frac{1}{33,6}, \quad \frac{1}{12,5} (?);$$

$$\frac{M_{2max}}{qb^2} = \frac{1}{13,8}, \quad \frac{1}{11,0}, \quad \frac{1}{20,0} (?).$$

Trzecia para wartości stanowi najwidoczniej wynik sprzeczny, ponieważ jest niemożliwem, aby przy większej wartości momentu zginającego w przekroju słabiej uzbrojonym panowała jeszcze faza I, a w przekroju silniej uzbrojonym, przy mniejszej wartości momentu, już faza IIb. Dlatego trzecie przypuszczenie trzeba w tym przypadku bezwarunkowo odrzucić. Przemieniwszy jednak obadwa uzbrojenia, otrzymamy przy pierwszem założeniu (fazy I w obu przekrojach):

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,947, \quad \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 0,973, \quad \varepsilon = 1,28;$$

przy drugiem założeniu (fazy IIb w obu przekrojach):

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,474, \quad \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 0,689, \quad \varepsilon = 1,08;$$

przy trzeciem założeniu:

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,194, \quad \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 0,440, \quad \varepsilon = 0,86,$$

a wzory dla momentów dają odpowiednio:

$$\frac{M_{1max}}{qb^2} = \frac{1}{19,7}, \quad \frac{1}{13,2}, \quad \frac{1}{8,09};$$

$$\frac{M_{2max}}{qb^2} = \frac{1}{14,4}, \quad \frac{1}{19,2}, \quad \frac{1}{30,5}.$$

Teraz nie natrafiamy już na żadną sprzeczność, mimo to jednak wydaje się, że tak wielkie różnice w fazach obu sztywności zachodzić nie mogą. Tę kwestyę mogą rozstrzygnąć tylko doświadczenia; tymczasem można polecić zastosowanie wyprowadzonych wzorów teoretycznych tylko przy założeniu jednakowych faz w obu przekrojach głównych rozpatrywanego elementu płyty jednocześnie. Obliczmy jeszcze przy tem założeniu największe momenty zginające dla płyty o stosunku boków $a:b = 1{,}5$ w przypadku równego uzbrojenia w obu kierunkach. Teraz będzie $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$, a z równań (38) znajdujemy:

$$M_{2\,max} = \sim \frac{qb^2}{12}, \quad M_{1\,max} = \sim \frac{qb^2}{21}$$

Widzimy więc, że według dawniejszych pruskich przepisów wypada tylko w krańcowym wypadku $\varepsilon = 1{,}5$ dla największego momentu wartość zgodna z teoretyczną. Im bardziej zbliża się wartość ε do 1, tem mniej dokładnem staje się obliczenie na podstawie tych przepisów.

Prawie wszystkie trudności odpadają w przypadku **płyty kwadratowej w obu kierunkach jednakowo uzbrojonej**. Wtedy

$$m_1 = m_2 = m, I_1 = I_2 = I, B' = E_b I, \bar{B}_1 = \bar{B}_2 = \frac{m^2}{m^2-1} E_b I, \ C = \frac{m}{2(m+1)} E_b I,$$

$$H = \frac{m}{m^2-1} E_b I + \frac{m}{m+1} E_b I = \frac{m^2}{m^2-1} E_b I = \bar{B},$$

a zatem nowe wzory teoretyczne przechodzą w odpowiadające wzory dla zwykłych płyt kwadratowych (równokierunkowych). Przy równomiernem obciążenie homotetycznego kwadratu o boku a_1 i skróconych oznaczeniach

$$(D)_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}} = \hat{D}, \ \sin \frac{\pi}{2} \frac{a_1}{a} = [a_1], \ a_1^2 q = Q,$$

przekształcają się wzory (27), (29), (36) i (37) na następujące:

$$(39) \quad \left| \begin{array}{l} f = \dfrac{1}{240{,}4} \dfrac{qa^4 [a_1]^2}{\bar{B}}, \\ M_{max} = \dfrac{1}{24{,}40} \dfrac{m+1}{m} qa^2 [a_1]^2, \quad \hat{D} = -\dfrac{1}{24{,}40} \dfrac{m-1}{m} qa^2 [a_1]^2 \end{array} \right.$$ [1]

[1] Temi ulepszonemi wzorami należy teraz zastąpić wzory (37) przytoczonego powyżej pierwszego opracowania teoryi w języku niemieckim.

$$
(39)\quad \left\{ \begin{aligned} & R_{1max} = R_{2max} = 0{,}785\,\frac{Q}{4a}\cdot\frac{3m-1}{m},\quad \bar{R}_1 = \bar{R}_2 = \tfrac{1}{8}\,\frac{3m-1}{m}\,Q, \\ & \hat{R} = \tfrac{1}{8}\,\frac{m-1}{m}\,Q. \end{aligned} \right.
$$

Uwagi godnym jest jeszcze rozkład głównych momentów zginających M_I i M_{II} wzdłuż przekątnej $x = y$. Tutaj jest:

$$
M_1 = M_{1max} \cos^2 \frac{\pi x}{a},\quad M_2 = M_{2max} \cos^2 \frac{\pi x}{a},\quad D = \hat{D} \sin^2 \frac{\pi x}{a}
$$

Główne momenty zginające w sprężystej płycie określają wzory: [1]

$$
(40)\quad \left.\begin{matrix} M_I \\ M_{II} \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(M_1 - M_2)^2 + 4D^2}
$$

W naszym przypadku jest

$$
M_{1max} = M_{2max} = M_{max},
$$

a zatem:

$$
(41)\quad \left.\begin{matrix} M_I \\ M_{II} \end{matrix}\right\} = M_{max} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \pm \hat{D} \sin^2 \frac{\pi x}{a}
$$

Podstawiwszy tutaj wartości z wzorów (39) i przyjąwszy $m = 6$, otrzymamy po prostem przekształceniu:

$$
(41')\quad \left| \begin{aligned} & M_I = 0{,}041\, qa^2 \left(1 + \frac{0{,}67}{4} \cos \frac{2\pi x}{a}\right), \\ & M_{II} = 0{,}041\, qa^2 \left(\frac{0{,}67}{4} + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \end{aligned} \right.
$$

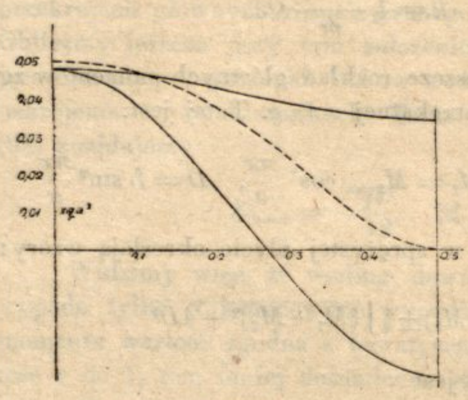
Te równania dają dla:

$\frac{x}{a} =$	0,	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$M_I : qa^2 =$	0,0478	0,0465	0,0431.	0,0389	0,0354	0,0341
$M_{II} : qa^2 =$	0,0478	0,0400	0,0195	–0,0058	–0,0263	–0,0341

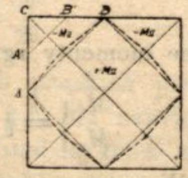
Podług tych liczb nakreślono diagram (rys. 9), z którego widać, że ujemny główny moment zgięcia występuje na przekątnej

[1] Ob. Huber M. T., Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der Eisenbetonplatten, rów. (38).

zewnątrz punktu $x = y = 0{,}275\, a$ i osiąga w pobliżu rogów płyty dość wielkie wartości. Łatwo też przekonać się, że na prostych, połowiących boki, nie ma wcale ujemnych momentów. Rys. (10) przedstawia przybliżoną granicę obszarów narożnych o momentach ujemnych.



Rys. 9.



Rys. 10.

Gdyby więc płyta była podparta w sposób wykluczający podniesienie się rogów i powstanie jakichkolwiek momentów podporowych wzdłuż brzegów płyty, to racyonalne uzbrojenie powinnoby odpowiadać powyższemu rozkładowi głównych momentów zgięcia. Stosownie do tego należałoby np. każdy drugi pręt w obu układach odgiąć na granicy powyższych narożnych obszarów, a resztę prętów odgiąć mniej więcej wzdłuż linii $A'B'$, jednocześnie zaś trzebaby brak uzbrojenia przeciwko momentom dodatnim w narożnym obszarze $CA'B'$ zastąpić krótkiemi prętami, prostopadłemi do przekątnej. Przy rzeczywistem swobodnem podparciu niema jednak narożnej reakcyi i rogi płyty mogą się podnieść, a rozkład momentów zmienia się dość silnie, zwłaszcza w obszarach narożnych, mniej więcej w sposób przedstawiony na rys. (9) linią przerywaną. Momenty zginające w środku płyty doznają przytem tylko małego powiększenia, co staje się łatwo zrozumiałem, jeżeli zważymy, że brak narożnych i dodatkowych reakcyj nie wpływa zupełnie na średnią wartość momentu zginającego w przekroju przekątnym. Suma momentów reakcyi narożnych i dodatkowych jednej połowy płyty, oddzielonej przekątną, wzięta względem tejże przekątnej, jest bowiem istotnie równa zeru.

W praktyce nie zajdzie zwykle ani ten, ani inny przypadek albowiem po pierwsze musi płyta rzeczywista wystawać poza linie podporowe, a powtóre trudno uniknąć pewnego częściowego utwierdzenia brzegów takiej płyty. Obie okoliczności są oczywiście korzystne dla okolic narożnych, ale wymagają zarazem pewnych zmian w naszkicowanym powyżej schemacie racyonalnego uzbrojenia. Pręty przekątne w narożnych obszarach mogą się przytem stać zupełnie zbytecznemi.

Przyjrzawszy się wzorom (39), zauważymy, że momenty i reakcye podporowe zależą w dość znacznym stopniu od liczby Poisson'a m. Skoro np. wartość tej stałej waha się pomiędzy $\frac{10}{3}$ (żelazo kowalne), a 6 (beton), to odpowiadające spółczynniki liczbowe wzoru dla momentu zginającego leżą między $\frac{1}{18{,}8}$ a $\frac{1}{20{,}9}$. Stosunek obu tych wartości równa się około 1,11. Jeszcze większym wahaniom podlega naturalnie wartość momentu skręcającego w rogach. Spółczynnik liczbowy odpowiadającego wzoru waha się między $\frac{1}{34{,}9}$ a $\frac{1}{29{,}3}$; stosunek tych wartości równa się 1 : 1,19.

Jedyną trudnością, jaka wogóle jeszcze pozostaje, byłby brak zadowalającej teoryi wytrzymałości dla materyałów kruchych; atoli w rozpatrywanym właśnie przypadku płyty kwadratowej panuje w środku, gdzie powstają niebezpieczne momenty zgięcia, dość prosty stan napięcia. W niebezpiecznem miejscu zewnętrznej ściskanej warstwy jest mianowicie $\sigma_x = \sigma_y$, a σ_z można pominąć. Wystarczy przeto przyjąć, że mamy tu do czynienia z rodzajem wytrzymałości, nazwanym przez prof. A. Föppl'a „Umschlingungsfestigkeit", która okazała się równą zwykłej wytrzymałości przy ściskaniu. Momenty zginające, obliczone według powyżej podanych wzorów, nie potrzebują zatem redukcyi, jaką dotychczas z reguły stosowano (zwłaszcza we Francyi). Gdy w ogólniejszym przypadku ciśnienia główne σ_x i σ_y mają wartości nierówne, to wytężenie betonu można mierzyć wartością większego z nich. Jestto wprawdzie przyjęcie, potwierdzone doświadczalnie tylko w skrajnych przypadkach, ale zarazem najprostsze i najnaturalniejsze, skoro uważamy za dowiedzione, że t. zw. „Umschlingungsfestigkeit" równa się prostej wytrzymałości przy ściskaniu. Przy obliczeniu płyt według naszych wzorów nie potrzeba tedy zmieniać wartości dopuszczalnego ciśnienia w betonie.

Hipoteza największego wydłużenia właściwego jako miary wytężenia materyału, panująca wszechwładnie aż do najnowszych czasów w używanych u nas podręcznikach technicznych, wymaga, pomnożenia wyrażeń dla największych momentów zgięcia przez $\left(1 - \frac{1}{m}\right)$, aby otrzymać momenty sprowadzone (w przypadku ostatnio rozpatrywanym). Według tej hipotezy ma być mianowicie wogóle:

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \frac{1}{m}(\sigma_{II} + \sigma_{III}),$$

przyczem σ_I, σ_{II} i σ_{III} oznaczają naprężenia główne, wzięte w takim porządku, aby wyrażenie po prawej stronie przybrało największą wartość; w naszym przypadku $(\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma,\ \sigma_{III} = 0)$ wypadałoby więc:

$$\sigma_{red} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\sigma$$

Tem się też objaśnia, dlaczego przybliżony wzór do obliczenia płyty prostokątnej, (równomiernie obciążonej, z materyału równokierunkowego), wyprowadzany z rozwiązania Navier'a, podają francuskie podręczniki w postaci:

$$M_{max} = \frac{15}{\pi^4} qb^2 \frac{a^4}{(a^2+b^2)^2} = \sim \frac{2}{13} qb^2 \frac{a^4}{(a^2+b^2)^2}$$

Tutaj tkwią dwa ważne błędy: po pierwsze uporczywe stosowanie niewątpliwie błędnej hipotezy największego wydłużenia, a powtóre przyjęcie dla liczby Poisson'a wartości $m = 4$ bez względu na materyał, jakkolwiek oddawna wiadomo, że ta wartość, wyprowadzona przez Poisson'a, z pewnej molekularnej hipotezy, odpowiada dość dobrze doświadczeniu tylko w przypadku szkła. U innych technicznie ważnych materyałów waha się m w dość obszernych granicach. Dla płyty kwadratowej daje powyższy wzór:

$$M_{max} = \frac{1}{26} qa^2,$$

podczas gdy według tego, co powiedziano poprzednio, powinno być:

$$M_{max} = \frac{1}{24{,}4} \frac{m+1}{m} qa^2$$

Wartości $m = 6$ odpowiada zatem

$$M_{max} = \frac{1}{20,9} q a^2,$$

t. j. około 25% więcej, niż wypada z francuskiej formuły, ale przecież około 42% mniej, aniżeli dopuszczały pruskie przepisy z r. 1907 i około 31% mniej, aniżeli dozwalają nowe przepisy niemieckie z r. 1915.

Od wyników doświadczeń należy się prócz tego spodziewać, że rzeczywiste momenty łamiące będą odpowiadać raczej mniejszym jeszcze wartościom spółczynnika liczbowego we wzorze dla momentu (od obliczonej powyżej liczby 1/20,9), a to z następujących powodów:

Po pierwsze nasz wzór pochodzi od przybliżonego rozwiązania zagadnienia, a ścisłe rozwiązanie daje, jak zobaczymy poniżej, jeszcze nieco mniejsze wartości; powtóre w ogólnej teoryi pominięto pewną okoliczność, której w szczególności płyty okrągłe lub kwadratowe zawdzięczają często znaczną część swej nadspodziewanie wysokiej wytrzymałości. Chodzi tutaj o pewne odkształcenia w płaszczyźnie płyty, jakie powstać muszą, jeżeli powierzchnia ugięcia jest nierozwijalną. Energia potencyalna, nagromadzona w płycie wskutek odkształceń tego rodzaju, jest w porównaniu do energii zginania tylko wtedy znikomo małą (podobnie jak energia ścinania), gdy ugięcia ζ mogą uchodzić za bardzo małe nietylko w stosunku do rozpiętości płyty, lecz także i do jej grubości. Skoro ostatni warunek przestaje się spełniać przy odpowiedniem zwiększeniu obciążenia, to musi ciągle rosnąca część pracy zewnętrznej zamieniać się na energię potencyalną owych odkształceń, przez co oczywiście opaźnia się wzrost ugięć, a zarazem i wzrost naprężeń. Wskutek tego wypaść może z doświadczeń znacznie większe obciążenie, odpowiadające niebezpiecznym wartościom naprężeń, aniżeli to wynika z teoretycznego obliczenia, a im bardziej giętką jest płyta i wyższe naprężenia niebezpieczne, tem łatwiej to zjawisko wystąpi na jaw. Stwierdziły je już w r. 1900 doświadczenia z okrągłemi płytami żelaznemi, wykonane przez L. Prandtla za inicyatywą A. Föppl'a [1].

[1] Föppl A., Mitt. aus d. mech.-techn. Lab. d. kön. techn. Hochschule München. Heft 27. Z doświadczeń „Niemieckiego Wydziału żel.-betonowego"

Wydłużenia w warstwie obojętnej mogą powstać nawet przy walcowem zginaniu prostokątnej płyty, gdyż zupełnie swobodna przesuwalność podpartych brzegów płyty jest już z powodu tarcia praktycznie wykluczoną, a jeżeli zachodzą przeszkody we wzajemnem zbliżeniu brzegów płyty, uwarunkowanem przez zgięcie, to muszą wogóle powstać podłużne naprężenia w warstwie obojętnej. Te okoliczności grają widocznie jeszcze ważniejszą rolę w przypadku utwierdzenia brzegów płyty.

§ 11. Ścisłe ogólne rozwiązanie.

Poprowadziwszy osie spółrzędnych wzdłuż brzegów płyty, obierzmy dla analitycznego przedstawienia powierzchni ugięcia podwójnie nieskończony szereg trygonometryczny:

$$\zeta = \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} A_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \cdot \sin \frac{s\pi y}{b} \tag{42}$$

u którego każdy wyraz czyni zadość wszystkim warunkom krańcowym. Skoro tę wartość ζ wstawimy w ogólne wyrażenie (9') dla energii potencyalnej, to zważywszy, że całki postaci

$$\int_0^a \int_0^b A_{rs} A_{r's'} \sin \frac{r\pi x}{a} \cdot \sin \frac{s\pi y}{b} \cdot \sin \frac{r'\pi x}{a} \cdot \sin \frac{s'\pi y}{b}\, dx\, dy$$

znikają, jeżeli

$$r \neq r', \quad s \neq s',$$

otrzymamy:

$$L_i = \frac{\pi^4}{8} ab \sum_r \sum_s A_{rs}^2 \left(r^4 \frac{\bar{B}_1}{a^4} + 2r^2 s^2 \frac{H}{a^2 b^2} + s^4 \frac{\bar{B}_2}{b^4} \right)$$

W przypadku symetrycznej postaci powierzchni ugięcia muszą nadto zniknąć wszystkie spółczynniki, odpowiadające parzystym r i s. Wtedy w równaniu (42) należy przez r i s rozumieć nieparzyste liczby naturalne.

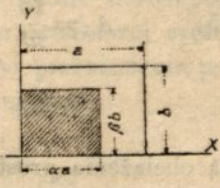
Dla podwójnej pracy sił zewnętrznych otrzymujemy przy najogólniejszem obciążeniu $p\,(x, y)$ wyrażenie

$$2L = \sum_r \sum_s A_{rs} \int \int p \sin \frac{r\pi x}{a} \cdot \sin \frac{s\pi y}{b}\, dx\, dy;$$

(ob. notę na końcu wstępu) można także wyraźnie rozpoznać zwiększenie teoretycznego ciężaru łamiącego wskutek małej grubości płyty.

w przypadku równomiernego obciążenia narożnego prostokąta o długości αa i szerokości βb (α i $\beta < 1$), zakreskowanego na rys. 11:

$$2L = \frac{4qab}{\pi^2} \sum_r \sum_s \frac{A_{rs}}{rs} \left(\sin \frac{r\alpha\pi}{2} \sin \frac{s\beta\pi}{2} \right)^2;$$



Rys. 11.

nakoniec w przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie na prostokącie o bokach a_1 i b_1, położonym spółśrodkowo i równolegle do obwodu płyty:

$$2L = \frac{4qab}{\pi^2} \sum_r \sum_s A_{rs} \frac{(-1)^{\frac{r+s-2}{2}}}{rs} \sin \frac{r\pi}{2} \frac{a_1}{a} \cdot \sin \frac{s\pi}{2} \frac{b_1}{b}$$

$$(r, s = 1, 3, 5, \ldots)$$

Wartości A_{rs} trzeba teraz w myśl metody Ritz'a wyznaczyć tak, aby wyrażenie

$$L_i - 2L,$$

jako funkcya parametrów A_{rs} osiągnęło wartość minimum. Z równań warunkowych:

$$\frac{\partial}{\partial A_{rs}} (L_i - 2L) = 0,$$

liniowych względem A_{rs}, otrzymujemy w ogólnym przypadku obciążenia:

$$(43) \qquad A_{rs} = \frac{4 \int\limits_0^a \int\limits_0^b p \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \, dx \, dy}{\pi^4 ab \left(r^4 \frac{\bar{B}_1}{a^4} + s^4 \frac{\bar{B}_2}{b^4} + 2r^2 s^2 \frac{H}{a^2 b^2} \right)},$$

w obu zaś powyżej zaznaczonych przypadkach równomiernego obciążenia:

$$(44) \qquad A_{rs} = \frac{16}{\pi^6} \cdot \frac{q}{rs} \cdot \frac{\left(\sin \frac{r\alpha\pi}{2} \sin \frac{s\beta\pi}{2} \right)^2}{r^4 \frac{\bar{B}_1}{a^4} + s^4 \frac{\bar{B}_2}{b^4} + 2r^2 s^2 \frac{H}{a^2 b^2}}$$

$$(r, s = 1, 2, 3, \ldots)$$

[1] Wynik przedstawiony na posiedzeniu paryskiej Akad. Nauk 1 marca 1920 roku.

dla obciążenia narożnego prostokąta i

$$(45)\qquad A_{rs}=\frac{16}{\pi^6}\cdot\frac{q}{rs}(-1)^{\frac{r+s-2}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{r\pi}{2}\frac{a_1}{a}\cdot\sin\frac{s\pi}{2}\frac{b_1}{b}}{r^4\frac{\bar{B}_1}{a^4}+s^4\frac{\bar{B}_2}{b^4}+2r^2s^2\frac{H}{a^2b^2}}$$

$$(r, s=1,\ 3,\ 5,\ldots)$$

dla obciążenia prostokąta środkowego.

Nie trudno się przekonać, że przy tych wartościach spółczynników A_{rs}, czyni wyrażenie (42) zadość równaniu różniczkowemu zgięcia płyty (13).

a) W przypadku równomiernego obciążenia całej płyty jest:

$$(46)\qquad \zeta=\frac{16}{\pi^6}q\sum_r\sum_s\frac{1}{rs}\cdot\frac{\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}}{r^4\frac{\bar{B}_1}{a^4}+s^4\frac{\bar{B}_2}{b^4}+2r^2s^2\frac{H}{a^2b^2}}$$

$$(r, s=1,\ 3,\ 5,\ldots)$$

[Gdy w szczególności $H^2=\bar{B}_1\bar{B}_2$, to powyższy wzór przybiera postać:

$$(46a)\qquad \zeta=\frac{16}{\pi^6}\frac{qb^4}{\bar{B}_2}\sum_r\sum_s\frac{1}{rs}\cdot\frac{\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}}{\left[\left(r\,\frac{b}{a}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right)^2+s^2\right]}$$

którą na podstawie rozważania w § (7) możnaby wyprowadzić wprost ze znanego rozwiązania Navier'a (ob. poniżej rów. 47) dla płyty równokierunkowej. Wystarczy w tym celu zastąpić $\bar{B}$ przez $\bar{B}_2$, a przez $a\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$ i x przez $x\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$.] Dopóki stosunek wielkości $\bar{B}_1/a^4$ i $\bar{B}_2/b^4$, względnie $\varepsilon=\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$, nie zbacza zbyt wiele od jednostki, szeregi w otrzymanych wzorach są tak silnie zbieżne, iż sam pierwszy wyraz daje dość dobre przybliżenie. W ten sposób dochodzimy znowu do przybliżonego rozwiązania z § (9). Nawet wówczas, gdy np. B_1/a^4 jest kilkakrotnie mniejsze od B_2/b^4, wystarczy zgoła niewiele wyrazów szeregu, ażeby znaleźć dla ugięcia dobre wartości przybliżone. W krańcowym jednak przypadku $a = \infty$ zawodzi nasze ogólne wyrażenie, a dla okolic narożnych trzeba szukać rozwiązania na innej drodze. Dla środkowej części bardzo długiej płyty otrzymujemy, co prawda, po przeniesieniu początku spółrzędnych do środka płyty, najpierw ogólnie:

$$\zeta = \frac{16}{\pi^6} q \sum\sum \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{r} \cdot \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s} \cdot \frac{\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}}{r^4 \frac{\bar{B}_1}{a^4} + s^4 \frac{\bar{B}_2}{b^4} + 2r^2 s^2 \frac{H}{a^2 b^2}}$$

$$(r, s = 1, 3, 5, \ldots)$$

a następnie po podstawieniu $a = \infty$:

$$\zeta = \frac{16}{\pi^6} q \frac{b^4}{\bar{B}_2} \sum_r \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{r} \sum_s \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^5} \cos\frac{s\pi y}{b},$$

albo ze względu na to, że $\sum \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{r} = \frac{\pi}{4}$:

$$\zeta = \frac{4}{\pi^5} \frac{qb^4}{\bar{B}_2} \sum \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^5} \cos\frac{s\pi y}{b}.$$

Ostatnie zaś wyrażenie jest, jak łatwo dowieść, identyczne z Fourierowskiem rozwinięciem funkcyi:

$$\zeta = \frac{qb^4}{24\bar{B}_2}\left(\frac{5}{16} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{b^2} + \frac{y^4}{b^4}\right),$$

która, jak wiadomo, przedstawia linię ugięcia belki w obu końcach swobodnie podpartej i równomiernie obciążonej, o rozpiętości b i sztywności zginania $\bar{B}_2$. Jak należało się spodziewać, powstaje przeto w środkowej części bardzo długiej płyty pod wpływem równomiernego obciążenia zgięcie walcowe.

W szczególnym przypadku $\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = H = \bar{B}$, t. j. dla płyt jednolitych i równokierunkowych, przybiera wzór (46) następującą postać, podaną już przez Navier'a:

$$(47) \qquad \zeta = \frac{16}{\pi^6}\frac{q}{B}\sum_r\sum_s \frac{1}{rs}\frac{\sin\frac{r\pi x}{a}\,.\sin\frac{s\pi y}{b}}{\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2}$$

$$(r,\ s = 1,\ 3,\ 5,\ldots)$$

b) W przypadku równomiernego obciążenia spółśrodkowego prostokąta $a_1\, b_1$ mamy, obrawszy linie środkowe płyty za osie spółrzędnych (rys. 8):

$$(48) \qquad \zeta = \frac{16}{\pi^6}\, q\, \frac{a^2 b^2}{H}\sum_r\sum_s \frac{[r,\ s]}{rs}\cdot\frac{\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b}}{r^4\frac{B_1}{H}\frac{b^2}{a^2}+s^4\frac{B_2}{H}\frac{a^2}{b^2}+2r^2s^2}$$

$$(r,\ s = 1,\ 3,\ 5,\ldots)$$

jeżeli dla skrócenia oznaczymy:

$$\sin\frac{r\pi}{2}\frac{a_1}{a}\,.\sin\frac{s\pi}{2}\frac{b_1}{b} = [r,\ s]$$

Porównywując ten ogólniejszy wzór z odpowiednim wzorem (46) dla obciążenia całkowitego, łatwo zauważyć, że ze skupieniem obciążenia na mniejszem prostokątnem polu $a_1\, b_1$ słabnie zbieżność szeregu w wyrażeniu dla ζ.

W krańcowym przypadku ciężaru skupionego w środku płyty $P = \lim q\,.\,a_1\, b_1$ dla $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, otrzymujemy np. dla płyty kwadratowej i równokierunkowej ($\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = H = \bar{B}$, $a = b$):

$$(49) \qquad \zeta = \frac{4}{\pi^4}\frac{Pa^2}{\bar{B}}\sum_r\sum_s\frac{\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{a}}{(r^2+s^2)^2}$$

oraz

$$(50) \qquad f = (\zeta)_{0,0} = \frac{4}{\pi^4}\frac{Pa^2}{\bar{B}}\sum_r\sum_s\frac{1}{(r^2+s^2)^2}\ldots(r,\ s = 1,\ 3,\ 5,\ldots)$$

Aby stąd obliczyć strzałkę ugięcia f z dokładnością 0,1% potrzeba około 30 wyrazów szeregu. Rachunek daje:

$$(50a) \qquad f = 0{,}01156\,\frac{Pa^2}{\bar{B}} = \sim\frac{1}{86{,}5}\frac{Pa^2}{\bar{B}}$$

Natomiast w przypadku obciążenia całej płyty mamy:

$$f=\frac{16}{\pi^6}\frac{qa^4}{\bar{B}}\sum\sum\frac{(-1)^{\frac{r+s-2}{2}}}{rs\,(r^2+s^2)^2}\ldots(r,s=1,3,5\ldots) \tag{51}$$

a tego szeregu wystarcza już 6 wyrazów, aby obliczyć f z błędem mniejszym od 0,1%. W tym przypadku otrzymamy:

$$f=0{,}00406\,\frac{qa^4}{\bar{B}}=\sim\frac{1}{246.3}\frac{qa^4}{\bar{B}} \tag{51a}$$

Skupienie obciążenia w jednym punkcie zwiększa przeto strzałkę ugięcia niemal trzykrotnie (dokładniej 2,85 razy).

Z (48) znajdujemy przez różniczkowanie następujące wyrażenia dla momentów, sił poprzecznych i reakcyi podporowych:

$$M_1=\frac{16}{\pi^4}\frac{\bar{B}_1}{H}\,q\sum_r\sum_s\frac{[r,s]}{\mu_{rs}}\left(\frac{r}{s}\,b^2+\frac{s}{r}\frac{a^2}{m_2}\right)\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b} \tag{52}$$

$$M_2=\frac{16}{\pi^4}\frac{\bar{B}_2}{H}\,q\sum_r\sum_s\frac{[r,s]}{\mu_{rs}}\left(\frac{s}{r}\,a^2+\frac{r}{s}\frac{b^2}{m_1}\right)\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b} \tag{53}$$

$$D=-\frac{16}{\pi^4}\frac{2C}{H}\,qab\sum_r\sum_s\frac{[r,s]}{\mu_{rs}}\sin\frac{r\pi x}{a}\,.\sin\frac{s\pi y}{b} \tag{54}$$

$$V_1=-\frac{16}{\pi^3}\,q\sum_r\sum_s\frac{[r,s]}{\mu_{rs}}\,s\left[\frac{1}{a}\left(\frac{r^2}{s^2}\,b^2+\frac{a^2}{m_2}\right)\frac{\bar{B}_1}{H}+\right.$$
$$\left.+a\,.\,\frac{2C}{H}\right]\sin\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b} \tag{55}$$

$$V_2=-\frac{16}{\pi^3}\,q\sum_r\sum_s\frac{[r,s]}{\mu_{rs}}\,r\left[\frac{1}{b}\left(\frac{s^2}{r^2}\,a^2+\frac{b^2}{m_1}\right)\frac{\bar{B}_2}{H}+\right.$$
$$\left.+b\,.\,\frac{2C}{H}\right]\cos\frac{r\pi x}{a}\,.\sin\frac{s\pi y}{b} \tag{56}$$

$$R_1=\left(V_1+\frac{\partial D}{\partial y}\right)_{x=\frac{a}{2}}=-\frac{16}{\pi^3}\,q\sum_r\sum_s\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}[r,s]}{\mu_{rs}}\,.$$
$$.\,s\left[\frac{1}{a}\left(\frac{r^2}{s^2}\,b+\frac{a^2}{m_2}\right)\frac{\bar{B}_1}{H}+a\,.\,\frac{4C}{H}\right]\cos\frac{s\pi y}{b} \tag{57}$$

$$(58)\qquad R_2 = \left(V_2 + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{16}{\pi^3} q \sum_r \sum_s \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}} [r,s]}{\mu_{rs}} \cdot$$

$$\cdot\, r \left[\frac{1}{b}\left(\frac{s^2}{r^2} a^2 + \frac{b^2}{m_1}\right)\frac{\bar{B}_2}{H} + b \cdot \frac{4C}{H}\right] \cos\frac{r\pi x}{a}$$

$$(59)\qquad \hat{R} = -2(D)_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}} = \frac{16}{\pi^4} q \cdot \frac{4C}{H} ab \sum_r \sum_s \frac{(-1)^{\frac{r+s-2}{2}} [r,s]}{\mu_{rs}}$$

Przytem oznaczono dla skrócenia:

$$\mu_{rs} = r^4 \frac{\bar{B}_1}{H} \cdot \frac{b^2}{a^2} + s^4 \frac{\bar{B}_2}{H} \cdot \frac{a^2}{b^2} + 2r^2 s^2$$

$$(r, s = 1,\ 3,\ 5, \ldots)$$

c) W przypadku obciążenią prostokątnego $q \,.\, \alpha a \,.\, \beta b$ (przyczem $\alpha, \beta \leqq 1$), przyległego wierzchołkowi O (rys. 11) wypada

$$(60)\qquad \zeta = \frac{16}{\pi^6} q \frac{a^2 b^2}{H} \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{rs} \cdot \frac{\sin\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{s\pi y}{b}}{\mu_{rs}}$$

$$(r, s = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

jeżeli przyjmiemy dla skrócenia:

$$(r, s) = \sin\frac{r\alpha\pi}{2} \cdot \sin\frac{s\beta\pi}{2},$$

a wtedy

$$(61)\qquad \begin{cases} M_1 = \frac{16}{\pi^4} \cdot q \frac{\bar{B}_1}{H} \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} \left(\frac{r}{s} b^2 + \frac{s}{r} \frac{a^2}{m_2}\right) \sin\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{s\pi y}{b}, \\ M_2 = \frac{16}{\pi^4} \cdot q \frac{\bar{B}_2}{H} \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} \left(\frac{s}{r} a^2 + \frac{r}{s} \frac{b^2}{m_1}\right) \sin\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{s\pi y}{b}, \\ D = -\frac{16}{\pi^4} q \frac{2C}{H} \cdot ab \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} \cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}; \end{cases}$$

$$(62)\qquad \left\{ V_1 = \frac{16}{\pi^3} q \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} s \left[\frac{1}{a}\left(\frac{r^2}{s^2} b^2 + \frac{a^2}{m_2}\right)\frac{\bar{B}_1}{H} + a \cdot \frac{2C}{H}\right] \cos\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{s\pi y}{b}\right.$$

$$(62)\quad \left\{ V_2 = \frac{16}{\pi^3} q \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} r \left[\frac{1}{b} \left(\frac{s^2}{r^2} a^2 + \frac{b^2}{m_1} \right) \frac{\bar{B}_2}{H} + b . \frac{2C}{H} \right] \sin \frac{r\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b} . \right.$$

Reakcye podporowe brzegów $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, mają odpowiednio wartości:

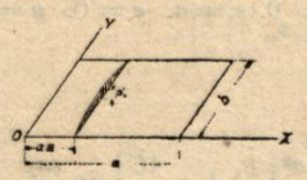
$$(63)\quad \left| \begin{aligned}
&(R_1)_{x=o} = -\left(V_1 + \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{x=o} = \\
&-\frac{16}{\pi^3} q \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} s \left[\frac{1}{a} \left(\frac{r^2}{s^2} b^2 + \frac{a^2}{m_2} \right) \frac{\bar{B}_1}{H} + a . \frac{4C}{H} \right] \sin \frac{s\pi y}{b}, \\
&(R_1)_{x=a} = \left(V_1 + \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{x=a} = \\
&= \frac{16}{\pi^3} q \sum_r \sum_s \frac{(-1)^r (r,s)^2}{\mu_{rs}} s \left[\frac{1}{a} \left(\frac{r^2}{s^2} b^2 + \frac{a^2}{m_2} \right) \frac{\bar{B}_1}{H} + a . \frac{4C}{H} \right] \sin \frac{s\pi y}{b}, \\
&(R_2)_{y=o} = -\left(V_2 + \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{y=o} = \\
&-\frac{16}{\pi^3} q \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} r \left[\frac{1}{b} \left(\frac{s^2}{r^2} a^2 + \frac{b^2}{m_1} \right) \frac{\bar{B}_2}{H} + b . \frac{4C}{H} \right] \sin \frac{r\pi x}{a}, \\
&(R_2)_{y=b} = \left(V_2 + \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{y=b} = \\
&= \frac{16}{\pi^3} q \sum_r \sum_s \frac{(-1)^s (r,s)^2}{\mu_{rs}} r \left[\frac{1}{b} \left(\frac{s^2}{r^2} a^2 + \frac{b^2}{m_1} \right) \frac{\bar{B}_2}{H} + b . \frac{4C}{H} \right] \sin \frac{r\pi x}{a},
\end{aligned} \right.$$

a reakcye narożne w punktach (o, o), (o, b), (a, o), (a, b):

$$(64)\quad \left| \begin{aligned}
&\hat{R}_{oo} = \frac{16}{\pi^4} q \cdot \frac{4C}{H} ab \sum_r \sum_s \frac{(r,s)^2}{\mu_{rs}} \\
&\hat{R}_{ob} = \frac{16}{\pi^4} q \cdot \frac{4C}{H} ab \sum_r \sum_s \frac{(-1)^{s+1} (r,s)^2}{\mu_{rs}}, \\
&\hat{R}_{ao} = \frac{16}{\pi^4} q \cdot \frac{4C}{H} ab \sum_r \sum_s \frac{(-1)^{r+1} (r,s)^2}{\mu_{rs}}, \\
&\hat{R}_{ab} = \frac{16}{\pi^4} q \cdot \frac{4C}{H} ab \sum_r \sum_s \frac{(-1)^{r+s} (r,s)^2}{\mu_{rs}}
\end{aligned} \right.$$

Z ostatnich wzorów łatwo rozpoznać, że wartości $\hat{R}_{ob}$ i $\hat{R}_{ao}$ muszą leżeć między największą wartością narożnej reakcyi $\hat{R}_{oo}$, a najmniejszą $\hat{R}_{ab}$.

d) Gdy obciążenie w dowolnym przekroju poprzecznym (równoległym do OY) płyty o odciętej $x = \alpha a$ jest rozłożone według prawa (rys. 12):



Rys. 12.

$$p' = p'_0 \sin \frac{\pi y}{b}$$

wtedy ze spółczynników A_{rs} w równaniu (43) znikają wszystkie te, w których $s \neq 1$, a wyrażenie dla ζ tworzy prosty szereg nieskończony postaci:

$$\zeta = \frac{2}{\pi^4} p'_0 \frac{ab^2}{H} \sin \frac{\pi y}{b} \sum_r \frac{\sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \cdot \sin \frac{r\pi x}{a} \tag{65}$$

$$(r = 1, 2, 3, \ldots)$$

a oznaczeniem

$$\mu_{r1} = r^4 \frac{\bar{B}_1}{H} \frac{b^2}{a^2} + 2 r^2 + \frac{\bar{B}_2}{H} \frac{a^2}{b^2}$$

Stosownie do tego przedstawiają się wzory dla momentów etc. w następującej postaci:

$$(66) \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{\pi^2} p'_0 \frac{\bar{B}_1}{H} a \sin \frac{\pi y}{b} \sum_r \frac{\sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \left(r^2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{m_2} \right) \sin \frac{r\pi x}{a}, \\ M_2 &= \frac{2}{\pi^2} p'_0 \frac{\bar{B}_2}{H} a \sin \frac{\pi y}{b} \sum_r \frac{\sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \left(\frac{r^2}{m_1} \frac{b^2}{a^2} + 1 \right) \sin \frac{r\pi x}{a}, \\ D &= -\frac{2}{\pi^2} p'_0 \frac{2C}{H} b \cos \frac{\pi y}{b} \sum_r r \frac{\sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \cos \frac{r\pi x}{a}; \end{aligned} \right.$$

$$(67) \left\{ \begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{\pi} p'_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sum_r \frac{r \sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \left[\left(r^2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\bar{B}_1}{H} + \frac{2C}{H} \right] \cos \frac{r\pi x}{a}; \\ V_2 &= \frac{2}{\pi} p'_0 \frac{b}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \sum_r \frac{\sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \left[\left(\frac{r^2}{m_1} + \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{\bar{B}_2}{H} + r^2 \frac{2C}{H} \right] \sin \frac{r\pi x}{a}; \end{aligned} \right.$$

$$(68) \left| (R_1)_{x=a} = -\frac{2}{\pi} p'_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sum_r \frac{r \sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \left[\left(r^2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\bar{B}_1}{H} + \frac{4C}{H} \right], \right.$$

$$
(68)\quad \left\{\begin{aligned}
&(R_1)_{x=a} = \frac{2}{\pi} p'_o \sin\frac{\pi y}{b} \sum_r \frac{(-1)^r r \sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \left[\left(r^2\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{\bar{B}_1}{H}+\frac{4C}{H}\right],\\
&(R_2)_{y=o} = (R_2)_{y=b} =\\
&= -\frac{2}{\pi} p'_o \frac{b}{a} \sum_r \frac{\sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}} \left[\left(\frac{r^2}{m_1}+\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{\bar{B}_2}{H}+r^2\frac{4C}{H}\right] \sin\frac{r\pi x}{a};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(69)\quad \left\{\begin{aligned}
&\hat{R}_{oo} = \hat{R}_{ob} = \frac{2}{\pi^2} p'_o \frac{4C}{H} b \sum_r \frac{r \sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}},\\
&\hat{R}_{ao} = \hat{R}_{ab} = \frac{2}{\pi^2} p'_o \cdot \frac{4C}{H} b \sum_r \frac{(-1)^{r+1} \cdot r \sin r\alpha\pi}{\mu_{r1}}
\end{aligned}\right.
$$

Większość otrzymanych wyrażeń odznacza się bardzo silną zbieżnością, o ile wartość stosunku $b^4\bar{B}_1 : a^4\bar{B}_2$, lub ε nie zbacza zbyt wiele od jednostki i jakkolwiek nie nadają się do zwykłego praktycznego zastosowania, to jednak mogą oddać dobre usługi przy interpretacyi wyników doświadczalnych.

Gdy wypada zbadać stan napięcia i odkształcenia w pobliżu krótkiego boku bardzo długiej płyty prostokątnej albo w okolicy miejsca bezpośrednio obciążonego, leżącego daleko od końców płyty, to można płytę uważać za nieskończenie długą, przez co upraszcza się zastosowanie ogólnej teoryi. W ten sposób można, jak zobaczymy poniżej, rozwiązać stosunkowo łatwo niektóre praktycznie ważne zadania.

III. Płyta bardzo długa na równoległych brzegach swobodnie podparta.

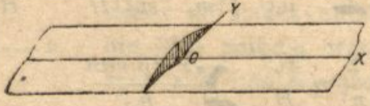
§ 12. Działanie liniowego obciążenia w przekroju o kierunku szerokości płyty. Zasięg działania obciążenia. Ważna różnica w zachowaniu się płyty w przypadku $\eta > 1$ i $\eta < 1$. Ograniczenie ważności twierdzenia M. Mesnager'a w przypadku $\eta > 1$. Działanie ciężarów skupionych.

Zadanie upraszcza się szczególnie, gdy obciążenie liniowe p' jest określone równaniem

$$p' = p'_o \sin\frac{n\pi y}{b},\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Przy ograniczeniu do symetrycznych przypadków obciążenia i obiorze układu spółrzędnych według rys. 13, przybiera powyższe prawo obciążenia postać

$$p' = p'_0 \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$



Rys. 13.

Wtedy w każdym punkcie płyty na prawo (lub lewo) od bezpośrednio obciążonej osi Y-ów musi się spełnić równanie różniczkowe

$$\bar{B}_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = 0,$$

a rozwiązanie znajdujemy drogą wskazaną przez M. Levy'ego, przyjmując

$$\zeta = X \cos \frac{n\pi y}{b},$$

przyczem X oznacza nieznaną na razie funkcyę samego x. To wyrażenie czyni widocznie zadość warunkom krańcowym $\zeta = 0$ i $M_2 = 0$ dla $y = \pm \frac{b}{2}$. Wstawiwszy je w równanie różniczkowe powierzchni ugięcia, otrzymamy do wyznaczenia X zwyczajne równanie różniczkowe liniowe o stałych spółczynnikach

$$X^{IV} - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{H}{\bar{B}_1} X'' + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} X = 0,$$

którego całka ogólna ma postać:

$$X = C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{\beta_2 x} + C_3 e^{\beta_3 x} + C_4 e^{\beta_4 x}.$$

Wielkości

$$\left.\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\} = \frac{n\pi}{b}\sqrt{\frac{H \pm \sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}}{\bar{B}_1}}, \quad \left.\begin{matrix}\beta_3\\ \beta_4\end{matrix}\right\} = -\frac{n\pi}{b}\sqrt{\frac{H \pm \sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}}{\bar{B}_1}}$$

przedstawiają przytem cztery pierwiastki równania:

$$\beta^4 - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{H}{\bar{B}_1}\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = 0$$

Ażeby dla $x = \infty$ było $\zeta = 0$, muszą dwie pierwsze stałe całkowania C_1 i C_2 być równe zeru. Do wyznaczenia dwu innych stałych C_3 i C_4 mamy dwa warunki krańcowe:

Dla $x = 0$ jest $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ a siła poprzeczna $V_1 = -\frac{p'}{2}$.

Stosownie do tego, czy $H^2 \gtreqless \bar{B}_1 \bar{B}_2$, czyli $\eta \gtreqless 1$, będzie znalezione rozwiązanie mieć jedną z trzech następujących postaci:

I) $\zeta = (C_3 e^{\beta_3 x} + C_4 e^{\beta_4 x}) \cos \frac{n\pi y}{b}$, przy $H^2 > \bar{B}_1 \bar{B}_2$ $(\eta > 1)$;

II) $\zeta = (C' + C'' x) e^{-\beta_0 x} \cos \frac{n\pi y}{b}$, przy $H^2 = \bar{B}_1 \bar{B}_2$ $(\eta = 1)$,

z wartością

$$\beta_0 = \frac{n\pi}{b}\sqrt{\frac{H}{\bar{B}_1}} = \frac{n\pi}{b}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}};$$

III) $\zeta = (A_3 \cos \varphi x + A_4 \sin \varphi x) e^{-\vartheta x} \cos \frac{n\pi y}{b}$, przy $H^2 < \bar{B}_1 \bar{B}_2$ $(\eta < 1)$,

z wartościami

$$\vartheta = \frac{n\pi}{b}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} + \frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_1}}, \quad \varphi = \frac{n\pi}{b}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_1}}.$$

Z wymienionych powyżej warunków krańcowych znajdujemy w I przypadku:

$$C_3 = -\frac{\beta_4}{\beta_3} C_4 = \frac{p'_n}{2\bar{B}_1 \beta_3 (\beta_3^2 - \beta_4^2)},$$

a zatem

$$\zeta = \frac{p'_n}{2\bar{B}_1(\beta_3^2 - \beta_4^2)}\left(\frac{e^{\beta_3 x}}{\beta_3} - \frac{e^{\beta_4 x}}{\beta_4}\right) \cos \frac{n\pi y}{b},$$

albo też

(71.I) $$\zeta = \frac{1}{4n^3\pi^2} \frac{b^2 p'_n}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \left(\beta e^{-n\frac{x}{\beta}} - \alpha e^{-n\frac{x}{\alpha}}\right) \cos \frac{n\pi y}{b},$$

jeżeli oznaczymy:

$$(70)\quad \begin{cases} -\dfrac{n}{\beta_3} = \alpha = \dfrac{b}{\pi}\sqrt{\dfrac{H}{\bar{B}_2} - \sqrt{\left(\dfrac{H}{\bar{B}_2}\right)^2 - \dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}, \\ -\dfrac{n}{\beta_4} = \beta = \dfrac{b}{\pi}\sqrt{\dfrac{H}{\bar{B}_2} + \sqrt{\left(\dfrac{H}{\bar{B}_2}\right)^2 - \dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}. \end{cases}$$

Z ostatnich równań wynikają jeszcze wzory:

$$(72)\quad \begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{2b}{\pi}\sqrt{\tfrac{1}{2}\dfrac{H}{\bar{B}_2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}, & \beta - \alpha = \dfrac{2b}{\pi}\sqrt{\tfrac{1}{2}\dfrac{H}{\bar{B}_2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}, \\ \alpha\beta = \dfrac{b^2}{\pi^2}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}, & \beta^2 - \alpha^2 = \dfrac{2b^2}{\pi^2}\sqrt{\left(\dfrac{H}{\bar{B}_2}\right)^2 - \dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}, \end{cases}$$

które przydadzą się często w dalszych rachunkach.

W II przypadku wypada:

$$(71.\mathrm{II})\quad \zeta = \frac{p_0'}{4\bar{B}_1}\frac{\gamma^3}{n^3}\left(1 + \frac{nx}{\gamma}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

jeżeli

$$\gamma = \frac{b}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}.$$

Nakoniec w III przypadku mamy:

$$A_3 = \frac{p_0'}{4\bar{B}_1\vartheta(\vartheta^2 + \varphi^2)}, \quad A_4 = \frac{p_0'}{4\bar{B}_1\varphi(\vartheta^2 + \varphi^2)},$$

$$\zeta = \frac{p_0'}{4\bar{B}_1(\vartheta^2 + \varphi^2)}e^{-\vartheta x}\left(\frac{\cos\varphi x}{\vartheta} + \frac{\sin\varphi x}{\varphi}\right)\cos\frac{n\pi y}{b},$$

albo

$$(71.\mathrm{III})\quad \zeta = \frac{p_0'}{4\pi^2}\cdot\frac{b^2}{\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2}}\cdot\frac{1}{n^3}\left(\alpha'\cos\frac{nx}{\beta'} + \beta'\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

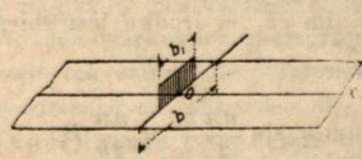
$$(73)\quad \begin{cases} \vartheta = \dfrac{n}{\alpha'}, \quad \alpha' = \dfrac{b}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} + \tfrac{1}{2}\dfrac{H}{\bar{B}_1}}}, \end{cases}$$

$$(73)\qquad \left\{ \varphi = \frac{n}{\beta'},\quad \beta' = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_1}}}. \right.$$

Przejście od I do III przypadku można także wykonać przez podstawienie

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha'} + i\,\frac{1}{\beta'},\quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha'} - i\,\frac{1}{\beta'}.$$

Przyjąwszy teraz obciążenie rozłożone równomiernie $q'b_1$ na środkowej części o długości b_1 (rys. 14), można właściwe obcią-



Rys. 14.

żenie p' przedstawić jako funkcyę zmiennej y w postaci szeregu Fouriera

$$p'(y) = \sum_n p'_n \cos\frac{n\pi y}{b}\qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Każdemu wyrazowi tego szeregu odpowiada wyraz o postaci (71.I), względnie (71.II), lub (71.III) w szeregu dla ζ. Znanym sposobem znajdujemy

$$p'_n = \frac{4q'}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b};$$

równanie powierzchni ugięcia ma przeto dla przyjętego obciążenia postać:

$$(74.\mathrm{I})\qquad \zeta = \frac{2}{\pi^5} \cdot \frac{q' b^4}{\bar{B}_2(\alpha+\beta)} \cdot \sum_{n=1,3,5\ldots}^{(n_1)} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta - \alpha} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

albo

$$(74.\mathrm{II})\qquad \zeta = \frac{q'\gamma^3}{\pi \bar{B}_1} \sum^{(n_1)} \frac{1}{n^4} \left(1 + \frac{nx}{\gamma}\right) e^{-\frac{nx}{\gamma}} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

albo wreszcie

$$(74.\text{III})\qquad \zeta = \frac{q' b^2}{\pi^3 \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}} \sum_n \frac{(n_1)}{n^4} \left(\alpha' \cos\frac{nx}{\beta'} + \beta' \sin\frac{nx}{\beta'} \right) e^{-\frac{nx}{\alpha'}} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

zależnie od tego, czy mamy do czynienia z I, II czy też III przypadkiem. Dla skrócenia wprowadzono przytem oznaczenie

$$(75)\qquad \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b} = (n_1).$$

Wszystkie otrzymane rozwinięcia szeregowe są tak silnie zbieżne, że najczęściej można poprzestać na pierwszym wyrazie jako wartości przybliżonej. Także w szczególnym przypadku ciężaru skupionego $P = \lim\limits_{b_1=0} q' b_1$ w środku jest zbieżność zupełnie zadowalająca. Wówczas jest

$$\lim_{b_1=0} q' \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b} = \frac{n\pi}{2b} P,$$

a zatem odpowiadające równania powierzchni ugięcia (74) przekształcają się na następujące:

$$(76.\text{I})\qquad \zeta = \frac{Pb}{2\pi^2 \sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \sum_n \frac{1}{n^3} \left(\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}} \right) \cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$(76.\text{II})\qquad \zeta = \frac{P\gamma^3}{2 \bar{B}_1 b} \sum_n \frac{1}{n^3} \left(1 + \frac{nx}{\gamma} \right) e^{-\frac{nx}{\gamma}} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$(76.\text{III})\qquad \zeta = \frac{Pb}{2\pi^2 \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}} \sum_n \frac{1}{n^3} \left(\alpha' \cos\frac{nx}{\beta'} + \beta' \sin\frac{nx}{\beta'} \right) e^{-\frac{nx}{\alpha'}} \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

$$(n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Wszystkie powyższe wyrażenia dla ζ są oczywiście ważne tylko dla połowy płyty, zawierającej dodatnią oś X-ów. Dla drugiej połowy wypadnie we wzorach zastąpić x przez $-x$. W każdym razie maleją ugięcia ζ ze wzrostem odległości od osi Y-ów tak szybko, że jako zasięg działania obciążenia można przyjąć mniej więcej

$$x = \tfrac{3}{2}\, b_{red},$$

jeżeli

$$b_{red} = b \sqrt{\frac{H}{\bar{B}_2} + \sqrt{\left(\frac{H}{\bar{B}_2}\right)^2 - \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}} = b \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \sqrt{\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}} \quad \text{w I przyp.,}$$

$$b_{red} = b\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \quad \text{w II przypadku i}$$

$$b_{red} = \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} + \frac{1}{2}\frac{H}{B_1}}} = b\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \quad \text{w III przypadku.}$$

Stąd możemy wywnioskować, że we wszystkich przypadkach obciążenia samego środkowego przekroju płyty w kierunku szerokości, powierzchnia ugięcia płyty i odpowiadający stan napięcia okazują się przy $a \geqq 3b_{red}$, praktycznie biorąc, niezależne od długości płyty a. W tych warunkach zachowuje się płyta o skończonej długości prawie tak samo, jak płyta nieskończenie długa. Na odwrót można powiedzieć, że w bardzo długiej płycie o rozpiętości poprzecznej b współdziała tylko część płyty o szerokości $3b_{red}$ w przypadku liniowego poprzecznego obciążenia [1]. U płyt z materyału równokierunkowego jest oczywiście

$$b_{red} = b$$

Przekroje podłużne powierzchni ugięcia przedstawiają się w przypadkach I i II jako krzywe o ciągle zmniejszającej się krzywiźnie, które zbliżają się szybko asymptotycznie ku osi X-ów, nie przecinając jej w skończoności. Natomiast w przypadku III staje się krzywa falistą i przecina nieskończenie wiele razy oś X-ów. Długość fali wynosi:

[1] Obustronny zasięg działania obciążenia, t. j. $3b_{red}$ zależy, jak widzimy, głównie od stosunku sztywności $B_2 : B_1$. Zmniejszenie się zasięgu w miarę wzrostu wartości stosunków $B_2 : B_1$ pokazuje nadto następująca tabliczka, obliczona dla II-go przypadku:

$\frac{B_2}{B_1} =$	1	2	3	5	10	20	50	100	1000
$\frac{3b_{red}}{b} =$	3	2,52	2,28	2,01	1,68	1,41	1,13	0,96	0,53

Tej szerokości działania obciążenia nie należy mięszać z szerokością, na którą rozkładamy równomiernie dane obciążenie skupione, aby obliczenie płyty zamienić na obliczenie belki. O takiej zastępczej szerokości będzie poniżej mowa.

$$\frac{2b}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}-\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_1}}}=2b\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{1-\eta}}$$

Dzięki czynnikowi $e^{-\frac{n x}{\alpha'}}$ ubywa bardzo szybko wysokość fali, podobnie, jak to się dzieje przy działaniu ciężaru skupionego na belkę w sposób ciągły sprężyście podpartą, jednakowoż naprzemianległe obniżenia i podniesienia płyty pod rozpatrywanem obciążeniem dałyby się zapewne łatwo zaobserwować przy doświadczeniach. Twierdzenie p. M. Mesnager'a [1], że każdy ciężar skupiony, działający na prostokątną płytę dookoła swobodnie poziomo podpartą, wywołuje ugięcia tego samego znaku wszystkich punktów płyty, nie jest przeto ogólnie ważnem dla płyt nierównokierunkowych; ale podobnież nie wolno wnioskować z rozwiązania równania różniczkowego (15) dla gęstych krat belkowych bez sztywności przy skręcaniu, że także i w zwykłej płycie każdy ciężàr skupiony wywoła falistą powierzchnię ugięcia, jak to czytamy w godnem uwagi sprawozdaniu francuskiej „Rady głównej dróg i mostów" z r. 1912 [2]. Faliste wygięcie płyty w tych warunkach dowodziłoby tylko, że mamy wogóle do czynienia z przypadkiem III-im [3].

W przypadku całkowitego równomiernego obciążenia $q'b$ znajdujemy łatwo dla $x=y=0$ strzałkę ugięcia:

$$f=\frac{2}{\pi^5}\frac{q'b^4}{\bar{B}_2(\alpha+\beta)}\sum_{n=1,3,5,\dots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4}=\frac{q'b^3}{\pi^4\bar{B}_2}\cdot\frac{0{,}989}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}} \tag{74.I, IIIa}$$

jeżeli $H^2 \gtrless \bar{B}_1\bar{B}_2$, czyli $\eta \gtrless 1$, zaś

$$f=0{,}01015\,\frac{q'b^3}{\bar{B}_2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \tag{74.IIa}$$

[1] C. R. 1916, T. 163, pag. 84.

[2] Calcul des hourdis en béton armé. Note jointe à l'avis du Conseil Général des Ponts et Chaussées. Ann. d. P. et Ch. 1912—VI.

[3] Ob. Huber M. T., Sur la généralisation d'un théorème de M. Mesnager concernant le sens des déplacements d'une plaque rectangulaire. — C. R. 1920.

jeżeli $H^2 = \bar{B}_1 \bar{B}_2$, czyli $\eta = 1$. Liczbowy spółczynnik ostatniego wyrażenia określa przytem równanie:

$$\frac{1}{\pi^4} \cdot \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4} = \frac{0{,}989}{\pi^4} = 0{,}0101_5$$

Podobnież otrzymamy w przypadku ciężaru skupionego P w środku płyty

$$(76.\mathrm{I\ IIIa}) \quad f = \frac{Pb^2}{2\pi^3 \bar{B}_1} \cdot \frac{\sum \frac{1}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}} \ldots (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

względnie

$$(76.\mathrm{IIa}) \quad f = \frac{Pb^2}{2\pi^3 \bar{B}_2} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \sum \frac{1}{n^3} \ldots (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Ponieważ $\sum \frac{1}{n^3} = 1{,}051_8$, więc

$$\frac{1}{2\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} = 0{,}0169_6$$

Ten spółczynnik pozostaje oczywiście bez zmiany w szczególnym przypadku $\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = H$ (t. j. równokierunkowości materyału płyty) i był dla tego przypadku podany już przez dra inż. H. Leitz'a [1].

Przy ogólniejszem obciążeniu $q'b_1$ mamy w I przypadku następujące wzory dla momentów zgięcia:

$$(77.\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \frac{q'}{\pi} \cdot \frac{\bar{B}_1}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \cdot \sum_n \frac{(n_1)}{n^2} \left[\left(\beta \sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \frac{\alpha}{m_2} \right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\alpha \sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} - \frac{\beta}{m_2} \right) e^{-\frac{nx}{\beta}} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ M_2 &= \frac{q'}{\pi} \cdot \frac{\bar{B}_2}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \cdot \sum_n \frac{(n_1)}{n^2} \left[\left(\frac{\beta}{m_1} \sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \alpha \right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha}{m_1} \sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \beta \right) e^{-\frac{nx}{\beta}} \right] \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right.$$

[1] Berechnung der frei aufliegenden rechteckigen Platten. Berlin 1914.

W początku spółrzędnych osiągają te momenty największe wartości:

$$(78.\mathrm{I})\quad \left|\begin{aligned} M_{1\,max} &= \frac{2}{\pi^3}\cdot\frac{q'b^2}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\left(\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+\frac{1}{m_2}\right)\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}, \\ M_{2\,max} &= \frac{2}{\pi^3}\cdot\frac{q'b^2}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+1\right)\sum_n\frac{(n_1)}{n^2} \end{aligned}\right.$$

Znaczenie skróconego symbolu (n_1) określa przytem wzór (75).

W przypadku równomiernego obciążenia liniowego całej rozpiętości b staje się $b_1 = b$, $(n_1) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, a

$$\sum\frac{(n_1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots = \sim 0{,}917$$

Wówczas przybierają wzory (78.I) następującą postać, ważną widocznie i dla przypadku III:

$$(79.\mathrm{I,III})\quad \left|\begin{aligned} M_{1\,max} &= 0{,}0929_1\,\frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}+\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}}\cdot q'b, \\ M_{2\,max} &= 0{,}0929_1\,\frac{\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+1}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}}\cdot q'b \end{aligned}\right.$$

Stosunek największych wartości obu momentów zginających w środku

$$(79)\quad \frac{M_{1\,max}}{M_{2\,max}} = \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+1}$$

jest niezależny od d ł u g o ś c i o b c i ą ż o n e g o o d c i n k a b_1 i ma wartość 1 w przypadku $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$, $m_1 = m_2$. Wogóle wartość tego stosunku wzrasta lub ubywa wraz z wartością stosunku $\bar{B}_1 : \bar{B}_2$.

Skoro np. $b_1 = \frac{1}{9} b$, to

$$\sum \frac{\nu^{(n_1)}}{n^2} = 0{,}2997,$$

a zatem

$$M_{1max} = 0{,}2733 \frac{\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}} + \frac{1}{m_2}\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\overline{B}_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}} q' b_1,$$

$$M_{2max} = 0{,}2733 \frac{\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}} + 1}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\overline{B}_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}} q' b_1.$$

Skupienie liniowego obciążenia na dziewiątej części rozpiętości b sprawia tedy, że największe wartości momentów zginających rosną prawie trzykrotnie.

W praktycznych przypadkach można działanie ciężaru punktowego uważać co najwyżej za równoważne powyższemu skupieniu obciążenia. Z otrzymanych wzorów rozpoznajemy tedy wyraźnie rozkładające ciężar działanie płyty (w zestawieniu z belką). Skoro w szczególności przyjmiemy $B_1 = B_2$, $m_1 = m_2 = 6$, to obadwa ostatnie wzory dają:

$$M_{1max} = M_{2max} = M = 0{,}319\, q' b_1 = 0{,}319\, P = \frac{1}{4}\, 1{,}276\, P$$

albo

$$M \frac{b}{1{,}276} = \frac{1}{4} Pb$$

Z tego wnosimy, że ciężar skupiony P rozkłada się niejako na szerokość $\frac{b}{1{,}276} = 0{,}784\, b$, albowiem przy tej szerokości płyty podpartej jak belka o rozpiętości b i obciążonej w środkowym przekroju, wypada jako moment zginający w przekroju niebezpiecznym: $\frac{1}{4} Pb : 0{,}784\, b = 0{,}319\, P$. Jeżeli $B_2 > B_1$, to M_{2max} staje się większem, a ciężar P rozdziela się, praktycznie biorąc, na szerokość tem mniejszą, im większa jest sztywność zginania B_2 w porównaniu do B_1. Tak np. mamy dla $B_2 = 2{,}07\, B_1$, $(m_1 = m_2 = 6)$:

$$M_{2max} = 0{,}407\, P,$$

a ciężar rozkłada się na szerokość $0{,}614\, b$.

Dla żebrowanej płyty stropowej jest B_2 kilkakrotnie przynajmniej większe od B_1, a $\frac{1}{m_1}$ można, według wywodów w § 6, przyjąć bez wielkiego błędu równe zeru, a zatem w rozpatrywanym przypadku ciężaru praktycznie skupionego będzie:

$$M_{2max} = M = 0{,}2733 \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \cdot P = \tfrac{1}{4} \cdot 1{,}093 \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\, P,$$

albo

$$M \cdot \frac{b}{1{,}093} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} = \tfrac{1}{4} Pb,$$

a ciężar rozkłada się praktycznie na szerokość:

$$a_1 = \frac{b}{1{,}093} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}$$

Dla kilku wartości stosunku $B_2 : B_1$ podaje następująca tabliczka odpowiadające wartości $a_1 : b$:

$B_2 : B_1 =$	5	10	15	20	25	50	100
$a_1 : b =$	0,614	0,514	0,464	0,433	0,408	0,344	0,289

W przypadku równomiernego obciążenia liniowego całej rozpiętości b (rów. 79 I, III), zwiększają się wartości a_1 w stosunku 0,2733 : 0,0929, to zn. około 3-krotnie, jeżeli przeto ciężar skupiony (w praktyce) rozkłada się na r żeber, to w powyższym przypadku przenosi się obciążenie na $3r$ żeber.

Dla momentu skręcającego znajdujemy wyrażenie:

$$(80.\mathrm{I}) \qquad D = -\frac{2}{\pi^2} q' b \frac{C}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \cdot \sum^{(n_1)} \frac{1}{n^2} \left(e^{-\frac{n\pi x}{\beta}} - e^{-\frac{n\pi x}{\alpha}}\right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Ponieważ wszystkie reakcye podporowe znikają w nieskończoności, więc muszą być wszędzie równe wartości siły poprzecznej V_2 dla $y = \pm \frac{b}{2}$. Mamy przeto:

$$(81.\mathrm{I}) \qquad (V_2)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{q'}{b} \cdot \frac{\bar{B}_2}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \cdot \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n_1)}{n} \left[\left\{\beta\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \alpha\right\} e^{-\frac{n\pi x}{\alpha}} - \left\{\alpha\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \beta\right\} e^{-\frac{n\pi x}{\beta}}\right].$$

Zbieżność tego szeregu można zakwestyonować tylko przy $x = 0$. Jakoż przy tej wartości x staje się szereg rozbieżnym, jeżeli nadto jest $b_1 = b$. Zważywszy jednak, że całka

$$2\int_0^\infty (V_2)_{y-\frac{b}{2}}\,dx$$

daje zawsze połowę wartości obciążenia, jak być powinno wedle warunków równowagi, wnosimy, że prawdziwa wartość V_2 w punkcie $(o, \frac{b}{2})$ jest nieskończenie wielka, ale tak, że reakcya

$$\int_{-\Delta x}^{+\Delta x} (V_2)_{y-\frac{b}{2}}\,dx$$

pozostaje skończoną przy dowolnie małych skończonych wartościach Δx. W istocie łatwo okazać, że $(V_2)_{y-\frac{b}{2}}$ dla $x=0$, $b_1=b$ staje się nieskończenie wielkiem, jak wyrażenie $\log\frac{1+z}{1-z}$ dla $z=1$.

Jeżeli płyta jest obciążona tylko ciężarem skupionym P w środku, to szereg dla reakcyj podporowych da się łatwo zesumować. Otrzymujemy tedy

$$\text{(82.I)}\quad (V_2)_{y-\frac{b}{2}} = -\frac{\pi}{4}\frac{P}{b^2}\cdot\frac{\bar{B}_2}{\sqrt{H^2-\bar{B}_1\bar{B}_2}}\Bigg[\Bigg\{\beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-\alpha\Bigg\}\frac{1}{Ch^2\frac{x}{\alpha}}-$$

$$-\Bigg\{\alpha\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-\beta\Bigg\}\frac{1}{Ch^2\frac{x}{\beta}}\Bigg]$$

przyczem Ch oznacza dostawę hiperboliczną.

To wyrażenie osiąga krańcową wartość dla $x=0$, a mianowicie:

$$\text{(83.I III)}\quad Max\,|V_2|_{y-\frac{b}{2}} = \frac{P}{4b}\cdot\frac{1+\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}+\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}}}=$$

$$=\frac{P}{4b}\cdot\frac{\frac{1}{m_1}\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}+\frac{2C}{\bar{B}_1}+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_1}}}.$$

Natomiast wartości M_{1max} i M_{2max} stają się logarytmicznie nie-skończone, co jednakowoż nie ma żadnego znaczenia fizycznego, a więc i praktycznego, gdyż przyjęte punktowe obciążenie w rzeczywistości nigdy nie zachodzi, a tylko stanowi wygodny upraszczający schemat w konkretnych zadaniach. Każde rzeczywiste obciążenie „skupione" przenosi się przez skończoną, choć małą powierzchnię, a konstruktorzy dążą do możliwego zwiększenia tej powierzchni, aby uniknąć niebezpieczeństwa miejscowego nadwerężenia materyału Praktycznie traktujemy obciążenie jako skupione w jednym punkcie tylko wtedy, gdy pole przenoszące siłę jest małe i trudne do wyznaczenia. To schematyzowanie bardzo upraszcza rachunek we wszelkich zagadnieniach belek, nie wpływając zasadniczo na dokładność. Błąd przytem popełniony jest wogóle mały i wychodzi na korzyść pewności. W zadaniach, odnoszących się do płyt przedstawia się sprawa widocznie całkiem inaczej. Teorya prowadzi do niespodziewanego na pierwszy rzut oka wyniku, że każde nawet najmniejsze obciążenie, skupione w jednym punkcie, wywołuje nieskończenie wielkie momenty zgięcia w obciążonem miejscu. Dokładny rachunek siłami skupionemi jest przeto w zagadnieniach płyt zupełnie niedopuszczalny. Dlaczego teorya płyt zawodzi w tym szczególnym przypadku, podczas gdy teorya belek nie tylko nie prowadzi do sprzeczności, lecz czyni także zadość wszelkim praktycznym wymogom co do dokładności? Łatwo odpowiedzieć na to pytanie zważywszy, że obciążenia skupione, przyjmowane w teoryi belek nie są właściwie siłami punktowemi, lecz przedstawiają się jako takie tylko w tym rzucie, w którym przedstawiamy zwykle schematyczny widok obciążonej belki; ale w przestrzeni przyjmuje się je zawsze milcząco jako siły liniowe, działające na całej szerokości przekroju. Otóż przy tem założeniu nie wykazują także nasze wzory dla płyt (78) niczego anormalnego i dają przy każdej skończonej wartości obciążonego odcinka b_1 oznaczone skończone wartości momentów zgięcia, względnie naprężeń. W odniesieniu do obciążenia skupionego wypada tylko wyniki teoryi sprężystości interpretować w ten sposób, że silna koncentracya obciążenia jest stosunkowo o wiele niebezpieczniejszą dla płyt aniżeli dla belek. Dlatego wszelkie środki, które dane ciężary skupione rozkładają na większą powierzchnię, przyczyniają się znacznie do powiększenia odporności płyty. Należy jeszcze zwrócić uwagę na tę okoliczność, że gdy liniowe wymiary obciążonej części powierzchni płyty są małe w porównaniu do jej grubości, to rozkład naprężeń w okolicy obciążonego miejsca może się dość znacznie różnić od rozkładu odpowiadającego zwykłym założeniom teoryi płyt. W tym mianowicie przypadku nie wolno już pomijać pionowych naprężeń normalnych σ_z, ponieważ te naprężenia muszą wogóle mieć wpływ na rozkład pozostałych składowych stanu napięcia. Ten wpływ staje się oczywiście, „caeteris paribus“, tem większym im cieńszą jest płyta. Podobnie jak żwirówka przenosi obciążenie kół na pomost drogowego mostu, tak też rozdziela się obciążenie skupione powierzchni płyty na pewne pole warstwy obojętnej, a wielkość tego pola rośnie i maleje z grubością płyty. Ta rola grubości płyty była przedmiotem interesującego teoretycznego badania w przytoczonej na wstępie pracy d r a i n ż. H. H e n c k y'e g o.

Powracając teraz do równań powierzchni ugięcia dla równomiernego obciążenia liniowego $q'b_1$, otrzymujemy z (71.II) następujące wzory dla momentów zginających w II przypadku:

$$(77.\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} M_1 &= \frac{q'\gamma}{\pi}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}\left[1-\frac{nx}{\gamma}+\frac{1}{m_2}\frac{\gamma^2\pi^2}{b^2}\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ M_2 &= \frac{q'\gamma}{\pi}\cdot\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}\left[\frac{1}{m_1}\left(1-\frac{nx}{\gamma}\right)+\right.\\ &\left.+\frac{\gamma^2\pi^2}{b^2}\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\right.$$

Momenty zginające osiągają największe wartości widocznie w środku obciążonego przekroju ($x=0$, $y=0$), a mianowicie:

$$(78.\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} M_{1\,max} &= \frac{q'\gamma}{\pi}\left(1+\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right)\sum_n \frac{(n_1)}{n^2},\\ M_{2\,max} &= \frac{q'\gamma}{\pi}\left(\frac{1}{m_1}+\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right)\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}.\end{aligned}\right.$$

Stosunek obu największych wartości momentów zgięcia określa to samo wyrażenie (79), co w I przypadku.

Moment skręcający

$$(80.\mathrm{II})\qquad D = -\frac{q'\gamma}{b}\,\frac{2C}{\bar{B}_1}\sum_n \frac{(n_1)}{n}\,x e^{-\frac{nx}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

a reakcye podporowe:

$$(81.\mathrm{II})\quad (V_2)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{q'\gamma}{b}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n}\left[\left(\frac{1}{m_1}\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}+\frac{2C}{\bar{B}_1}\right)\left(1-\frac{nx}{\gamma}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}.$$

W krańcowym przypadku ciężaru skupionego P w środku płyty ($x=0$, $y=0$) przybiera powyższy wzór postać

$$(82.\mathrm{II})\quad (V_2)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{\pi P}{2b^2}\gamma\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\left(\frac{1}{m_1}\frac{B_2}{B_1}+\frac{2C}{B_1}\right)\left(1-\frac{nx}{\gamma}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{B_1}}\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}},$$

którą z bardzo dobrem przybliżeniem można zastąpić przez następującą:

$$(82.\mathrm{II\,a})\quad (V_2)_{y=\frac{b}{2}} = \sim -\frac{\pi P}{2b^2}\gamma\left(\frac{1}{m_1}\frac{B_2}{\bar{B}_1}+\frac{2C}{\bar{B}_1}+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)\frac{1}{Ch\frac{x}{\gamma}}.$$

Ten wzór staje się nawet całkiem dokładnym, skoro spełnia się warunek $\frac{\bar{B}_2}{m_1}=\frac{B_1}{m_2}$, albowiem wówczas można według równania (13a) napisać $\frac{B_2}{m_1}+2C=H=\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2}$, wobec czego znoszą się obadwa wyrazy w klamrze o wielkości głównej $\frac{nx}{\gamma}$ wyrażenia (82.II). W tym zaś przypadku przekształca się z powodu tożsamości:

$$\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{nx}{\gamma}}=\frac{1}{2\,Ch\frac{nx}{\gamma}}$$

wyrażenie (82.II) na (82.IIa).

Największą bezwzględną wartość osiągają oba wyrażenia dla $x=0$; u obu wypada wtedy to samo, a mianowicie:

$$(83.\mathrm{II})\quad Max\,|V_{2\,y=\frac{b}{2}}| = \frac{\pi P\gamma}{4b^2}\left(\frac{1}{m_1}\frac{B_2}{\bar{B}_1}+\frac{2C}{\bar{B}_1}+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)$$

Dla płyty jednolitej i nierównokierunkowej upraszcza się powyższa formuła do postaci:

$$(83.\mathrm{IIa})\qquad M_{ax}\,|V_2|_{y=\frac{b}{2}}=\frac{P}{2b}.$$

Należy zwrócić uwagę, że w drugim krańcowym przypadku liniowego poprzecznego obciążenia $q'b$, rozłożonego równomiernie, staje się odpowiadająca wartość $max\,|V_2|$ logarytmicznie nieskończoną.

Nakoniec w III przypadku dojdziemy na podstawie równania (71.III) do następujących wzorów dla momentów zgięcia:

$$(77.\mathrm{III})\quad \left|\begin{aligned} M_1&=\frac{q'}{\pi}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}\left[\alpha'\left(1+\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\right)\cos\frac{nx}{\beta'}-\right.\\ &\left.-\beta'\left(1-\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\right)\sin\frac{nx}{\beta'}\right]e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\cos\frac{n\pi y}{b}\\ M_2&=\frac{q'}{\pi}\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}\left[\alpha'\left(\frac{1}{m_1}+\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\right)\cos\frac{nx}{\beta'}+\right.\\ &\left.+\beta'\left(\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}-\frac{1}{m_1}\right)\sin\frac{nx}{\beta'}\right]e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\cos\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\right.$$

Stąd otrzymujemy dla największych momentów zgięcia wyrażenia

$$(78.\mathrm{III})\quad \left|\begin{aligned} M_{1max}&=\frac{q'}{\pi}\alpha'\left(1+\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\right)\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2},\\ M_{2max}&=\frac{q'}{\pi}\alpha'\left(\frac{1}{m_1}+\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\right)\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2},\end{aligned}\right.$$

prowadzące znowu do tej samej wartości stosunku $M_{1max}:M_{2max}$, co w przypadkach I i II. Dla momentów skręcających wypada formuła:

$$(80.\mathrm{III})\qquad D=-\frac{4q'bC}{\pi^2\sqrt{\overline{B}_1\overline{B}_2-H^2}}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\sin\frac{nx}{\beta'}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

a dla reakcyj podporowych:

$$(81.\mathrm{III})\ (V_2)_{y=\frac{b}{2}}=-\frac{q'}{b}\sum_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n_1)}{n}\left(\alpha'\mathfrak{a}\cos\frac{nx}{\beta'}-\beta'\mathfrak{b}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}},$$

jeżeli dla skrócenia napiszemy:

$$\mathfrak{a}=\frac{1}{m_1}\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}+\frac{2C}{\overline{B}_1}+\sqrt{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}},\quad \mathfrak{b}=\frac{1}{m_1}\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}+\frac{2C}{B_1}-\sqrt{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}.$$

Wyrażenie (81 . III) przybiera w krańcowym przypadku ciężaru skupionego P postać następującą:

$$(82.\mathrm{III})\,(V_2)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{\pi P}{2b^2}\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\alpha' \mathfrak{a} \cos\frac{nx}{\beta'} - \beta' \mathfrak{b} \sin\frac{nx}{\beta'}\right) e^{-\frac{nx}{\alpha'}}.$$

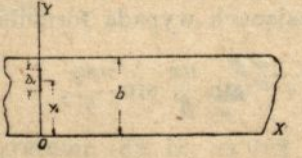
Przy bardzo małych wartościach x można zamiast tego napisać:

$$(V_2)_{y=\frac{b}{2}} =\sim -\frac{\pi P}{2b^2}\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\alpha' \mathfrak{a} - n\mathfrak{b}x\right) e^{-\frac{nx}{\alpha'}} =\sim -\frac{\pi P}{4b^2}\cdot\frac{\alpha'\mathfrak{a}}{Ch\frac{x}{\alpha'}},$$

jeżeli pominiemy wyższe potęgi x w rozwinięciach dla *sin* i *cos*. Dla $x = 0$ staje się bezwzględna wartość tego wyrażenia największością i dochodzimy znowu do wzoru (83 .I III).

§ 13. Rozwiązanie kilku jeszcze przypadków praktycznego znaczenia.

Wychodząc z szczególnego rozwiązania (71), można w stosunkowo bardzo prosty sposób traktować wiele zagadnień płyty nieskończenie długiej. Odpowiadające rozwiązania dadzą się z korzyścią zużytkować do rozwiązania różnych zagadnień płyty prostokątneo skończonej długości, jak to wykaże poniżej § 17. Przedstawiona tam metoda pozwala obejść uciążliwe całkowanie równania różniczj kowego powierzchni ugięcia w taki mniej więcej sposób, jak to się dzieje przy zastosowaniu metody „źródeł i wypływów" do zagadnień hydrodynamicznych.



Rys. 15.

a) Mimośrodkowe poprzeczne obciążenie liniowe $q'b_1$ (rys. 15). Obrawszy początek spółrzędnych na jednym brzegu płyty i przesunąwszy oś Y przez linię obciążenia, rozwijamy dane obciążenie na szereg Fourier'a

$$p'(y) = \frac{4q'}{\pi}\sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n}\sin\frac{n\pi y}{b}\ldots(n = 1, 2, 3, \ldots.),$$

w którym dla skrócenia położono:

$$(n, b_1, y_1) = \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b}\sin\frac{n\pi y_1}{b}.$$

Wtedy na podstawie rozwiązania (71) otrzymamy natychmiast

$$(84.\mathrm{I})\qquad \zeta=\frac{2q'b^4}{\pi^5\bar{B}_2}\cdot\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\sum_n\frac{(n,b_1,y_1)}{n^4}\,\frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}}-\alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta-\alpha}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

jako równanie powierzchni ugięcia dla dodatnich wartości x. Dla ujemnych należy postawić $-x$ zamiast x. Przechodząc w granicy do ciężaru skupionego $P=\lim\limits_{(b_1=0)} q'b_1$ znajdziemy z (84.I) równanie prawej połowy powierzchni ugięcia w postaci:

$$(85.\mathrm{I})\qquad \zeta=\frac{Pb^3}{\pi^4\bar{B}_2}\cdot\frac{1}{\alpha+\beta}\sum_n\frac{\sin\frac{n\pi y_1}{b}}{n^3}\cdot\frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}}-\alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta-\alpha}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Dla lewej połowy trzeba tylko w powyższym wzorze zastąpić x przez $-x$.

Powyższe równania są ważne dla I przypadku $(H^2>\bar{B}_1\bar{B}_2)$; w przypadku II przeistaczają się na następujące:

$$(84.\mathrm{II})\qquad \zeta=\frac{q'\gamma^3}{\pi\bar{B}_1}\sum_n\frac{(n,b_1,y_1)}{n^4}\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(85.\mathrm{II})\qquad \zeta=\frac{P\gamma^3}{2b\bar{B}_1}\sum_n\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi y_1}{b}\cdot\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Postawiwszy

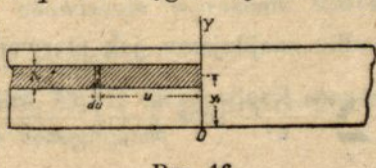
$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha'}+i\,\frac{1}{\beta'},\qquad \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha'}-i\,\frac{1}{\beta'}$$

w odpowiadające równania I przypadku znajdziemy dla przypadku III:

$$(84.\mathrm{III})\;\zeta=\frac{q'b^2}{\pi^3\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2}}\sum_n\frac{(n,b_1,y_1)}{n^4}\left(\alpha'\cos\frac{nx}{\beta'}+\beta'\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(85.\mathrm{III})\;\zeta=\frac{Pb}{2\pi^2\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2}}\sum_n\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi y_1}{b}\left(\alpha'\cos\frac{nx}{\beta'}+\beta'\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

b) Prostokątne, mimośrodkowo leżące obciążenie powierzchniowe q rozciąga się na lewo od osi Y w nie-



Rys. 16.

skończoność (rys. 16). Stosując rozwiązanie poprzedniego zadania do obciążenia elementarnego qb_1, du, mamy, przy $H^2 > \bar{B}_1\bar{B}_2$, dla rzędnych odpowiadającej powierzchni ugięcia wyrażenie:

$$d\zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^4}\sin\frac{n\pi y}{b}\cdot\frac{\beta e^{-\frac{n(x-u)}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{n(x-u)}{\alpha}}}{\beta^2-\alpha^2}\,du$$

Całkowanie tego wyrażenia między granicami $u = -\infty$ i $u = 0$ daje

$$(86\,.\,\mathrm{I})\qquad \zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n \frac{n, b_1, y_1)}{n^5}\cdot\frac{\beta^2 e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha^2 e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta^2-\alpha^2}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

jako równanie powierzchni ugięcia na prawo od osi Y-ów. Dla drugiej połowy powierzchni ugięcia znajdziemy równanie

$$(87\,.\,\mathrm{I})\qquad \zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5}\left(2 - \frac{\beta^2 e^{\frac{nx}{\beta}} - \alpha^2 e^{\frac{nx}{\alpha}}}{\beta^2-\alpha^2}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}$$

odjąwszy rozwiązanie, otrzymane powyżej i zastosowane do obciążenia prawej połowy płyty, od rozwiązania

$$\zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n, b_1 \cdot y_1)}{n^5}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

widocznego wprost dla przypadku obciążenia paska płyty o szerokości b_1, rozciągającego się przez całą długość płyty.

W przypadku $H^2 = \bar{B}_1\bar{B}_2$ przekształcają się powyższe równania na następujące:

$$(86\,.\,\mathrm{II})\qquad \zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5}\left(1 + \frac{n}{2}\frac{x}{\gamma}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(87\,.\,\mathrm{II})\qquad \zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5}\left[2 - \left(1 - \frac{n}{2}\frac{x}{\gamma}\right)e^{\frac{nx}{\gamma}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

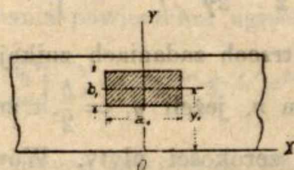
W III przypadku znajdujemy, jak pierwej, dla $x > 0$

$$(86\,.\,\mathrm{III})\quad \zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5}\left(\cos\frac{nx}{\beta'} + \tfrac{1}{2}\frac{\beta'^2-\alpha'^2}{\alpha'\beta'}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

zaś dla $x < 0$:

$$\zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[2 - \left(\cos \frac{nx}{\beta'} - \frac{1}{2} \frac{\beta'^2 - \alpha'^2}{\alpha' \beta'} \sin \frac{nx}{\beta'} \right) e^{\frac{nx}{\alpha'}} \right] \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{87.III}$$

c) Mimośrodkowo położone obciążenie prostokątne qa_1b_1 (rys. 17). W ten sam sposób, co w poprzedniem za-



Rys. 17.

daniu, znajdujemy dla I przypadku ($H^2 > \overline{B}_1 \overline{B}_2$) równanie powierzchni ugięcia:

$$\zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[\frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left(e^{-n \frac{2x - a_1}{2\beta}} - e^{-n \frac{2x + a_1}{2\beta}} \right) - \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left(e^{-n \frac{2x - a_1}{2\alpha}} - e^{-n \frac{2x + a_1}{2\alpha}} \right) \right] \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{88.I}$$

ważne dla $\frac{a_1}{2} < x < \infty$ i

$$\zeta = \frac{2qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[2 - \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left(e^{-n \frac{2x + a_1}{2\beta}} + e^{n \frac{2x - a_1}{2\beta}} \right) + \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left(e^{-n \frac{2x + a_1}{2\alpha}} + e^{n \frac{2x - a_1}{2\alpha}} \right) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{89.I}$$

dla $-\frac{a_1}{2} < x < \frac{a_1}{2}$. Na pozostałym obszarze płyty, to jest dla $-\infty < x < -\frac{a_1}{2}$ obowiązuje wyrażenie utworzone z (88.I) przez podstawienie $-x$ zamiast x.

Gdy $H^2 = \overline{B}_1 \overline{B}_2$ (II przypadek), powyższe równania przekształcają się na następujące:

$$(88.\mathrm{II})\qquad \zeta=\frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n,b_1,y_1)}{n^5}\left[\left(1+\frac{n}{2}\cdot\frac{2x-a_1}{2\gamma}\right)e^{-n\frac{2x-a_1}{2\gamma}}-\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{n}{2}\frac{2x+a_1}{2\gamma}\right)e^{-n\frac{2x+a_1}{2\gamma}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(89.\mathrm{II})\qquad \zeta=\frac{2qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n,b_1,y_1)}{n^5}\left[2-\left(1+\frac{n}{2}\frac{a_1-2x}{2\gamma}\right)e^{-n\frac{a_1-2x}{2\gamma}}-\right.$$

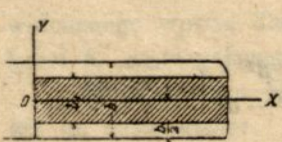
$$\left.-\left(1+\frac{n}{2}\frac{a_1+2x}{2\gamma}\right)e^{-n\frac{a_1+2x}{2\gamma}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

We wszystkich trzech zadaniach znikają wyrazy szeregu odpowiadające parzystym n, jeżeli $y_1=\frac{b}{2}$, t. zn. gdy obciążenie znajduje się w środku szerokości płyty. Wówczas należy przyjąć $n=1, 3, 5,\ldots$

§ 14. Działanie obciążenia równomiernie rozłożonego w pobliżu krótkich boków, również swobodnie podpartych.

Ogólne rozwiązanie tego zadania różni się nie wiele od rozwiązania w § 12. Przyjęcie Lévy'ego

$$\zeta=\sum_n X\cos\frac{n\pi y}{b}$$



Rys. 18.

($n=1, 3, 5\ldots$ w przypadku obciążenia poprzecznie symetrycznego) i Fourier'owskie rozwinięcie obciążenia qb_1 (rys. 18) na szereg

$$\frac{4q}{\pi}\sum_n\frac{(n_1)}{n}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

w którym jak poprzednio

$$(n_1)=\sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b},$$

dają do wyznaczenia funkcyi X liniowe równanie różniczkowe:

$$\bar{B}_1X^{\prime\prime\prime\prime}-2H\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2X^{\prime\prime}+\bar{B}_2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4X=\frac{4q}{\pi}\frac{(n_1)}{n}$$

Ogólne rozwiązanie tego równania

$$X=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\frac{(n_1)}{n^5}+C_1e^{\beta_1x}+C_2e^{\beta_2x}+C_3e^{\beta_3x}+C_4e^{\beta_4x}$$

z wartościami parametrów

$$\left.\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\}=\frac{n\pi}{b}\sqrt{\frac{H\pm\sqrt{H^2-\bar{B}_1\bar{B}_2}}{\bar{B}_1}};\quad \left.\begin{matrix}\beta_3\\ \beta_4\end{matrix}\right\}=-\frac{n\pi}{b}\sqrt{\frac{H\pm\sqrt{H^2-\bar{B}_1\bar{B}_2}}{\bar{B}_1}}$$

prowadzi po uwzględnieniu warunku krańcowego $\zeta=0$ dla $x=\infty$ do następującego równania powierzchni ugięcia:

$$\zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\left[\frac{(n_1)}{n^5}+C'_3e^{\beta_3x}+C'_4e^{\beta_4x}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}$$

Do wyznaczenia stałych całkowania C'_3 i C'_4 służą warunki krańcowe

$$\zeta=0 \text{ i } \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=0$$

dla $x=0$, które dają równania warunkowe:

$$C'_3+C'_4=-\frac{(n_1)}{n^5},\quad C'_3\beta_3^2+C'_4\beta_4^2=0$$

Stąd wynika przy użyciu oznaczeń (70):

$$C'_3=\frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\frac{(n_1)}{n^5},\quad C'_4=-\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\frac{(n_1)}{n^5}$$

Przy rzeczywistych wartościach α i β, t. zn. gdy $H^2>\bar{B}_1\bar{B}_2$ (I przypadek), otrzymujemy dla powierzchni ugięcia równanie:

$$\zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^5}\left(1+\frac{\alpha^2e^{-\frac{nx}{\alpha}}-\beta^2e^{-\frac{nx}{\beta}}}{\beta^2-\alpha^2}\right)\cos\frac{n\pi y}{b}. \tag{90.I}$$

Jeżeli $H^2=\bar{B}_1\bar{B}_2$ (II przypadek), to powyższe równanie przeistacza się na następujące:

$$\zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum\frac{(n_1)}{n^5}\left[1-\left(1+\frac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\right]\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{90.II}$$

Stała γ ma przytem to samo znaczenie co w § 12 (równanie

71.II). Skoro nakoniec $H^2 < \bar{B}_1 \bar{B}_2$ (przypadek III), to podobnie jak w §§ 12 i 13, znajdujemy:

$$\zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 B_1} \sum^{(n_1)} \frac{1}{n^5} \left[1 - \left(\cos \frac{nx}{\beta'} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2} \frac{\beta'^2 - \alpha'^2}{\alpha' \beta'} \sin \frac{nx}{\beta'} \right) e^{-\frac{nx}{\alpha'}} \right] \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{90.III}$$

z tem samem, co pierwej, znaczeniem stałych α' i β'. Tutaj można jeszcze nastąpić wyraz $\frac{1}{2} \frac{\beta'^2 - \alpha'^2}{\alpha'\beta'}$ wartością

$$\frac{H}{\sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2 - H^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}$$

Na podstawie powyższych równań wypadają następujące wzory dla momentów i reakcyj podporowych:

I przypadek ($H^2 > \bar{B}_1 \bar{B}_2$)

$$\tag{91.I} \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \frac{4qb^2}{\pi^3} \cdot \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{m_2} - \frac{\bar{B}_2}{2\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha^2 \pi^2}{m_2 b^2} \right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \left(1 - \frac{\beta^2 \pi^2}{m_2 b^2} \right) e^{-\frac{nx}{\beta}} \right\} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ M_2 &= \frac{4qb^2}{\pi^3} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\bar{B}_2}{2\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \left\{ \left(\frac{\beta^2 \pi^2}{b^2} - \frac{1}{m_1} \right) e^{-\frac{nx}{\beta}} - \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \left(\frac{\alpha^2 \pi^2}{b^2} - \frac{1}{m_1} \right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} \right\} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right.$$

$$D = \frac{4qb}{\pi^2} \cdot \frac{C}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2}} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^3} \left(\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}; \tag{92.I}$$

$$\tag{93.I} \left\{ \begin{aligned} V_1 &= \frac{2q}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^2} \left(\beta \varepsilon_1 e^{-\frac{nx}{\alpha}} + \alpha \eta_1 e^{-\frac{nx}{\beta}} \right) \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ V_2 &= -\frac{4qb}{\pi^2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^2} \left(1 + \varepsilon_2 e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \eta_2 e^{-\frac{nx}{\beta}} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}; \end{aligned} \right.$$

(Tutaj wprowadzano następujące oznaczenia:

$$
(93a)\quad \begin{cases}
\varepsilon_1 = \dfrac{\bar{B}_1 - \dfrac{\alpha^2\pi^2}{b^2}\left(\dfrac{\bar{B}_1}{m_2} + 2C\right)}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1\bar{B}_2}}, & \eta_1 = \dfrac{\dfrac{\beta^2\pi^2}{b^2}\left(\dfrac{\bar{B}_1}{m_2} + 2C\right) - \bar{B}_1}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1\bar{B}_1}} \\
\varepsilon_2 = \dfrac{\left(\dfrac{\alpha^2\pi^2}{b^2} - \dfrac{1}{m_1}\right)\bar{B}_2 - 2C}{2\sqrt{H^2 - \bar{B}_1\bar{B}_2}}, & \eta_2 = \dfrac{\left(\dfrac{\beta^2\pi^2}{b^2} - \dfrac{1}{m_1}\right)\bar{B}_2 - 2C}{2\sqrt{H^2 - \bar{B}_1\bar{B}_2}},
\end{cases}
$$

przyczem, jak łatwo się przekonać, między ε_2 i η_2 zachodzi związek

$$\varepsilon_2 - \eta_2 = -1)$$

$$
(94\,.\,\mathrm{I})\quad \begin{cases}
R_1 = -\left(V_1 + \dfrac{\partial D}{\partial y}\right)_{x=0} = -\dfrac{2q}{\pi}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\alpha\eta_1' + \beta\varepsilon_1'\right)\sum\limits_n^{(n_1)} \dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi y}{b}, \\
R_2 = \left(V_2 + \dfrac{\partial D}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\dfrac{4qb}{\pi^2}\sum\limits_n \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,(n_1)}{n^2}\Big(1 + \\
\qquad + \varepsilon_2' e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \eta_2' e^{-\frac{nx}{\beta}}\Big),
\end{cases}
$$

Wielkości ε'_1, η'_1, ε'_2, η'_2, wprowadzone tutaj dla skrócenia, określają równania:

$$
(94a)\quad \begin{cases}
\varepsilon'_1 = \dfrac{\bar{B}_1 - \dfrac{\alpha^2\pi^2}{b^2}\left(\dfrac{\bar{B}_1}{m_2} + 4C\right)}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1\bar{B}_2}}, & \eta'_1 = \dfrac{\dfrac{\beta^2\pi^2}{b^2}\left(\dfrac{\bar{B}_1}{m_2} + 4C\right) - \bar{B}_1}{\sqrt{H^2 - \bar{B}_1\bar{B}_2}}, \\
\varepsilon'_2 = \dfrac{\left(\dfrac{\alpha^2\pi^2}{b^2} - \dfrac{1}{m_1}\right)\bar{B}_2 - 4C}{2\sqrt{H^2 - \bar{B}_1\bar{B}_2}}, & \eta'_2 = \dfrac{\left(\dfrac{\beta^2\pi^2}{b^2} - \dfrac{1}{m_1}\right)\bar{B}_2 - 4C}{2\sqrt{H^2 - \bar{B}_2\bar{B}_2}} \\
\text{Nadto jest} & \\
\alpha\eta'_1 + \beta\varepsilon'_1 = \dfrac{b}{\pi}\cdot\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\cdot\dfrac{\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} + \dfrac{4C}{\bar{B}_1} + \dfrac{1}{m_2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\dfrac{H}{\bar{B}_1} + \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}}}. &
\end{cases}
$$

W rogach płyty występuje skupiona reakcya podporowa, skierowana w dół, o bezwzględnej wielkości:

$$(95.\mathrm{I\,III})\quad \hat{R} = |2D|_{\substack{x=0\\ y=\pm\frac{b}{2}}} = \frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{2C}{\overline{B}_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\overline{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}}\cdot\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^3}$$

Wyrażenie dla M_2 można rozłożyć na dwie części według schematu:

$$(96)\qquad M_2 = (M_2)_\infty - \mathfrak{M}_2$$

Łatwo dowieść, że pierwsza część

$$(M_2)_\infty = \frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

jest Fourier'owskiem rozwinięciem momentu zginającego belki prostej o rozpiętości b i obciążeniu q równomiernie rozłożonem na środkowym odcinku b_1, który to moment ma w przedziale $0 \leqq y \leqq \frac{b_1}{2}$ wartość

$$M = \frac{qb_1}{2}\left(\frac{b}{2}-y\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{b_1}{2}-y\right)^2,$$

a w przedziale $\frac{b_1}{2} < y \leqq \frac{b}{2}$ wartość

$$M = \frac{qb_1}{2}\left(\frac{b}{2}-y\right)$$

Wskutek tego można także wyrażenie dla M_1 napisać w postaci:

$$(97)\qquad M_1 = \frac{1}{m_2}\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}(M_2)_\infty - \mathfrak{M}_1$$

Wielkości

$$(98.\mathrm{I})\quad \left|\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1 &= \frac{4}{\pi^3}\cdot\frac{qb^2\cdot\overline{B}_1}{2\sqrt{H^2-\overline{B}_1\overline{B}_2}}\cdot\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\Big[\left(\frac{\beta^2\pi^2}{m_2b^2}-1\right)e^{-\frac{nx}{\beta}} - \\
&\qquad -\left(\frac{\alpha^2\pi^2}{m_2b^2}-1\right)e^{-\frac{nx}{\alpha}}\Big]\cos\frac{n\pi y}{b},\\
\mathfrak{M}_2 &= \frac{4}{\pi^3}\cdot\frac{qb^2\cdot\overline{B}_1}{2\sqrt{H^2-\overline{B}_1\overline{B}_2}}\cdot\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\Big[\left(\frac{\beta^2\pi^2}{b^2}-\frac{1}{m_1}\right)e^{-\frac{nx}{\beta}} - \\
&\qquad -\left(\frac{\alpha^2\pi^2}{b^2}-\frac{1}{m_1}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha}}\cos\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}\right.$$

ubywają ze wzrostem x tak szybko, że można je pominąć mniej więcej dla $x \geqq \frac{3}{2} b_{red}$, jeżeli b_{red} określa, jak pierwej równanie:

$$b_{red} = b \sqrt{\frac{H}{\overline{B}_2} + \sqrt{\left(\frac{H}{\overline{B}_2}\right)^2 - \frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}$$

Z wyjątkiem krańcowych części o długości około $\frac{3}{2} b_{red}$, zgina się przeto reszta bardzo długiej płyty prawie dokładnie walcowo, a moment zginający M_2 da się obliczyć według elementarnych prawideł statyki. Moment zginający M_1 ma w środkowej części wartość $\frac{1}{m_2} \frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2} M_2$. Ponieważ $\mathfrak{M}_2$ jest dodatnie, więc $M_{2max} = (M_2)_\infty$, a zatem **dla każdej dokoła swobodnie podpartej płyty prostokątnej o długości** $a \geqq 3\, b_{red}$ **można przy powyżej przyjętym sposobie obciążenia obliczać** M_{2max} **z bardzo dobrem przybliżeniem jak dla płyty nieskończenie długiej.** (W praktycznych obliczeniach wytrzymałości wystarczy to nawet przy $a \geqq 2\, b_{red}$).

Podobnież i wyrażenie dla siły poprzecznej V_2 rozpada się na dwie części, a mianowicie:

$$V_2 = (V_2)_\infty + \mathfrak{V}_2 \tag{99}$$

Tutaj jest

$$(V_2)_\infty = -\frac{4qb}{\pi^2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{100}$$

a ten szereg trygonometryczny określa dokładnie odpowiadającą linię sił poprzecznych belki prostej, obciążonej w powyżej wskazany sposób. W przedziale $0 \leqq y \leqq \frac{b_1}{2}$ jest

$$(V_2)_\infty = -\frac{qb_1}{2} + q\left(\frac{b_1}{2} - y\right),$$

a w przedziale $\frac{b_1}{2} < y \leqq \frac{b}{2}$

$$(V_2)_\infty = -\frac{qb_1}{2}$$

Druga część

$$(101.\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{V}_2 = \frac{4qb}{\pi^2} \sum_n \frac{(n_1)}{n^2} \left(\eta_2 e^{-\frac{n x}{\beta}} - \varepsilon_2 e^{-\frac{n x}{\alpha}} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

jakoteż V_1 zdąża szybko przy rosnącem x do granicy zero. Rzut oka na wzór (94.I) wystarcza, aby się przekonać, że dla wielkich wartości x znika różnica między reakcyą podporową R_2 a $(V_2)_{y=\frac{b}{2}}$ i że R_2 zbliża się do granicy

$$-\frac{4qb}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2} = -\frac{qb_1}{2}$$

Z przybliżeniem do rogów maleje R_2 bezwzględnie biorąc i w samym rogu znika.

Reakcya podporowa R_1, odpowiadająca krótszemu bokowi b osiąga maximum bezwzględnej wartości

$$(102.\mathrm{I\,III}) \quad |R_1|_{max} = \frac{2qb}{\pi^2} \sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1} + \frac{4C}{\overline{B}_1} + \frac{1}{m_2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\overline{B}_1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}}} \cdot \sum_n \frac{(n_1)}{n^2} =$$

$$= \frac{2qb}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2} + \frac{4C}{\overline{B}_2} + \frac{1}{m_2}\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\overline{B}_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}} \sum_n \frac{(n_1)}{n^2}$$

dla $y=0$, t. j. w środku boku i spada ku rogom aż do zera. W szczególnym przypadku całkowitego obciążenia $(b_1 = b)$ jest $(n_1) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, szereg nieskończony

$$\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} = \sim 0{,}917,$$

zaś

$$(103.\mathrm{I\,III}) \qquad |R_1|_{max} = 0{,}1858\, qb \frac{\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2} + \frac{4C}{\overline{B}_2} + \frac{1}{m_2}\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\overline{B}_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}}}$$

W granicznym przypadku obciążenia liniowego równomiernego q' osi X-ów ($b_1 = 0$, $\lim qb_1 = q'$) staje się $|R_1|_{max}$ logarytmicznie nieskończonem.

Całkowita reakcya podporowej prostej b

(104 . I III)
$$\bar{R}_1 = 2\int_0^{\frac{b}{2}} R_1\,dy = -\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}+\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_2}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}}\cdot\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^3}$$

ma w przypadku całkowitego obciążenia ($b_1 = b$) wartość:

(105 . I III)
$$\bar{R}_1 = -0{,}135_7\,qb^2\,\frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}+\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}}$$

a w przypadku liniowego obciążenia $q' = \lim\limits_{(b_1=0)} qb_1$, wartość:

(106 . I III)
$$\bar{R}_1 = -0{,}185_8\,q'b\cdot\frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}+\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}}$$

Ostatnie wyrażenie zgadza się, wyjąwszy wielkość q', z wyrażeniem (103), a zatem: Średnia właściwa reakcya podporowa krótkiego boku jest w tym przypadku dokładnie tak wielką, jak R_{1max} przy równomiernem obciążeniu całej płyty. Ten wynik jest, jak zobaczymy, ważny także w przypadku II i III.

Podobnież znajdujemy dla narożnej reakcyi przy całkowitem obciążeniu:

(107 . I III)
$$\hat{R} = 0{.}1357\,qb^2\,\frac{2C}{\bar{B}_2\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}}$$

a przy obciążeniu q' osi X-ów:

$$(108.\mathrm{I\,III})\qquad \hat{R}=0{,}1858\,q'b.\frac{2C}{\bar{B}_2\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}}$$

II przypadek ($H^2=\bar{B}_1\bar{B}_2$)

$$(91.\mathrm{II})\left\{\begin{aligned} M_1&=\frac{4qb^2}{\pi^3}\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}\left\{1-\left[1-\frac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\left(m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{B_1}}-1\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\right\}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ M_2&=\frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}\left\{1-\left[1+\frac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\left(1-\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\right\}\cos\frac{n\pi y}{b},\end{aligned}\right.$$

$$(92.\mathrm{II})\qquad D=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{C}{\bar{B}_2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b};$$

(Przytem, jak poprzednio $\gamma=\frac{b}{\pi}\cdot\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}$)

$$(93.\mathrm{II})\left\{\begin{aligned} V_1&=\frac{2qb}{\pi^2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}\left(\vartheta_1-\frac{nx}{\gamma}\varphi_1\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ V_2&=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\varphi_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\right.$$

(Nowe spółczynniki ϑ_1, φ_1, φ_2 są określone wzorami

$$(93\mathrm{b})\left\{\begin{aligned} &\vartheta_1=\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}+\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2},\quad \varphi_1=\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}+\frac{2C}{\bar{B}_2}-\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2},\\ &\varphi_1=\frac{2C}{\bar{B}_2}-\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}+\frac{1}{m_1}\Bigg)\end{aligned}\right.$$

$$(94.\mathrm{II})\left\{\begin{aligned} R_1&=-\frac{2qb}{\pi^2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot\vartheta'_1\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ R_2&=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\varphi'_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\right].\end{aligned}\right.$$

(Tutaj wprowadzono spółczynniki ϑ'_1, φ'_2 określone zapomocą wzorów:

$$
(94b)\quad \begin{cases} \vartheta'_1=\vartheta_1+\dfrac{2C}{\bar{B}_2}=\sqrt{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}+\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_2}\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}, \\ \varphi'_2=\varphi_2+\dfrac{2C}{\bar{B}_2}=\dfrac{4C}{\bar{B}_2}-\sqrt{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}}. \end{cases}
$$

$$
(95.\mathrm{II})\qquad \hat{R}=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{2C}{\bar{B}_2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}(n_1)
$$

Wyrażenia dla M_1 i M_2 dadzą się oczywiście rozłożyć według tego samego schematu, co w I przypadku. $(M_2)_\infty$ zachowuje przytem tę samą wartość, a wielkości

$$
(98.\mathrm{II})\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_1=\dfrac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\dfrac{1}{m_2}\cdot\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\displaystyle\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\left[1-\tfrac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\left(m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-1\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b} \\ \mathfrak{M}_2=\dfrac{4qb^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\left[1+\tfrac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\left(1-\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b} \end{cases}
$$

można pominąć dla $x\geqq\frac{3}{2}\,b_{red}$, przyczem jak w § 12-ym jest $b_{red}=b\sqrt[4]{\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}$. Podobnie ma się rzecz z wyrażeniem dla V_2, którego druga część w schemacie (99) przybiera teraz postać

$$
(101.\mathrm{II})\qquad \mathfrak{V}_2=\frac{4qb}{\pi^2}\cdot\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{nx}{\gamma}\varphi_1\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b}
$$

i ze wzrostem x tak samo jak V_1 dąży do granicy 0.

Różnica między reakcyą podporową R_2 a $(V_2)_{y=\frac{b}{2}}$ znika również dla wielkich wartości x, a R_2 zbliża się do granicy $-\frac{1}{2}qb_1$

Reakcya podporowa R_1 krótkiego boku b osiąga maximum bezwzględnej wartości

$$
(102.\mathrm{II})\qquad |R_1|_{max}=\frac{2qb}{\pi^2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot\vartheta_1'\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}
$$

w środku boków (dla $y=0$) i zmniejsza się ku rogom płyty aż do zera. W szczególnym przypadku równomiernego obciążenia całej płyty ($b_1=b$) jest

(103.II) $$|R_1|_{max} = 0.1858\, qb \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \left(\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} + \frac{4C}{\bar{B}_2} + \frac{1}{m_2} \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \right)$$ [1]

Całkowita reakcya boku b

(104.II) $$R_1 = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} R_1 dy = -\frac{4qb^2}{\pi^3} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\, \vartheta'_1 \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n_1)}{n^3}$$

ma w przypadku całkowitego obciążenia wartość

(105.II) $$R_1 = -0{,}1357\, qb^2 \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \left(\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} + \frac{4C}{\bar{B}_2} + \frac{1}{m_2} \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \right),$$

a w granicznym przypadku liniowego obciążenia q' wartość

(106.II) $$R_1 = -0.1858\, q'b \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \left(\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} + \frac{4C}{\bar{B}_2} + \frac{1}{m_2} \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \right)$$

Dla narożnej reakcyi znajdujemy nakoniec przy całkowitem obciążeniu wyrażenie:

(107.II) $$\hat{R} = 0{,}1357\, qb^2 \frac{2C}{\bar{B}_2} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}},$$

a przy obciążeniu q' osi X-ów:

(108.II) $$\hat{R} = 0.1858\, q'b \frac{2C}{\bar{B}_2} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$$

III przypadek $(H^2 < \bar{B}_1 \bar{B}_2)$ [2]

(91.III) $$\left| \begin{aligned} M_1 = \frac{4qb^2}{\pi^3 m_2} \cdot \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \sum_n \frac{(n_1)}{n^3} \Bigg[1 - \Bigg(\cos \frac{nx}{\beta'} - \\ - \frac{m_2 \bar{B}_2 - H}{\sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2 - H^2}} \sin \frac{nx}{\beta'} \Bigg) e^{-\frac{nx}{\alpha'}} \Bigg] \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right.$$

---

[1] Uwzględniwszy związek (13a) można wyrażenie $\left(\sqrt{\frac{B_1}{B_2}} + \frac{4C}{B_2} + \frac{1}{m_2} \frac{B_1}{B_2}\right)$ napisać dla przypadku II w skróconej postaci $\left(3 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} - \frac{1}{m_1}\right)$.

[2] ϑ_1, φ_1, ϑ_1' oznaczają to samo, co we wzorach II-go przypadku.

$$
(91.\mathrm{III})\quad \left|\begin{aligned} M_2 &= \frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\left[1-\left(\cos\frac{nx}{\beta'}+\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{H-\frac{1}{m_2}\bar{B}_2}{\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2-H^2}}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\right]\cos\frac{n\pi y}{b},\end{aligned}\right.
$$

$$
(92.\mathrm{III})\quad D=\frac{4qb^3}{\pi^4}\cdot\frac{2C}{\bar{B}_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1\bar{B}_2}{\bar{B}_1\bar{B}_2-H^2}}\cdot\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\left(\frac{1}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{\beta'}\cos\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\Big]\sin\frac{n\pi y}{b},
$$

$$
(93.\mathrm{III})\quad \left|\begin{aligned} V_1 &= \frac{2q}{\pi}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\left(\alpha'\vartheta_1\cos\frac{nx}{\beta'}+\beta'\varphi_1\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ V_2 &= -\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\left[1-\left(\cos\frac{nx}{\beta'}-\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{m_1}\bar{B}_2-\frac{1}{m_1}\bar{B}_1}{\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2-H^2}}\cdot\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b},\end{aligned}\right.
$$

$$
(94.\mathrm{III})\quad \left|\begin{aligned} R_1 &= -\left(V_1+\frac{\partial D}{\partial y}\right)_{x=0}=-\frac{2q}{\pi}\alpha'\vartheta_1'\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ R_2 &= \left(V_2+\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}}=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\left[1-\left(\cos\frac{nx}{\beta'}-\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{H-\frac{1}{m_2}\bar{B}_1}{\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2-H^2}}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\right].\end{aligned}\right.
$$

Dla narożnej reakcyi $\hat{R}$ otrzymujemy to samo wyrażenie, co w I przypadku. Po rozłożeniu wyrażeń dla M_1 i M_2 według poprzedniego schematu (96 i 97), wypada ta sama wartość dla $(M_2)_\infty$, a wielkości

$$
(98.\mathrm{III})\quad \left|\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum\frac{(n_1)}{n^3}\left(\cos\frac{nx}{\beta'}-\right.\\ &\left.-\frac{m_2\bar{B}_2-H}{\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2-H^2}}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\cos\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\right.
$$

$$
(98.\mathrm{III})\left|\begin{aligned}
\mathfrak{M}_2 &= \frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\left(\cos\frac{nx}{\beta'}+\right.\\
&\left.+\frac{H-\frac{1}{m_1}\bar{B}_2}{\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2-H^2}}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\cos\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}\right.
$$

stają się dla

$$
x \geqq \tfrac{3}{2}\, b_{red} = \tfrac{3}{2}\,\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_1}}}
$$

iob. § 12) tak małemi, że można je pominąć zupełnie. Całkiem podobnie zachowuje się wyrażenie $V_2 = (V_2)_\infty + \mathfrak{V}_2$, w którem $\mathfrak{V}_2$ ma teraz wartość

$$
(101.\mathrm{III})\qquad \mathfrak{V}_2 = \frac{4qb}{\pi^2}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}\left(\cos\frac{nx}{\beta'}-\right.
$$

$$
\left.-\tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{m_1}\bar{B}_2-\frac{1}{m_2}\bar{B}_1}{\sqrt{\bar{B}_1\bar{B}_2-H^2}}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\sin\frac{n\pi y}{b},
$$

zdąża, zarówno jak V_1, ze wzrostem x do granicy 0.

Różnica $R_2 - (V_2)_{y=\frac{b}{2}}$ znika również dla wszelkich wartości x, a R_2 zbliża się do granicy $-\frac{qb_1}{2}$.

Pozostałe wielkości $|R_1|_{max}$, R_1 i $\hat{R}$ są określone temi samemi wyrażeniami, co w I przypadku (rów. 102.I, III do 108.I, III).

We wszystkich trzech przypadkach nie roztrząsaliśmy dotąd kwestyi największości M_1. Zważywszy, że ze względu na obliczenia wytrzymałości nie można jej zupełnie pominąć, spróbujemy teraz wyznaczyć miejsce, gdzie panuje M_{1max} i w przybliżeniu obliczyć jego wielkość dla II przypadku.

Różniczkowanie wyrażenia dla M_1 (91.II) daje:

$$
\frac{\partial M_1}{\partial x} = \frac{2qb^2}{\pi^3\gamma}\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum\frac{(n_1)}{n^2}\left[m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+1-\frac{nx}{\gamma}\left(m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-1\right)\right]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b}
$$

Jak stąd widać, istnieje $M_{1\,max}$ pod warunkiem

$$m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} > 1,$$

który z reguły się spełnia, albowiem w rozpatrywanych przypadkach stosuje się celowo tylko płyty o wartości $\bar{B}_2 \geqq \bar{B}_1$. Z drugiego warunku $\frac{\partial M_1}{\partial y} = 0$ wynika dla szukanego miejsca $y = 0$, a zatem x należy obliczyć z równania

$$\sum^{(n_1)} \frac{1}{n^2}\left[\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} + \frac{1}{m_2} - \frac{nx}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} - \frac{1}{m_2}\right)\right] e^{-\frac{nx}{\gamma}} = 0$$

Poprzestając wskutek silnej zbieżności tego szeregu na pierwszym wyrazie, otrzymujemy następującą przybliżoną wartość szukanego pierwiastka:

$$x = \sim \frac{b}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} + \frac{1}{m_2}}{\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - \frac{1}{m_2}}$$

Nie trudno zauważyć, że to wyrażenie byłoby dokładną wartością dla szukanego x, gdyby obciążenie było rozłożone według prawa

$$p = p_0 \cos\frac{\pi y}{b}.$$

Im większe jest zatem $\bar{B}_2$ w porównaniu do $\bar{B}_1$, tem bliżej przysuwa się miejsce największego momentu M_1 do krótkiego boku. Tak np. otrzymujemy przy $m_2 = 6$ i

$\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} =$	1	4	9
$\frac{x}{b} =$	0,446	0,266	0,205

Odpowiadającą przybliżoną wartością największego momentu jest

$$M_{1\,max} = \sim \frac{4}{\pi^3} q b^2 \frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \sin\frac{\pi}{2}\frac{b_1}{b}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} - 1\right) e^{-\frac{\pi x}{\gamma}}\right],$$

przyczem

$$\frac{x_0}{\gamma}=\frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+\frac{1}{m_2}}{\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-\frac{1}{m_2}}$$

Przy pomocy tego wzoru otrzymujemy dla

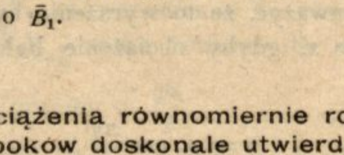
$$\begin{array}{cccc}
\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}= & 1 & 4 & 9 \\
\frac{M_{1\,max}}{qb^2}= & \frac{1}{28{,}7} & \frac{1}{69{,}1} & \frac{1}{111} \\
\frac{M_{1\,max}}{q'b}= & \frac{1}{18{,}3} & \frac{1}{44{,}0} & \frac{1}{70{,}6}
\end{array}$$

Pierwszy szereg obliczonych tutaj wartości odnosi się do przypadku zupełnego obciążenia przez q (kg/m²), drugi zaś do drugiego przypadku liniowego obciążenia q' (kg/m) w osi X-ów. W ostatnim przypadku będzie widocznie stopień przybliżenia obliczenia niższym.

Wogóle powyższe cyfry dowodzą, że największe wartości momentów M_1 stają się tem mniejsze i zbliżają się tem bardziej do krótkiego boku, im większe jest $\bar{B}_2$ w porównaniu do $\bar{B}_1$.

§ 15. Działanie obciążenia równomiernie rozłożonego w pobliżu krótkich boków doskonale utwierdzonych (rys. 19).

Ogólne rozwiązanie poprzedniego paragrafu



Rys. 19.

$$\zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\left[\frac{(n_1)}{n^5}+C_3'e^{\beta_3 x}+C_4'e^{\beta_4 x}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}$$

nie traci ważności, trzeba tylko odpowiednio do nowych warunków krańcowych dobrać wartości stałych całkowania C_3' i C_4'. Z powodu zupełnego utwierdzenia brzegu $x=0$ musi być dla $x=0$, $\zeta=0$ i $\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$; stąd równania warunkowe:

$$C_3'+C_4'=-\frac{(n_1)}{n^5},$$

$$\beta_3 C_3'+\beta_4 C_4'=0,$$

a z nich po rozwiązaniu

$$C_3'=\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\frac{(n_1)}{n^5},\quad C_4'=-\frac{\beta}{\beta-\alpha}\frac{(n_1)}{n^5},$$

jeżeli, jak w §§ 12 do 14, stałe α i β określa równanie (70).

Przy rzeczywistych wartościach α i β, t. zn. gdy $H^2>\bar{B}_1\bar{B}_2$ (przyp. I) wypada dla powierzchni ugięcia równanie:

$$\zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^5}\left(1+\frac{\alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}-\beta e^{-\frac{nx}{\beta}}}{\beta-\alpha}\right)\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{109.I}$$

W przypadku II ($H^2=\bar{B}_1\bar{B}_2$) jest

$$\zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^5}\left[1-\left(1+\frac{nx}{\gamma}\right)e^{-\frac{nx}{\gamma}}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{109.II}$$

a w przypadku III ($H^2<\bar{B}_1\bar{B}_2$):

$$\zeta=\frac{4qb^2}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^5}\left[1-\left(\cos\frac{nx}{\beta'}+\frac{\beta'}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{109.III}$$

przy tem samem znaczeniu stałych α', β', γ, co w poprzednich paragrafach.

Na podstawie tych równań wyprowadzono następujące wzory dla momentów, sił poprzecznych i reakcyj podporowych:

I przypadek ($H^2>\bar{B}_1\bar{B}_2$).

$$\text{(110.I)}\quad \left|\begin{aligned} M_1=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\Bigg[1+\frac{\pi^2\alpha^2-m_2b^2}{\pi^2\alpha(\beta-\alpha)}e^{-\frac{nx}{\alpha}}-\\ -\frac{\pi^2\beta^2-m_2b^2}{\pi^2\beta(\beta-\alpha)}e^{-\frac{nx}{\beta}}\Bigg]\cos\frac{n\pi y}{b},\end{aligned}\right.$$

$$
(110.\mathrm{I})\quad \left\{ \begin{aligned} M_2 = \frac{4qb^2}{\pi^3} \sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\Bigg[1 + \frac{\pi^2\alpha^2 m_1 - b^2}{\pi^2\alpha(\beta-\alpha)m_1}\cdot e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \\ - \frac{\pi^2\beta^2 m_1 - b^2}{\pi^2\beta(\beta-\alpha)m_1} e^{-\frac{nx}{\beta}}\Bigg]\cos\frac{n\pi y}{b}; \end{aligned} \right.
$$

$$
(111.\mathrm{I})\quad D = \frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{2C}{\bar{B}_2}\cdot\frac{b}{\pi(\beta-\alpha)}\sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\left(e^{-\frac{nx}{\beta}} - e^{-\frac{nx}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}
$$

$$
(112.\mathrm{I})\quad \left\{ \begin{aligned} V_1 = \frac{4qb^2}{\pi^3(\beta-\alpha)}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}\Bigg[\left(\frac{2C}{\bar{B}_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right)e^{-\frac{nx}{\beta}} - \\ - \left(\frac{2C}{\bar{B}_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha}}\Bigg]\cos\frac{n\pi y}{b}, \\ V_2 = -\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}\Bigg[1 + \left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\varepsilon_2 e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \\ - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\eta_2 e^{-\frac{nx}{\beta}}\Bigg]\sin\frac{n\pi y}{b}\ ^{1}; \end{aligned} \right.
$$

$$
(113.\mathrm{I})\quad \left\{ \begin{aligned} R_1 = -\left(V_1 + \frac{\partial D}{\partial y}\right)_{x=0} = -\frac{4q(\alpha+\beta)}{\pi}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b}, \\ R_2 = \left(V_2 + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\Bigg[1 + \\ + \left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\varepsilon'_2\, e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\eta'_2\, e^{-\frac{nx}{\beta}}\Bigg]. \end{aligned} \right.
$$

Wielkości pomocnicze ε_2, η_2; ε'_2, η'_2 mają tutaj to samo znaczenie, co w rów. (93.I) i (94.I).

Narożnej reakcyi $\bar{R}$ nie ma obecnie wcale, a wyrażenia dla M_1 i M_2 dadzą się tak samo, jak w § 14, rozłożyć podług schematu (97), względnie (96). $(M_2)_\infty$ pozostaje przytem niezmienione, a wielkości

---

[1] To równanie da się napisać w wygodniejszej postaci, skoro w wyprowadzonym poniżej wzorze (139.I) (dla V_2) podstawimy $\omega_n = 1$. Podobnież ma się rzecz z wyrażeniem dla R_2 (113.I), które wypływa w ten sam sposób z (143.I).

$$
(114.\mathrm{I})\quad
\left|\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1 &= \frac{4}{\pi^5} qb^2 \frac{1}{m_2} \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^3}\left[\frac{b^2}{\alpha(\beta-\alpha)}\left(\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2} - m_2\right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \right.\\
&\left. - \frac{b^2}{\beta(\beta-\alpha)}\left(\frac{\pi^2\beta^2}{b^2} - m_2\right) e^{-\frac{nx}{\beta}}\right] \cos\frac{n\pi y}{b},\\
\mathfrak{M}_2 &= \frac{4}{\pi^5} qb^2 \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^3}\left[\frac{b^2}{\alpha(\beta-\alpha)}\left(\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2} - \frac{1}{m_1}\right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \right.\\
&\left. - \frac{b^2}{\beta(\beta-\alpha)}\left(\frac{\pi^2\beta^2}{b^2} - \frac{1}{m_1}\right) e^{-\frac{nx}{\beta}}\right] \cos\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}\right.
$$

ubywają tak szybko ze wzrostem x, że można je pominąć dla $x \geqq \frac{3}{2}\, b_{red}$ (przy poprzedniem znaczeniu b_{red}).

Dla momentów utwierdzających krótkiego boku znajdujemy z (110.I):

$$
(115)\qquad (M_1)_{x=0} = -\frac{4qb^2}{\pi^3}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \sum^{(n_1)} \frac{1}{n^3} \cos\frac{n\pi y}{b}.
$$

Jest to, bezwzględnie biorąc, dokładnie $\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}$ — krotna odpowiadająca wielkość $(M_2)_\infty$. A zatem: D i a g r a m m o m e n t ó w u t w i e r d z e n i a w z d ł u ż b r z e g u b j e s t g e o m e t r y c z n i e p o d o b n y d i a g r a m o w i m o m e n t ó w z g i ę c i a M_2 w o d l e g ł y c h p r z e k r o j a c h p ł y t y r ó w n o l e g ł y c h d o o s i Y, w k t ó r y c h z g i ę c i e m o ż n a u w a ż a ć z a w a l c o w e.

W szczególnym przypadku $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$ stają się oba diagramy przystające. Ten wynik otrzymał już dr inż. Nádai dla całkowitego obciążenia równomiernego w przytoczonej powyżej monografii.

Podobnie, jak dla momentów zgięcia, można wyrażenie dla V_2 napisać w postaci:

$$
V_2 = (V_2)_\infty + \mathfrak{V}_2
$$

jeżeli

$$
(116.\mathrm{I})\quad \mathfrak{V}_2 = -\frac{4qb}{\pi^2} \sum^{(n_1)} \frac{1}{n^2}\left[\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\varepsilon_2 e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\eta_2 e^{-\frac{nx}{\beta}}\right] \sin\frac{n\pi y}{b}.
$$

Ta wielkość zdąża ze wzrostem x do granicy 0, tak samo jak V_1.

Siła poprzeczna nie znika, jak w poprzedzającem zadaniu, dla $x = 0$, lecz przybiera wartość:

$$
(117.\mathrm{I},\mathrm{III})\quad (V_2)_{x=0} = -\frac{4qb}{\pi^2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2C}{\bar{B}_2}\right) \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi y}{b}.
$$

Podobnież ma reakcya podporowa w wierzchołkach płyty wartość:

$$(118.\mathrm{I,III}) \quad (R_2)_{x=0} = -\frac{4qb}{\pi^2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2C}{\bar{B}_2}\right)\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}$$

Dla wielkich wartości x znika różnica między reakcyą podporową R_2 a siłą poprzeczną $(V_2)_{y=\frac{b}{2}}$ i obie wielkości zbliżają się do tej samej granicy $-\frac{qb_1}{2}$.

Reakcya podporowa R_1 krótkiego boku b osiąga, bezwzględnie biorąc, największą wartość:

$$(119.\mathrm{I,III}) \quad |R_1|_{max} = \frac{4}{\pi} q(\alpha+\beta)\sum_n \frac{(n_1)}{n^2} = \frac{8qb}{\pi^2}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}\cdot\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}$$

dla $y=0$ i spada ku wierzchołkom aż do zera. W szczególnym przypadku obciążenia całkowitego $(b_1 = b)$ jest

$$(120.\mathrm{I,III}) \quad |R_1|_{max} = 1,167_6\, q\,(\alpha+\beta) = 0,743\, qb\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}},$$

W granicznym przypadku liniowego obciążenia $q' = \lim\limits_{(b_1=0)} qb_1$ osi X-ów staje się R_{1max} logarytmicznie nieskończonem.

Całkowita reakcya boku b:

$$(121.\mathrm{I,III}) \quad \bar{R}_1 = 2\int_0^{\frac{b}{2}} R_1\,dy = -\frac{8}{\pi^2}\,qb\,(\alpha+\beta)\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^3}$$

ma w przypadku $b_1 = b$ wartość

$$(122.\mathrm{I,III}) \quad \bar{R}_1 = -0,852_8\, qb\,(\alpha+\beta) = -0,543\, qb^2\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}},$$

a w granicznym przypadku liniowego obciążenia q' ma wartość

$$(123.\mathrm{I,III}) \quad \bar{R}_1 = -1,167_6\, q'\,(\alpha+\beta) = -0,743\, q'b\sqrt{\frac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}$$

II przypadek $(H^2 = \bar{B}_1\bar{B}_2)$.

$$(110.\mathrm{II}) \quad \left| \begin{aligned} M_1 = \frac{4qb^2}{\pi^3}\frac{1}{m_2}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\Bigg[1-\Bigg\{m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+ \\ +1-\left(m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-1\right)\frac{nx}{\gamma}\Bigg\}e^{-\frac{nx}{\gamma}}\Bigg]\cos\frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}\right.$$

$$(110.\mathrm{II})\quad \left|\begin{aligned} M_2 = \frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\Bigg[1-\Bigg\{1+\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\,+ \\ +\left(1-\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)\frac{nx}{\gamma}\Bigg\}e^{-\frac{nx}{\gamma}}\Bigg]\cos\frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}\right.$$

$$(111.\mathrm{II})\quad D=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{2C}{\bar{B}_2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\frac{nx}{\gamma}e^{-\frac{nx}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$(112.\mathrm{II})\quad \left|\begin{aligned} V_1=\frac{4qb}{\pi^2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\Bigg[2-\Bigg\{1\,- \\ -\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\left(\frac{2C}{\bar{B}_1}+\frac{1}{m_2}\right)\Bigg\}\frac{nx}{\gamma}\Bigg]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\Bigg\}\cos\frac{n\pi y}{b}, \\ V_2=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\Bigg\{1-\Bigg[1+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)+ \\ +\Bigg\{1-\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\Bigg\}\frac{nx}{\gamma}\Bigg]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\Bigg\}\sin\frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}\right.$$

$$(113.\mathrm{II})\quad \left|\begin{aligned} R_1=-\frac{8qb}{\pi^2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b}, \\ R_2=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\Bigg\{1-\Bigg[1+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)+ \\ +\Bigg\{1-\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\Bigg\}\frac{nx}{\gamma}\Bigg]e^{-\frac{nx}{\gamma}}\Bigg\} \end{aligned}\right.$$

Dla momentów utwierdzających brzegu $x = 0$ wypada z wzoru dla M_1 to samo wyrażenie (115) co w I przypadku. Formuły dla $(V_2)_{x=0}$ i $(R_2)_{x=0}$ pozostają też bez zmiany, a reszta wzorów (119 do 123) upraszcza się do następujących postaci:

$$(119.\mathrm{II})\qquad |R_1|_{max}=\frac{8qb}{\pi^2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}$$

$$(120.\mathrm{II})\qquad |R_1|_{max}^{(b_1=b)}=0{,}743_2\,qb\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}$$

$$R_1 = -\frac{16\,qb^2}{\pi^3}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^3} \tag{121.II}$$

$$R_{1(b_1=b)} = -\,0{,}543\,qb^2\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \tag{122,II}$$

$$R_{1(\lim qb_1 = q')}^{(b_1=0)} = -\,0{,}743\,q'b\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \tag{123.II}$$

Ostatnie wzory dostarczają kilku prostych reguł dla zastosowań praktycznych.

III przypadek ($H^2 < \bar{B}_1\bar{B}_2$).

$$(110.\mathrm{III})\left\{\begin{aligned}
M_1 &= \frac{4\,qb^2}{\pi^3}\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\Bigg\{1-\Bigg[\left(m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+1\right)\cos\frac{nx}{\beta'}-\\
&\quad -\frac{\beta'}{\alpha'}\left(m_2\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-1\right)\sin\frac{nx}{\beta'}\Bigg]e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\Bigg\}\cos\frac{n\pi y}{b},\\
M_2 &= \frac{4\,qb^2}{\pi^3}\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\Bigg\{1-\Bigg[\left(1+\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)\cos\frac{nx}{\beta'}+\\
&\quad +\frac{\beta'}{\alpha'}\left(1-\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)\sin\frac{nx}{\beta'}\Bigg]e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\Bigg\}\cos\frac{n\pi y}{b},
\end{aligned}\right.$$

$$D = \frac{4\,qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{2\,C}{\bar{B}_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\sum_n\frac{(n_1)}{n^3}\frac{\pi\beta'}{b}\,e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\sin\frac{nx}{\beta'}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{111.III}$$

$$(112.\mathrm{III})\left\{\begin{aligned}
V_1 &= \frac{4qb}{\pi^2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\Bigg[\frac{2b}{\pi\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}-\\
&\quad -\frac{\pi\beta'}{2b}\left(\frac{1}{m_1}\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}-\frac{1}{m_2}\right)\sin\frac{nx}{\beta'}\Bigg]e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\cos\frac{n\pi y}{b},\\
V_2 &= -\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\Bigg\{1-\Bigg[\left\{1+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{2\,C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\cos\frac{nx}{\beta'}+\\
&\quad +\frac{\beta'}{\alpha'}\left\{1-\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{2\,C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\sin\frac{nx}{\beta'}\Bigg]e^{-\frac{nx}{\alpha'}}\Bigg\}\sin\frac{n\pi y}{b},
\end{aligned}\right.$$

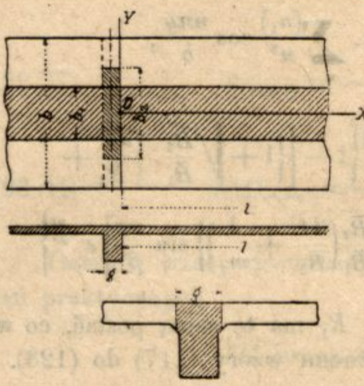
$$
(113.\text{III})\left\{\begin{aligned}
R_1 &= -\frac{8qb^2}{\pi^3\alpha'}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b} = \\
&= -\frac{8qb}{\pi^2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\frac{H}{\bar{B}_2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}}\cdot\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b}, \\
R_2 &= -\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\left\{1-\left[\left\{1+\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\right.\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left.\left.+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\cos\frac{nx}{\beta'}+\frac{\beta'}{\alpha'}\left\{1-\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\sin\frac{nx}{\beta'}\right]e^{-\frac{nz}{\alpha'}}\right\}
\end{aligned}\right.
$$

Łatwo zauważyć, że wzór dla R_1 ma tę samą postać, co w I przypadku, Tak samo pozostają ważnemi wzory (117) do (123).

§ 16. Działanie jednego żebra poprzecznego w przypadku, gdy po obu jego stronach płyta rozciąga się stosunkowo daleko.

Wskutek stałego połączenia żebra z płytą, gra płyta podwójną rolę: po p i e r w s z e jako płyta narażona na ogólne zgięcie i podparta sprężyście żebrem, o dwu warstwach obojętnych i powierzchni ugięcia czyniącej zadość równaniu różniczkowemu (13); p o w t ó r e jako płytowata część zginanej w płaszczyźnie żebra belki o przekroju T z własną warstwą obojętną. W tym drugim charakterze doznaje płyta pewnych ciśnień w kierunku poprzecznym (równoległym do osi żebra). Ich rozkład będzie przedmiotem bliższego badania w następnym paragrafie; na razie można przyjąć, że przy zginaniu żebra wskutek symetrycznie rozłożonego obciążenia współdziałają po obu stronach skrawki płyty o szerokości c (mierzonej prostopadle do żebra). Współdziałająca szerokość płyty w znanem znaczeniu urzędowych przepisów byłaby więc równa $2c+g$, skoro przez g oznaczymy grubość żebra, mierzoną tuż przy płycie (rys. 20).

Niechaj teraz obciążenie płyty składa się z równomiernego obciążenia powierzchniowego q (kg/m²) środkowego paska płyty o szerokości b_1 i równomiernego obciążenia liniowego q' (kg/m) środkowej części żebra o długości b_2. Gdyby żebro było zupełnie sztywne, to prawa połowa płyty wygięłaby się podług równania (109) (przy obiorze osi Y-ów w płaszczyźnie prawej ściany żebra), a pod wpływem obciążenia q powstałyby w żebrze siły oddziaływania, określone przez pierwszą z formuł (113). Ale żebro poddaje się działaniu tych sił i obciążenia q', wobec czego zachodzi nowe zgięcie płyty, które się superponuje z poprzedzającem. Ugięcie wypadkowe da się wyrazić przez



Rys. 20.

$$(124.\mathrm{I})\quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 B_2}\sum_n \left[\frac{(n_1)}{n^5} - \frac{(n_1) - \varepsilon_n (n_2)}{n^5}\cdot\frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta - \alpha}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}$$

przyczem

$$n = 1, 3, 5, \ldots \quad (n_1) = \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b}, \quad (n_2) = \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_2}{b},$$

a wielkości ε_n oznaczają nieznane jeszcze spółczynniki, które wypadałoby wyznaczyć z pewnych warunków krańcowych. To wyrażenie czyni mianowicie zadość równaniu różniczkowemu powierzchni ugięcia tudzież warunkom krańcowym wzdłuż brzegów $y = \pm\frac{b}{2}$ i dla $x = \infty$, atoli dysponujemy jeszcze dość złożonymi warunkami krańcowymi dla linii połączenia żebra z płytą ($x = 0$). Tutaj zastosujemy z korzyścią metodę Ritz'a i poszukamy najpierw ogólnego wyrażenia dla energii potencyalnej naszej płyty żebrowej.

Łatwo zauważyć, że pominąwszy bardzo stosunkowo nieznaczną pracę sił poprzecznych można całkowitą energię rozłożyć na następujące dodajniki:

1°) Ogólna praca zginania samej płyty, określona równaniem (9');

2°) praca zginania samego żebra i

3°) praca sił ściskających we „współdziałających" częściach płyty.

Pierwszą część energii potencyalnej określa wyrażenie:

$$2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^l dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left[\bar{B}_1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 + \bar{B}_2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{B}_1}{m_2} + \frac{\bar{B}_2}{m_1}\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + 4C\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2\right],$$

dla drugiej części znajdujemy łatwo

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B_r \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2_{x=0} dy,$$

jeżeli B_r oznacza sztywność zginania samego żebra; nakoniec trzecią część przedstawia wyrażenie:

$$2 \cdot \tfrac{1}{2} c \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} \frac{\sigma_b^2 F_2}{E_b} dy,$$

przyczem $-\sigma_b$ oznacza odpowiadające ciśnienie w betonie płyty, a

$$F_2 = F_{2b} + n F_{2f}$$

sprowadzone pole przekroju płyty o szerokości 1. Nadto odnosi się sztywność zginania żebra B_r do osi obojętnej, odpowiadającej zginaniu w płaszczyźnie YZ belki płytowej o szerokości $2c + g$. Jeżeli e oznacza odległość tejże osi obojętnej od osi odpowiadającej zgięciu płyty w tej samej płaszczyźnie, to naprężenie betonu σ_b, w trzeciem wyrażeniu ma bezwzględną wartość

$$e E_b \frac{1}{(\varrho_2)_{x=0} + e}.$$

Zamiast tego można z zupełnie wystarczającem przybliżeniem przyjąć

$$\frac{e E_b}{(\varrho_2)_{x=0}} = eE_b\left(-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_{x=0}$$

Wyrażenie dla trzeciej części przybierze przeto postać

$$c\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^2 E_b F_2 \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2_{x=0} dy$$

Druga i trzecia część dadzą się ściągnąć w jedno wyrażenie, a mianowicie:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (B_r + 2ce^2 E_b F_2)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2_{x=0} dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} (B^* - 2\bar{B}_2 c)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2_{x=0} dy$$

Tutaj oznacza

$$B^* = B_r + 2ce^2 E_b F_2 + 2\bar{B}_2 c$$

sztywność zginania belki płytowej o górnej szerokości $2c+g$. Dla całkowitej energii potencyalnej (wewnętrznej pracy odkształcenia) naszej płyty z żebrem otrzymujemy nakoniec wyrażenie:

$$(125)\quad L_i = \int\limits_0^l \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\bar{B}_1 \left(\frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2}\right)^2 + \bar{B}_2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{B}_1}{m_2} + \frac{\bar{B}_2}{m_1}\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + 4C\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left((B^* - 2\bar{B}_2 c)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2_{x=0} dy,\right.$$

a dla pracy sił zewnętrznych:

$$(126)\quad L = \int\limits_0^l \int\limits_{-\frac{b_1}{2}}^{+\frac{b_1}{2}} q\,\zeta\, dx\, dy + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{b_2}{2}}^{+\frac{b_2}{2}} q'(\zeta)_{x=0} dy$$

Z równań warunkowych

$$(127)\quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}(L_i - 2L) = 0 \text{ [1]}$$

[1] Lorenz H., Näherungslösungen von Problemen der Elastizitätstheorie, Phys. Zeitschr. 1913, XIV. pag. 71; Näherungslösungen statisch unbestimmter Probleme, Z. d. V. d. Ing. 1913, pag. 543.

można teraz wyznaczyć parametry ε_n

$$(n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Po wprowadzeniu skracających oznaczeń:

$$\frac{4qb^4}{\pi^6 \bar{B}_2} = \Omega, \quad (n_1) - \varepsilon_2(n_2) = (n_1)\,\omega_n$$

znajdziemy przez różniczkowanie wyrażenia (124.I) dla ζ:

$$(128.\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} &= \Omega\frac{1}{\alpha\beta}\sum_n \frac{(n_1)\,\omega_n}{n^3}\cdot\frac{\beta e^{-\frac{nx}{\alpha}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\beta}}}{\beta-\alpha}\cos\frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} &= -\Omega\frac{\pi^2}{b^2}\sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\left[1 - \omega_n\frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta-\alpha}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} &= -\Omega\frac{\pi}{b}\sum_n \frac{(n_1)\omega_n}{n^3}\cdot\frac{e^{-\frac{nx}{\beta}} - e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta-\alpha}\sin\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}\right.$$

Wstawiwszy te wartości w ogólną formułę (125) dla energii potencyalnej i wykonawszy całkowania, otrzymamy po licznych redukcyach:

$$(129)\quad L_i = \Omega^2\left[\frac{\bar{B}_1 b}{4\alpha\beta(\alpha+\beta)}\cdot\sum_n\frac{(n_1)^2\omega_n^2}{n^7} + \frac{\pi^4\bar{B}_2}{2b^3}\sum_n\frac{(n_1)^2}{n^6}\left\{l - \right.\right.$$
$$\left. - 2(\alpha+\beta)\frac{\omega_n^2}{n} + \tfrac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{\omega_n^2}{n}\right\} + \frac{\pi^2}{4(\alpha+\beta)b}\,2H\sum_n\frac{(n_1)^2\omega_n^2}{n^7} +$$
$$\left. + \frac{\pi^4}{4b^3}(B^* - 2\bar{B}_2 c)\sum_n\frac{(n_1)^2(1-\omega_n)^2}{n^6}\right]$$

Podobnież dochodzimy do następującego wyrażenia dla podwójnej pracy sił zewnętrznych:

$$(130)\qquad 2L = \Omega\left[\frac{4bq}{\pi}\sum_n\frac{(n_1)^2}{n^6}\left\{l - (\alpha+\beta)\frac{\omega_n}{n}\right\} + \frac{2bq'}{\pi}\sum_n\frac{(n_1)^2\varepsilon_n}{n^6}\right],$$

W obu wyrażeniach oznacza l (nieskończenie wielką) długość jednej połowy płyty. Warunki najmniejszości (127) dostarczają teraz po odpowiednich redukcyach z uwzględnieniem związków (72):

$$(131)\qquad \omega_n = \frac{\dfrac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c - \dfrac{(n_2)}{(n_1)}\dfrac{q'}{q}}{\dfrac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c + 2\dfrac{\alpha+\beta}{n}}; \quad \varepsilon_n = \frac{\dfrac{q'}{q} + 2\dfrac{\alpha+\beta}{n}\dfrac{(n_1)}{(n_2)}}{\dfrac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c + 2\dfrac{\alpha+\beta}{n}}$$

Łatwo się przekonać, że otrzymane rozwiązanie (124.I) wraz z (131) przekształca się w granicznym przypadku $B^* - 2\bar{B}_2 c = 0$, t. zn. bez żebra, na:

$$\zeta = \zeta(q) + \zeta(q'),$$

jeżeli

$$\zeta(q) = \frac{4qb^4}{\pi^5 \bar{B}_2} \sum_n \frac{(n_1)}{n^5} \cos\frac{n\pi y}{b};$$

$$\zeta(q') = \frac{2q'b^4}{\pi^5 \bar{B}_2} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta} \sum_n \frac{(n_1)}{n^4} \cdot \frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta - \alpha} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

co zgadza się ze znalezionymi poprzednio wzorami dla tych przypadków obciążenia. W drugim granicznym przypadku żebra doskonale sztywnego. ($B^* = \infty$), staje się $\varepsilon_n = 0$, $\omega_n = 1$, a rozwiązanie zgadza się znowu z odpowiadającem rozwiązaniem w § 15.

Dla momentów zginających i skręcających płyty wypływają z (124.I) wyrażenia:

$$(132.\mathrm{I})\quad \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \frac{4qb^2}{\pi^3} \cdot \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2} \sum_n \frac{(n_1)}{n^3} \left[\frac{1}{m_2} + \frac{\omega_n}{\beta-\alpha} \left\{ \beta \left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2} - \frac{1}{m_2} \right) e^{-\frac{nx}{\beta}} - \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \alpha \left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{m_2} \right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} \right\} \right] \cos\frac{n\pi y}{b}, \\ M_2 &= \frac{4qb^2}{\pi^3} \sum_n \frac{(n_1)}{n^3} \left[1 + \frac{\omega_n}{\beta-\alpha} \left\{ \beta \left(\frac{1}{m_1}\frac{b^2}{\pi^2\beta^2} - 1 \right) e^{-\frac{nx}{\beta}} - \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \alpha \left(\frac{1}{m_1}\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2} - 1 \right) e^{-\frac{nx}{\alpha}} \right\} \right] \cos\frac{n\pi y}{b}, \\ D &= \frac{4qb^3}{\pi^4} \cdot \frac{2C}{\bar{B}_2} \sum_n \frac{(n_1)\omega_n}{n^3} \cdot \frac{e^{-\frac{nx}{\beta}} - e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta - \alpha} \sin\frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right.$$

Stąd otrzymujemy wprost dwie ważne szczególne wartości momentów zginających, a mianowicie:

$$
(133) \quad \begin{cases} (M_1)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\dfrac{4qb^2}{\pi^3}\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum\limits_n^{(n_1)}\dfrac{1}{n^3}\left[\left(\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+\dfrac{1}{m_2}\right)\omega_n-\dfrac{1}{m_2}\right], \\ (M_2)_{\substack{x=0\\y=0}} = \dfrac{4qb^2}{\pi^3}\sum\limits_n^{(n_1)}\dfrac{1}{n^3}\left[1-\left(1+\dfrac{1}{m_1}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)\omega_n\right] \end{cases}
$$

Obie mogą być tak dodatnie, jak i ujemne, zależnie od wzajemnego stosunku sztywności i obciążenia żebra i płyty. W szczególności staje się $(M_1)_{00}$ ujemnem, gdy

$$
\omega_1 > \frac{1}{1+m_2\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}},
$$

co zachodzi przy dość sztywnem żebrze, albo przy dostatecznie małym stosunku $q':q$. Natomiast będzie $(M_2)_{00}$ dodatniem, jeżeli

$$
\omega_1 < \frac{1}{1+\dfrac{1}{m_1}\sqrt{\dfrac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}}
$$

względnie, jeżeli ω_1 jest ujemne, a to się spełnia, gdy albo sztywność żebra jest niewielka, albo $q':q$ wypada duże. Pozatem może $(M_2)_{00}$ stać się ujemnem, jakkolwiek krzywizna płyty w płaszczyźnie YZ jest dodatnia, byleby tylko zachodziła jednocześnie dostatecznie silna krzywizna ujemna w płaszczyźnie XZ.

Moment zginający belki płytowej o sztywności zginania $B^* - 2\bar{B}_2 c$ obliczymy według wzoru:

$$
M = -(B^* - 2\bar{B}_2 c)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)_{x=0},
$$

a więc

$$
(134) \qquad M = \frac{4qb^2}{\pi^3}\left(\frac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c\right)\sum^{(n_1)}\frac{\varepsilon_n}{n^3}\cos\frac{n\pi y}{b}
$$

Po wstawieniu wartości ε_n da się to równanie przedstawić w postaci:

$$
M = M_q + M_{q'},
$$

jeżeli

$$(135)\quad \begin{cases} M_q = \dfrac{8qb^2}{\pi^3}(\alpha+\beta)\sum\limits_n^{(n_1)}\dfrac{}{n^4}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{n\pi y}{b}}{1+2\dfrac{\alpha+\beta}{n}\cdot\dfrac{\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2 c}}, \\ M_{q'} = \dfrac{4q'b^2}{\pi^3}\sum^{(n_2)}\dfrac{}{n^3}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{n\pi y}{b}}{1+2\dfrac{\alpha+\beta}{n}\cdot\dfrac{\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2 c}}, \end{cases}$$

oznaczają odpowiednio te wartości momentu M, które pochodzą od samego obciążenia płyty q, względnie od obciążenia samego żebra q'. Stąd łatwo wyprowadzić przybliżone formuły dla zastosowań praktycznych, pod warunkiem, że liczba stosunkowa

$$2\frac{(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2 c}$$

jest dość małym ułamkiem właściwym, co widocznie zajdzie wtedy, gdy żebro posiada sztywność dość dużą w porównaniu do płyty o szerokości przekroju $(\alpha+\beta)$. Wówczas z dobrem przybliżeniem będzie:

$$(135a)\quad \begin{cases} M_q = \sim \dfrac{8}{31}(\alpha+\beta)qb^2\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{b_1}{b}\cos\dfrac{\pi y}{b}}{1+\dfrac{2(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2 c}}, \\ M_{q'} = \sim \dfrac{M_{q'}^{(o)}}{1+\dfrac{2(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2 c}}, \end{cases}$$

jeżeli $M_{q'}^{(o)}$ oznacza moment zginający belki prostej o rozpiętości b i obciążeniu $q'b_2$ równomiernie rozłożonem na środkowej części.

Dla $y=0$ wypadają z (125) dokładne największe wartości momentów:

$$(136)\quad (M_q)_{max} = \frac{8(\alpha+\beta)qb^2}{\pi^3}\sum_n \frac{1}{n^4}\cdot\frac{\sin\dfrac{n\pi}{2}\dfrac{b_1}{b}}{1+2\dfrac{\alpha+\beta}{n}\cdot\dfrac{\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2 c}},$$

$$(136)\quad (M_{q'})_{max} = \frac{4q'b^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \frac{b_2}{b}}{1 + 2\frac{\alpha+\beta}{n} \cdot \frac{\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}},$$

a z (135a) odpowiadające wartości przybliżone:

$$(136a)\quad \begin{cases} (M_q)_{max} = \sim \dfrac{8}{31} \dfrac{(\alpha+\beta) qb^2 \sin \frac{\pi}{2} \frac{b_1}{b}}{1 + \dfrac{2(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}}, \\[2ex] (M_{q'})_{max} = \sim \dfrac{1}{8} \dfrac{q' b_2 (2b - b_2)}{1 + \dfrac{2(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}}. \end{cases}$$

Powyższe wzory upraszczają się jeszcze w następujących praktycznie ważnych przypadkach:

a) $b_1 = b_2 = b$, t. zn. tak obciążenie płyty, jakoteż obciążenie żebra rozciągają się na całą rozpiętość b. Teraz będzie dokładnie:

$$(137)\quad \begin{cases} (M_q)_{max} = \dfrac{8(\alpha+\beta) qb^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_n \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4 + 2n^3 \cdot \dfrac{(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}}; \\[2ex] (M_{q'})_{max} = \dfrac{4q'b^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_n \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3 + 2n^2 \cdot \dfrac{(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}}, \end{cases}$$

$$(n = 1, 3, 5 \ldots)$$

a w przybliżeniu:

$$(137a)\quad M_{max} = (M_q)_{max} + (M_{q'})_{max} = \sim \frac{\frac{8}{31}(\alpha+\beta) qb^2 + \frac{1}{8} q'b^2}{1 + \dfrac{2(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}}$$

Ta formuła daje dobry pogląd na współdziałanie obu elementów dźwigających i wskazuje wyraźnie na korzyści z ich połączenia wypływające.

b) $b_1 = b$, $b_2 = 0$, $\lim b_2 q' = P$, t. zn. całkowite równomierne obciążenie płyty i skupiony ciężar P w środku żebra.

W tym przypadku jest dokładnie:

$$M_{max} = \frac{8(\alpha+\beta)qb^2}{\pi^3}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4 + 2n^2\dfrac{(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}} + \tag{138}$$

$$+ \frac{2Pb}{\pi^2}\sum_n \frac{1}{n^2 + 2n\dfrac{(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}}$$

a w przybliżeniu, dla małych wartości

$$\frac{2(\alpha+\beta)\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c} = t$$

$$M_{max} = \sim \frac{8}{31}\,\frac{(\alpha+\beta)qb^2}{1+t} + \frac{Pb}{4}\cdot\frac{1}{1+0{,}78\,t} \tag{138a}$$

Do przybliżonej wartości spółczynnika wielkości Pb w powyższym wzorze prowadzi następujące rozważanie:

Dokładna wartość szeregu $\sum_n \frac{1}{n^2+nt}$ dla dowolnego dodatniego t leży między granicami

$$\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{a} \quad \sum_n \frac{1}{n^2(1+t)} = \frac{1}{1+t}\,\frac{\pi^2}{8}.$$

Średnia harmoniczna obu tych wielkości, t. j. $\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{2}{2+t}$, będzie tem mniej różnić się od dokładnej wartości szeregu, im mniejsze jest t. Dla $t = 1$ znajdujemy łatwo sumę szeregu, a zarazem dokładną wartość rozpatrywanego spółczynnika. Jest nią

$$\sum_n \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots =$$

$$= 0{,}693 = 0{,}562\,\frac{\pi^2}{8}.$$

Średnia harmoniczna ma teraz wartość $\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{8}$, t. zn. około

18°/₀ więcej; podstawiwszy jednak zamiast tego jako przybliżoną wartość sumy

$$\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{1}{1+0{,}78t},$$

otrzymamy w przedziale $0 < t \leqq 1$ wartości, które dokładną wielkość przekraczają najwyżej o 2,5°/₀.

Powracając teraz do statycznych wielkości płyty, znajdujemy dla sił poprzecznych wzory:

$$(139.\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} V_1 &= \frac{4qb^2}{\pi^3(\beta-\alpha)}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n_1)\,\omega_n}{n^2}\left[\left(\frac{2C}{\bar{B}_1}+\frac{1}{m_1}-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right)e^{-\frac{nx}{\beta}}-\right.\\ &\quad\left.-\left(\frac{2C}{\bar{B}_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\right)e^{-\frac{nx}{\alpha}}\right]\cos\frac{n\pi y}{b},\\ V_2 &= -\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(n_1)}{n^2}\left[1-\omega_n\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left\{\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\frac{\beta e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta-\alpha}-\right.\right.\\ &\quad\left.\left.-\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\frac{\alpha e^{-\frac{nx}{\beta}}}{\beta-\alpha}\right\}\right]\sin\frac{n\pi y}{b} \end{aligned}\right.$$

Siły przeniesione z jednej połowy płyty na żebro są:

$$(140)\qquad (R_1)=(V_1)_{x=0}=\frac{4(\alpha+\beta)q}{\pi}\sum_n\frac{(n_1)\,\omega_n}{\pi^2}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

Te siły osiągają największą wartość dla $y=0$, a mianowicie:

$$(141)\qquad |R|_{max}=\frac{4(\alpha+\beta)q}{\pi}\sum_n\frac{(n_1)\,\omega_n}{n^2}$$

Ich wypadkową jest

$$(142)\qquad |R_1|=2\int_0^{\frac{b}{2}}|R_1|\,dy=\frac{8(\alpha+\beta)q}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)\,\omega_n}{n^3}$$

Przy pewnych mało od 1 różniących się wartościach stosunku:

$$\frac{(n_2)}{(n_1)}\frac{q'}{q}:\left(\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c\right)$$

może ta wypadkowa zniknąć, a w tym przypadku niesie żebro tylko własne obciążenie q'.

Reakcye podporowe podłużnego brzegu $y=\frac{b}{2}$ określa równanie:

$$(143.\mathrm{I})\qquad R_2=\left(V_2+\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}}=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\Bigg[1-$$

$$-\omega_n\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left\{\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\frac{\beta e^{-\frac{n x}{\alpha}}}{\beta-\alpha}-\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\frac{\alpha e^{-\frac{n x}{\beta}}}{\beta-\alpha}\right\}\Bigg]$$

Te reakcye osiągają największość bezwzględnej wartości dla $x=0$:

$$(144)\qquad |R_2|_{max}=\frac{4qb}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\left[1-\omega_n\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}+\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right)\right]$$

która przy liniowem obciążeniu q' całej rozpiętości b (t. j. gdy $b_2=b$) nie może się stać nieskończoną, jak w przypadku płyty bez żebra (§ 12), ponieważ teraz żebro bierze główny udział w przeniesieniu tego obciążenia.

Całkowitą reakcyę połowy podłużnego brzegu płyty l określa wyrażenie:

$$(145)\qquad \bar{R}_2=\int_0^l R_2\,dx=-\frac{4qbl}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}+$$

$$+\frac{4qb}{\pi^2}(\alpha+\beta)\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)\omega_n}{n^3}=-\frac{qb_1l}{2}+\frac{4qb}{\pi^2}(\alpha+\beta)\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)\omega_n}{n^3}$$

Stąd znajdujemy przy pomocy warunku równowagi

$$2\bar{R}_2+R_r+qb_1l+\frac{q'b_2}{2}=0$$

reakcyę podporową żebra

$$(146) \qquad R_r = -\frac{q'b_2}{2} - \frac{8\,qb(\alpha+\beta)}{\pi^2}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)\,\omega_n}{n^3}$$

zgodnie z wynikiem obliczenia R_1 rów. (42).

Najczęściej będzie można poprzestać na przybliżonym wzorze:

$$(146a) \qquad |R_r| = \frac{q'b_2}{2} + \frac{8\,qb(\alpha+\beta)}{\pi^2}\cdot\frac{\left(\frac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c\right)\sin\frac{\pi b_1}{2\,b} - \frac{q'}{q}\sin\frac{\pi b_2}{2\,b}}{\frac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c + 2(\alpha+\beta)},$$

który powstaje z (146) przez zatrzymanie pierwszego tylko wyrazu szeregu. Ten wzór upraszcza się jeszcze w przypadku obciążenia całej rozpiętości ($b_1 = b_2 = b$) na następujący:

$$(147) \qquad |R_r| = \frac{q'b}{2} + \frac{8\,qb}{\pi^2}(\alpha+\beta)\frac{\frac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c - \frac{q'}{q}}{\frac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c + 2(\alpha+\beta)}$$

W miarę skupienia obciążenia maleje widocznie dokładność przybliżonego wzoru (146).

Wyrażenia dla wielkości statycznych wyprowadzono wprawdzie w tym paragrafie przy założeniu przypadku I ($H^2 > \bar{B}_1\bar{B}_2$), pominięto jednakże przejście do przypadku II i III, albowiem przytem zmieniają swą postać tylko ogólne wzory (124, 128, 132 i 139) jako funkcye x i y, gdy tymczasem pozostałe wzory można stosować bez zmiany. Z tego też powodu brak I przy ich liczbach porządkowych.

IV. Płyta prostokątna brzegami podłużnemi *a* poziomo podparta i utwierdzona brzegami poprzecznemi *b*.

§ 18. Nowy sposób rozwiązywania pewnej grupy zagadnień płyt prostokątnych.

Jak już zaznaczono w § 13, można do rozwiązania niektórych zadań, odnoszących się do płyty prostokątnej, użyć z korzyścią rozwiązań, uzyskanych dla płyty nieskończenie długiej. Skoro mianowicie znamy równanie powierzchni ugięcia dla nieskończenie długiej płyty o szerokości b, które odpowiada dowolnemu zresztą obciążeniu $p(x, y)$ prostokątnej części płyty o długości a, to dzielimy płytę liniowemi podporami poprzecznemi na prostokątne pola o równej długości a i obciążamy wszystkie pola naprzemian danem obciążeniem p i obciążeniem p^*, ukształtowanem symetrycznie względem pierwszego w odniesieniu do pionowej płaszczyzny reakcyj podporowych między obu polami. Wytworzona w ten sposób powierzchnia ugięcia nieskończenie długiej płyty musi mieć, gwoli symetryi, we wszystkich punktach prostej podporowej styczne poziome; przeto powstaje przytem taka sama powierzchnia ugięcia, jak gdyby płyta o długości a była wzdłuż brzegów b doskonale utwierdzoną.

Nieznane reakcye podporowe brzegów poprzecznych należy teraz pojmować jako ujemne obciążenia i odpowiadającą im powierzchnię ugięcia $\zeta_2(x, y)$ nieskończenie długiej płyty trzeba przedstawić w postaci Fourier'owskiego szeregu o zmiennej y. Oznaczywszy przez ζ_1^* rzędną powierzchni ugięcia płyty nieskończonej bez poprzecznego podparcia przy obciążeniu p i p^*, mamy:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$$

jako rozwiązanie naszego zadania. Spółczynniki szeregu dla ζ_2 wyznaczymy przytem z warunku, że w prostych podporowych musi znikać $\zeta_1 + \zeta_2$.

Podobnież można postąpić i w przypadku swobodnego podparcia całego obwodu płyty. Wtedy należy na polach ab nieskończonej płyty pomocniczej umieścić naprzemian obciążenia p, $-p^*$, p, $-p^*, \ldots$, przez co powstanie falista powierzchnia ugięcia z prostemi przegięcia na granicach poszczególnych pól. Wskutek tego znikają momenty zginające wzdłuż tych prostych, a równowaga dowolnego pola ab płyty nie będzie naruszoną, jeżeli je z obu stron wyciąć i wzdłuż nowych brzegów swobodnie (poziomo) podeprzeć. W ten sposób otrzymujemy wyrażenia dla ζ, które się odznaczają szczególną prostotą nawet w porównaniu do rozwinięć znalezionych przedtem dla kilku prostych przypadków obciążenia płyty równokierunkowej.

Także w przypadku utwierdzenia jednego tylko brzegu i swobodnego podparcia innych brzegów prostokątnej płyty da się traktowanie zadania nieraz znacznie uprościć przez zużytkowanie rozwiązań pomocniczych dla nieskończenie długiej płyty. Dajmy na to, że szukamy powierzchni ugięcia płyty prostokątnej ab, wzdłuż jednego brzegu poprzecznego b doskonale utwierdzonej, a zresztą dokoła swobodnie podpartej, pod wpływem obciążenia $p(x, y)$. — Wtedy trzeba nieskończoną płytę pomocniczą o tej samej szerokości b rozłożyć na pola o długości a i obciążyć następujące po sobie pola według schematu:

$$
\begin{array}{llllllll}
n, & n+1, & n+2, & n+3; & n+4, & n+5, & n+6, & n+7;\ldots \\
p, & p^*, & -p, & -p^*; & p, & p^*, & -p, & -p^*;\ldots
\end{array}
$$

Tutaj oznacza, jak pierwej, p^* obciążenie symetryczne względem p w odniesieniu do prostej rozdzielającej pola n i $n+1$, względnie $n+4$ i $n+5$, jako osi symetryi. Pod tem obciążeniem powstaje oczywiście falista powierzchnia ugięcia ζ_1 o długości fali $4a$ i prostych przegięcia między polami $n-1$ i n; $n+1$ i $n+2$; $n+3$ i $n+4$....

Działając teraz w prostych rozgraniczających pola $(n, n+1)$; $(n+2, n+3)$;.... naprzemian do góry i nadół różnemi zresztą reakcyami R_1 i oznaczywszy przez ζ_2 rzędne powierzchni ugięcia, wywołane tylko tem działaniem, możemy znowu rozwiązanie naszego zadania przedstawić w postaci

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2,$$

jeżeli siły R_1 wyznaczymy tak, aby wypadkowe ugięcie w odpowiadających prostych granicznych było równe O. Każde bowiem pole płyty nieskończonej znajduje się w tych samych warunkach statycznych, co dana płyta prostokątna o długości a i o szerokości b. We wszystkich trzech przypadkach polegają korzyści przedstawionej metody rozwiązania po większej części na tem, że szeregi funkcyi wykładniczych o postaci

$$\sum_n e^{-k(na \pm x)}$$

dają się bardzo łatwo sumować.

§ 18. Rozwiązanie w przypadku zupełnego utwierdzenia i stałego podparcia brzegów poprzecznych. Porównanie z wynikami pewnej reguły praktycznej.

Założywszy obciążenie $p(y)$ niezależne od x, upraszczamy jeszcze rachunek, gdyż symetryczne obciążenie sąsiedniego pola pozostaje to samo i nieskończoną płytę pomocniczą trzeba obciążyć na całej długości jednakowo. Przy obiorze początku spółrzędnych w rogu płyty, będzie powierzchnię ugięcia płyty pomocniczej określać równanie

$$\zeta_1 = \frac{b^4}{\pi^4 B_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

jeżeli oznaczymy przez

$$c_n = \frac{2}{b} \int_0^b p(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy$$

uważane za dane spółczynniki Fourier'owskiego rozwinięcia funkcyi

$$p(y) = \sum_n c_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Skoro wyrazimy nieznane reakcye p' poprzecznego podparcia także w postaci szeregu trygonometrycznego

$$p'(y) = \sum_n c' \sin \frac{n\pi y}{b}$$

i obliczymy według § 12, względnie 13, ugięcie punktu płyty (x, y), pochodzące od p', to przy działaniu tylko sił reakcyjnych leżących w płaszczyźnie YZ będzie tem ugięciem

$$-\zeta = \frac{b^4}{2\pi^4 B_2} \sum_n \frac{c_n'}{n^3} \frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi y}{b} = F(x, y),$$

a zatem przy działaniu wszystkich reakcyj płyty nieskończenie długiej powstanie ugięcie:

$$-\zeta_2 = \sum_{r=0,1,2,..} F(ra + x, y) + \sum_{r=1,2,3,..} F(ra - x, y)$$

dla

$$0 \leqq x \leqq a$$

Zważywszy, że

$$\sum_{r=1,2,3,..} e^{-\frac{n}{\beta}(ra+x)}$$

jako suma szeregu geometrycznego o ilorazie $e^{-\frac{na}{\beta}} < 1$ na wartość:

$$\frac{e^{-\frac{nx}{\beta}}}{e^{\frac{na}{\beta}} - 1},$$

i podobnież

$$\sum_{r=1,2,3,...} e^{-\frac{n}{\beta}(ra-x)} = \frac{e^{\frac{nx}{\beta}}}{e^{\frac{na}{\beta}} - 1},$$

mamy

$$-\zeta_2 = \frac{b^4}{2\pi^4 \overline{B}_2} \sum \frac{c_n'}{n^2} \left(\frac{\beta e^{-\frac{nx}{\beta}} - \alpha e^{-\frac{nx}{\alpha}}}{\beta - \alpha} + \frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \cdot \frac{Ch \frac{nx}{\beta}}{e^{\frac{na}{\beta}} - 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} \frac{Ch \frac{nx}{\alpha}}{e^{\frac{na}{\alpha}} - 1} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Warunek

$$(\zeta_1 + \zeta_2)_{x=0} = 0$$

dostarcza teraz wartości nieznanych spółczynników

$$c_n' = \frac{1}{n} \frac{2(\alpha + \beta) c_n}{1 + \frac{2\beta}{\beta - \alpha} \frac{1}{e^{\frac{na}{\beta}} - 1} - \frac{2\alpha}{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{e^{\frac{na}{\alpha}} - 1}}$$

Po wstawieniu wartości c_n i c_n' w wyrażenia dla ζ_1 i ζ_2, otrzymujemy szukane równanie powierzchni ugięcia $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ w ogólnej postaci:

$$\zeta = \frac{b^4}{\pi^4 \bar{B}_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} \Big[1 - \frac{1}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \Big(\alpha Sh \frac{nx}{\alpha} - \beta \, Sh \frac{nx}{\beta} - \tag{148.I}$$

$$- \alpha_{an} Ch \frac{nx}{\alpha} + \beta_{an} Ch \frac{nx}{\beta} \Big) \Big] \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Przytem oznaczono dla skrócenia:

$$c_n = \frac{2}{b} \int_0^b p(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, dy,$$

$$\alpha_{an} = \alpha \frac{e^{\frac{na}{\alpha}} + 1}{e^{\frac{na}{\alpha}} - 1} = \alpha Cth \frac{na}{2\alpha}; \; \beta_{an} = \beta \frac{e^{\frac{na}{\beta}} + 1}{e^{\frac{na}{\beta}} - 1} = \beta \, Cth \frac{na}{2\beta}.$$

Tak wygląda rozwiązanie w przypadku I ($H^2 > \bar{B}_1 \bar{B}_2$). W II przypadku ($H^2 = \bar{B}_1 \bar{B}_2$, $\alpha = \beta = \gamma$) przeistacza się równ. (148 . I) na następujące:

$$\zeta = \frac{b^4}{\pi^4 B_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} \Big[1 - \Big(1 + A'_n \frac{nx}{\gamma} \Big) Ch \frac{nx}{\gamma} + \tag{148.II}$$

$$+ \Big(A'_n + A''_n \frac{nx}{\gamma} \Big) Sh \frac{nx}{\gamma} \Big] \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Stałe A' i A'' określają wzory:

$$A'_n = \frac{Ch \frac{na}{\gamma} - 1}{Sh \frac{na}{\gamma} + \frac{na}{\gamma}}; \; A''_n = A'_n \, Cth \frac{na}{2\gamma} = \frac{Sh \frac{na}{\gamma}}{Sh \frac{na}{\gamma} + \frac{na}{\gamma}} \tag{148a}$$

W III przypadku ($H^2 < \bar{B}_1 \bar{B}_2$) znajdujemy nakoniec:

$$\zeta = \frac{b^4}{\pi^4 \bar{B}_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} \Big[1 - \Big(\cos \frac{nx}{\beta'} + K'_n \sin \frac{nx}{\beta'} \Big) Ch \frac{nx}{\alpha'} + \tag{148.III}$$

$$+ \Big(K''_n \cos \frac{nx}{\beta'} + K'''_n \sin \frac{nx}{\beta'} \Big) Sh \frac{nx}{\alpha'} \Big] \sin \frac{n\pi y}{b}$$

z oznaczeniami:

$$K'_n = \frac{\beta' \Big(Ch \frac{na}{\alpha'} - \cos \frac{na}{\beta'} \Big)}{\alpha' \, Sh \frac{na}{\alpha'} + \beta' \sin \frac{na}{\beta'}}; \; K''_n = \frac{\alpha'}{\beta'} K'_n; \tag{148b}$$

$$K_n''' = \frac{\beta' \, Sh\frac{na}{\alpha'} - \alpha' \sin\frac{na}{\beta'}}{\alpha' \, Sh\frac{na}{\alpha'} + \beta' \sin\frac{na}{\beta'}} \tag{148b}$$

stałe α' i β' mają tutaj poprzednie znaczenie (ob. § 12).

Stosownie do tego wypadają dla najważniejszych wielkości statycznych w I przypadku wzory:

$$M_1 = \frac{b^2}{\pi^2}\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left\{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left[\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{m_2}\right)\left(\alpha \, Sh\frac{nx}{\alpha} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \alpha_{an} Ch\frac{nx}{\alpha}\right) - \left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2} - \frac{1}{m_2}\right)\left(\beta \, Sh\frac{nx}{\beta} - \beta_{an} Ch\frac{nx}{\beta}\right)\right]\right\} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{149.I}$$

$$M_2 = \frac{b^2}{\pi^2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left\{1 - \frac{1}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left[\left(1 - \frac{1}{m_1\pi^2\beta^2}\right)\left(\beta_{an} Ch\frac{nx}{\beta} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \beta Sh\frac{nx}{\beta}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{m_1\pi^2\alpha^2}\right)\left(\alpha_{an} Ch\frac{nx}{\alpha} - \alpha \, Sh\frac{nx}{\alpha}\right)\right]\right\} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{150.I}$$

$$D = \frac{b^3}{\pi^3}\cdot\frac{2C}{\overline{B}_2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\cdot\frac{1}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left(Ch\frac{nx}{\alpha} - Ch\frac{nx}{\beta} - \frac{\alpha_{an}}{\alpha} Sh\frac{nx}{\alpha} + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta_{an}}{\beta} Sh\frac{nx}{\beta}\right) \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{151.I}$$

$$(M_1)_{x=0} = -\frac{b^2}{\pi^2}\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left(\frac{\alpha_{an}+\beta_{an}}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\sqrt{\left(\frac{H}{\overline{B}_1}\right)^2 - \frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}} - \frac{H}{\overline{B}_1}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{152.I}$$

$$(M_2)_{x=0} = \frac{1}{m_1}\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}(M_1)_{x=0}, \tag{153.I}$$

$$(M_1)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{b^2}{\pi^2}\cdot\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left(\frac{1}{m_2} - \frac{\alpha}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\frac{\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2} - \frac{1}{m_2}}{Sh\frac{na}{2\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\frac{\frac{b^2}{\pi^2\beta^2} - \frac{1}{m_2}}{Sh\frac{na}{2\beta}}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{154.I}$$

$$(155.\mathrm{I})\qquad (M_2)_{x=\frac{a}{2}}=\frac{b^2}{\pi^2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\frac{1-\dfrac{b^2}{m_1\pi^2\alpha^2}}{Sh\dfrac{na}{2\alpha}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\frac{1-\dfrac{b^2}{m_1\pi^2\beta^2}}{Sh\dfrac{na}{2\beta}}\right)\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$(156.\mathrm{I})\qquad R_1=(V_1)_{x=0}=(\beta^2-\alpha^2)\sum_n \frac{c_n}{n}\cdot\frac{\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{\beta_{an}-\alpha_{an}},$$

$$(157.\mathrm{I})\quad \left|\begin{array}{l}(R_2)_{y=0}=(V_2)_{y=0}=\dfrac{b}{\pi}\displaystyle\sum_n \dfrac{c_n}{n}\left[1-(m_1,\alpha)_n\dfrac{Ch\dfrac{n}{\alpha}\left(\dfrac{a}{2}-x\right)}{Sh\dfrac{na}{2\alpha}}+\right.\\[2ex] \qquad\qquad\left.+(m_1,\beta)_n\dfrac{Ch\dfrac{n}{\beta}\left(\dfrac{a}{2}-x\right)}{Sh\dfrac{na}{2\beta}}\right],\\[4ex] (R_2)_{y=b}=(V_2)_{y=b}=-\dfrac{b}{\pi}\displaystyle\sum_n \dfrac{(-1)^{n-1}c_n}{n}\left[1-(m_1,\alpha)_n\dfrac{Ch\dfrac{n}{\alpha}\left(\dfrac{a}{2}-x\right)}{Sh\dfrac{na}{2\alpha}}+\right.\\[2ex] \qquad\qquad\left.+(m_1,\beta)_n\dfrac{Ch\dfrac{n}{\beta}\left(\dfrac{a}{2}-x\right)}{Sh\dfrac{na}{2\beta}}\right],\end{array}\right.$$

ze skracającemi oznaczeniami:

$$(157\mathrm{a})\qquad (m_1,\alpha)_n=\frac{\alpha}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left[\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)-1\right];$$

$$(m_1,\beta)_n=\frac{\beta}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left[\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)-1\right];\ldots$$

$$(158.\mathrm{I})\qquad \overline{R}_1=\int_0^b R_1\,dy=\frac{b}{\pi}(\beta^2-\alpha^2)\sum_{n=1,2,3,..}\frac{c_n}{n^2}\,\frac{(-1)^{n-1}+1}{\beta_{an}-\alpha_{an}}=$$

$$=\frac{2b}{\pi}(\beta^2-\alpha^2)\sum_{s=1,3,5...}\frac{c_s}{s^2}\cdot\frac{1}{\beta\,Cth\dfrac{s\,a}{2\beta}-\alpha\,Cth\dfrac{s\,a}{2\alpha}}$$

$$(159.\mathrm{I})\qquad \left|\begin{array}{l}(\overline{R}_2)_{y=0}=\displaystyle\int_0^a (R_2)_{y=0}\,dx=\frac{b}{\pi}\sum_n\frac{c_n}{n}\left(a-\frac{2}{n}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\right),\\ |\overline{R}_2|_{y=b}=\displaystyle\frac{b}{\pi}\sum_n\frac{(-1)^{n-1}c_n}{n}\left(a-\frac{2}{n}\,\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\right)\end{array}\right.$$

Z ostatnich trzech wzorów wypływa, jako pożądana próba rachunku, wynik:

$$2\,\overline{R}_1+(\overline{R}_2)_{y=0}+|\overline{R}_2|_{y+b}=\frac{2ab}{\pi}\sum_n\frac{c_n}{n}=\int_0^a\int_0^b p\,dx\,dy$$

zgodny rzeczywiście z ogólnemi warunkami równowagi. Narożnych reakcyj niema, ponieważ D znika w rogach płyty. Dla ugięcia w osi symetryi $x=\frac{a}{2}$ otrzymujemy jeszcze wyrażenie:

$$(160.\mathrm{I})\qquad (\zeta)_{x=\frac{a}{2}}=\frac{b^4}{\pi^4\overline{B}_2}\sum_n\frac{c_n}{n^4}\left[1-\frac{1}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left(\frac{\beta}{Sh\dfrac{na}{2\beta}}-\frac{\alpha}{Sh\dfrac{na}{2\alpha}}\right)\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Najważniejsze odpowiadające wzory II-go przypadku mają postać następującą:

$$(152.\mathrm{II})\qquad (M_1)_{x=0}=-\frac{b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\sum_n\frac{c_n}{n^2}\cdot\frac{Sh\dfrac{na}{\gamma}-\dfrac{na}{\gamma}}{Sh\dfrac{na}{\gamma}+\dfrac{na}{\gamma}}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(153.\mathrm{II})\qquad (M_2)_{x=0}=\frac{1}{m_1}\cdot\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}(M_1)_{x=0}$$

$$(154.\,\mathrm{II})\qquad (M_1)_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left[\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{\frac{na}{2\gamma}\left(1-\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right)Ch\frac{na}{2\gamma} - \left(1+\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right)Sh\frac{na}{2\gamma}}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

$$(155.\,\mathrm{II})\qquad (M_2)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{b^2}{\pi^2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left[1 - \right.$$

$$\left. - 2\,\frac{\frac{na}{2\gamma}\left(1-\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)Ch\frac{na}{2\gamma} + \left(1+\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)Sh\frac{na}{2\gamma}}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(156.\,\mathrm{II})\qquad R_1 = 2\gamma\sum_n \frac{c_n}{n}\cdot\frac{Ch\frac{na}{\gamma}-1}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(157. II)

$$\left|\begin{array}{l} (R_2)_{y=0} = \dfrac{b}{\pi}\displaystyle\sum_n \frac{c_n}{n}\left\{1 - \right. \\ \left. - \dfrac{2(\gamma'+1)\,Sh\frac{na}{2\gamma}Ch\frac{n}{\gamma}\left(\frac{a}{2}-x\right) - (\gamma'-1)\left[\frac{na}{\gamma}Ch\frac{nx}{\gamma} + 2\frac{nx}{\gamma}Sh\frac{na}{2\gamma}Sh\frac{n}{\gamma}\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\right\}, \\ (R_2)_{y=b} = -\dfrac{b}{\pi}\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n-1}c_n}{n}\left\{1 - \right. \\ \left. - \dfrac{2(\gamma'+1)\,Sh\frac{na}{2\gamma}Ch\frac{n}{\gamma}\left(\frac{a}{\gamma}-x\right) - (\gamma'-1)\left[\frac{na}{\gamma}Ch\frac{nx}{\gamma} + 2\frac{nx}{\gamma}Sh\frac{na}{2\gamma}Sh\frac{n}{\gamma}\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\right\}, \end{array}\right.$$

z oznaczeniem

$$\gamma' = \left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$$

$$R_1 = 4\frac{b\gamma}{\pi}\sum_{s=1,3,5\ldots}\frac{c_s}{s^2}\frac{Ch\frac{sa}{\gamma}-1}{Sh\frac{sa}{\gamma}+\frac{sa}{\gamma}} \tag{158.II}$$

$$\left.\begin{aligned}
(R_2)_{y=0} &= \frac{b}{\pi}\sum_n \frac{c_n}{n}\left(a-\frac{4\gamma}{n}\frac{Ch\frac{na}{\gamma}-1}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\right),\\
(R_2)_{y=b} &= \frac{b}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^{n-1}c_n}{n}\left(a-\frac{4\gamma}{n}\frac{Ch\frac{na}{\gamma}-1}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{159.II}$$

$$(\zeta)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{2b^4}{\pi^4\bar{B}_2}\sum \frac{c_n}{n^4}\frac{Sh\frac{na}{2\gamma}-\frac{na}{2\gamma}}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}}\left(Ch\frac{na}{2\gamma}-1\right)\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{160.II}$$

Nakoniec w III przypadku otrzymujemy wzory:

$$(M_1)_{x=0} = -\frac{b^4}{\pi^4}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\left(\frac{1}{\beta'^2}-\frac{1}{\alpha'^2}+\frac{2K_n'''}{\alpha'\beta'}\right)\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{152.III}$$

$$(M_2)_{x=0} = \frac{1}{m_1}\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}(M_1)_{x=0} \tag{153.III}$$

$$\begin{aligned}
(M_1)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{b^2}{\pi^2}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\Bigg[&\frac{1}{m_2}+\left(C_n-\frac{1}{m_2}\right)Ch\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}+\\
&+\left(C_n'-\frac{K_n'}{m_2}\right)Ch\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}+\left(-C_n''+\frac{K_n''}{m_2}\right)Sh\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}+\\
&+\left(-C_n'''+\frac{K_n'''}{m_2}\right)Sh\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\Bigg]_{x=\frac{a}{2}}\sin\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{154.III}$$

$$\begin{aligned}
(M_2)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{b^2}{\pi^2}\sum_n \frac{c_n}{n^2}\Bigg[&1+\left(\frac{C_n}{m_1}-1\right)Ch\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}+\\
&+\left(\frac{C_n'}{m_1}-K_n'\right)Ch\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}+\left(-\frac{C_n''}{m_1}+K_n''\right)Sh\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}+\\
&+\left(-\frac{C_n'''}{m_1}+K_n'''\right)Sh\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\Bigg]_{x=\frac{a}{2}}\sin\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{155.III}$$

z następującemi wartościami spółczynników:

$$C_n = \frac{2b^2}{\pi^2\alpha'\beta'}\left(\frac{\beta'^2-\alpha'^2}{2\alpha'\beta'} - K_n'''\right), \quad C_n' = \frac{2b^2}{\pi^2\alpha'\beta'}\left(K'\frac{\beta'^2-\alpha'^2}{2\alpha'\beta'} + K_n''\right);$$

$$C_n'' = \frac{2b^2}{\pi^2\alpha'\beta'}\left(K_n''\frac{\beta'^2-\alpha'^2}{2\alpha'\beta'} - K_n'\right), \quad C_n''' = \frac{2b^2}{\pi^2\alpha'\beta'}\left(K_n'''\frac{\beta'^2-\alpha'^2}{2\alpha'\beta'} + 1\right);$$

$$(156.\mathrm{III}) \qquad R_1 = \frac{b^4}{\pi^4}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\cdot\frac{2}{\alpha'\beta'}\sum_n \frac{c_n}{n}\cdot\frac{K_n''}{\alpha'}\left(\frac{\alpha'}{\beta'}+\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(157.\mathrm{III}) \quad \left\{\begin{aligned} (R_2)_{y=0} &= \frac{b}{\pi}\sum_n \frac{c_n}{n}\Big(1 + N_n Ch\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'} + N_n' Ch\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'} + \\ &\quad + N_n'' Sh\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'} + N_n''' Sh\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\Big), \\ |R_2|_{y=b} &= \frac{b}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^{n-1}c_n}{n}\Big(1 + N_n Ch\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'} + \\ &\quad + N_n' Ch\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'} + N_n'' Sh\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'} + N_n''' Sh\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\Big), \end{aligned}\right.$$

z wartościami spółczynników

$$N_n = C_n\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right) - 1, \quad N_n' = C_n'\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right) - K_n',$$

$$N_n'' = -C_n''\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right) + K_n'', \quad N_n''' = -C_n'''\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right) + K_n''';$$

$$(158.\mathrm{III}) \quad R_1 = \frac{b^5}{\pi^5}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\cdot\frac{4}{\beta'}\cdot\frac{\alpha'^2+\beta'^2}{\alpha'^2\beta'^2}\sum_{s=1,3,5,\ldots}\frac{c_s K_s'}{s^2} = \frac{4b^3}{\pi^3\beta'}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\sum_s\frac{c_s K_s'}{s^2}$$

$$(159.\mathrm{III}) \quad \left\{\begin{aligned} (R_2)_{y=0} &= \frac{b}{\pi}\sum_n\frac{c_n}{n}\left(a - \frac{4}{n}\frac{K_n'}{\beta'}\frac{b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right), \\ |R_2|_{y=b} &= \frac{b}{\pi}\sum_n\frac{(-1)^{n-1}c_n}{n}\left(a - \frac{4}{n}\frac{K_n'}{\beta'}\frac{b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right). \end{aligned}\right.$$

Znaczenie praktyczue mają przedewszystkiem następujące szczególne przypadki obciążenia a) $p = p_0 + \frac{p_1 - p_0}{b}y$ (obciążenie hydrostatyczne); b) $p = q =$ stałej (obciążenie równomierne).

Przy obciążeniu hydrostatycznem trzeba w powyższych wzorach wstawić

$$c_n = \frac{2}{n\pi}[p_0 + (-1)^{n-1} p_1], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

a przy równomiernie rozłożonem:

$$c_n = c_s = \frac{4}{s\pi} q, \quad (s = 1, 3, 5, \ldots)$$

Dla obciążenia równomiernie rozłożonego otrzymujemy z (148 . II) następujące równanie powierzchni ugięcia w II-gim przypadku ($H^2 = \overline{B}_1 B_2$).

$$(148.\mathrm{IIb}) \quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^5} \left[1 - \left(1 + A'_n \frac{nx}{\gamma}\right) Ch \frac{nx}{\gamma} + A'_n \left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{nx}{\gamma} Cth \frac{na}{2\gamma}\right) Sh \frac{nx}{\gamma} \right] \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Tutaj oznacza jak poprzednio:

$$A'_n = \frac{Ch \frac{na}{\gamma} - 1}{Sh \frac{na}{\gamma} + \frac{na}{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{b}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}$$

Po wstawieniu w powyższym wzorze wartości $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ wypada dla strzałki ugięcia wyrażenie:

$$f = \frac{4qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5} \left| 1 - 2 \frac{Sh \frac{na}{2\gamma} + \frac{na}{2\gamma} Ch \frac{na}{2\gamma}}{Sh \frac{na}{\gamma} + \frac{na}{\gamma}} \right|,$$

albo

$$f = \frac{8qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5} \cdot \frac{\left(Ch \frac{na}{2\gamma} - 1\right)\left(Sh \frac{na}{2\gamma} - \frac{na}{2\gamma}\right)}{Sh \frac{na}{\gamma} + \frac{na}{\gamma}} = \psi \cdot \frac{qb^4}{\overline{B}_2}$$

Kilka wartości spółczynnika liczbowego ψ zawiera niżej umieszczona tabliczka, przerachowana z tablicy 9 w przytoczonej powyżej pracy Nádai'a, w tym bowiem szczególnym przypadku, stosownie do rozważań w § 7, da się rozwiązanie dla płyty równokierunkowej przenieść bezpośrednio na płytę nierównokierunkową.

$\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}} =$ 0,6	0,8	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	∞
$\psi = 0{,}00029_4$	$0{,}00091_2$	$0{,}00189_4$	0,00355	0,00647	0,01051	0,01302

Dokładne obliczenie największych wartości momentów zginających da się łatwo wykonać w przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie, przy pomocy formuł (152—155), ponieważ te wartości występują widocznie w punktach $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ i $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Inaczej ma się rzecz w przypadku obciążenia hydrostatycznego (trapezowego), gdyż wtedy wypadałoby rozwiązywać złożone równanie przestępne. Z tego powodu musimy się zwykle zadowolnić obliczaniem wartości momentów w punktach $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ i $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, które tembardziej będą się zbliżać do największych wartości, im mniejszą jest różnica $p_1 - p_0$.

Interesującym jest rozkład reakcyj podporowych wzdłuż brzegów podpartych a. Z wzorów dla R_2 czytamy mianowicie, że te reakcye stają się w pobliżu rogów płyty ujemne, t. zn. skierowane ku dołowi, podczas gdy w okolicy środka brzegu są dodatnie, tak, iż całkowita reakcya R_2 wypada stosunkowo mała. Ta reakcya znika nawet zupełnie w granicznym przypadku $b = \infty$, przeto przy małych wartościach stosunku $a : b$ przenosi się prawie całe obciążenie płyty na podpory jej utwierdzonych brzegów b. Reakcye R_1 tych brzegów ubywają wprawdzie także od środka ku rogom, gdzie stają się równe 0, lecz pozostają wszędzie dodatnie [1].

[1] Dość rozpowszechniona reguła praktyczna zaleca wykonanie przybliżonego obliczenia statycznego płyt betonowych uzbrojonych „na krzyż" w ten sposób, „iż obciążenie rozkłada się w odwrotnym stosunku czwartych potęg rozpiętości na obadwa kierunki niosące (Tragrichtungen), a następnie rachuje się temi częściowemi obciążeniami jak zwykle (według wzorów dla belek) i do tego stosuje się uzbrojenie". (Prof. Mörsch Dr E., Der Eisenbetonbau, wyd. IV z r. 1912, str. 363). Otóż ta reguła prowadzi do wyników praktycznie dopuszczalnych tylko w dwu przypadkach, a mianowicie wszechstronnego swobodnego

§ 19. Rozwiązanie w przypadku zupełnego utwierdzenia i sprężystego podparcia brzegów poprzecznych, a zarazem częściowe rozwiązanie zagadnienia płyty żebrowej.

Bardzo długa płyta, opatrzona w różnych odstępach jednakowemi żebrami poprzecznemi, wydzielającemi z płyty pole prosto-

---

podparcia i wszechstronnego utwierdzenia. Jeżeli jednak u jednej płyty zachodzą oba sposoby ustalenia brzegów, to zastosowanie dosłowne powyższej reguły prowadzi do całkiem grubych błędów Tak np. wynikałoby z niej dla płyty kwadratowej, w obu kierunkach jednakowo uzbrojonej, że w przypadku podparcia dwu równoległych brzegów, a utwierdzenia dwu pozostałych, są całkowite reakcye wszystkich brzegów równe ($\overline{R}_1 = \overline{R}_2$, założywszy obciążenie równomiernie rozłożone), jakoteż, że największe momenty M_1, M_2, w środku płyty, oraz największy ujemny moment utwierdzenia $M_1^{(0)}$ stoją do siebie w stosunku $\frac{1}{24} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12} = 1 : 3 : 2$. Tymczasem nasze ścisłe wzory teoretyczne dla przypadku II dają najpierw ogólnie dla przyjętego obciążenia:

$$\overline{R}_1 = \frac{16}{\pi^3} \sqrt[4]{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\, qb^2 \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{1}{n^3} \frac{Ch\, n\pi\varepsilon - 1}{Sh\, n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon},$$

$$\overline{R}_2 = \frac{4}{\pi^2} bq \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2} \left(a - \frac{4}{n\pi} \frac{a}{\varepsilon} \cdot \frac{Ch\, n\pi\varepsilon - 1}{Sh\, n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon}\right),$$

$$M_1' = \frac{8}{\pi^3} \frac{qa^2}{\varepsilon^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cdot \frac{\frac{n\pi\varepsilon}{2} Ch \frac{n\pi\varepsilon}{2} - Sh \frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Sh\, n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon},$$

$$M_2' = \frac{1}{8} qb^2 - \frac{8}{\pi^3} qb^2 \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cdot \frac{\frac{n\pi\varepsilon}{2} Ch \frac{n\pi\varepsilon}{2} + Sh \frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Sh\, n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon}$$

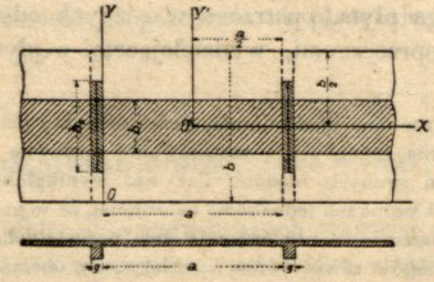
$$M_1 = M_1' + \frac{1}{m_2} \frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2} M_2', \quad M_2 = M_2' + \frac{1}{m_1} \frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1} M_1',$$

$$M_1^{(0)} = -\frac{4}{\pi^3} \frac{qa^2}{\varepsilon^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \cdot \frac{Sh\, n\pi\varepsilon - n\pi\varepsilon}{Sh\, n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon};$$

a w szczególności przy $a = b$, $\overline{B}_1 = \overline{B}_2$, $m_1 = m_2$:

$$\overline{R}_1 = \frac{16}{\pi^3} qb^2 \left(\frac{Ch\,\pi - 1}{Sh\,\pi + \pi} + \frac{1}{27} \frac{Ch\, 3\pi - 1}{Sh\, 3\pi + 3\pi} + \frac{1}{125} \cdot \frac{Ch\, 5\pi - 1}{Sh\, 5\pi + 5\pi} + \cdots\right),$$

kątne o długości a i szerokości b (rys. 21), wygina się pod wpływem obciążenia symetrycznego względem płaszczyzny osiowej każ-



Rys. 21.

dego żebra tak, jak szereg płyt prostokątnych o wymiarach a i b przy swobodnem poziomem podparciu brzegów a i poziomem utwier-

---

$$M_1' = \frac{8}{\pi^3} qa^2 \left| \frac{\frac{\pi}{2} Ch \frac{\pi}{2} - Sh \frac{\pi}{2}}{Sh\,\pi + \pi} - \frac{1}{27} \frac{\frac{3\pi}{2} Ch \frac{3\pi}{2} - Sh \frac{3\pi}{2}}{Sh\,3\pi + 3\pi} + \dots \right|,$$

$$M_2' = \frac{1}{8} qb^2 - \frac{8}{\pi^3} qb^2 \left| \frac{\frac{\pi}{2} Ch \frac{\pi}{2} + Sh \frac{\pi}{2}}{Sh\,\pi + \pi} - \frac{1}{27} \cdot \frac{\frac{3\pi}{2} Ch \frac{3\pi}{2} + Sh \frac{3\pi}{2}}{Sh\,3\pi + 3\pi} + \dots \right|,$$

$$M_1^{(o)} = -\frac{4}{\pi^3} qa^2 \left(\frac{Sh\,\pi - \pi}{Sh\,\pi + \pi} - \frac{1}{27} \frac{Sh\,3\pi - 3\pi}{Sh\,3\pi + 3\pi} + \frac{1}{125} \frac{Sh 5\pi - 5\pi}{Sh 5\pi + 5\pi} - \dots \right)$$

Stąd wynika po pierwsze:

$$R_1 = 0{,}79 \frac{qb^2}{2}, \quad R_2 = 0{,}21 \frac{qb^2}{2},$$

czyli, że brzegi utwierdzone przenoszą na podpory około $79:21 = 3{,}8$ razy większą część całkowitego obciążenia od tej, jaką przenoszą brzegi swobodnie podparte; powtóre zaś:

$$M_1' = 0{,}0285\, qa^2 = \frac{1}{35{,}09} qa^2, \quad M_2' = 0{,}0158\, qb^2 = \frac{1}{63{,}29} qb^2;$$

$$M_1 = M_1' + \tfrac{1}{6} M_2' = 0{,}3011\, qa^2, \quad M_2 = M_2' + \tfrac{1}{6} M_1' = 0{,}0206\, qb^2;$$

$$M_1^{(o)} = -\,0{,}0699\, qa^2 = -\frac{1}{14{,}31} qa^2.$$

dzeniu sprężyście podpartych brzegów b. Obrawszy układ spółrzędnych XOY w sposób, uwidoczniony na rysunku, możemy równa-

A zatem:

$$M_1 : M_2 : -M_1^{(o)} = 0{,}0311 : 0{,}0206 : 0{,}0699 = \sim 3 : 2 : 7.$$

Według tego ma M_2 z pośród wszystkich trzech momentów najmniejszą wartość, podczas gdy przytoczona powyżej reguła praktyczna prowadzi do wprost przeciwnego wyniku i wskutek tego staje się w rozpatrywanym przypadku zupełnie bezużyteczną.

Przyczyna tego grubego błędu leży najprawdopodobniej w zbyt zwięzłem ujęciu reguły, albowiem prowadząca do niej myśl podstawowa jest z punktu widzenia praktyczno-naukowego całkiem zdrowa. Ta myśl polega mianowicie na tem, że płytę zastępujemy w przybliżeniu dwoma krzyżującemi się skrawkami, które traktujemy jako belki, a z warunku równego ugięcia w miejscu skrzyżowania obliczamy odpowiadające udziały obciążenia q_a i q_b. Ten przybliżony sposób pozwala nawet uwzględnić różnice uzbrojenia w obu głównych kierunkach, na co, zdaje się, dotychczas nikt nie zwrócił uwagi. W zastosowaniu do naszego przypadku mamy dla strzałki ugięcia skrawka obustronnie utwierdzonego o rozpiętości a: $\frac{1}{384} \cdot \frac{q_a a^4}{\overline{B}_1}$, a dla skrawka swobodnie podpartego o rozpiętości b: $\frac{5}{384} \cdot \frac{q_b b^4}{\overline{B}_2}$. Różnice uzbrojenia tkwią tutaj oczywiście w belkowych sztywnościach zginania $\overline{B}_1 = E_b I_1$ i $\overline{B}_2 = E_b I_2$. Porównanie obu wyrażeń daje:

$$q_a : q_b = \frac{5\overline{B}_1}{a^4} : \frac{\overline{B}_2}{b^4},$$

a zważywszy, że $q_a + q_b = q$:

$$q_a = \frac{5\overline{B}_1 b^4}{5\overline{B}_1 b^4 + \overline{B}_2 a^4} \cdot q; \quad q_b = \frac{\overline{B}_2 a^4}{5\overline{B}_1 b^4 + \overline{B}_2 a^4} \cdot q.$$

Wstawiwszy teraz te wartości w odpowiadające wzory dla momentów zgięcia belek, otrzymujemy:

$$M_1 = \frac{1}{24} q_a a^2 = \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{5 + \varepsilon^4} \cdot qa^2;$$

$$M_2 = \frac{1}{8} q_b b^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\varepsilon^4}{5 + \varepsilon^4} \cdot qb^2, \quad M_1^{(o)} = 2M_1$$

W szczególnym przypadku $a = b$, $\overline{B}_1 = \overline{B}_2$ $(\varepsilon = 1)$ mamy:

$$M_1 = \frac{5}{144} qa^2 = 0{,}0347\, qa^2, \quad M_2 = \frac{3}{144} qa^2 = 0{,}0208\, qa^2,$$

nie powierzchni ugięcia dla rozpatrywanej części płyty napisać na podstawie rozwiązania w § 18 w następującej postaci:

$$(161.\mathrm{I})\quad \zeta = \frac{b^2}{\pi^4 \bar{B}_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} \left[1 - \frac{\omega_n}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left(\alpha\, Sh \frac{nx}{\alpha} - \beta\, Sh \frac{nx}{\beta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \alpha_{an}\, Ch \frac{nx}{\alpha} + \beta_{an}\, Ch \frac{nx}{\beta} \right) \right] \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Wielkości c_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ oznaczają tutaj, jak w § 14-ym, spółczynniki Fourier'owskiego rozwinięcia obciążenia płyty

$$p(y) = \sum_n c_n \sin \frac{n\pi y}{b},$$

przyjętego jako niezależne od x; ω_n są nieznane spółczynniki, które muszą zależeć od obciążenia żeber, tudzież od warunków sztywności żeber i płyty. Do ich wyznaczenia zastosujemy znowu metodę Ritz'a i przeprowadzimy rachunek dla następującego przypadku obciążenia:

$- M_1^{(o)} = 0{,}0694\, qa^2$, a więc:

$$M_1 : M_2 : -M_1^{(o)} = 5 : 3 : 10 \doteq 3 : 1{,}8 : 6$$

Teraz są znalezione wartości przybliżone już do przyjęcia.

Praktyczna ważność uwzględnienia różnic w sztywności zginania podłużnych i poprzecznych skrawków płyty wychodzi na jaw już z ogólnych teoretycznych badań niniejszej pracy; jednakże w tem miejscu dobrze jeszcze będzie położyć nacisk na okoliczność następującą:

Skoro płytę traktowaną jako równokierunkową obliczamy mniej lub więcej dokładnie i odpowiednio do tego uzbroimy w obu kierunkach, to ewentualna różnica uzbrojeń musi zmienić rozkład i wielkość momentów zginających. Ta zmiana może być w pewnych warunkach tak znaczną, że całe obliczenie traci grunt pod nogami. Wystarcza jeden przykład, aby to wykazać. Z rachunków na końcu § 14 wynika mianowicie, że w przypadku wielkiej długości płyty zmniejsza się wartość największego momentu M_1 około 2,5-krotnie, skoro przejdziemy od równego uzbrojenia w kierunkach a i b do nierównego, przy którem jest $\bar{B}_2 = 4\bar{B}_1$. Szczególną ostrożność należy zachować przy zastosowaniu wzorów przybliżonych. Tak np. z powyżej wyprowadzonych formuł przybliżonych możemy wnioskować, że przez słabsze uzbrojenie w kierunku rozpiętości a (czyli mniejsze $\bar{B}_1$) osiągniemy korzystne działanie w przypadku $a = b$, to jest zmniejszenie momentów M_1 i $-M_1^{(o)}$, a zwiększenie M_2. Tymczasem ścisłe rozwiązanie poucza, że przez to bezwzględna wartość $M_1^{(o)}$ nie zmniejsza się, lecz powiększa, ażeby zatem w rozpatrywanym przypadku osiągnąć korzystne działanie, należy osłabić uzbrojenie w kierunku b (lub wzmocnić w kierunku a).

Stałe obciążenie powierzchniowe q (kg/m²) środkowego paska płyty o szerokości b_1 i stałe obciążenie liniowe q' (kg/m) środkowej części osi żebra o długości b_2.

Wtedy rów. (161.I) przybiera postać:

$$(162.\mathrm{I})\quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 \bar{B}_2} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^5}\left[1 - \frac{\omega_n}{\beta_{an} - \alpha_{an}}\left(\alpha\, Sh\frac{nx}{\alpha} - \beta\, Sh\frac{nx}{\beta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \alpha_{an}\, Ch\frac{nx}{\alpha} + \beta_{an}\, Ch\frac{nx}{\beta}\right)\right] \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\left(n = 1, 3, 5, \ldots,\quad (n_1) = \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b}\right),$$

a po żmudnym, co prawda, rachunku znajdujemy, podobnie jak w § 16 dla energii potencyalnej części płyty ab wraz z jednem żebrem wyrażenie:

$$(163.\mathrm{I})\quad L_i = \frac{b}{4}\left(\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\right)^2 \left|\bar{B}_1 \sum_n \frac{(n_1)^2}{n^6}\cdot\frac{\omega_n^2}{(\beta_{an} - \alpha_{an})^2}\left[\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha_{an}^2 - \alpha^2}{\alpha^4} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta_{an}^2 - \beta^2}{\beta^4}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_{an}}{\alpha^2} + \frac{\beta_{an}}{\beta^2} - 4\frac{\beta_{an} - \alpha_{an}}{\beta^2 - \alpha^2}\right)\right] + \frac{\pi^4}{b^4}\bar{B}_2 \sum_n \frac{(n_1)^2}{n^6}\left[a - \right.$$

$$- \frac{4}{n}\cdot\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}}\cdot\omega_n + \frac{\omega_n^2}{(\beta_{an} - \alpha_{an})^2}\left\{\frac{a}{2}\left(\alpha_{an}^2 + \beta_{an}^2 - \alpha^2 - \beta^2\right) + \frac{1}{n}\left(\alpha^2\alpha_{an} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \beta^2\beta_{an} - 4\alpha^2\beta^2\frac{\beta_{an} - \alpha_{an}}{\beta^2 - \alpha^2}\right)\right\}\right] + \frac{2\pi^2}{b^2} H \sum_n \frac{(n_1)^2}{n^6}\cdot\frac{\omega_n^2}{(\beta_{an} - \alpha_{an})^2}\left[- \right.$$

$$\left. - \frac{a}{2}\left(\frac{\alpha_{an}^2 - \alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\beta_{an}^2 - \beta^2}{\beta^2}\right) + \frac{1}{n}\left\{2(\beta_{an} - \alpha_{an})\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} - (\alpha_{an} + \beta_{an})\right\}\right] +$$

$$\left. + \frac{\pi^4}{b^4}(B^* - 2\bar{B}_2 c)\sum_n \frac{(n_1)^2}{n^6}(1 - \omega_n)^2 \right| (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

O występującej tutaj współdziałającej szerokości płyty c możemy na razie powiedzieć tylko, że różnica $\frac{a}{2} - c$ będzie dodatnią i że ta różnica maleje bardzo silnie ze zmniejszeniem odstępu żeber. Dokładniejszem wyznaczeniem wielkości c zajmiemy się osobno.

Gdyby powyższy rachunek przeprowadzić dla ogólniejszego przypadku obciążenia, a mianowicie dla

$$p(y) = \sum_n c_n \sin \frac{n\pi}{b} y \ldots (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

to wyrażenie dla L_i miałoby postać:

$$(164.\mathrm{I})\quad L_i = \frac{b}{4}\left(\frac{b^4}{\pi^4 \overline{B}_2}\right)^2 \left\{ \overline{B}_1 \sum_n \frac{c_n^2}{n^4} \cdot \frac{\omega_n^2}{(\beta_{an} - \alpha_{an})^2} \Big[\ldots\ldots \Big] + \right.$$

$$+ \frac{\pi^4}{b^4} \overline{B}_2 \sum_n \frac{c_n^2}{n^4} \Big[\ldots\ldots \Big] + \frac{2\pi^2}{b^2} H \sum_n \frac{c_n^2}{n^4} \cdot \frac{\omega_n^2}{(\beta_{an} - \alpha_{an})^2} \Big[\ldots\ldots \Big] +$$

$$\left. + \frac{\pi^4}{b^4} (B^* - 2\overline{B}_2 c) \sum_n \frac{c_n^2}{n^4} (1 - \omega_n)^2 \right\}.$$

(Trzy niewypełnione wyrażenia w klamrach należy tutaj wziąć odpowiednio z wzoru 163.I, przyczem $n = 1, 2, 3, \ldots$). Dla podwójnej pracy sił zewnętrznych otrzymamy w przyjętym poprzednio przypadku obciążenia (q, q') wyrażenie:

$$(165.\mathrm{I})\quad 2L = \frac{2b}{\pi} \cdot \frac{4qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \left\{ q \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n_1)}{n^6} \left[a - \frac{2}{n} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \omega_n \right] + \right.$$

$$\left. + q' \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n_2)}{n^6} (1 - \omega_n) \right\} (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Równania warunkowe

$$\frac{\partial}{\partial \omega_n}(L_i - 2L) = 0$$

dostarczają teraz po licznych redukcyach:

$$(166.\mathrm{I})\quad \omega_n = \frac{\dfrac{B^*}{\overline{B}_2} - 2c - \dfrac{(n_2)q'}{(n_1)q}}{\dfrac{B^*}{\overline{B}_2} - 2c + \dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}}} \ldots (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Z temi wartościami parametrów ω_n przedstawia rów. (162.I) szukaną powierzchnię ugięcia. Znaleziona postać rozwiązania odpowiada przypadkowi I $(H^2 > \overline{B}_1 \overline{B}_2)$; w przypadku II $(H^2 = \overline{B}_1 \overline{B}_2)$ przekształca się na następującą:

$$(162.\mathrm{II})\quad \zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\overline{B}_2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^5}\left[1-\omega_n\left\{\left(1+A'_n\frac{nx}{\gamma}\right)Ch\frac{nx}{\gamma}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(A'_n+A''_n\frac{nx}{\gamma}\right)Sh\frac{nx}{\gamma}\right\}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(166.\mathrm{II})\qquad \omega_n=\frac{\dfrac{B^*}{\overline{B}_2}-2c-\dfrac{(n_2)\,q'}{(n_1)\,q}}{\dfrac{B^*}{\overline{B}_2}-2c+\dfrac{4\gamma}{n}A'_n}$$

Stałe A'_n, A''_n mają przytem to samo znaczenie, co w rów. (148.II). Nakoniec w przypadku III ($H^2 < \overline{B}_1\,\overline{B}_2$) przybiera rozwiązanie postać:

$$(162.\mathrm{III})\quad \zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\overline{B}_2}\sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^5}\left[1-\omega_n\left\{\left(\cos\frac{nx}{\beta'}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+K'_n\sin\frac{nx}{\beta'}\right)Ch\frac{nx}{\alpha'}-\left(K''_n\cos\frac{nx}{\beta'}+K'''_n\sin\frac{nx}{\beta'}\right)Sh\frac{nx}{\alpha'}\right\}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(166.\mathrm{III})\qquad \omega_n=\frac{\dfrac{B^*}{\overline{B}_2}-2c-\dfrac{(n_2)\,q'}{(n_1)\,q}}{\dfrac{B^*}{\overline{B}_2}-2c+\dfrac{4}{n}\,\dfrac{\alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2+\beta'^2}\cdot\dfrac{K'_n}{\beta'}}$$

Wyrażenia dla stałych K'_n, K''_n i K'''_n pozostają tutaj te same, co w rów. (148.III). Jak łatwo zauważyć, przeistacza się znalezione rozwiązanie w granicznym przypadku $B^*-2\overline{B}_2c=0$, t. j. bez żeber na

$$\zeta=\zeta(q)+\zeta(q'),$$

jeżeli

$$\zeta(q)=\frac{4qb^4}{\pi^5\overline{B}_2}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^5}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$\zeta(q')=\frac{2q'b^4}{\pi^5\overline{B}_2}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_2)}{n^4(\beta^2-\alpha^2)}\left(\alpha\,Sh\frac{nx}{\alpha}-\beta\,Sh\frac{nx}{\beta}-\alpha_{nn}\,Ch\frac{nx}{\beta}+\right.$$

$$\left.+\beta_{nn}\,Ch\frac{nx}{\beta}\right)\sin\frac{n\pi y}{b},$$

co potwierdzają wyniki uzyskane poprzednio. W drugim granicznym przypadku żeber zupełnie szytywnych ($B^* = \infty$) staje się $\omega_n = 1$, a rozwiązanie zgadza się ze znalezionem w § 17 (dla odpowiadającego przypadku obciążenia).

Z powodu podwójnej symetryi powierzchni ugięcia w rozpatrywanym przypadku obciążenia da się jej równanie jeszcze nieco uprościć przez równoległe przesunięcie układu spółrzędnych do środka płyty ab. Wtedy równania (162.I II III) przybierają następującą postać:

$$(167.\mathrm{I})\quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^5} \left\{ 1 - \frac{\omega_n}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left[\beta \frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Sh\frac{na}{2\beta}} - \alpha \frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Sh\frac{na}{2\alpha}} \right] \right\} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$(167.\mathrm{II})\quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^5} \left\{ 1 - \right.$$

$$\left. - 2\omega_n \frac{\left(Sh\frac{na}{2\gamma} + \frac{na}{2\gamma} \cdot Ch\frac{na}{2\gamma}\right) Ch\frac{nx}{\gamma} - \frac{nx}{\gamma} Sh\frac{na}{2\gamma} Sh\frac{nx}{\gamma}}{Sh\frac{na}{\gamma} + \frac{na}{\gamma}} \right\} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$(167.\mathrm{III})\quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 \overline{B}_2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^5} \left[1 - 2\omega_n \left(F'_n \, Ch\frac{nx}{\alpha'} \cos\frac{nx}{\beta'} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + F''_n \, Sh\frac{nx}{\alpha'} \sin\frac{nx}{\beta'} \right) \right] \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Dla skrócenia wprowadzono w ostatniem równaniu oznaczenia:

$$(167\mathrm{a})\qquad F'_n = \frac{\alpha' Sh\frac{na}{2\alpha'} \cos\frac{na}{2\beta'} + \beta' Ch\frac{na}{2\alpha'} \sin\frac{na}{2\beta'}}{\alpha' Sh\frac{na}{\alpha'} + \beta' \sin\frac{na}{\beta'}};$$

$$F''_n = \frac{\alpha' Ch\frac{na}{2\alpha'} \sin\frac{na}{2\beta'} - \beta' Sh\frac{na}{2\alpha'} \cos\frac{na}{2\beta'}}{\alpha' Sh\frac{na}{\alpha'} + \beta' \sin\frac{na}{\beta'}}$$

$$(n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Odpowiadające wyrażenia dla ω_n pozostają w każdym z trzech przypadków bez zmiany.

Rozpatrzymy teraz bliżej ugięcia i wielkości statyczne płyty żebrowej przy założeniu I-go przypadku, t. j. na podstawie równań (166.I) i (167.I).

Największe ugięcie zajdzie nie zawsze w środku pola ab, albowiem drugie pochodne

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = -\frac{4qb^4}{\pi^5 \bar{B}_2} \sum^{(n_1)} \frac{\omega_n}{n^3} \frac{1}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left| \frac{1}{\beta} \frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Sh\frac{na}{2\beta}} - \frac{1}{\alpha} \frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Sh\frac{na}{2\alpha}} \right| \cos\frac{n\pi y}{b},$$

tudzież

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = -\frac{4qb^2}{\pi^3 \bar{B}_2} \sum^{(n_1)} \frac{1}{n^3} \left| 1 - \frac{\omega_n}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left| \beta \frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Sh\frac{na}{2\beta}} - \alpha \frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Sh\frac{na}{2\alpha}} \right| \right| \cos\frac{n\pi y}{b}$$

stają się w punkcie (0,0) tylko wtedy obie ujemne, gdy ω_1 jest dodatnie. Jakoż, wskutek silnej zbieżności powyższych szeregów, już pierwszy wyraz rozstrzyga o znaku ich sumy, a ponieważ nierówność $\beta > \alpha$ pociąga za sobą nierówności

$$\beta_{an} > \alpha_{an}, \quad \frac{1}{\beta\, Sh\frac{na}{2\beta}} > \frac{1}{\alpha\, Sh\frac{na}{2\alpha}} \quad \text{i} \quad \frac{\beta}{Sh\frac{na}{2\beta}} > \frac{\alpha}{Sh\frac{na}{2\alpha}},$$

a $\omega_1 < 1$, więc $\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}$ pozostaje ujemnem, bez względu na to, czy ω_1 jest dodatnie, czy ujemne. Natomiast $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ staje się przy ujemnych wartościach ω_1 widocznie dodatniem; wówczas powstaje siodłowata powierzchnia ugięcia, a ugięcia środka żebra

$$(168) \qquad (\zeta)_{\frac{a}{2},0} = \frac{4qb^4}{\pi^5 \bar{B}_2} \sum^{(n_1)} \frac{1}{n^5} (1 - \omega_n)$$

stają się większe od ugięć środka płyty:

$$(169.\mathrm{I}) \qquad (\zeta)_{0,0} = \frac{4qb^4}{\pi^5 \bar{B}_2} \sum_n^{(n_1)} \frac{1}{n^5} \left| 1 - \frac{\omega_n}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left| \frac{\beta}{Sh\frac{na}{2\beta}} - \frac{\alpha}{Sh\frac{na}{2\alpha}} \right| \right|$$

To może zajść, gdy

$$\frac{B^*}{\overline{B}_2} - 2c < \frac{q'}{q} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \frac{b_2}{b}}{\sin \frac{\pi}{2} \frac{b_1}{b}},$$

t. zn. albo przy małej sztywności zgięcia żeber w porównaniu do takiejże sztywności płyty, albo też przy silnem obciążeniu żebra a nieznacznem obciążeniu płyty, ponieważ nadto jest

$$o < \frac{1}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left| \frac{\beta}{Sh \frac{na}{2\beta}} - \frac{\alpha}{Sh \frac{na}{2\alpha}} \right| < 1$$ [1]

Moment zginający belki płytowej o sztywności zginania $B^* -$ $- 2\overline{B}_2 c$ oblicza się wzorem

$$M = -(B^* - 2\overline{B}_2 c) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{x=\pm\frac{a}{2}},$$

[1] Tej nierówności dowodzi się w sposób następujący:

$$\beta_{an} = \beta \frac{Ch \frac{na}{2\beta}}{Sh \frac{na}{2\beta}} = \frac{\beta}{Sh \frac{na}{2\beta}} + \beta \cdot \frac{\frac{1}{2!}\left(\frac{na}{2\beta}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{na}{2\beta}\right)^4 + \cdots\cdots}{\frac{na}{2\beta} + \frac{1}{3!}\left(\frac{na}{2\beta}\right)^3 + \cdots\cdots} =$$

$$= \frac{\beta}{Sh \frac{na}{2\beta}} + na \cdot \frac{\frac{1}{2^2\, 2!} + \frac{1}{2^4\, 4!}\left(\frac{na}{\beta}\right)^2 + \cdots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3\, 3!}\left(\frac{na}{\beta}\right)^2 + \cdots}$$

Podobnież jest

$$\alpha_{an} = \frac{\alpha}{Sh \frac{na}{2\alpha}} + na \cdot \frac{\frac{1}{2^2\, 2!} + \frac{1}{2^4\, 4!}\left(\frac{na}{\alpha}\right)^2 + \cdots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3\, 3!}\left(\frac{na}{\alpha}\right)^2 + \cdots}$$

Uwzględniwszy jeszcze, że $\beta > \alpha$ i $\beta_{an} > \alpha_{an}$, mamy:

$$\beta_{an} - \alpha_{an} = \frac{\beta}{Sh \frac{na}{2\beta}} - \frac{\alpha}{Sh \frac{na}{2\alpha}} + \varkappa,$$

przyczem $\varkappa$ oznacza wielkość dodatnią.

czyli po wstawieniu wartości:

$$(170)\qquad M=\frac{4qb^2}{\pi^3}\left(\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c\right)\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}(1-\omega_n)\cos\frac{n\pi y}{b}$$

Wstawiwszy jeszcze wartość za ω_n, możemy tę formułę przedstawić w postaci:

$$M=M_q+M_{q'},$$

jeżeli przez

$$(171.\mathrm{I})\qquad \left|\begin{aligned} M_q&=\frac{8qb^2}{\pi^3}\sum_n^{(n_1)}\frac{\beta^2-\alpha^2}{n^4}\frac{1}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi y}{b}}{1+\frac{2}{n}\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\frac{\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2c}} \\ M_{q'}&=\frac{4q'b^2}{\pi^3}\sum_n^{(n_2)}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi y}{b}}{1+\frac{2}{n}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\frac{\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2c}},\end{aligned}\right.$$

oznaczymy odpowiednio wartości momentu M, odpowiadające samemu obciążeniu płyty q, względnie obciążeniu q' samego żebra. Stąd dają się łatwo wyprowadzić następujące przybliżone wzory dla zastosowań praktycznych:

$$(171.\mathrm{Ia})\qquad M_q=\sim\frac{8}{31}(\alpha,\beta)\frac{qb^2\sin\frac{\pi}{2}\frac{b_1}{b}\cos\frac{\pi y}{b}}{1+2\frac{(\alpha,\beta)\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2c}},$$

$$M_{q'}=\sim\frac{M_{q'}^{(o)}}{1+2\frac{(\alpha,\beta)\bar{B}_2}{B^*-2\bar{B}_2c}}$$

Obok symbolu

$$(\alpha,\beta)=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta\,Cth\frac{a}{2\beta}-\alpha\,Cth\frac{a}{2\alpha}}$$

oznacza w ostatnim wzorze $M_{q'}^{(o)}$ moment zgięcia prostej belki, o rozpiętości b, niosącej to samo obciążenie, co żebro.

Dla $a = \infty$ jest $Cth\frac{n a}{2\beta} = Cth\frac{n a}{2\alpha} = 1$, a wzory dla momentów przekształcają się na odpowiadające wzory paragrafu 16.

Z przybliżeniem zupełnie praktycznie wystarczającem można to już przyjąć przy $a \gtreqless 3b\sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}}$. W granicznym przypadku $\alpha = \beta = \frac{b}{\pi}\sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}} = \gamma$ (przyp. II) jest bowiem wówczas

$$\frac{a}{\gamma} \gtreqless \sim 9{,}42, \quad Ch\frac{a}{\gamma} \gtreqless \sim 1079, \quad Sh\frac{a}{\gamma} \gtreqless \sim 1075,$$

$$1 - \frac{Ch\frac{a}{\gamma} - 1}{Sh\frac{a}{\gamma} + \frac{a}{\gamma}} = 1 - \lim_{(\alpha=\beta)} \frac{\beta - \alpha}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \gtreqless 0{,}006,$$

a zatem odpowiadająca wartość wyrażenia

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}}$$

różni się od wartości

$$\alpha + \beta = \lim_{(a=\infty)} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}}$$

mniej niż o 0,6%. Ta cyfra określa mniej więcej wyższą granicę błędu wielkości M_{η}, popełnionego przy $a \gtreqless 3b\sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}}$ przez przyjęcie $a = \infty$.

Błąd $M_{q'}$ będzie oczywiście w tych warunkach jeszcze o wiele mniejszy i $M_{q'}$ będzie można obliczać według wzoru (135a) już mniej więcej przy $a \gtreqless 2b\sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}}$.

Jeżeli żebra są bardzo gęste, czyli przy małych wartościach $a:b$, to wyrażenie $\frac{2}{n}\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}}$ zdąża do granicy

$$\lim_{(b-\infty)} \frac{2}{n} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}} = a,$$

a ponieważ wtedy można przyjąć $2c = a$, więc wzór (170) dla M przeistacza się na następujący:

$$M = \frac{4}{\pi^3} b^2 \left(1 - \frac{\bar{B}_2 a}{B^*}\right) \sum_n \frac{1}{n^3} \left[a(n_1) q + (n_2) q'\right] \cos \frac{n\pi y}{b}. \tag{172}$$

Jeżeli tutaj pominiemy $\bar{B}_2 a : B^*$ w porównaniu do 1, to wyrażenie po prawej stronie daje dokładnie momenty zginające belki swobodnie podpartej o rozpiętości b, która w środkowej części jest na długości b_1 równomiernie obciążona ciężarem aq (kg/m), a na długości b_2 ciężarem q' (kg/m). A zatem sposób obliczenia używany w praktyce daje rzeczywiste wartości momentów zgięcia tylko przy bardzo małym odstępie silnych żeber połączonych ze słabą płytą. Z powiększeniem odstępu żeber stąje się rzeczywista wartość momentu zgięcia w belce płytowej według powyższego wzoru z reguły m n i e j s z ą, od wartości obliczonej w zwykły praktyczny sposób. Przy dalszem zwiększeniu odstępu żeber może przecenienie wartości momentu zgięcia zwykłym sposobem obliczenia pójść dalej, a to wskutek przyjęcia zbyt małej współdziałającej szerokości płyty. Przy pewnych anormalnych wartości stosunku $\bar{B}_1 : \bar{B}_2$ da się pomyśleć także i przeciwny przypadek, atoli ten wyjątek nie może mieć praktycznego znaczenia. Z powiększeniem odstępu żeber rosną oczywiście momenty zginające płyty M_1, a ponieważ tych momentów zupełnie się nie uwzględnia przy zwykłym sposobie obliczenia, więc rozpatrywane przecenienie momentów zgięcia kompensuje zapewne owo pominięcie w pewnych okolicznościach.

Podstawiwszy we wzorach (171.I) $y = 0$, otrzymujemy dokładne największe wartości momentów zgięcia w naszej belce płytowej. Odpowiadające wzory upraszczają się jeszcze w praktycznie ważnym przypadku szczególnym $b_1 = b_2 = b$, t. zn. gdy obciążenia q i q' rozciągają się na całej rozpiętości b. Wtedy przy użyciu symbolu

$$(\alpha, \beta)_n = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta \, Cth \frac{na}{2\beta} - \alpha \, Cth \frac{na}{2\alpha}} \tag{174.I}$$

mamy dokładnie:

$$(173.\mathrm{I})\qquad (M_q)_{max} = \frac{8qb^2}{\pi^3}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4}\cdot\frac{(\alpha,\beta)_n}{1+\frac{2}{n}\frac{(\alpha,\beta)_n\,\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}},$$

$$(M_{q'})_{max} = \frac{4q'b^2}{\pi^3}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}\cdot\frac{(\alpha,\beta)_n\,\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}};$$

a w przybliżeniu:

$$(173.\mathrm{Ia})\qquad M_{max} = (M_q + M_{q'})_{max} = \sim \frac{\frac{8}{31}(\alpha,\beta)_1\, qb^2 + \frac{1}{8}q'b^2}{1+\frac{2\,(\alpha,\beta)_1\,\bar{B}_2}{B^* - 2\bar{B}_2 c}}$$

W przypadku II ($H^2 = \bar{B}_1\,\bar{B}_2$) trzeba w powyższych wzorach zastąpić $(\alpha,\beta)_n$ przez

$$(174.\mathrm{II})\qquad \lim_{(\alpha=\beta=\gamma)}\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}} = 2\gamma\,\frac{Ch\frac{na}{\gamma}-1}{Sh\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}},$$

a w przypadku III ($H^2 < \bar{B}_1\,\bar{B}_2$) przez

$$(174.\mathrm{III})\qquad \frac{2\alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2+\beta'^2}\cdot\frac{K_n'}{\beta'} = \frac{2\alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2+\beta'^2}\cdot\frac{Ch\frac{na}{\alpha'}-\cos\frac{na}{\beta'}}{\alpha'\,Sh\frac{na}{\alpha'}+\beta'\sin\frac{na}{\beta'}}.$$

Dla momentów zginających i skręcających płyty znajdujemy w przypadku I wyrażenia:

$$(175.\mathrm{I})\qquad \left\{ \begin{aligned} M_1 = \frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n \frac{(n_1)}{n^3}\left|\frac{1}{m_2}+\frac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\right\{\beta\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\right.\\ \left.-\frac{1}{m_2}\right)\frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Sh\frac{na}{2\beta}} - \alpha\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}\right)\frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Sh\frac{na}{2\alpha}}\Bigg|\Bigg|\cos\frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}\right.$$

$$(175.\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned} M_2 &= \frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}\left|1+\frac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left\{\beta\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2 m_1}-\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.-1\right)\frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Sh\frac{na}{2\beta}}-\alpha\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2 m_1}-1\right)\frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Sh\frac{na}{2\alpha}}\right\}\right|\cos\frac{n\pi y}{b},\\ D &= -\frac{4qb^3}{\pi^4}\cdot\frac{2C}{\bar{B}_2}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left|\frac{Sh\frac{nx}{\beta}}{Sh\frac{na}{2\beta}}-\frac{Sh\frac{nx}{\alpha}}{Sh\frac{na}{2\alpha}}\right|\sin\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\right.$$

Stąd wynikają zaraz najważniejsze szczególne wartości, a mianowicie:

W środku prostokątnego pola płyty:

$$(176.\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned} (M_1)_{0,0} &= \frac{4qb^2}{\pi^3}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}\left|\frac{1}{m_2}+\frac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left\{\frac{\beta}{Sh\frac{na}{2\beta}}\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.-\frac{1}{m_2}\right)-\frac{\alpha}{Sh\frac{na}{2\alpha}}\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}\right)\right\}\right|,\\ (M_2)_{0,0} &= \frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n^{(n_1)}\frac{1}{n^3}\left|1+\frac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left\{\frac{\beta}{Sh\frac{na}{2\beta}}\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2 m_1}-\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.-1\right)-\frac{\alpha}{Sh\frac{na}{2\alpha}}\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2 m_1}-1\right)\right\}\right|.\end{aligned}\right.$$

Te wzory potwierdzają wniosek łatwy do wyprowadzenia z rozważań statycznych, że $(M_2)_{0,0}$ może być tylko dodatnie; natomiast $(M_1)_{0,0}$ może być także ujemne, jeżeli ω_1 jest ujemne.

W środku linii granicznej między płytą a żebrem mają momenty zgięcia wartości:

$$(177.\mathrm{I})\quad\begin{cases}(M_1)_{\pm\frac{a}{2},0}=\dfrac{4qb^2}{\pi^3}\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum\limits_n^{(n_1)}\dfrac{1}{n^3}\left[\dfrac{b^2}{\pi^2}\left(\dfrac{\beta_{an}}{\beta^2}-\dfrac{\alpha_{an}}{\alpha^2}\right)\dfrac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}+\dfrac{1}{m_2}(1-\omega_n)\right],\\[2ex] (M_2)_{\pm\frac{a}{2},0}=\dfrac{4qb^2}{\pi^3}\sum\limits_n^{(n_1)}\dfrac{1}{n^3}\left[1-\omega_n+\dfrac{b^2}{\pi^2 m_1}\left(\dfrac{\beta_{an}}{\beta^2}-\dfrac{\alpha_{an}}{\alpha^2}\right)\dfrac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\right].\end{cases}$$

Zważywszy, że $\dfrac{\beta_{an}}{\beta^2}<\dfrac{\alpha_{an}}{\alpha^2}$, mogą obie ostatnie wartości momentów być dodatnie, albo ujemne, zależnie od warunków sztywności i obciążenia żebra i płyty. W szczególności staje się M_1 ujemnem przy dodatniem ω_1, gdy

$$(178.\mathrm{I})\qquad \frac{1}{\omega_1}<1+m_2\frac{b^2}{\pi^2}\left(\frac{\alpha_{a1}}{\alpha^2}-\frac{\beta_{a1}}{\beta^2}\right)\frac{1}{\beta_{a1}-\alpha_{a1}},$$

co zajdzie przy dostatecznie sztywnych żebrach, albo przy odpowiednio małej wartości stosunku $q':q$. Ażeby przy dodatniem ω_1 wypadło także M_2 ujemne, musi się spełniać warunek

$$(179.\mathrm{I})\qquad \frac{1}{\omega_1}<1+\frac{1}{m_1}\frac{b^2}{\pi^2}\left(\frac{\alpha_{a1}}{\alpha^2}-\frac{\beta_{a1}}{\beta^2}\right)\frac{1}{\beta_{a1}-\alpha_{a1}},$$

co oczywiście może zajść o wiele rzadziej, aniżeli warunek (178.I), ponieważ zawsze jest $1<\dfrac{1}{\omega_1}$. Przy ujemnych wartościach ω_1 są M_1 i M_2 zawsze dodatnie.

Dla sił poprzecznych płyty otrzymujemy wzory:

$$(180.\mathrm{I})\quad\begin{cases}V_1=\dfrac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\dfrac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum\limits_n^{(n_1)}\dfrac{1}{n^2}\dfrac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left|\left(\dfrac{2C}{\bar{B}_1}+\dfrac{1}{m_2}-\dfrac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{2\alpha}}-\right.\\[2ex] \qquad\left.-\left(\dfrac{2C}{B_1}+\dfrac{1}{m_2}-\dfrac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{2\beta}}\right|\cos\dfrac{n\pi y}{b},\\[3ex] V_2=-\dfrac{4qb}{\pi^2}\sum\limits_n^{(n_1)}\dfrac{1}{n^2}\left|1-\dfrac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\left|\dfrac{b^2}{\pi^2\alpha}\left(\dfrac{2C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{2\alpha}}-\right.\right.\\[2ex] \qquad\left.\left.-\dfrac{b^2}{\pi^2\beta}\left(\dfrac{2C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{2\beta}}\right|\right|\sin\dfrac{n\pi y}{b}.\end{cases}$$

Siły przeniesione na żebro z jednego pola płyty obliczamy wzorem:

$$(181.\mathrm{I})\qquad R_1 = (V_1)_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{4q(\alpha+\beta)}{\pi}\sum_n \frac{(n_1)}{n^2}\,\frac{\beta-\alpha}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\omega_n\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Ich wypadkowa

$$(182.\mathrm{I})\qquad R_1 = 2\int_0^{\frac{b}{2}} R_1\,dy = -\frac{8}{\pi^2}q(\alpha+\beta)\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^3}\,\frac{\beta-\alpha}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\,\omega_n$$

może w pewnych warunkach stać się równą zeru, podobnie jak w przypadku jednego żebra w całej płycie; wówczas żebro dźwiga tylko obciążenie własne q'. Reakcye podporowe podłużnego brzegu $y=\frac{b}{2}$ określa równanie:

$$(183.\mathrm{I})\qquad R_2 = -\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^2}\Bigg|1-\frac{\omega_n}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\Bigg|\frac{b^2}{\pi^2\alpha}\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Sh\frac{na}{2\alpha}}-\frac{b^2}{\pi^2\beta}\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Sh\frac{na}{2\beta}}\Bigg|\Bigg|,$$

a całkowitą reakcyę tego brzegu równanie:

$$(184.\mathrm{I})\qquad R_2 = 2\int_0^{\frac{a}{2}} R_2\,dx = -\frac{8qb}{\pi^2}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^3}\left(1-\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\,\omega_n\right).$$

Przy pomocy oczywistego warunku równowagi:

$$2R_2 + 2R_r + qab_1 + q'b_2 = 0,$$

w którym R_r oznacza reakcyę żebra, łatwo, jak w § 16, sprawdzić formuły dla R_1 i R_2.

Dla R_r znajdujemy wyrażenie:

$$(185.\mathrm{I})\qquad R_r = -\frac{q'b_2}{2}-\frac{8q(\alpha+\beta)}{\pi^2}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n_1)}{n^3}\,\frac{\beta-\alpha}{\beta_{an}-\alpha_{an}}\cdot\omega_n;$$

które w granicznym przypadku bardzo wielkiej odległości żeber przeistacza się na odpowiadające wyrażenie (146) w § 16. W drugim granicznym przypadku bardzo blizkich żeber zdąża $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}}$ do granicy $\frac{na}{2}$ i ponieważ jednocześnie jest $2c = a$, więc

$$(186)\quad \lim_{(a:b=0)} R_r = -\frac{qab_1}{2} - \frac{q'b_2}{2} + \frac{4}{\pi^2}\frac{a\overline{B}_2}{B^*}\sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}[(n_1)aq + (n_2)q'].$$

Tutaj określa wyraz ze znakiem sumy całkowitą reakcyę brzegu płyty o długości a, która widocznie się zmniejsza z powiększeniem sztywności żeber.

To wszystko, jakoteż cały rozkład sił podporowych jest, biorąc ściśle, ważne tylko wtedy, gdy po pierwsze żebra i płyta dotykają wszędzie powierzchni podporowych w stanie nieobciążonym, a powtóre, gdy podpory są doskonale sztywne. Ponieważ rzeczywiste powierzchnie podporowe są mniej lub więcej podatne, więc rozmieszczenie reakcyj podporowych zmieni się nieco. Wypływająca stąd niedokładność naszych teoretycznych wzorów da się w praktycznych przypadkach niewątpliwie zawsze pominąć; większe zboczenia mogłaby wywołać tylko pierwsza przyczyna przy sprzyjających warunkach.

Przy zastosowaniu powyższych wyników do den blaszanych usztywnionych kształtówkami i t. p., może np. zajść przypadek, że żebra usztywniające nie przylegają wogóle do podpór, a całe obciążenie przenosi się na brzeg blachy. Wówczas należy się spodziewać, że nasze obliczenie wyznaczy ze znaczną dokładnością tylko całkowitą reakcyę brzegu płyty a, ono jednakże nie daje odpowiedzi na pytanie, jak się rozkładają siły podporowe najbliższej okolicy końców żeber. Wystarczającą do celów praktycznych ocenę nietrudno oczywiście otrzymać w każdym konkretnym przypadku.

Odpowiadające ogólne wzory w przypadkach $H^2 \gtreqless \overline{B}_1\overline{B}_2$ można wyprowadzić z równań (167.II) i (167.III); dla najważniejszych szczególnych wartości momentów i reakcyj korzystniej użyć przejścia od odpowiadających formuł I-go przypadku.

V. Kwestya współdziałania płyty w belce płytowej.

§ 20. Funkcya naprężeń w zagadnieniu tarczy prostokątnie nierównokierunkowej.

Rozpatrzymy znowu traktowany w § 16 graniczny przypadek bardzo długiej płyty o jednem poprzecznem żebrze, które, uginając się pod danem obciążeniem, zmusza płytę do współdziałania. To współdziałanie polega na tem, że także warstwa płyty, obojętna przy jej zginaniu, ulega teraz ściskaniu w kierunku żebra. Odpowiadające ciśnienia σ_y w przekroju poprzecznym prostopadłym do żebra nie mogą mieć wszędzie tej samej wartości, gdyż w przeciwnym razie możnaby sztywność i wytrzymałość belki płytowej zwiększyć dowolnie nawet przy najmniejszej .grubości płyty przez powiększenie jej szerokości. Bezwzględna wartość naprężeń σ_y musi w każdym rozpatrywanym przekroju maleć ze zwiększeniem odległości x od żebra i dążyć w granicy do zera. Trudno myśleć o dokładnem wyznaczeniu rozkładu tych naprężeń według wymagań matematycznej teoryi sprężystości, nawet w przypadku materyału równokierunkowego; przyjąwszy jednak, że ten rozkład jest dla $x = 0$, t. j. wzdłuż żebra, z góry dany, sprowadzimy zadanie do płaskiego zagadnienia dla płytowatej części i możemy je w rozpatrywanym przypadku sformułować w następujący sposób:

Dany jest rozkład naprężeń σ_y i τ na całym obwodzie prostokątnej tarczy o szerokości b i nieskończenie wielkiej długości l (rys. 20), nadto rozkład naprężeń σ_x wzdłuż brzegów $y = \pm \frac{b}{2}$ i $x = l$; szukamy składowych σ_x, σ_y, τ dwuwymiarowego stanu napięcia w całej tarczy, jeżeli zresztą nie ma żadnych sił zewnętrznych.

W przypadku materyału równokierunkowego rozwiązuje się zadania tego rodzaju, jak wiadomo, przez całkowanie równania różniczkowego funkcyi naprężeń:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0. \tag{187}$$

Wtedy szukane naprężenia określają następujące formuły różniczkowe:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{188}$$

Dla naszych celów uogólnimy teraz równanie różniczkowe funkcyi naprężeń przy założeniu, że własności sprężyste tarczy prostokątnie nierównokierunkowej dają się scharakteryzować pięciu stałemi w sposób następujący:

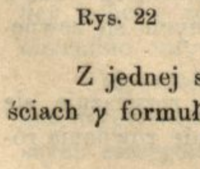
Wydłużenia właściwe λ_x, λ_y są normalnemi naprężeniami związane zapomocą równań:

$$\lambda_x = \frac{\sigma_x}{\mathfrak{E}_1} - \frac{1}{m_2}\frac{\sigma_y}{\mathfrak{E}_2}, \quad \lambda_y = \frac{\sigma_y}{\mathfrak{E}_2} - \frac{1}{m_1}\frac{\sigma_x}{\mathfrak{E}_1}, \tag{189}$$

a zmiana kąta γ przy prostem ścinaniu z odpowiadającem naprężeniem stycznem τ zapomocą równania:

$$\gamma = \frac{\tau}{\mathfrak{G}}. \tag{190}$$

Liczbowe spółczynniki m_1 i m_2 mają tutaj widocznie podobne znaczenie, jak w teoryi zgięcia płyty prostokątnie nierównokierunkowej. $\mathfrak{E}_1$ i $\mathfrak{E}_2$ są uogólnionymi modułami wydłużenia w kierunku x, względnie y; nakoniec $\mathfrak{G}$ odpowiada modułowi ścinania G materyału równokierunkowego.



Rys. 22

Rozpatrując odkształcenie pierwotnie kwadratowego elementu tarczy $ABCD$ (rys. 22), narażonego na naprężenia normalne $\sigma_x = +|\tau|$ i $\sigma_y = -|\tau|$, można łatwo pokazać, że między pięciu stałemi zachodzi związek postaci:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}} = \frac{m_1+1}{m_1}\frac{1}{\mathfrak{E}_1} + \frac{m_2+1}{m_2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}_2}. \tag{198}$$

Z jednej strony bowiem mamy przy bardzo małych wartościach γ formułę goniometryczną:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}},$$

z drugiej zaś czytamy z rysunku:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1-CC''}{1+CC'}=\frac{1-\tau\left(\frac{1}{\mathfrak{E}_1}+\frac{1}{m_2}\frac{1}{\mathfrak{E}_2}\right)}{1+\tau\left(\frac{1}{\mathfrak{E}_2}+\frac{1}{m_1}\frac{1}{\mathfrak{E}_1}\right)}.$$

Porównanie wyrażeń po prawej stronie obu powyższych równań daje:

$$\tau\left(\frac{m_1+1}{m_1}\frac{1}{\mathfrak{E}_1}+\frac{m_2+1}{m_2}\frac{1}{\mathfrak{E}_2}\right)=\frac{\gamma}{2}\left[2-\tau\left(\frac{m_1-1}{m_1}\frac{1}{\mathfrak{E}_1}-\frac{m_2-1}{m_2}\frac{1}{\mathfrak{E}_2}\right)\right].$$

Skoro tutaj pominiemy po prawej stronie mały wyraz o wielkości głównej τ wobec 2 i zastąpimy γ przez $\frac{\tau}{\mathfrak{G}}$, to wypadnie równanie (191).

Oznaczywszy przez u, v składowe przesunięcia sprężystego punktu x, y, mamy, jak wiadomo, ogólnie:

$$\lambda_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \lambda_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{192}$$

Równania różniczkowe równowagi (niezależne od sprężystych własności materyału) mają przy dwuwymiarowym stanie napięcia σ_x, σ_y, τ postać:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0. \tag{193}$$

Równania (189) i (192) dostarczają:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sigma_x}{\mathfrak{E}_1}-\frac{1}{m_2}\frac{\sigma_y}{\mathfrak{E}_2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sigma_y}{\mathfrak{E}_2}-\frac{1}{m_1}\frac{\sigma_x}{\mathfrak{E}_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\tau}{\mathfrak{G}}.$$

Z tych równań łatwo wyrugować pochodne u i v, różniczkując pierwsze dwukrotnie względem y, drugie dwukrotnie względem x, a trzecie raz względem x i raz względem y. W ten sposób dochodzimy do równania:

$$(194)\quad \frac{1}{\mathfrak{E}_1}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{1}{\mathfrak{E}_2}\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\frac{1}{m_2\mathfrak{E}_2}\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{1}{m_1\mathfrak{E}_1}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{1}{\mathfrak{G}}\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}=0,$$

które z obu równaniami (193) wystarcza do wyznaczenia niewiadomych σ_x, σ_y, τ.

Równaniom (193) czynią widocznie zadość wartości (188); podstawiwszy je przeto w (194) i wprowadziwszy dla skrócenia (z uwzględnieniem wzoru (191)):

$$(195)\quad \frac{\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{G}}-\frac{\mathfrak{E}_1}{m_2}-\frac{\mathfrak{E}_2}{m_1}=\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2=2\mathfrak{E}_0,$$

otrzymamy

$$(196)\quad \mathfrak{E}_1\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\mathfrak{E}_0\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\mathfrak{E}_2\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$$

jako równanie różniczkowe funkcyi naprężeń dla tarczy prostokątnie nierównokierunkowej.

Dla energii potencyalnej

$$L_i=\tfrac{1}{2}\int\int(\lambda_x\sigma_x+\lambda_y\sigma_y+\gamma\tau)h\,dxdy$$

dwuwymiarowego stanu napięcia takiej tarczy (o grubości h) wypada po wstawieniu wartości (189) wyrażenie

$$(197)\quad L_i=\tfrac{1}{2}\int\int h\left[\frac{\sigma x^2}{\mathfrak{E}_1}+\frac{\sigma y^2}{\mathfrak{E}_2}+\frac{\tau^2}{\mathfrak{G}}-\left(\frac{1}{m_1\mathfrak{E}_1}+\frac{1}{m_2\mathfrak{E}_2}\right)\sigma_x\sigma_y\right]dx\,dy.$$

W płytach betonowych uzbrojonych „na krzyż" można oczywiście przyjąć

$$\mathfrak{E}_1=\frac{E_b F_{1b}+E_f F_{1f}}{F_{1b}+F_{1f}}=\frac{E_b F_{1b}+E_f F_{1f}}{F}=\frac{E_b(F_{1b}+nF_{1f})}{F}$$

albo

$$(198.1)\quad \mathfrak{E}_1=E_b\frac{F_1}{F}$$

jeżeli F_1 oznacza sprowadzone do czysto betonowego przekroju pole $F_{1b}+nF_{1f}$ o szerokości 1, a

$$F=F_{1b}+F_{1f}=F_{2b}+F_{2f}=1.h$$

oznacza rzeczywiste pole tegoż przekroju.

Podobnież jest

$$\mathfrak{E}_2 = E_b \frac{F_2}{F} \tag{198.2}$$

przyczem

$$F_2 = F_{2b} + n F_{2e}.$$

Przy tem określeniu modułów wydłużenia $\mathfrak{E}_1$ i $\mathfrak{E}_2$ należy oczywiście σ_x, σ_y i τ pojmować jako składowe stanu napięcia w betonie.

§ 21. Przybliżone rozwiązanie w przypadku jednego żebra poprzecznego w płycie bardzo długiej. Krytyczne oświetlenie oficyalnych przepisów co do „współdziałającej szerokości" płyty.

Powracając teraz do naszego specyalnego zadania, wyrazimy uważany za dany rozkład naprężeń σ_y wzdłuż żebra (dla $x = 0$) zapomocą szeregu trygonometrycznego

$$(\sigma_y)_{x=0} = \sum_n c_n \cos \frac{n\pi y}{b}. \tag{199}$$

(Przy założeniu symetryi względem X-ów jest $n = 1, 3, 5 \ldots$) Ponieważ równanie różniczkowe funkcyi naprężeń φ ma tę samą postać, co równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty $\zeta(x, y)$ dla jej części nieobciążonych bezpośrednio, więc każde rozwiązanie zagadnienia płyty tego rodzaju, określa zarazem funkcyę naprężeń dla odpowiadającego zadania tarczy. Skoro takiem rozwiązaniem nie dysponujemy, to można nowe zadanie traktować temi samemi metodami, co i dawniejsze; w naszym np. przypadku prowadzi przyjęcie Lévy'ego, jak w § 12, do następującego wyrażenia dla funkcyi naprężeń:

$$\varphi = \sum_n \frac{c_n}{n^2} \frac{\mu^3 e^{-\frac{nx}{\mu}} - \lambda^3 e^{-\frac{nx}{\lambda}}}{\mu - \lambda} \cos \frac{n\pi y}{b}, \tag{200}$$

przyczem:

$$\left.\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\}=\frac{b}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_2}\mp\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_2}\right)^2-\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}}},$$

albo po wstawieniu wartości $\mathfrak{A}=\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)$

$$\lambda=\frac{b}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}},\quad \mu=\frac{b}{\pi}.$$

Różniczkując znajdujemy stąd:

$$(201)\quad\left\{\begin{aligned}\sigma_x&=-\sum_n c_n\frac{\pi^2}{b^2}\frac{\mu^3 e^{-\frac{nx}{\mu}}-\lambda^3 e^{-\frac{nx}{\lambda}}}{\mu-\lambda}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ \sigma_y&=\sum_n c_n\frac{\mu e^{-\frac{nx}{\mu}}-\lambda e^{-\frac{nx}{\lambda}}}{\mu-\lambda}\cos\frac{n\pi y}{b},\\ \tau&=-\sum_n c_n\frac{\pi}{b}\cdot\frac{\mu^2 e^{-\frac{nx}{\mu}}-\lambda^2 e^{-\frac{nx}{\lambda}}}{\mu-\lambda}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\right.$$

Dla $x=\infty$ znikają wszystkie trzy naprężenia, jak tego wymaga odpowiadający warunek krańcowy. Dla $y=\pm\frac{b}{2}$, spełnia się tylko warunek $\sigma_x=\sigma_y=0$, atoli nie znika naprężenie ścinające τ, lecz przybiera wartość:

$$(202)\qquad (\tau)_{y=\pm\frac{b}{2}}=\mp\sum_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}c_n\frac{\pi}{b}\cdot\frac{\mu^2 e^{-\frac{nx}{\mu}}-\lambda^2 e^{-\frac{nx}{\lambda}}}{\mu-\lambda}.$$

Nakoniec dla $x=0$ jest

$$(203)\qquad (\sigma_x)_{x=0}=-\frac{\pi^2}{b^2}\frac{\mu^3-\lambda^3}{\mu-\lambda}\cdot\sum_n c_n\cos\frac{n\pi y}{b},$$

a $\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}(\sigma_x)_{x=0}\,dy$ nie znika, jakby się należało spodziewać, gdyby był spełniony warunek krańcowy $(\tau)_{y=\pm\frac{b}{2}}=0$, ale za to spełnia się główny warunek (199)[1].

[1] Przy założeniu Lévy'ego nie można spełnić wszystkich warunków krańcowych naszego zadania.

Chcąc zadanie rozwiązać zupełnie, należałoby na znaleziony stan napięcia (201) nałożyć drugi, wywołany przez następujące siły zewnętrzne:

1) Na brzegach $y = \pm \frac{b}{2}$ siły styczne, wyznaczone wartościami (202) ze znakiem $-$.

2) Na brzegu $x = 0$ siły normalne tworzące z poprzedniemi układ w równowadze, a nadto, w połączeniu z siłami normalnemi określonemi wartościami naprężeń (203), dostarczające wypadkowych naprężeń σ_x, które nietylko spełniają warunek

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_{x=0}\, dy = 0,$$

lecz także wyznaczają przepisane wartości dla sprężystych przesunięć brzegu $x = 0$ w kierunku X.

Atoli jest rzeczą jasną, że ten drugi stan napięcia może tylko bardzo niewiele zmienić znaleziony powyżej rozkład ciśnień σ_y, wobec czego zrezygnujemy ze ścisłego rozwiązania i przyjmiemy wyrażenie:

$$(201\,.\,\mathrm{I}) \qquad \sigma_y = \sum_n c_n \frac{\mu e^{-\frac{nx}{\mu}} - \lambda e^{-\frac{nx}{\lambda}}}{\mu - \lambda} \,.\, \cos\frac{n\pi y}{b}$$

jako dostatecznie dokładne prawo rozkładu naprężeń σ_y [1].

Do wyznaczenia współdziałającej szerokości płyty c, w znaczeniu określonem w § 16, należałoby teraz użyć oczywiście równania:

[1] Naprężenia ścinające, potrzebne do przeniesienia naprężeń normalnych σ_y w kierunku X, o ile $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$ nie znika (według równania 193), nie mogą oczywiście według powyższego zależeć od grubości płyty, chociaż często się spotyka z przeciwnem zdaniem. Przy ścisłem rozwiązaniu ulegnie ich rozkład dość silnej zmianie tylko w pobliżu podpór; tam bowiem muszą naprężenia ścinające zmniejszyć się aż do zera (na samej podporze). Atoli w środkowej znacznej części rozpiętości będzie ich rozkład odpowiadał wcale dobrze formule (201).

$$\text{(204)} \qquad \tfrac{1}{2} c \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{(\sigma_y)^2_{x=0}}{\mathfrak{E}_2} h\,dy = \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\frac{\sigma_x^2}{\mathfrak{E}_1} + \frac{\sigma_y^2}{\mathfrak{E}_2} + \frac{\tau^2}{\mathfrak{G}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{m_1 \mathfrak{E}_1} + \frac{1}{m_2 \mathfrak{E}_2} \right) \sigma_x \sigma_y \right] h\,dxdy.$$

Wyrażenie po prawej stronie przedstawia tutaj pracę odkształcenia jednej połowy płyty, działającej jako tarcza. Ta praca jest przyrównana do pracy odkształcenia tarczy zastępczej o nieznanej stałej szerokości c. Na razie jednak nie opłaci się przeprowadzać rachunku na podstawie tego równania, albowiem nie znamy dokładnie odpowiadającego stanu napięcia. Z tego powodu można będzie poprzestać na uproszczonem przybliżonem równaniu:

$$\text{(204a)} \qquad \tfrac{1}{2} c \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{(\sigma_y)^2_{x=0}}{\mathfrak{E}_2} h\,dy = \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{\sigma_y^2}{\mathfrak{E}_2} h\,dy.$$

Obliczona w ten sposób średnia wartość c współdziałającej szerokości płyty musi naturalnie wypaść nieco za mała. Tę wartość należy przy liczbowym rachunku wstawić we wzory §-u 16 (względnie 19); skoro jednakże wypadnie wyznaczyć największe naprężenia w pewnym przekroju żebra (ze względu na obliczenie wytrzymałości), to do tego jest potrzebna znajomość współdziałającej szerokości płyty w tym właśnie przekroju. Oznaczymy ją przez c_y. Ta wielkość jest funkcyą y i da się obliczyć z równania:

$$\text{(204b)} \qquad c_y (\sigma_y)_{x=0} = \int_0^{\infty} \sigma_y\,dx.$$

Przystępując przedewszystkiem do wyznaczenia wartości c, znajdujemy z (204a) po wstawieniu wyrażenia (201.I) dla σ_y:

$$\text{(204,1)} \qquad c = \tfrac{1}{2} \left(\lambda + \mu + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \right) \frac{\sum_n \frac{c_n^2}{n}}{\sum_n c_n^2}.$$

Z powodu zwykle bardzo silnej zbieżności szeregów w liczniku i mianowniku, różni się wartość powyższego ułamka tak niewiele od 1, że w pierwszem przybliżeniu można śmiało przyjąć

$$(204,2)\qquad c = \sim \tfrac{1}{2}\left(\lambda+\mu+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)=\frac{\lambda+\mu}{2}\left[1+\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{\mathfrak{A}_0}{\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}}}\right]=$$

$$=\frac{b}{2\pi}\left(1+\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}}\right)\left[1+\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{\mathfrak{A}_0}{\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}}}\right].$$

Chcąc rachować dokładniej, trzeba oznaczyć w każdym przypadku obciążenia wartości spółczynników c_n. Pokazuje się jednak, że te spółczynniki zależą nietylko od wymiarów i sposobu obciążenia płyty, lecz także od szukanej wielkości c. Przy sposobie obciążenia z § 16 znajdujemy na podstawie wzoru dla momentów (134), że c_n jest proporcyonalne względem wielkości

$$\frac{(n_2)\,\varepsilon_n}{n^3}=\frac{1}{n^3}\,\frac{2\,(n_1)\dfrac{\alpha+\beta}{n}+(n_2)\dfrac{q'}{q}}{\dfrac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2\dfrac{\alpha+\beta}{n}},$$

wobec czego wypadałoby współdziałającą szerokość płyty c obliczyć z równania

$$(204,3)\qquad c=c'\,\frac{\displaystyle\sum_n\frac{1}{n^7}\left[\frac{2\,(n_1)\dfrac{\alpha+\beta}{n}q+(n_2)q'}{\dfrac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2\dfrac{\alpha+\beta}{n}}\right]^2}{\displaystyle\sum_n\frac{1}{n^6}\left[\frac{2\,(n_1)\dfrac{\alpha+\beta}{n}q+(n_2)q'}{\dfrac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2\dfrac{\alpha+\beta}{n}}\right]^2}$$

w którem c' oznacza krótko wartość pierwszego przybliżenia wielkości c (wyrażenie 204,2). Obliczenie c w drugiem przybliżeniu wykonywa się po prostu w ten sposób, że po prawej stronie powyższego równania wstawia się zamiast c pierwszą przybliżoną wartość c'. Odrazu widać, że c będzie zawsze nieco mniejsze od c'.

Na podstawie otrzymanych formuł wyznaczymy teraz w kilku szczególnych przypadkach obciążenia krańcowe wartości stosunku $c:c'$, aby się zoryentować co do jego zależności od rodzaju obciążenia.

1. $q=0$, $b_2=b$, t. zn. tylko żebro jest na całej rozpiętości b obciążone równomiernie ciężarem q' (kg/cm). Wtedy mamy podług (204,3):

$$\frac{c}{c'}=\sum_n \frac{1}{n^7}\frac{1}{\left(\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^2}:\sum_n \frac{1}{n^6}\frac{1}{\left(\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^2}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{3^7}\left|\frac{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2(\alpha+\beta)}{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+\frac{2}{3}(\alpha+\beta)}\right|^2+\frac{1}{5^7}\left|\frac{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2(\alpha+\beta)}{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+\frac{2}{5}(\alpha+\beta)}\right|^2+\cdots}{1+\frac{1}{3^6}\left|\frac{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2(\alpha+\beta)}{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+\frac{2}{3}(\alpha+\beta)}\right|^2+\frac{1}{5^6}\left|\frac{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2(\alpha+\beta)}{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+\frac{2}{5}(\alpha+\beta)}\right|^2+\cdots}$$

Gdy teraz będziemy zmieniać sztywność żebra między krańcowemi wartościami, odpowiadającemi nieskończenie silnym żebrom ($B^*=\infty$) i nieskończenie słabym ($B^*=2\bar{B}_2c$), to wartość stosunku $c:c'$ waha odpowiednio między granicami

$$\frac{1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\cdots}{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots}=\sim 0{,}999, \text{ a}$$

$$\frac{1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\cdots}{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots}=\sim\frac{1{,}004}{1{,}014}=0{,}990$$

To wahanie będzie oczywiście w praktycznych przypadkach o wiele mniejsze i, bez względu na stosunek sztywności żebra i płyty, można przyjąć w tym przypadku obciążenia z zupełnie wystarczającem przybliżeniem

$$c=c'.$$

2. $q'=0$, $b_1=b$, czyli płyta dźwiga tylko całkowite równomiernie rozłożone obciążenie o natężeniu q(kg/cm²). Teraz znajdujemy z rów. (204,3):

$$\frac{c}{c'}=\left(1+\frac{A_3^2}{3^9}+\frac{A_5^2}{5^9}+\dots\right):\left(1+\frac{A_3^2}{3^8}+\frac{A_5^2}{5^8}+\dots\right),$$

przy oznaczeniu

$$A_n=\frac{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+2(\alpha+\beta)}{\frac{B^*}{\bar{B}_2}-2c+\frac{2}{n}(\alpha+\beta)},$$

a ta wartość $c:c'$ waha się między

$$\frac{1+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}+\dots}{1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\dots}=\sim 1{,}000, \text{ a}$$

$$\frac{1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\dots}{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\dots}=\sim 0{,}999$$

odpowiednio do założeń nieskończenie wielkiej i nieskończenie małej sztywności żebra. Te wahania są jeszcze nieznaczniejsze niż w pierwszym przypadku obciążenia, tem bardziej więc można teraz przyjąć

$$c=c'$$

niezależnie od wzajemnego stosunku sztywności żebra i płyty.

3. $q'=0$, $b_1=0$, $\lim qb_1=q''$ (kg/cm), t. zn. równomierne obciążenie liniowe na linii środkowej płyty. Otrzymujemy ten sam wynik, co w przypadku 1. Przeto i w tym przypadku jest z wystarczającem przybliżeniem

$$c=c'$$

przy dowolnej sztywności żebra w stosunku do płyty.

4. $q=0$, $b_2=0$, $\lim q'b_2=P$, t. j. obciążenie skupione w środku żebra. Dopiero w tym przypadku obciążenia znajdu-

jemy większe wahania krańcowych wartości stosunku $c:c'$, gdy sztywność żebra spada z bardzo wielkiej wartości na znikomo małą, a mianowicie jest

$$\frac{c}{c'} = \frac{1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\cdots}{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots} = \sim 0{,}990$$

przy bardzo wielkiej sztywności żebra, zaś

$$\frac{c}{c'} = \frac{1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots} = \sim 0{,}853$$

przy znikomo małej. Zmniejszenie współdziałającej szerokości z ubytkiem sztywności żebra występuje teraz wyraźnie na jaw. Wyższa granica tego zmniejszenia, dochodzi, jak widać, do 15% wartości odpowiadającej nieskończenie sztywnemu żebru. W przypadkach praktycznych będzie to zmniejszenie oczywiście zawsze mniejsze.

Oprócz zależności od względnej sztywności zginania żebra i płyty, wypada jeszcze zwrócić uwagę na zależność współdziałającej szerokości płyty c od obu sztywności przy ściskaniu płyty w kierunkach X i Y. Te sztywności są odpowiednio proporcyonalne względem uogólnionych modułów wydłużenia $\mathfrak{E}_1$ i $\mathfrak{E}_2$. Ich wpływ występuje głównie i prawie wyłącznie na jaw w wyrażeniu (204,2) dla c'. Znajdujemy np. dla

$$\mathfrak{E}_1 : \mathfrak{E}_2 = 0{,}1 \qquad 1 \qquad 10$$

$$c' : b = 0{,}248 \qquad 0{,}398 \qquad 0{,}782$$

Z tych liczb widać, że im silniejsze jest uzbrojenie w kierunku X, t. j. w kierunku prostopadłym do żebra do uzbrojenia w kierunku Y, tem większą jest współdziałająca szerokość płyty c i naodwrót; atoli przyrost c nie idzie tak szybkiem tempem jak odpowiadające wzmocnienie uzbrojenia X.

Przystąpimy teraz do wyrachowania wielkości c_y, t. j. współdziałającej szerokości płyty w dowolnym przekroju żebra, przy pomocy wzoru (204b) i w tym celu wstawiamy weń wyrażenie (201 I) dla σ_y. Po rozwiązaniu względem c_y, wypada wzór ogólny

$$(205) \qquad c_v = (\lambda + \mu) \cdot \frac{\sum\limits_n \frac{c_n}{n} \cos \frac{n\pi}{b} y}{\sum\limits_n c_n \cos \frac{n\pi}{b} y}$$

Ponieważ tutaj obadwa szeregi w liczniku i w mianowniku są zwykle silnie zbieżne, a wskutek tego wartość ułamka różni się niewiele od 1 przy jakiemkolwiek y, więc najczęściej można w pierwszem przybliżeniu napisać:

$$(205a) \qquad c_v = \sim c_v = \lambda + \mu = \frac{b}{\pi}\left(1 + \sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}}\right)$$

Rachując dokładnie znajdujemy przy sposobie obciążenia z § 16, podobnie jak przy wyznaczeniu c:

$$(205') \qquad c_v = c'_v \frac{\sum\limits_n \frac{1}{n^4} \cdot \frac{2(n_1)\frac{\alpha+\beta}{n} q + (n_2) q'}{\frac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c + 2\frac{\alpha+\beta}{n}} \cos \frac{n\pi}{b} y}{\sum\limits_n \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2(n_1)\frac{\alpha+\beta}{n} q + (n_2) q'}{\frac{B^*}{\bar{B}_2} - 2c + 2\frac{\alpha+\beta}{n}} \cos \frac{n\pi}{b} y}$$

z krańcowemi wartościami

$$(205'a) \qquad \Big/_{Br=\infty} c_v = (\lambda + \mu) \frac{\sum\limits_n \frac{1}{n^4}\left[2(n_1)\frac{\alpha+\beta}{n} q + (n_2) q'\right] \cos \frac{n\pi}{b} y}{\sum\limits_r \frac{1}{n^3}\left[2(n_1)\frac{\alpha+\beta}{n} q + (n_2) q'\right] \cos \frac{n\pi}{b} y}$$

dla żebra nieskończenie sztywnego i

$$205'b) \qquad \Big/_{Br=0} c_v = (\lambda + \mu) \frac{\sum\limits_n \frac{1}{n^3}\left[2(n_1)\frac{\alpha+\beta}{n} q + (n_2) q'\right] \cos \frac{n\pi}{b} y}{\sum\limits_n \frac{1}{n^2}\left[2(n_1)\frac{\alpha+\beta}{n} q + (n_2) q'\right] \cos \frac{n\pi}{b} y}$$

dla żebra nieskończenie słabego.

Podobnie jak przy obliczeniu c, wyznaczymy teraz dla tychże samych czterech przypadków obciążenia odpowiadające krańcowe wartości liczby

$$\nu = c_y : c'_y,$$

aby mieć pogląd na zależność współdziałającej szerokości płyty od sposobu obciążenia.

1. $q=0$, $b_2=b$, t. zn. liniowe równomierne obciążenie całego żebra (q' kg/cm). Dla $y=0$, t. j. w środkowym najbardziej narażonym przekroju, mamy:

$$\Big/_{Br=\infty} \nu = \frac{c_y}{c'_y} = \frac{1-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\cdots}{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots} = \frac{0{,}989}{0{,}969} = 1{,}02_1$$

$$\Big/_{Br=0} \nu = \frac{c_y}{c'_y} = \frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots}{1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots} = \frac{0{,}969}{0{,}917} = 1{,}05_7$$

Przy danej sztywności żebra odpowiada pierwsza z powyższych liczb bardzo cienkiej płycie, a druga bardzo grubej. Ze zmniejszeniem grubości płyty ubywa zatem teoretycznie i współdziałająca szerokość tejże, jednakowoż tak nieznacznie, że to stoi jakby w sprzeczności z praktyczną intuicyą inżyniera. Na pełne współdziałanie stosunkowo cienkiej płyty można oczywiście liczyć tylko dopóty, dopóki nie zachodzi niebezpieczeństwo jej wyboczenia (wszak płyta jest ściskana), wszelako nie ulega żadnej wątpliwości, że to niebezpieczeństwo może się pojawić tylko u tak cienkich płyt, jakich chyba nie używa się w praktyce do tego celu. Poza tym wyjątkowym przypadkiem jest powyższa sprzeczność tylko pozorną i pochodzi zapewne stąd, że w praktyce mimowoli łączymy współdziałanie płyty w powyższem znaczeniu z działaniem płytowem, polegającem na przeniesieniu obciążenia żebra na pozostałe podpory płyty (względnie sąsiednie żebra i t. p.). To przeniesienie jest widocznie silnie zależne od sztywności zginania płyty a tem samem od jej grubości, podczas gdy miara współdziałania płyty jest z natury rzeczy od tej grubości uniezależniona.

Przyjąwszy dla ν średnią arytmetyczną ze znalezionych krańcowych wartości, t. j.

$$\nu = \sim 1{,}04,$$

jako stałą wartość przybliżoną, popełnimy przy dowolnych stosunkach sztywności żebra do sztywności płyty błąd mniejszy od $2^0/_0$.

Przekrojom oddalonym od środka rozpiętości odpowiadają mniejsze wartości stosunku $c_\nu : c'_\nu$. Dla $y = \pm \frac{b}{4}$ znajdujemy:

$$\Big/_{B_r=\infty} \nu = \frac{1 + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} - \cdots}{1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \cdots} = \frac{1{,}011}{1{,}028} = 0{,}984$$

$$\Big/_{B_r=0} \nu = \frac{1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots}{1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots} = \frac{1{,}028}{1{,}065} = 0{,}965$$

W bezpośredniej bliskości podpór żebra, czyli dla $y = \pm \frac{b}{2}$ staje się wyrażenie dla ν nieoznaczonem. Przy pomocy znanych prawideł rachunku nieskończonościowego otrzymamy jednak jego prawdziwą wartość, a mianowicie

$$\Big/_{B_r=\infty} \nu = \frac{1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots} = \frac{1{,}052}{1{,}234} = 0{,}853,$$

$$\Big/_{B_r=0} \nu = \frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots} = \frac{1{,}234}{\infty} = 0$$

Współdziałająca szerokość płyty c_ν ulega przeto znacznemu zmniejszeniu w pobliżu podpór. Temu interesującemu wynikowi nie można przypisywać większego praktycznego znaczenia już dlatego, ponieważ naprężenia zginające grają w pobliżu podpór drugorzędną rolę, a założenia zwykłych teoryj belek i płyt nie spełniają się należycie w bezpośredniej bliskości podpór.

2. $q' = 0$, $b_1 = b$, czyli **r ó w n o m i e r n i e r o z ł o ż o n e o b c i ą ż e n i e c a ł e j p ł y t y** o natężeniu q (kg/cm²). Teraz mamy dla środkowego przekroju ($y = 0$):

$$/v_{B_r=\infty} = \frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots}{1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \cdots} = \frac{0{,}996}{0{,}989} = 1{,}007,$$

$$/v_{B_r=0} = \frac{1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \cdots}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots} = \frac{0{,}989}{0{,}969} = 1{,}021.$$

Dla przekroju $y = \pm \frac{b}{4}$ wypada:

$$/v_{B_r=\infty} = \frac{1 + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots}{1 + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \cdots} = \frac{1{,}004}{1{,}011} = 0{,}993$$

$$/v_{B_r=0} = \frac{1 + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \cdots}{1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots} = 0{,}984,$$

a dla przekrojów podporowych:

$$/v_{B_r=\infty} = \frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots}{1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots} = \frac{1{,}015}{1{,}052} = 0{,}964,$$

$$/v_{B_r=0} = \frac{1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots} = \frac{1{,}052}{1{,}234} = 0{,}853.$$

W środkowym przekroju można przeto współdziającą szerokość płyty uważać praktycznie za niezależną od stosunku sztywności żebra do sztywności płyty. Przyjmując średnio

$$\Big/ v = \frac{c_v}{c'_v} = 1{,}015 \qquad (y=0)$$

popełniamy błąd nie dochodzący nigdy 0,8%. W rzeczywistości będą wahania wielkości c_v uwarunkowane zmianą sztywności żebra (a wraz z nimi ów błąd) jeszcze o wiele mniejsze, ponieważ nie potrzebujemy brać w rachubę żeber o nieskończenie małej i nieskończenie wielkiej sztywności. Dotyczy to oczywiście wszystkich wogóle przypadków obciążenia.

3. $q' = 0$, $b_1 = 0$, $\lim qb_1 = q''$ (kg/cm), t. zn. równomierne obciążenie linii środkowej płyty. W środkowym przekroju ($y = 0$) otrzymujemy następujące krańcowe wartości dla v:

$$\Big/_{B_r=\infty} v = \sum_n \frac{1}{n^4} : \sum_n \frac{1}{n^8} = 0{,}964$$

$$\Big/_{B_r=0} v = \sum_n \frac{1}{n^3} : \sum_n \frac{1}{n^2} = 0{,}853.$$

Teraz różnią się obie liczby już dość znacznie, ale w praktycznych przypadkach będą zachodzić o wiele mniejsze różnice. Skoro np. ustalimy praktyczną niższą granicę sztywności żebra, przyjąwszy

$$B^* - 2\bar{B}_2 c = 2\bar{B}_2 (\alpha + \beta),$$

to wartość ta odpowiada już stosunkowo słabym żebrom, albowiem według §-u 16

$$B_r = B^* - 2\bar{B}_2 c - 2ce^2 E_b F_2.$$

W tym krańcowym praktycznym przypadku daje rów. (205'):

$$v = \frac{1 + \frac{1}{2.3^3} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{4.7^3} + \cdots}{1 + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.5^2} + \frac{1}{4.7^2} + \cdots} = \frac{1{,}022}{1{,}079} = 0{,}947,$$

a wartość ta różni się mniej niż o 2% od wartości 0,964, odpowiadającej teoretycznej wyższej granicy sztywności żebra.

Dla przekroju $y = \pm \frac{b}{4}$ mamy:

$$\Big/_{Br=\infty} v = \frac{1 - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} - \dots}{1 - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots} = \frac{0{,}987}{0{,}958} = 1{,}030,$$

$$\Big/_{Br=0} v = \frac{1 - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots}{1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots} = \frac{0{,}958}{0{,}872} = 1{,}099,$$

a dla $y = \pm \frac{b}{2}$:

$$\Big/_{Br=\infty} v = \frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots}{1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots} = 1{,}057,$$

$$\Big/_{Br=0} v = \frac{1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots} = \frac{0{,}917}{0{,}785} = 1{,}168$$

Należy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że podczas gdy w obu pierwszych przypadkach obciążenia malała współdziałająca szerokość płyty c_v od środka żebra ku podporom, to teraz zachodzi przeciwnie przyrost c_v.

4. $q = 0$, $b_2 = 0$, $\lim q'b_1 = P$, t. j. ciężar skupiony w środku żebra. Dla obciążonego środkowego przekroju wypada z rów. (205')

$$\Big/_{Br=\infty} v = \frac{\sum \frac{1}{n^3}}{\sum \frac{1}{n^2}} = 0{,}853, \quad \Big/_{Br=0} v = \frac{\sum \frac{1}{n^2}}{\sum \frac{1}{n}} = 0,$$

skoro jednakże, jak poprzednio, określimy praktyczną niższą granicę sztywności żebra przez przyjęcie

$$B^* - 2\overline{B}_1 c = 2\overline{B}_2 (\alpha + \beta),$$

to

$$v = \frac{c_y}{c'_y} = \frac{\sum \frac{1}{(n+1)n^2}}{\sum \frac{1}{(n+1)n}} = \frac{1{,}079}{1{,}386} = 0{,}778$$

(Przy cztery razy mniejszej wartości $B^* - 2\overline{B}_2 c$ znajdujemy zamiast powyższej liczby $\sim 0{,}73$).

Dla przekroju $y = \pm \frac{b}{4}$ mamy:

$$v\Big/_{B_r=\infty} = \frac{1 - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots}{1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots} = 1{,}099,$$

$$v\Big/_{B_r=0} = \frac{1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots}{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots} = \frac{0{,}872}{0{,}623} = 1{,}400,$$

a dla przekrojów podporowych:

$$v\Big/_{B_r=\infty} = \frac{1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots} = 1{,}168$$

W krańcowym przypadku $B_r = 0$ staje się szereg w mianowniku wahającym, ale posiada określoną wartość $\frac{1}{2}$. A zatem:

$$v\Big/_{B_r=0} = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots}{\frac{1}{2}} = 1{,}570.$$

Oprócz tego otrzymujemy dla przyjętej powyżej praktycznej niższej granicy sztywności żebra:

$$v = \frac{1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{4.7} + \dots}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots} = \frac{0{,}877}{0{,}693} = 1{,}266$$

Jak widać, zachodzi tutaj znowu przyrost c_v od środka żebra ku podporom. Ten przyrost objawia się tem wybitniej, im słabsze jest żebro.

Pozostaje jeszcze przyjrzeć się bliżej zależności c_v od obu sztywności ściskania płyty, względnie od uogólnionych modułów wydłużenia $\mathfrak{E}_1$ i $\mathfrak{E}_2$. Ta zależność występuje na jaw we wzorze (205a) dla c'_v, który daje dla

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{E}_1 : \mathfrak{E}_2 = & 0,1 & 0,5 & 1 & 5 & 10 \\ c'_v : b = & 0,419 & 0.543 & 0,637 & 1,030 & 1,325 \end{array}$$

Stąd widać jak wzmocnienie uzbrojenia prostopadłego do żebra przyczynia się korzystnie do współdziałania płyty. Wartości c'_v z tej tablicy są około 60 do 70°/₀ większe od obliczonych poprzednio odpowiadających wartości c'. Tak wielkie różnice nie dadzą się wyjaśnić samą, dość słabą wogóle zmiennością c'_v wzdłuż żebra i dowodzą, że pominięcie wyrazów zależnych od σ_x i τ w równaniu pracy (204) musi prowadzić do wcale poważnego zmniejszenia obliczonej wartości c. Atoli z przytoczonego powyżej powodu zaniechamy na razie dokładniejszego obliczenia c na podstawie równania (204).

Przy tej sposobności wypada podkreślić, że doświadczalnego stwierdzenia tych zadziwiająco wielkich współdziałających szerokości płyty, jakie przepowiada teorya, można się spodziewać tylko wtedy, gdy przy wykonaniu doświadczalnego objektu zachowano ściśle pewne założenia teoryi, jako to: ciągłość budowy („Monolität“), zapewniona starannem betonowaniem od razu płyty razem z żebrem i równomierne uzbrojenie całej płyty, bez przerw, lub innej większej nieciągłości ponad żebrem.

Zebrawszy teraz znalezione wyniki, dochodzimy do następujących praktycznie ważnych wniosków:

Wielkość $c_1 = 2c_v + g$, nazwana w przepisach dla żel.-betonu w różnych krajach (niewłaściwie) „współdziałającą szerokością płyty“, zależy w przypadku bardzo wielkiego odstępu żeber w porównaniu do ich rozpiętości b głównie od tejże rozpiętości, od stosunku sztywności zginania żebra i płyty, oraz od sposobu obciążenia i położenia rozpatrywanego przekroju. Bezpośredni wpływ grubości żebra g tkwi jedynie w powyższem praktycznem określeniu wielkości $c_1 = 2c_v + g$, a wpływ wysokości żebra gra rolę tylko pośrednio, o ile sztywność żebra od tej wysokości zależy. Oprócz tego jest współdziałająca szerokość płyty zależna jeszcze od stosunku podłużnego do poprzecznego uzbrojenia płyty. Najsilniejszym jest wpływ rozpiętości, albowiem we wszelkich warunkach okazuje się c prawie dokładnie proporcyonalnie względem rozpiętości b. Mianowicie jest

$$c_v = (\lambda + \mu)\nu = \nu \frac{b}{\pi}\left(1 + \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}}\right), \tag{205.I}$$

jeżeli

$$\nu = c_v : c'_v$$

oznacza liczbowy spółczynnik, zależny od sposobu obciążenia, od położenia przekroju i od stosunku sztywności przy zginaniu żebra do płyty. W szczególnym zaś przypadku równego uzbrojenia w obu kierunkach głównych ($\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$) mamy:

$$c_v = \nu \frac{2}{\pi} b = \sim 1{,}91\, \nu \frac{b}{3} \tag{205*}$$ [1]

[1] Cytowana na wstępie praca inż. Eggenschwylera A. zajmuje się wyznaczeniem współdziałającej szerokości płyty c_v w przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie na całej rozpiętości b belki **T** z materyału równokierunkowego, przy dowolnym wymiarze l (poprzeczna całkowita szerokość belki $= g + 2l$). W granicznym przypadku $l = \infty$ dochodzi Eggenschwyler do wartości c_v około cztery razy mniejszej od wartości wynikającej z powyższego wzoru, ale wystarcza rzut oka na wykres rozkładu naprężeń normalnych σ_v (według naszego znakowania), aby stracić zaufanie do tego rozwiązania. Ten wykres bowiem składa się z dwu linii łańcuchowych, przecinających się na płaszczyźnie symetryi belki pod kątem tem ostrzejszym, że większe jest l, coby wskazywało na nagły spadek wartości naprężenia σ_v od żebra w kierunku doń prostopadłym. Taki zaś spadek jest widocznie wykluczony i krzywa naprężeń nie może mieć załomów. Łatwo natomiast się przekonać, że temu ostatniemu warunkowi czyni zadość podane powyżej wyrażenie (201.I) dla σ_v; w szczególności jest $\frac{\partial \sigma_v}{\partial x} = 0$ dla $x = 0$.

Jak się zdaje, zabrał się Eggenschwyler do opracowania kwestyi rozkładu naprężeń w szerokich stopkach belek **T** pod wpływem pięknych doświadczeń z belkami płytowemi żel.-betonowemi, jakie wykonali Bach i Graf, Mitt. u. Forschungsarb. Zesz. 90 i 91, r. 1910, nie zwróciwszy przytem jednak uwagi na dziwny błąd popełniony przez wymienionych autorów przy interpre-

Wpływ względnej sztywności żebra jest w przypadku równomiernego obciążenia liniowego całego

tacyi tych doświadczeń! Czytamy mianowicie w odnośnej publikacyi (str. 19), że zniszczenie płyty w belkach 5-go szeregu doświadczeń (o górnej szerokości 100 cm., wysokości żebra 25 cm. i grubości żebra 18 cm.), narażonych w środkowej trzeciej części rozpiętości 300 cm. na czyste zginanie, nie nastąpiło wskutek ściskania, lecz wskutek ścinania(!) w pionowej płaszczyźnie przylegania płyty do żebra. Otóż to jest najoczywistszą nieprawdą, albowiem przy czystem zgięciu naprężenia ścinające tak w tych przekrojach jakoteż w przekrojach poprzecznych wcale się pojawić nie mogą. — Pęknięcia wskazujące na zniszczenie ściskanej płyty, przebiegały dokładnie równolegle do kierunku ciśnień, jak to obserwowano przy wielu próbach czystego ściskania, skoro np. przez smarowanie (Föppl) usunięto zakłócający wpływ cisnących płyt prasy. Podłużne szczeliny powstałe w płycie, objaśniają się przeto naturalnie zbyt wielkiemi ciśnieniami, a tylko pozostaje jeszcze wytłumaczyć dla czego te szczeliny ukazały się w miejscu połączenia płyty z żebrem jedynie w przypadku największej stosowanej szerokości belki (100 cm.), jakkolwiek dokładne pomiary wykazały, że i przy tej szerokości był rozkład ciśnień w skrajnej warstwie płyty bardzo jednostajny. Przy bacznem przyjrzeniu się objawom zniszczenia na belce Nr 394 (Fig. 38 do 47 cytowanej publikacyi), widzimy, że pierwotna przyczyna oddzielenia przyległych do żebra części płyty tkwi przecież w naprężeniach ścinających, których jednakowoż należy szukać tam, gdzie występuje siła poprzeczna. Znajdujemy ją zaraz niedaleko od środka belki, w obu przekrojach obciążonych siłami skupionemi P, P, i w samej rzeczy tam, w miejscu, gdzie ściana żebra łączy się ze spodnią ścianą płyty za pośrednictwem wąskiej ukośnej ściany, ścinającej wklęsłą krawędź, pojawiają się, przy obciążeniu $P=14.000$ kg. pierwsze pochyłe pęknięcia (Fig. 38). Te pęknięcia wkraczają później, w miarę wzrostu obciążenia, coraz dalej w środkową część belki i oryentują się tutaj odpowiednio do zmiany kierunku ciśnień głównych na równoległe do osi belki, tak, iż już w niewielkiej odległości od obciążonych przekrojów stają się równoległe do podłużnych „włókien“ belki. Skoro tylko pęknięcia z obu stron połączyły się w jedną szczelinę podłużną, widoczną u spodu belki na fig. 41, doznaje miejsce połączenia płyty z żebrem znacznego osłabienia i rozpoczyna się zniszczenie płyty przez podłużne pęknięcia, widoczne na jej górnej powierzchni (fig. 45). Na pytanie, dlaczego ten obraz zniszczenia nie pojawił się w innych szeregach doświadczeń, przy szerokościach belki 48 i 75 cm., a niezmienionych innych wymiarach, odpowiedź łatwa: Poprostu dlatego, ponieważ omawiane naprężenia ścinające musiały w tych belkach wypaść znacznie mniejsze i naprężenia cisnące w środkowej części belki osiągnęły wcześniej wielkość niebezpieczną przy wzroście obciążenia. Jakoż istotnie doświadczenia wykazały praktycznie równe wartości krańcowych ciśnień „łamiących“ σ_b w betonie dla belek o 75 i 100 cm. szerokości (w ten sam sposób uzbrojonych), jakkolwiek żebra, jakoteż równomiernego obciążenia powierzchniowego całej płyty, praktycznie bez znaczenia, ale w innych przypadkach obciążenia gra ten wpływ rolę tem ważniejszą, im obciążenie jest bardziej skupione. Przy najniekorzystniejszym rodzaju obciążenia przez siłę skupioną w środku żebra, może wielkość c_v, stosownie do stosunku sztywności żebra i płyty, zmniejszyć się mniej więcej o 15 do 22%, w porównaniu do wartości, odpowiadającej równomiernemu obciążeniu całej płyty. Tę wartość nazwiemy dla krótkości normalną. Większe zmniejszenie normalnej wartości wskutek skupienia obciążenia odpowiada słabszym żebrom i na odwrót.

To wszystko odnosi się do niebezpiecznego przekroju w środku żebra.

Wpływ uzbrojenia płyty wychodzi na jaw z wzorów (205). Wzmocnienie uzbrojenia w kierunku X, t. j. prostopadle do żebra zwiększa współdziałającą szerokość płyty; odwrotnie działa wzmocnienie uzbrojenia równoległego do żebra.

Jeżeli te wyniki teoretycznego badania porównamy z odpowiedniemi punktami urzędowych przepisów różnych krajów, dyktowanymi po największej części praktycznem czuciem autorów, to widzimy zaraz, że można znaleźć tylko jedną regułę, wspólną dla większości owych przepisów, która się da po części naukowo uza-

zachodziła tak wybitna różnica w obrazach zniszczenia belek o węższych i szerszych płytach.

Eggenschwyler rozpatrywał praktycznie ważny przypadek zgięcia pod równomiernie rozłożonem obciążeniem, zakładając, że do „przeniesienia" naprężeń normalnych z żebra na płytę są potrzebne naprężenia ścinające (poziome), chociaż już sam przypadek czystego zgięcia poucza, że taki sam rozkład naprężeń normalnych powstaje w przekroju poprzecznym belki i bez naprężeń ścinających. Zaznaczywszy mimochodem błędność tego zapatrywania, trzeba jednak przyznać, że w tym przypadku myśl jest słuszna i pewne, aczkolwiek nieznaczne naprężenia ścinające powstaną w płaszczyznach pionowych dzielących płytę od żebra przy ogólnem zginaniu. Rozwiązanie, podane w niniejszej pracy pod postacią wzorów (201) prowadzi także do pewnych (poziomych) naprężeń ścinających w tych płaszczyznach (o ile nie zachodzi przypadek czystego zginania). Inaczej jednak ma się rzecz z przyjęciem przez Eggenschwylera parabolicznego rozkładu tych naprężeń, niemającem żadnego uzasadnienia.

sadnić. Ta reguła poleca mianowicie jako „współdziałającą szerokość“ $c_1 = 2c_v + g$ brać w rachubę co najwyżej pewną oznaczoną część rozpiętości b; w szczególności było przepisane przed r. 1915 w Prusiech, Rosyi, Wirtembergii, na Węgrzech etc. $\frac{1}{3}b$ a w Szwajcaryi pierwej $\frac{1}{4}b$, od r. 1915 $\frac{1}{5}b$ jako wyższa granica. To zgadza się o tyle z naszymi teoretycznemi wywodami, o ile obrano rozpiętość b za wielkość miarodajną. Rzecz dziwna, że inaczej postąpiono przy układaniu przepisów austryackich, a także najnowszych niemieckich z r. 1915. W każdym razie tak ta, jakoteż inne reguły praktyczne, wykazują bardzo znaczne zboczenia od teoretycznych wzorów (205) i to na korzyść bardzo wysokiego stopnia pewności. Nic tedy dziwnego, że przy próbach obciążenia znajdują nieraz ugięcia nadspodziewanie małe w porównaniu do obliczonych według przepisów. Z drugiej strony trzeba zwrócić uwagę, że przepisy nie suponują żadnego obliczenia momentów zgięcia M_1 i M_2 podług teoryi płyt i raczej zdążają do tego, aby bardzo dotychczas niedokładną znajomość rzeczywistego stanu napięcia pokryć ostrożnem zmniejszeniem współdziałającej szerokości płyty. W każdym razie należy pamiętać, że momenty zginające płyty M_1 w miejscu połączenia z żebrem mogą w pewnych warunkach osiągnąć dość wysokie wartości ujemne, mianowicie wtedy, gdy sztywność żebra, jakoteż stosunek $\bar{B}_1 : \bar{B}_2$ obu sztywności zginania płyty stają się odpowiednio wielkie. Tu widać z równań (115), (133) i z dołączonej do nich dyskusyi. W tym przypadku możnaby na pełne teoretyczne współdziałanie płyty liczyć tylko wtedy, gdy w tem miejscu, albo ciągnienia w betonie nie przekraczają dopuszczalnej granicy, albo też uzbrojenie w kierunku X zapewnia ścisły związek żebra z płytą.

Inne odnośne reguły i przepisy, że np. $c_1 = 2c_v + g$ wolno co najwyżej przyjąć równe 20-krotnej grubości płyty (Szwajcarya i Wirtembergia przed r. 1915), albo, że c_1 ma być nie większe od 8-krotnej grubości żebra g (Austrya i Niemcy od r. 1915), lub wreszcie, że c_1 nie powinno być większe od 5-krotnej wysokości żebra (Węgry), względnie 4-krotnej wysokości żebra (Niemcy od roku 1915), nie mogą, jak z powyższego wynika, być naukowo uzasadnione i stanowią z tego powodu po największej części tylko balast, tamujący niepotrzebnie swobodę ruchów projektującego inżyniera. Także i ów punkt austryackich przepisów, pozwalający na uwzględnienie współdziałania płyty tylko przy jej grubości $h > 6$ cm. ona nie ma właściwie naukowej podstawy[1].

Przy tej sposobności wypada podnieść, że byłoby do życzenia w interesie postępu w każdej dziedzinie sztuki inżynierskiej, aby urzędowe przepisy nie wnikały zbytnio w szczegóły obliczenia statycznego, a w szczególności, aby nie ustanawiały obowiązujących reguł w kwestyach, dla których dopiero oczekujemy jako tako gruntownego naukowego zbadania. Subjektywne zapatrywanie osobistości, której powierzono opracowanie przepisów, narzuca się w ten sposób nie rzadko ogółowi technicznemu, i mijają lata, zanim dowolny, nieuzasadniony pomysł zniknie z przepisów. Z pośród zestawionych w „Betonkalender" z r. 1916 przepisów dla żel.-betonu są, jak się zdaje, tylko francuskie wolne od tego zarzutu.

§ 22. Przybliżone rozwiązanie w przypadku wielu żeber równoodległych. Porównanie z oficyalnemi przepisami.

Zajmiemy się teraz kwestyą współdziałającej szerokości płyty w ogólniejszym przypadku wielu jednakowych żeber w równych odstępach, które już traktowaliśmy częściowo w § 19. Obrawszy

[1] Pewien cel praktyczny tych przepisów można upatrywać w tem, że one ujmują niebezpieczne naprężenia ścinające w kątach między płytą a żebrem w pewne umiarkowane granice; atoli ten cel da się osiągnąć lepiej i racyonalniej przez obniżenie rachunkowych (t. zn. obliczonych z grubsza przy najprostszem, choć nieraz od prawdy dalekiem, założeniu równomiernego rozkładu) naprężeń ścinających dla płyt z żebrami.

Albowiem podczas gdy naprężenia ścinające są rozłożone równomiernie w poziomych przekrojach zwykłej belki prostokątnej, to u belek płytowych ma się rzecz inaczej i im ostrzejsze jest przejście od bocznej ściany żebra do spodniej ściany płyty (wklęsła krawędź belki), tembardziej nierównomiernie rozłoży się w tem miejscu odpowiadająca część siły ścinającej.

O ile zaś tego rodzaju przepisy mają na oku zapewnienie konstrukcyjnej jednolitości (Monolität) belki płytowej, to należy je raczej zastąpić ogólniejszymi i żądać przedewszystkiem, aby na współdziałanie płyty liczono tylko wówczas, gdy żebro wraz z płytą jest betonowane razem (bez przerw między betonowaniem żebra a betonowaniem płyty).

Zresztą nie ma się czego obawiać dysproporcyi między poprzecznymi wymiarami żebra a grubością płyty, jeżeli tylko sama płyta podlega należytemu obliczeniu.

osie symetryi prostokątnego pola płyty pomiędzy dwoma sąsiedniemi żebrami za osie spółrzędnych i przedstawiwszy rozkład naprężeń σ_y wzdłuż żeber, t. zn. dla $x = \pm \frac{a}{2}$ szeregiem trygonometrycznym

$$(206) \qquad (\sigma_y)_{x=\pm\frac{a}{2}} = \sum_n c_n \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

dowiedziemy łatwo, że funkcya naprężeń

$$(207) \qquad \varphi = \sum_n \frac{c_n}{n^2} \cdot \frac{1}{\mu_{an} - \lambda_{an}} \left| \mu^3 \frac{Ch\frac{nx}{\mu}}{Sh\frac{na}{2\mu}} - \lambda^3 \frac{Ch\frac{nx}{\lambda}}{Sh\frac{na}{2\lambda}} \right| \cos \frac{n\pi y}{b}$$

czyni zadość równaniu różniczkowemu (196), skoro λ i μ mają poprzednie znaczenie (z rów. 200), a dla skrócenia oznaczymy

$$\lambda_{an} = \lambda\, Cth \frac{na}{2\lambda}, \quad \mu_{an} = \mu\, Cth \frac{na}{2\mu}.$$

Różniczkowanie funkcyi φ daje następujące wyrażenia dla naprężeń

$$(208) \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_n c_n \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{\mu_{an} - \lambda_{an}} \left| \mu^3 \frac{Ch\frac{nx}{\mu}}{Sh\frac{na}{2\mu}} - \lambda^3 \frac{Ch\frac{nx}{\lambda}}{Sh\frac{na}{2\lambda}} \right| \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ \sigma_y &= \sum_n \frac{c_n}{\mu_{an} - \lambda_{an}} \left| \mu \frac{Ch\frac{nx}{\mu}}{Sh\frac{na}{2\mu}} - \lambda \frac{Ch\frac{nx}{\lambda}}{Sh\frac{na}{2\lambda}} \right| \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right.$$ [1]

[1] W przypadku $\mu = \lambda = \frac{b}{\pi}$ przybiera wyrażenie dla σ_y postać:

$$(208.\text{II}) \quad \sigma_y = \sum_{n=1,3,5,\ldots} 2c_n \frac{\left(Sh\frac{n\pi a}{2b} + \frac{n\pi a}{2b} Ch\frac{n\pi a}{2b}\right) Ch\frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} Sh\frac{n\pi a}{2b} Sh\frac{n\pi x}{b}}{Sh\frac{n\pi a}{b} + \frac{n\pi a}{b}} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$\tau = -\sum_n c_n \frac{\pi}{b} \frac{1}{\mu_{an} - \lambda_{an}} \left| \mu^2 \frac{Ch\frac{nx}{\mu}}{Sh\frac{na}{2\mu}} - \lambda^2 \frac{Ch\frac{nx}{\lambda}}{Sh\frac{na}{2\lambda}} \right| \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{208}$$

Jak widać, spełniają się warunki krańcowe: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ dla $y = \pm\frac{b}{2}$; tak samo przybiera σ_y dla $x = \pm\frac{a}{2}$ wartość (206) jak być powinno; natomiast dla $x = \pm\frac{a}{2}$ nie znikają σ_x i τ. Na podstawie tych samych rozważań, co przy traktowaniu szczególnego przypadku $a = \infty$, można drugie z rów. (208) uważać za dobre przybliżone rozwiązanie kwestyi rozkładu naprężeń σ_y, jakkolwiek odpowiadająca funkcya naprężeń nie wszystkie warunki krańcowe zadowala. Do wyznaczenia jednostronnie współdziałającej szerokości płyty c_y, służy teraz równanie:

$$c_y\,(\sigma_y)_{x=\pm\frac{a}{2}} = \int_0^{\frac{a}{2}} \sigma_y\,dx \tag{209}$$

Ponieważ $|\sigma_y| < |\sigma_y|_{x=\pm\frac{a}{2}}$ dla $0 < |x| < \frac{a}{2}$, więc z tego równania musi wypaść $c_y < \frac{a}{2}$; ale różnica $\frac{a}{2} - c_y$ zdąża przy zmniejszeniu odstępu żeber szybko do granicy zero, jak się zaraz pokaże. Po wstawieniu wyrażenia dla σ_y w równanie (209), otrzymamy:

$$c_y = \frac{\sum_n \frac{c_n}{n} \cdot \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu_{an} - \lambda_{an}} \cos\frac{n\pi}{b} y}{\sum_n c_n \cos\frac{n\pi}{b} y}\,. \tag{210}$$

W przypadku obciążenia, traktowanym w § 19, będą spółczynniki c_n proporcyonalne względem odpowiadających spółczynników wzoru (170) dla momentów, t. zn. względem wielkości:

$$\frac{(n_1)}{n^3}(1-\omega_n) = \frac{(n_1)}{n^3} \cdot \frac{\frac{2}{n} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}} + \frac{(n_2)}{(n_1)} \cdot \frac{q'}{q}}{\frac{B^*}{B_2} - 2c + \frac{2}{n} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta_{an} - \alpha_{an}}}\,.$$

Należałoby przeto wyznaczyć c z równania:

$$
(211)\qquad c_y = \frac{\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^4}\cdot\frac{\mu^2-\lambda^2}{\mu_{an}-\lambda_{an}}\cdot\frac{\dfrac{2}{n}\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}(n_1)\,q+(n_2)\,q'}{\dfrac{B^*}{B_2}-2c+\dfrac{2}{n}\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}}\cos\frac{n\pi}{b}y}{\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^3}\cdot\frac{\dfrac{2}{n}\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}(n_1)\,q+(n_2)\,q'}{\dfrac{B^*}{B_2}-2c+\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta_{an}-\alpha_{an}}}\cos\frac{n\pi}{b}y}
$$

W przypadku

$$
\mu=\lambda=\frac{b}{\pi}
$$

(kiedy jednocześnie jest $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_2$) należy tutaj zastąpić

$$
\frac{\mu^2-\lambda^2}{\mu_{an}-\lambda_{an}}
$$

wyrażeniem

$$
2\frac{b}{\pi}\cdot\frac{Ch\dfrac{n\pi a}{b}-1}{Sh\dfrac{n\pi a}{b}+\dfrac{n\pi a}{b}}
$$

(podobnie jak we wzorze 174.II). To wyrażenie można jeszcze napisać w postaci:

$$
\frac{2\dfrac{b}{\pi}}{\left(1+\dfrac{n\pi a}{2b}Cth\dfrac{n\pi a}{2b}\right)Cth\dfrac{n\pi a}{2b}-\dfrac{n\pi a}{2b}}
$$

W wyrażeniu (211) są oba szeregi bardzo silnie zbieżne, o ile obciążenie nie jest zbyt skupione. Zatrzymawszy tylko pierwszy wyraz w każdym z obu szeregów, mamy w pierwszem przybliżeniu:

$$
(211a)\qquad c_y = \sim c_y' = \frac{\mu^2-\lambda^2}{\mu\,Cth\dfrac{a}{2\mu}-\lambda\,Cth\dfrac{a}{2\lambda}},
$$

względnie przy $\lambda = \mu = \frac{b}{\pi}$:

$$(211b) \qquad c'_\nu = \frac{2b}{\pi} \frac{Ch\frac{\pi a}{b} - 1}{Sh\frac{\pi a}{b} + \frac{\pi a}{b}}$$

Przy $a = \infty$ przeistacza się równanie (211a) w $c'_\nu = \lambda + \mu$, przy bardzo małem a zbliża się c'_ν do granicy $\frac{a}{2}$, jak to widać z rozwinięcia:

$$c'_\nu = \frac{a}{2} - \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2 \dfrac{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2\mu}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{2\mu}\right)^4 + \dots}{1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2\mu}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{a}{2\mu}\right)^4 + \dots} - \lambda^2 . \dfrac{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2\mu}\right)^2 + \dots}{1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2\mu}\right)^2 + \dots}}$$

Z powiększeniem a rośnie stale i c_ν, jednakże coraz wolniej i zbliża się asymptotycznie do granicy $\lambda + \mu$ dla $a = \infty$. Przyjąwszy np. $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$ a więc $\lambda = \mu$, znajdziemy według (211b):

dla $a : b = 0{,}5$	0,75	1	2	3	4	∞
$c'_\nu : a = 0{,}495$	0,484	0,459	0,310	0,212	0,159	0
$c'_\nu : b = 0{,}247$	0,363	0,459	0,620	0,635	0,637	0,637

Według tego możemy się już zoryentować, kiedy mniej więcej staje się c_ν dostrzegalnie mniejszem od $\frac{a}{2}$. Ponieważ u płyt żel.-betonowych można z wystarczającem przybliżeniem przyjąć $\lambda = \mu$, więc dostrzegalnej różnicy między c_ν a $\frac{a}{2}$ należy się spodziewać dopiero przy $a > \frac{1}{2} b$, założywszy, że obciążenie jest rozłożone dość równomiernie.

Jeżeli przeto odległość żeber $a \leqq \frac{b}{2}$, to można w przypadku równomiernego obciążenia płyty lub żebra przyjąć $c_\nu = \frac{a}{2}$, a więc $c_1 = g + a$. Współdziałająca szerokość płyty c_v okazuje się w tych warunkach praktycznie niezależną od rozpiętości b i dopiero gdy $a > \frac{b}{2}$, uwydatnia się zależnośc c_v od b, która przechodzi powoli, przy bardzo wielkich wartościach a w prostą proporcyonalność.

Na tem wypadnie na razie poprzestać i odłożyć szczegółową dyskusyę wzoru dla c aż do chwili, kiedy stanie się możliwe porównanie z wynikami doświadczeń [1].

Na zakończenie niniejszego paragrafu zauważymy jeszcze, że, jak się zdaje, francuskie i rosyjskie przepisy żel.-betonowo są jedynemi, które prawie ogólnie zalecają brać w rachubę $c_v < \frac{a}{2}$ w rozpatrywanym przypadku. Te przepisy pozwalają mianowicie przyjąć

[1] Oprócz doświadczeń prof. Melana z r. 1910 (znanych niestety autorowi tylko z krótkiej wzmianki inż. Polivki w Beton u. Eisen z roku 1916) oraz interesujących doświadczeń prof. Dra Saliger'a R., „Versuche über die Verteilung einer Linienbelastung in einer Rippenplatte“, Arm. Beton, r. 1912, str. 361, nie napotkał autor dotąd prac doświadczalnych, któreby się nadawały do sprawdzenia wyników powyższych teoretycznych wywodów, a i spożytkowanie doświadczeń Saligera udaremnia zmienna grubość i zbyt mała szerokość płyty. Przytoczone powyżej doświadczenia „ad hoc“ Bacha i Grafa także nie dają się użyć do tego celu, z powodu zbyt małej szerokości płyty. Mimo to jednak te doświadczenia dostarczają dość ważnej podpory dla naszej teoryi, przez stwierdzenie pomiarami, że nawet u najszerszych badanych płyt (szerokość bez żebra 82 cm., rozpiętość 300 cm.) był ubytek ciśnienia od żebra ku brzegom zewnętrznym znikomo mały (bo niedostrzegalny). Według wywodów Eggenschwylera (w poprzednio cytowanej pracy) musiałby spadek naprężeń normalnych σ_y być w tych warunkach już bardzo wyraźnym i łatwym do zmierzenia, podczas gdy nasza teorya daje w przypadku równych żeber o odległości w świetle 82 cm. i rozpiętości $b = 300$ cm. ubytek tylko około $\frac{1}{6}\%$ [według wzoru (208. II) z wartościami spółczynników c_n, proporcyonalnemi względem odpowiadających wartości spółczynników wzoru (170) dla momentów zginających żebra]. Taki ubytek nie dał się oczywiście dostrzec przy doświadczeniach. Dopiero przy dwa razy większej szerokości płyty możnaby oczekiwać na pewno doświadczalnego stwierdzenia ubytku naprężeń na brzegach płyty.

W przyszłem doświadczalnem badaniu kwestyi współdziałania płyty należałoby stosować zrazu objekty z materyału równokierunkowego i podlegającego prawu Hooke'a (szkło, żelazo zlewne i t. p.), potem przejść do czystego betonu z uzbrojeniem tylko w żebrach, a dopiero na koniec badać uzbrojone na krzyż płyty z żebrami.

$c_v = \frac{a}{2}$ tylko wtedy, gdy odstęp żeber w świetle, t. j. a, jest mniejszy od $1^1/_2$-krotnej szerokości żebra g; zalecają zaś przyjmować przy większym odstępie żeber

$$c_v + \frac{g}{2} = \frac{3}{8}(a+g),$$

albo

$$c_v = \frac{3}{8}a - \frac{1}{8}g$$

z ograniczającym warunkiem dodatkowym

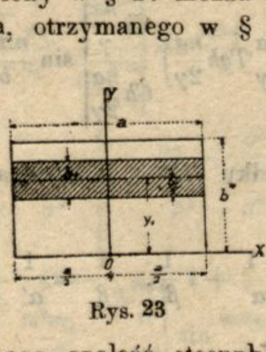
$$c_v + \frac{g}{2} \leqq \frac{b}{6}.$$

Chociaż podstawowa myśl tej reguły ma widocznie coś wspólnego z teoretycznymi wynikami niniejszej pracy, to z drugiej strony jest jasnem, że i ona, podobnie jak odpowiadające reguły innych urzędowych przepisów, posuwa niepotrzebnie ostrożność zbyt daleko.

VI. Uproszczone ścisłe rozwiązanie zagadnienia płyty prostokątnej dokoła swobodnie podpartej.

§ 23. Przypadek równomiernego obciążenia. Tablica dla praktycznych zastosowań w przypadku $\eta = 1$.

Sposób przedstawiony w § 17 można zastosować do tego, aby w miejsce rozwiązania, otrzymanego w § 11 w postaci szeregu



Rys. 23

podwójnie nieskończonego, znaleźć stosunkowo niewielkim trudem inne, wyrażone zwykłym szeregiem nieskończonym. Przyjmijmy równomierne obciążenie na prostokątnym pasku płyty, ograniczonym dwiema prostemi równoległemi do brzegów a (rys. 23). Przy użyciu rozwiązania (89.I) dla płyty nieskończenie długiej znajdujemy podobnie jak w zadaniu paragrafu 17, gdy oś X-ów schodzi się z jednym z brzegów a, a oś Y-ów oba te brzegi połowi:

$$(212.\mathrm{I})\quad \zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(n,b_1,y_1)}{n^5}\left|1-\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Ch\frac{na}{2\beta}}+\frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Ch\frac{na}{2\alpha}}\right|\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Tutaj oznacza y_1 rzędną linii środkowej obciążonego paska o szerokości b_1, a dla skrócenia wprowadzono, jak pierwej w § 12 symbol:

$$(n,b_1,y_1)=\sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b}\cdot\sin\frac{n\pi y_1}{b}.$$

Taką postać ma równanie powierzchni ugięcia dla przypadku I ($H^2>\bar{B}_1\bar{B}_2$).

W II-gim przypadku ($H^2=\bar{B}_1\bar{B}_2$, $\alpha=\beta=\gamma$) przekształca się to równanie na następujące:

$$(212.\mathrm{II})\quad \zeta=\frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(n,b_1,y_1)}{n^5}\left|1+\frac{nx}{2\gamma}\frac{Sh\frac{nx}{\gamma}}{Ch\frac{na}{2\gamma}}-\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{na}{4\gamma}Tgh\frac{na}{2\gamma}\right)\frac{Ch\frac{nx}{\gamma}}{Ch\frac{na}{2\gamma}}\right|\sin\frac{n\pi y}{b},$$

W III-im przypadku ($H^2<\bar{B}_1\bar{B}_2$) znajdujemy przez podstawienie:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha'}+i\frac{1}{\beta'},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha'}-i\frac{1}{\beta'}$$

we wzorze (212.I):

$$(212.\mathrm{III})\qquad \zeta=\frac{4\,qb^4}{\pi^5\,\overline{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(n,b_1,y_1)}{n^5}\left(1-A_n\,Ch\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}+\right.$$

$$\left.+B_n\,Sh\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}$$

ze skróconemi oznaczeniami:

$$(212\mathrm{a})\qquad\left\{\begin{aligned}A_n&=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\alpha'}{\beta'}\right)Sh\frac{na}{2\alpha'}\sin\frac{na}{2\beta'}+Ch\frac{na}{2\alpha'}\cos\frac{na}{2\beta'}}{Sh^2\frac{na}{2\alpha'}+\cos^2\frac{na}{2\beta'}}\\B_n&=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\alpha'}{\beta'}\right)Ch\frac{na}{2\alpha'}\cos\frac{na}{2\beta'}-Sh\frac{na}{2\alpha'}\sin\frac{na}{2\beta'}}{Sh^2\frac{na}{2\alpha'}+\cos^2\frac{na}{2\beta'}}\end{aligned}\right.$$

Mianownik tych wyrażeń da się jeszcze przedstawić w postaci:

$$Ch^2\frac{na}{2\alpha'}-\sin^2\frac{na}{2\beta'}=\frac{1}{2}\left(Ch\frac{na}{\alpha'}+\cos\frac{na}{\beta'}\right)$$

Dla momentów, sił poprzecznych i reakcyj podporowych otrzymujemy w I przypadku następujące wzory:

$$(213.\mathrm{I})\qquad\left\{\begin{aligned}M_1&=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(n\,b_1y_1)}{n^3}\left|\frac{1}{m_2}+\frac{\frac{b^2}{\pi^2}-\frac{\beta^2}{m_2}}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Ch\frac{na}{2\beta}}-\right.\\&\left.-\frac{\frac{b^2}{\pi^2}-\frac{\alpha^2}{m_2}}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Ch\frac{na}{2\alpha}}\right|\sin\frac{n\pi y}{b},\\M_2&=\frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_{n}\frac{(n\,b_1y_1)}{n^3}\left|1-\frac{\beta^2-\frac{b^2}{\pi^2m_1}}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Ch\frac{na}{2\beta}}+\right.\\&\left.+\frac{\alpha^2-\frac{b^2}{\pi^2m_1}}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Ch\frac{na}{2\alpha}}\right|\sin\frac{n\pi y}{b},\end{aligned}\right.$$

$$(213.\mathrm{I})\quad \begin{cases} D=\dfrac{4\,qb^2}{\pi^3}\cdot\dfrac{2C}{\bar{B}_2}\sum_n\dfrac{(n\,b_1y_1)}{n^3}\cdot\dfrac{b}{\pi\,(\beta^2-\alpha^2)}\left|\beta\dfrac{Sh\dfrac{nx}{\beta}}{Ch\dfrac{na}{2\beta}}-\right.\\[2ex] \left.-\alpha\dfrac{Sh\dfrac{nx}{\alpha}}{Ch\dfrac{na}{2\alpha}}\right|\cos\dfrac{n\pi y}{b}.\end{cases}$$

$$(214.\mathrm{I})\quad \begin{cases} V_1=-\dfrac{4qb^2}{\pi^3}\sum_n\dfrac{(nb_1y_1)}{n^2}\left|\dfrac{\eta_1}{2\beta}\cdot\dfrac{Sh\dfrac{nx}{\beta}}{Ch\dfrac{na}{2\beta}}+\dfrac{\varepsilon_1}{2\alpha}\cdot\dfrac{Sh\dfrac{nx}{\alpha}}{Ch\dfrac{na}{2\alpha}}\right|\sin\dfrac{n\pi y}{b},\\[2ex] V_2=\dfrac{4qb}{\pi^2}\sum_n\dfrac{(n\,b_1y_1)}{n^2}\left|1+\varepsilon_2\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\alpha}}{Ch\dfrac{na}{2\alpha}}-\eta_2\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\beta}}{Ch\dfrac{na}{2\beta}}\right|\cos\dfrac{n\pi y}{b}\end{cases}$$

Pomocnicze wielkości ε_1, η_1, ε_2, η_2 mają tutaj to samo znaczenie, co w równaniach (93.I).

$$(215.\mathrm{I})\quad \begin{cases} (R_1)_{x=\frac{a}{2}}=-\dfrac{4bq^2}{\pi^3}\sum\dfrac{(n\,b_1\,y_1)}{n^2}\left(\dfrac{\varepsilon'_1}{2\alpha}Tgh\dfrac{na}{2\alpha}+\dfrac{\eta'_1}{2\beta}Tgh\dfrac{na}{2\beta}\right)\sin\dfrac{n\pi y}{b}\\[2ex] (R_2)_{y=0}=-\dfrac{4qb}{\pi^2}\sum\dfrac{(n\,b_1\,y_1)}{n^2}\left|1+\varepsilon'_2\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\alpha}}{Ch\dfrac{na}{2\alpha}}-\eta'_2\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\beta}}{Ch\dfrac{na}{2\beta}}\right|,\\[2ex] (R_2)_{y=b}=-\dfrac{4qb}{\pi^2}\sum\dfrac{(-1)^{n-1}(n\,b_1y_1)}{n^2}\left|1+\varepsilon'_2\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\alpha}}{Ch\dfrac{na}{2\alpha}}-\eta'_2\dfrac{Ch\dfrac{nx}{\beta}}{Ch\dfrac{na}{2\beta}}\right|\end{cases}$$

Wchodzące w powyższe równania parametry ε'_1, η'_1, ε'_2, η'_2 mają znowu dawniejsze znaczenie z § 14 (rów. 94.I):

(216.I)

$$\hat{R}_{\frac{a}{2},b}=\hat{R}_{-\frac{a}{2},0}=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{4C}{\bar{B}_2}\sum\frac{(n\,b_1y_1)}{n^3}\cdot\frac{b}{\pi}\cdot\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\beta\,Tgh\frac{na}{2\beta}-\alpha\,Tgh\frac{na}{2\alpha}\right),$$

$$(216.\mathrm{I})\quad \hat{R}_{\frac{a}{2},b}=\hat{R}_{-\frac{a}{2},b}=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{4C}{\bar{B}_2}\sum\frac{(-1)^{n-1}(n\,b_1y_1)}{n^3}\cdot\frac{b}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\beta\,Tgh\frac{na}{2\beta}-\alpha Tgh\frac{na}{2\alpha}\right);$$

$$(217.\mathrm{I})\quad\left|\begin{aligned}&(\bar{R}_1)_{x=\pm\frac{a}{2}}=-\frac{4qb^3}{\pi^4}\sum\frac{[1+(-1)^{n-1}](nb_1y_1)}{n^3}\left(\frac{\varepsilon'_1}{2\alpha}Tgh\frac{na}{2\alpha}+\right.\\&\qquad\left.+\frac{\eta'_1}{2\beta}Tgh\frac{na}{2\beta}\right),\\&(\bar{R}_2)_{y=0}=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum\frac{(n\,b_1y_1)}{n^2}\left(a+\frac{2\alpha}{n}\varepsilon'_2\,Tgh\frac{na}{2\alpha}-\right.\\&\qquad\left.-\frac{2\beta}{n}\eta'_2\,Tgh\frac{na}{2\beta}\right),\\&(\bar{R}_2)_{y=b}=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(-1)^{n-1}(n\,b_1y_1)}{n^2}\left(a+\frac{2\alpha}{n}\varepsilon'_2\,Tgh\frac{na}{2\alpha}-\right.\\&\qquad\left.-\frac{2\beta}{n}\eta'_2\,Tgh\frac{na}{2\beta}\right)\end{aligned}\right.$$

Wzór dla całkowitej reakcyi brzegów b można jeszcze napisać w następującej prostszej postaci:

$$(217.\mathrm{Ia})\quad \bar{R}_1=-\frac{4qb^3}{\pi^4}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{(n\,b_1y_1)}{n^3}\left(\frac{\varepsilon'_1}{\alpha}Tgh\frac{na}{2\alpha}+\frac{\eta'_1}{\beta}Tgh\frac{na}{2\beta}\right)$$

Do sprawdzenia ostatnich wzorów można użyć oczywistego warunku równowagi sił zewnętrznych:

$$2\bar{R}_1+(\bar{R}_2)_{y=0}+(\bar{R}_2)_{y=b}+2\hat{R}_{\frac{a}{2},0}+2\hat{R}_{\frac{a}{2},b}+q\,ab_1=0$$

Jakoż zważywszy, że z powodu znaczenia pomocniczych wielkości α i β (rów. 70) zachodzi związek

$$\frac{\alpha^2\pi^2}{b^2}\bar{B}_2+\frac{b^2}{\alpha^2\pi^2}\bar{B}_1=2H=\frac{\bar{B}_1}{m_2}+\frac{\bar{B}_2}{m_1}+4C,$$

przekonywamy się łatwo, że powyższemu równaniu warunkowemu czynią istotnie zadość wyrażenia (216.I) i (217.I).

Otrzymane wzory łatwo zastosować do praktycznie ważnego przypadku szczególnego, kiedy równomierne obciążenie pokrywa całą płytę. W tym celu trzeba tylko podstawić $y_1=\frac{b}{2}$ i $b_1=b$.

Wskutek tego będzie $(n b_1 y_1) = \left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2$, czyli znika dla parzystego n, a dla nieparzystego n przybiera wartość 1. Kładąc przeto we wzorach

$$(n b_1 y_1) = 1 \quad \text{i} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

dochodzimy do odpowiadających wzorów dla równomiernego całkowitego obciążenia.

Przejdziemy teraz do formuł II-go przypadku. Znalezione równanie powierzchni ugięcia (212.II) różni się od odpowiadającego równania dla płyty równokierunkowej tylko tem, że tutaj mamy $\overline{B}_2$ zamiast $\overline{B}$ i $\gamma = \frac{b}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}$ zamiast $\frac{b}{\pi}$. Zastąpiwszy odwrotnie w równaniu dla płyty równokierunkowej wielkości a, x, $\overline{B}$, odpowiednio przez

$$a\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}, \quad x\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}} \quad \text{i} \quad \overline{B}_2$$

uzyskamy napowrót postać (212.II). Rolę stosunku $a:b$ gra teraz sprowadzony stosunek boków

$$\varepsilon = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}.$$

Wyrażenia dla wielkości statycznych przedstawiają się zatem w następującej ogólnej postaci, gdy oznaczymy przez μ_{11}, $\mu_{22}, \ldots$ te bezwymiarowe funkcye zmiennych $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ i ε, które nie zmieniają swej wartości przy przejściu do płyty nierównokierunkowej (w rozpatrywanym przypadku: $H^2 = \overline{B}_1\overline{B}_2$):

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \left(\mu_{11}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}} + \mu_{22}\frac{1}{m_2}\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\right) qb^2 = \left(\mu_{11} + \mu_{22}\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\right)\frac{qa^2}{\varepsilon^2}, \\ M_2 &= \left(\mu_{22} + \mu_{11}\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}\right) qb^2, \\ D &= \mu_{12}\frac{2C}{\overline{B}_2}\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}\cdot qb^2 = \mu_{12}\frac{2C}{\overline{B}_1}\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\cdot\frac{qa^2}{\varepsilon^2}, \end{aligned} \right.$$

$$
\text{(I)}\quad \left\{ \begin{aligned}
V_1 &= \left[\mu_{111} + \mu_{122}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{2C}{\bar{B}_1}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right]\frac{qa}{\varepsilon} = \left[\mu_{111}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} + \right. \\
&\quad \left. + \mu_{122}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{2C}{\bar{B}_1}\right)\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1^3}{\bar{B}_2^3}}\right] qb, \\
V_2 &= \left[\mu_{222} + \mu_{112}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right] qb.
\end{aligned} \right.
$$

Funkcye

$$\mu_{11},\ \mu_{22},\ \mu_{12},\ \mu_{111},\ \mu_{222},\ \mu_{112},\ \mu_{122},$$

są tutaj odpowiednio proporcyonalne względem ilorazów różniczkowych:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3},\ \frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3\zeta}{\partial x\,\partial y^2},$$

co tłumaczy użyte wskaźniki.

Dla zadania zajmującego nas obecnie znajdziemy łatwo przez różniczkowanie równania (212.II):

$$
\text{(213.II)}\quad \left\{ \begin{aligned}
\mu_{11} &= \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(n\,b_1 y_1)}{n^2}\,\frac{\frac{\pi\varepsilon}{2}\,Tgh\frac{n\pi\varepsilon}{2}\,Ch\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a} - \frac{\pi\varepsilon x}{a}Sh\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\sin\frac{n\pi y}{b}, \\
\mu_{22} &= \frac{4}{\pi^3}\sum\frac{(n b_1 y_1)}{n^3}\left\{1 + \frac{n\pi\varepsilon}{2}\cdot\frac{x}{a}\,\frac{Sh\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}} - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{n\pi\varepsilon}{4}\,Tgh\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)\frac{Ch\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\}\sin\frac{n\pi y}{b}, \\
\mu_{12} &= \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(n b_1 y_1)}{n^2}\left\{\left(\frac{1}{n} + \frac{\pi\varepsilon}{2}\,Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)\frac{Sh\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}} - \right. \\
&\quad \left. - \pi\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{Ch\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\}\cos\frac{n\pi y}{b};
\end{aligned} \right.
$$

$$
(214.\mathrm{II})\left\{\begin{aligned}
\mu_{111} &= -\frac{2}{\pi^2}\sum\frac{(n b_1 y_1)}{n}\left\{\pi\varepsilon\frac{x}{a}\frac{Ch\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}+\right.\\
&\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{\pi\varepsilon}{2}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)\frac{Sh\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\}\sin\frac{n\pi y}{b},\\
u_{122} &= \frac{2}{\pi^2}\sum\frac{(n b_1 y_1)}{n}\left\{\pi\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{Ch\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}-\right.\\
&\left.-\left(\frac{1}{n}+\frac{\pi\varepsilon}{2}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)\frac{Sh\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\}\sin\frac{n\pi y}{b},\\
u_{222} &= \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(n b_1 y_1)}{n^2}\left\{1+\frac{n\pi\varepsilon}{2}\cdot\frac{x}{a}\frac{Sh\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}-\right.\\
&\left.-\left(1+\frac{n\pi\varepsilon}{4}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)\frac{Ch\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\}\cos\frac{n\pi y}{b},\\
\mu_{112} &= \frac{2}{\pi^2}\sum\frac{(n b_1 y_1)}{n}\cdot\frac{\frac{\pi\varepsilon}{2}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}Ch\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}-\pi\varepsilon\frac{x}{a}Sh\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\cos\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}\right.
$$

Do obliczenia całkowitych reakcyj każdego z prostych brzegów płyty będą jeszcze potrzebne następujące całki:

$$
(217.\mathrm{IIa})\left\{\begin{aligned}
\bar{\mu}_{111} &= \int_0^b \mu_{111}\,dy = -\frac{2}{\pi^3}b\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^2}\left\{\pi\varepsilon\frac{x}{a}\frac{Ch\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}+\right.\\
&\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{\pi\varepsilon}{2}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)\frac{Sh\, n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\},
\end{aligned}\right.
$$

$$(217.\mathrm{IIa})\left\{\begin{aligned}
&\bar{\mu}_{122}=\int_0^b \mu_{122}dy=\frac{2}{\pi^2}b\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^2}\left\{\pi\varepsilon\frac{x}{a}\frac{Ch\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}-\right.\\
&\left.-\left(\frac{1}{n}+\frac{\pi\varepsilon}{2}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)\frac{Sh\,n\pi\varepsilon\frac{x}{a}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\},\\
&\bar{\mu}_{222}=\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\mu_{222}dx=\frac{2}{\pi^2}a\sum\frac{(n,b_1y_1)}{n^2}\left[3-\frac{6}{n\pi\varepsilon}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}-\right.\\
&\left.-Th^2\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right]\cos\frac{n\pi y}{b},\\
&\bar{\mu}_{112}=\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\mu_{112}\,dx=\frac{2}{\pi^2}a\sum\frac{(n\,b_1y_1)}{n^2}\left[-1+\frac{2}{n\pi\varepsilon}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}+\right.\\
&\left.+Th^2\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}\right.$$

Jak już powyżej zauważyliśmy, należy w przypadku całkowitego równomiernego obciążenia podstawić w powyższych wzorach:

$$(n\,b_1y_1)=1 \quad \text{i} \quad n=1,3,5,\ldots$$

Dla środka płyty otrzymujemy w tym przypadku:

$$(212.\mathrm{IIa})\quad f=(\zeta)_{0,\frac{b}{2}}=\frac{qb^4}{\bar{B}_2}\cdot\frac{4}{\pi^5}\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5}\left\{1-\frac{1+\frac{n\pi\varepsilon}{4}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\}=\psi\cdot\frac{qb^4}{\bar{B}_2}$$

$$(213.\mathrm{IIa})\quad \mu_{11}=\frac{\varepsilon}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\cdot\frac{Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}},$$

$$(213.\text{IIa}) \qquad \mu_{22} = \frac{4}{\pi^3}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\left\{1 - \frac{1+\frac{n\pi\varepsilon}{4}\,Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{4}{\pi^3}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\cdot\frac{1+\frac{n\pi\varepsilon}{4}\,Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}$$

Stąd wynika związek:

$$(213^*) \qquad \mu_{11} + \mu_{22} = \frac{1}{8} - \frac{4}{\pi^3}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\cdot\frac{1}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}},$$

który ułatwia obliczenie liczbowych wartości.

W środku brzegu $x = \frac{a}{2}$, t. j. w punkcie $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ mają funkcye μ_{111} i μ_{122} następujące wartości:

$$/\mu_{111}{}_{x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2}} = -\frac{\varepsilon}{\pi}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\left\{\frac{1}{Ch^2\frac{n\pi\varepsilon}{2}} + \frac{Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\},$$

$$/\mu_{122}{}_{x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2}} = -\frac{\varepsilon}{\pi}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\left\{\frac{Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{\frac{n\pi\varepsilon}{2}} - \frac{1}{Ch^2\frac{n\pi\varepsilon}{2}}\right\}.$$

Między niemi zachodzi związek:

$$(214.\text{IIa}) \qquad /(\mu_{111}+\mu_{122})_{x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2}} = -\frac{4}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\,Th\frac{n\pi\varepsilon}{2},$$

Dalej znajdujemy

$$/\mu_{222}{}_{x=0,\, y=0} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum \frac{1}{n^2}\,\frac{1+\frac{n\pi\varepsilon}{4}\,Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}},$$

$$/\mu_{112}{}_{x=0,\, y=0} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sum \frac{1}{n}\cdot\frac{Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}},$$

ze związkiem

$$(214.\text{IIa})\qquad \Big/_{x=0,\,y=0}(\mu_{222}+\mu_{112})=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{Ch\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}},$$

tudzież

$$(217.\text{II})\left\{\begin{aligned}
&\bar{\mu}_{111}=\Big/_{x=\frac{a}{2}}\int_0^b\mu_{111}dy=-\frac{2b\varepsilon}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\left|\frac{1}{Ch^2\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}+\frac{Th\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}{\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}\right|,\\
&\bar{\mu}_{122}=\Big/_{x=\frac{a}{2}}\int_0^b\mu_{122}dy=-\frac{2b\varepsilon}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\left|\frac{Th\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}{\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}-\frac{1}{Ch^2\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}\right|,\\
&\bar{\mu}_{111}+\bar{\mu}_{122}=-\frac{8b}{\pi^3}\sum\frac{1}{n^3}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2};\\
&\bar{\mu}_{222}=\Big/_{y=0}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\mu_{222}dx=\frac{a}{2}-\frac{2a}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\left|3\frac{Th\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}{\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}-\frac{1}{Ch^2\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}\right|,\\
&\bar{\mu}_{112}=\Big/_{y=0}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\mu_{112}dx=\frac{2a}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\left|\frac{Th\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}{\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}-\frac{1}{Ch^2\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}\right|,\\
&\bar{\mu}_{222}+\bar{\mu}_{112}=\frac{a}{2}-\frac{8}{\pi^3}\cdot\frac{a}{\varepsilon}\sum\frac{1}{n^3}Th\frac{n\pi\varepsilon}{2}.
\end{aligned}\right.$$

W rogach płyty jest

$$(216.\text{Ia})\qquad \Big/_{x=\frac{a}{2},\,y=0}\mu_{12}=\frac{\varepsilon}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\left|\frac{Th\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}{\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}-\frac{1}{Ch^2\dfrac{n\pi\varepsilon}{2}}\right|$$

Podług powyższych wzorów obliczono tablicę umieszczoną poniżej. Liczby tablicy będą w przybliżeniu ważne także w przypadkach I i III, o ile różnica $[H^2-\bar{B}_1\bar{B}_2]$ nie staje się zbyt wielką. Tablica pozwala wyrokować o stopniu dokładności formuł przybliżonych z § 10; podług niej można też sporządzić specyalne tablice

Tablica do obliczenia

ε	strzałki ugięcia f w środku płyty	krańcowych wartości momentów zgięcia M_1 i M_2 w środku płyty		największych wartości sił poprzecznych V_1; V_2 i reakcyj brzegów R_1, R_2				całkowitych reakcyj				narożnych reakcyj $\bar{R}$
				w środku brzegu $b_1 (x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2})$		w środku brzegu $a (x = 0, y = 0)$		$\bar{R}_1$ brzegów b,		$\bar{R}_2$ brzegów a,		
	dla podanej w pierwszej rubryce wartości sprowadzonego stosunku boków $\varepsilon = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \geqq 1$ płyty prostokątnej równomiernie całkowicie obciążonej i dokoła swobodnie podpartej w przypadku $H^2 = \bar{B}_1 \bar{B}_2$.											
	ψ_{00}	μ_{11}	μ_{22}	$-\mu_{111}$	$-\mu_{122}$	μ_{222}	μ_{112}	$-\frac{\bar{\mu}_{111}}{b}$	$-\frac{\bar{\mu}_{122}}{b}$	$\frac{\bar{\mu}_{222}}{a}$	$\frac{\bar{\mu}_{112}}{a}$	μ_{12} dla
		dla $x = 0, y = \frac{b}{2}$		(dla $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$)		dla $x = 0, y = 0$		dla $x = \frac{a}{2}$		dla $y = 0$		$x = \frac{a}{2}$, $y = 0$
1	0,00406	0,0368	0,0368	0,219	0,119	0,219	0,119	0,157	0,093	0,157	0,093	0,0466
1,1	0,00485	0,0361	0,0445	0,215	0,131	0,247	0.113	0,155	0,101	0,176	0,092	0,0506
1,2	0,00564	0,0344	0,0523	0,210	0,143	0,273	0,107	0,151	0,109	0,193	0,091	0,0544
1,3	0,00638	0,0325	0 0595	0.205	0.152	0,296	0,101	0,148	0,115	0,210	0,088	0,0572
1,4	0,00705	0,0309	0,0661	0,202	0,159	0,316	0,095	0,146	0,119	0,226	0 085	0,0594
1,5	0,00772	0,0281	0,0728	0,199	0,164	0,335	0,089	0,145	0,122	0,241	0,081	0,0611
1,6	0,00830	0,0258	0,0784	0,196	0,169	0,354	0,081	0,143	0,125	0,254	0,078	0,0627
1,7	0,00883	0,0235	0,0838	0,194	0,172	0,370	0,074	0,142	0,127	0,267	0,075	0,0637
1,8	0,00931	0,0214	0,0884	0,193	0,175	0,385	0,067	0,141	0,129	0,279	0,072	0,0645
1,9	0,00974	0,0193	0,0927	0,191	0,178	0,398	0,061	0,139	0,131	0,289	0,069	0,0655
2	0,01013	0,0175	0,0965	0,189	0,181	0,410	0,055	0,138	0,133	0,299	0,066	0,0663
2,5	0,01150	0,0100	0,1100	0,188	0,183	0,453	0,031	0.137	0,134	0,338	0,054	0,0670
3	0,01223	0,0052	0,1173	0,187	0,185	0,476	0,017	0,136	0,135	0,365	0,045	0,0675
4	0,01282	0,0015	0,1231	0.186	0,186	0,492	0.006	0,136	0,136	0,398	0,034	0,0678
5	0,01297	0,0004	0,1245	0,186	0,186	0,499	0,001	0,136	0,136	0,419	0,027	0,0679
∞	0,01302	0,0000	0,1250	0,186	0,186	0,500	0,000	0,136	0,136	0,500	0,000	0,0679

Obliczenie dokonywa się zapomocą następujących wzorów:

$$\bar{R}=(\mu_{12})_{\frac{a}{2},0}\,\frac{4C}{\bar{B}_2}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot qb^2=(\mu_{12})_{\frac{a}{2},0}\,\frac{4C}{\bar{B}_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot\frac{qab}{\varepsilon}$$

$$\bar{R}_2=-\left[\frac{\bar{\mu}_{222}}{a}+\frac{\bar{\mu}_{112}}{a}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right]_{y=0} qab$$

$$\bar{R}_1=\left[\frac{\bar{\mu}_{111}}{b}+\frac{\bar{\mu}_{122}}{b}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right]_{x=\frac{a}{2}}\frac{qab}{\varepsilon}$$

$$(R_2)_{max}=-\left[\mu_{222}+\mu_{112}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right]_{x=0,\,y=0} qb$$

Odpowiadające wyrażenia dla $(V_1)_{max}$ i $(V_2)_{max}$ różnią się od podanych obok (pomijając znaki) tylko tem, że w nich jest $2C$ zamiast $4C$

$$(R_1)_{max}=\left[\mu_{111}+\mu_{122}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right]\frac{qa}{\varepsilon}\Bigg|_{x=\frac{a}{2},\,y=\frac{b}{2}}$$

$$M_2=\left(\mu_{22}+\mu_{11}\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right)qb^2$$

$$M_1=\left(\mu_{11}+\mu_{22}\frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right)\frac{qa^2}{\varepsilon^2}.$$

$$f=\psi_{00}\,\frac{qb^4}{\bar{B}_2}.$$

do praktycznego użytku, skoro z doświadczeń wyznaczymy wartości m_1 i m_2, oraz związek między wielkościami H (względnie C), $\bar{B}_1$ i $\bar{B}_2$.

Tak np. znajdujemy dla płyty o stosunku boków $a:b=1,3$, obliczonej w przybliżeniu w § 10, następujące dokładne wartości (jeżeli przyjmiemy, jak tam, $\bar{B}_2:\bar{B}_1=1,056$, a więc $\varepsilon=1,3\sqrt[4]{1,056}=$ $=1,318$ i $m_1=m_2=6$):

$$\psi=0,0065,\quad M_{2max}=0,066\,qb^2,\quad M_{1max}=0,041\,qb^2$$

Z wzorów przybliżonych (27) i (29) wypada natomiast:

$$\psi=0,0067,\quad M_{2max}=0,072\,qb^2,\quad M_{1max}=0,047\,qb^2,$$

t. zn. okrągło o

$$3\%,\quad 9\%,\quad 15\%$$

za wiele. Stopień przybliżenia można przeto uważać za zupełnie zadowalający tylko przy obliczeniu ugięć. Dla momentów są błędy wzorów przybliżonych już dość znaczne, ale przecież przy praktycznych obliczeniach wytrzymałości dopuszczalne, ponieważ idą na korzyść pewności. Atoli tego nie możnaby powiedzieć o rozkładzie reakcyj podporowych, wobec czego wypada je wyznaczać zawsze na podstawie dokładnego rozwiązania.

Już z analitycznych wywodów dla przypadku $a=\infty$ (§ 14) można było widzieć, że wartość M_1 w środku płyty nie musi być największą dla całej płyty. W przypadku bardzo wielkiej długości płyty znaleźliśmy mianowicie, że na jej osi podłużnej w odległości

$$d=\sim\frac{b}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}+\frac{1}{m_2}}{\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}-\frac{1}{m_2}},$$

od krótkiego boku b występuje maximum momentu zginającego M_1, które może być znacznie większe od krańcowej wartości w środku płyty. Z powyższego rozwiązania dla ogólniejszego przypadku dowolnego ε wynika teraz, że w miarę zmniejszania się ε, miejsce największej wartości momentu $M'_1=\mu_{11}\frac{qa^2}{\varepsilon^2}$ oddala się powoli od krótkiego boku b, a następnie zbliża się szybko do środka płyty osiągając go przy wartości $\varepsilon = \sim 1{,}3$. Dla $\frac{1}{1{,}3} < \varepsilon < 1{,}3$ zachodzi największa wartość M_1' w środku płyty. Wszystkim innym wartościom ε (a więc większym od 1,3, lub mniejszym od 1 : 1,3 nie odpowiada w środku płyty maximum, lecz minimum momentu M_1'.

Podobnież będzie się przedstawiać rzecz i dla rzeczywistego momentu zgięcia M_1, jednakowoż odpowiadające rachunki są o wiele uciążliwsze, wobec czego przeprowadzono obliczenie przybliżone tylko dla „momentu zastępczego“ M_1', jako głównej części rzeczywistego momentu M_1. Według tego obliczenia, miejsce największego momentu M_1' (a zarazem miejsce największej wartości krzywizny $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ w środkowym podłużnym przekroju płyty) porusza się w przypadku $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$ między dwoma punktami, odległemi od krótkiego boku o

$$d = \sim 0{,}32\, b \quad \text{i} \quad d = \sim 0{,}65\, b,$$

skoro stosunek ε zmienia się od wartości ∞ do 1,3. Dla $\frac{1}{1{,}3} < \varepsilon < 1{,}3$ wynosi ta odległość $\frac{a}{2}$.

Prócz tego znajdujemy za pomocą wielkiej liczbowej tablicy niniejszego §-u, oraz małej tablicy na końcu § 14, przy założeniu $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$, $m_1 = m_2 = 6$ (dla betonu):

dla	$\varepsilon =$	1	1,1	1,2	1,3	∞
	$\frac{M_{1max}}{qb^2} =$	$\frac{1}{23{,}3}$	$\frac{1}{23{,}0}$	$\frac{1}{23{,}2}$	$\frac{1}{23{,}6}$	$\frac{1}{28{,}7}$
		(0,0429)	(0,0435)	(0,0431)	(0,0423)	(0,0348)

Największa wartość M_1 zmienia się przeto w dość ciasnych granicach, gdy przy danej szerokości płyty b rośnie jej długość a od $a = b$ do $a = \infty$. Wartościami krańcowemi są:

$$M_1 = \frac{1}{23{,}0}\, qb^2 \quad \text{dla} \quad a = 1{,}1\, b \quad \text{i}$$

$$M_1 = \frac{1}{28{,}7}\, qb^2 \quad \text{dla} \quad a = \infty \ (\text{praktycznie dla } a \gtreqless 3b)$$

O prawdziwości powyższych wyników łatwo się przekonać na podstawie wyrażenia dla μ_{111} (rów. 214.II). To wyrażenie jest proporcyonalne względem ilorazu różniczkowego $\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}$, a jego znak rozstrzyga o tem, czy krzywizna $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ (a zarazem M_1') rośnie, czy też maleje. Dla $y = \frac{b}{2}$, t. zn. na podłużnej osi płyty przybiera to wyrażenie przy całkowitem obciążeniu i dla bardzo małych wartości x postać:

$$\mu_{111} = -\frac{2}{\pi^2}\frac{\pi\varepsilon x}{a}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{2-\frac{n\pi\varepsilon}{2}Tgh\frac{n\pi\varepsilon}{2}}{Ch\frac{n\pi\varepsilon}{2}}$$

i staje się widocznie zerem dla $x=0$. Dla $x>0$ wypadają zeń ujemne wartości μ_{111}, dopóki ε jest mniejsze od $\varepsilon_k = \sim 1{,}3$. Wtedy odpowiada wartości $x=0$ maximum $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$, a zarazem osiąga M_1' największość w środku płyty. Dla $\varepsilon > \varepsilon_k$ staje się μ_{111} dodatniem, krzywizna $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ rośnie przeto z początku z odległością od środka płyty, aby z boku osiągnąć maximum.

§ 24. Przypadek ciężaru skupionego w dowolnym punkcie płyty.[1]

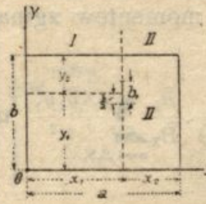
Ciężar skupiony P w punkcie $(x_1 y_1)$ płyty będziemy pojmować jako granicę liniowego poprzecznego obciążenia $q'b_1$ (rys. 24), gdy b_1 maleje a jednocześnie q' rośnie nieskończenie tak, że

$$\lim_{b_1=0,\ q'=\infty} q'b_1 = P$$

[1] W przytoczonych we wstępie licznych pracach poświęconych teoryi płyt prostokątnych z materyału równokierunkowego zajmowano się tylko szczególnym przypadkiem obciążenia skupionego w **środku** płyty, a mimo to otrzymywano wzory bez porównania zawilsze od tych, jakie wynikają z ogólnych rozwiązań niniejszego paragrafu, po podstawieniu

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = \bar{B}, \quad m_1 = m_2 = m \text{ itd.}$$

pozostaje skończonem. Przy użyciu rozwiązania (84.I) w (§ 13, ust. a) dla płyty nieskończenie długiej znajdujemy za pomocą metody podanej w § 17 następujące równania powierzchni ugięcia,



Rys. 24.

jeżeli brzegi płyty, schodzące się w jednym rogu obierzemy za osie spółrzędnych i oznaczymy $a - x_1 = x_2$:

$$
(218.\mathrm{I})^{1}\quad
\left\{
\begin{aligned}
\zeta_{I} &= \frac{4q'b^4}{\pi^5 \bar{B}_2(\beta^2-\alpha^2)} \sum_{n=1,2,3\ldots} \frac{(nb_1y_1)}{n^4} \left| \beta \frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}} Sh\frac{nx}{\beta} - \right. \\
&\left. - \alpha \frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}} Sh\frac{nx}{\alpha} \right| \sin\frac{n\pi y}{b}, \\
\zeta_{II} &= \frac{4q'b^4}{\pi^5 \bar{B}_2(\beta^2-\alpha^2)} \sum_{n=1,2,3\ldots} \frac{(nb_1y_1)}{n^4} \left\{ \beta \frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}} Sh\frac{n(a-x)}{\beta} - \right. \\
&\left. - \alpha \frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}} Sh\frac{n(a-x)}{\alpha} \right\} \sin\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}
\right.
$$

Czytelnik zechce także porównać pierwszą moją próbę przybliżonego rozwiązania dla przypadku obciążenia mimośrodkowego płyty równokierunkowej, ogłoszoną w pracy: „O wytrzymałości płyty prostokątnej", Przegląd techniczny 1914.

[1] Wynik przedstawiony na posiedzeniu paryskiej Akademii 1 marca 1920 w nocie p. t. Théorie rationelle des hourdis en béton armé...

Wszystkie wielkości odnoszące się do obszaru I-go, t. j. dla $x \leqq x_1$ i do obszaru II, t. j. dla $x \geqq x_1$, oznaczać będziemy w dalszym ciągu wskaźnikami I i II.

Ze znalezionych równań powierzchni ugięcia wypływają następujące wyrażenia dla momentów zginających i t. d.:

$$(219.\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} M_1^{I} &= \frac{4q'b^2}{\pi^3(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left\{\alpha\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}Sh\frac{nx}{\alpha}-\right.\\ &\left.-\beta\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\sin\frac{n\pi y}{b},\\ M_1^{II} &= \frac{4q'b^2}{\pi^3(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left\{\alpha\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}Sh\frac{n(a-x)}{\alpha}-\right.\\ &\left.-\beta\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}Sh\frac{n(a-x)}{\beta}\right\}\sin\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\right.$$

$$(220.\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} M_2^{I} &= \frac{4q'b^2}{\pi^3(\beta^2-\alpha^2)}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left\{\alpha\left(\frac{1}{\pi^2m_1}\cdot\frac{b^2}{\alpha^2}-1\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}Sh\frac{nx}{\alpha}-\right.\\ &\left.-\beta\left(\frac{1}{\pi^2m_1}\cdot\frac{b^2}{\beta^2}-1\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\sin\frac{n\pi y}{b},\\ M_2^{II} &= \frac{4q'b^2}{\pi^3(\beta^2-\alpha^2)}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left\{\alpha\left(\frac{1}{\pi^2m_1}\cdot\frac{b^2}{\alpha^2}-1\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}Sh\frac{n(a-x)}{\alpha}-\right.\\ &\left.-\beta\left(\frac{1}{\pi^2m_1}\cdot\frac{b^2}{\beta^2}-1\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}Sh\frac{n(a-x)}{\beta}\right\}\sin\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\right.$$

$$
(221.\mathrm{I})\begin{cases}
D^{I}=\dfrac{4q'b^{3}}{\pi^{4}(\beta^{2}-\alpha^{2})}\cdot\dfrac{2C}{\overline{B}_{2}}\sum\dfrac{(nb_{1}y_{1})}{n^{2}}\left\{\dfrac{Sh\dfrac{nx_{2}}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Ch\dfrac{nx}{\alpha}-\right.\\
\left.-\dfrac{Sh\dfrac{nx_{2}}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Ch\dfrac{nx}{\beta}\right\}\cos\dfrac{n\pi y}{b},\\
D^{II}=-\dfrac{4q'b^{3}}{\pi^{4}(\beta^{2}-\alpha^{2})}\cdot\dfrac{2C}{\overline{B}_{2}}\sum\dfrac{(nb_{1}y_{1})}{n^{2}}\left\{\dfrac{Sh\dfrac{nx_{1}}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Ch\dfrac{n(a-x)}{\alpha}-\right.\\
\left.-\dfrac{Sh\dfrac{nx_{1}}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Ch\dfrac{n(a-x)}{\beta}\right\}\cos\dfrac{n\pi y}{b}
\end{cases}
$$

$$
(222.\mathrm{I})\begin{cases}
V_{1}^{I}=\dfrac{4q'b^{2}}{\pi^{3}(\beta^{2}-\alpha^{2})}\cdot\dfrac{\overline{B}_{1}}{\overline{B}_{2}}\sum\dfrac{(nb_{1}y_{1})}{n}\left\{\left(\dfrac{b^{2}}{\pi^{2}\alpha^{2}}-\dfrac{1}{m_{2}}-\right.\right.\\
\left.\left.-\dfrac{2C}{\overline{B}_{1}}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_{2}}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Ch\dfrac{nx}{\alpha}-\left(\dfrac{b^{2}}{\pi^{2}\beta^{2}}-\dfrac{1}{m_{2}}-\dfrac{2C}{\overline{B}_{1}}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_{2}}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Ch\dfrac{nx}{\beta}\right\}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\\
V_{1}^{II}=-\dfrac{4q'b^{2}}{\pi^{3}(\beta^{2}-\alpha^{2})}\cdot\dfrac{\overline{B}_{1}}{\overline{B}_{2}}\sum\dfrac{(nb_{1}y_{1})}{n}\left\{\left(\dfrac{b^{2}}{\pi^{2}\alpha^{2}}-\dfrac{1}{m_{2}}-\right.\right.\\
\left.\left.-\dfrac{2C}{\overline{B}_{1}}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_{1}}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Ch\dfrac{n(a-x)}{\alpha}-\left(\dfrac{b^{2}}{\pi^{2}\beta^{2}}\;\dfrac{1}{m_{2}}-\dfrac{2C}{\overline{B}_{1}}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_{1}}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Ch\dfrac{n(a-x)}{\beta}\right\}\sin\dfrac{n\pi y}{b}
\end{cases}
$$

(223. I)

$$V_2^{I} = \frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)} \sum \frac{(nb_1y_1)}{n} \left\{ \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2C}{\overline{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}} Sh\frac{nx}{\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\beta}\left(\frac{2C}{\overline{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}} Sh\frac{nx}{\beta} \right\} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$V_2^{II} = \frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)} \sum \frac{(nb_1y_1)}{n} \left\{ \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2C}{\overline{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}} Sh\frac{n(a-x)}{\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\beta}\left(\frac{2C}{\overline{B}_2}+\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}} Sh\frac{n(a-x)}{\beta} \right\} \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

(224. I)

$$R_1^{I} = -\frac{4q'b^2}{\pi^3(\beta^2-\alpha^2)} \cdot \frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2} \sum \frac{(nb_1y_1)}{n} \left\{ \left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}-\frac{4C}{\overline{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}-\frac{4C}{\overline{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}} \right\} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$R_1^{II} = -\frac{4q'b^2}{\pi^3(\beta^2-\alpha^2)} \cdot \frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2} \sum \frac{(nb_1y_1)}{n} \left\{ \left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}-\frac{4C}{\overline{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}-\frac{4C}{\overline{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}} \right\} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

(225 . I)

$$\left|\begin{array}{l}
(R_2^I)_{y=0}=-\dfrac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\sum\dfrac{(nb_1y_1)}{n}\left\{\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Sh\dfrac{nx}{\alpha}-\right.\\
\left.-\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Sh\dfrac{nx}{\beta}\right\},\\
(R_2^I)_{y=b}=-\dfrac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\sum\dfrac{(nb_1y_1)}{n}(-1)^{n-1}\left\{\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Sh\dfrac{nx}{\alpha}-\right.\\
\left.-\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Sh\dfrac{nx}{\beta}\right\},\\
(R_2^{II})_{y=0}=-\dfrac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\sum\dfrac{(nb_1y_1)}{n}\left\{\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Sh\dfrac{n(a-x)}{\alpha}-\right.\\
\left.-\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Sh\dfrac{n(a-x)}{\beta}\right\},\\
(R_2^{II})_{y=b}=-\dfrac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\sum\dfrac{(nb_1y_1)(-1)^{n-1}}{n}\left\{\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\right.\right.\\
\left.\left.-\dfrac{\pi^2\alpha^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\alpha}}{Sh\dfrac{na}{\alpha}}Sh\dfrac{n(a-x)}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{4C}{\bar{B}_2}+\dfrac{1}{m_1}-\dfrac{\pi^2\beta^2}{b^2}\right)\dfrac{Sh\dfrac{nx_2}{\beta}}{Sh\dfrac{na}{\beta}}Sh\dfrac{n(a-x)}{\beta}\right\}
\end{array}\right.$$

(226.I)

$$\left\{\begin{aligned}
&\bar{R}_1' = -\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^2}\left\{\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}-\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}-\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}\right\},\\
&\bar{R}_1'' = -\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^2}\left\{\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}-\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}-\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}\right\},\\
&(\bar{R}_2)_{y=0} = -\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left\{\pi^2\frac{\beta^2-\alpha^2}{b^2}-\left(\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}+Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}+\left(\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}+Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}\right\},\\
&(\bar{R}_2)_{y=b} = -\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\sum\frac{(nb_1y_1)(-1)^{n-1}}{n^2}\left\{\pi^2\frac{\beta^2-\alpha^2}{b^2}-\left(\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\alpha^2}{b^2}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}+Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}+\left(\frac{1}{m_1}-\frac{\pi^2\beta^2}{b^2}+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}+Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}\right\};
\end{aligned}\right.$$

$$
(227.\mathrm{I})\quad\left\{
\begin{aligned}
&\hat{R}_{0,0}=\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{4C}{\bar{B}_2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left|\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}-\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}\right|,\\[2ex]
&\hat{R}_{a,0}=\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{4C}{\bar{B}_2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left|\frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}-\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}\right|;\\[2ex]
&\hat{R}_{a,b}=\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{4C}{\bar{B}_2}\sum\frac{(nb_1y_1)(-1)^{n-1}}{n^2}\left|\frac{Sh\frac{nx_1}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}-\frac{Sh\frac{nx_1}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}\right|,\\[2ex]
&\hat{R}_{0,b}=\frac{4q'b^3}{\pi^4(\beta^2-\alpha^2)}\cdot\frac{4C}{\bar{B}_2}\sum\frac{(nb_1y_1)(-1)^{n-1}}{n^2}\left|\frac{Sh\frac{nx_2}{\beta}}{Sh\frac{na}{\beta}}-\frac{Sh\frac{nx_2}{\alpha}}{Sh\frac{na}{\alpha}}\right|.
\end{aligned}\right.
$$

Ostatnie dwie grupy wzorów sprawdzono jeszcze za pomocą warunku równowagi sił zewnętrznych. Wszystkie są oczywiście ważne dla przypadku I-go ($H^2 > \bar{B}_1\bar{B}_2$). W II-gim przypadku przybierają równania powierzchni ugięcia następującą postać:

$$
(218.\mathrm{II})\quad\left\{
\begin{aligned}
\zeta_I=&\frac{2q'b^4}{\pi^5\bar{B}_2\gamma}\sum_{n=1,2,3\ldots}\frac{(nb_1y_1)}{n^4}\Big(1+\frac{na}{\gamma}Cth\frac{na}{\gamma}-\frac{nx_2}{\gamma}Cth\frac{nx_2}{\gamma}-\\
&-\frac{nx}{\gamma}Cth\frac{nx}{\gamma}\Big)\frac{Sh\frac{nx_2}{\gamma}\,Sh\frac{nx}{\gamma}}{Sh\frac{na}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b};\\[2ex]
\zeta_{II}=&\frac{2q'b^4}{\pi^5\bar{B}_2\gamma}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(nb_1y_1)}{n^4}\Big[1+\frac{na}{\gamma}Cth\frac{na}{\gamma}-\frac{nx_1}{\gamma}Cth\frac{nx_1}{\gamma}-\\
&-\frac{n(a-x)}{\gamma}Cth\frac{n(a-x)}{\gamma}\Big]\frac{Sh\frac{nx_1}{\gamma}\,Sh\frac{n(a-x)}{\gamma}}{Sh\frac{na}{\gamma}}\sin\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}\right.
$$

Skoro w szczególnym przypadku $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$, t. zn.

obciążenie działa w środku płyty, to w tem miejscu należy się spodziewać największego ugięcia f. Wtedy daje każde z obu równań (218.II):

$$(228)\qquad f=\frac{2q'b^4}{\pi^5\bar{B}_2\gamma}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2}{n^4}\cdot\frac{1}{2}\frac{Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}}{Ch\frac{na}{\gamma}+1}=$$

$$=\frac{q'b^4}{\pi^5\bar{B}_2\gamma}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b}}{n^4}\cdot\frac{Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}}{Ch\frac{na}{\gamma}+1},$$

względnie w przypadku siły skupionej P:

$$(229)\qquad f=\frac{Pb^3}{2\pi^4\bar{B}_2\gamma}\cdot\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^3}\frac{Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}}{Ch\frac{na}{\gamma}+1}$$

W szczególności otrzymujemy dla płyty kwadratowej i równokierunkowej:

$$\left(a=b,\ B_1=\bar{B}_2=\bar{B},\ \gamma=\frac{b}{\pi}\right):$$

$$(230)\qquad f=\frac{Pb^2}{2\pi^3\bar{B}}\left[\frac{Sh\pi-\pi}{Ch\pi+1}+\frac{1}{3^3}\frac{Sh3\pi-3\pi}{Ch3\pi+1}+\frac{1}{5^3}\frac{Sh5\pi-5\pi}{Ch5\pi+1}+\ldots\right]$$

Z tego szeregu wystarczają cztery wyrazy, aby obliczyć strzałkę ugięcia z dokładnością 0,1%. Z obliczenia wypada:

$$f=\sim\frac{1}{86{,}5}\frac{Pa^2}{\bar{B}},$$

czyli dokładnie to samo, co znaleźliśmy poprzednio z rozwiązania w postaci szeregu podwójnie nieskończonego (§ 11, rów. 50a).

Gdy obciążenie kwadratowej płyty składa się z ciężarów skupionych w środkach szesnastu pól kwadratowych, na jakie podzielono płytę w doświadczeniach „Niemieckiego Wydziału żel.-betonowego“, to strzałka ugięcia w środku płyty oblicza się podług schematu:

$$f = 4f' + 8f'' + 4f'''$$

Tutaj oznaczają f', f'' i f''' te części ugięcia, które odpowiadają ciężarowi skupionemu $P_1 = \frac{1}{16} P$ w punkcie płyty $x_1 = y_1 = \frac{5}{8} a$, względnie $x_1 = \frac{5}{8}a$, $y_1 = \frac{7}{8}a$ i $x_1 = y_1 = \frac{7}{8}a$. Przy założeniu $a = b$, $\overline{B}_1 = \overline{B}_2 = \overline{B}$, tudzież $\lim_{(b_1=0)} q'b_1 = P_1$, znajdujemy z wzoru (218 . II):

$$f' = \frac{P_1 a^2}{2\pi^3 \overline{B}} \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{5}{8} n\pi}{n^3} \left(1 + n\pi \, Cth \, n\pi - \frac{5}{8} n\pi \, Cth \frac{5}{8} n\pi - \right.$$

$$\left. - \frac{n\pi}{2} Cth \frac{n\pi}{2}\right) \frac{Sh \frac{5}{8} n\pi}{Ch \frac{n\pi}{2}},$$

$$f'' = \frac{P_1 a^2}{2\pi^3 \overline{B}} \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{7}{8} n\pi}{n^3} \left(1 + n\pi \, Cth \, n\pi - \frac{5}{8} n\pi \, Cth \frac{5}{8} n\pi - \right.$$

$$\left. - \frac{n\pi}{2} Cth \frac{n\pi}{2}\right) \frac{Sh \frac{5}{8} n\pi}{Ch \frac{n\pi}{2}},$$

$$f''' = \frac{P_1 a^2}{2\pi^3 \overline{B}} \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{7}{8} n\pi}{n^3} \left(1 + n\pi \, Cth \, n\pi - \frac{n\pi}{8} Cth \frac{n\pi}{8} - \right.$$

$$\left. - \frac{n\pi}{2} Cth \frac{n\pi}{2}\right) \frac{Sh \frac{n\pi}{8}}{Ch \frac{n\pi}{2}}.$$

Najwyżej 5 wyrazów z powyższych szeregów wystarcza, aby obliczyć strzałkę ugięcia z dokładnością około 0,1%. Takie obliczenie dało

$$f = 0{,}00465 \frac{Pa^2}{\overline{B}} = \frac{1}{215} \frac{Pa^2}{\overline{B}},$$

jeżeli $P = 16 P_1$, oznacza całkowite obciążenie.

W trzecim przypadku ($H^2 < \overline{B}_1 \overline{B}_2$) otrzymamy nakoniec po wprowadzeniu znanych już wielkości α', β' i nowych L_n i M_n, określonych równaniami:

$$(218a)\quad \left\{\begin{aligned} L_n &= Ch\frac{na}{\alpha'}\sin\frac{na}{\beta'}\left(\frac{1}{\alpha'}Sh\frac{nx_2}{\alpha'}\cos\frac{nx_2}{\beta'}+\frac{1}{\beta'}Ch\frac{nx_2}{\alpha'}\sin\frac{nx_2}{\beta'}\right)- \\ &- Sh\frac{na}{\alpha'}\cos\frac{na}{\beta'}\left(\frac{1}{\alpha'}Ch\frac{nx_2}{\alpha'}\sin\frac{nx_2}{\beta'}-\frac{1}{\beta'}Sh\frac{nx_2}{\alpha'}\cos\frac{nx_2}{\beta'}\right), \\ M_n &= Sh\frac{na}{\alpha'}\cos\frac{na}{\beta'}\left(\frac{1}{\alpha'}Sh\frac{nx_2}{\alpha'}\cos\frac{nx_2}{\beta'}-\frac{1}{\beta'}Ch\frac{nx_2}{\alpha'}\sin\frac{nx_2}{\beta'}\right)+ \\ &+ Ch\frac{na}{\alpha'}\sin\frac{na}{\beta'}\left(\frac{1}{\alpha'}Ch\frac{nx_2}{\alpha'}\sin\frac{nx_2}{\beta'}+\frac{1}{\beta'}Sh\frac{nx_2}{\alpha'}\cos\frac{nx_2}{\beta'}\right); \end{aligned}\right.$$

następujące równanie dla obszaru I płyty ($x \leqq x_1$):

$$(218.\mathrm{III})\qquad \zeta_I = \frac{2q'b^4}{\pi^5 B_2}\cdot\frac{\alpha'^2+\beta'^2}{\alpha'\beta'}\sum_{n=1,2,3\ldots}\frac{(nb_1y_1)}{n^4}\cdot$$

$$\cdot\frac{L_n\, Sh\dfrac{nx}{\alpha'}\cos\dfrac{nx}{\beta'} - M_n\, Ch\dfrac{nx}{\alpha'}\sin\dfrac{nx}{\beta'}}{Sh^2\dfrac{na}{\alpha'}+\sin^2\dfrac{na}{\beta'}}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Odpowiadające równanie dla $x \geqq x_1$ powstaje z powyższego, jeżeli zastąpimy x_2 przez x_1 i x przez $(a-x)$. Dla kontroli uciążliwego rachunku użyto przejścia do przypadku II.

Zaniechawszy na razie rozwinięcia wzorów dla momentów i t. d. na podstawie równań powierzchni ugięcia w II-gim i III-cim przypadku, zaznaczymy tylko, że przejście od odpowiadających formuł I-go przypadku jest jeszcze żmudniejsze, aniżeli wyprowadzenie wprost z równań (218.II) i (218.III).

§ 24a. Porównanie z doświadczeniami „Niemieckiego Wydziału żel.-betonowego".

Jak już zaznaczono w odsyłaczu na końcu wstępu, trzeba przy porównaniu wzorów teoretycznych z wynikami doświadczeń, uwzględnić dość liczne wpływy, pomijane zwykle, gwoli prostoty, przy wywodzie tychże wzorów, albowiem te wpływy mogą w pewnych warunkach zmienić dość znacznie obliczane wielkości.

Pominięcie tych wpływów może łatwo doprowadzić do lekceważenia teoryi przez jednostronnych badaczy doświadczalnych, albo do błędnej interpretacyi doświadczeń przez niektórych teoretyków. Jaskrawego przykładu tego ostatniego przypadku dostarcza artykuł prof. Hagera w „Beton u. Eisen“ z r. 1916, omawiający doświadczenia z płytami „Niemieckiego Wydziału żel.-betonowego“. Znajduje się tam ustęp, który w dosłownem tłumaczeniu brzmi: „Obliczone ugięcia w środku płyty zgadzają się z pomierzonemi przez Bacha, jeżeli obrać stosunek $n = 7{,}3$ $(E_e : E_b)$, wyznaczony dla tego betonu przy małych naprężeniach i liczbę zwężenia poprzecznego (Poisson'a) $m = 1{,}44$ (?!) do $2{,}79$“. Usiłując w łatwy sposób pogodzić zupełnie rachunek z pomiarem, prześlepił tutaj widocznie autor podstawowy fakt nauki o sprężystości, według którego m nie może być mniejszem od 2, gdyż inaczej byłoby proste rozciąganie (wzgl. ściskanie) połączone z ubytkiem (wzgl. przyrostem) objętości materyału, co, jak wiadomo, z góry należy wykluczyć. Ten „lapsus“ wskazuje jeszcze na to, że przy całej staranności i dokładności, jaka cechuje wymienione doświadczenia, zaniechano niestety wyznaczenia liczby Poisson'a dla materyału płyt, grającej w teoryi tak doniosłą rolę i przez to utrudniono dokładne porównanie wielkości obserwowanych z obliczonemi teoretycznie. Drugą trudność, jaką napotykamy przy porównywaniu wyników niniejszej teoretycznej pracy z doświadczeniami „Niem. Wydziału żel.-betonowego“, stanowi prawie równa sztywność zginania w obu głównych kierunkach wszystkich badanych płyt. To ma wprawdzie ten skutek, że do porównania wystarczają tylko uproszczone wzory dla szczególnego przypadku $\overline{B}_1 = \overline{B}_2$, ale za to nie można sprawdzić teoretycznie określonego a praktycznie ważnego i interesującego wpływu różnicy obu uzbrojeń na stan odkształcenia i napięcia płyty.

Mimo to nastręczają dostarczone daty doświadczalne taką obfitość naukowego materyału, iż jego wyczerpujące opracowanie zajmie sporo czasu. Umieszczone tutaj rozważania i porównania ograniczają się do rzeczy najważniejszych i dotykają zaledwie drobnej części bogatego materyału doświadczalnego.

Jakkolwiek nie ma zasadniczych trudności, aby przeprowadzić porównanie także w przypadku obciążenia, przedstawionym na rys. 2 sprawozdania N. W. Ż. (t. zn. w ośmiu miejscach dokoła środka płyty), to jednak, pozostawiając na razie ten przypadek na boku, zwrócimy się do praktycznie najważniejszego przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie, które zastąpiono w przybliżeniu przez 16 (u płyt kwadratowych), względnie 24 (u płyt prostokątnych o stosunku boków $a:b=3:2$) i 32 (u płyt prostokątnych o stosunku boków 2 : 1) równych ciężarów skupionych.

Ta okoliczność, że przy analogicznem zastąpieniu równomiernego obciążenia belki przez 4 równe siły, moment zginający w środku nie ulega zmianie, jeszcze oczywiście nie dowodzi, że tak samo ma się rzecz z płytą wszechstronnie podpartą. Już u belki zachodzi przy tem zmiana strzałki ugięcia, a mianowicie zamiast wartości

$$f=\frac{5}{384}\cdot\frac{Pl^3}{EI}$$

otrzymujemy przy obciążeniu czterema siłami $\frac{P}{4}$:

$$f=\frac{5{,}125}{384}\cdot\frac{Pl^3}{EI};$$

czyli o 2,5% więcej. Dla płyty kwadratowej znaleziono właśnie powyżej w przypadku 16 równych sił o wielkości $\frac{P}{16}$ (dla $\bar{B}_1=\bar{B}_2=\bar{B}$):

$$f=0{,}00465\frac{Pa^2}{\bar{B}},$$

podczas gdy odpowiadający spółczynnik liczbowy w przypadku obciążenia rozłożonego w sposób ciągły (ob. tabl. w § 23) równa się

$$0{,}00406$$

Różnica osiąga teraz już około 14,5%, ulegnie jednak niewątpliwie dość znacznej redukcyi, jeżeli uwzględnimy, że siły skupione przenosiły się przez kołowe pola o średnicy 90 mm. Możnaby to obliczyć, przynajmniej z wielkiem przybliżeniem, na podstawie otrzymanych wzorów, jednakże zaniechamy tego, ponieważ inne wpływy, nie dające się określić tak dokładnie, mogą nawet zasłonić sobą powyższą różnicę.

Wszystkie wpływy dają się podzielić na dwie grupy, stosownie do tego, czy one, jak powyższy, działają zwiększająco na strzałkę ugięcia, momenty i t. d., czy też zmniejszają te wielkości. Do pierwszej grupy należy oprócz

Ia) skupienia obciążenia na 16-stu polach kołowych, jeszcze

Ib) podatność prostych podporowych,

Ic) podniesienie rogów płyty z powodu braku wymaganego przez teoryę podparcia rogów od góry,

Id) zmniejszenie E_b (modułu wydłużenia dla betonu), szczególnie przy małych naprężeniach, wskutek wzmocnienia uzbrojenia przez ciaśniej ułożone pręty, co utrudnia należyte zbicie betonu i

Ie) zmniejszenie E_b ze wzrostem naprężeń.

Do drugiej grupy zaliczymy przedewszystkiem:

IIa) konieczne wystawanie brzegów płyty poza proste podporowe,

IIb) zmniejszanie się liczby Poisson'a m przy wzroście naprężeń, a nadto przy większych ugięciach:

IIc) przeszkody wzajemnego zbliżenia się równoległych brzegów przy uginaniu się płyty,

IId) pewien, co prawda, mały ubytek rozpiętości wskutek zastosowanego podparcia stałemi wałkami i

IIe) zmniejszenie momentów zginających z powodu ciężaru własnego płyty przez ciężar własny jej wystających części.

Wpływ IIb w iloczynie $\frac{m^2}{m^2-1} E_b = E_b'$ jest pokryty przeważającym wpływem Ie. Wpływ IIc byłby dostrzegalnym tylko przy cienkich płytach i wielkich ugięciach. Wpływ IId jest zapewne zawsze nieznaczny. Za to decydujące znaczenie może mieć wpływ IIa, albowiem podług przybliżonego rachunku w § 10, strzałka ugięcia i momenty zmniejszają się wskutek wystawania płyty w stosunku $1 : \left(1 + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\Delta F}{a^2}\right)$, jeżeli ΔF oznacza wielkość wystającego pola, a a rozpiętość kwadratowej płyty. W omawianych doświadczeniach było $\Delta F = 2{,}1^2 - 2^2 = 0{,}41$ m², a więc przyjąwszy wartośc m między 8 a 5 (Kleinlogel), otrzymujemy jako wartość odpowiadających spółczynników zmniejszenia:

$$1:1{,}09 \quad \text{i} \quad 1:1{,}08.$$

Co się tyczy wpływu IIe, to można go łatwo ocenić wprowadzając do rachunku nie całkowity ciężar własny płyty jako rozłożony równomiernie, lecz tylko ciężar środkowej prostokątnej części płyty o długości $a - 2\Delta a$ i szerokości $b - 2\Delta b$. Przytem oznacza Δa i Δb, jak poprzednio, odpowiadające szerokości wystających skrawków płyty.

Jak się zdaje, wpływ ten wystarcza właśnie do skompensowania w znacznej części wpływów Ia i Ib. Pozostawałoby tedy jeszcze rozpatrzyć bliżej wpływy Ic, d, e i IIb. Co się tyczy wpływu Ic, to należy się spodziewać, że będzie najwybitniejszym u płyt kwadratowych, a musi obniżyć się znacznie u płyt prostokątnych o wielkiej wartości stosunku $a : b$. Dla $a:b = 2$ będzie ten wpływ zapewne już bardzo nieznacznym. W Id widzimy jedyny wpływ, usuwający się z pod teoretycznej oceny, a stwierdzony dopiero doświadczalnie. Wpływy Ie i IIb były wogóle znane z dawniejszych doświadczeń nad rozciąganiem i ściskaniem betonu; ale do naszego porównania z doświadczeniami nad płytami będzie najlepiej zużytkować dane znalezione wprost dla materyału płyt. W ten sposób znajdujemy na podstawie wyników na str. 25 sprawozdania, dla modułu wydłużeń sprężystych przy rozciąganiu betonu (w kilogr./cm²):

$$E_{bz} = 321000 - 3465 \,.\, \sigma,$$

jako przybliżoną formułę interpolacyjną. Stąd wypada stosunek modułu wydłużenia betonu do takiegoż modułu żelaza (2 100 000):

$$1 : n_z = 0{,}1529 - 0{,}00165\, \sigma$$

Podobnież otrzymujemy z wyników doświadczeń nad ściskaniem (str. 28 sprawozdania) dla średniego modułu sprężystego skrócenia:

$$E_{bd} = 297300 - 608{,}1\, \sigma$$

$$1 : n_d = 0{,}1416 - 0{,}00029\, \sigma$$

Obadwa wzory dla E_b przedstawiają średnią wartość modułu wydłużenia w przedziale naprężeń 0 do σ.

Ubytek liczby Poisson'a m (dla betonu) można, na podstawie doświadczeń Kleinlogel'a przedstawić w przybliżeniu wzorem:

$$m = 2 + \frac{480}{\sigma + 60}$$

Przy pomocy powyższych wzorów interpolacyjnych obliczono następującą tablicę pomocniczą:

σ	=	0	5	10	15	20	25 kg/cm².
$\frac{E_{bz}}{1000}$	=	321,0	303,7	286,4	269,0	251,7	234,4 „
$\frac{E_{bd}}{1000}$	=	297,3	294,3	291,2	288,2	285,1	282,1 „
m	=	10	9,38	8,86	8,40	8,00	7,65
$\frac{E'_{bz}}{1000}=\frac{m^2}{m^2-1}\cdot\frac{E_{bz}}{1000}$	=	324,2	307,2	290,1	272,9	255,7	238,4 kg/cm²
$\frac{E'_{bd}}{1000}=\frac{m^2}{m^2-1}\cdot\frac{E_{bd}}{1000}$	=	300,3	297,7	295,0	292,4	289,7	287,0 „
$\frac{1}{2}\frac{E'_{bz}+E'_{bd}}{1000}=\frac{E'_b}{1000}$	=	312,2	302,4	292,5	282,6	272,7	262,7 „
n_z	=	6,54	6,92	7,33	7,80	8,34	8,96
n_d	=	7,06	7,13	7,21	7,28	7,36	7,44

Po tem przygotowaniu weźmiemy pod uwagę zestawienie 19 dla seryi doświadczeń z płytami kwadratowemi według rys. 5 sprawozdania, obciążonemi według rys. 3. Dla trzech płyt tej seryi znajdujemy następujące średnie wartości:

Grubość płyty . . . . $h = 12{,}13$ cm,
Podwójna szerokość wystających skrawków . . . $2\Delta a = 10{,}12$ „
Całkowite pole płyty . . . . $F = 4{,}414$ m²
Pole wystającej części . . . . $\Delta F = 0{,}414$ „
Ciężar własny . . . . $G = 1271$ kg.

Ciężar własny skutecznej środkowej części o polu

$(2{,}0 - 0{,}1012)^2 = 3{,}605$ m² . . . . $G_1 = 1038$ kg
Średnica . . . . $d = 0{,}717$ cm
i pole przekroju prętów uzbrojenia . . . . . . $f_f = 0{,}4038$ cm²
Grubość betonu pod prętami . . . . $e = 1{,}7$, wzgl. 1,0 cm
Odstęp prętów . . . . $t = 9{,}3$ „ 10,0 cm

Stosownie do tego wypadają dla sprowadzonych momentów bezwładności w I fazie, odniesionych do 1 cm. szerokości przekroju (według wzoru 16) następujące formuły:

$$I_1' = 148{,}73 + \frac{195{,}5(n-1)}{279{,}4+n-1}, \quad I_2' = 148{,}73 + \frac{269{,}7\,(n-1)}{300{,}4+n-1}$$

Wartości, wynikające z tych wzorów przy odpowiadających wielkościach skrajnego ciągnienia σ, zawiera tablica umieszczona tuż niżej.

Za n wstawiono przytem w przybliżeniu wartości n_s z powyższej tablicy:

$\sigma = 0$	5	10	15	20	25	kg/cm²
$I_1' = 152{,}53$	152,79	153,06	153,38	153,73	154,10	cm³
$I_2' = 153{,}61$	153,94	154,30	154,70	155,15	155,65	„
$\frac{1}{2}(I_1' + I_2') = 153{,}07$	153,36	153,68	154,04	154,44	154,87	„

Ponieważ odpowiadające wartości I_1' i I_2' różnią się od siebie niewiele, a wskutek tego sprowadzony stosunek boków ε rozpatrywanych płyt kwadratowych zbacza bardzo mało od 1, więc w dalszych rachunkach można tak I_1', jakoteż I_2' zastąpić w przybliżeniu średnią arytmetyczną

$$I' = \tfrac{1}{2}(I_1' + I_2').$$

Teraz nasuwa się pytanie, jak obliczyć w przybliżeniu sztywność zginania płyty (w fazie I) B', ażeby uwzględnić w możliwie prosty sposób zmienność modułu wydłużenia betonu. Z kilku najprostszych przypuszczeń, jakie zrobiono na próbę, nadało się najlepiej przyjęcie

$$B' = E_w' \, I'$$

Oznaczywszy przez z_0 odległość osi obojętnej od środka wysokości przekroju, przez $W = \dfrac{I'}{\frac{h}{2} - z_0}$ moduł przekroju odniesiony do dolnej warstwy skrajnej, a przez $M = W \, . \, \sigma$ odpowiadający moment zgięcia, mamy

dla $\sigma =$	0	5	10	15	20	25 kg/cm²
$\frac{B'}{1000} = \frac{E'_{bz} I'}{1000} =$	49625	47112	44583	42037	39490	36922 kg cm
$z_0 =$	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,15 cm
$W =$	25,64	25,73	25,83	25,93	26,04	26,15 cm²
$M = W\sigma =$	0	128,65	258,3	388,95	520,8	653,7 kg.

Teorya daje dla momentu zgięcia w środku płyty kwadratowej i równokierunkowej, obciążonej równomiernie, wzór:

$$M = 0{,}0368 \left(1 + \frac{1}{m}\right) qa^2$$

Skoro tutaj wstawimy powyższe wartości M, jakoteż odpowiadające wartości m i rozwiążemy równanie względem $qa^2 = P$, to wypada jako całkowite obciążenie:

$$P = 0, \ 3158, \ 6306, \ 9445, \ 12580, \ 15706, \ \text{kg.}$$

Zważywszy, że w doświadczeniach nie można było mierzyć działania ciężaru własnego, należy to działanie wyłączyć, odejmując od powyższych wartości 1038 kg. A zatem ciągnieniom skrajnym o rachunkowej wartości

$\sigma =$	5	10	15	20	25 kg/cm²

odpowiada obciążenie, jakie należy umieścić na płycie, o wielkości:

$P =$	2120	5268	8407	11542	14668 kg.

Naprężenia skrajne i sztywności zginania, odpowiadające obciążeniom $P = 3000, 6000, \ldots$ kg., stosowanym rzeczywiście w doświadczeniach, wyznaczymy teraz, przy uwzględnieniu ciężaru własnego płyty, przez prostą interpolacyę. W ten sposób otrzymamy:

dla $P =$	3000	6000	9000	12000	15000	kg
$\sigma =$	6,40	11,17	15,94	20,73	25,53	kg/cm²
$\frac{B'}{1000} =$	46404	43987	41558	39115	—	kg cm

Obliczywszy teraz strzałkę ugięcia według teoretycznego wzoru:

$$f = 0{,}00406 \frac{Pa^2}{\overline{B}},$$

znajdziemy

dla $P =$	3000	6000	9000	12000 kg
$f =$	0,0105	0,0222	0,0352	0,0498 cm

podczas gdy odpowiadające średnie wartości ugięć, mierzonych w środku płyty, wynoszą, według zestawienia 19:

$f =$	0,0108	0,0240	0,0383	0,0550 cm.

Stąd

$\dfrac{f\text{ mierz.}}{f\text{ teor.}} = 1{,}03$	1,08	1,08	1,10

Ze względu na dokładność pojedyńczych pomiarów, podaną w sprawozdaniu na 0,001 cm., jakoteż na znaczne zboczenia wartości modułu wydłużenia betonu poszczególnej płyty, względnie seryi płyt, od średniej wartości, wprowadzonej do rachunku, można powyższy wynik uważać za wcale dobre potwierdzenie wzorów teoretycznych, co prawda, dla obciążeń mniejszych od obciążeń rysujących płytę, t. j. takich, przy których się pojawiają pęknięcia w betonie rozciąganym Powyżej obciążenia rysującego nie należy oczywiście spodziewać się takiej zgodności teoryi z pomiarami ugięcia, albowiem w tych warunkach sztywność zginania środkowej części płyty, znajdującej się już w fazie II, różni się znacznie od sztywności reszty, pozostającej jeszcze w fazie I. Płyta uzbrojona działa wówczas mniej więcej tak, jak płyta równokierunkowa, której odpowiadająca część środkowa jest znacznie cieńsza od reszty, przyczem granica obu obszarów płyty o wielkiej i małej sztywności zginania zmienia się ze wzrostem obciążenia. Ten fakt, że mierzone sztrzałki ugięcia przewyższają nieco obliczone, możnaby wobec przytoczonych licznych wpływów, tłumaczyć w różny sposób; byłoby jednakże przedwczesnem szukać już teraz objaśnienia dla tych zboczeń, przed rozpatrzeniem i porównaniem jeszcze paru innych seryi doświadczeń. Weźmiemy przeto pod uwagę jeszcze trzy serye, a mianowicie drugą seryę płyt kwadratowych (zestawienie l. 16 omawianego sprawozdania), następnie seryę płyt prostokątnych o stosunku boków 3 : 2 (zest. l. 29 spraw.) i nakoniec seryę płyt prostokątnych o stosunku boków 2 : 1 (zest. 30 spraw.).

Serya doświadczeń według zestawienia l. 16 w sprawozdaniu Bacha i Grafa.

Płyty kwadratowe według rys. 1 ($a = b = 2m$), obciążone według rys. 3 sprawozdania. Średnie wartości wymiarów i wielkości z nich obliczonych są następujące:

Grubość płyty . . . . $h = 12{,}2$ cm.
Podwójna szerokość wystającego skrawka . . . $2\Delta a = 10{,}05$ cm.
Całkowite pole płyty . . . . $F = 2{,}1005^2 = 4{,}412$ m²
Pole wystającej części . . . . $\Delta F = 0{,}412$ m²
Ciężar własny płyty . . . . $G = 1282$ kg.

Ciężar własny „skutecznej“ środkowej części płyty o polu

$(2 - 0{,}1005)^2 = 3{,}608$ m² . . . . $G_1 = 1049$ kg
Średnica . . . . $d = 0{,}715$ cm.
i pole przekroju prętów uzbrojenia . . . . $f_r = 0{,}4015$ cm²
Grubość betonu pod prętami . . . . $e = 1{,}7$, wzgl. 1,0 cm.
Odstęp prętów . . . . $t = 10{,}0$ cm.

Na podstawie tych danych, oraz wartości stałych sprężystych, określonych powyżej, obliczono, tak samo, jak w poprzednim przypadku następujące wielkości:

$$I_1' = 151{,}32 + \frac{199{,}4(n-1)}{303{,}8 + n - 1}, \quad I_2' = 151{,}32 + \frac{274{,}4(n-1)}{303{,}8 + n - 1}$$

dla $\sigma =$	0	5	10	15	20	25	kg/cm²
$I_1' =$	154,89	155,14	155,40	155,71	156,05	156,41	cm³
$I_2' =$	156,24	156,58	156,95	157,36	157,82	158,33	„
$I' = \frac{1}{2}(I_1' + I_2') =$	155,56	155,86	156,18	156,53	156,93	157,37	„
$\frac{E_{be}' I'}{1000} = \frac{B'}{1000} =$	53233	47881	45309	42717	40127	37517	kgcm
$z_0 =$	0,079	0,085	0,092	0,099	0,105	0,112	cm
$W =$	25,84	25,91	26,00	26,08	26,18	26,28	cm²
$M = W\sigma =$	0	129,55	260,00	391,20	523,60	657,00	kg
$P =$	0	3181	6349	9501	12650	15790	„

Po odjęciu $G_1 = 1049$ kg pozostaje:

$P=$	—	2132	5300	8452	11601	14741 kg

$P=$	3000	6000	9000	12000	15000 kg
$\sigma=$	6,37	11,11	15,87	20,63	25,41 kg/cm²
$\frac{B'}{1000}=$	47176	44734	42266	39798	37303 kg cm
f teor. =	0,0103	0,0218	0,0346	0,0490	0,0653 cm
f mierz. =	0,0097	0,0229	0,0355	0,0522	0,0740[1] cm

$\frac{f \text{ mierz.}}{f \text{ teor.}}=$	0,94	1,05	1,03	1,06	1,13

Serya doświadczeń według zestawienia l. 29.

Płyty prostokątne według rys. 15 ($a = 3m$, $b = 2m$), obciążone według rys. 35 sprawozdania. Średnie wartości wymiarów i wielkości z nich obliczonych są następujące:

Grubość płyty . . . . $h = 12{,}13$ cm
Podwójna szer. wystającego skrawka $2\Delta a = 10{,}13$, $2\Delta b = 10{,}00$ „
Całkowite pole płyty . . . . $F = 6{,}513$ m²
Pole wystającej części . . . . $\Delta F = 0{,}513$ „
Ciężar własny . . . . $G = 1883$ kg

Ciężar „skutecznej“ środkowej części płyty o polu

$(3 - 0{,}1013)(2 - 0{,}1) = 5{,}5075$ m² . . . . $G_1 = 1595$ kg
Średnica . . . . $d = 0{,}695$ cm
i pole przekroju prętów uzbrojenia . . . . . . $f_r = 0{,}3794$ cm²
Grubość betonu pod prętami . . . . $e = 1{,}7$, wzgl. 1,0 cm
Odstęp prętów . . . . $t = 10{,}0$ cm

[1] Ta liczba odnosi się tylko do jednej płyty, ponieważ w dwu innych płytach seryi powstały już przedtem pęknięcia, co spowodowało silne zwiększenie ugięcia.

Stąd:

$$I_1' = 148{,}73 + \frac{195{,}5\,(n-1)}{319{,}7+n-1}, \quad I_2' = 148{,}73 + \frac{269{,}7\,(n-1)}{319{,}7+n-1}$$

Dla $\sigma =$	0	5	10	15	20	25	kg/cm²
$I_1 =$	152,06	152,29	152,53	152.80	153,12	153,48	cm³
$I_2' =$	153,32	153,63	153,97	154,35	154,78	155,28	„
$\varepsilon = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} =$	1,503		(średnio 1,504)			1,505	
$\frac{E''_{bz} I_2'}{1000} = \frac{B_2'}{1000} =$	52466	47195	44667	42122	39578	37019	kg cm
$z_0 =$	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,15	cm
$W_2 =$	25,68	25,78	25,88	25,99	26,10	26,25	cm²
$W_2\sigma = M_2 =$	0	128,9	258,8	389,8	522,0	656,3	kg

Według tablicy z § 23 odpowiada średniej wartości $\varepsilon = 1{,}504$:

$$M_2 = \left(0{,}0730 + \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\,0{,}0280\right) qb^2,$$

a zatem dla

$\sigma =$	5	10	15	20	25 kg/cm²
$\frac{M_2}{qb^2} =$	0,0760	0,0762	0,0764	0,0765	0,0767
$abq =$	2544	5094	7657	10240	12840 kg

Po odjęciu $G_1 = 1595$ kg pozostaje

$P =$	949	3499	6062	8645	11245 kg

$P =$	3000	6000	9000	12000 kg	
$\sigma =$	9,02	14,88	20,68	26,45	kg/cm²
$\frac{E''_{bz} I_2'}{1000} = \frac{B_2'}{1000} =$	45162	42183	39230	36277	kg cm
$q =$	0,05	0,10	0,15	0,20	kg/cm²
$f = 0{,}00774\frac{qb^4}{\bar{B}_2} =$	0,0137	0,0294	0,0473	0,0683	cm.
f mierz. $=$	0,0117	0,0267	0,0437	0,0620	„

$\frac{f\ \text{mierz.}}{f\ \text{teor.}} = 0,85$	0,91	0,92	0,91

Serya doświadczeń z zestawienia 30.

Płyty prostokątne według rys 16 ($a = 4$, $b = 2m$), obciążone według rys. 36 sprawozdania. Średnie wartości dat doświadczalnych są następujące.

Grubość płyty . . . . $h = 12,13$ cm
Podwójna szer. wystających skrawków $2\Delta a = 10,3$; $2\Delta b = 10,17$ cm
Całkowite pole . . . . $F = 8,623$ m²
Pole wystającej części . . . . $\Delta F = 0,623$ m²
Ciężar własny . . . . $G = 2481$ kg

Ciężar „skutecznej" środkowej części o polu

$(4 - 0,103)(2 - 0,1017) = 7,398$ m² . . . . $G_1 = 2129$ kg
Średnica . . . . $d = 0,692$ cm
i pole przekroju prętów uzbrojenia . . . . . . $f_i = 0,3761$ cm²
Grubość betonu pod prętami . . . . $e = 1,7$, wzgl. 1,0 cm
Odstęp prętów . . . . $t = 10,0$ cm

Stąd

$$I_1' = 148,73 + \frac{195,5\,(n-1)}{322,5 + n - 1}, \quad I_2' = 148,73 + \frac{269,7\,(n-1)}{322,5 + n - 1}$$

Dla $\sigma =$ 0	5	10	15	20	25 kg/cm²
$I_1' = 152,03$	152,26	152,50	152,76	153,08	153,44 cm³
$I_2'' = 153,28$	153,59	153,92	154,30	154,72	155,22 „

$$\varepsilon = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} = 2,006 \text{ (średnio)}$$

$\sigma =$	0	5	10	15	20	25 kg/cm²
$\frac{B_2'}{1000} =$	52453	47182	44653	42108	39562	37005 kgcm
$W_2 =$	25,67	25,77	25,87	25,98	26,11	26,25 cm²
$M_2 =$	0	128,9	258,7	389,7	522,2	656,2 kg

Według tablicy z § 23 odpowiada (średniej) wartości $\varepsilon = 2{,}006$:

$$M_2' = \left(0{,}0967 + 0{,}0174\ \frac{1}{m}\sqrt{\frac{B_2}{B_1}}\right) qb^2,$$

a zatem dla:

$\sigma =$	5	10	15	20	25 kg/cm²
$\frac{M_2}{qb^2} =$	0,0986	0,0987	0,0988	0,0989	0,0990
$abq =$	2614	5242	7889	10560	13257 kg

Po odjęciu $G_1 = 2129$ kg pozostaje

$P =$	485	3113	5760	8431	11128 kg
$P =$	—	4000	8000	—	12000 kg
$\sigma =$	—	11,68	19,19	—	26,62 kg/cm²
$\frac{B_2'}{1000} =$	—	43798	39974	—	36177 kg cm
$f = 0{,}01015 \frac{qb^4}{B_2} =$	—	0,0185	0,0406	—	0,0673 cm
f mierz. $=$	—	0,0145	0,0342	—	0,0598 „
$\frac{f \text{ mierz.}}{f \text{ teor.}} =$	—	0,784	0,842	—	0,888

Przy łącznem rozpatrywaniu wyników końcowych powyższych porównań, uderza przedewszystkiem ten fakt, że stosunek f mierz. : f teor. ubywa ze wzrostem ε. To wskazuje wyraźnie na wybitną rolę takich wpływów grupy I, które dla płyt kwadratowych są najsilniejsze, a maleją z powiększeniem ε. Tę własność posiadają istotnie wpływy Ia i Ic, albowiem po pierwsze wskutek skupienia obciążenia w środkach częściowych kwadratów zwiększa się strzałka płyty kwadratowej o 14,5%, a płyty prostokątnej bardzo długiej tylko o 2,5%; powtóre zaś, wpływ swobodnego podniesienia się rogów znika oczywiście dla płyt bardzo długich, jakkolwiek u płyt mało różniących się postacią od kwadratu musi być dość silnym.

Obu tym wpływom można przeciwstawić tylko wystawanie brzegów płyty (wpływ IIa), ono bowiem zmniejsza strzałkę ugięcia badanych płyt kwadratowych okrągło o 8,5%. Ale ten wpływ może tylko częściowo skompensować oba poprzednie i jeszcze dość dużo pozostaje, aby objaśnić ubytek wartości f mierz. : f teor. z powiększeniem ε. Lepsza zgodność wartości obliczonych i mierzonych dałaby się nadto osiągnąć przez odpowiednie zwiększenie sztywności zginania płyty. To było nawet do przewidzenia, gdyż sztywność zginania musi zależeć od wartości modułu wydłużenia we wszystkich włóknach, a nie tylko od jednej wartości, odpowiadającej skrajnemu włóknu, która wskutek tego musi być mniejszą od sprowadzonej pośredniej wartości, jaką należałoby wprowadzić w rachunek. Jest wątpliwem, czyby się opłaciło tę sprawę rozpatrywać bliżej już teraz, dopóki ważny wpływ swobodnego podniesienia rogów nie da się dokładniej wyznaczyć.

Z tegoż samego powodu zrezygnujemy na razie z wyczerpującego sprawdzania wzorów teoretycznych dla momentów, zwracając jednak uwagę czytelnika na odnośne proste a piękne studjum prof. Mörsch'a (Deutsche Bauz., Mitteil. 1916, Nr 3), który z omawianych doświadczeń „Niemieckiego Wydziału Żel.-betonowego“ wyprowadził wzór

$$M = \frac{qa^2}{21,76}$$

dla największego momentu zginającego płyty kwadratowej (przy największem obciążeniu). Ten wynik da się łatwo sprowadzić do znakomitej formalnej zgodności z wzorem teoretycznym, skoro przyjmiemy $m = 4$. Wtedy bowiem

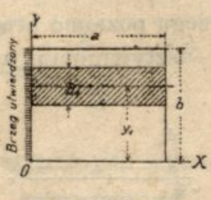
$$M = 0,0368 \left(1 + \frac{1}{m}\right) qa^2 = 0,046\, qa^2 = \frac{qa^2}{21,74}$$

Nie wolno jednakże stąd wysnuwać wniosku, że przy najwyższych naprężeniach betonu staje się $m = 4$, albowiem przy wyprowadzeniu powyższej wartości spółczynnika $1 : 21,76$ nie uwzględniono wpływów, poprzednio omawianych.

VII. Płyta prostokątna, jednym brzegiem utwierdzona, a innemi swobodnie podparta i płyta dokoła utwierdzona.

§ 25. Ścisłe rozwiązanie w przypadku utwierdzenia jednego brzegu b i swobodnego podparcia pozostałych brzegów płyty.

Sposobem podanym w § 17 znajdujemy, podobnie jak w zadaniu §-u 23, dla przedstawionego na rysunku 25 przypadku ró-



Rys 25.

wnomiernego obciążenia prostokątnego paska płyty o szerokości b_1, następujące równanie powierzchni ugięcia:

$$231.\mathrm{I})\quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5 \bar{B}_2} \sum_{n=1,2,3,\ldots} \frac{(nb_1y_1)}{n^5} \left[1 - \frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2} \cdot \frac{Ch\frac{nx}{\beta}}{Ch\frac{na}{\beta}} + \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \cdot \frac{Ch\frac{nx}{\alpha}}{Ch\frac{na}{\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \vartheta_n \left\{ \beta\left(Th\frac{na}{\beta} Ch\frac{nx}{\beta} - Sh\frac{nx}{\beta}\right) - \alpha\left(Th\frac{na}{\alpha} Ch\frac{nx}{\alpha} - Sh\frac{nx}{\alpha}\right)\right\}\right] \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Przytem oznacza:

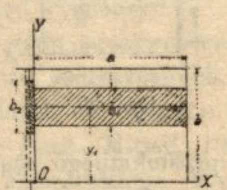
$$(nb_1y_1) = \sin\frac{n\pi}{2}\frac{b_1}{b}\sin\frac{n\pi y_1}{b},$$

$$(231.\mathrm{a})\qquad \vartheta_n = \frac{1 - \frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{1}{Ch\frac{na}{\beta}} + \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{1}{Ch\frac{na}{\alpha}}}{\beta\, Th\frac{na}{\beta} - \alpha\, Th\frac{na}{\alpha}}$$

Łatwo się przekonać, że powyższe wyrażenie dla ζ czyni zadość tak równaniu różniczkowemu powierzchni ugięcia, jakoteż warunkom krańcowym

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \qquad (\zeta)_{x=0}=0, \qquad (\zeta)_{x=a}=0, \qquad (\zeta)_{y=0}=0, \qquad (\zeta)_{y=b}=0.$$

Znalezione rozwiązanie da się oczywiście także zastosować do przypadku płyty prostokątnej dokoła swobodnie podpartej, a nadto podpartej w linii środkowej, jeżeli tę linię obierzemy zaś oś Y-ów, i zastąpimy a przez $\frac{a}{2}$. Gdy wielkości ϑ_n uważamy za nieoznaczone parametry, to rozwiązanie zatrzymuje ważność i w przypadku sprężystej podatności brzegu poziomo utwierdzonego $x=0$, względnie w przypadku płyty usztywnionej w środku żebrem (rys. 26).



Rys. 26.

W tym ostatnim przypadku otrzymujemy następujące wyrażenie dla całkowitej energii potencyalnej płyty z żebrem o długości $2a+g$ i szerokości b:

$$(232)\quad L_i=\int_0^a\int_0^b\left[\bar{B}_1\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2+\bar{B}_2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\bar{B}_1}{m_2}+\frac{\bar{B}_2}{m_1}\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\right.$$

$$\left.+4C\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\tfrac{1}{2}\int_0^b(B^*-2\bar{B}_2c)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2_{x=0}dy.$$

Zaś dla pracy sił zewnętrznych mamy wyrażenie:

$$(233)\qquad L_a=\int_0^a\int_{y_1-\frac{b_1}{2}}^{y_1+\frac{b_1}{2}}q\,\zeta\,dxdy+\tfrac{1}{2}\int_{y_1-\frac{b_1}{2}}^{y_1+\frac{b_1}{2}}q'\,(\zeta)_{x=0}\,dy,$$

jeżeli żebro dźwiga nadto liniowe równomierne obciążenie $q'b_2$ między rzędnemi $y=y_1-\frac{b_2}{2}$ i $y=y_1+\frac{b_2}{2}$.

Ponieważ próba wyznaczenia parametrów ϑ_n w ogólniejszym przypadku rozbiła się o beznadziejną rozwlekłość rachunku, więc poprzestaniemy na wyprowadzeniu wzorów dla wielkości statycznych. Wprowadziwszy oznaczenia skracające:

$$\text{(234a)}\quad \left|\begin{aligned}(\alpha,\vartheta_n)&=\frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{1}{Ch\frac{na}{\alpha}}+\alpha\vartheta_n\,Th\frac{na}{\alpha}.\\ (\beta,\vartheta_n)&=\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{1}{Ch\frac{na}{\beta}}+\beta\vartheta_n\,Th\frac{na}{\beta},\end{aligned}\right.$$

otrzymujemy dla momentu zgięcia M_1 wyrażenie:

$$\text{(234.I)}\quad M_1=-\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\dots}\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}\right)\left\{(\alpha,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\vartheta_n Sh\frac{nx}{\alpha}\right\}-\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}\right)\left\{(\beta,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\beta}-\beta\vartheta_n\,Sh\frac{nx}{\beta}\right\}-\frac{1}{m_2}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

To wyrażenie znika dla $x=a$, jak być powinno, a dla $x=0$ przybiera największą wartość ujemną, a mianowicie:

$$\text{(235.I)}\quad (M_1)_{x=0}=-\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\sum_{n}\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[\left(\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}-\frac{1}{m_2}\right)(\alpha,\vartheta_n)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}-\frac{1}{m_2}\right)(\beta,\vartheta_n)-\frac{1}{m_2}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

W szczególnym przypadku bardzo długiej płyty $(a=\infty)$ przeistacza się powyższy wzór na odpowiedni wzór (115) w § 15, o czem łatwo się przekonać, zważywszy, że widocznie

$$\lim_{a=\infty}(\alpha,\vartheta_n)=\alpha\vartheta_n \quad \text{i} \quad \lim_{a=\infty}\vartheta_n=\frac{1}{\beta-\alpha}$$

Dla momentu zginającego M_2 wypada wyrażenie:

$$(236.\mathrm{I})\quad M_2=\frac{4qb^2}{\pi^3}\sum_{n=1,2,3,\ldots}\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[1+\left(1-\frac{1}{m_1}\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\right)\left\{(\alpha,\vartheta_n)Ch\frac{nx}{\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\vartheta_n\,Sh\frac{nx}{\alpha}\right\}-\left(1-\frac{1}{m_1}\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right)\left\{(\beta,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\beta}-\beta\vartheta_n\,Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

które również znika dla $x=a$. Dalej znajdujemy:

$$(237.\mathrm{I})\quad D=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{2C}{\bar{B}_2}\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[\frac{b}{\pi\alpha}\left\{\alpha\vartheta_n Ch\frac{nx}{\alpha}-(\alpha,\vartheta_n)\,Sh\frac{nx}{\alpha}\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{b}{\pi\beta}\left\{\beta\vartheta_n\,Ch\frac{nx}{\beta}-(\beta,\vartheta_n)\,Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$(238.\mathrm{I})\quad V_1=\frac{4qb}{\pi^3}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[\frac{b}{\beta}\left(\frac{2C}{\bar{B}_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right)\left\{\beta\vartheta_n\,Ch\frac{nx}{\beta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\beta,\vartheta_n)\,Sh\frac{nx}{\beta}\right\}-\frac{b}{\alpha}\left(\frac{2C}{\bar{B}_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\right)\left\{\alpha\vartheta_n Ch\frac{nx}{\alpha}-(\alpha,\vartheta_n)\,Sh\frac{nx}{\alpha}\right\}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(239.\mathrm{I})\quad V_2=\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[1+\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\alpha,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\vartheta_n\,Sh\frac{nx}{\alpha}\right\}-\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{2C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\beta,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\beta}-\beta\vartheta_n Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$(240.\mathrm{I})\quad (R_1)_{x=0}=-\frac{4q}{\pi}(\alpha+\beta)\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^2}(\beta-\alpha)\vartheta_n\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(241.\mathrm{I})\quad (R_1)_{x=a}=\frac{4qb}{\pi^3}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[\frac{b}{\beta}\left(\frac{4C}{\bar{B}_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right)\left\{\beta\vartheta_n Ch\frac{na}{\beta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\beta\vartheta_n)\,Sh\frac{na}{\beta}\right\}-\frac{b}{\alpha}\left(\frac{4C}{\bar{B}_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\right)\left\{\alpha\vartheta_n Ch\frac{na}{\alpha}-(\alpha,\vartheta_n)Sh\frac{na}{\alpha}\right\}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(242.I)

$$(R_2)_{y=0}=-\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[1+\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\alpha,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\vartheta_n\,Sh\frac{nx}{\alpha}\right\}-\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\left(\frac{4C}{\bar{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\beta,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\beta}-\beta\vartheta_n\,Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\right]$$

(243.I)

$$(\bar{R}_2)_{y=b}=\frac{4qb}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^n(nb_1y_1)}{n^2}\left[1+\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\alpha,\vartheta_n)\,Ch\frac{nx}{\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\vartheta_n Sh\frac{nx}{\alpha}\right\}-\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\beta,\vartheta_n)Ch\frac{nx}{\beta}-\beta\vartheta_n\,Sh\frac{nx}{\beta}\right\}\right]$$

$$(244.\mathrm{I})\qquad (\bar{R}_1)_{x=0}=-\frac{4qb\,(\alpha+\beta)}{\pi^2}\sum_n\frac{[1+(-1)^{n-1}](nb_1y_1)}{n^3}(\beta-\alpha)\,\vartheta_n$$

$$(245.\mathrm{I})\quad (\bar{R}_1)_{x=a}=\frac{4qb^2}{\pi^4}\cdot\frac{\bar{B}_1}{\bar{\bar{B}}_2}\sum_n\frac{[1+(-1)^{n-1}](nb_1y_1)}{n^3}\left[\frac{b}{\beta}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_1}+\frac{1}{m_2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right)\left\{\beta\vartheta_n\,Ch\frac{na}{\beta}-(\beta,\vartheta_n)Sh\frac{na}{\beta}\right\}-\frac{b}{\alpha}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\right)\left\{\alpha\vartheta_n\,Ch\frac{na}{\alpha}-\right.$$

$$\left.\left.-(\alpha,\vartheta_n)Sh\frac{na}{\alpha}\right\}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$(246.\mathrm{I})\quad (\bar{R}_2)_{y=0}=-\frac{4qab}{\pi^2}\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[1-\frac{1}{n}\,\frac{(\beta^2-\alpha^2)\vartheta_n}{a}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\alpha}{a}\left\{1-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\alpha,\vartheta_n)\,Sh\frac{na}{\alpha}-\alpha\vartheta_n Ch\frac{na}{\alpha}\right\}-\frac{1}{n}\cdot\frac{\beta}{a}\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\beta,\vartheta_n)\,Sh\frac{na}{\beta}-\beta\vartheta_n Ch\frac{na}{\beta}\right\}\right]$$

$$(247.\mathrm{I})\quad (\bar{R}_2)_{y=b}=\frac{4qab}{\pi^2}\sum_n\frac{(-1)^n(nb_1y_1)}{n^2}\left[1-\frac{1}{n}\,\frac{(\beta^2-\alpha^2)\vartheta_n}{a}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\alpha}{a}\left\{1-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{\pi^2\alpha^2}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\alpha,\vartheta_n)\,Sh\frac{na}{\alpha}-\alpha\vartheta_n Ch\frac{na}{\alpha}\right\}-\frac{1}{n}\cdot\frac{\beta}{a}\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{m_1}\right)\right\}\left\{(\beta,\vartheta_n)\,Sh\frac{na}{\beta}-\beta\vartheta_n Ch\frac{na}{\beta}\right\}\right]$$

$$(248.\mathrm{I})\quad \bar{R}_{a,0}=\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{4C}{\bar{\bar{B}}_2}\sum_n\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[\frac{b}{\pi\alpha}\left\{\alpha\vartheta_n Ch\frac{na}{\alpha}-(\alpha,\vartheta_n)\,Sh\frac{na}{\alpha}\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{b}{\pi\beta}\left\{\beta\vartheta_n\,Ch\frac{na}{\beta}-(\beta,\vartheta_n)\,Sh\frac{na}{\beta}\right\}\right]$$

$$(249.\ \mathrm{I})\quad \hat{R}_{a,b} = -\frac{4qb^2}{\pi^3}\cdot\frac{4C}{\overline{B}_2}\sum_n \frac{(-1)^n(nb_1y_1)}{n^3}\left[\frac{b}{\pi\alpha}\left\{\alpha\vartheta_n Ch\frac{na}{\alpha} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(\alpha,\vartheta_n)\, Sh\frac{na}{\alpha}\right\} - \frac{b}{\pi\beta}\left\{\beta\vartheta_n Ch\frac{na}{\beta} - (\beta,\vartheta_n)\, Sh\frac{na}{\beta}\right\}\right]$$

Dla sprawdzenia ostatnich formuł dobrze jest zastosować oczywisty warunek równowagi:

$$(\overline{R}_1)_{x=0} + (\overline{R}_1)_{x=a} + (\overline{R}_2)_{y=0} + (\overline{R}_2)_{y=b} + \Sigma\hat{R} + qab_1 = 0$$

Że znalezione powyżej wartości czynią istotnie zadość temu warunkowi, łatwo okazać, uwzględniając związek identyczny:

$$\frac{b^2}{\pi^2}\cdot\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}\left(\frac{4C}{\overline{B}_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\right) - \beta^2\left\{1-\frac{b^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{4C}{\overline{B}_2}+\frac{1}{m_1}\right)\right\} = \frac{b^2}{\pi^2}\cdot\frac{4C}{\overline{B}_2}.$$

W powyższej postaci możnaby znalezione wzory stosować oczywiście nietylko w przypadku sztywnego podparcia utwierdzonego brzegu, lecz także w ogólniejszym przypadku podatności tego brzegu, gdyby udało się znaleść odpowiadające wyrażenie dla ϑ_n, np. za pomocą metody Ritz'a. Określone równaniem (231a) wartości ϑ_n są naturalnie ważne tylko dla sztywnego podparcia.

To wszystko odnosiło się do przypadku I ($H^2 > \overline{B}_1\overline{B}_2$). Wcale uciążliwe przejście do odpowiadających wzorów obu innych przypadków idzie stosunkowo najprędzej, gdy najpierw znajdziemy odpowiadający wzór III-go przypadku ($H^2 < \overline{B}_1\overline{B}_2$) zapomocą podstawienia:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha'}+\frac{i}{\beta'},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha'}-\frac{i}{\beta'},$$

a stąd przez przyjęcie $\beta'=\infty$ $\left(\alpha=\beta=\gamma=\frac{b}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}\right)$ wyprowadzimy wzór dla przypadku II. Tą drogą znaleziono następujące postaci równania powierzchni ugięcia.

W przypadku II ($H^2=\overline{B}_1\overline{B}_2$)

$$(231.\mathrm{II})\quad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5\overline{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\dots}\frac{(nb_1y_1)}{n^5}\left[1-\left(1+C_n\frac{nx}{\gamma}\right)Ch\frac{nx}{\gamma}+\right.$$

$$\left. +\left(C_n + C_n'\frac{nx}{\gamma}\right)Sh\frac{nx}{\gamma}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

z oznaczeniem:

$$
(231.b)[1]\quad \left|\begin{aligned}
C_n &= \frac{Ch\frac{2na}{\gamma}+1-2Ch\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}Sh\frac{na}{\gamma}}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}},\\
C'_n &= \frac{Sh\frac{2na}{\gamma}-Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}Ch\frac{na}{\gamma}}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}},
\end{aligned}\right.
$$

[1] Stąd wynikają następujące związki między C i C' pożyteczne w dalszych rachunkach:

$$C'_n\,Ch\frac{na}{\gamma}-C_n\,Sh\frac{na}{\gamma}=\tfrac{1}{2},$$

$$(1-C'_n)\,Sh\frac{na}{\gamma}-\tfrac{1}{2}\frac{na}{\gamma}=\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}},$$

$$C'_n\,Sh\frac{na}{\gamma}-C_n\,Ch\frac{na}{\gamma}=\frac{\left(Ch\frac{na}{\gamma}-1\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}},$$

$$\tfrac{3}{2}a-\frac{\gamma}{n}\left\{2C_n\left(1-Ch\frac{na}{\gamma}\right)+(1+C'_n)\,Sh\frac{na}{\gamma}\right\}=a-$$

$$-\frac{\gamma}{n}\left\{2C_n+\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2+2\left(Ch\frac{na}{\gamma}-1\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}\right\},$$

$$Sh\frac{na}{\gamma}\left(1+C_n\frac{na}{\gamma}-3C'_n\right)+Ch\frac{na}{\gamma}\left(2C_n-C'_n\frac{na}{\gamma}\right)=$$

$$=-\frac{2\left(Ch\frac{na}{\gamma}-1\right)^2-\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}$$

a w przypadku III ($H^2 < \overline{B}_1\overline{B}_2$):

$$(231.\mathrm{III})\qquad \zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5\overline{B}_2}\sum_{n=1,2,3,\dots}\frac{(nb_1y_1)}{n^5}\Big[1 - Ch\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'} + \alpha' D_n Sh\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'} -$$

$$- \beta' D_n\, Ch\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'} + D'_n Sh\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\Big]\sin\frac{n\pi y}{b},$$

z oznaczeniami:

(231c)

$$D_n = \frac{Ch\dfrac{2na}{\alpha'} + \cos\dfrac{2na}{\beta'} - 2\,Ch\dfrac{na}{\alpha'}\cos\dfrac{na}{\beta'} - \left(\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\alpha'}{\beta'}\right)Sh\dfrac{na}{\alpha'}\sin\dfrac{na}{\beta'}}{\alpha'\, Sh\dfrac{2na}{\alpha'} - \beta'\sin\dfrac{2na}{\beta'}}$$

$$D'_n = \frac{\beta' Sh\dfrac{2na}{\alpha'} + \alpha'\sin\dfrac{2na}{\beta'} - \left(\dfrac{\beta'}{\alpha'} + \dfrac{\alpha'}{\beta'}\right)\left(\beta' Ch\dfrac{na}{\alpha'}\sin\dfrac{na}{\beta'} + \alpha'\, Sh\dfrac{na}{\alpha'}\cos\dfrac{na}{\beta'}\right)}{\alpha'\, Sh\dfrac{2na}{\alpha'} - \beta'\sin\dfrac{2na}{\beta'}}$$

Jako próba rachunku posłużyły przytem warunki krańcowe:

$$(\zeta)_{x=0} = (\zeta)_{x=a} = 0$$

Różniczkowanie równania (231 : II) prowadzi do następujących wyrażeń dla funkcyj $\mu_{11}, \mu_{22}, \dots$ wprowadzonych w § 23:

(250.II)

$$\mu_{11} = \frac{4}{\pi^3}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[\left(C_n - C'_n\frac{nx}{\gamma}\right)Sh\frac{nx}{\gamma} + \left(1 + C_n\frac{nx}{\gamma} - 2C'_n\right)Ch\frac{nx}{\gamma}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\mu_{22} = \frac{4}{\pi^3}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[1 - \left(1 + C_n\frac{nx}{\gamma}\right)Ch\frac{nx}{\gamma} + \left(C_n + C'_n\frac{nx}{\gamma}\right)Sh\frac{nx}{\gamma}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\mu_{12} = \frac{4}{\pi^3}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\left[\left(1 + C_n\frac{nx}{\gamma} - C'_n\right)Sh\frac{nx}{\gamma} - C'_n\frac{nx}{\gamma}Ch\frac{nx}{\gamma}\right]\cos\frac{n\pi y}{b};$$

(251.II)

$$\mu_{111} = \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[\left(1 + C_n\frac{nx}{\gamma} - 3C'_n\right)Sh\frac{nx}{\gamma} + \left(2C_n - C'_n\frac{nx}{\gamma}\right)Ch\frac{nx}{\gamma}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\mu_{122} = -\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[\left(1 + C_n\frac{nx}{\gamma} - C'_n\right)Sh\frac{nx}{\gamma} - C'_n\frac{nx}{\gamma}\,Ch\frac{nx}{\gamma}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(251 . II)

$$\mu_{222}=\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[1-\left(1+C_n\frac{nx}{\gamma}\right)Ch\frac{nx}{\gamma}+\left(C_n+C_n'\frac{nx}{\gamma}\right)Sh\frac{nx}{\gamma}\right]\cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$\mu_{112}=\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[\left(1+C_n\frac{nx}{\gamma}-2C_n'\right)Ch\frac{nx}{\gamma}+\left(C_n-C_n'\frac{nx}{\gamma}\right)Sh\frac{nx}{\gamma}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}$$

Stąd wynika dalej

(252 . II)

$$\bar{\mu}_{111}=\int_0^b\mu_{111}dy=\frac{4b}{\pi^3}\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^3}\left[\left(1+C_n\frac{nx}{\gamma}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-3C_n'\right)Sh\frac{nx}{\gamma}+\left(2C_n-C_n'\frac{nx}{\gamma}\right)Ch\frac{nx}{\gamma}\right],$$

$$\bar{\mu}_{122}=\int_0^b\mu_{122}dy=-\frac{4b}{\pi^3}\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^3}\left[\left(1+C_n\frac{nx}{\gamma}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-C_n'\right)Sh\frac{nx}{\gamma}-C_n'\frac{nx}{\gamma}Ch\frac{nx}{\gamma}\right],$$

$$\bar{\mu}_{222}=\int_0^a\mu_{222}dx=\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[a-\frac{\gamma}{n}\left\{2C_n+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2+2\left(Ch\frac{na}{\gamma}-1\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}\right\}\right]\cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$\bar{\mu}_{112}=\int_0^a\mu_{112}dx=\frac{4\gamma}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^3}\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Teraz obliczymy dla kontroli całkowite reakcye brzegów, tudzież siły narożne $\bar{R}$ i znajdujemy najpierw dla utwierdzonego brzegu $x=0$:

(244 . II)

$$(\bar{R}_1)_{x=0}=-\left[\frac{\bar{\mu}_{111}}{b}+\frac{\bar{\mu}_{122}}{b}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right]_{x=0}\frac{qab}{\varepsilon}=$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}qab\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^2}\cdot\frac{\gamma}{na}\cdot 2C_n.$$

ponieważ $\bar{\mu}_{122}$ znika dla $x=0$. Dla przeciwległego poziomo swobodnie podpartego brzegu $x=a$ wypada z (252 . II):

(245 . II)

$$(\bar{\mu}_{111})_{x=a} = -\frac{4b}{\pi^3}\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^3}\cdot\frac{2\left(Ch\frac{na}{\gamma}-1\right)^2-\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}$$

$$(\bar{\mu}_{122})_{x=a} = -\frac{4b}{\pi^3}\sum\frac{(nb_1y_1)[1+(-1)^{n-1}]}{n^3}\cdot\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}},$$

$$(\bar{R}_1)_{x=a} = \left[\frac{\bar{\mu}_{111}}{b}+\frac{\bar{\mu}_{122}}{b}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{4C}{\bar{B}_1}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\right]_{x=a}\cdot\frac{qab}{\varepsilon}$$

Dla poziomo swobodnie podpartego brzegu $y=0$ jest

(246 . II)

$$(\bar{\mu}_{222})_{y=0} = \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\left[a-\frac{\gamma}{n}\left\{2C_n+\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2+2\left(Ch\frac{na}{\gamma}-1\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}\right\}\right],$$

$$(\bar{\mu}_{112})_{y=0} = \frac{4\gamma}{\pi^2}\sum\frac{(n\,b_1y_1)}{n^3}\cdot\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}},$$

$$(\bar{R}_2)_{y=0} = -\left[\frac{\bar{\mu}_{222}}{a}+\frac{\bar{\mu}_{112}}{a}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right]_{y=0} qab$$

Tak samo znajdujemy dla swobodnie poziomo podpartego brzegu $y=b$, według wzorów (252 . II):

(247 . II)

$$(\bar{\mu}_{222})_{y=b} = \frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)(-1)^n}{n^2}\left[a-\frac{\gamma}{n}\left\{2C_n+\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2+2\left(Ch\frac{na}{\gamma}-1\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}\right\}\right],$$

(247 . II)

$$(\bar{\mu}_{112})_{y=b} = \frac{4\gamma}{\pi^2}\sum \frac{(nb_1y_1)(-1)^n}{n^3}\cdot\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}$$

$$(\bar{R}_2)_{y=b} = \left[\frac{\bar{\mu}_{222}}{a}+\frac{\bar{\mu}_{112}}{a}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{4C}{\bar{B}_2}\right)\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\right]_{y=0} qab.$$

Dla narożnych reakcyj wypadają nakoniec wartości:

$$\hat{R}_{0,0} = \hat{R}_{0,b} = 0,$$

$$(248.\,II)\quad \hat{R}_{a0} = \left[\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)}{n^2}\cdot\frac{\gamma}{na}\cdot\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}\right]\frac{4C}{\bar{B}_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot qab,$$

$$(249.\,II)\quad \hat{R}_{ab} = \left[\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(nb_1y_1)(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot\frac{\gamma}{na}\cdot\frac{\left(Sh\frac{na}{\gamma}-\frac{na}{\gamma}\right)^2}{Sh\frac{2na}{\gamma}-\frac{2na}{\gamma}}\right]\frac{4C}{\bar{B}_2}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\cdot qab.$$

Nietrudno się przekonać, że uzyskane wzory czynią identycznie zadość warunkom równowagi sił zewnętrznych.

W przypadku całkowitego równomiernego obciążenia wypadnie w powyższych wzorach przyjąć:

$$(nb_1y_1) = 1 \quad \text{i} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Wtedy staje się powierzchnia ugięcia oczywiście symetryczną względem płaszczyzny $y = \frac{b}{2}$. Najniższe punkty przekrojów Y powierzchni ugięcia leżą na krzywej

$$(253.\,II)\quad \Big/_{y=\frac{b}{2}}\zeta = \frac{4qb^4}{\pi^5\bar{B}_2}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5}\left[1-\left(1+C_n\frac{nx}{\gamma}\right)Ch\frac{nx}{\gamma}+\right.$$

$$\left.+\left(C_n+C_n'\frac{nx}{\gamma}\right)Sh\frac{nx}{\gamma}\right].$$

Dla wyznaczenia strzałki ugięcia trzeba przeto rozwiązać najpierw równanie przestępne:

$$\sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4}\left[C'_n \frac{nx}{\gamma} Ch\frac{nx}{\gamma} - \left(1 + C_n \frac{nx}{\gamma} - C'_n\right) Sh\frac{nx}{\gamma}\right] = 0,$$

które powstaje z warunku $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$. Pierwiastek x_1 rzeczywisty tego równania jest funkcyą sprowadzonego stosunku boków

$$\varepsilon = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}} = \frac{a}{\pi \gamma}$$

i jest widocznem, że jego wartość leży między

$$a - \frac{1+\sqrt{33}}{16} a = 0{,}5785\, a$$

a $0{,}5\, a$. Pierwsza wartość odpowiada granicznemu przypadkowi bardzo małego ε a druga drugiemu granicznemu przypadkowi płyty nieskończenie długiej ($\varepsilon = \infty$). W pierwszym bowiem granicznym przypadku uginają się środkowe skrawki X płyty dokładnie tak samo, jak analogicznie podparta i obciążona belka, w drugim zaś jest krzywizna linii ugięcia środkowego skrawka X widocznie znikomo mała na wielkiej długości po obu stronach środka. Z tego wynika, że z praktycznie wystarczającą dokładnością można obliczać strzałkę ugięcia podług przybliżonego wzoru:

$$f = \sim (\zeta)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$$

Ta przybliżona wartość będzie w najgorszym przypadku mniej niż o 4% za małą. Ugięcie bowiem odpowiadającej belki o rozpiętości a i linii ugięcia

$$\zeta = \frac{1}{48}\frac{qa^4}{EI}\left(3 - 5\frac{x}{a} + 2\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}$$

wynosi dla $x = \frac{a}{2}$:

$$\zeta = \frac{1}{192}\frac{qa^4}{EI},$$

zaś dla $x = \frac{15-\sqrt{33}}{16} a = 0{,}5785\, a$.

$$\zeta = \frac{1}{185}\frac{qa^4}{EI} = f.$$

Otóż ta druga wartość jest od pierwszej tylko około 3,8% większą.

O wiele jeszcze dokładniejszą wartość przybliżoną strzałki ugięcia można znaleźć wstawiając w rów. (253.II) wartość interpolacyjną

$$x = (0{,}5 + 0{,}0785\, e^{-\varepsilon})\, a,$$

to wyrażenie bowiem przeistacza się w granicznych przypadkach $\varepsilon = 0$ i $\varepsilon = \infty$ na

$$x = 0{,}5785\, a, \text{ względnie } x = 0{,}5\, a.$$

Jeszcze uciążliwszem jest wyznaczenie największego dodatniego momentu zgięcia, zważywszy jednak, że ujemne momenty utwierdzenia osiągają bezwątpienia o wiele większe wartości, zadowolimy się obliczeniem tych ostatnich. Wzory (250.II) dają:

$$(\mu_{11})_{x=0} = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{1}{n^3}(1 - 2C'_n)\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad (\mu_{22})_{x=0} = 0.$$

Stąd wypadają największe wartości momentów utwierdzenia w środku brzegu stwierdzonego $\left(\text{dla } y = \frac{b}{2}\right)$:

$$(254.\mathrm{II})\quad \begin{cases} M_{1max} = -\dfrac{4}{\pi^3} qb^2 \sqrt{\dfrac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}} \displaystyle\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{2C'_n - 1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \\ M_2 = -\dfrac{4}{\pi^3} qb^2 \dfrac{1}{m_1}\sqrt{\dfrac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}} \displaystyle\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{2C'_n - 1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

W granicznym przypadku bardzo długiej płyty ($a = \infty$) staje się $\lim C'_n = 1$, a znalezione wartości momentów przeistaczają się na następujące:

$$(255.\mathrm{II})\quad M_{1max} = -\tfrac{1}{8}\, qb^2 \sqrt{\frac{\overline{B}_1}{\overline{B}_2}}, \quad M_2 = -\tfrac{1}{8}\, qb^2 \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}$$

W drugim granicznym przypadku bardzo krótkiej płyty

$(b=\infty,\ \gamma=\infty)$ znajdujemy łatwo przy pomocy rozwinięć na szereg funkcyj hyperbolicznych *Sh* i *Ch*:

$$\lim\,(2C_p'-1)=\tfrac{1}{8}\frac{n^2a^2}{\gamma^2}+\text{ wyższe potęgi wielkości }\frac{1}{\gamma}.$$

A zatem:

$$(256.\mathrm{II})\qquad M_{1\,max}=-\tfrac{1}{8}qa^2,\quad M_2=\frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}\,M_{1\,max}.$$

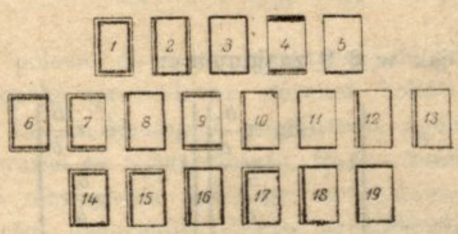
Pierwszy wynik był od razu do przewidzenia, ponieważ w tym granicznym przypadku muszą skrawki X środkowej części płyty ulegać zginaniu walcowemu. Momenty zginające M_1 rozkładają się przeto w tych skrawkach dokładnie tak samo, jak w analogicznie podpartej i obciążonej belce.

§ 26. Dziewiętnaście możliwych prostych sposobów ustalenia obwodu płyty prostokątnej. Zagadnienie płyty dokoła utwierdzonej. Przybliżone wzory interpolacyjne.

Ilość możliwych sposobów podparcia prostokątnej płyty jest dość znaczna, nawet gdy się ograniczymy do przypadków jednorodnego podparcia każdego poszczególnego brzegu i pominiemy przypadki podparcia rogów w jednym punkcie. Ten ostatni rodzaj podparcia ma oczywiście praktyczne znaczenie tylko w połączeniu z podparciem brzegów belkami, które nazwiemy *krawężnikami* (Randträger); dlatego rozwiązania, które tej okoliczności nie uwzględniają, nie budzą praktycznego zainteresowania. Ze względu na to, że jeden, dwa, lub trzy brzegi płyty mogą być także zupełnie swobodne (przy odpowiedniem podparciu lub utwierdzeniu pozostałych brzegów), wypada 19 statycznie możebnych przypadków ustalenia, które uzmysławia rysunek 27. Brzegi swobodne, podparte i utwierdzone są na nim odróżnione odpowiednio linią cienką, grubszą i podwójną. Wszystkie możliwe przypadki, które wypływają jako kombinacye brzegów swobodnych, podpartych i utwierdzonych, dadzą się podzielić na następujące trzy grupy:

1) Grupa podwójnie symetryczna. Z sześciu możliwych przypadków tej grupy odpada oczywiście przypadek czterech brzegów wolnych i pozostają przypadki 1 do 5 (rys. 27).

2) Grupa pojedyńczo symetryczna. Z dziewięciu możebnych kombinacyj tej grupy trzeba wyłączyć połączenie jednego brzegu podpartego z trzema swobodnymi, jako statycznie niedopuszczalne; pozostają więc przypadki 6 do 13.



Rys. 27.

3) Grupa niesymetryczna obejmuje sześć przypadków a mianowicie 14 do 19, atoli trzy ostatnie przypadki 17, 18 i 19 nie mogą liczyć na praktyczne zastosowanie.

Z pośród pozostałych praktycznie ważnych przypadków ustalenia od 1 do 16-stego traktowano w niniejszej pracy przypadki 2, 3 i 8.

Rozwiązania dla tych trzech przypadków dały się wyprowadzić z odpowiadających rozwiązań dla nieskończenie długiej płyty, podłużnymi brzegami swobodnie podpartej. Odnośna metoda zawodzi w innych przypadkach. Kilka jeszcze przypadków można załatwić zapomocą przyjęcia Lévy'ego, ta droga nie prowadzi jednakże do celu w prostym przypadku utwierdzenia wszystkich czterech brzegów (rys. 27, 1), którym teraz się zajmiemy. On należy do grupy tych najważniejszych praktycznie przypadków 1, 2, 3, 6, 8 i 14, w których nie ma brzegów swobodnych.

Do rozwiązania przybliżonego możnaby dojść na podobnej drodze, jaką obraliśmy w § 10 dla płyty dokoła swobodnie podpartej. Odpowiadające trygonometryczne wyrażenie dla powierzchni ugięcia

$$(257) \qquad \zeta = \frac{f}{4}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{b}\right)$$

zastosował, jak się zdaje, najpierw prof. H. Lorenz do płyty równokierunkowej, obciążonej środkowo symetrycznie. To równanie odnosi się do brzegów płyty jako osi spółrzędnych i czyni widocznie zadość warunkom krańcowym:

$$\zeta = 0 \text{ dla } x = 0, \text{ albo } x = a; \; y = 0 \text{ albo } y = b \text{ i}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \text{ dla } x = 0, \text{ albo } x = a; \; \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \text{ dla } y = 0,$$

albo $y = b$.

Podobnie jak w § 9 znajdujemy:

$$(258) \left\{ \begin{aligned} & f = \frac{q a_1 b_1}{\pi^4} \cdot \frac{ab}{H} \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{\sin \pi \frac{a_1}{a}}{\pi \frac{a_1}{a}}\right)\left(1 + \dfrac{\sin \pi \frac{b_1}{b}}{\pi \frac{b_1}{b}}\right)}{3 \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\overline{B}_1}{H} + 3 \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\overline{B}_2}{H} + 2} \\ & \text{albo} \\ & f = \frac{1}{3\pi^4} q \frac{a_1}{a} \frac{b_1}{b} \frac{b^4}{\overline{B}_2} \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{\sin \pi \frac{a_1}{a}}{\pi \frac{a_1}{a}}\right)\left(1 + \dfrac{\sin \pi \frac{b_1}{b}}{\pi \frac{b_1}{b}}\right)}{1 + \frac{2}{3} \frac{\eta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \end{aligned} \right.$$

z dawniejszemi skróceniami: $\varepsilon = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{\overline{B}_2}{\overline{B}_1}}$, $\eta = \frac{H}{\sqrt{\overline{B}_1 \overline{B}_2}}$, gdy obciążenie jest równomiernie rozłożone na prostokącie $a_1 b_1$, współśrodkowym z obwodem płyty. To wyrażenie daje w szczególnym przypadku płyty równokierunkowej ($\overline{B}_1 = \overline{B}_2 = H = \overline{B}$, $a_1 = a$, $b_1 = b$)

dla $\varepsilon = \frac{a}{b} =$	1	$\frac{10}{7}$	2	∞
$f : \frac{qb^4}{\overline{B}} =$	0,00128	0,00218	0,00278	0,00342

zamiast odpowiadających dokładnych wartości (podług A. Nádai'a):

0,00127	0,00208	0,00249	0,00260

Przybliżone wartości dla strzałki ugięcia są więc za wielkie odpowiednio o mniej więcej

1 5 12 31%.

a wzór

$$f = \frac{qb^4}{3\pi^4 \overline{B}_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\frac{\eta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \tag{258a}$$

można wogóle polecić do celów praktycznych jako dostatecznie przybliżony, dopóki sprowadzony stosunek boków ε leży między granicami 1 a 1,5. O ile stopień przybliżenia ogólniejszego wzoru (258) można uważać za wystarczający, trudno rozstrzygnąć wobec braku ścisłego rozwiązania nawet w szczególnym przypadku równokierunkowości materyału. Pewną oryentacyę w tej kwestyi umożliwi rozpatrzenie tej powierzchni obciążenia, dla której wyrażenie (257) przedstawia dokładnie odpowiadającą powierzchnię ugięcia. Wstawiamy przeto to wyrażenie w równanie różniczkowe powierzchni ugięcia i otrzymujemy:

$$p = 4\pi^4 f\left[\left(\frac{\overline{B}_1}{a^4} + \frac{\overline{B}_2}{b^4} + \frac{2H}{a^2b^2}\right)\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b} - \frac{\overline{B}_1}{a^4}\cos\frac{2\pi x}{a} - \frac{\overline{B}_2}{b^4}\cos\frac{2\pi y}{b}\right] \tag{259}$$

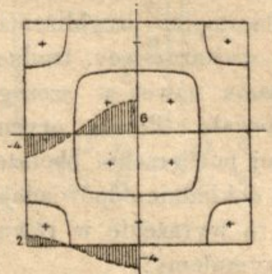
jako szukane równanie powierzchni obciążenia. Nazwiemy ją dla krótkości „teoretyczną powierzchnią obciążenia". Jej równanie przybiera w szczególnym przypadku płyty kwadratowej i równokierunkowej ($a = b$, $\overline{B}_1 = \overline{B}_2 = H = \overline{B}$) postać:

$$p = 4\pi^4 \frac{\overline{B}f}{a^4}\left(4\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}\right) \tag{259a}$$

Łatwo się przekonać, że p nie jest na całej płycie dodatnie, jak to było w analogicznem rozwiązaniu dla płyty dokoła swobodnie podpartej. Teraz powierzchnia obciążenia składa się środkowej części dodatniej (rysunek 28), otoczonej dokoła obszarem obciążenia powierzchniowego ujemnego. W otoczeniu rogów płyty staje się obciążenie znowu dodatniem. Względne wartości p są na rysunku zanotowane w kilku wybitnych punktach. Poniższa zaś tabliczka zawiera spółrzędne pewnej liczby punktów linii zerowych:

$\frac{x}{a}=$	0	0,1	0,166	0,191	0,196	0,250	0,3	0,333	0,4	0,5
$\frac{y}{a}=$	0,196	0,191	0,166	0,1	0	0,250	0,228	0,223	0,219	0,218

Na pierwszy rzut oka jest niespodzianką, że przybliżone rozwiązanie daje w tych warunkach tak dokładne wartości dla strzałki



Rys. 28.

ugięcia płyty całkowicie równomiernie obciążonej; zważywszy jednak, że większe rzędne ujemne teoretycznej powierzchni obciążenia są skupione około środków brzegów, rozumiemy jasno, że ich wpływ na ugięcie środkowej części płyty może być tylko nieznacznym. Z tego powodu mamy prawo przypuszczać, że wzór (258) dostarczy także wtedy dość dokładnych wartości dla strzałki ugięcia, gdy dane obciążenie jest równomiernie rozłożone na współśrodkowym prostokącie $a_1 b_1$, o ile liczby stosunkowe $a_1 : a$ i $b_1 : b$ nie mają wartości ani zbyt małych, ani też zbyt różniących się od siebie, a zarazem spełnia się warunek

$$1 \leqq \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}} \leqq 1{,}5.$$

W granicznym przypadku ciężaru skupionego w środku wypada z wzoru (258) z pewnością za mała wartość strzałki ugięcia. Błąd będzie zapewne tego samego rzędu, co odpowiadający błąd wzoru (27) w § 10 dla płyty swobodnie podpartej. Ten ostatni wzór daje dla $a=b$, $\bar{B}_1=\bar{B}_2=H=\bar{B}$.

$$f=\frac{1}{\pi^4}\frac{Pa^2}{\bar{B}}=0{,}01027\frac{Pa^2}{\bar{B}},$$

podczas gdy według ścisłego wzoru (50) wypada spółczynnik 0,01156, a więc około 13%, większy.

Zważywszy teraz, że

$$\lim_{a_1=0} \frac{\sin \pi \frac{a_1}{a}}{\pi \frac{a_1}{a}} = 1,$$

widzimy, że skupienie całkowitego obciążenia prostokątnej płyty dokoła utwierdzonej w jej środku powiększa strzałkę ugięcia więcej niż 4 krotnie, jeżeli sprowadzony stosunek boków ε nie wiele zbacza od 1.

Inaczej ma się rzecz, gdy chcemy przyjęte wyrażenie (257) zastosować do znalezienia przybliżonych wartości dla momentów utwierdzenia i reakcyj podporowych. Jest bowiem rzeczą jasną, że momenty utwierdzające, które odpowiadają naszej teoretycznej powierzchni obciążenia, muszą w każdym razie tak silnie zbaczać od szukanych wartości, że trudno się spodziewać nawet grubego przybliżenia. W samej rzeczy daje dokładniejsze obliczenie w przypadku całkowitego równomiernego obciążenia płyty równokierunkowej dwie skrajne wartości momentów zgięcia, a największa wartość ujemnego momentu M_2 w środku brzegu podłużnego a jest około 2 razy większa od największej wartości dodatniego momentu M_2 w środku płyty. Natomiast przyjęte wyrażenie (257) prowadzi do prawie równej wielkości obu powyższych wartości momentów.

Ale i przez uogólnienie przyjętego wyrażenia (257) w postaci:

$$\text{(257a)} \qquad \zeta = \sum_r \sum_s A_{rs} \left(1 - \cos \frac{2r\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos \frac{2s\pi y}{b}\right), \; (r, s = 1, 2, 3)$$

użytej przez p. M. Mesnager'a w połączeniu z metodą Ritz'a [1] nie zyskujemy nic, albowiem niezależnie od wielkości spółczynników A_{rs} $(r, s = 1, 2, 3, ..)$ pozostaje widocznie

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{x=\frac{a}{2}} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_{y=\frac{b}{2}};$$

co prowadzi znowu do tego samego stosunku obu skrajnych war-

[1] C. R. 1916, T. 163, p. 661.

tości momentów. Temu zaś wynikowi można przeciwstawić fakt znany z elementarnej teoryi zgięcia, że momenty utwierdzające w poprzecznych skrawkach nieskończenie długiej płyty posiadają dokładnie podwójną wartość największego momentu dodatniego w środku tychże skrawków. Już to samo wystarcza, aby każde rozwiązanie postaci (257a) uznać za błędne, atoli nietrudno też dowieść, że to rozwiązanie nie czyni zadość równaniu różniczkowemu powierzchni ugięcia. Mamy tu przed sobą pouczający przykład, który nawołuje do pewnej ostrożności przy zastosowaniu metody Ritz'a. Spełnienie warunków krańcowych przez każdy poszczególny wyraz podwójnej sumy przyjętego ogólnego wyrażenia:

$$\zeta = \sum_r \sum_s A_{rs}\, \varphi_r(x)\, \psi_s(y)$$

jest konieczne, ale jeszcze nie wystarczające, aby ta suma (przyjąwszy, że wyznaczamy spółczynniki A_{rs} według metody Ritz'a) przy rosnących liczbach porządkowych r i s zdążała w granicy do szukanego rozwiązania równania różniczkowego powierzchni ugięcia. Ma to oczywiście związek z kwestyą rozwijalności szukanej funkcyi ζ na szereg funkcyj $\varphi_r\, \psi_s$; w naszych jednak zadaniach można obejść analityczne trudności tego rodzaju, wstawiając następujące po sobie przybliżone rozwiązania w wyrażenie różniczkowe

$$\bar{B}_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} - p$$

i przekonywując się, czy to wyrażenie zdąża do zera ze wzrostem liczby wyrazów w rozwiązaniu przybliżonem.

Przy pomocy wyrażenia przyjętego przez samego Ritz'a możnaby teoretycznie posunąć dokładność obliczenia dowolnie daleko, a stopień zbieżności jego metody nie pozostawiałby wówczas nic do życzenia; atoli ta żmudna droga nadaje się tylko do obliczeń liczbowych i mogłaby dla płyt nierównokierunkowych mieć praktyczne zastosowanie tylko w II-gim przypadku ($H^2 = \bar{B}_1 \bar{B}_2$), ponieważ wtedy wszelkie wyniki teoretyczne, znalezione dla płyty równokierunkowej, dają się przenieść na płytę prostokątnie nierównokierunkową. Gdy jednak zależy nam na ogólnych i prostych wzorach przybliżonych dla przypadku całkowitego równomiernego obciążenia, to, jak się zdaje, najkorzystniej przyjąć wyrażenie

(260) $$\zeta = 256 f \frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 \frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{y}{b}\right)^2$$

dla powierzchni ugięcia. Ono wypływa z łatwo nasuwającej się myśli, że linia ugięcia środkowego przekroju płyty $x=\frac{a}{2}$ przechodzi dla bardzo wielkiego a w linię ugięcia belki

$$\zeta = \frac{ql^4}{24EI}\cdot\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2.$$

Nowe wyrażenie czyni widocznie zadość warunkom krańcowym, a odpowiadająca teoretyczna powierzchnia obciążenia ma w szczególnym przypadku równokierunkowości materyału płyty ($\bar{B}_1=\bar{B}_2=H=\bar{B}$) równanie:

(261) $$p=\frac{24.256\,f}{\bar{B}}\left[\frac{1}{b^4}\cdot\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{a^4}\cdot\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{y}{b}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6a^2b^2}\left(1-\frac{6x}{a}+\frac{6x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{6y}{b}+\frac{6y^2}{b^2}\right)\right]$$

Na podstawie niżej umieszczonej tabliczki wartości $\bar{B}p/256\,f$ można nabrać wyobrażenia o postaci teoretycznej powierzchni obciążenia. I ta powierzchnia posiada

$\frac{\bar{B}p}{256\,f}$	$\frac{x}{a}=0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{y}{a}=0$	4,000	2,229	0,774	0,018	—0,378	—0,500
$\frac{y}{a}=0{,}25$	0,344	0,808	1,438	2,032	2,446	2,594
$\frac{y}{a}=0{,}5$	—0,500	0,774	2,034	3,078	3,762	4,000
$r=v$	4,000	1,249	1,235	2,387	3,539	4,000

obszary ujemne dokoła środków boków prostokątnego konturu płyty, lecz te obszary są nieznaczne w porównaniu do takichże obszarów odpowiadających formule trygonometrycznej (257). Oprócz tego jest rozkład obciążenia w obszarze dodatnim o wiele równomierniejszy. Już z tego powodu spodziewamy się, że założenie (260) dostarczy o wiele lepszych wartości przybliżonych dla momentów zginających.

Z warunku równości energii potencyalnej płyty i pracy sił zewnętrznych wynika teraz jako przybliżona wartość strzałki ugięcia f:

$$f = \frac{7}{2048} \frac{qb^4}{B_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{7} \cdot \frac{\eta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \tag{262}$$

przyczem, jak poprzednio, oznacza ε sprowadzony stosunek boków, a η charakterystykę płyty. Ten wzór daje w szczególnym przypadku płyty kwadratowej równokierunkowej:

$$f = \frac{49}{36864} \frac{qa^4}{B} = 0{,}00133 \frac{qa^4}{B},$$

podczas gdy z dokładniejszego obliczenia wypada

$$f = 0{,}00127 \frac{qa^4}{B}$$

Powyższa przybliżona wartość jest więc około 5% za duża, co dla wielu praktycznych celów można jeszcze uważać za dopuszczalne. Ten błąd rośnie jednak z wartością $\varepsilon \geqq 1$ i osiąga w granicznym przypadku $\varepsilon = \infty$ prawie 31%. Pod tym względem ustępuje nowe rozwiązanie przybliżone dawniejszemu (258a); atoli rzecz się ma inaczej, gdy przystąpimy do obliczenia momentów zginających.

Różniczkując (260) znajdujemy:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 256 f \frac{2}{a^2}\left(1 - \frac{6x}{a} + \frac{6x^2}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 256 f \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot \frac{2}{b^2}\left(1 - \frac{6y}{b} + \frac{6y^2}{b^2}\right),$$

a stąd wypadają dla miarodajnych momentów zgięcia w punktach $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ i $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ następujące wartości przybliżone:

$$(263)\quad \begin{cases} (M_1)_{\frac{a}{2},0} = -\frac{32}{m_2}\cdot\frac{\bar{B}_1 f}{b^2}, & (M_2)_{\frac{a}{2},0} = -32\,\frac{\bar{B}_2 f}{b^2} \\ (M_1)_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}} = \frac{16\bar{B}_1 f}{a^2}\left(1+\frac{1}{m_2}\frac{a^2}{b^2}\right), & (M_2)_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}} = \frac{16\bar{B}_2 f}{b^2}\left(1+\frac{1}{m_1}\frac{b^2}{a^2}\right). \end{cases}$$

W szczególnym przypadku płyty kwadratowej i równokierunkowej otrzymamy dla środka boku

$$M_2 = -\,0{,}0426\,qa^2,$$

t. j. około 13% mniej, niż dokładniejsza wartość

$$-\,0{,}0488\,qa^2 = -\,0{,}195\,q\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

znaleziona przez A. Nádái'a na podstawie przyjęcia Ritz'a. Inni autorowie, którzy opracowywali to zadanie, znajdują nieco większe spółczynniki, jak np. 0,0510 (Galjerkin) i 0,0512 (Hencky).

Za to w środku płyty mamy

$$M_1 = M_2 = 0{,}0213\left(1+\frac{1}{m}\right)qa^2,$$

zamiast dokładnej wartości

$$0{,}0177\left(1+\frac{1}{m}\right)qa^2,$$

wyznaczonej prawie zgodnie przez wszystkich trzech przytoczonych autorów. Teraz jest wartość przybliżona mniej więcej o 20% za wielka, a ten błąd rośnie z powiększeniem liczby stosunkowej ε. W szczególności jest w granicznym przypadku $\varepsilon = \infty$

$$(M_2)_{\frac{a}{2},0} = -\,2\,(M_2)_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}},$$

a więc dokładnie jak być powinno, zaś

$$(M_2)_{y=0} = -\,0{,}109\,qb^2,$$

czyli około 30% więcej od dokładnej wartości

$$-\frac{1}{12}qb^2 = -\,0{,}08\dot{3}\,qb^2$$

Przyjęte wyrażenie (260) okazuje się, jak widać, wcale przydatuem do ustawienia formuł przybliżonych dla praktycznego użytku. Te formuły dają się jeszcze znacznie ulepszyć zapomocą spółczynników interpolacyjnych, które można obliczyć podług dokładniejszego rozwiązania dla szczególnego przypadku równokierunkowego materyału płyty. Należy się spodziewać, że otrzymane tym sposobem wzory nie ucierpią wiele na dokładności w najogólniejszym przypadku ($H^2 \gtrless \overline{B}_1 \overline{B}_2$), dopóki stosunek $H^2 : \overline{B}_1 \overline{B}_2$ zbacza niewiele od 1.

We wzorze dla strzałki ugięcia wystarcza postać

$$c' + \frac{c''}{\varepsilon}$$

spółczynnika interpolacyjnego w przedziale $1 \leqq \varepsilon \leqq \infty$. Przyjąwszy ją znajdujemy wzór interpolacyjny:

$$f = \frac{0{,}001 \left(2{,}6 + \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon}\right)}{1 + \frac{4}{7} \frac{\eta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \cdot \frac{q b^4}{\overline{B}_2} \tag{264}$$

Ażeby ocenić błąd tej ulepszonej formuły przybliżonej, porównamy liczby, jakie ona daje dla różnych wartości ε w szczególnym przypadku $\overline{B}_1 = \overline{B}_2 = H = \overline{B}$ z dokładniejszemi liczbami znalezionemi już pierwej dla tego przypadku. Według dokładniejszego rachunku wypada

dla $\varepsilon =$	1	$\frac{1}{0{,}7}$	2	∞
$f : \frac{q b^4}{\overline{B}} =$	0,00127	0,00208	0,00249	0,00260 (Nádái),

podczas gdy przybliżony wzór (264) daje odpowiednie wartości:

0,00127 0,00202 0,00243 0,00260

opatrzone błędami nie większemi od 3%.

Jeszcze lepszą zgodność dla powyższego szeregu wartości ε daje wzór:

$$f = \frac{0{,}00260 + \frac{0{,}00103}{\varepsilon} - \frac{0{,}00036}{\varepsilon^2}}{1 + \frac{4}{7} \frac{\eta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \cdot \frac{q b^4}{\overline{B}_2}, \tag{264.a}$$

z którego wypadają wartości różniące się najwyżej o $\frac{1}{3}$% od przytoczonych dokładnych.

Przy wzorze dla największego momentu utwierdzenia okazała się również bardzo dogodną postać spółczynnika interpolacyjnego:

$$c' + \frac{c''}{\varepsilon} + \frac{c'''}{\varepsilon^2}.$$

Zakładając ją znajdujemy:

$$(265) \qquad (M_2)_{\frac{a}{2},0} = -\frac{0{,}0833 + \frac{0{,}0122}{\varepsilon} + \frac{0.0300}{\varepsilon^2}}{1 + \frac{4}{7}\cdot\frac{\eta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \cdot qb^2$$

Stąd wypada w szczególnym przypadku płyty równokierunkowej przy

$\varepsilon =$	1	1,5	2	∞
$-\frac{M_2}{qb^2} =$	0,0488	0,0721	0,0804	0,0833,

a zatem prawie zupełnie zgodnie z następującemi liczbami wyjętemi z monografii Nádái'a:

0,0488 0,0723[1] 0,0803 0,0833

Największy dodatni moment zgięcia M_2 w środku płyty da się przedstawić z praktycznie wystarczającem przybliżeniem wzorem:

$$(266) \qquad (M_2)_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}} = \frac{0{,}0417 + \frac{0{,}003\,\varepsilon}{0{,}8 + (\varepsilon - 1)^4}}{1 + \frac{4}{7}\frac{\eta}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \left(1 + \frac{1}{m_1}\frac{b^2}{a^2}\right) qb^2$$

Porównanie spółczynnika liczbowego, przez który trzeba tutaj pomnożyć wyrażenie $\left(1 + \frac{1}{m_1}\frac{b^2}{a^2}\right) qb^2$, z odpowiadającemi liczbami dokładniejszych obliczeń Galjerkina dla przypadku płyty równokierunkowej, daje (przy założeniu $\bar{B}_1 = \bar{B}_2 = H = \bar{B}$) dla:

[1] Interpolowane.

$\varepsilon =$	1	1,5	2	∞
według Galjerkina	0,0176	0,0325	0,0374	0,0417 $(=\frac{1}{24})$
według wz. (266)	0,0177	0,0323	0,0373	0,0417

Odpowiadające liczby różnią się nie więcej, jak o 0,6%. Nie trzeba jednak zapominać, że we wzorze (266) dla momentu tkwi liczba m_1, a przytoczone Galjerkinowskie wartości odpowiadają przyjęciu: $m = \frac{10}{3}$. Ażeby wzór przybliżony nie ucierpiał na dokładności nawet przy bardzo różnych wartościach liczby m_1, rozłożymy wyrażenia dla momentów zgięcia podług schematu:

$$
(267)\quad \left|\begin{aligned} M_1 &= -\bar{B}_1\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{1}{m_2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=M_1'+\frac{1}{m_2}\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}M_2',\\ M_2 &= -\bar{B}_2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{1}{m_1}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)=M_2'+\frac{1}{m_1}\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}M_1'\end{aligned}\right.
$$

Wielkości

$$
(267a)\qquad M_1' = -\bar{B}_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \quad \text{i} \quad M_2' = -\bar{B}_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}
$$

mają znaczenie pewnych m o m e n t ó w z a s t ę p c z y c h, które określimy w następujący sposób: Zastąpiwszy skrawki X i skrawki Y płyty belkami o sztywności zginania $\bar{B}_1$, względnie $\bar{B}_2$, przyjmiemy, że osie tych belek zakrzywiają się dokładnie tak samo, jak osie odpowiadających skrawków; wtedy zgięciu belek odpowiadają momenty M_1' względnie M_2'. Z przybliżonego rozwiązania (260) wynika dla środka płyty:

$$
(268)\quad \left|\begin{aligned} M_1' &= \frac{16\bar{B}_1 f}{a^2} = \frac{7}{128}\frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\cdot\frac{qb^2}{1+\frac{4}{7}\frac{\eta}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^4}},\\ M_2' &= \frac{16\bar{B}_2 f}{b^2} = \frac{7}{128}\cdot\frac{qb^2}{1+\frac{4}{7}\cdot\frac{\eta}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^4}},\end{aligned}\right.
$$

W szczególnym przypadku równokierunkowości materyału płyty, daje dokładniejszy rachunek (Galjerkina) dla:

$\varepsilon =$	1	1,5	2	∞
$M_1' : qb^2 =$	0,0176	0,00963	0,00245	0,0000
	(0,0213)	(0,01675)	(0,01134)	(0,0000)
$M_2' : qb^2 =$	0,0176	0,0338	0,0393	0,0417
	(0,0213)	(0,0377)	(0,0454)	(0,0547)

Liczby w nawiasach pochodzą z przybliżonych wzorów (268). Przy użyciu tych dat obliczono spółczynniki interpolacyjne dla wyrażeń (268) i tak powstały wzory:

$$
(267a)\quad \left|\begin{aligned}
M_1' &= \frac{0{,}0659}{1{,}35+(1{,}57\varepsilon-1)^4}\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\cdot\frac{qb^2}{1+\frac{4}{7}\frac{\eta}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^4}},\\
M_2' &= \left[0{,}0417+\frac{0{,}00237\,\varepsilon^2}{0{,}657+(\varepsilon-1)^4}\right]\cdot\frac{qb^2}{1+\frac{4}{7}\frac{\eta}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^4}}.
\end{aligned}\right.
$$

W przypadku równokierunkowości materyału płyty dają te wzory wartości, które się różnią od dokładnych najwyżej o kilka dziesiętnych $^0/_0$. Tej samej dokładności należy się oczywiście spodziewać i w ogólniejszym przypadku, gdy $H=\bar{B}_1\bar{B}_2$.

DODATEK DO § 23.

Przybliżone wzory interpolacyjne do obliczenia płyty prostokątnej dokoła swobodnie podpartej i całkowicie równomiernie obciążonej.

Tą samą drogą co w § 26 znajdujemy dla strzałki ugięcia:

$$
(269)\quad f=\frac{0{,}013+\frac{0{,}0073\,\varepsilon}{1{,}3+\varepsilon^2}}{1+2\frac{\eta}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^4}}\cdot\frac{qb^4}{\bar{B}_2},
$$

a dla obu zastępczych momentów w środku płyty:

(270)

$$
M_1'=\frac{17{,}2\sqrt{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}}\cdot qb^2}{(\varepsilon^4+8{,}5\varepsilon^2+107)\left(\varepsilon^2+2\eta+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)}=\frac{17{,}2\,qa^2}{(\varepsilon^4+8{,}5\varepsilon^2+107)(\varepsilon^4+2\varepsilon^2\eta+1)},
$$

$$
M_2'=\frac{0{,}125+\frac{0{,}19\,\varepsilon}{3\varepsilon^2-2{,}83\,\varepsilon+8{,}4}}{1+\frac{2\eta}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^4}}\cdot qb^2
$$

Dokładność powyższych wzorów jest ta sama, co odpowiadających wzorów w § 26.

W Kazaniu 15 czerwca 1918.

TREŚĆ.