

**LEON TRONIEWSKI  
KRYSTIAN CZERNEK**

**PRZENOSZENIE PĘDU, CIEPŁA I MASY**

**CZĘŚĆ 2**

**NOTATKI AUTORYZOWANE**



## **PRZEDMOWA**

Skrypt ten, podobnie jak część pierwsza „Przenoszenie pędu, ciepła i masy”, ma stanowić pomoc dla studentów odrabiających zajęcia w Katedrze Inżynierii Procesowej na Politechnice Opolskiej. Tę część poświęcono wymianie ciepła, a ponieważ skrypt ma służyć studentom trzech kierunków: mechanika i budowa maszyn, inżynieria środowiska i technika rolnicza i leśna i to głównie słuchaczom kursów ogólnych, a nie specjalnościowych, ograniczono się w nim jedynie do najbardziej podstawowych informacji.

W wielu miejscach czytelnik znajdzie odsyłacze do części I – „Przenoszenie pędu, ciepła i masy” Politechnika Opolska 2006 oraz do „Tablic do obliczeń procesowych”. W celu poszerzenia wiadomości poleca się sięganie do literatury uzupełniającej.

Autorzy



## SPIS TREŚCI

I.	WPROWADZENIE .....	7
II.	PRZEWODZENIE CIEPŁA .....	13
II. 1.	Przewodnictwo cieplne materiałów .....	13
II. 2.	Równanie różniczkowe przewodzenia ciepła .....	15
II. 3.	Ustalone przewodzenie ciepła .....	19
II. 4.	Izolacja cieplna i straty ciepła .....	30
II. 5.	Nieustalone przewodzenie ciepła .....	41
III.	WNIKANIE CIEPŁA .....	53
III. 1.	Wprowadzenie .....	53
III. 2.	Wnikanie ciepła przy przepływie wymuszonym burzliwym .	54
III. 3.	Wnikanie ciepła przy przepływie wymuszonym uwarstwionym .....	60
III. 4.	Wnikanie ciepła przy przepływie wymuszonym prześciowym .....	62
III. 5.	Wnikanie ciepła przy splywie grawitacyjnym burzliwym ....	63
III. 6.	Wnikanie ciepła przy splywie grawitacyjnym uwarstwionym	67
III. 7.	Wnikanie ciepła przy splywie grawitacyjnym skroplin (kondensacja) .....	69
III. 8.	Wnikanie ciepła przy przepływie swobodnym (konwekcja naturalna) .....	77
III. 9.	Wnikanie ciepła przy przepływie swobodnym wrzenia .....	83
III. 10.	Wnikanie ciepła przy przepływie mieszanym .....	92
III. 11.	Systematyka przypadków wnikania ciepła .....	92
III. 12.	Wpływy uboczne .....	95
IV.	PROMIENIOWANIE CIEPLNE .....	97
IV. 1.	Podstawowe prawa promieniowania .....	98
IV. 2.	Wymiana ciepła przez promieniowanie między ciałami stałymi .....	107
IV. 3.	Promieniowanie słoneczne .....	117
IV. 4.	Promieniowanie gazów .....	119
IV. 5.	Wymiana ciepła przez promieniowanie i równoczesne wnikanie .....	124

V.	OBLICZANIE PRZEPONOWYCH WYMIENNIKÓW CIEPŁA .....	125
V. 1.	Tok obliczania przeponowego wymiennika ciepła .....	137
V. 2.	Obliczanie wymienników metodą liczby jednostek wymiany ciepła (NTU) .....	141
V. 3.	Obliczanie wymienników o elementach ożebrowanych .....	144
VI.	APARATY DO WYMIANY CIEPŁA .....	151
VI. 1.	Systematyka .....	151
VI. 2.	Wymienniki płaszczowo-rurowe .....	151
VI. 3.	Wymienniki płaszczowo-rurowe z kompensacją wydłużeń cieplnych .....	156
VI. 4.	Wymienniki typu „rura w rurze” .....	160
VI. 5.	Wymienniki płytowe .....	161
VI. 6.	Wymienniki ciepła z rurami żebrowanymi .....	163
VI. 7.	Wymienniki spiralne .....	164
VI. 8.	Aparaty z płaszczem grzejnym .....	165
VI. 9.	Wężownice .....	166
	LITERATURA .....	168

## I. WPROWADZENIE

Ruch ciepła (przepływ ciepła, wymiana ciepła) jest szerokim pojęciem obejmującym procesy przenoszenia ciepła między różnymi ciałami lub częściami tego samego ciała. Ruch ciepła związany jest z istnieniem różnicy temperatury.

Przy rozwiązywaniu konkretnych problemów interesuje nas ilość ciepła  $Q$  [J] lub strumień ciepła  $\dot{Q} = \frac{Q}{\tau} \left[ \frac{J}{s} \right]$ , [W]. Często posługiwać się będziemy

pojęciem gęstości strumienia ciepła  $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{F} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$ . W obliczeniach praktycznych

interesujące bywa określenie powierzchni  $F$  koniecznej do zrealizowania danego procesu (powierzchni wymiany ciepła). Równie ważne jest wyznaczenie temperatury w określonych punktach rozpatrywanego układu tzw. pola temperatury.

Jeśli pole temperatury pozostaje niezmiennie w czasie, tzn. temperatura jest jedynie funkcją położenia  $t = f(xyz)$ , mówimy o procesie ustalonym (stacjonarnym), natomiast gdy temperatura jest zmienna w czasie  $t = f(xyz\tau)$ , będziemy mieli do czynienia z procesem nieustalonym (niestacjonarnym).

Rozróżniamy trzy rodzaje ruchu ciepła. Są to: przewodzenie, konwekcja i promieniowanie.

Przewodzenie ciepła zachodzi w obrębie ciała stałego lub w nieruchomych (makroskopowo) płynach i odbywa się na zasadzie przekazywania energii między cząstkami ciała.

Fourier ustalił, że ilość przewodzonego ciepła jest proporcjonalna do spadku temperatury, czasu i pola przekroju poprzecznego do kierunku przepływu ciepła:

$$d^2Q = -\lambda \text{ grad } t \, dF \, d\tau, \quad (\text{I-1})$$

gdzie:

$$\text{grad } t = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (\text{I-2})$$

Gęstość strumienia ciepła:

$$\dot{q} = -\lambda \text{ grad } t. \quad (\text{I-3})$$

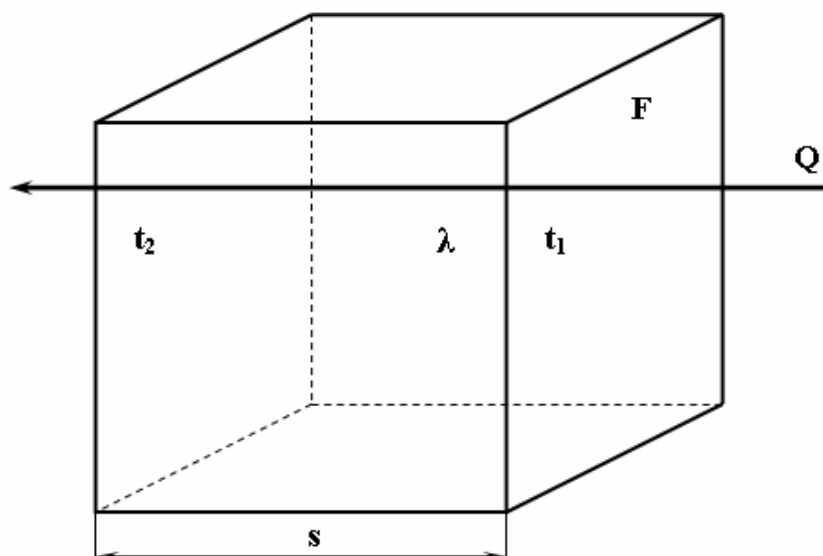
Dla przewodzenia w jednym kierunku, np. wzdłuż osi  $x$ :

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad (I-4).$$

W najprostszym przypadku, ustalone, jednokierunkowe przewodzenie ciepła (rys. I.1) opisuje równanie:

$$Q = \frac{\lambda}{s} F(t_1 - t_2)\tau, [J]. \quad (I-5)$$

Gdy  $s = 1\text{m}$ ,  $F = 1\text{m}^2$ ,  $(t_1 - t_2) = 1\text{K}$ ,  $\tau = 1\text{s}$ , to  $Q = \lambda$ .



**Rys. I. 1.** Schemat ilustrujący przewodzenie ciepła

Wielkość  $\lambda$ , związana z naturą ciała, zwana współczynnikiem przewodzenia ciepła, wskazuje, ile ciepła przepływa w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni, przy jednostkowej różnicy temperatur na jednostkowej grubości warstwy. Wymiarem  $\lambda$  jest  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$ .

<sup>\*)</sup> Warto zauważyć, że równanie (I-4) jest podobne do znanego z hydrauliki równania  $\tau = -\eta \frac{dw}{dy}$ , określającego zależność naprężenia stycznego od prędkości ścinania. Oba te równania leżą u podstaw analogii między wymianą pędu i ciepła.



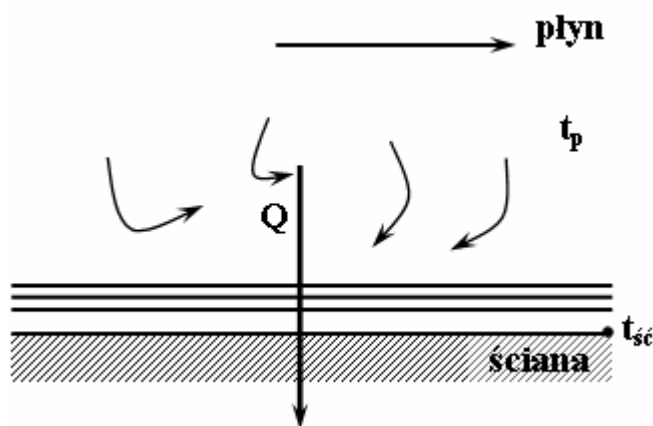
Strumień przewodzonego ciepła wyniesie:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} F(t_1 - t_2), \text{ [W]}. \quad (\text{I-6})$$

Równania (I-5) i (I-6) nazywane są również równaniami Fouriera.

Przepływ ciepła przez konwekcję zachodzi w płynach i odbywa się w ten sposób, że ciepło jest transportowane razem z będącym w ruchu czynnikiem i przekazywane ścianie o innej niż płyn temperaturze (lub pobierane przez czynniki od ściany). W rzeczywistości, na skutek istnienia przy ścianie warstwy laminarnej, w której konwekcja w swej definicyjnej postaci zanika, transport ciepła od czynnika do ściany jest procesem złożonym z konwekcji i przewodzenia.

Proces taki nazywa się wnikaniem (przejmowaniem) ciepła – rys. I. 2.



Rys. I. 2. Schemat wnikania ciepła

Ten rodzaj ruchu ciepła opisuje równanie Newtona:

$$Q = \alpha F (t_p - t_{sc}) \tau, \text{ [J]}, \quad (\text{I-7})$$

gdzie:

$\alpha \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$  jest współczynnikiem wnikania ciepła i wskazuje, ile ciepła

wnika od czynnika do jednostki powierzchni ściany (lub odwrotnie) w jednostce czasu, przy jednostkowej różnicy temperatury między czynnikiem i ścianą.

Strumień wnikającego ciepła określa równanie:

$$\dot{Q} = \alpha F (t_p - t_{sc}), \text{ [W]}. \quad (\text{I-8})$$

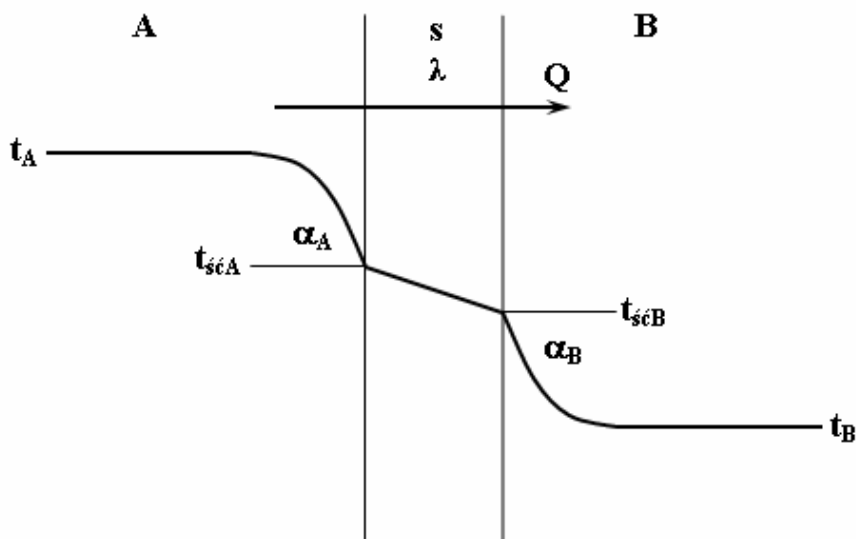
Promieniowanie termiczne polega na emisji i absorpcji energii promienistej, którą jedno ciało oddaje drugiemu poprzez warstwę ośrodka przezroczystego lub przez próżnię. Proces ten jest bardzo złożony i nie da się go opisać jednym równaniem. Rządzą nim prawa: Plancka, Stefana-Boltzmana, Kirchoffa i Lamberta. Ciepło wymieniane na drodze promieniowania nie zależy wprost od różnicy temperatur, a od różnicy czwartych potęg temperatur bezwzględnych.

Należy dodać, że niekiedy wnikananiu ciepła może towarzyszyć promieniowanie. Z takim przypadkiem spotkamy się przy ogrzewaniu ściany przez gorące spaliny. Można wtedy skorzystać z praktycznego sposobu uwzględnienia wpływu promieniowania poprzez wprowadzenie zastępczego współczynnika wnikania ciepła  $\alpha_z$ , obliczonego z zależności:

$$\alpha_z = \alpha_k + \alpha_r, \quad (I-9)$$

w którym  $\alpha_k$  oznacza konwekcyjny współczynnik wnikania ciepła, a  $\alpha_r$  – radiacyjny, obliczony wg odpowiednich zależności podawanych w literaturze.

W praktyce najczęściej występuje złożony przypadek ruchu ciepła między dwoma czynnikami oddzielnymi od siebie przegrodą (rys. I. 3) zwany przenikaniem ciepła.



Rys. I. 3. Schemat przenikania ciepła

Ciepło od czynnika A o temperaturze  $t_A$  wnika do ściany z intensywnością  $\alpha_A$ , jest przez nią przewodzone, a następnie jest odbierane przez czynnik B o temperaturze  $t_B$  z intensywnością  $\alpha_B$ . W przypadku ustalonego ruchu ciepła i ściany płaskiej można napisać:

$$Q = \alpha_A F (t_A - t_{\acute{s}cA}) \tau = \frac{\lambda}{s} F (t_{\acute{s}cA} - t_{\acute{s}cB}) \tau = \alpha_B F (t_{\acute{s}cB} - t_B) \tau. \quad (I-10)$$

Obliczając poszczególne różnice temperatury otrzymamy:

$$(t_A - t_{\acute{s}cA}) = \frac{Q}{\alpha_A F \tau}, \quad (I-11)$$

$$(t_{\acute{s}cA} - t_{\acute{s}cB}) = \frac{Qs}{\lambda F \tau}, \quad (I-12)$$

$$(t_{\acute{s}cB} - t_B) = \frac{Q}{\alpha_B F \tau}, \quad (I-13)$$

a po dodaniu stronami:

$$(t_A - t_B) = \frac{Q}{F \tau} \left( \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B} \right). \quad (I-14)$$

Podstawiając:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B}, \quad (I-15)$$

otrzymamy:

$$Q = kF(t_A - t_B)\tau, [J]. \quad (I-16)$$

Wielkość  $k$  [W/(m<sup>2</sup>·K)] nosi nazwę współczynnika przenikania ciepła, a równanie (I-16) bywa nazywane równaniem Pecleta.

Występujące w równaniu (I-15) ułamki można traktować jako „opory cieplne”.

Opór wnikania:

$$\frac{1}{\alpha} = R_\alpha \quad (I-17)$$

i opór przewodzenia:

$$\frac{s}{\lambda} = R_\lambda, \quad (I-18)$$

wtedy opór przenikania:

$$R_k = R_{\alpha A} + R_\lambda + R_{\alpha B}. \quad (I-19)$$

Strumień przenikającego ciepła określa równanie:

$$\dot{Q} = kF(t_A - t_B), [\text{W}]. \quad (\text{I-20})$$

Tytułem przykładu rozpatrzmy przenikanie ciepła dla dwóch gazów A i B oddzielonych stalową ścianą ( $\lambda = 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ) o grubości  $s = 3 \text{ mm}$ .

Przyjmijmy, że  $\alpha_A = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$  i  $\alpha_B = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ .

Obliczając współczynnik przenikania ciepła otrzymamy:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B} = \frac{1}{20} + \frac{0,003}{30} + \frac{1}{10} = 0,05 + 0,0001 + 0,1 = 0,1501,$$

$$k = 6,66 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}.$$

Z obliczeń widać, że wartość  $k$  wypadła niższa od najniższego współczynnika wnikania ciepła oraz że opór cieplny przewodzenia jest pomijalnie mały. Chcąc zatem zintensyfikować proces (zwiększyć  $k$ ) należy dążyć do zwiększenia współczynnika wnikania ciepła po stronie czynnika B, natomiast zmiana materiału ściany na lepiej przewodzący nie da żadnego efektu.

Rozpatrzmy teraz inny przypadek przenikania ciepła przy skraplaniu pary wodnej po stronie A,  $\alpha_A = 5000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$  i ogrzewaniu wody po stronie B,  $\alpha_B = 5000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Przy takiej samej jak poprzednio ścianie, otrzymamy:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B} = \frac{1}{5000} + \frac{0,003}{30} + \frac{1}{5000} = 0,0002 + 0,0001 + 0,0002 = 0,0005,$$

$$k = 2000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}.$$

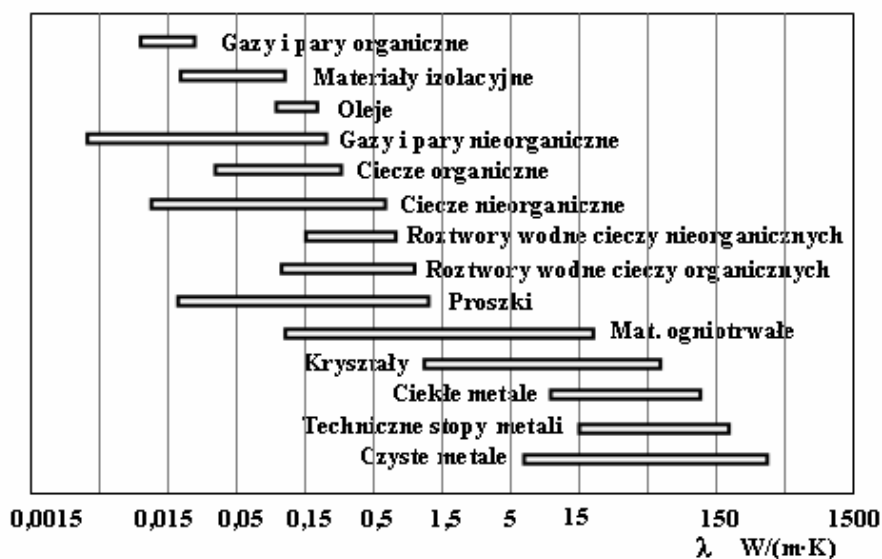
Teraz udział oporu ściany w oporze całkowitym wynosi już 20% i warto pomyśleć o jego zmniejszeniu np. przez zmianę ściany na cieńszą lub wykonaną z materiału lepiej przewodzącego ciepło.

## II. PRZEWODZENIE CIEPŁA

### II. 1. PRZEWODNICTWO CIEPLNE MATERIAŁÓW

Przewodnictwo cieplne materiałów, zwane również przewodnością cieplną, jest zdolnością materiału do przekazywania energii wewnętrznej. Miarą tej zdolności jest współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$ .

Jego wartość zależy od rodzaju ciała, stanu skupienia, składu chemicznego, gęstości, temperatury, ciśnienia. Przy obliczeniach szczególnie ważna jest znajomość zależności  $\lambda$  od temperatury, co wynika z samej natury zjawiska (możliwość wystąpienia różnych temperatur w obrębie tego samego ciała). Przewodnictwo cieplne wyznaczone jest doświadczalnie poprzez pomiar strumienia ciepła i różnicy temperatur. Zakres zmian wartości współczynnika przewodzenia ciepła dla różnych ciał podano na rys. II. 1. Obszerne zbiory danych na ten temat znajdują się w „Tablicach do obliczeń procesowych”.



Rys. II. 1. Współczynnik przewodzenia ciepła dla różnych materiałów

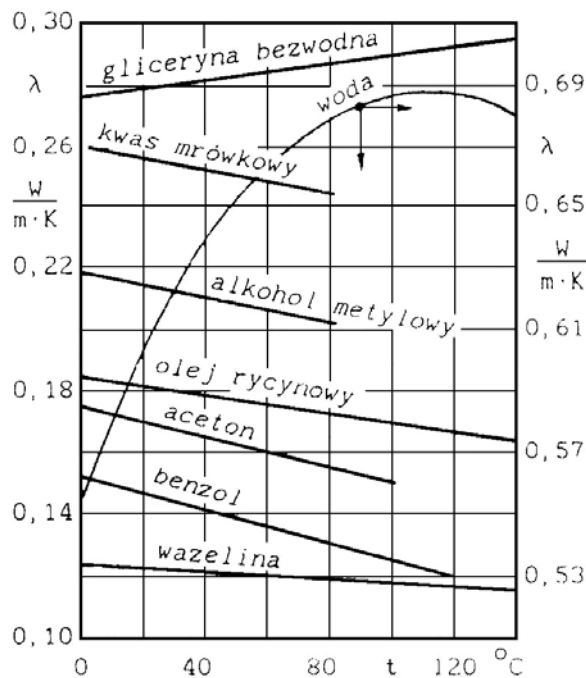
Dla ciał stałych zależność przewodności cieplnej od temperatury jest różna. O ile dla czystych metali współczynnik przewodzenia ciepła na ogół maleje z temperaturą, to dla materiałów izolacyjnych – rośnie. Stopy wykazują

zwykle niższą przewodność niż metale czyste, które są ich składnikami. Np. dla czystego niklu  $\lambda \approx 58 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , dla żelaza  $\lambda \approx 42 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , a dla stali o zawartości 40% Ni -  $\lambda \approx 11 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ .

Przewodnictwo cieplne metali jest w przybliżeniu proporcjonalne do przewodnictwa elektrycznego, dlatego aluminium i miedź wykazują wysokie  $\lambda$ .

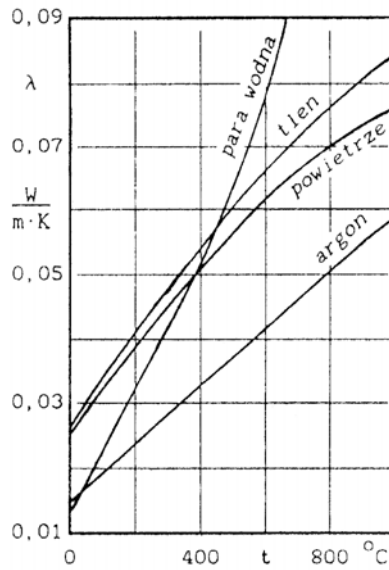
Przewodność cieplna materiałów porowatych związana jest z gęstością. Wynika to z faktu, iż powietrze wypełniające pory ma niższą przewodność cieplną niż sam materiał. Ciekawe jest zachowanie się wilgotnych materiałów porowatych. Np. dla suchej cegły  $\lambda \approx 0,35 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , dla wody  $\lambda \approx 0,6 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , a dla mokrej cegły  $\lambda \approx 1 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . Z tego względu należy zawsze chronić izolację cieplną przed zawilgoceniem.

Przewodnictwo cieplne cieczy maleje z temperaturą, choć woda zachowuje się pod tym względem odmiennie (rys. II. 2).



Rys. II. 2. Przewodnictwo cieplne cieczy

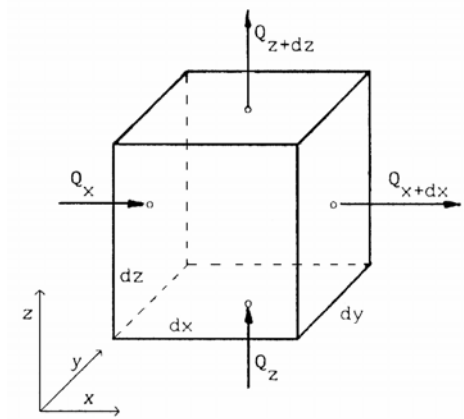
Przewodnictwo cieplne gazów zmienia się w dość dużych granicach (patrz rys. II. 1) i rośnie z temperaturą (rys. II. 3).



Rys. II. 3. Przewodność cieplna gazów

## II. 2. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE PRZEWODZENIA CIEPŁA

Punktem wyjścia do rozważań będzie rozpatrzenie elementarnego sześciangu o bokach  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (rys. II. 4),



Rys. II. 4. Bilans energii dla elementarnego sześciangu

na którym dla uproszczenia pokazano tylko 2 kierunki ruchu ciepła.

Do powierzchni 1 o wymiarach  $dy dz$  w czasie  $d\tau$  dopływa ciepło:

$$Q_x = \dot{q}_x dy dz d\tau = Q_1, \quad (\text{II-1})$$

od powierzchni 2, o wymiarach  $dy dz$  w czasie  $d\tau$  odpływa ciepło:

$$Q_{x+dx} = \left( \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau = Q_2. \quad (\text{II-2})$$

Różnica między ciepłem dopływającym i odpływającym:

$$Q_1 - Q_2 = dQ_x, \quad (\text{II-3})$$

wyniesie:

$$dQ_x = \dot{q}_x dy dz d\tau - \left( \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau = \dot{q}_x dy dz d\tau - \dot{q}_x dy dz d\tau - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx dy dz d\tau \quad (\text{II-4})$$

i

$$dQ_x = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx dy dz d\tau. \quad (\text{II-5})$$

Prowadząc podobne rozważanie dla pozostałych kierunków ( $y$  i  $z$ ) otrzymamy:

$$dQ = -\left( \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau. \quad (\text{II-6})$$

Jeśli dodatkowo przyjmiemy, że wewnątrz elementu znajduje się wewnętrzne źródło ciepła o wydajności  $\dot{q}_v \frac{W}{m^3}$ , to źródło to dostarczy porcję ciepła:

$$dQ_v = \dot{q}_v dV d\tau = \dot{q}_v dx dy dz d\tau. \quad (\text{II-7})$$

Na skutek doprowadzenia i odprowadzenia ciepła oraz w efekcie działania źródła wewnętrznego, w czasie  $d\tau$  zmieni się energia wewnętrzna elementu.

Zmiana ta wyniesie:

$$d\tilde{Q} = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV d\tau, \quad (\text{II-8})$$

czyli:

$$d\tilde{Q} = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz d\tau. \quad (\text{II-9})$$

Wyrażenie (II-9) oznacza przyrost entalpii elementu  $dV$  w czasie  $d\tau$  przy zmianie temperatury o  $\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$ .

Wykorzystując prawo zachowania energii (wykonując bilans) napiszemy:

$$d\tilde{Q} = dQ + dQ_v. \quad (\text{II-10})$$



Podstawiając teraz (II-9), (II-6) i (II-7), otrzymamy:

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz d\tau = - \left( \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau + \dot{q}_v dx dy dz d\tau \quad (\text{II-11})$$

i

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{1}{\rho c_p} \left( \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) + \frac{\dot{q}_v}{\rho c_p}. \quad (\text{II-12})$$

Jeśli uprościmy rozważanie tylko do kierunku x i przyjmiemy, że nie ma źródeł wewnętrznych, otrzymamy:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}. \quad (\text{II-13})$$

Wiadomo również (równanie Fouriera (I-4)), że:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{dt}{dx}, \quad (\text{II-14})$$

tak więc:

$$\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) \quad (\text{II-15})$$

i

$$\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (\text{II-16})$$

Wstawiając (II-16) do (II-13) otrzymamy:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - \frac{1}{\rho c_p} \left( -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II-17})$$

i

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (\text{II-18})$$

Jest to jedna z postaci równania Fouriera, określająca jak zmienia się temperatura elementu w czasie, w zależności od zmiany gradientu temperatury w przestrzeni (w naszym przypadku – wzdłuż osi x).

Wyrażenie  $\frac{\lambda}{\rho c_p} = a, \frac{m^2}{s}$  jest charakterystyczne dla danego ciała i nosi

nazwę współczynnika wyrównania temperatury, współczynnika przewodzenia temperatury lub dyfuzyjności cieplnej.

Tak więc:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (\text{II-19})$$

Widzimy, że ciało tym szybciej będzie się nagrzewać, albo stygnąć – (większe  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ ) im większe będzie przewodnictwo cieplne, mniejsze ciepło właściwe i mniejsza gęstość.

Np. dla aluminium:

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} = \frac{173}{0,164 \cdot 2700} = 0,392 \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

a dla żelaza:

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} = \frac{47}{0,117 \cdot 7850} = 0,0512 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Aluminium będzie zatem szybciej ulegać zmianom temperatury niż żelazo.

Powtarzając to samo rozumowanie dla wszystkich trzech kierunków otrzymamy:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (\text{II-20})$$

a wprowadzając laplasjan  $\nabla^2$  napiszemy

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t, \quad (\text{II-21})$$

gdzie:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \quad (\text{II-22})$$

lub w zapisie wektorowym:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \operatorname{div}(\operatorname{grad} t). \quad (\text{II-23})$$

W przypadku istnienia źródeł wewnętrznych:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{c_p \rho}. \quad (\text{II-24})$$

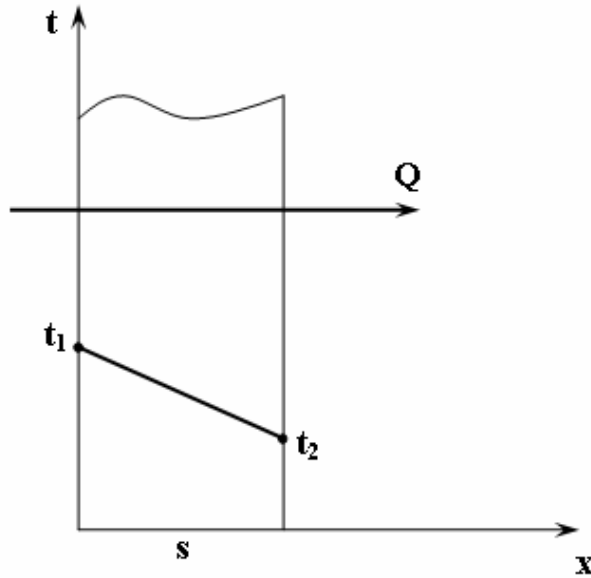
Dla różnych przypadków równanie (II-22) bywa zapisywane inaczej. Np. dla walca użyjemy współrzędnych walcowych  $r$  i  $\varphi$ .

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z.$$

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (\text{II-25})$$

II. 3. USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA

Rozpatrzmy ustalone przewodzenie ciepła przez płytę płaską o stałej grubości i stałym współczynniku przewodzenia ciepła (rys. II.5), której powierzchnie mają stałe temperatury  $t_1$  i  $t_2$ .



Rys. II. 5. Ustalone przewodzenie ciepła przez płytę

Przyjmując, że nie występują w płycie źródła wewnętrzne i mamy do czynienia z jednokierunkowym przepływem ciepła, równanie (II-19) uproszczy się do postaci:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (\text{II-26})$$

Warunki brzegowe będą następujące:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = 0: & \quad t = t_1, \\ \text{dla } x = s: & \quad t = t_2. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (II-26) polega na znalezieniu rozkładu temperatury w płycie oraz na określeniu gęstości strumienia ciepła.

Po scałkowaniu równania (II-26) otrzymamy:

$$t = C_1 x + C_2. \quad (\text{II-27})$$

Wykorzystując warunek:

$$\text{dla } x = 0: \quad t = t_1,$$

otrzymamy stałą  $C_2 = t_1$ ,

a z warunku: dla  $x = s: t = t_2$ , stałą  $C_1 = -\frac{t_1 - t_2}{s}$ .

Podstawiając stałe do (II-27) otrzymamy rozkład temperatury w płycie:

$$\frac{t - t_1}{t_1 - t_2} = \frac{x}{s}, \quad (\text{II-28})$$

lub:

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{s} x, \quad (\text{II-29})$$

a zatem temperatura w płycie zmienia się liniowo ze zmianą  $x$ .

Gęstość strumienia ciepła można wyliczyć z równania:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{dt}{dx}.$$

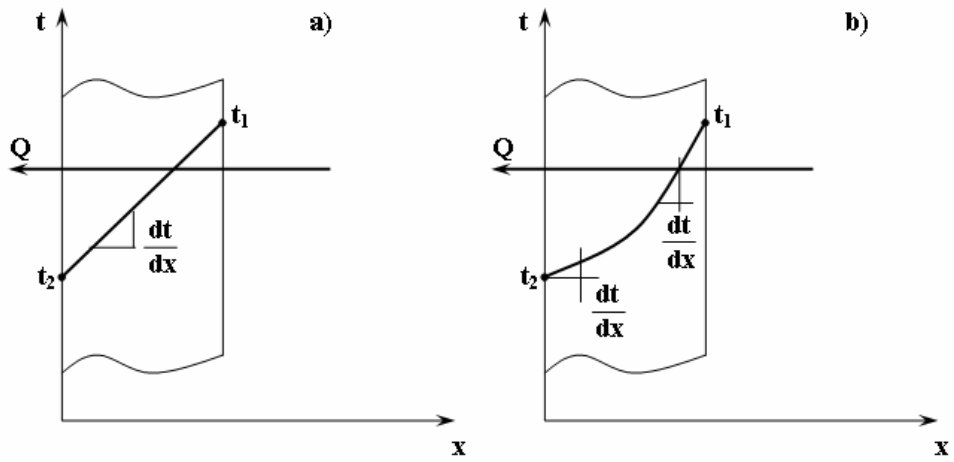
Ponieważ z (II-27) wynika, że:

$$\frac{dt}{dx} = C_1 = -\frac{t_1 - t_2}{s}, \quad (\text{II-30})$$

to:

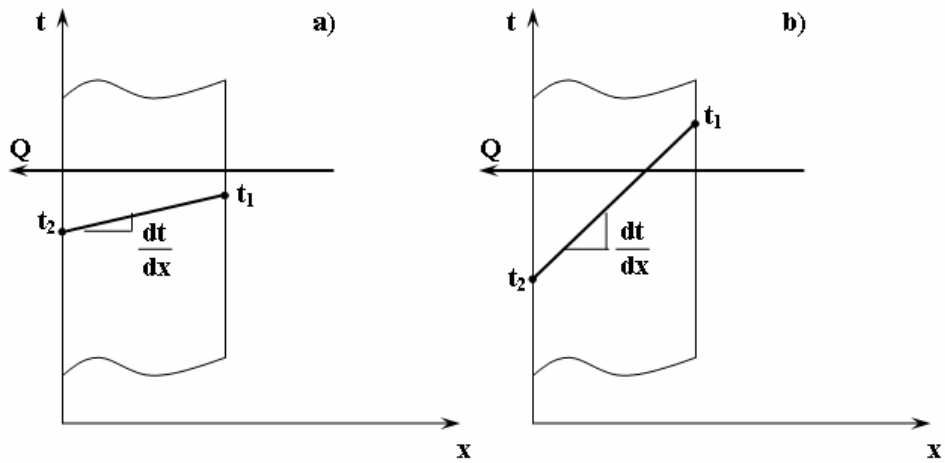
$$\dot{q} = \frac{\lambda}{s} (t_1 - t_2). \quad (\text{II-31})$$

Jeśli powierzchnia, przez którą odbywa się przewodzenie, nie będzie stała ( $F = f(x)$ ) lub zmienna będzie przewodność cieplna ( $\lambda = \varphi(x)$ ), zagadnienie skomplikuje się znacznie i przebieg temperatury nie będzie już liniowy (rys. II. 6).



Rys. II. 6. Przewodzenie ciepła przy stałym przekroju i stałym  $\lambda$  - a), oraz przy zmiennym przekroju i zmiennym  $\lambda$  - b)

Warto zauważyć, że gradient temperatury (pochodna  $dt/dx$ ) zależy również od wartości współczynnika przewodzenia ciepła (rys. II. 7).



Rys. II. 7. Przewodzenie ciepła przy wysokim a) i niskim b) współczynniku przewodzenia ciepła

W przypadku gdy zależy nam na małym oporze cieplnym, np. w aparatach do wymiany ciepła, korzystne będzie stosowanie materiałów dobrze przewodzących (wysokie  $\lambda$ ). Do izolowania dobierać będziemy raczej materiały dające duży gradient temperatury (niskie  $\lambda$ ).

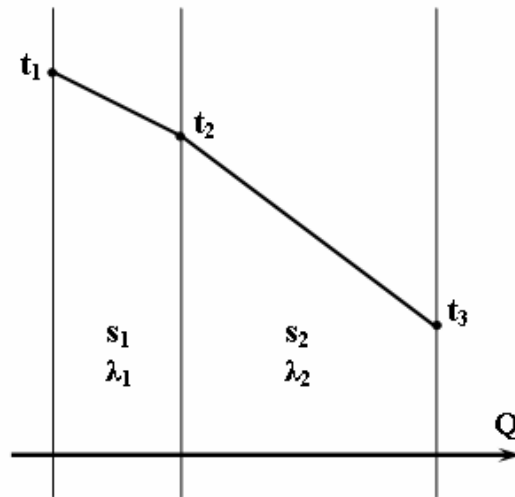
Mając gęstość strumienia ciepła przewodzonego przez płytę (rów. II-31), łatwo obliczymy strumień ciepła gdyż  $\dot{Q} = \dot{q}F$  i:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} F(t_1 - t_2), [\text{W}],$$

a ilość ciepła, zgodnie z równaniem (I-5) wyniesie:

$$Q = \frac{\lambda}{s} F(t_1 - t_2)\tau, [\text{J}].$$

Rozpatrzmy teraz często spotykany przypadek przewodzenia ciepła przez układ wielowarstwowy płaski (rys. II. 8).



Rys. II. 8. Przewodzenie ciepła przez dwie warstwy płaskie

Jeśli przepływ ciepła jest ustalony, a warstwy mają tę samą powierzchnię  $F$ , to strumień ciepła przepływający przez każdą z warstw musi być taki sam, zatem:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{s_1} F(t_1 - t_2) = \frac{\lambda_2}{s_2} F(t_2 - t_3). \quad (\text{II-32})$$

Obliczając teraz różnice temperatury na granicach warstw i dodając stronami otrzymamy:

$$(t_1 - t_3) = \frac{\dot{Q}}{F} \left( \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} \right), \quad (\text{II-33})$$

czyli:

$$\dot{Q} = \frac{F(t_1 - t_3)}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2}}, \quad [\text{W}]. \quad (\text{II-34})$$

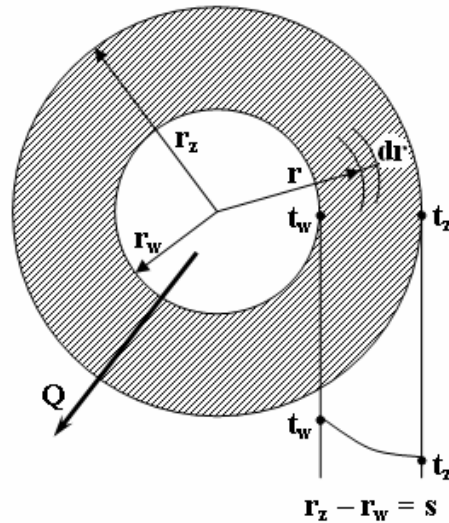
Dla układu złożonego z  $n$  warstw otrzymamy analogicznie:

$$\dot{Q} = \frac{F(t_1 - t_{n+1})}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n}}, \quad [\text{W}]. \quad (\text{II-35})$$

Jeśli powierzchnia przekroju, przez który odbywa się przewodzenie, jest zmienna, jak np. podczas przepływu ciepła przez przegrodę cylindryczną, musimy uwzględnić to w obliczeniach. W tym celu skorzystamy z równania:

$$\dot{Q} = -\lambda F \frac{dt}{dx}, \quad (\text{II-36})$$

a zmienną powierzchnię przekroju określimy funkcją  $F = \varphi(x)$ , rys. II. 9.



Rys. II. 9. Przewodzenie ciepła przez przegrodę cylindryczną

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku II. 9, powierzchnię na długości  $L$  wyrazimy wzorem:

$$F = 2\pi rL, \quad (\text{II-37})$$

a równanie (II-36) przyjmuje postać:

$$\dot{Q} = -\lambda 2\pi rL \frac{dt}{dr} \quad (\text{II-38})$$

i

$$-dt = \frac{\dot{Q}}{2\lambda\pi L} \frac{dr}{r}. \quad (\text{II-39})$$

Po scałkowaniu w granicach  $t_w, t_z$  oraz  $r_w, r_z$  i przekształceniach, otrzymamy:

$$\dot{Q} = \frac{2\lambda\pi L}{\ln \frac{r_z}{r_w}} (t_w - t_z). \quad (\text{II-40})$$

Ponieważ w obliczeniach technicznych wygodniej jest używać średnic:

$$\dot{Q} = \frac{2\lambda\pi L}{\ln \frac{d_z}{d_w}} (t_w - t_z), \quad (\text{II-41})$$

mnożąc licznik i mianownik przez  $(d_z - d_w) = 2s$  otrzymamy:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \pi L \left( \frac{d_z - d_w}{\ln \frac{d_z}{d_w}} \right) (t_w - t_z). \quad (\text{II-42})$$

Wyrażenie w pierwszym nawiasie jest średnią logarymiczną  $d_z$  i  $d_w$ . Oznaczając je  $d_m$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} d_m \pi L (t_w - t_z), \quad (\text{II-43})$$

a ponieważ  $d_m \pi L = F_m$  jest średnią powierzchnią, można napisać:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} F_m (t_w - t_z), \text{ [W]}, \quad (\text{II-44})$$

gdzie:

$$F_m = \frac{F_z - F_w}{\ln \frac{F_z}{F_w}}. \quad (\text{II-45})$$



Równanie (II-44) jest bardzo podobne do równania dla przewodzenia ciepła przez ścianę płaską z tą tylko różnicą, że zamiast stałej powierzchni  $F$  pojawiła się średnia logarytmiczna  $F_m^*$ .

Inne przypadki przewodzenia ciepła przez przegrody o zmiennym przekroju jak np. przewodzenie przez czaszę kulistą, naroże, stożek są do znalezienia w literaturze. Podobnie jak dla przegrody walcowej stosuje się odpowiednio obliczoną powierzchnię zastępczą  $F_m$ . Np. dla przegrody kulistej  $F_m = \sqrt{F_w F_z}$ .

Przy obliczaniu izolacji rurociągów straty ciepła odnosi się zwykle do długości rury, wyrażając stratę ciepła w W/m. Jeśli równanie (II-43) podzielimy przez  $L$  otrzymamy:

$$\dot{Q}_L = \frac{\lambda}{s} d_m \pi (t_w - t_z), \quad (\text{II-46})$$

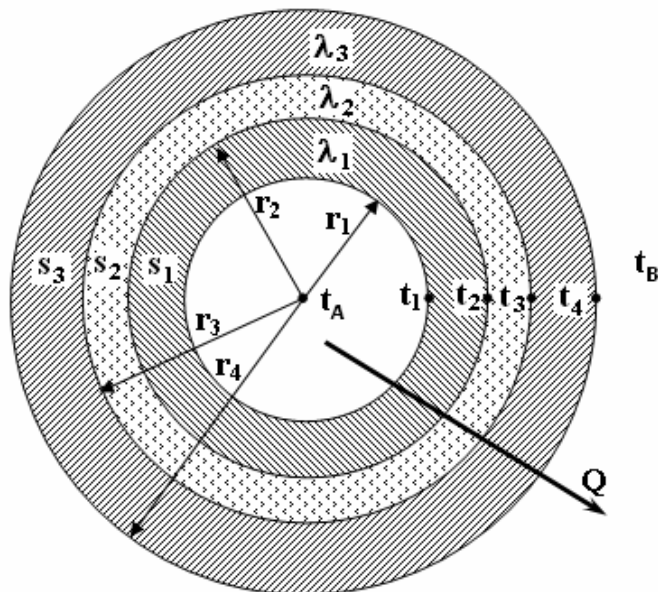
a wprowadzając średni obwód  $O_m = \pi d_m$  otrzymamy:

$$\dot{Q}_L = \frac{\lambda}{s} O_m (t_w - t_z), \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}} \right]. \quad (\text{II-47})$$

W przypadku przewodzenia przez układ wielowarstwowy cylindryczny, np. przez izolowaną rurę, (rys. II. 10), postępujemy analogicznie jak przy wielowarstwowej przegrodzie płaskiej.

---

<sup>\*)</sup> Średnia logarytmiczna jest zawsze mniejsza od średniej arytmetycznej, ale jeśli powierzchnia zewnętrzna  $F_z$  nie jest więcej niż dwukrotnie większa od  $F_w$  ( $F_z/F_w < 2$ ), średnią logarytmiczną można, dla uproszczenia obliczeń, zastąpić średnią arytmetyczną  $F_m = \frac{F_z + F_w}{2}$  nie popełniając większego błędu niż 4%.



Rys. II. 10. Przewodzenie ciepła przez wielowarstwowy układ cylindryczny

Napiszemy zatem dla każdej z warstw równania typu (II-44), wyliczymy z nich różnice temperatury i dodamy stronami, co dla układu złożonego z  $n$  warstw da:

$$(t_1 - t_{n+1}) = \dot{Q} \left( \frac{s_1}{\lambda_1 F_{m1}} + \frac{s_2}{\lambda_2 F_{m2}} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n F_{mn}} \right) \quad (\text{II-48})$$

i

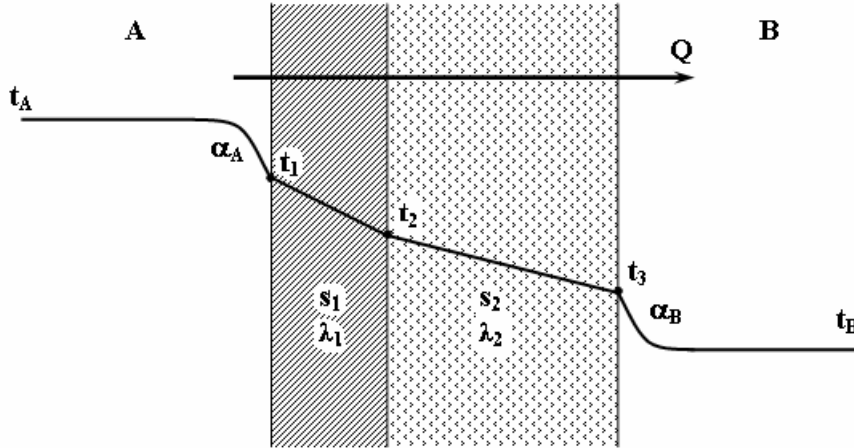
$$\dot{Q} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\frac{s_1}{\lambda_1 F_{m1}} + \frac{s_2}{\lambda_2 F_{m2}} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n F_{mn}}}, [\text{W}]. \quad (\text{II-49})$$

W odniesieniu do długości rury otrzymamy:

$$\dot{Q}_L = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\frac{s_1}{\lambda_1 O_{m1}} + \frac{s_2}{\lambda_2 O_{m2}} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n O_{mn}}}, \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}} \right]. \quad (\text{II-50})$$

W dotychczas omawianych przypadkach interesowało nas tylko przewodzenie ciepła i przyjmowaliśmy, że temperatury na powierzchniach ciała są znane. W rzeczywistości są one na ogół nieznane i ustalają się w zależności od

temperatur płynów kontaktujących się z tymi powierzchniami i od intensywności wnikania ciepła. Rozpatrzmy przypadek przenikania ciepła przez układ wielowarstwowy płaski, rys. II. 11.



Rys. II. 11. Przenikanie ciepła przez układ wielowarstwowy płaski

Dla procesu ustalonego można napisać znane już równania:

- dla wnikania po stronie A:

$$\dot{Q} = \alpha_A F(t_A - t_1),$$

- dla przewodzenia:

$$\dot{Q} = \frac{F(t_1 - t_3)}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2}},$$

- dla wnikania po stronie B:

$$\dot{Q} = \alpha_B F(t_3 - t_B).$$

Wyznaczając teraz poszczególne różnice temperatury i dodając stronami, po przekształceniach otrzymamy:

$$\dot{Q} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_A} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_B}} F(t_A - t_B), \quad [\text{W}], \quad (\text{II-51})$$

lub:

$$\dot{Q} = kF(t_A - t_B), \quad [\text{W}], \quad (\text{II-52})$$

jeśli:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_B} \quad (\text{II-53})$$

i ogólnie dla  $n$  warstw:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_B}. \quad (\text{II-54})$$

Warto zauważyć, że powyższe wzory są słuszne jedynie wtedy, gdy poszczególne warstwy ściśle dolegają do siebie. Nawet bardzo cienką warstwę powietrza znajdującego się między warstwami należy uwzględnić w obliczeniach, bo jej opór może okazać się bardzo istotny. Np. warstwa powietrza o grubości 1 mm da taki sam opór cieplny jak warstwa lekkiego betonu (gęstość  $1600 \div 2000 \text{ kg/m}^3$ ) o grubości 15 mm.

Dla przenikania ciepła przez układ wielowarstwowy cylindryczny (rys. II. 10), należy przeprowadzić podobne rozważania. Trzeba jedynie pamiętać, że wnikanie po stronie wewnętrznej (czynnik A) odbywa się do powierzchni  $F_w$ , a wnikanie po stronie zewnętrznej (czynnik B) od powierzchni  $F_z$ . Wtedy dla układu  $n$ -warstwowego otrzymamy:

$$\dot{Q} = \frac{t_A - t_B}{\frac{1}{\alpha_A F_w} + \frac{s_1}{\lambda_1 F_{m1}} + \frac{s_2}{\lambda_2 F_{m2}} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n F_{mn}} + \frac{1}{\alpha_B F_z}}, \quad [\text{W}], \quad (\text{II-55})$$

lub:

$$\dot{Q}_L = \frac{t_A - t_B}{\frac{1}{\alpha_A O_w} + \frac{s_1}{\lambda_1 O_{m1}} + \frac{s_2}{\lambda_2 O_{m2}} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n O_{mn}} + \frac{1}{\alpha_B O_z}}, \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}} \right]. \quad (\text{II-56})$$

Aby wyznaczyć temperatury poszczególnych warstw, co często jest ważne np. ze względu na dobór odpowiedniego materiału izolacyjnego, skorzystamy, w przypadku przegrody płaskiej, z wielocłonowej zależności:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{F} = k(t_A - t_B) = \alpha_A(t_A - t_1) = \frac{\lambda_1}{s_1}(t_1 - t_2) = \frac{\lambda_2}{s_2}(t_2 - t_3) = \alpha_B(t_3 - t_B).. \quad (\text{II-57})$$

Znając temperatury czynników  $t_A$  i  $t_B$  oraz wartość współczynnika  $k$  możemy kolejno obliczać poszczególne temperatury. Np. temperaturę  $t_3$  obliczamy z równania:

$$k(t_A - t_B) = \alpha_B(t_3 - t_B) \quad (\text{II-58})$$

i

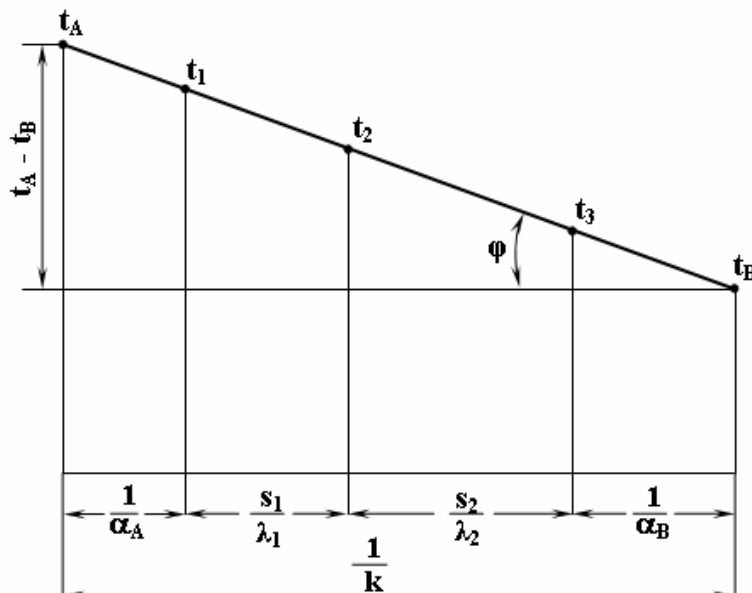
$$t_3 = \frac{k(t_A - t_B)}{\alpha_B} + t_B. \quad (\text{II-58a})$$

Znajomość  $t_3$  pozwoli już wyznaczyć  $t_2$  i kolejno, w ten sam sposób, następne temperatury.

Można również skorzystać z metody graficznej, przekształcając równanie (II-57) do postaci:

$$\dot{q} = \frac{t_A - t_B}{\frac{1}{k}} = \frac{t_A - t_1}{\frac{1}{\alpha_A}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{s_1}{\lambda_1}} = \frac{t_2 - t_3}{\frac{s_2}{\lambda_2}} = \frac{t_3 - t_B}{\frac{1}{\alpha_B}} = \text{tg } \varphi. \quad (\text{II-59})$$

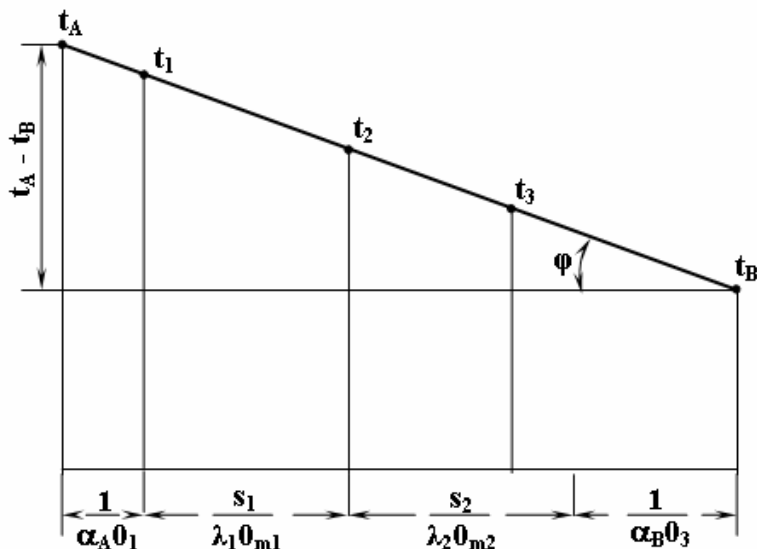
Obraz graficzny zależności (II-59) pokazano na rys. II. 12, w układzie opór cieplny-temperatura.



Rys. II. 12. Wyznaczanie temperatur warstw w układzie wielowarstwowym o stałym przekroju

Odkładając na osi odciętych poszczególne wartości oporów cieplnych oraz na skrajnych rzędnych znane temperatury  $t_A$  i  $t_B$ , otrzymamy prostą, pozwalającą znaleźć temperatury w dowolnych punktach układu.

Sposób postępowania przy wyznaczaniu temperatur układu wielowarstwowego cylindrycznego ilustruje rys. II. 13.



Rys. II. 13. Wyznaczenie temperatur warstw w układzie wielowarstwowym cylindrycznym

#### II. 4. IZOLACJA CIEPLNA I STRATY CIEPŁA

W celu zmniejszenia strat ciepła do otoczenia stosuje się izolację cieplną. Izoluje się budynki, aparaty, rurociągi. Czasem izolację cieplną zakłada się ze względu bezpieczeństwa, aby ochronić przed poparzeniem, w takim przypadku przyjmuje się, że temperatura zewnętrzna izolacji nie powinna być wyższa niż 40°C.

Obliczenie izolacji sprowadza się do doboru jej grubości przy znanym lub założonym strumieniu ciepła odpływającego do otoczenia lub określeniu tego strumienia przy znanej lub założonej grubości i rodzaju izolacji. Zagadnienie komplikuje się znacznie, gdyż na ogół stosuje się izolacje wielowarstwowe wykonane z różnych materiałów, o różnej grubości i różnym przewodnictwie cieplnym.

Dopuszczalną ilość ciepła przepływającego przez izolację do otoczenia (stratę ciepła) wyznacza się na ogół z postawionych warunków technologicznych np. utrzymanie określonej temperatury w pomieszczeniu lub aparacie bądź założony lub podany dopuszczalny spadek temperatury czynnika

płynącego przez rurociąg. W tym ostatnim przypadku, znając temperaturę na początku rurociągu  $t_1$  i na końcu  $t_2$  oraz znając strumień płynu  $\dot{G}$  obliczamy stratę ciepła do otoczenia:

$$\dot{Q} = \dot{G}c_p(t_1 - t_2). \quad (\text{II-60})$$

Dalsze obliczenia sprowadzą się do rozwiązania jednego z równań przenikania ciepła w zależności od tego czy izolujemy ścianę płaską, czy cylindryczną, jedną czy też kilkoma warstwami izolacji. Opór cieplny rury metalowej lub metalowego płaszcza aparatu można zazwyczaj pominąć w obliczeniach jako bardzo mały.

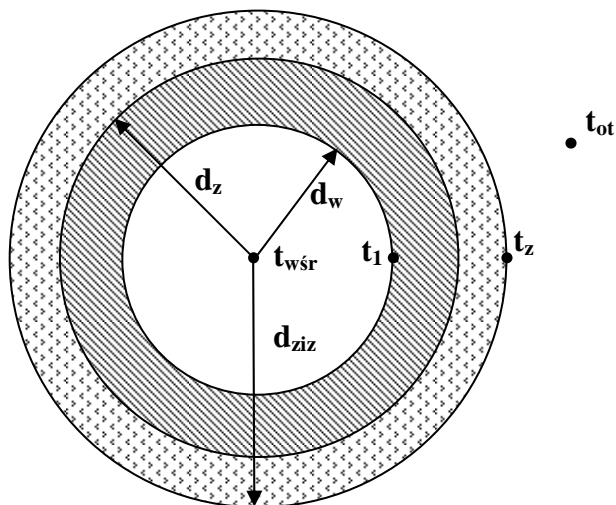
Przy rozwiązywaniu konkretnego zagadnienia napotkamy na trudności wynikające z nieznajomości wartości współczynnika wnikania ciepła od powierzchni zewnętrznej izolacji do otoczenia  $\alpha_z$  i nieznajomości temperatury zewnętrznej izolacji  $t_z$ . Konieczne będzie zatem zastosowanie rachunku iteracyjnego, polegającego na zakładaniu temperatury  $t_z$ , obliczeniu dla niej  $\alpha_z$  (odpowiednie zależności zostaną podane w rozdziale III. 8 poświęconym konwekcji swobodnej<sup>\*)</sup>, obliczeniu strumienia ciepła przenikającego do otoczenia i sprawdzeniu poprawności założenia temperatury  $t_z$ . Sposób postępowania przy obliczeniu izolacji zilustrowano przykładem.

### Przykład obliczeniowy

Przewodem o długości 200 m i średnicy 60,3/53,9 mm przepływa gorąca woda. Temperatura wody na wlocie wynosi 90°C. Obliczyć grubość izolacji z pianki poliuretanowej, dla której  $\lambda = 0,0285 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  dla zapewnienia temperatury wody na wylocie nie mniejszej niż 89°C. Strumień masowy wody wynosi 2,2 kg/s. Temperatura otoczenia wynosi 20°C. Współczynnik przewodzenia ciepła dla stali wynosi  $\lambda_{st} = 45 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ .

---

<sup>\*)</sup> Pewną pomocą przy obliczaniu  $\alpha_z$  może być skorzystanie z przybliżonych wzorów.  
 Dla ściany płaskiej  $\alpha_z = 9,8 + 0,07(t_z - t_{ot}) \text{ [W/(m}^2\cdot\text{K)]}$   
 i dla rury  $\alpha_z = 9,4 + 0,052(t_z - t_{ot}) \text{ [W/(m}^2\cdot\text{K)]}$



ROZWIĄZANIE

Dane:

- $d_z = 60,3 \text{ mm} = 0,0603 \text{ m}$ ,
- $d_w = 53,9 \text{ mm} = 0,0539 \text{ m}$ ,
- $\lambda_{st} = 45 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,
- $\lambda_{iz} = 0,0285 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,
- $t_{wl} = 90^\circ\text{C}$ ,
- $t_{wyl} = 89^\circ\text{C}$ ,
- $t_{ot} = 20^\circ\text{C}$ ,
- $L = 200 \text{ m}$ ,
- $\dot{G}_w = 2,2 \text{ kg/s}$ .

Rozwiązując zadanie należy obliczyć ruch ciepła przez poszczególne warstwy, wykorzystując podane poniżej zależności, pamiętając że  $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3$ .

Znając temperaturę na początku i końcu rurociągu obliczamy, korzystając z równania (II-60), stratę ciepła do otoczenia:

$$\dot{Q} = \dot{G}_w c_p (t_{wl} - t_{wyl}). \quad (1)$$

Współczynnik wnikania ciepła po stronie wewnętrznej rurociągu obliczamy, korzystając z zależności podanych w rozdziale III, a mianowicie (III-13), (III-14) i (III-16):

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}, \quad (2)$$



gdzie:

$$Re = \frac{wd_w\rho}{\eta}; \quad Pr = \frac{c_p\eta}{\lambda}; \quad Nu = \frac{\alpha_w d_w}{\lambda}.$$

Dla procesu ustalonego dla wnikania po stronie wewnętrznej rury:

$$\dot{Q}_1 = \alpha_w F_w (t_{wsr} - t_1). \quad (3)$$

Wykorzystując podaną wcześniej zależność dla rury, obliczmy współczynnik wnikania ciepła po stronie zewnętrznej:

$$\alpha_z = 9,4 + 0,052(t_z - t_{ot}). \quad (4)$$

Średnicę zewnętrzną izolacji można obliczyć przekształcając zależność:

$$\dot{Q}_2 = F_z \alpha_z (t_z - t_{ot}) = \pi d_{zi} L \alpha_z (t_z - t_{ot}). \quad (5)$$

Uwzględniając jedynie przewodzenie ciepła w równaniu (II-55) po jego przekształceniu otrzymamy:

$$\dot{Q}_3 = \frac{L\pi}{\frac{\ln \frac{d_z}{d_w}}{\lambda_{st}} + \frac{\ln \frac{d_{zi}}{d_{wi}}}{\lambda_{iz}}} (t_1 - t_z) \quad (6)$$

Tok obliczeń przedstawia się następująco. Pamiętając, że  $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3$ :

1. Wyliczamy  $\dot{Q}$  z równania (1),
2. Wyliczamy  $\alpha_w$  z równania (2),
3. Wyliczamy  $t_1$  z równania (3),
4. Zakładamy  $t_z$ ,
5. Wyliczamy  $\alpha_z$  z równania (4),
6. Wyliczamy  $d_{zi}$  z równania (5),
7. Wyliczamy  $\dot{Q}_3$  z równania (6) i sprawdzamy z  $\dot{Q}$  wyliczonym z równania (1).

Dla naszego przykładu otrzymujemy:

1.  $\dot{Q} = 9305 \text{ W}$ ,
2.  $\alpha_w = 5700 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,
3.  $t_1 = 89,45^\circ\text{C}$ ,
4. Zakładamy  $t_z = 40^\circ\text{C}$ ,
5.  $\alpha_z = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,
6.  $d_{zi} = 70,9 \text{ mm}$ ,
7.  $\dot{Q}_3 = 7893 \text{ W}$ .

Różnica między wartością  $\dot{Q}_3$  a  $\dot{Q}$  wynosi 15% i jest zbyt duża. Metodą „prób i błędów” tak zmieniamy zakładaną temperaturę  $t_z$ , by spełniony został warunek  $\dot{Q}_3 = \dot{Q}$ .

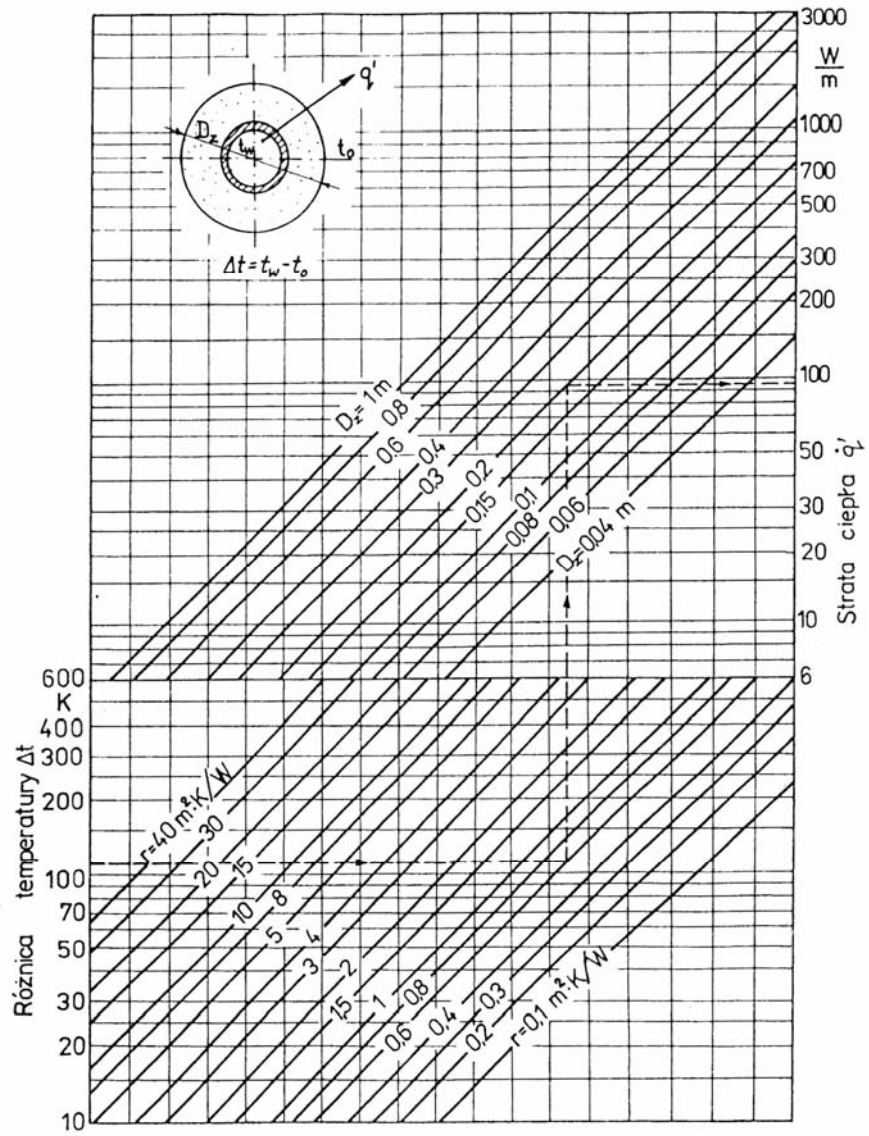
Dla kolejnego podstawienia otrzymujemy:

1.  $\dot{Q} = 9305 \text{ W}$ ,
2.  $\alpha_w = 5700 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,
3.  $t_f = 89,45^\circ\text{C}$ ,
4. Zakładamy  $t_z = 32^\circ\text{C}$ ,
5.  $\alpha_z = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,
6.  $d_{ziz} = 123 \text{ mm}$ ,
7.  $\dot{Q}_3 = 9170 \text{ W}$ .

Różnica między obliczonymi wartościami  $\dot{Q}_3$  i  $\dot{Q}$  nie przekracza 1%, więc założona temperatura  $t_z = 32^\circ\text{C}$  jest prawidłowa i dla tej wartości temperatury średnica zewnętrzna izolacji wynosi 123 mm.

Obliczoną wartość można porównać z wartością podaną w tablicy II. 1, dotyczącą strat ciepła preizolowanych przewodów rurowych i po porównaniu okazuje się, że różnica jest niewielka (wartość tablicowa wynosi 125 mm).

Przy obliczaniu strat cieplnych izolowanych rurociągów wygodnie jest skorzystać z nomogramu podanego na rys. II. 14 i tablicy II. 1.

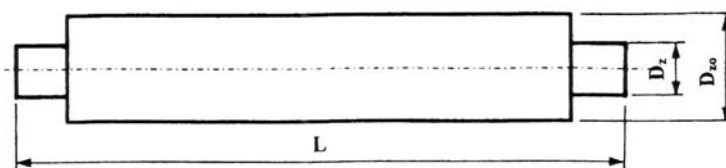


$$r = D_z \left[ \frac{1}{\alpha_w D_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{D_3}{D_2} + \dots + \frac{1}{2\lambda_h} \ln \frac{D_z}{D_h} \right]$$

Rys. II. 14. Strata ciepła izolowanych przewodów rurowych

Tablica II. 1

Strata ciepła preizolowanych przewodów rurowych



Średnica zewnętrzna rury przewodowej	Średnica zewnętrzna rury osłonowej	Jednostkowa strata ciepła						Długość handlowa	Masa 1 mb
		Temperatura płynu, °C							
		150	130	110	90	70	50		
$D_z$	$D_{zo}$	W/m						$L$	-
mm	mm							m	kg
26,9	90	17,5	15,1	12,6	10,1	7,70	5,20	6	2,8
33,7	90	21,5	18,5	15,4	12,4	9,40	6,40	6	3,3
42,4	110	22,2	19,0	15,9	12,8	9,70	6,60	6	4,3
48,3	110	25,6	22,0	18,4	14,8	11,2	7,60	6	4,7
60,3	125	28,8	24,7	20,7	16,6	12,6	8,50	6;9	6,3
76,1	140	34,4	29,6	24,7	19,9	15,0	10,2	6;9	7,9
88,9	160	35,6	30,6	25,6	20,5	15,5	10,5	6;9	10,2
114,3	200	37,4	32,1	26,8	21,6	16,3	11,1	6;9	14,7
133,0	225	39,8	34,2	28,6	23,0	17,4	11,8	6;12	17,5
159,0	250	46,0	39,5	33,0	26,6	20,1	13,6	6;12	20,6
219,1	315	57,2	49,1	41,1	33,0	25,0	16,9	6;12	31,7
273,0	400	54,5	46,9	39,2	31,5	23,8	16,1	6;12	45,2
323,9	450	63,3	54,3	45,4	36,5	27,6	18,7	6;12	58,6
355,6	500	61,3	52,6	44,0	35,4	26,7	18,1	6;12	66,6
406,4	560	65,2	56,0	46,9	37,7	28,5	19,3	6;12	84,7
457,0	630	65,3	56,1	46,9	37,7	28,5	19,3	6;12	98,5
508,0	710	62,9	54,0	45,2	36,3	27,5	18,6	6;12	114,6

Materiał izolacyjny: sztywna pianka poliuretanowa,  $\lambda = 0,0285 \frac{\text{W}}{(\text{m} \cdot \text{K})}$

Straty ciepła podano dla średniej temperatury gruntu 8°C i przy ułożeniu rur w gruncie na głębokości 0,6 m

## Przewodzenie ciepła

Problemem o dużym znaczeniu gospodarczym jest izolowanie cieplne budynków. W tab. II. 2. podano wartości współczynnika przewodzenia ciepła dla wybranych materiałów budowlanych.

Odpowiednie regulacje prawne podają wymogi, jakie muszą spełniać izolacje cieplne budynków. Przyjmuje się, że warunki te są spełnione, jeśli wartość wskaźnika  $E$ , określającego obliczeniowe zapotrzebowanie na ciepło potrzebne do ogrzania budynku w sezonie grzewczym, wyrażone ilością energii przypadającej w ciągu roku na  $1\text{m}^3$  kubatury ogrzewanej części budynku, jest mniejsza od wartości granicznej  $E_0$ . I tak aktualnie (rok 2006):

$$E_0 = 29 \text{ kWh} / (\text{m}^3 \cdot \text{rok}) \text{ przy } A/V \leq 0,2,$$

$$E_0 = 26,6 + 12 A/V \text{ kWh} / (\text{m}^3 \cdot \text{rok}) \text{ przy } 0,2 < A/V < 0,9,$$

$$E_0 = 37,4 \text{ kWh} / (\text{m}^3 \cdot \text{rok}) \text{ przy } A/V \geq 0,9,$$

gdzie:  $A$  jest sumą powierzchni wszystkich ścian zewnętrznych, a  $V$  kubaturą budynku.

**Tablica II. 2**

Współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  [ $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ] materiałów budowlanych

Materiały konstrukcyjne		Materiały termoizolacyjne		Materiały osłonowe	
Beton zwykły	1,5	Styropian	0,032-0,045	Tynk cementowy	1,00
Mur z cegły pełnej	0,77	Poliuretan	0,035	Tynk cementowo-wapienny	
Mur z cegły klinkierowej	1,05	Wełna mineralna	0,042-0,045	Tynk wapienny	0,82
Mur z cegły kratówki	0,56	Korek ekspandowany	0,045	Płyty gipsowo-kartonowe	0,70
Mur z cegły silikatowej	0,80	Maty z włókna szklanego	0,045	Sklejka	
Płyty i bloki z gipsu	0,35	Płyty wiórowo-cementowe	0,15	Płyty pilśniowe twarde	0,23
Drewno sosnowe	0,16	Szko piankowe czarne	0,07	Płyty ceramiczne	0,16
Mur z kamienia łamanego	2,50	Płyta pilśniowa porowata	0,06	Wykładzina podł. PCW	0,18
Beton komórkowy	0,20	Powietrze (nieruchome)	0,02		1,05
					0,20

Przepisy podają również maksymalne dopuszczalne wartości współczynnika przenikania ciepła (wg norm budowlanych oznaczanego  $U$  [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]). Kilka takich wartości podano w tabl. II. 3.

Przewodzenie ciepła

---

**Tablica II. 3**

Maksymalne dopuszczalne wartości współczynnika przenikania ciepła dla budynków mieszkalnych w zabudowie jednorodzinnej

Lp.	Rodzaj przegrody i temperatura w pomieszczeniu	$U_{max}$ W/(m <sup>2</sup> ·K)
1	Ściany zewnętrzne (stykające się z powietrzem zewnętrznym): a) przy $t_{wew} > 16^{\circ}\text{C}$ - o budowie warstwowej z izolacją z materiału o współczynniku przewodzenia ciepła $\lambda \leq 0,05$ W/mK - pozostałe b) przy $t_{wew} \leq 16^{\circ}\text{C}$ niezależnie od rodzaju ściany)	0,30 0,50 0,80
2	Stropodachy i stropy pod nieogrzewanymi poddaszami lub nad przejazdami: a) przy $t_{wew} > 16^{\circ}\text{C}$ b) przy $8^{\circ}\text{C} < t_{wew} \leq 16^{\circ}\text{C}$	0,30 0,50
3	Stropy nad piwnicami nieogrzewanymi i zamkniętymi przestrzeniami podpodłogowymi	0,60
4	Ściany wewnętrzne oddzielające pomieszczenie ogrzewane od nieogrzewanego	1,00

Lp.	Okna, drzwi balkonowe i drzwi zewnętrzne	$U_{max}$ W/(m <sup>2</sup> ·K)
1	Okna (w tym połaciowe), drzwi balkonowe i powierzchnie przezroczyste nieotwieralne w pomieszczeniach o $t_{wew} \geq 20^{\circ}\text{C}$ - w I, II i III strefie klimatycznej (rysunek II. 15) - w IV i V strefie klimatycznej	2,6 2,0
2	Drzwi zewnętrzne wejściowe do budynków	2,6



Rys. II. 15. Strefy klimatyczne w Polsce

Dane zamieszczone w tab. II. 4 pozwalają na zorientowanie się co do wielkości strat ciepła w zależności od jakości izolacji w budynku o powierzchni 128 m<sup>2</sup>. Podobne informacje można znaleźć dla innych budynków o innym przeznaczeniu.

Tablica II. 4

Współczynnik przenikania ciepła  $W/(m^2 \cdot K)$  oraz zapotrzebowanie energii dla budynku (128 m<sup>2</sup>) o różnej izolacji cieplnej

Budynek	Okno	Strop	Ściany zew.	Strop piwnicy	Roczne zapotrzebowanie na gaz [m <sup>3</sup> ]	Roczne zapotrzebowanie na energię [kWh/m <sup>2</sup> ]	Oszczędności [%]
bez izolacji termicznej	3,0	2,17	1,30	1,85	7858	317	0
przeciętnie izolowany	3,0	0,58	0,58	0,56	3451	139	56
dobrze izolowany	1,9	0,24	0,29	0,33	2025	82	75
dom energooszczędny	1,3	0,15	0,20	0,30	1192	48	85

Analizując równanie (II-44), opisujące przewodzenie ciepła przez przegrodę cylindryczną, zauważymy, że grubość przegrody nie wpływa jednoznacznie na strumień ciepła. Z jednej strony ze wzrostem  $s$  maleje on, z drugiej rośnie  $F_z$ , co zwiększa strumień ciepła.

Dokładniejsza analiza tego problemu wskazuje, że można znaleźć taką wartość średnicy zewnętrznej izolacji  $d_{kr}$ , przy której wystąpi minimum oporu cieplnego:

$$d_{kr} = \frac{2\lambda}{\alpha_z}. \quad (\text{II-63})$$

Jak widać,  $d_{kr}$  zależy jedynie od rodzaju materiału i intensywności wnikania ciepła. Jeśli średnica zewnętrzna rury  $d_z$  jest większa od  $d_{kr}$ , to nakładanie izolacji zwiększa opór cieplny, natomiast gdy średnica rury jest mniejsza od  $d_{kr}$ , to nakładanie izolacji, aż do grubości:

$$s_{kr} = \frac{d_{kr} - d}{2}, \quad (\text{II-64})$$

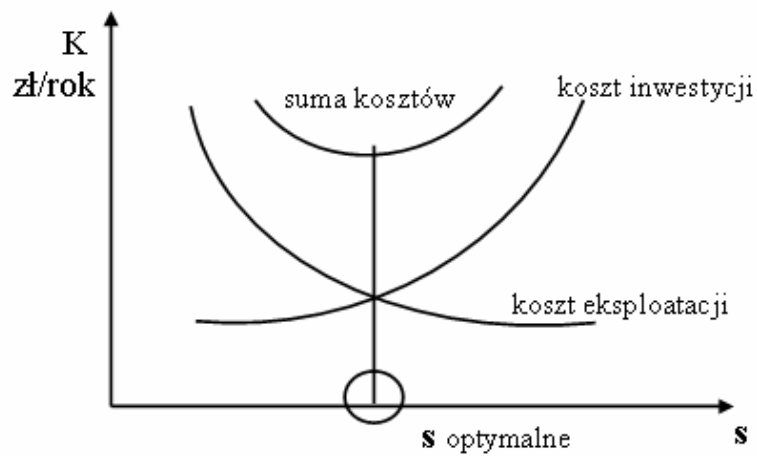
będzie zmniejszać opór cieplny i spowoduje zwiększanie strat ciepła. Dopiero przekroczenie średnicy  $d_{kr}$  i związaną z nią grubością  $s_{kr}$  da zmniejszenie strat ciepła.

W praktyce przypadek taki wystąpi przy bardzo małych średnicach rur i wysokich wartościach współczynnika przewodzenia ciepła, np. przy izolowaniu igielitem przewodów elektrycznych. W rurociągach przemysłowych przypadek ten na ogół nie występuje, może zdarzyć się natomiast w technice niskich temperatur, gdzie stosuje się rury o bardzo małych średnicach do przesyłania skroplonych gazów.

Zwiększenie grubości izolacji powoduje zmniejszanie strat ciepła, a więc przynosi konkretne korzyści, niemniej zwiększa koszt inwestycji. Ekonomiczną grubość izolacji należy wyznaczyć tak, aby uzyskać minimum sumy kosztów ruchomych (tzn. kosztów traconego ciepła) i kosztów inwestycyjnych, rys. II. 16.

Koszty inwestycyjne zależą od ceny izolacji, kosztu robocizny, jej położenia oraz czasu eksploatacji. Koszty ruchome oblicza się, uwzględniając cenę energii cieplnej i czas pracy rurociągu. Powyższe koszty należy obliczyć uwzględniając aktualne ceny izolacji, paliw, robocizny itd.





Rys. II. 16. Ekonomiczna grubość izolacji

Np. dla rurociągu o średnicy 100 mm, którym płynie para o temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$  ekonomiczna grubość izolacji wypada ok. 40 mm, a dla temperatury  $200^{\circ}\text{C}$  ok. 65 mm. 1 m nieizolowanej rury o średnicy 300 mm, przez którą płynie para o temperaturze  $300^{\circ}\text{C}$  traci ok. 7000 W, a przy izolacji o grubości 140 mm – 250 W.

Izolację cieplną należy starannie chronić przed zawilgoceniem, gdyż, jak już była o tym mowa, przewodność cieplna mokrej izolacji wzrasta bardzo znacznie. Szczególna staranność zalecana jest w przypadku izolacji zimnochronnych, aby nie dopuścić do pojawienia się lodu.

Warto również wiedzieć, że np. nieizolowany zawór na rurociągu  $\varnothing 100$  mm traci tyle ciepła co 6,2 m rury izolowanej.

## II. 5. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA

Punktem wyjścia do rozważań na temat nieustalonego przewodzenia ciepła są różne postacie równania Fouriera, podane w rozdziale II. 2.

Z matematycznego punktu widzenia są to równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych. Równania takie mają dowolnie dużą liczbę rozwiązań. Aby uzyskać rozwiązanie właściwe dla konkretnego przypadku należy podać: warunki początkowe – określające rozkład temperatury w wybranej chwili czasu, którą traktujemy jako początkową,  $t_p$  dla  $\tau = 0$ , oraz warunki brzegowe, określające warunki wymiany ciepła na zewnętrznych

powierzchniach ciała. Warunki początkowe i brzegowe nazywamy wspólnie warunkami granicznymi.

Dla przewodzenia ciepła przyjmuje się 4 rodzaje warunków brzegowych:

1. Dana jest temperatura (rozkład temperatury) na powierzchni, przy czym nie jest znane ciepło doprowadzone bądź odprowadzone przez tę powierzchnię. Jest to tzw. warunek Dirichleta.
2. Dana jest gęstość strumienia ciepła doprowadzanego bądź odprowadzanego do powierzchni, przy czym nie znamy temperatury powierzchni. Jest to warunek Neumana.
3. Dana jest temperatura ośrodka (płynu otaczającego) i współczynnik wnikania ciepła do bądź od powierzchni do otoczenia. Jest to tzw. warunek Fouriera, który określa ciągłość strumienia ciepła

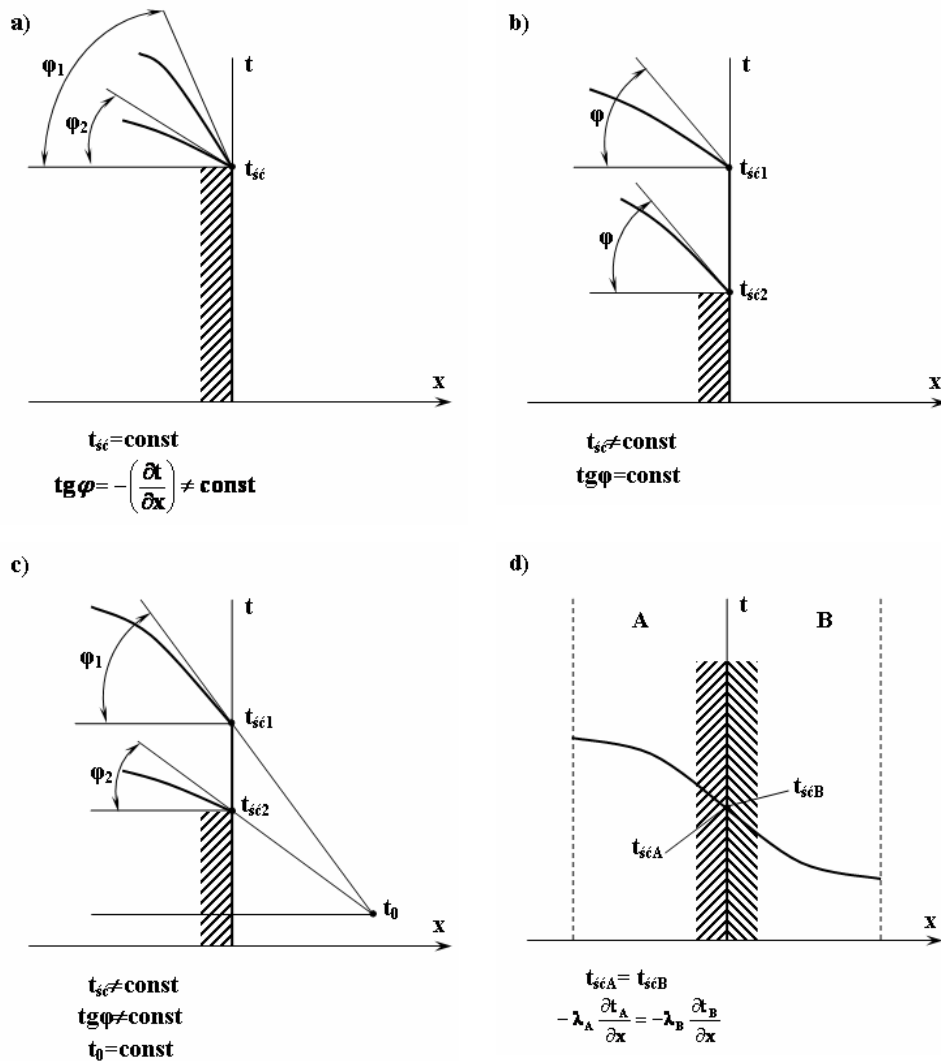
$$-\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right) = \alpha (t_{śc} - t_{otoczenia}).$$

4. Na granicy idealnie stykających się dwóch ciał zachowana jest ciągłość temperatury  $t_{ścA} = t_{ścB}$  oraz strumienia ciepła  $-\lambda_A \frac{\partial t_A}{\partial x} = -\lambda_B \frac{\partial t_B}{\partial x}$ .

Podane warunki noszą odpowiednio nazwy warunków pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego rodzaju, a schematycznie przedstawiono je na rys. II. 17.

Trzeba pamiętać, że dla zagadnień nieustalonego ruchu ciepła warunki brzegowe (temperatura ściany, ośrodka, współczynnik  $\alpha$ , strumień ciepła) mogą być zmienne w czasie. Potrzebna jest wtedy znajomość przebiegu tej zmienności.

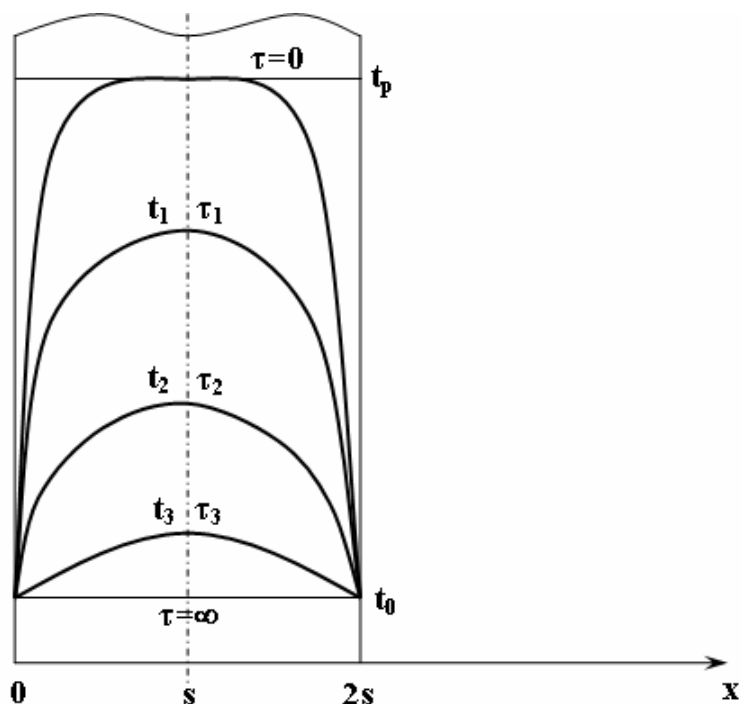
Tytułem przykładu rozpatrzmy kilka przypadków.



Rys. II. 17. Schemat warunków brzegowych a) pierwszego, b) drugiego, c) trzeciego, d) czwartego rodzaju

**Płyta nieskończona, warunki brzegowe pierwszego rodzaju**

Rozpatrujemy zatem przypadek ostygnięcia nieskończenie dużej płyty o grubości  $2s$ , od temperatury początkowej  $t_p$ , jednakowej w każdym punkcie płyty, do temperatury końcowej, równej temperaturze otoczenia  $t_0$ . Zakładamy, że intensywność odbioru ciepła przez otoczenie jest bardzo duża ( $\alpha = \infty$ ), a więc powierzchnia ściany natychmiast po kontakcie z otoczeniem przyjmuje temperaturę  $t_{sc} = t_0$ . Wewnątrz płyty temperatury opadają wolniej i zależą od odległości od powierzchni i od czasu (rys. II. 18).



**Rys. II. 18.** Rozkład temperatury w stygnącej płycie

Szukamy zatem funkcji  $t = f(x, \tau)$  wyrażającej tę zależność. Na razie znamy tylko jej równanie różniczkowe (II-19):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

Warunki brzegowe pierwszego rodzaju dadzą się zapisać w postaci:

- |    |                         |                      |           |
|----|-------------------------|----------------------|-----------|
| 1. | $\tau = 0$              | $x_{\text{dowolne}}$ | $t = t_p$ |
| 2. | $\tau = \infty$         | $x_{\text{dowolne}}$ | $t = t_0$ |
| 3. | $\tau_{\text{dowolne}}$ | $x = 0$              | $t = t_0$ |
| 4. | $\tau_{\text{dowolne}}$ | $x = 2s$             | $t = t_0$ |

Wygodnie jest użyć zmiennych bezwymiarowych:

$$Y = \frac{t - t_0}{t_p - t_0}, \quad (\text{II-65})$$

wtedy równanie (II-19) przyjmie postać:

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad (\text{II-66})$$

a warunki brzegowe zmienią się na:

- |    |                         |                      |         |
|----|-------------------------|----------------------|---------|
| 1. | $\tau = 0$              | $x_{\text{dowolne}}$ | $Y = 1$ |
| 2. | $\tau = \infty$         | $x_{\text{dowolne}}$ | $Y = 0$ |
| 3. | $\tau_{\text{dowolne}}$ | $x = 0$              | $Y = 0$ |
| 4. | $\tau_{\text{dowolne}}$ | $x = 2s$             | $Y = 0$ |

Wielkość  $Y$ , oznaczana także  $\theta$ , bywa nazywana zredukowaną nadwyżką temperatury:

$$\theta = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_{\max}} = \frac{t - t_0}{t_p - t_0}. \quad (\text{II-67})$$

W literaturze stosuje się także zredukowaną (bezwymiarową) grubość  $\xi = \frac{x}{s}$ ,

dalej będziemy operować nieco inną postacią tej wielkości.

Jednym z możliwych rozwiązań równania (II-66) będzie funkcja:

$$Y = e^{-p^2 a \tau} \sin px, \quad (\text{II-68})$$

gdzie:  $p$  jest stałą.

Rozwiązaniem będzie również funkcja typu:

$$Y = C e^{-p^2 a \tau} \sin px, \quad (\text{II-69})$$

a także suma takich funkcji.

Wyznaczamy stałą  $C$  z warunku 4:

$$(\tau_{\text{dowolne}}, x = 2s, \quad Y = 0),$$

$$0 = C e^{-p^2 a \tau} \sin p2s.$$

Aby ta równość była spełniona dla dowolnego  $\tau$ , musi zachodzić:

$$\sin p2s = 0,$$

czyli:

$$p = \frac{n\pi}{2s} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Tak więc równanie (II-69) przyjmie postać:

$$Y = C e^{-\left(\frac{n\pi}{2s}\right)^2 a\tau} \sin\left(\frac{n\pi}{2s}\right) x.$$

Wprowadzając liczbę Fouriera:

$$\frac{a\tau}{s^2} = Fo, \quad (\text{II-70})$$

napiżemy:

$$Y = C e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 Fo} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{x}{s}. \quad (\text{II-71})$$

Podstawiając teraz  $n=1, 2, 3, \dots$  otrzymamy szereg rozwiązań szczególnych. Rozwiązaniem będzie również dowolny wielomian złożony z takich całek szczególnych, co wynika z właściwości liniowego równania różniczkowego. Zatem:

$$Y = C_1 e^{-\left(\frac{1\pi}{2}\right)^2 Fo} \sin\left(\frac{1\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + C_2 e^{-\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 Fo} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + C_3 e^{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 Fo} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + \dots \quad (\text{II-72})$$

Stałe  $C_i$  znajdziemy z warunku 1 (dla  $\tau = 0$  - a więc i  $Fo = 0$  i dowolnego  $x$ ;  $Y = 1$ ):

$$1 = C_1 \sin\left(\frac{1\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + C_2 \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + C_3 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + \dots$$

Wprowadzając teraz bezwymiarową grubość:

$$\frac{\pi x}{2s} = z, \quad (\text{II-73})$$

(podobną do podanej wcześniej grubości zredukowanej  $\frac{x}{s} = \xi$ ) napiżemy:

$$1 = C_1 \sin z + C_2 \sin 2z + C_3 \sin 3z + \dots \quad (\text{II-74})$$

Funkcję typu  $f(z)=1$ , da się zapisać w postaci szeregu Fouriera:

$$1 = \frac{\pi}{4} \sin z + \frac{4}{3\pi} \sin 3z + \frac{4}{5\pi} \sin 5z + \dots \quad (\text{II-75})$$

Porównując oba ostatnie szeregi otrzymamy:

$$C_1 = \frac{4}{\pi}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{4}{3\pi}; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = \frac{4}{5\pi} \text{ itd.} \quad (\text{II-76})$$

Ostatecznie szukana funkcja przybierze postać:

$$Y = \frac{4}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 F_0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + \frac{4}{3\pi} e^{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 F_0} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \frac{x}{s} + \dots \quad (\text{II-77})$$

Wprowadzając dla uproszczenia zapisu:

$$A = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 F_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{a\tau}{s^2}, \quad (\text{II-78})$$

oraz:

$$B = \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{x}{s}\right), \quad (\text{II-79})$$

napiżemy:

$$Y = \frac{t - t_0}{t_p - t_0} = \frac{4}{\pi} \left[ e^{-A} \sin B + \frac{1}{3} e^{-9A} \sin 3B + \frac{1}{5} e^{-25A} \sin 5B + \dots \right]. \quad (\text{II-80})$$

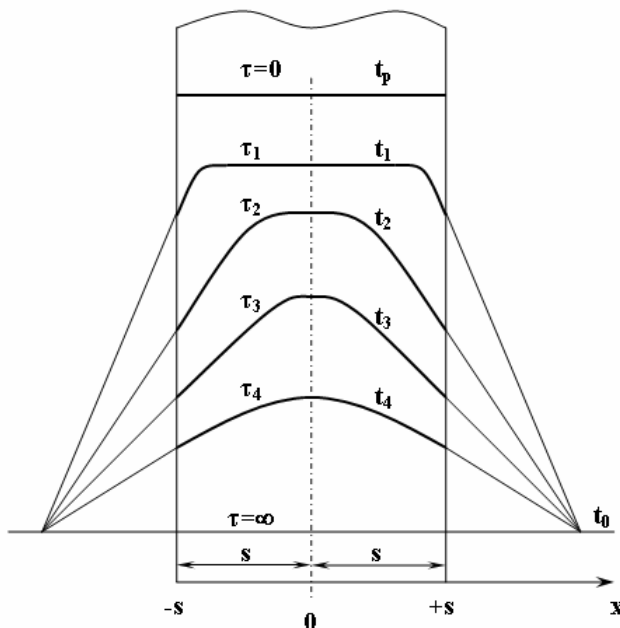
Równanie to pozwala znaleźć temperaturę  $t$  w dowolnym czasie  $\tau$  liczonym od początku stygnięcia płyty i w dowolnym punkcie  $x$ .

Uzyskane równanie jest trudne do stosowania w rachunku praktycznym, choć oczywiście można je wykorzystywać, stosując różne sposoby rozwiązania.

Istnieją także wykresy i tablice podające zależność  $Y = f\left(F_0, \frac{x}{s}\right)$  które pozwalają na szybkie rozwiązanie konkretnych przypadków. Uzyskane równanie jest oczywiście słuszne również dla przypadku nagrzewania płyty.

### **Płyta nieskończenie duża, warunki brzegowe trzeciego rodzaju**

Jest to przypadek znacznie trudniejszy od poprzedniego, ale o dużo większym znaczeniu praktycznym (rys. II. 19).



**Rys. II. 19.** Rozkład temperatury w stygnącej płycie przy stałej temperaturze ośrodka

Podobnie jak w przypadku poprzednim, szukamy rozwiązania w postaci funkcji  $t=f(x\tau)$ , biorąc za punkt wyjścia równanie Fouriera:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

które po wprowadzeniu  $Y$  przyjmuje postać (II-66):

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}.$$

Warunki brzegowe będą następujące:

- |                            |                      |   |   |
|----------------------------|----------------------|---|---|
| 1. $\tau = 0$              | $x_{\text{dowolne}}$ | $t = t_p$   | $Y = 1$   |
| 2. $\tau = \infty$         | $x_{\text{dowolne}}$ | $t = t_0$   | $Y = 0$   |
| 3. $\tau_{\text{dowolne}}$ | $x = -s$             | $\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_{-s} - t_0)$ | $\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda}Y_{(-s)}$ |
| 4. $\tau_{\text{dowolne}}$ | $x = s$              | $\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_s - t_0)$    | $\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda}Y_{(s)}$  |
| 5. $\tau_{\text{dowolne}}$ | $x = 0$              | $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$                                     | $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$                               |



W tym przypadku, podobnie jak poprzednio, będziemy szukać całki ogólnej, wyznaczać stałe i rozwijać w szereg. W rozwiązaniu pojawi się oczywiście współczynnik wnikania ciepła  $\alpha$  i w związku z tym wprowadzimy nową wielkość zwaną liczbą Biota:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot s}{\lambda}. \quad (\text{II-81})$$

Również i teraz rozwiązaniem będzie szereg nieskończony, przedstawiający funkcję:

$$Y = f(Fo, Bi, \frac{x}{s}).$$

### Walec nieskończony, warunki brzegowe trzeciego rodzaju

Jeśli pominiemy zmienność temperatury wzdłuż osi  $z$  i użyjemy współrzędnych cylindrycznych:

$$x = r \cos \varphi \quad ; \quad y = r \sin \varphi,$$

to równanie Fouriera przyjmuje postać:

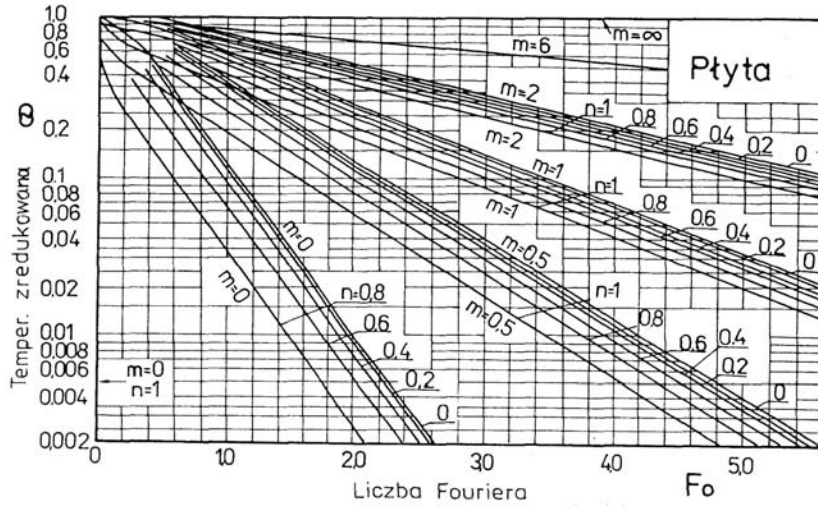
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right), \quad (\text{II-82})$$

którego rozwiązaniem będzie funkcja  $t = f(r, \tau)$  w postaci  $Y = f(Fo, Bi, \frac{r}{R})$ .

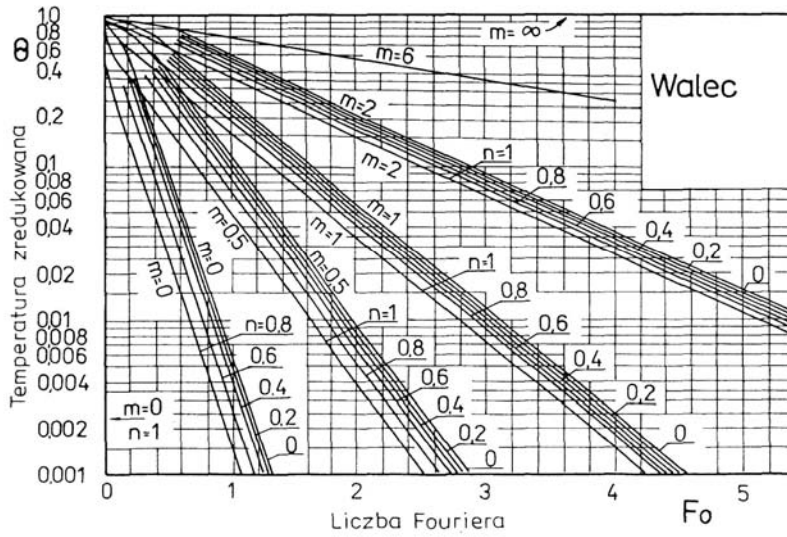
### Metody robocze

Analityczne rozwiązania zagadnień z zakresu nieustalonego ruchu ciepła, jak pokazano schematycznie tytułem przykładu dla płyty nieskończenie dużej, są zawsze uciążliwe, wymagają dobrego przygotowania matematycznego i rzadko bywają stosowane w praktyce inżynierskiej. Korzysta się raczej z opracowanych na podstawie rozwiązań analitycznych wykresów i tablic, pozwalających na szybkie znalezienie interesującego rozwiązania. Ponieważ najczęściej mamy do czynienia z warunkami brzegowymi trzeciego rodzaju, dla tego przypadku istnieje najwięcej opracowań. Na rys. II. 20 pokazano zależność temperatury zredukowanej  $\theta (Y)$  w płycie i w walcu w zależności od liczb  $Fo$ ,  $Bi$  oraz położenia.

a) dla płyty;  $m = 1/Bi$ ,  $n = x/R$ ;  $R$  – pół grubości płyty



b) dla walca;  $m = 1/Bi$ ,  $n = r/R$ ;  $R$  – promień walca



$$\Theta = \frac{t - t_o}{t_p - t_o}; \quad t, t_p, t_o - \text{temperatura chwilowa i początkowa ciała, temperatura otoczenia}$$

Rys. II. 20. Temperatura zredukowana w stanie nieustalonym:  
a) dla płyty, b) dla walca

Linie  $n = 0$  odnoszą się do temperatur w osi ciała ( $x = 0, r = 0$ ), a linie  $n = 1$  do powierzchni. Linie  $m = 0$  dotyczą przypadku granicznego, gdy  $\alpha = \infty$ , a temperatura na powierzchni natychmiast przyjmuje wartość temperatury otoczenia. Dlatego linie  $m = 0$  i  $n = 1$  (powierzchni ciała) pokrywają się z osią  $\theta(Y)$ , które odpowiada  $Fo = 0$ , czyli  $\tau = 0$ . Dla  $\alpha \rightarrow 0$ , czyli dla  $m \rightarrow \infty$  linie na wykresach dążą do położenia poziomego  $\theta(Y) = 1$ . Czasem wygodniej jest, szczególnie dla bardzo małych wartości liczb  $Fo$ , skorzystać z odpowiednich tablic (tab. II. 6)

**Tablica II. 6**

Temperatury zredukowane  $\theta(Y)$  na powierzchni płyty

Bi \ Fo	0,0003	0,0010	0,0025	0,0050	0,0100
0,1	0,999	0,997	0,995	0,993	0,989
0,5	0,996	0,983	0,975	0,963	0,948
1	0,980	0,965	0,947	0,926	0,897
4	0,927	0,872	0,809	0,747	0,670
10	0,833	0,726	0,615	0,522	0,428
20	0,705	0,555	0,441	0,336	0,256
50	0,468	0,309	0,211	0,154	0,111
100	0,287	0,171	0,111	0,079	0,056
200	0,157	0,088	0,057	0,040	0,028
500	0,066	0,036	0,023	0,016	0,011
1000	0,033	0,018	0,011	0,008	0,006
2000	0,017	0,009	0,006	0,004	0,003

Dla ciał o skończonych wymiarach np. o kształcie prostopadłościanu lub krótkiego cylindra można znaleźć temperaturę w dowolnym punkcie i czasie, posługując się metodą Newmana.

Rozpatrując np. prostopadłościan, bierzemy pod uwagę dwie równoległe ściany i traktujemy je jako należące do płyty nieskończonej o grubości  $2s_{mx}$ . Po odmierzeniu odległości rozpatrywanego punktu  $x$  od płaszczyzny symetrii obliczymy:

$$Fo = \frac{a\tau}{s_{mx}}; \quad m_x = \frac{\lambda}{\alpha s_{mx}} = \frac{1}{Bi_x}; \quad n_x = \frac{x}{s_{mx}}$$

i z wykresu (lub z tablicy) znajdziemy wartość  $Y_x$ .

Następnie rozpatrzmy kolejne dwie ściany odległe od siebie o  $2s_{my}$  i  $2s_{mz}$  i podobnie znajdziemy  $Y_y$  i  $Y_z$ . Wartość wypadkową  $Y = \frac{t_0 - t}{t_0 - t_p}$ , określającą

temperaturę w danym punkcie, znajdziemy jako  $Y = Y_x \cdot Y_y \cdot Y_z$ .

Ponieważ poszczególne wartości  $Y$  są zawsze ułamekami, to wartość wypadkowa  $Y$  będzie od nich mniejsza, oznacza to, że temperatura ciała ograniczonego spada szybciej niż np. płyty nieskończonej. Jest to wniosek oczywisty, wynikający z chłodzenia ze wszystkich stron.

Podobnie postąpimy dla krótkiego cylindra, traktując dwie ściany (dna) walca jako należące do płyty nieskończonej o grubości  $2s_{mx} = L_{walca}$ , a sam walec jako należący do nieskończonego cylindra o średnicy  $d = 2s_{my}$ .

Przedstawione metody analityczne i robocze rozwiązywania zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła mogą być stosowane właściwie tylko do stosunkowo prostych układów geometrycznych o regularnych kształtach. W zagadnieniach praktycznych spotyka się często sytuacje dużo bardziej złożone i wtedy jedynym wyjściem staje się zastosowanie metod numerycznych.

Punktem wyjścia jest zastąpienie równania różniczkowego:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

równaniem, w którym różniczkę zastępuje się przyrostami skończonymi:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2}.$$

W zagadnieniach dotyczących nieustalonego przewodzenia ciepła najbardziej popularna jest metoda różnic skończonych (MRS).

### III. WNIKANIE CIEPŁA

#### III. 1. WPROWADZENIE

Wnikanie ciepła jest procesem złożonym i polega na przenoszeniu ciepła między ścianą a kontaktującym się z nią płynem. W zależności od tego czy płyn ma wyższą temperaturę od ściany, czy też jest odwrotnie, przepływ ciepła odbywa się od płynu do ściany lub od ściany do płynu. Ponieważ bezpośrednio przy ścianie zawsze znajduje się warstwa laminarna płynu, transport ciepła przez tę warstwę odbywa się przez przewodzenie. Wnikanie jest zatem procesem złożonym z unoszenia ciepła przez znajdujący się w ruchu płyn i przewodzenia przez przyścienną warstwę laminarną. W tej bardzo cienkiej warstwie występuje największy gradient temperatury i ona, w głównej mierze, decyduje o intensywności wnikania. Wszystkie metody intensyfikacji wnikania ciepła polegają na pocienianiu tej warstwy.

Miarą intensywności wnikania ciepła jest omówiony w rozdziale I (równanie I-7) współczynnik wnikania ciepła  $\alpha$  [ $W/(m^2 \cdot K)$ ].

Proces wnikania jest nierozzerwalnie związany z ruchem czynnika, bowiem ruch decyduje zarówno o unoszeniu ciepła przez prądy konwekcyjne, jak i o grubości laminarnej warstwy przyściennej.

Można wyróżnić dwa rodzaje ruchu czynnika – wymuszony i niewymuszony. W pierwszym przypadku przepływ wywołany jest najczęściej działaniem jakiegoś urządzenia (pompa, wentylator), w drugim – powstaje samorzutnie, np. na skutek różnicy gęstości wywołanej różnicą temperatury.

Przy przepływach wymuszonych prędkość czynnika jest znana bądź łatwa do obliczenia i może być traktowana jako wielkość niezależna. Przy przepływach niewymuszonych prędkość zależy od właściwości czynnika, różnicy temperatury, wysokości słupa płynu, itd.

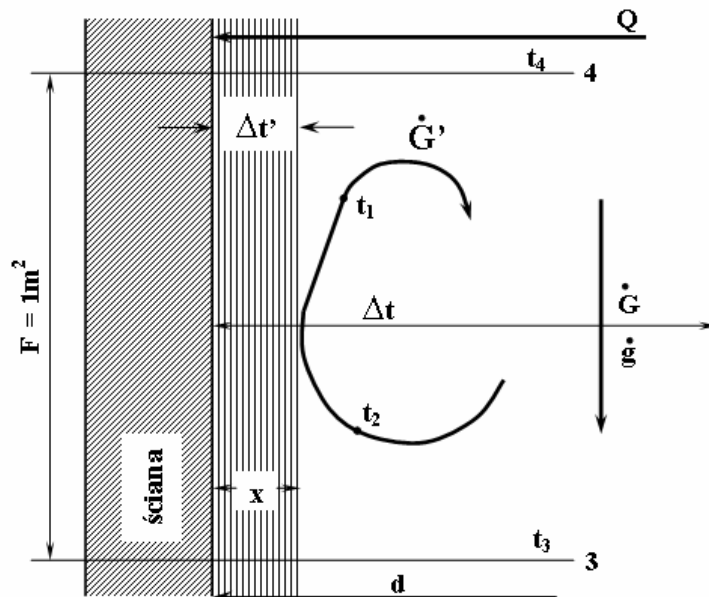
Podział na przepływy wymuszone i niewymuszone stanowi podstawę systematyki przypadków wnikania ciepła, która przedstawia się następująco:

- I. Wnikanie ciepła przy przepływie wymuszonym:
  - burzliwym,
  - uwarstwionym,
  - przejściowym.
- II. Wnikanie ciepła przy przepływie niewymuszonym:
  - grawitacyjnym burzliwym,
  - grawitacyjnym uwarstwionym,
  - grawitacyjnym skroplin (kondensacja),
  - swobodnym (konwekcja naturalna),
  - swobodnym wrzenia.
- III. Wnikanie ciepła przy przepływie mieszanym.

Do opisu wnikania ciepła dochodzi się dwiema drogami – analityczną i eksperymentalną. W ujęciu analitycznym rozpatruje się równania obowiązujące równocześnie na styku płynu i ściany. Są to równania wymiany ciepła, równania energii, równania ruchu płynu i równania ciągłości. Ścisłe rozwiązanie tych równań możliwe jest jedynie dla nielicznych przypadków przepływów uwarstwionych. Dlatego, mimo ciągłego rozwoju metod numerycznych i coraz to lepszych możliwości modelowania przepływów burzliwych, nadal podstawowe znaczenie mają metody eksperymentalne. Wyniki doświadczeń opracowywane są na ogół w postaci równań bezwymiarowych, złożonych z liczb kryterialnych, a przy poszukiwaniu postaci tych równań korzysta się z teorii podobieństwa i analizy wymiarowej.

### III. 2. WNIKANIE CIEPŁA PRZY PRZEPLYWIE WYMUSZONYM BURZLIWYM

Poglądowy schemat wnikania ciepła przy przepływie wymuszonym burzliwym przez rurę przedstawia rys. III. 1.



Rys. III. 1. Schemat wnikania ciepła przy przepływie wymuszonym burzliwym

Rozpatrując wnikanie ciepła do  $1\text{m}^2$  powierzchni wewnętrznej rury, daleko od wlotu, przy ukształtowanej i nie zmieniającej się warstwie laminarnej oraz zakładając, że ciepło, które odda pojedyncza struga  $\dot{G}'$  warstwie laminarnej, będzie przez nią przewodzone i następnie zostanie odebrane przez ścianę, można napisać następujące równania:

$$\dot{q} = \dot{G}' c_p (t_2 - t_1), \quad (\text{III-1})$$

oraz:

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{x} \Delta t'. \quad (\text{III-2})$$

Grubość warstwy  $x$  zależy od liczby  $Re$ , a więc od  $w$ ,  $d$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ . Pamiętając, że  $\alpha = \frac{\dot{q}}{\Delta t}$  i pomijając wpływ wielkości stałych i bezwymiarowych (stosunek różnic temperatur) możemy przewidywać, że intensywność wnikania ciepła w rozpatrywanym przypadku będzie funkcją:

$$\alpha = f(\eta, \lambda, \rho, c_p, w, d), \quad (\text{III-3})$$

którą poddamy analizie wymiarowej:

$$\alpha = C \eta^{a_1} \lambda^{a_2} \rho^{a_3} c_p^{a_4} w^{a_5} d^{a_6}. \quad (\text{III-4})$$

Przyjmując układ jednostek kg, m, s, K otrzymamy następujące wymiary poszczególnych wielkości:

$$\alpha; \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^3 \cdot \text{K}} \right] = [\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}],$$

$$\eta; [\text{Pa} \cdot \text{s}] = \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right] = [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}],$$

$$\lambda; \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{s}} \right] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{K}} \right] = [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}],$$

$$\rho; \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] = [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}],$$

$$c_p; \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}} \right] = [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}],$$

$$w; \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}],$$

$$d; [\text{m}].$$

Wstawiając w równaniu (III-4) wymiary poszczególnych wielkości otrzymamy:

$$\begin{aligned} [\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}] = C & [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]^{a_1} \cdot [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}]^{a_2} \cdot [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]^{a_3} \cdot \\ & \cdot [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]^{a_4} \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^{a_5} \cdot [\text{m}]^{a_6} \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

a po przekształceniu:

$$[\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}] = C \cdot [\text{kg}^{a_1+a_2+a_3} \cdot \text{s}^{-a_1-3a_2-2a_4-a_5} \cdot \text{K}^{-a_2-a_4} \cdot \text{m}^{-a_1+a_2-3a_3+2a_4+a_5+a_6}] \dots \quad (\text{III-6})$$

Porównując wykładniki przy poszczególnych wymiarach otrzymamy:

$$\text{kg} \quad 1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad (\text{III-7})$$

$$\text{s} \quad -3 = -a_1 - 3a_2 - 2a_4 - a_5, \quad (\text{III-8})$$

$$\text{K} \quad -1 = -a_2 - a_4, \quad (\text{III-9})$$

$$\text{m} \quad 0 = -a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 + a_5 + a_6. \quad (\text{III-10})$$

Wyrażając poszczególne wykładniki  $a_i$  przez  $a_4$  i  $a_5$  otrzymamy z (III-9):

$$a_2 = 1 - a_4,$$

z (III-8):

$$a_1 = 3 - 3a_2 - 2a_4 - a_5 = 3 - 3(1 - a_4) - 2a_4 - a_5 = 3 - 3 + 3a_4 - 2a_4 - a_5 = a_4 - a_5,$$

z (III-7):

$$a_3 = 1 - a_1 - a_2 = 1 - a_4 + a_5 - 1 + a_4 = a_5,$$

z (III-10):

$$a_6 = a_1 - a_2 + 3a_3 - 2a_4 - a_5 = a_4 - a_5 - 1 + a_4 + 3a_5 - 2a_4 - a_5 = -1 + a_5.$$

Po podstawieniu obliczonych wykładników do (III-4):

$$\alpha = C \eta^{a_4-a_5} \lambda^{1-a_4} \rho^{a_5} c_p^{a_4} w^{a_5} d^{-1+a_5}. \quad (\text{III-11})$$

Grupując parametry o tych samych wykładnikach uzyskamy:

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = C \left( \frac{w d \rho}{\eta} \right)^{a_5} \left( \frac{c_p \eta}{\lambda} \right)^{a_4}. \quad (\text{III-12})$$

W ten sposób zupełnie ogólna zależność (III-3) została przekształcona w równanie złożone z trzech liczb (modułów) bezwymiarowych. Pojawiła się

znana z hydrauliki liczba  $Re = \frac{w d \rho}{\eta}$  (patrz cz.1) oraz dwie nowe, charakterystyczne dla ruchu ciepła liczby:

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}, \quad (\text{III-13})$$

zwana liczbą Nusselta i liczba Prandtla:



$$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda} \quad (\text{III-14})$$

Tak więc zależność (III-12) można zapisać w postaci:

$$Nu = C Re^A Pr^B \quad (\text{III-15})$$

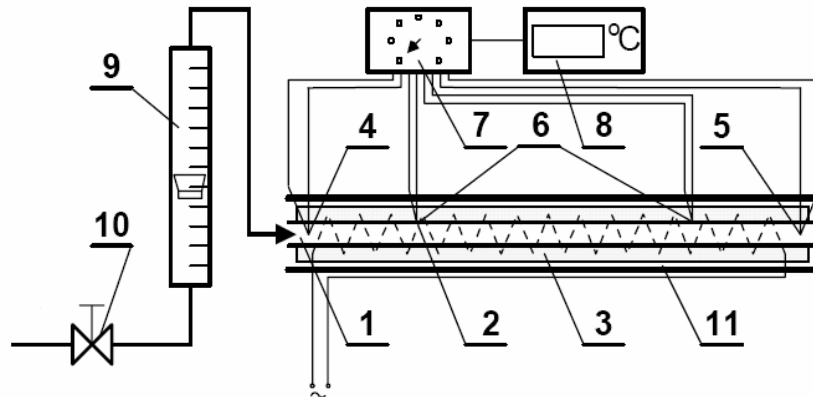
Równanie to sprowadza do wspólnej postaci wszystkie podobne przypadki wnikania ciepła przy przepływie wymuszonym burzliwym bez względu na właściwości czynnika.

Stałą  $C$  oraz wykładniki  $A$  i  $B$  wyznacza się na drodze eksperymentalnej. Doświadczenie takie polega na pomiarze wielkości wchodzących w skład równania definiującego współczynnik wnikania ciepła:

$$\alpha = \frac{\dot{Q}}{F(t_{śc} - t_{\text{czynnika}})}$$

Mierząc strumień ciepła odebranego przez czynnik płynący przez ogrzewaną rurę o powierzchni  $F$  i mierząc temperaturę ściany, np. za pomocą termopar umieszczonych tuż przy powierzchni wewnętrznej rury, oraz temperaturę czynnika, znajdziemy wartość  $\alpha$ . Zmieniając strumień płynu określamy wpływ liczby  $Re$  na wartość współczynnika wnikania ciepła, a zmieniając czynnik – wpływ liczby  $Pr$ .

Schemat instalacji do doświadczalnego wyznaczania współczynnika wnikania ciepła przy przepływie przez rurę pokazano na rys. III. 2.



**Rys. III. 2.** Schemat instalacji do doświadczalnego wyznaczania współczynnika wnikania ciepła: 1 – rura przepływowa, 2 – grzałka elektryczna, 3 – izolacja, 4 – termopara mierząca temperaturę płynu na dolocie, 5 – termopara mierząca temperaturę płynu na wylocie, 6 – termopary mierzące temperaturę ścianki rurki, 7 – przełącznik miejsc pomiarowych, 8 – wskaźnik temperatury, 9 – rotametr, 10 – zawór regulacyjny strumienia płynu, 11 – osłona

Jest oczywiste, że podczas doświadczenia będzie zmieniała się temperatura płynu, a co za tym idzie, również temperatura ściany. Tak więc wyznaczony współczynnik wnikania ciepła będzie pewną wartością średnią. Jako różnicę temperatury w równaniu definicyjnym z reguły przyjmuje się średnią logarymiczną różnic na początku i na końcu odcinka pomiarowego.

Literatura podaje wiele szczegółowych postaci równania (III-15). Jednym z popularniejszych jest równanie:

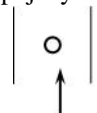
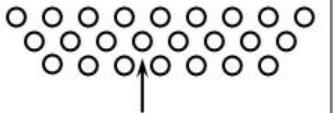
$$Nu = 0,023Re^{0,8} Pr^{0,4}, \quad (III-16)$$

zwane równaniem Dittusa-Boeltera.

W tabelicy III. 1 podano wartości stałej  $C$  i wykładników  $A$  i  $B$  dla kilku ważnych technicznie przypadków.

**Tablica III. 1**

Wartości  $C, A, B$  w równaniu (III-15)

Lp.	Przypadek	$C$	$A$	$B$	Uwagi
1	Przepływ w rurze, mała lepkość czynnika	0,023	0,8	0,4	$Re > 2100$
2	Przepływ w rurze, duża lepkość czynnika ( $\eta > 2\eta_{wody}$ )	$0,027 \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_{sc}}\right)^{0,14}$	0,8	0,33	$Re > 10\ 000$
3	Przepływ prostopadły do rury pojedynczej 	0,26	0,6	0,3	$(Re)_{g_{max}} > 1000$ $t_f$
4	Przepływ prostopadły do pęku rur naprzemianległych 	0,33	0,6	0,33	$(Re)_{g_{max}} > 2000$ $t_f$

Podczas przepływu temperatura płynu zmienia się. Właściwości czynnika wyznacza się na ogół dla średniej arytmetycznej temperatury czynnika. W niektórych przypadkach, (np. poz. 3 i 4 w tab. III. 1), do obliczenia właściwości należy zastosować średnią temperaturę warstwy przyściennej  $t_f$ , obliczoną jako średnia arytmetyczna między temperaturą czynnika i temperaturą ściany.

W przypadku opływu np. poz. 3 i 4 tab. III. 1, w uwagach podano  $(Re)_{g_{max}}$ . Oznacza to, że jako prędkość w liczbie  $Re$  należy wstawić prędkość w najmniejszym przekroju, w którym pojawi się prędkość maksymalna, a liczba  $Re$  przyjmie postać:

$$(Re)_{g_{max}} = \frac{d_z g_{max}}{\eta}.$$

Przy obliczaniu współczynnika wnikania ciepła dla przepływu przez przekroje o innym kształcie niż kołowy, należy szukać w literaturze odpowiednich wzorów. Jako przybliżenie można zastosować zarówno w liczbie  $Re$  jak i  $Nu$ , średnicę zastępczą  $d_e = \frac{4f}{O}$  (patrz cz. I).

W celu zintensyfikowania wnikania ciepła stosuje się czasem różnego rodzaju elementy zaburzające przepływ i zmniejszające tym samym grubość warstwy laminarnej, takimi elementami (turbulizatorami) mogą być rozmaite wkładki, naprzemianległe zgnioty rury itp. Często, szczególnie w zakresie niższych liczb  $Re$ , można uzyskać znaczny, nawet ponaddwukrotny wzrost  $\alpha$  w porównaniu z przepływem przez kanały bez elementów zaburzających. Trzeba jednak pamiętać, że będzie to zawsze wiązało się ze wzrostem oporów przepływu.

Występujące w równaniu (III-16) właściwości można, dla konkretnego czynnika, zebrać w jedną funkcję temperatury i tym samym uzyskać znaczne uproszczenie obliczeń. Literatura podaje szereg takich przekształceń i odpowiednich funkcji dla różnych czynników (patrz „Tablice do obliczeń procesowych”). Szczególną popularność zyskały wzory Schacka. Np. dla gazów, przy przepływie burzliwym przez rury można skorzystać z zależności:

$$\alpha = \varphi \frac{w_o^{0,75}}{d^{0,25}} \cdot \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right], \quad (III-17)$$

gdzie:  $w_o$  jest prędkością gazu w temperaturze  $0^\circ C$  i pod ciśnieniem atmosferycznym, a funkcja  $\varphi$ , np. dla powietrza, ma postać:

$$\varphi = 4,13 + 0,195 \frac{t}{100}. \quad (III-18)$$

Dla cieczy płynących przez rury Schack proponuje:

$$\alpha = \varphi w^{0,85} \cdot \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \quad (III-19)$$

i dla wody:

$$\varphi = 3373(1 + 0,014t). \quad (III-20)$$

Pomocne przy obliczaniu  $\alpha$  mogą być także odpowiednie nomogramy (p. „Tablice do obliczeń procesowych”).

### III. 3. WNIKANIE CIEPŁA PRZY PRZEPIYWIE WYMUSZONYM UWARSTWIONYM

W praktyce raczej rzadko mamy do czynienia z przepływem uwarstwionym. Pojawi się on przy dużych lepkościach czynnika i przy małych średnicach kanału. Mimo to, procesowi temu poświęcono bardzo dużo prac bowiem jest to jeden z nielicznych przypadków wnikania ciepła, który można z powodzeniem analizować i opisać teoretycznie. W przepływie uwarstwionym, gdy poszczególne warstwy cieczy płyną idealnie równolegle, nie ma miejsca na pojawienie się prądów konwekcyjnych. Tak więc problem powinien sprowadzić się do rozwiązania zagadnienia przewodzenia ciepła od rdzenia płynu do ściany lub odwrotnie. Zagadnienie komplikuje się jednak znacznie, gdyż paraboliczny profil prędkości, charakterystyczny dla przepływu uwarstwionego (patrz cz. I), deformuje się z uwagi na zmiany lepkości poszczególnych warstw. Kolejną trudnością jest to, że profile prędkości i temperatury zmieniają się wzdłuż drogi przepływu, a długość odcinka, na którym ustala się profil prędkości, jest inna niż długość potrzebna na ustalenie się profilu temperatury.

Pierwszym, który rozwiązał ten problem na drodze analitycznej, przy szeregu założeń upraszczających, był Graetz. Jego rozważania podaje większość podręczników poświęconych wymianie ciepła. Po wprowadzeniu stosowanych tu oznaczeń, rozwiązanie Graetza da się sprowadzić do postaci:

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 0,5 \left( \frac{4\dot{G}c_p}{\pi\lambda L} \right). \quad (\text{III-21})$$

Wyrażenie w nawiasie jest bezwymiarowe i później nazwano je liczbą Graetza:

$$Gz = \frac{\dot{G}c_p}{\lambda L}, \quad (\text{III-22})$$

co prowadzi do zapisu równania (III-21) w postaci:

$$Nu = 0,5 \left( \frac{4}{\pi} Gz \right). \quad (\text{III-23})$$

Gdyby wziąć pod uwagę ogólne rozważania Graetza i uwzględnić wpływ długości rury  $L$ , funkcja opisująca współczynnik ciepła dla przepływu uwarstwionego miałaby postać:

$$\alpha = f(\dot{G}, c_p, \lambda, d, L), \quad (\text{III-24})$$

którą, wykorzystując analizę wymiarową, można przedstawić jako:

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = C \left( \frac{\dot{G} c_p}{\lambda d} \right)^{a_1} \left( \frac{L}{d} \right)^{a_2}. \quad (\text{III-25})$$

Na podstawie doświadczeń stwierdzono, że  $a_1 = -a_2$ , zatem:

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = Nu = C \left( \frac{\dot{G} c_p}{\lambda L} \right)^{a_1}. \quad (\text{III-26})$$

Otrzymaliśmy zależność bardzo podobną do uzyskanego na drodze teoretycznej równania (III-23). Zmieniając stałą w równaniu (III-26) można napisać:

$$Nu = C \left( \frac{\pi}{4} Gz \right)^{a_1}. \quad (\text{III-27})$$

Liczbę Graetza, charakterystyczną dla ruchu ciepła przy przepływie uwarstwionym, można przekształcić, pamiętając że  $\dot{G} = \frac{\pi d^2}{4} \dot{g}$ , w sposób następujący:

$$\frac{4}{\pi} Gz = \frac{4 \dot{G} c_p}{\pi \lambda L} = \left( \frac{d \dot{g}}{\eta} \right) \left( \frac{c_p \eta}{\lambda} \right) \left( \frac{d}{L} \right) = RePr \left( \frac{d}{L} \right), \quad (\text{III-28})$$

a wtedy równanie (III-26) przyjmie postać:

$$Nu = C Re^A Pr^A \left( \frac{d}{L} \right)^A. \quad (\text{III-29})$$

Badania wykazały, że stała  $C$  i wykładnik  $A$  przyjmują różne wartości w dwóch różnych zakresach liczby  $Gz$ . I tak dla:

$$\left( \frac{4}{\pi} Gz \right) = RePr \left( \frac{d}{L} \right) > 13, \quad (\text{III-30})$$

obowiązuje równanie Siedera-Tate'a:

$$Nu = 1,86 \left( \frac{\eta}{\eta_{sc}} \right)^{0,14} Re^{1/3} Pr^{1/3} \left( \frac{d}{L} \right)^{1/3}, \quad (\text{III-31})$$

w którym w stałej uwzględniono dodatkowo nieizotermiczność przepływu, podobnie jak przy przepływie burzliwym cieczy o dużej lepkości (p. poz. 2 tab. III. 1),

gdzie:  $\eta$  oznacza lepkość w średniej temperaturze płynu, a  $\eta_{sc}$  lepkość w średniej temperaturze ściany.

Natomiast dla:

$$\left(\frac{4}{\pi} Gz\right) = RePr\left(\frac{d}{L}\right) < 4,5, \quad (\text{III-32})$$

wartość  $Nu$  spada, dążąc asymptotycznie do wyrażenia teoretycznego:

$$Nu = 0,5RePr\left(\frac{d}{L}\right). \quad (\text{III-33})$$

W zakresie wartości  $\frac{4}{\pi}Gz = 4,5 \div 13$  należałoby dokonać interpolacji; w nie-licznych praktycznie przypadkach przepływu uwarstwionego będziemy mieli zazwyczaj do czynienia z zakresem powyżej 13.

### III. 4. WNIKANIE CIEPŁA PRZY PRZEPLÝWIE WYMUSZONYM PRZEJŚCIOWYM

Znacznie częstszy od poprzedniego jest przypadek pojawiania się przepływu przejściowego. Przyjmuje się, że strefa ruchu przejściowego dla cieczy o znacznej lepkości rozciąga się w zakresie liczb  $Re$  od 2100 do 10 000. Również i dla tego przypadku literatura podaje odpowiednie równania.

Do obliczenia współczynnika wnikania ciepła w tym zakresie można podejść inaczej, analizując odpowiednie równania dla wnikania ciepła przy przepływie burzliwym i uwarstwionym.

Przy przepływie burzliwym (poz. 2 tab. III. 1), dla  $Re > 10\ 000$  mamy:

$$Nu = 0,027\left(\frac{\eta}{\eta_{sc}}\right)^{0,14} Re^{0,8} Pr^{0,33},$$

a dla przepływu uwarstwionego, dla  $Re < 2100$  (rów. III-31):

$$Nu = 1,86\left(\frac{\eta}{\eta_{sc}}\right)^{0,14} Re^{1/3} Pr^{1/3}\left(\frac{d}{L}\right)^{1/3}.$$

Przyjmując, że w obu przypadkach płynie ta sama ciecz, o tej samej lepkości:

$$Pr = idem; \quad \frac{\eta}{\eta_{sc}} = idem.$$

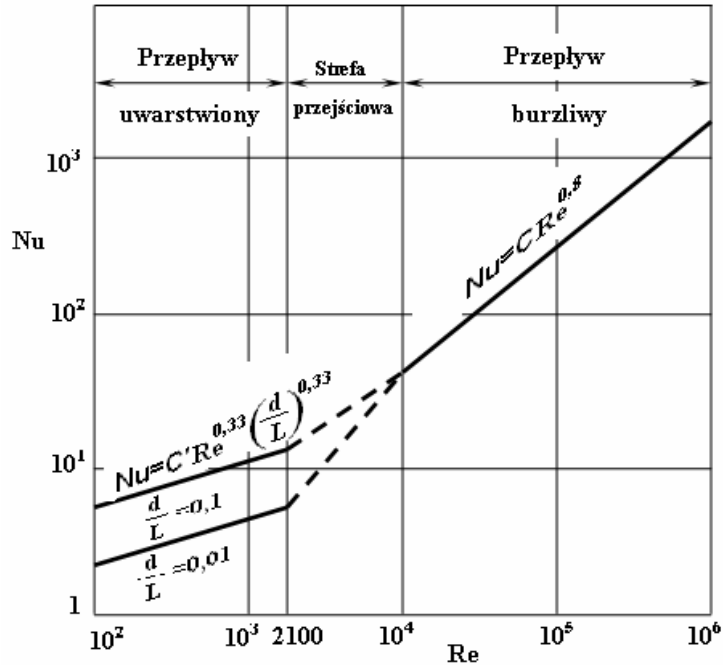
Tak więc, dla przepływu burzliwego:

$$Nu = C \cdot Re^{0,8}, \quad (\text{III-34})$$

a dla uwarstwionego:

$$Nu = C' \cdot Re^{0,33}\left(\frac{d}{L}\right)^{0,33}. \quad (\text{III-35})$$

Przebieg linii opisanych tymi równaniami, w układzie podwójnie logarymicznym, pokazano na rys. III. 3.



Rys. III. 3. Zależność  $Nu = f(Re)$  przy przepływie przejściowym

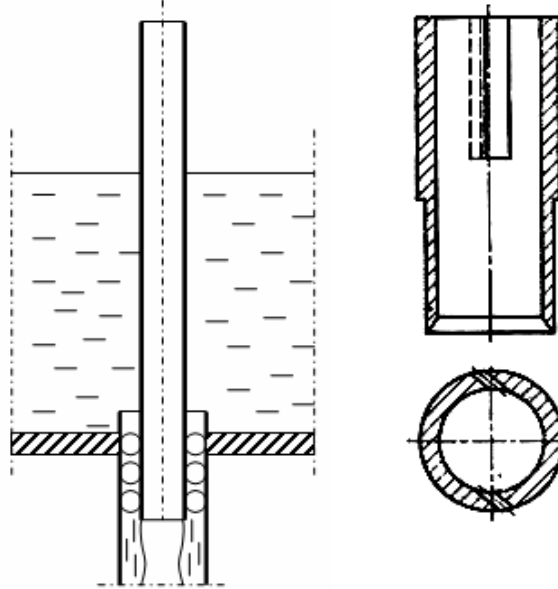
Dokonując interpolacji (w układzie podwójnie logarymicznym) między wartościami liczb  $Nu$  obliczonymi dla  $Re = 2100$  i  $Re = 10\ 000$ , znajdziemy interesującą nas wartość  $\alpha$ .

Podany sposób postępowania można zastosować w wielu innych przypadkach, gdy zakresy obowiązywania równań nie pokrywają się.

### III. 5. WNIKANIE CIEPŁA PRZY SPŁYWIE GRAWITACYJNYM BURZLIWYM

Ten przypadek należy już do grupy przepływów niewymuszonych. W różnych procesach często stosuje się zraszanie powierzchni, czasem są to powierzchnie płaskie, czasem powierzchnie zewnętrzne bądź wewnętrzne rur pionowych, czasem powierzchnie zewnętrzne rur poziomych.

Tytułem przykładu rozpatrzmy przypadek zraszania powierzchni wewnętrznej rury pionowej. Do rozprowadzenia cieczy stosuje się zraszacze różnej konstrukcji (rys. III. 4).



Rys. III. 4. Przykład zraszaczy dla rur pionowych

Miarą intensywności zraszania jest gęstość zraszania  $\Gamma$

$$\Gamma = \frac{\dot{G}_c}{O}, \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right], \quad (\text{III-36})$$

oznaczająca strumień cieczy wylewanej na tzw. obwód zraszany. Do wyznaczenia liczby  $Re = \frac{\dot{g}d_e}{\eta}$ , wykorzystamy średnicę zastępczą  $d_e = \frac{4f}{O}$  (p. część I), zatem:

$$Re = \frac{4\dot{g}f}{\eta O}. \quad (\text{III-37})$$

Ponieważ  $\dot{G}_c = \dot{g}f$ , to:

$$Re = \frac{4\dot{G}_c}{\eta O} = \frac{4\Gamma}{\eta} = Re_z. \quad (\text{III-38})$$

Tak zdefiniowaną liczbę  $Re$  oznaczmy  $Re_z$  i nazwiemy liczbą Reynoldsa przy zraszaniu.



Doświadczenia wykazały, że wartość krytyczna  $Re_z$ , tzn. odpowiadająca przejściu ze sływu uwarstwowionego w burzliwy wynosi, tak jak i dla przepływów wymuszonych,  $Re_{zkr} \approx 2100$ . Warto dodać, że zafalowanie spływającego filmu cieczy pojawia się już od  $Re_z \approx 300$ .

Obliczenia i pomiary grubości warstwy cieczy spływającej laminarnie po ścianie pionowej wykazały, że:

$$s \approx \mathcal{G}_z Re_z^{1/3}, \quad (\text{III-39})$$

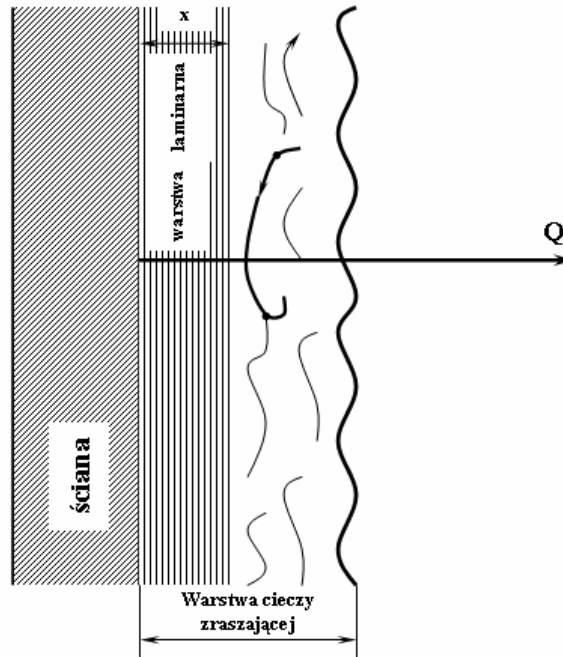
gdzie:

$$\mathcal{G}_z = \left( \frac{\eta^2}{\rho^2 g} \right)^{1/3}, \text{ m}. \quad (\text{III-40})$$

Z wielkością  $\mathcal{G}_z$  spotkaliśmy się już przy omawianiu opadania swobodnego cząstek (cz. I – sedymentacja). Jeśli przyjmiemy, że zraszanie jest bardzo małe i  $Re_z \rightarrow 1$ , to w takim przypadku grubość warstwy  $s \rightarrow \mathcal{G}_z$  (rów. III. 39). Zatem wielkość  $\mathcal{G}_z$  odpowiada w przybliżeniu grubości warstewki cieczy spływającej po ścianie przy  $Re_z = 1$ .  $\mathcal{G}_z$  będziemy nazywać wymiarem zastępczym i pojawi się on również w innych przypadkach przepływów niewymuszonych.

Wartość  $\mathcal{G}_z$  można obliczyć mając  $\rho$  i  $\eta$  lub znaleźć w odpowiednich tablicach (patrz „Tablice do obliczeń procesowych”) i jest ona bardzo mała, np. dla wody w temperaturze 20°C wynosi  $46,76 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ .

Mechanizm wnikania ciepła przy spływie grawitacyjnym burzliwym pokazano na rys. III. 5.



Rys. III. 5. Wnikanie ciepła przy splywie grawitacyjnym burzliwym

Również i w tym przypadku, bezpośrednio przy ścianie pojawi się warstewka laminarna o grubości  $x$ , przez którą ciepło będzie przewodzone. Można oczekiwać, że współczynnik wnikania ciepła przy splywie grawitacyjnym burzliwym zależy od następujących parametrów:

$$\alpha = f(\Gamma, c_p, \lambda, \eta, \rho, \tilde{g}). \quad (\text{III-41})$$

Poddając tę funkcję analizie wymiarowej otrzymamy:

$$\frac{\alpha \left( \frac{\eta^2}{\rho^2 \tilde{g}} \right)^{1/3}}{\lambda} = C' \left( \frac{\Gamma}{\eta} \right)^{a_1} \left( \frac{c_p \eta}{\lambda} \right)^{a_2}. \quad (\text{II-42})$$

W bezwymiarowym wyrażeniu po lewej stronie równania (III. 42) pojawił się wymiar zastępczy  $\mathcal{G}_z$ , pełniący w tym przypadku podobną rolę jaką pełniła średnica rury przy przepływach wymuszonych, też jest to wielkość o wymiarze liniowym, prostopadła do kierunku przepływu. Zatem wyrażenie  $\frac{\alpha \mathcal{G}_z}{\lambda}$  będziemy mogli traktować jako zastępczą (ekwiwalentną) liczbę Nusselta:

$$Nu_e = \frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda}. \quad (\text{III-43})$$

Dopisując 4 w pierwszym nawiasie po prawej stronie równania (III-42) i zmieniając stałą otrzymamy:

$$Nu_e = C Re_z^A Pr^B. \quad (\text{III-44})$$

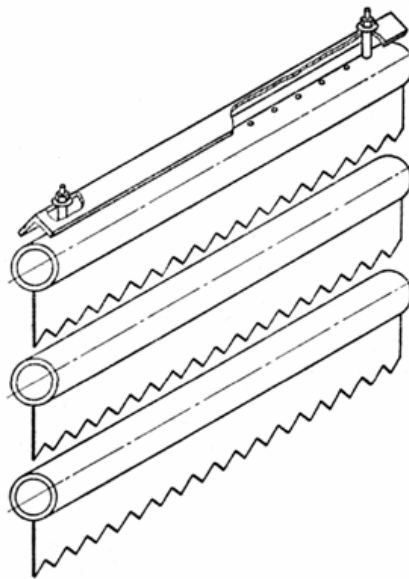
A zatem uzyskaliśmy równanie bardzo podobne do równań opisujących wnikanie ciepła przy przepływach wymuszonych. Do obliczeń można przyjąć postać:

$$Nu_e = 0,01 Re_z^{1/3} Pr^{1/3}, \quad (\text{III-45})$$

słuszną dla sływu po ścianie płaskiej lub po rurze pionowej dla  $Re_z > 2000$ .

### III. 6. WNIKANIE CIEPŁA PRZY SPŁYWIE GRAWITACYJNYM UWARSTWIONYM

Przypadek ten ma miejsce w chłodnicach ociekowych zbudowanych z układu poziomych rur, zraszanych z zewnątrz wodą, przez które przepływa czynnik chłodzony (rys. III. 6).



Rys. III. 6. Chłodnica ociekowa

Analizując zraszanie rur poziomych należy zwrócić uwagę na pojęcie  $\Gamma_{min}$  – minimalną gęstość zraszania, zapewniającą całkowite pokrycie powierzchni rur cieczą (zniknięcie ostatniej suchej plamy przy zwiększeniu  $\Gamma$  lub pojawienie się pierwszej suchej plamy przy zmniejszaniu  $\Gamma$ ) oraz  $\Gamma_{max}$ , gdy zraszanie jest tak duże, że już nie cała ciecz jest w stanie spływać z rury na rurę, a odpryski przekraczają umownie przyjętą granicę np. 15%. Minimalną gęstość zraszania wodą rur poziomych można obliczyć z zależności:

$$\Gamma_{min} = 0,00833d^{0,37} - 0,000139t + 0,00139, \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right], \quad (\text{III-46})$$

w której:  $d$  - mm,  $t$  - °C.

Stosunek  $\Gamma_{max}/\Gamma_{min}$  dla rur gładkich wynosi:

$$\frac{\Gamma_{max}}{\Gamma_{min}} = 1,3 \div 1,85, \quad (\text{III-47})$$

a dla rur zaopatrzonych w zraszacz:

$$\frac{\Gamma_{max}}{\Gamma_{min}} = 3,5 \div 5,5. \quad (\text{III-48})$$

Jak widać, różnica między  $\Gamma_{max}$  i  $\Gamma_{min}$  jest mała, a obliczenia wskazują, że w warunkach przemysłowych liczba  $Re_z$  dla chłodnic ociekowych wypadnie zazwyczaj znacznie poniżej 1000, a więc pojawi się spływ uwarstwiony<sup>\*)</sup>.

Warto pamiętać, że pojęcie  $\Gamma_{min}$  pojawi się również przy zraszaniu rur pionowych i przy rozpatrywaniu działania wszystkich aparatów warstewkowych (cienkowarstewkowych, filmowych).

Dla rur poziomych zraszanych wodą współczynnik wnikania ciepła można obliczyć z równania:

$$\alpha = 3330 \left( \frac{\Gamma}{d} \right)^{1/3}, \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right], \quad (\text{III-49})$$

w którym:

$$\Gamma - \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right], \quad d - [\text{m}].$$

Dla przypadku spływu cieczy po ścianie rury pionowej z tak małą gęstością zraszania, że pojawi się spływ uwarstwiony ( $Re_z < 2100$ ), w literaturze bywa podawane następujące równanie:

<sup>\*)</sup> Dla rury poziomej za obwód zraszany „O” należy przyjąć długość rury, a za  $\dot{G}_c$  połowę strumienia, gdyż spływ odbywa się po obu stronach rury.

$$\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\frac{\lambda^3 \rho^2 \tilde{g}}{\eta^2}}} = 0,67 \left( \frac{c_p \eta^{5/3}}{\lambda \cdot h \cdot \rho^{2/3} \cdot \tilde{g}^{1/3}} \right)^{1/3} \cdot \left( \frac{4\Gamma}{\eta} \right)^{1/9} \quad (\text{III-50})$$

Po podstawieniu  $\mathcal{G}_z = \left( \frac{\eta^2}{\rho^2 \tilde{g}} \right)^{1/3}$  zależność (III-50) można przekształcić do postaci:

$$Nu_e = \frac{\alpha \mathcal{G}_z}{\lambda} = 0,67 Re_z^{1/9} Pr^{1/3} \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{1/3} \quad (\text{III-51})$$

Równanie (III-51) w swej budowie różni się od równania (III-44) dla spływu burzliwego tylko obecnością członu  $\frac{\mathcal{G}_z}{h}$ , a więc stosunku wymiarów liniowych – poprzecznego do podłużnego, w odniesieniu do kierunku spływu cieczy.

Podobnie było i w przypadku przepływów wymuszonych, gdy to równanie dla przepływu uwarstwionego (III-29) różniło się od równania (III-15) dla przepływu burzliwego obecnością członu  $\left( \frac{d}{L} \right)$ .

Dostrzeżenie znaczenia wielkości  $\mathcal{G}_z = \left( \frac{\eta^2}{\rho^2 \tilde{g}} \right)^{1/3}$  i nadanie jej sensu fizycznego jako liniowego wymiaru, umożliwiło usystematyzowanie przypadków wnikania ciepła i znaczne uproszczenie zapisu poszczególnych równań, co jest wielką zasługą prof. Hoblera<sup>\*)</sup>.

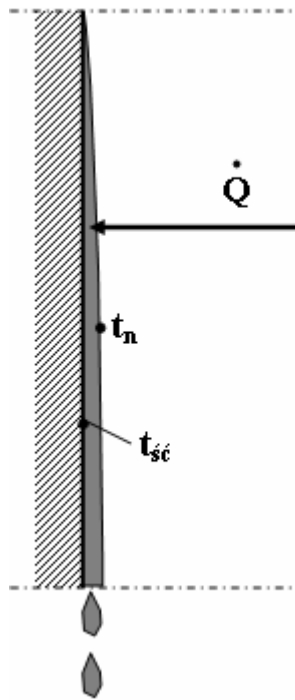
### III. 7. WNIKANIE CIEPŁA PRZY SPŁYWIE GRAWITACYJNYM SKROPLIN (KONDENSACJA)

Przypadek ten jest w pewnym sensie podobny do dwóch poprzednio omówionych z tą różnicą, że cieczą zraszającą ścianę są teraz skropliny (kondensat) powstałe ze skroplenia się pary kontaktującej się z tą ścianą. Kondensacja zachodzi wtedy, gdy temperatura ściany jest niższa od temperatury nasycenia pary przy danym ciśnieniu.

---

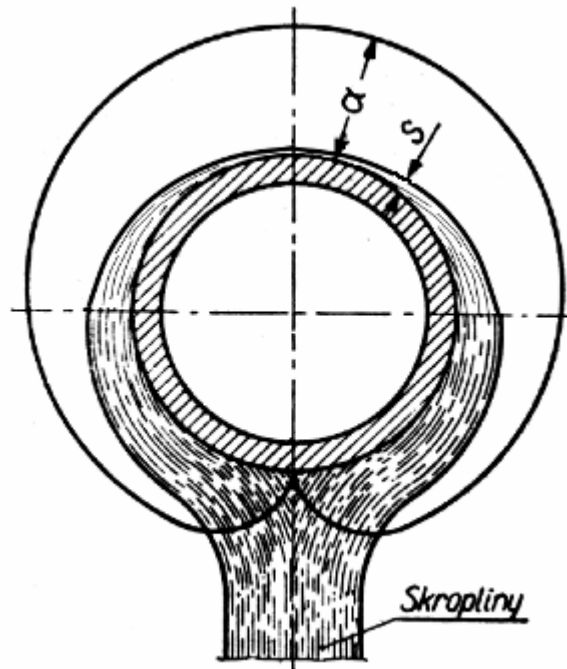
<sup>\*)</sup> Prof. dr h.c. Tadeusz Hobler (1899-1975), profesor Politechniki Śląskiej, jeden z twórców polskiej szkoły inżynierii chemicznej i procesowej, autor fundamentalnych dzieł „Ruch ciepła i wymienniki” oraz „Dyfuzyjny ruch masy i absorbery”.

Ruch pary w kierunku zimnej powierzchni następuje głównie w wyniku gwałtownego zmniejszenia się objętości podczas skraplania. Pojawia się wtedy swoisty efekt „ssania”. Pomijając pierwszy moment kontaktu pary ze ścianą, skraplanie następuje już nie na samej ścianie, a na spływającej warstwie kondensatu (filmie cieczy) rys. III. 7, stąd mowa o kondensacji warstewkowej (filmowej).



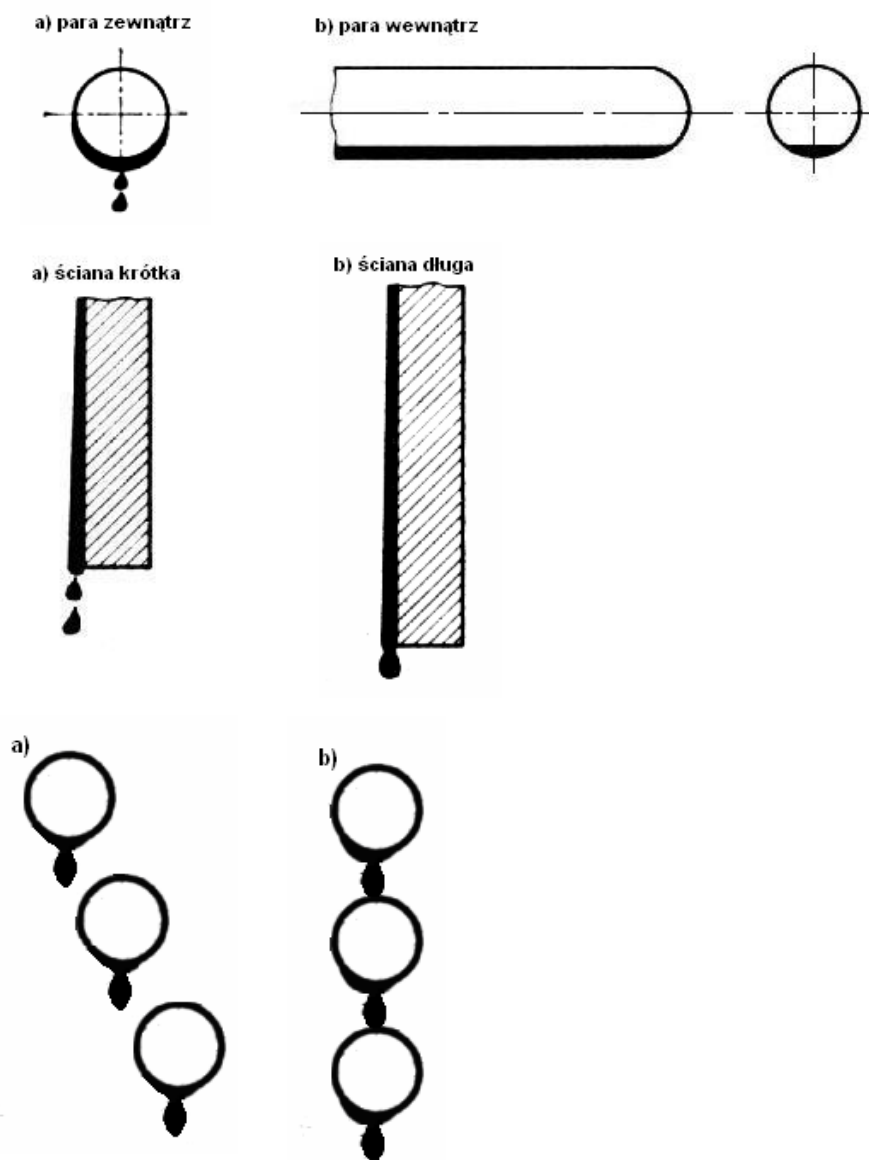
Rys. III. 7. Schemat kondensacji

Przy zmianie stanu skupienia wyzwala się duża ilość ciepła (ciepło kondensacji), które musi być przetransportowane do zimnej ściany, tymczasem warstwa kondensatu stawia znaczny opór cieplny. Jak widać z rys. III. 7 grubość warstwy skroplin jest zmienna i narasta wraz z długością drogi spływu. Z podobną sytuacją mamy do czynienia podczas skraplania pary na powierzchni zewnętrznej rury (rys. III. 8).



Rys. III. 8. Skraplanie pary na powierzchni rury

Na rysunku tym, oprócz narastającej warstwy cieczy, zaznaczono jak zmienia się lokalna wartość współczynnika wnikania ciepła. Widać, że u góry, tam gdzie warstwa kondensatu jest najmniejsza, intensywność transportu ciepła jest największa i spada praktycznie do 0 w dolnej części rury. Właśnie ze względu na opór cieplny warstwy cieczy, chętniej stosuje się kondensację na krótkich rurach pionowych niż na długich, na powierzchni zewnętrznej rur poziomych niż wewnątrz. Dbać należy także o to, by nie dochodziło do nadmiernego zalewania kondensatem rur położonych niżej (rys. III. 9).

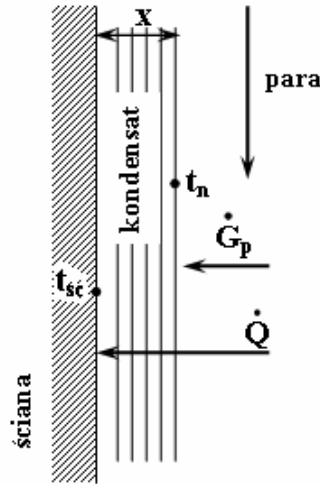


Rys. III. 9. Porównanie różnych przypadków skraplania:  
a) rozwiązanie lepsze, b) gorsze



Spływ kroplin może mieć charakter uwarstwiony bądź burzliwy, najczęściej, w prawidłowo zbudowanych kondensatorach, będzie to spływ uwarstwiony, a grubość filmu mała.

Problem intensywności wnikania ciepła podczas kondensacji przy uwarstwowionym spływie kroplin (rys. III. 10) można rozwiązać na drodze teoretycznej i pierwszy dokonał tego Nusselt.



Rys. III. 10. Schemat wnikania ciepła przy skraplaniu

Wynik jego rozważań można zapisać w postaci równania:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = 0,943 \left( \frac{h^3 \rho_c^2 \bar{g} r}{\lambda_c \eta_c \Delta t} \right)^{1/4}, \quad (\text{III-52})$$

w którym  $h$  jest wysokością ściany,  $\Delta t$  oznacza różnicę między temperaturą nasycenia a temperaturą ściany ( $\Delta t = t_n - t_{sc}$ ), a właściwości dotyczą kroplin (cieczy). Po wprowadzeniu liczby kondensacji Nusselta  $C_v$ :

$$C_v = \frac{h^3 \rho_c^2 \bar{g} r}{\lambda_c \eta_c \Delta t}, \quad (\text{III-53})$$

równanie (III-52) przyjmuje postać:

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = 0,943 C_v^{1/4}. \quad (\text{III-54})$$

Analizując mechanizm wnikania ciepła przy kondensacji można założyć, że współczynnik  $\alpha$  będzie funkcją następujących parametrów:

$$\alpha = f(\Delta t, r, \lambda_c, \eta_c, \rho_c, h, \bar{g}). \quad (\text{III-55})$$

Wykorzystując analizę wymiarową otrzymamy:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = C \left( \frac{r \eta_c}{\Delta t \lambda_c} \right)^{a_1} \left( \frac{\rho_c^2 h^3 \tilde{g}}{\eta_c^2} \right)^{a_2}. \quad (\text{III-56})$$

Wszystkie eksperymenty wskazują, że  $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$ .

Wtedy:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = C \left( \frac{h^3 \rho_c^2 \tilde{g} r}{\lambda_c \eta_c \Delta t} \right)^{1/4}. \quad (\text{III-57})$$

Otrzymaliśmy zatem postać identyczną, jaką uzyskał Nusselt (rów. III-52).

Liczbę  $C_v$  można przekształcić wykorzystując wymiar poprzeczny

$\mathcal{G}_z = \left( \frac{\eta_c^2}{\rho_c^2 \tilde{g}} \right)^{1/3}$  oraz mnożąc licznik i mianownik przez ciepło właściwe cieczy  $c_c$ :

$$C_v = \frac{h^3 \rho_c^2 \tilde{g} r}{\lambda_c \eta_c \Delta t} = \frac{\eta_c h^3 r}{\mathcal{G}_z^3 \lambda_c \Delta t} = \left( \frac{c_c \eta_c}{\lambda_c} \right) \left( \frac{r}{c_c \Delta t} \right) \left( \frac{h}{\mathcal{G}_z} \right)^3. \quad (\text{III-58})$$

Oznaczając:

$$\frac{r}{c_c \Delta t} = K, \quad (\text{III-59})$$

$$C_v = Pr_c K \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{-3}. \quad (\text{III-60})$$

Tak więc równanie (III-57) przyjmuje postać:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = CK^{1/4} Pr_c^{1/4} \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{-3/4}, \quad (\text{III-61})$$

a po pomnożeniu obu stron równania (III-61) przez  $\left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)$ :

$$Nu_e = \frac{\alpha \mathcal{G}_z}{\lambda} = CK^{1/4} Pr_c^{1/4} \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{1/4}. \quad (\text{III-62})$$

Dzięki tym przekształceniom uzyskaliśmy prawidłową postać liczby  $Nu_e$ , z liniowym wymiarem poprzecznym (a nie podłużnym –  $h$ ) oraz pozbyliśmy się skomplikowanej liczby kondensacji  $C_v$ . Pojawiła się za to nowa, prosta liczba  $K$ .

Kilka wartości stałej  $C$  dla różnych przypadków podano w tab. III. 2.

**Tablica III. 2**

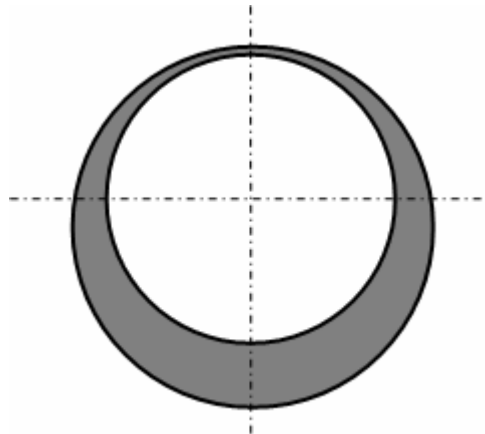
Wartości stałej  $C$  w równaniu (III-62)

Lp.	Przypadek	$C$	Uwagi
1	ściana pionowa, rura pionowa	1,13	$h = \text{długość rury}$
2	rura pozioma, para zewnątrz	0,725	$h = d$
3	$N$ rur poziomych, jedna pod drugą	$0,725 N^{-1/4}$	$h = d$

Analizując postać równania (III-62) warto zwrócić uwagę na wpływ  $K = \frac{r}{c_c \Delta t}$ .

Otóż przy wzroście  $\Delta t$  intensywność wnikania ciepła będzie maleć. Należy tłumaczyć to tym, że na zimniejszej ścianie będzie tworzyć się grubsza warstwa kondensatu, co pogorszy warunki odbioru ciepła. Oczywiście strumień ciepła wnikającego będzie przy większej różnicy temperatury większy, zgodnie z równaniem  $\dot{Q} = \alpha F \Delta t$ , ale ponieważ  $\alpha \sim \Delta t^{-1/4}$  wpływ  $\Delta t$  na strumień ciepła obniży się do potęgi  $3/4$ .

Przy kondensacji wewnątrz rur poziomych dolna część rury jest zalana kroplinami i praktycznie nie bierze udziału w procesie (rys. III. 11), a współczynnik wnikania ciepła jest wyraźnie niższy niż przy kondensacji na zewnątrz.

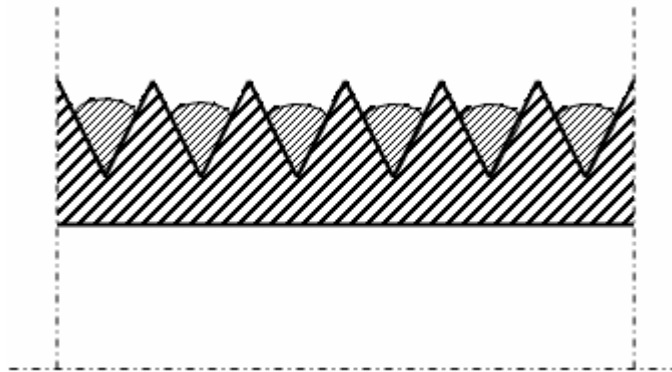


**Rys. III. 11.** Kondensacja wewnątrz rury poziomej

Przypadek taki należałoby traktować z uwzględnieniem zjawisk towarzyszących przepływowi dwufazowemu gaz-ciecz i istnieją takie opracowania. Można także skorzystać z zależności podawanych w literaturze, wskazujących na wyraźne obniżanie  $\alpha_{weW}$  nawet do 60% wartości  $\alpha_{zew}$ . W każdym razie przy projektowaniu należy zadbać o to, aby ułatwić spływ kondensatu np. przez minimalne pochylenie rur.

Problemem jest również obecność w parze niekondensujących się gazów internych. Szczególnie w przypadku skraplaczy pracujących przy obniżonym ciśnieniu, jak ma to miejsce w energetyce, groźne jest pojawienie się w parze powietrza zasysanego przez wszystkie nieszczelności układu. Gaz interny dociera razem z parą w pobliże zimnej powierzchni i tam zbiera się, utrudniając parze dostęp do powierzchni. Ten dodatkowy opór w fazie gazowej może znacznie obniżyć wartość współczynnika wnikania ciepła. Np. już przy 4% masowo zawartości powietrza w parze wodnej,  $\alpha$  może spaść do około 20% wartości jak dla czystej pary.

Wartości współczynnika wnikania ciepła przy skraplaniu są na ogół bardzo wysokie, ale przy kondensacji niektórych cieczy organicznych bądź czynników chłodniczych, opór wnikania po stronie skraplania może być znaczny. Metody intensyfikacji polegają na ogół na zabiegach mających na celu pocienienie filmu kondensatu bądź wręcz na odsłonięciu powierzchni chłodzącej. Można to niekiedy uzyskać stosując rury o niskich żebrach rys. III. 12.



**Rys. III. 12.** Kondensacje na rurze o niskich żebrach

Stosuje się również odpowiednio ukształtowane płetwy drenujące, ułatwiające spływ kondensatu.

Szczególnie wysokich wartości współczynnika wnikania ciepła (dla pary wodnej nawet do 100000 W/(m<sup>2</sup>·K)) można oczekiwać przy tzw. kondensacji kropelkowej (perlistej). Występuje ona w przypadku powierzchni słabo zwilżanych przez ciecz, co można uzyskać przez pokrycie powierzchni odpowiednimi substancjami bądź powłokami.

Parametry charakteryzujące właściwości, występujące w równaniu (III-62) można, dla danego czynnika, zebrać w jedną funkcję temperatury i w ten sposób uzyskać znaczne uproszczenie obliczeń. Np. dla skraplania pary wodnej proponowana bywa zależność:

$$\alpha = C\varphi r^{1/4} (h\Delta t)^{-1/4}, \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]. \quad (\text{III-63})$$

Stałą  $C$  należy przyjąć wg tab. III. 2, a wartości  $\varphi$  oraz  $r^{1/4}$  podano w tab. III. 3.

**Tablica III. 3**

Wartości  $\varphi$  oraz  $r^{1/4}$  dla kondensacji pary wodnej

t, °C	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\varphi$	174,9	214,0	247,2	276,1	299,3	318,1	332,5	342,7	347,0	349,9	351,3
$r^{1/4}$	39,66	39,50	39,42	39,25	39,01	38,77	38,61	38,29	38,05	37,65	37,32

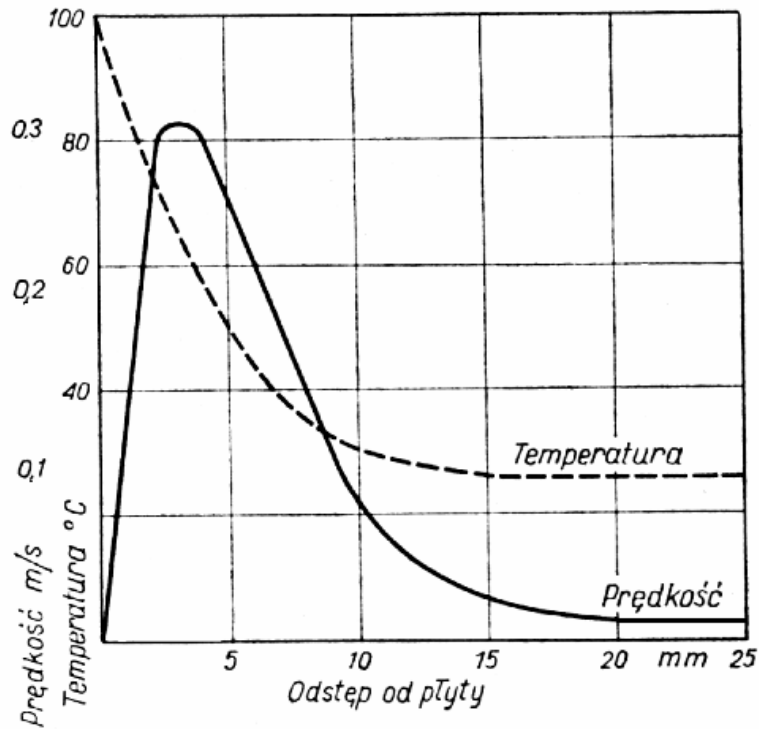
Więcej danych, dla innych czynników, można znaleźć w „Tablicach do obliczeń procesowych”.

### III. 8. WNIKANIE CIEPŁA PRZY PRZEPIYWIE SWOBODNYM (KONWEKCJA NATURALNA)

Jest to bardzo częsty przypadek, pojawiający się zawsze wtedy, gdy płyn kontaktuje się z powierzchnią o wyższej (lub niższej) temperaturze.

Rozpatrzmy wnikanie ciepła podczas kontaktu powietrza z gorącą ścianą pionową. Na skutek nagrzewania się gazu zmieniać się będzie jego gęstość i lżejsze powietrze zacznie płynąć wzdłuż płyty ku górze. U dołu płyty przepływ będzie uwarstwiony, następnie przejściowy i wreszcie pojawi się ruch burzliwy. Burzliwość narasta więc wzdłuż drogi przepływu, podobnie jak obserwuje się to w przypadku unoszącej się strugi dymu papierosowego, kiedy to najpierw laminarna strużka dymu ulega zafalowaniu, a następnie wyraźnym zaburzeniom.

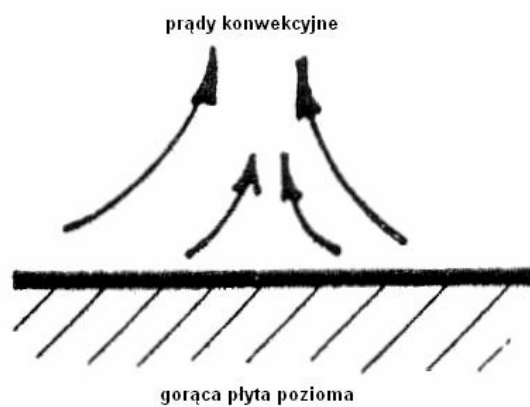
Mierząc temperaturę i prędkość powietrza w bezpośrednim sąsiedztwie rozpatrywanej ściany pionowej o temperaturze 100°C, uzyskamy wyniki jak na rysunku III. 13.



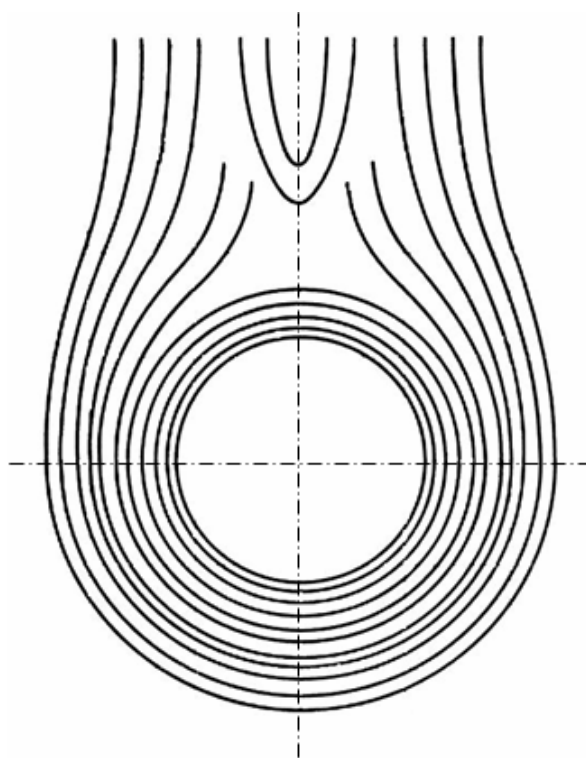
Rys. III. 13. Zmiana temperatury i prędkości powietrza w pobliżu gorącej ściany pionowej

Z rysunku widać, że maksymalna prędkość ok. 0,3 m/s wystąpi w odległości ok. 3 mm od ściany, a w odległości kilkunastu mm wpływ gorącej ściany zanika i prędkość dąży asymptotycznie do 0, a temperatura – do temperatury otoczenia.

W przypadku kontaktu gazu ze ścianą o niższej niż gaz temperaturze pojawi się przepływ opadający wzdłuż ściany. Również w otoczeniu gorącej płyty poziomej (rys. III. 14) bądź rury poziomej (rys. III. 15) występują prądy konwekcyjne.



Rys. III. 14. Prądy konwekcyjne nad gorącą płytą poziomą



Rys. III. 15. Izotermy wokół gorącej rury poziomej

Dla uwarstwionego ruchu płynu można na drodze analitycznej określić intensywność wnikania ciepła. Dla płyty pionowej pierwszy zagadnienie to rozwiązał Lorenz i jego rozumowanie przytaczane jest w większości podręczników.

Chcąc na drodze doświadczalnej określić współczynnik wnikania ciepła przy konwekcji swobodnej należy przede wszystkim ustalić parametry wpływające na wielkość  $\alpha$ . Przyjmując, że oprócz właściwości czynnika, takich jak  $\lambda, \eta, c_p, \rho$  powinny wpływać również: wysokość ściany  $h$ , różnica temperatury między ścianą i czynnikiem  $\Delta t$  oraz współczynnik rozszerzalności objętościowej płynu  $\beta$ , napiszemy:

$$\alpha = f(\lambda, \eta, c_p, \Delta t, h, \rho, \beta, \tilde{g}). \quad (\text{III-64})$$

Poddając tę funkcję analizie wymiarowej, otrzymamy:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = C \left( \frac{c_p \eta}{\lambda} \right)^{a_1} (\Delta t \beta)^{a_2} \left( \frac{h^3 \rho^2 \tilde{g}}{\eta^2} \right)^{a_3}. \quad (\text{III-65})$$

Doświadczenia wielu badaczy wykazały, że wykładniki w równaniu (III. 65) są sobie równe

$$a_1 = a_2 = a_3 = A.$$

Tak więc, wyodrębniając liczbę  $Pr$ , która pojawiła się w pierwszym nawiasie, można połączyć dwa pozostałe wyrażenia i napisać:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = C \left( \frac{c_p \eta}{\lambda} \right)^A \left( \frac{\tilde{g} \beta \Delta t h^3 \rho^2}{\eta^2} \right)^A. \quad (\text{III-66})$$

Drugi z nawiasów nazwano liczbą Grashofa:

$$Gr = \frac{\tilde{g} \beta \Delta t h^3 \rho^2}{\eta^2}, \quad (\text{III.67})$$

zatem:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = Nu = C Pr^A Gr^{A*}). \quad (\text{III.68})$$

Warto dodać, że postać równania (III-66) jest bardzo zbliżona do rozwiązania teoretycznego Lorenza.

---

\*) Iloczyn  $Pr \cdot Gr = Ra$  bywa nazywany liczbą Rayleigha, co prowadzi do zapisu  $Nu = CRa^A$



Przytoczenie liczby Grashofa było konieczne, gdyż posługuje się nią cała literatura, wygodniej jest jednak przekształcić ją, wykorzystując wymiar

poprzeczny  $g_z = \left( \frac{\eta^2}{\rho^2 \bar{g}} \right)^{1/3}$ . Wtedy otrzymamy:

$$Gr = \frac{(\beta \Delta t) h^3}{g_z^3}, \quad (\text{III-69})$$

lub wprowadzając nową liczbę bezwymiarową  $V = \beta \Delta t$ , która już pojawiła się w równaniu (III-65), napisać:

$$Gr = V \left( \frac{g_z}{h} \right)^{-3} \quad (\text{III-70})$$

i równanie (III-68) przejdzie w:

$$\frac{\alpha h}{\lambda} = Nu = CV^A Pr^A \left( \frac{g_z}{h} \right)^{-3A}. \quad (\text{III-71})$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, mnożąc obie strony równania (III-71) przez  $\left( \frac{g_z}{h} \right)$  otrzymamy:

$$\frac{\alpha g_z}{\lambda} = Nu_e = CV^A Pr^A \left( \frac{g_z}{h} \right)^{1-3A}. \quad (\text{II-72})$$

W ten sposób otrzymaliśmy prawidłowo zbudowaną liczbą Nusselta z wymiarem poprzecznym i prostą postać równania. Zamiast skomplikowanej liczby  $Gr$  pojawiła się nowa liczba  $V$ , charakterystyczna dla konwekcji naturalnej, zawierająca w sobie parametry odpowiedzialne za ruch czynnika – współczynnik rozszerzalności objętościowej  $\beta$  i różnicę temperatury  $\Delta t$ .

Dla gazów doskonałych  $\beta = \frac{1}{T}$ . W obliczeniach można przyjmować jako

$T$  średnią arytmetyczną temperatur ściany i otoczenia.

Wartość wykładnika  $A$  w równaniu (III-72) zależy od wyrażenia  $VPr \left( \frac{g_z}{h} \right)^{-3} = GrPr = Ra$ , które decyduje o charakterze ruchu. Dla małych

wartości  $Ra$  występuje ruch uwarstwiony, dla wysokich – burzliwy. Niestety wśród badaczy brak pełnej zgodności co do granic występowania poszczególnych rodzajów przepływu. Jedną z propozycji podano w tab. III. 4.

**Tablica III. 4**

Wartości wykładnika  $A$  w równaniu (III-72)

$VPr\left(\frac{g_z}{h}\right)^{-3} = GrPr = Ra$	$A$
$< 10^3$	$\frac{1}{8}$
$10^3 \div 10^9$	$\frac{1}{4}$
$>10^9$	$\frac{1}{3}$

Wstawiając te wykładniki do równania (III-72) łatwo zauważyć, że w ruchu uwarstwionym i przejściowym ujawni się wpływ członu  $\left(\frac{g_z}{h}\right)$  - odpowiednio w potęgze  $5/8$  i  $1/4$ , a w ruchu burzliwym, dla  $A = 1/3$ , zniknie i będzie obowiązywać równanie:

$$Nu_e = CV^{1/3} Pr^{1/3}, \quad (III-73)$$

podobnie jak przy przepływach wymuszonych i spływach grawitacyjnych, gdy w ruchu burzliwym zniknął wpływ stosunku wymiarów liniowych, poprzecznego do podłużnego.

Stała w równaniu (III-72) zależy nie tylko od rodzaju powierzchni ale i od rodzaju ruchu. Kilka wartości stałej  $C$  podano w tabeli III. 5.

**Tablica III. 5**

Wartości stałej  $C$  w równaniu (III-72)

Rodzaj powierzchni	$VPr\left(\frac{g_z}{h}\right)^{-3} = GrPr = Ra$	
	$10^3 \div 10^9$	$>10^9$
ściana pionowa, cylinder pionowy	0,59	0,13
rura pozioma	0,53	0,11
plyta pozioma oddająca ciepło ku górze	0,54	0,14
plyta pozioma oddająca ciepło w dół	0,35	0,08

Dla rur poziomych jako  $h$  przyjmuje się średnicę rury, a dla płyt poziomych jako  $h$  należy przyjąć krótszy bok. Jeśli bok ten jest dłuższy niż  $0,6$  m, należy przyjąć  $h = 0,6$  m.

Równanie (III-72) obowiązuje zarówno dla gazów, jak i dla cieczy.

Grupując właściwości czynnika w jedną funkcję temperatury dla różnych przypadków i różnych zakresów ruchu można równanie (III-72) przekształcić do znacznie prostszej postaci. W literaturze, również w „Tablicach do obliczeń procesowych”, podano szereg takich praktycznych równań wraz z odpowiednimi funkcjami temperatury dla powietrza i wody.

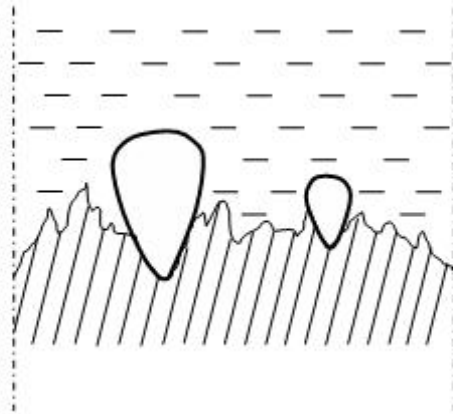
### III. 9. WNIKANIE CIEPŁA PRZY PRZEPIYWIE SWOBODNYM WRZENIA

W literaturze, nie tylko polskojęzycznej, termin wrzenie bywa używany w wymiennie z terminem odparowanie, a aparaty, w których zachodzi wrzenie nazywane są zarówno kotłami, jak i wyparkami. Mimo to należy wyraźnie rozróżnić proces parowania, zachodzący w każdej temperaturze od procesu wrzenia, którym jest parowanie w temperaturze nasycenia przy danym ciśnieniu. Z procesem parowania mamy do czynienia np. podczas suszenia, a z procesem wrzenia w kotle parowym. Procesy wrzenia prowadzi się w różnych celach albo do produkcji pary (energetyka), albo w celu wykorzystania ciepła przemiany fazowej (chłodnictwo), albo do odparowania części cieczy (destylacja, zateżanie roztworów).

Wnikanie ciepła podczas wrzenia różni się bardzo od poprzednio opisanych przypadków, w których wyjaśniając mechanizm wnikania posługiwaliśmy się pojęciem laminarnej warstwy przyściennej. Wrzenie zachodzi na granicy trzech faz; ciała stałego – powierzchni grzejnej, cieczy i pary, a warstwa przyścienna cieczy traci swą ciągłość na skutek tworzenia się pęcherzyków pary. Proces wrzenia jest zatem dużo bardziej złożony i należy rozróżnić jego dwa rodzaje: wrzenie w objętości i wrzenie przy przepływie.

#### III. 9. 1. Wrzenie w objętości

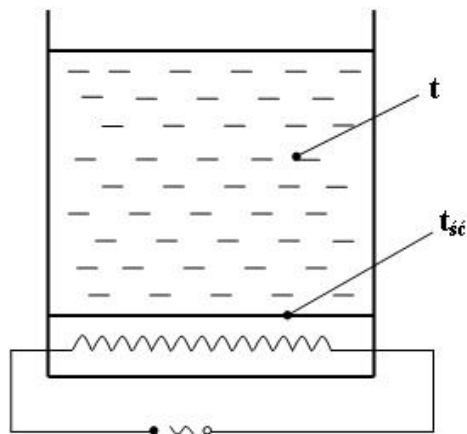
Wyobraźmy sobie eksperyment, podczas którego będziemy obserwować zjawiska zachodzące w otwartym naczyniu z wodą, w której zanurzono grzałkę elektryczną. W początkowym okresie zaobserwujemy ruch cieczy w postaci wyraźnych prądów konwekcyjnych i będzie to przypadek konwekcji naturalnej w cieczy. Po pewnym czasie, gdy temperatura wody wzrośnie, na powierzchni grzałki, w niektórych miejscach, zaczną pojawiać się małe pęcherzyki pary, które co chwilę będą znikać, a na ich miejsce pojawiać się nowe. Okazuje się, że warstwa wody bezpośrednio przy powierzchni jest już na tyle przegrzana, że w tzw. miejscach aktywnych (drobne nierówności, rysy na powierzchni – rys. III. 16) zaczną tworzyć się pęcherzyki pary. Nie mogą one wzrosnąć do rozmiarów pozwalających na oderwanie się, bo ich wierzchołki stykają się z zimniejszą cieczą i pęcherzyki ulegają kondensacji.



Rys. III. 16. Miejsca aktywne na powierzchni grzejnej

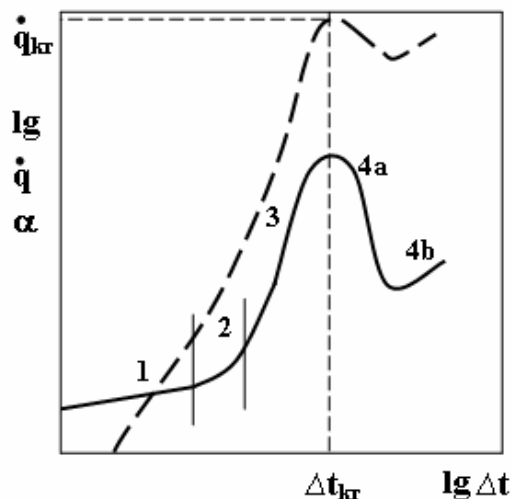
Ten zakres nosi nazwę wrzenia cieczy niedogrzonej. W pewnym momencie ciecz w całej objętości osiągnie temperaturę nasycenia (w naszym przykładzie  $100^{\circ}\text{C}$ ). Teraz pęcherzyki mogą już rosnać swobodnie do rozmiarów pozwalających im na oderwanie się – gdy siła napięcia powierzchniowego zrównoważy się z siłą wyporu. Rozpoczyna się tzw. wrzenie pęcherzykowe.

Prowadząc podobne doświadczenie w naczyniu z ogrzewanym dnem i zamontowanymi termometrami, pozwalającymi na pomiar temperatury cieczy i powierzchni grzejnej (rys. III. 17), mierząc



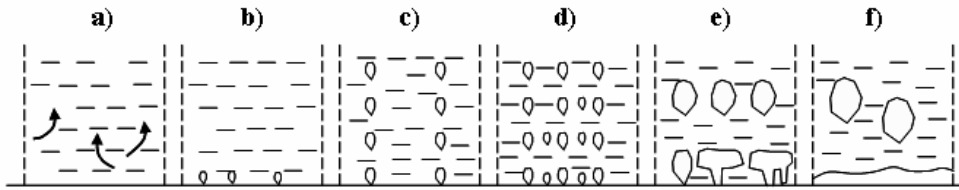
Rys. III. 17. Wrzenie cieczy w objętości

strumień ciepła  $\dot{Q}$  oraz obliczając różnicę temperatury między ścianą i cieczą  $\Delta t$  i znając powierzchnię ogrzewanego dna  $F$ , obliczymy łatwo współczynnik wnikania ciepła. Zmieniając gęstość strumienia ciepła  $\dot{q}$ , zmieniać będziemy również temperaturę ściany. W ten sposób wyznaczmy zależność  $\alpha = f(\Delta t)$  (rys. III. 18). Na rysunku tym pokazano również przebieg krzywej  $\dot{q} = \varphi(\Delta t) \left( \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{F} = \alpha \Delta t \right)$ .



**Rys. III. 18.** Zależność  $\alpha = f(\Delta t)$  linia ciągła i  $\dot{q} = \varphi(\Delta t)$  dla wrzenia w objętości

Na wykresie tym można wyróżnić kilka charakterystycznych obszarów. W obszarze 1, przy małych wartościach  $\Delta t$  (dla wody pod ciśnieniem atmosferycznym poniżej 5K) proces transportu ciepła podobny jest do konwekcji naturalnej. Pęcherzyki nie tworzą się, ciepło „unoszone” jest ku górze i z powierzchni następuje parowanie. Przy nieco większych wartościach  $\Delta t$  (5÷8 K) mamy do czynienia z wrzeniem cieczy niedogrzonej (obszar 2). Obszar wrzenia pęcherzykowego (obszar 3) rozciąga się do ok.  $\Delta t=25$  K. Wartość współczynnika wnikania ciepła rośnie teraz gwałtownie, uaktywniają się kolejne miejsca tworzenia się pęcherzyków i rośnie częstotliwość ich powstawania.



**Rys. III. 19.** Tworzenie się pęcherzyków pary na powierzchni grzejnej: a) konwekcja naturalna (obszar 1 wg rys. III. 18), b) wrzenie cieczy niedogrzonej (obszar 2), c), d) wrzenie pęcherzykowe (obszar 3), e) wrzenie błonowe w obszarze przejściowym (obszar 4a), f) wrzenie błonowe (obszar 4b)

W pewnym momencie znaczna część powierzchni grzejnej pokryta jest już parą „izolującą” ciecz od kontaktu z tą powierzchnią, a wartość  $\alpha$ , po osiągnięciu maksimum, zaczyna nagle spadać. Maksimum  $\alpha$  odpowiada tzw. krytycznej wartości  $\Delta t_{kr}$  i krytycznej gęstości strumienia ciepła  $\dot{q}_{kr}$ . Jest to stan groźny, gdyż bardzo gwałtownie wzrasta temperatura ściany i może nastąpić jej uszkodzenie, jak również destrukcja właściwości substancji stykającej się ze ścianą. Dla wody, pod ciśnieniem atmosferycznym  $\Delta t_{kr}$  wynosi 25 K i odpowiada temu wartość współczynnika wnikania ciepła ok. 47 000 W/(m<sup>2</sup>·K). Po przekroczeniu punktu krytycznego rozpoczyna się tzw. wrzenie błonowe. Najpierw, w obszarze 4a,  $\alpha$  maleje wraz ze zmniejszaniem się powierzchni kontaktu cieczy z powierzchnią grzejną, następnie, gdy cała powierzchnia już jest pokryta błoną pary (4b),  $\alpha$  rośnie na skutek coraz silniejszego promieniowania ściany i intensywnego przewodzenia ciepła. Procesy zachodzące na powierzchni grzejnej podczas wrzenia pokazano schematycznie na rys. III. 19.

Należy w tym miejscu wspomnieć o zjawisku Leidenfrosta, które można obserwować, gdy kropla cieczy spadnie na bardzo gorącą płytę. Kropla otacza się warstwą pary, porusza się po płycie i dość wolno odparowuje.

Z praktycznego punktu widzenia najbardziej interesujący jest zakres wrzenia pęcherzykowego, należy tylko uważać, żeby nie osiągnąć punktu krytycznego, a nawet nie zbliżyć się zbyt do niego. Literatura (także „Tablice do obliczeń procesowych”) podaje szereg informacji odnośnie do krytycznej wartości  $\Delta t_{kr}$  lub krytycznej gęstości strumienia ciepła. Podawane w literaturze tzw. bezpieczne gęstości strumienia ciepła (obciążenia cieplne) są zazwyczaj znacznie niższe od wartości krytycznych.

Ze względu na skomplikowany mechanizm transportu ciepła podczas wrzenia, nie udało się dotychczas znaleźć korelacji uniwersalnej, tak jak ma to miejsce w poprzednio opisanych przypadkach wnikania ciepła. Istnieje natomiast szereg zależności i metod obliczeniowych pozwalających z dość dobrą dokładnością przewidzieć wartość współczynnika wnikania ciepła dla konkretnych cieczy (woda, ciecze organiczne, czynniki chłodnicze) wrzących w określonych warunkach. Są to najczęściej zależności typu  $\alpha = f(\Delta t)$  lub  $\alpha = \varphi(\dot{q})$ , przy czym przejście z jednej postaci na drugą jest proste. Np. dla wrzenia wody w objętości popularne jest równanie podane przez Michiejewa:

$$\alpha = 25,88P^{0,58} \Delta t^{2,33}, \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]. \quad (\text{III-74})$$

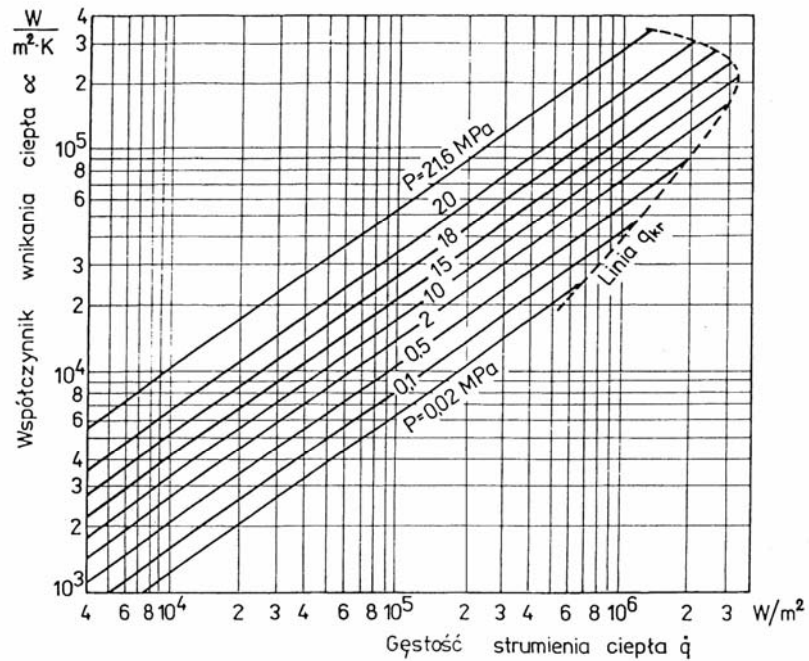
Pamiętając, że  $\dot{q} = \alpha \Delta t$  otrzymamy:

$$\alpha = 25,88P^{0,58} \left( \frac{\dot{q}}{\alpha} \right)^{2,33}, \quad (\text{III-75})$$

$$\alpha^{3,33} = 25,88P^{0,58} \dot{q}^{2,33}, \quad (\text{III-76})$$

$$\alpha = 2,656P^{0,176} \dot{q}^{0,7}, \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]. \quad (\text{III-77})$$

W równaniach tych  $P$  należy wstawiać w barach (1 bar = 0,1 MPa). Zależność  $\alpha = f(P, \dot{q})$  dla wody wg (III-77) przedstawiono na wykresie (rys. III. 20), z którego można łatwo odczytać wartość współczynnika wnikania ciepła.



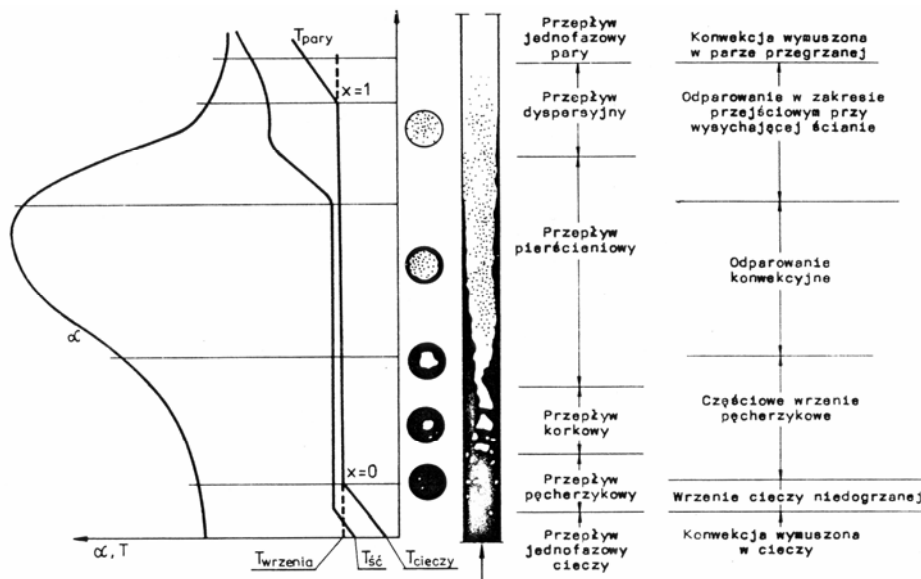
Rys. III. 20. Współczynnik wnikania ciepła podczas wrzenia wody w funkcji gęstości strumienia ciepła

### III. 9. 2. Wrzenie przy przepływie

Wrzenie przy przepływie zachodzi, gdy wrząca ciecz płynie przez ogrzewany kanał. Ponieważ powstająca para płynie razem z cieczą, pojawia się przepływ dwufazowy.

Na rys. III. 21 pokazano obraz zmian zachodzących podczas całkowitego odparowania cieczy płynącej przez rurę pionową.





Rys. III. 21. Wrzenie cieczy przy przepływie

Podobna sytuacja i praktycznie te same zakresy występują podczas wrzenia w rurze poziomej. Na rysunku tym zaznaczono zmieniające się struktury przepływu dwufazowego jak i różne mechanizmy ruchu ciepła, a to:

1. konwekcja wymuszona w cieczy,
2. wrzenie cieczy niedogrzonej,
3. częściowe wrzenie pęcherzykowe,
4. odparowanie konwekcyjne,
5. odparowanie w zakresie przejściowym przy wysychającej ścianie,
6. konwekcja wymuszona w parze przegrzanej.

Rozpatrzmy poszczególne zakresy przyjmując, że rura ogrzewana jest równomiernie. Z pierwszym zakresem, tj. konwekcją wymuszoną w cieczy, będziemy mieli do czynienia tak długo, dopóki temperatura cieczy będzie niższa od temperatury nasycenia przy danym ciśnieniu, a temperatura ściany będzie również niższa lub najwyżej równa temperaturze nasycenia. Obliczenie współczynnika wnikania ciepła w tym zakresie jest proste i można go wyznaczyć z ogólnie przyjętych zależności dla przepływu wymuszonego.

Z chwilą gdy temperatura ściany przekroczy temperaturę nasycenia, następuje przegrzewanie warstw cieczy znajdujących się w bezpośrednim kontakcie ze ścianą. Jeśli stopień przegrzania będzie wystarczający, to wytworzą się pierwsze pęcherzyki pary, które będą natychmiast ulegały kondensacji przy

skontaktowaniu się z zimniejszą cieczą. Tworzące się na ścianie pęcherzyki niejako „rozrywają” warstwę przyścienną, powodując intensyfikację wnikania ciepła. Zakres ten nosi nazwę wrzenia cieczy niedogrzonej.

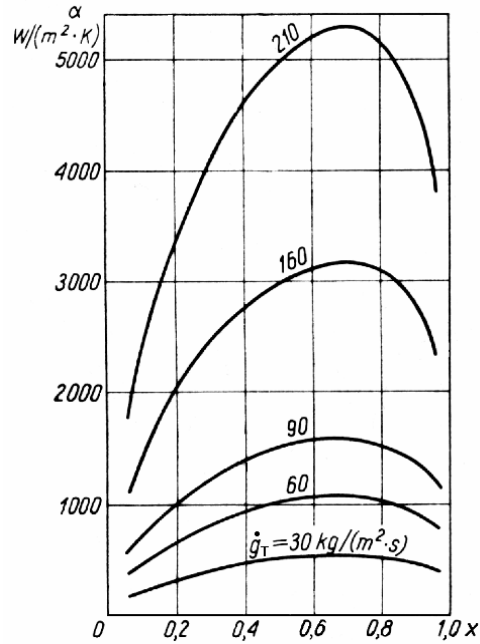
W miarę dalszego ogrzewania ciecz osiąga w końcu temperaturę wrzenia, zatem tworzące się pęcherzyki pary nie ulegają już kondensacji i płyną razem z cieczą. Od tego momentu rozpoczyna się przepływ dwufazowy. W początkowym okresie, gdy udział masowy pary w płynącej mieszaninie  $x = \frac{\dot{G}_p}{\dot{G}_p + \dot{G}_c}$

(stopień suchości pary) jest jeszcze mały, pęcherzyki płyną z prędkością zbliżoną do cieczy. Zakres ten nosi nazwę częściowego wrzenia pęcherzykowego, a intensywność wnikania ciepła określana jest zarówno przez konwekcję wymuszoną w cieczy, jak i przez wrzenie. Obliczając współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_{2F}$  w tym zakresie można skorzystać z zależności podanej przez Krużyliną:

$$\frac{\alpha_{2F}}{\alpha_{ck}} = \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha_{wrz}}{\alpha_{ck}} \right)^2}, \quad (\text{III-78})$$

przy czym  $\alpha_{ck}$  i  $\alpha_{wrz}$  należy obliczać z równań dla konwekcji wymuszonej (np. III-16) i wrzenia w objętości (np. dla wody rów. III-77).

Wraz ze zwiększającym się udziałem pary w płynącej mieszaninie, zmieniają się rodzaje przepływu (p. cz. I) i przez różne formy pośrednie tworzy się przepływ pierścieniowy. Para płynie teraz z bardzo dużą prędkością środkiem rury, a ciecz cienką warstewką po ścianie, również ze znaczną prędkością, choć wolniej niż para. Zmienia to radykalnie charakter ruchu ciepła. Na skutek intensywnej konwekcji w cienkiej warstwie cieczy utrudnione jest, a często uniemożliwione, powstawanie lokalnych przegrzań wystarczających do utworzenia się pęcherzyków pary. Tak więc odparowanie następuje tylko z powierzchni rozdziału faz, a ruch ciepła przybiera znów charakter konwekcyjny, niezależny od różnicy temperatury między ścianą i wrzącą cieczą. Zakres ten nosi nazwę odparowania konwekcyjnego, a wartość współczynnika wnikania ciepła zależy przede wszystkim od wielkości charakterystycznych dla przepływu dwufazowego, a więc głównie od gęstości strumienia masy  $\dot{g}_T$  i udziału masowego pary  $x$ . Wykres na rys. III. 22 przedstawia typowy przebieg zmienności  $\alpha$  w obszarze konwekcyjnym.



**Rys. III. 22.** Zależność  $\alpha = f(\dot{g}_T, x)$  dla  $\dot{q} = const$  podczas odparowania w rurze freonu R22

Literatura podaje wiele równań do obliczania współczynnika wnikania ciepła w zakresie odparowania konwekcyjnego. Często są to zależności typu  $\alpha_{2F} = f(\alpha_{ck}, X_{t-t})$ , w których  $\alpha_{ck}$  oznacza współczynnik wnikania ciepła przy konwekcji wymuszonej, a  $X_{t-t}$  jest parametrem Lockharta-Martinelliego (p. cz. I.). Jednym z takich równań jest:

$$\frac{\alpha_{2F}}{\alpha_{ck}} = 4,22 \left( \frac{1}{X_{t-t}} \right)^{0,61} \left( \frac{d}{0,014} \right)^{-0,66}, \quad (\text{III-79})$$

w którym:

$$\alpha_{ck} = 0,023 \frac{\lambda_c}{d} \left[ \frac{\dot{g}_T (1-x)d}{\eta_c} \right]^{0,8} \text{Pr}_c^{0,33}, \quad (\text{III-80})$$

a parametr Lockharta-Martinelliego określony jest zależnością:

$$\frac{1}{X_{t-t}} = \left( \frac{x}{1-x} \right)^{0,9} \left( \frac{\rho_c}{\rho_p} \right)^{0,5} \left( \frac{\eta_p}{\eta_c} \right)^{0,1}. \quad (\text{III-81})$$

Na skutek postępującego odparowania oraz porywania przez parę kropli cieczy, warstwa cieczy staje się coraz cieńsza aż w końcu powstają pierwsze „suche plamy” na powierzchni rury. Następuje to przy udziale masowym pary  $x \approx 0,8-0,9$  i objawia się gwałtownym spadkiem wartości współczynnika wnikania ciepła. Pojawia się tzw. „kryzys wrzenia przy przepływie” i wchodzimy w zakres przejściowy odparowania przy wysychającej ścianie. Po całkowitym wyschnięciu ściany i odparowaniu ostatnich kropli unoszonych przez parę znów mamy do czynienia z przepływem jednofazowym i konwekcją wymuszoną w parze przegrzanej.

Przy bardzo dużych wartościach gęstości strumienia ciepła pojawić się może tzw. rozwinięte wrzenie pęcherzykowe i to niezależnie od rodzaju przepływu. Wartości współczynnika wnikania ciepła są wtedy bardzo bliskie wartościom osiąganym podczas wrzenia w objętości.

Przy tak silnej zmienności współczynnika wnikania ciepła jaka występuje podczas wrzenia w przepływie, operuje się lokalnymi wartościami  $\alpha_{2F}$  dla określonej wartości  $x$ , w związku z tym istotnego znaczenia nabiera problem wyznaczania średniej wartości  $\alpha_m$ . Ogólnie można przyjąć, że:

$$\alpha_m = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \alpha_{2F} dx . \quad (\text{III-82})$$

Niestety, ze względu na złożoną postać równań określających  $\alpha_{2F}$  równanie (III-82) nie daje się na ogół rozwiązać analitycznie, konieczne jest zatem poszukiwanie rozwiązań metodami przybliżonymi.

### III. 10. WNIKANIE CIEPŁA PRZY PRZEPLYWIE MIESZANYM

Opisane poprzednio wrzenie przy przepływie jest jednym z przykładów wnikania ciepła w przepływie mieszanym. Do grupy tej można zaliczyć także takie przypadki jak: przepływ uwarstwiony z prądami termicznymi czy też przepływ z nałożonymi pulsacjami. Są to przypadki szczególne, dla których można znaleźć w literaturze odpowiednie wskazówki co do sposobu obliczania współczynnika wnikania ciepła.

### III. 11. SYSTEMATYKA PRZYPADKÓW WNIKANIA CIEPŁA

Po omówieniu i analizie ośmiu przypadków wnikania oraz równań opisujących intensywność wnikania ciepła, można pokusić się o pewne podsumowanie i próbę uogólnienia. Po pierwsze należy stwierdzić, że wrzenie odbiega zdecydowanie od pozostałych przypadków, po drugie, że wnikanie przy przepływie przejściowym może potraktować jako proces pośredni między

ruchem burzliwym i uwarstwionym. Tak więc do dalszych rozważań przyjmujemy 6 przypadków.

Równania opisujące  $\alpha$ , w swej ogólnej budowie, są dość skomplikowane i różnią się od siebie znacznie. Występują w nich takie liczby podobieństwa jak:  $Nu$ ,  $Re$ ,  $Pr$ ,  $C_v$ ,  $Gz$ ,  $Gr$ .

Rozpatrzmy teraz pierwszy z omówionych, bardzo dobrze poznany i ważny technicznie przypadek wnikania ciepła przy przepływie wymuszonym burzliwym. Intensywność wnikania opisana jest powszechnie akceptowaną zależnością (III-15).

$$Nu = CRe^A Pr^B,$$

w której  $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$  wyraża stosunek szybkości wnikania do szybkości przewodzenia, co Hobler nazwał podobieństwem termokinetycznym, a wymiarem liniowym jest średnica, czyli wymiar prostopadły do kierunku przepływu. Liczba  $Re = \frac{wd\rho}{\eta}$  charakteryzuje podobieństwo hydrodynamiczne

i jest odpowiedzialna za istnienie przepływu. Liczba  $Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda}$  mówi o podobieństwie właściwości czynników. Przyjmując, że równanie (III-15) ma najbardziej prawidłową budowę i logiczne rozłożenie parametrów określających intensywność wnikania ciepła, popatrzmy na ile równania opisujące pozostałe przypadki są podobne. Otóż okazuje się, że podobieństwo można dostrzec dopiero po odpowiednich przekształceniach.

I tak, dla przepływu wymuszonego uwarstwionego, po przekształceniu liczby  $Gz$ , otrzymaliśmy równanie (III-29), różniące się od równania (III-15) jedynie obecnością członu  $\frac{d}{L}$ .

W przypadku spływów grawitacyjnych, po wprowadzeniu wymiaru poprzecznego  $g_z = \left( \frac{\eta^2}{\rho^2 \bar{g}} \right)^{1/3}$ , któremu za Hoblerem nadaliśmy sens fizyczny

(grubość warstwy spływającej przy  $Re_z=1$ ), odpowiednie równania dały się sprowadzić do postaci formalnie identycznej jak dla przepływów wymuszonych, z tą różnicą, że jako liczba Nusselta wystąpiła liczba  $Nu_e = \frac{\alpha g_z}{\lambda}$ , a w miejsce

$Re$  pojawiła się liczba  $Re_z = \frac{4\Gamma}{\eta}$ , bez wątpienia odpowiedzialna za istnienie ruchu, podobnie jak liczba  $Re$ .

W przypadku kondensacji udało się przekształcić liczbę  $C_v$  i uzyskać równanie (III-62).

$$Nu_e = CK^A Pr^A \left( \frac{g_z}{h} \right)^A.$$

Liczba  $K = \frac{r}{c_c \Delta t}$  zawiera w sobie wielkość  $\Delta t$  decydującą o zaistnieniu procesu,

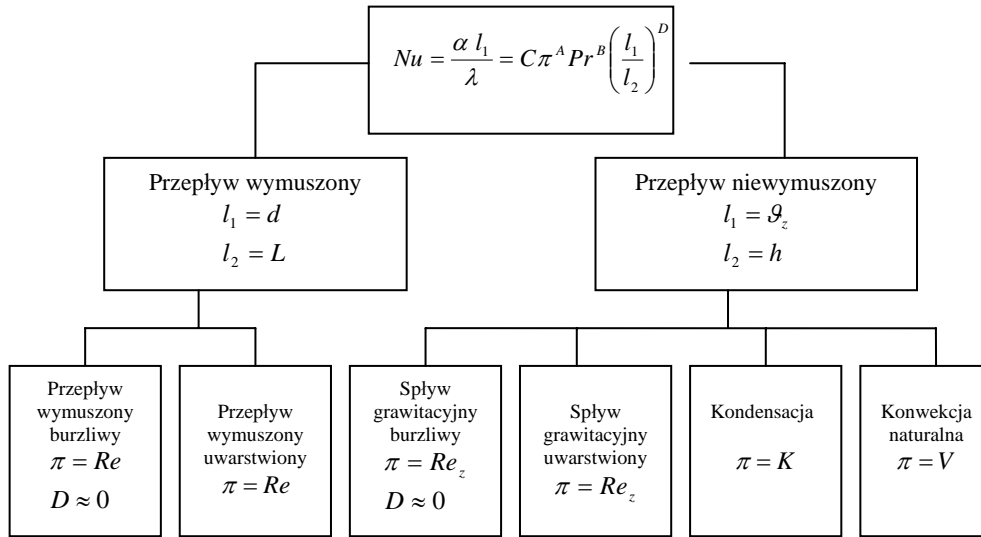
przy  $\Delta t = 0$  nie byłoby ani kondensacji, ani spływu kondensatu. Można zatem przyjąć, że liczba  $K$  pełni podobną rolę jak  $Re$  i  $Re_z$ .

Równanie dla konwekcji naturalnej, ze skomplikowaną liczbą  $Gr$ , udało się zastąpić prostszym, z liczbą  $V = \beta \Delta t$ . I w tym przypadku  $V$  odpowiada za ruch, gdyby nie było różnicy temperatury i gdyby czynnik wykazywał zerową rozszerzalność objętościową – nie byłoby ruchu.

Tak więc, we wszystkich sześciu przypadkach, równania opisujące intensywność wnikania ciepła mają następującą budowę: Po lewej stronie liczba  $Nu$  z liniowym wymiarem prostopadłym do kierunku ruchu, po prawej liczba odpowiedzialna za istnienie ruchu, liczba charakteryzująca właściwości czynnika i, w przypadku ruchów uwarstwionych, stosunek wymiarów liniowych - prostopadłego do podłużnego. Można to zapisać w postaci następującej:

$$Nu = \frac{\alpha l_1}{\lambda} = C \pi^A Pr^B \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^D. \quad (III-83)$$

Przyjmując równanie (III-83) jako podstawową zależność opisującą wszystkie rozpatrywane przypadki wnikania, można przedstawić następującą systematykę (rys. III-23).



Rys. III. 23. Systematyka przypadków wnikania ciepła

### III. 12. WPŁYWY UBOCZNE

Podane przy opisywaniu poszczególnych przypadków zależności do obliczania wartości współczynnika wnikania ciepła dotyczą sytuacji w pewnym sensie modelowych. W praktyce często konieczne będzie uwzględnienie różnych dodatkowych czynników.

Przy przepływie przez wężownicę można posłużyć się zależnością:

$$Nu' = \varepsilon Nu, \quad (III-83)$$

gdzie:

$$\varepsilon = 1 + 1,77 \frac{d}{R}, \quad (III-84)$$

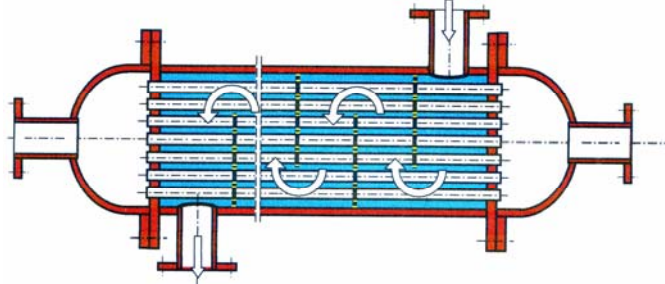
( $d$  – średnica rury,  $R$  – promień wężownicy), a  $Nu$  jest wartością obliczoną jak dla rury prostej. Należy przy tym pamiętać o wpływie krzywizny na wartość krytyczną liczby  $Re$  (patrz cz. I).

W przypadku rur krótkich należy uwzględnić wpływ efektu wlotowego na wartość  $\alpha$  i skorzystać z równania (III-83), obliczając teraz poprawkę  $\varepsilon$  z zależności:

$$\varepsilon = 1 + \left( \frac{d}{L} \right)^{0,7}, \quad (III-85)$$

( $d$  – średnica rury,  $L$  – długość). Warto pamiętać, że już przy  $\frac{L}{d} = 30$  poprawka  $\varepsilon$  spada do ok. 1,05 i przestaje odgrywać rolę.

Jeśli w wymienniku płaszczowo-rurowym zastosowane są przegrody, a tak dzieje się bardzo często, bezpośrednie zastosowanie równań podanych w tabl. III. 1 dla przepływu prostopadłego do pęku rur jest niedopuszczalne. Przepływ przez przestrzeń międzyrurową wymiennika z przegrodami jest bardzo skomplikowany (rys. III. 24).



Rys. III. 24. Przepływ przez przestrzeń międzyrurową wymiennika z przegrodami segmentowymi

Czynnik częściowo płynie prostopadle do rur, częściowo równoległe, część czynnika przepływa przez nieszczelności między płaszczem a przegrodami, część przez nieszczelności między przegrodami i rurami. Przy obliczeniach należy skorzystać z odpowiednich zależności podawanych w literaturze.

Obliczane z przytoczonych poprzednio równań wartości współczynnika wnikania ciepła dotyczą powierzchni czystych. W rzeczywistości powierzchnie, z którymi kontaktują się czynniki biorące udział w procesie wymiany ciepła, są zanieczyszczone, co zmniejsza wartość współczynnika przenikania ciepła. Problem ten rozwiązuje się uwzględniając wpływ osadów w postaci:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B} + \sum \frac{1}{\alpha_0}, \quad (\text{III-86})$$

gdzie:  $\sum \frac{1}{\alpha_0}$  oznacza opór cieplny zanieczyszczeń po obu stronach ściany.

Więcej informacji na ten temat podano w rozdziale V.

W przypadku przepływu gorących gazów (szczególnie wieloatomowych zawierających  $\text{CO}_2$  i  $\text{H}_2\text{O}$ ) należy uwzględnić wpływ promieniowania. Można wtedy skorzystać z uproszczonej metody (równanie I. 9):

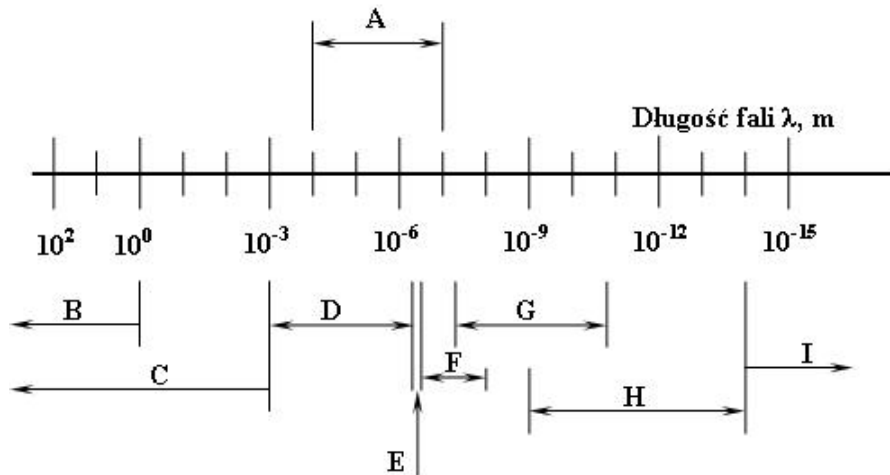
$$\alpha_z = \alpha_r + \alpha_k.$$

Informacje odnośnie do sposobu obliczenia  $\alpha_r$  podano w rozdziale IV.



#### IV. PROMIENIOWANIE CIEPLNE

Kolejnym, po przewodzeniu i konwekcji, sposobem transportu ciepła jest promieniowanie cieplne. Sam termin promieniowanie oznacza zarówno emitowanie energii w postaci fali elektromagnetycznej, jak i produkt tej energii, tzn. strumień fotonów. Prędkość rozchodzenia się promieniowania w próżni wynosi ok.  $3 \cdot 10^8$  m/s. Widmo i rodzaje promieniowania elektromagnetycznego pokazano na rys. IV. 1.



**Rys. IV. 1.** Widmo promieniowania elektromagnetycznego: A - promieniowanie cieplne, B - UKF, C - fale radiowe, D - podczerwień, E - światło widzialne, F - ultrafiolet, G - promieniowanie X, H - promieniowanie  $\gamma$ , I - promieniowanie kosmiczne

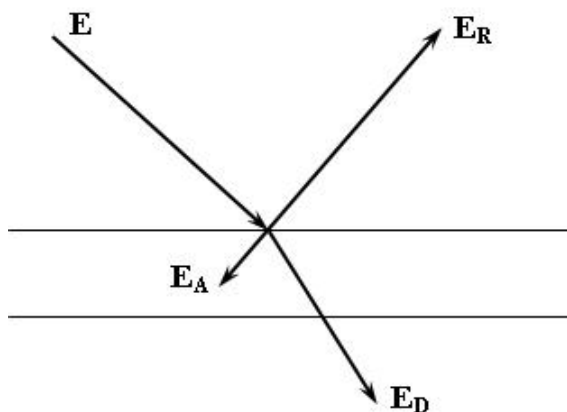
Przedmiotem naszego zainteresowania jest promieniowanie cieplne o długości fali w zakresie  $\lambda = 0,1 \div 100 \mu\text{m}$ . W tym zakresie mieści się promieniowanie widzialne (światło)  $\lambda = 0,38 \div 0,78 \mu\text{m}$ .

Każde ciało o temperaturze wyższej od zera bezwzględnego emituje energię promienistą. W temperaturach zbliżonych do temperatury otoczenia i niższych, wpływ promieniowania w zagadnieniach praktycznych może być pomijany. Zgodnie ze swoją naturą (fale elektromagnetyczne) promieniowanie cieplne może rozchodzić się w próżni i w ośrodku przezroczystym. Na drodze promieniowania mogą być przekazywane bardzo duże ilości energii i to niezależnie od odległości i bez udziału ciał pośredniczących, jak miało to miejsce przy przewodzeniu i konwekcji.

IV. 1. PODSTAWOWE PRAWA PROMIENIOWANIA

Promieniowanie padające na jakieś ciało może zostać przez nie pochłonięte, odbite lub przepuszczone. Tak więc bilans energii (rys. IV. 2) można napisać w postaci:

$$E_A + E_R + E_D = E^* \text{ , J.} \quad (\text{IV-1})$$



Rys. IV. 2. Bilans energii promienistej

Przekształcając (IV. 1) do postaci:

$$\frac{E_A}{E} + \frac{E_R}{E} + \frac{E_D}{E} = 1 \quad (\text{IV-2})$$

i oznaczając poszczególne ułamki jako:

$$A = \frac{E_A}{E} \text{ - absorpcyjność,}$$

$$R = \frac{E_R}{E} \text{ - refleksyjność,}$$

$$D = \frac{E_D}{E} \text{ - przepuszczalność (transmisyjność),}$$

napiszemy:

$$A + R + D = 1. \quad (\text{IV-3})$$

\*) Dokładnie, to bilans energii należałoby sporządzić dla określonej długości fali  $\lambda$

W dalszych rozważaniach szczególnie przydatna będzie wielkość  $A$ , będąca zdolnością ciała do pochłaniania energii promienistej. Ze względu na wymienione cechy można wyróżnić trzy skrajne przypadki:

a)  $A = 1, R = 0, D = 0$

Ciało zachowujące się w ten sposób, tzn. absorbujące w całości promieniowanie, będziemy nazywać ciałem doskonale czarnym.

b)  $R = 1, A = 0, D = 0$

Będzie to ciało doskonale białe (zwierciadlane), które w całości odbija promieniowanie.

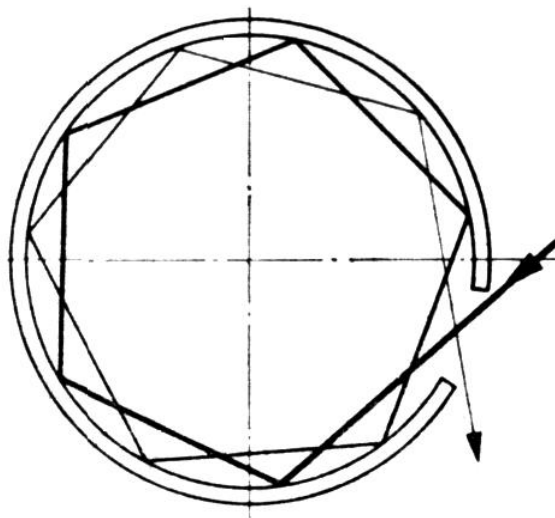
c)  $D = 1, A = 0, R = 0$

Ciało doskonale przezroczyste.

Oddzielną grupę stanowią tzw. ciała szare, dla których  $A < 1$  i  $A + R = 1$ .

Ciała doskonale czarne, doskonale białe lub doskonale przezroczyste są wyidealizowanymi modelami. Np. sadza odbija jeszcze ok. 5% promieniowania. Ciało praktycznie doskonale czarne można otrzymać budując układ jak na rys. IV. 3.

Promieniowanie wpadające do środka ulega wielokrotnemu odbiciu i za każdym razem jego część jest absorbowana. Tak więc po wielokrotnym odbiciu, praktycznie całe promieniowanie zostanie pochłonięte i nie wydostanie się na zewnątrz.



Rys. IV. 3. Model ciała doskonale czarnego

Prawo Kirchoffa określa związek między zdolnością promieniowania ciała  $\varepsilon$  - emisyjnością i jego zdolnością absorpcji  $A$  – absorpcyjnością. Zgodnie z tym prawem, w stanie równowagi termicznej  $\varepsilon = A$ .

Prawo Kirchoffa można także sformułować inaczej, mianowicie, że dla wszystkich ciał w tej samej temperaturze  $T$  obowiązuje:

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \frac{E}{A} = E_c(T). \quad (\text{IV-4})$$

Zatem stosunek energii emitowanej przez jednostkę powierzchni ciała do jego zdolności absorpcyjnej jest stały dla wszystkich ciał i jest równy zdolności emitowania promieniowania przez ciało doskonale czarne, dla którego  $A = 1$ .

Zdolność emisji i zdolność absorpcji promieniowania są to wielkości różne pojęciowo, ale liczbowo są sobie równe.

W równaniu (IV-1) posłużyliśmy się energią  $E$ . Odnosząc tę wielkość do czasu otrzymamy strumień energii radiacyjnej  $\dot{E}$ , [W], zwany również emisją. Odnosząc emisję do jednostki powierzchni, otrzymamy gęstość strumienia energii radiacyjnej, czyli gęstość emisji  $\dot{e}$ , W/m<sup>2</sup> i wtedy:

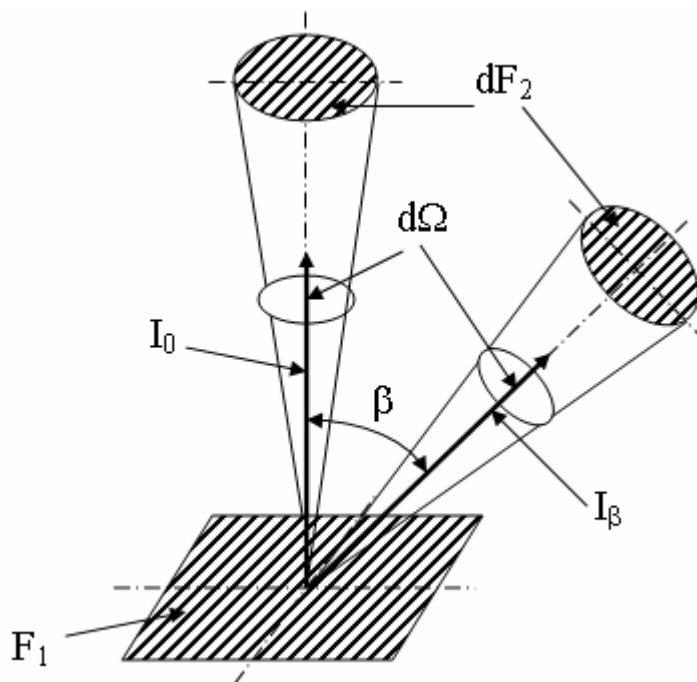
$$\dot{E} = \dot{e}F. \quad (\text{IV-5})$$

Gęstość emisji przypadająca na jednostkę kąta bryłowego (rys. IV. 4) nazywa się intensywnością emisji lub krótko intensywnością:

$$\frac{\partial \dot{e}}{\partial \Omega} = I, \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{sr}} \right]^*). \quad (\text{IV-6})$$

---

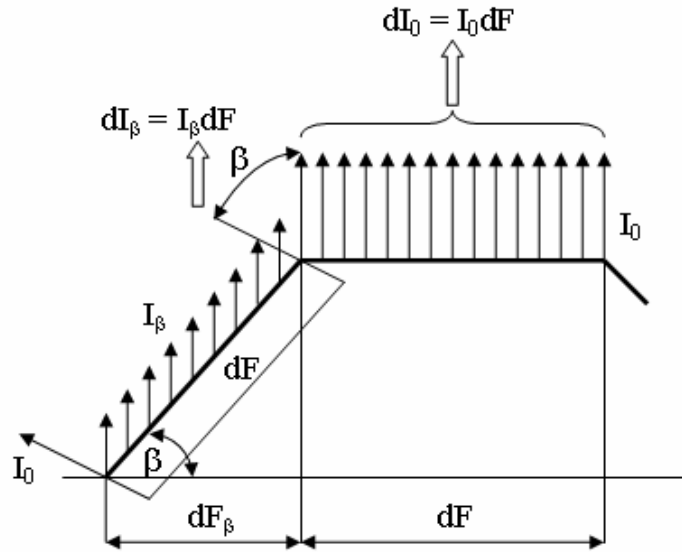
\*) sr – steradian, jest to kąt bryłowy o wierzchołku w środku kuli, wycinający z jej powierzchni część równą powierzchni kwadratu o boku równym promieniowi tej kuli



Rys. IV. 4. Intensywność emisji

Intensywność emisji zależy od kierunku. Intensywność w kierunku normalnym do powierzchni będziemy oznaczać  $I_0$  (rys. IV. 4). Związek między  $I_0$  i  $I_\beta$  określany jest prawem Lamberta.

Patrząc na słońce widzimy równomiernie oświetloną tarczę, a nie kulę, podobnie rozgrzany do czerwoności walec wydaje się nam prostokątem. Wynika to stąd, że intensywność promieniowania odbieranego przez obserwatora jest jednakowa, gdyż widzi on je na tle rzutu powierzchni emitującej rys. IV. 5.



Rys. IV. 5. Ilustracja prawa Lamberta

Wynik naszych obserwacji można zapisać w postaci:

$$\frac{dI_{\beta}}{dF_{\beta}} = \frac{dI_0}{dF} \quad (\text{IV-7})$$

Ponieważ:

$$dI_{\beta} = I_{\beta} dF, \quad (\text{IV-8})$$

$$dI_0 = I_0 dF, \quad (\text{IV-9})$$

a:

$$dF_{\beta} = dF \cos \beta, \quad (\text{IV-10})$$

to podstawiając powyższe związki do (IV-7) otrzymamy:

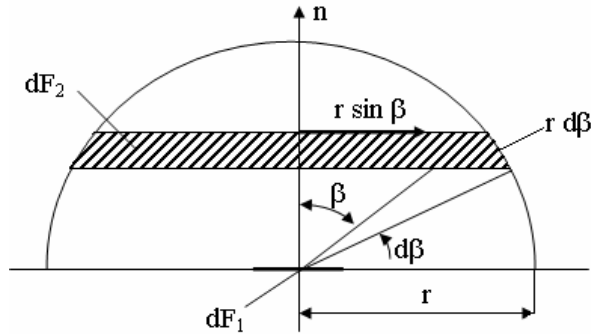
$$\frac{I_{\beta} dF}{dF \cos \beta} = \frac{I_0 dF}{dF} \quad (\text{IV-11})$$

i ostatecznie:

$$I_{\beta} = I_0 \cos \beta. \quad (\text{IV-12})$$

Równanie (IV-12) nosi nazwę prawa Lamberta.

Można też obliczyć energię wypromieniowaną przez jednostkę powierzchni ciała doskonale czarnego we wszystkich kierunkach półkuli obejmującej tę powierzchnię – rys. IV. 6.



Rys. IV. 6. Promieniowanie w obrębie półkuli

Dla kąta bryłowego  $d\Omega$  na kierunku  $\beta$  otrzymamy:

$$d^2 \dot{E}_\beta = dF_1 I_\beta d\Omega_\beta. \quad (IV-13)$$

Dla pierścienia o promieniu  $r$  określonego kątem  $\beta$  mamy:

$$d\Omega_\beta = \frac{dF_2}{r^2} = \frac{2\pi r \sin \beta r d\beta}{r^2}. \quad (IV-14)$$

Wykorzystując prawo Lamberta (rów. IV-12) i podstawiając do (IV-13) otrzymamy:

$$d^2 \dot{E}_\beta = dF_1 I_0 2\pi \sin \beta \cos \beta d\beta. \quad (IV-15)$$

Całkując to wyrażenie dla  $\beta = 0 \div 90^\circ$  otrzymamy całkowitą emisję elementu  $dF_1$ :

$$d\dot{E} = dF_1 \pi I_0 \int_0^{\pi/2} 2 \sin \beta \cos \beta d\beta = \pi I_0 dF_1^*). \quad (IV-16)$$

Ponieważ zgodnie z (IV-5):

$$d\dot{E} = \dot{e} dF, \quad (IV-17)$$

to porównując (IV-16) i (IV-17), otrzymamy:

$$\dot{e} = \pi I_0, \quad (IV-18)$$

czyli, że gęstość strumienia emisji  $\dot{e}$  jest  $\pi$  razy większa od emisji w kierunku normalnym<sup>\*\*)</sup>.

<sup>\*)</sup>  $\int \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2} \sin^2 \beta$

<sup>\*\*)</sup> Wielkości  $\dot{e}$  i  $I_0$  mają różne wymiary, bowiem w  $\pi$  zawiera się wymiar kąta bryłowego

W dotychczasowych rozważaniach używaliśmy energii  $E$ , strumienia energii  $\dot{E}$ , gęstości strumienia energii  $\dot{e}$  oraz intensywności emisji  $I$ , należałoby operować odpowiednimi wielkościami spektralnymi, a zatem  $E_\lambda$ ,  $\dot{E}_\lambda$ ,  $\dot{e}_\lambda$  i  $I_\lambda$  (ewentualnie dla określonych częstotliwości  $\nu$  -  $E_\nu$ ,  $\dot{E}_\nu$ ,  $\dot{e}_\nu$  i  $I_\nu$ ).

Należy też rozróżniać odpowiednie wartości dla ciała doskonale czarnego. Będziemy to robić używając indeksu  $c$ , np  $\dot{e}_{c\lambda}$  oznacza spektralną gęstość emisji ciała doskonale czarnego dla danej długości fali  $\lambda$ . Wymiarem  $\dot{e}_\lambda$  jest

$$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right].$$

Posługując się wprowadzoną przez siebie teorię kwantów, Planck wyprowadził zależność wiążącą spektralną gęstość emisji ciała doskonale czarnego z długością fali  $\lambda$  i temperaturą bezwzględną ciała  $T$ . Zależność tę zapisuje się w postaci:

$$\dot{e}_{c\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}, \quad (\text{IV-19})$$

$C_1$  i  $C_2$  są to tzw. stałe promieniowania:

$$C_1 = 2\pi^5 h c_0^2 = 3,7418 \cdot 10^{-16}, [\text{W} \cdot \text{m}^2], \quad (\text{IV-20})$$

$$C_2 = \frac{hc_0}{k} = 1,4388 \cdot 10^{-2}, [\text{K} \cdot \text{m}]. \quad (\text{IV-21})$$

W równaniach tych poszczególne wielkości oznaczają:

$h$  – stała Plancka,  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  [J/s],

$c_0$  – prędkość światła,  $c_0 = 3 \cdot 10^8$  [m/s],

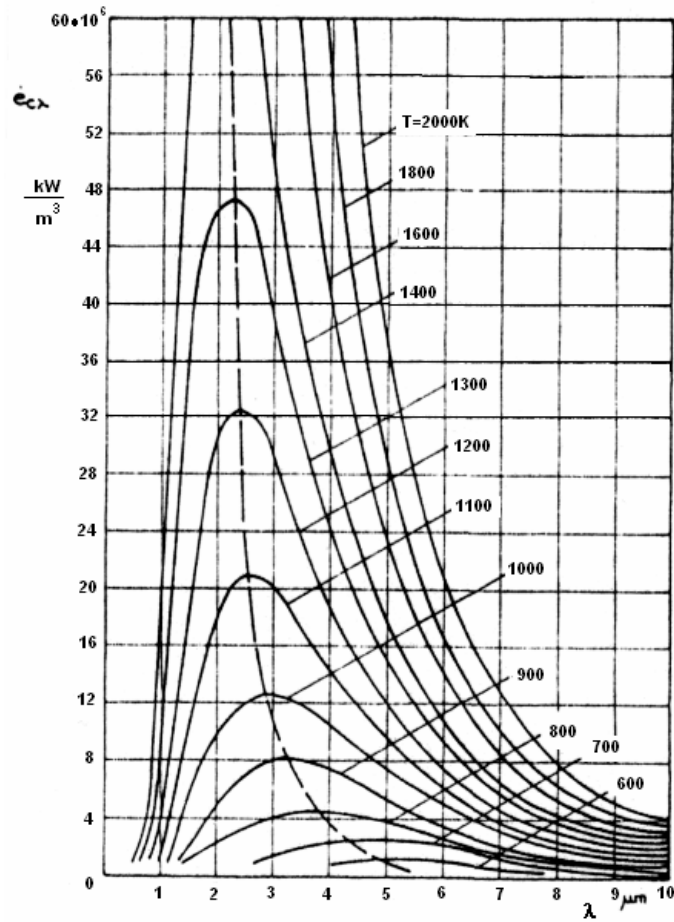
$k$  – stała Boltzmana,  $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$  [J/K]\*).

Zależność (IV-19) ilustruje wykres (rys. IV. 7).

---

\*) stała Boltzmana jest stosunkiem uniwersalnej stałej gazowej do liczby Avogadro





Rys. IV. 7. Prawo Plancka

Z rysunku widać, że obszar pod krzywą dla danej temperatury, stanowiący całkowitą gęstość emisji, rośnie bardzo znacznie ze wzrostem temperatury. Z rys. IV. 7 widać również, że dla każdej temperatury istnieje maksimum, którego położenie przesuwają się w lewo (w kierunku fal krótszych) wraz ze wzrostem temperatury. Wien stwierdził, że iloczyn  $\lambda_m \cdot T$ , określający położenie tego maksimum jest stały i wynosi:

$$\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ [m} \cdot \text{K]}. \quad (\text{IV-22})$$

Związek (IV-20) nosi nazwę prawa Wiena (lub prawa przesunięć Wiena) i pozwala na pomiar temperatury na odległość. Mierzy się spektralny rozkład emisji ( $\dot{e}_{c\lambda}$ ) i wyznacza maksimum tzn. położenie  $\lambda_m$ . Temperatura ciała wynika z równania (IV-22). Na tej zasadzie działają pirometry.

Całkowitą gęstość emisji ciała doskonale czarnego otrzymamy całkując wyrażenie określające spektralną gęstość emisji  $\dot{e}_{c\lambda}$  (równanie IV-19) w całym zakresie długości fal, tzn. od  $\lambda = 0$  do  $\lambda = \infty$ . W wyniku całkowania otrzymuje się:

$$\dot{e}_c = C_c T^4, \quad (\text{IV-23})$$

gdzie stała  $C_c \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$ , będąca kombinacją stałych występujących

w równaniu Plancka, jest stałą promieniowania ciała doskonale czarnego lub stałą Stefana-Boltzmana, a równanie (IV-23) nosi nazwę prawa Stefana-Boltzmana. Ze względu na bardzo duże wartości  $T^4$ , niedogodne do obliczeń, w technice stosuje się zwykle zapis:

$$\dot{e}_c = C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (\text{IV-24})$$

w którym  $C_c = 5,67 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$  jest tzw. techniczną stałą promieniowania ciała

doskonale czarnego. Strumień energii radiacyjnej, czyli emisja ciała doskonale czarnego, zgodnie z (IV-5) wyniesie:

$$\dot{E}_c = F \dot{e}_c = F C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (\text{IV-25})$$

Prawo Stefana-Boltzmana stosuje się również do ciał szarych. Dla ciała szarego o emisyjności  $\varepsilon$  i tej samej temperaturze otrzymamy:

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{E}_c = F \varepsilon \dot{e}_c^{*}) \quad (\text{IV-26})$$

i

$$\dot{E} = F \varepsilon C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (\text{IV-27})$$

---

<sup>\*)</sup> Emisyjność  $\varepsilon$  bywa nazywana również stopniem szarości lub zdolnością emisji. Stosuje się również zapis  $\varepsilon C_c = C$  i wtedy  $\dot{E} = F C \left( \frac{T}{100} \right)^4$

Wartość  $\varepsilon$  dla kilku ciał podano w tabelicy IV. 1. Więcej danych na ten temat można znaleźć w literaturze.

**Tablica IV. 1**

Emisyjność niektórych ciał

Materiał	Stan powierzchni	Temperatura °C	$\varepsilon$
aluminium	nieobrobiona	25	0,07
		23	0,04
	polerowana	255	0,039
		575	0,057
stal węglowa	blacha walcowana	20	0,057
	utleniona chropowata	40	0,94
		370	0,97
cegła	czerwona chropowata	20	0,93
papa	-	20	0,93
lakier biały	-	40	0,80
		95	0,95

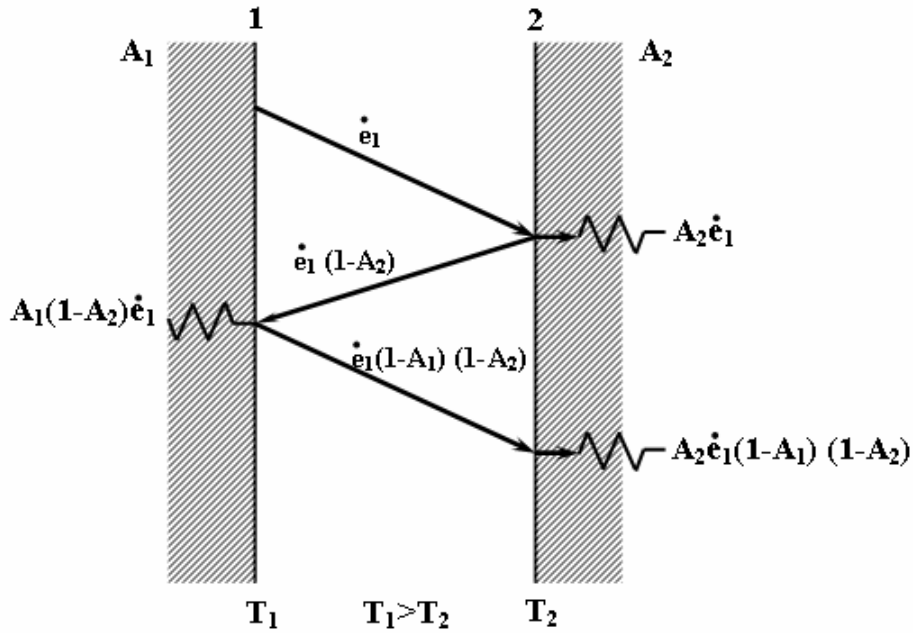
Emisyjność ciał zależy od wielu czynników (temperatura, długość fali, kierunek (ką), rodzaj ciała, stan powierzchni). Ogólnie dielektryki wykazują znacznie większą emisyjność niż przewodniki. Największą emisyjność wykazują ciała o powierzchni matowej i chropowatej (do 0,95), najmniejszą polerowane metale szlachetne (złoto ok. 0,02).

#### IV. 2. WYMIANA CIEPŁA PRZEZ PROMIENIOWANIE MIĘDZY CIAŁAMI STAŁYMI

Z podanych wcześniej praw i równań będziemy korzystać w obliczeniach cieplnych, przyjmując równość energii i ciepła. W wielu podręcznikach pisze się wprost, że  $\dot{q} = \dot{e}$  i  $\dot{Q} = \dot{e}F$ .

##### IV. 2. 1. Wymiana ciepła między dwiema płytami równoległymi

Rozpatrzmy dwie szare płyty równoległe, o bardzo dużych wymiarach, ustawione blisko siebie tak, że emisja jednej płyty trafia na drugą. Temperatury płyt wynoszą odpowiednio  $T_1$  i  $T_2$  (rys. IV. 8), a ośrodek między płytami jest przezroczysty.



Rys. IV. 8. Schemat wymiany ciepła między dwiema płytami równoległymi

Zgodnie z prawem Lamberta przyjmujemy  $A = \varepsilon$  oraz  $R + A = 1$ , czyli  $R = 1 - \varepsilon$ . Emisja z jednostki powierzchni 1 wynosi  $\dot{e}_1$ , z tego, powierzchnia 2 zaabsorbuje  $A_2 \dot{e}_1$  i odbije  $(1 - A_2) \dot{e}_1$ . Z tej porcji emisji powierzchnia 1 zaabsorbuje  $A_1 (1 - A_2) \dot{e}_1$  i odbije  $(1 - A_1) (1 - A_2) \dot{e}_1$ . Powierzchnia 2 pochłonie  $A_2 (1 - A_1) (1 - A_2) \dot{e}_1$  itd.

Tworząc szereg kolejnych porcji emisji  $\dot{e}_1$  zaabsorbowanych przez powierzchnię 2, otrzymamy ciepło pochłonięte przez powierzchnię 2.

$$\dot{q}_2 = A_2 \dot{e}_1 + A_2 \dot{e}_1 (1 - A_1) (1 - A_2) + A_2 \dot{e}_1 (1 - A_1)^2 (1 - A_2)^2 + \dots = A_2 \dot{e}_1 (1 + p + p^2 + \dots), \quad (\text{IV-28})$$

gdzie:

$$p = (1 - A_1) (1 - A_2) < 1. \quad (\text{IV-29})$$

Suma wyrazów szeregu (IV-29) wynosi  $\frac{1}{1 - p}$ , zatem:

$$\dot{q}_2 = \frac{A_2 \dot{e}_1}{1 - p}. \quad (\text{IV-30})$$

Jeśli podobne rozumowanie przeprowadzimy dla ściany 2, która promieniuje na ścianę 1, otrzymamy analogiczne wyrażenie, określające ciepło otrzymane przez element powierzchni 1:

$$\dot{q}_1 = \frac{A_1 \dot{e}_2}{1-p}. \quad (\text{IV-31})$$

Ponieważ  $T_1 > T_2$  to  $\dot{q}_2 > \dot{q}_1$ .

Różnica:

$$\dot{q}_2 - \dot{q}_1 = \dot{q}_{1-2}, \quad (\text{IV-32})$$

będzie gęstością strumienia ciepła wymienionego między powierzchniami.

Podstawiając w równaniu (IV-32) zależności (IV-30) i (IV-31) otrzymamy:

$$\dot{q}_{1-2} = \frac{A_2 \dot{e}_1}{1-p} - \frac{A_1 \dot{e}_2}{1-p}. \quad (\text{IV-33})$$

Ponieważ:

$$1-p = 1 - (1-A_1)(1-A_2) = A_2 + A_1 - A_1 A_2, \quad (\text{IV-34})$$

a prawo Kirchoffa mówi, że:

$$\varepsilon_1 = A_1 \text{ i } \varepsilon_2 = A_2,$$

natomiast z prawa Stefana-Boltzmana wiemy, że:

$$\dot{e}_1 = \varepsilon_1 C_c \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \quad (\text{IV-34})$$

i

$$\dot{e}_2 = \varepsilon_2 C_c \left( \frac{T_2}{100} \right)^4, \quad (\text{IV-35})$$

to można napisać:

$$A_2 \dot{e}_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 C_c \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \quad (\text{IV-36})$$

i

$$A_1 \dot{e}_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_c \left( \frac{T_2}{100} \right)^4, \quad (\text{IV-37})$$

a zależność (IV-33) przyjmie postać:

$$\dot{q}_{1-2} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_1 C_c \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_c \left( \frac{T_2}{100} \right)^4}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (\text{IV-38})$$

i dalej

$$\dot{q}_{1-2} = \left( \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{IV-39})$$

$$\dot{q}_{1-2} = \left( \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_1}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} - 1} \right) C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (\text{IV-40})$$

i

$$\dot{q}_{1-2} = \left( \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \right) C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (\text{IV-41})$$

Oznaczają teraz:

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}, \quad (\text{IV-42})$$

$$\dot{q}_{1-2} = \varepsilon_{1-2} C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (\text{IV-43})$$

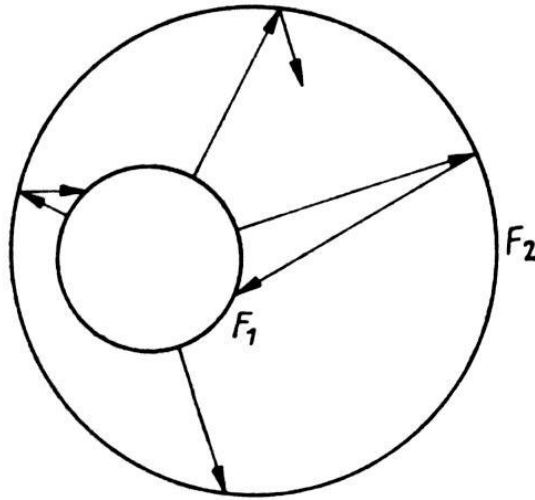
Wielkość  $\varepsilon_{1-2}$  nazwiemy emisyjnością wzajemną lub zastępczą zdolnością emisji.

Równanie (IV-42) jest słuszne wyłącznie dla rozpatrywanego układu dwóch powierzchni płaskich. Dla innych układów geometrycznych wyrażenie określające emisyjność wzajemną będzie przyjmować inną postać, niemniej zawsze emisyjność wzajemna jest mniejsza od mniejszej emisyjności. Całkowity strumień ciepła wymienianego między dwiema płytami o powierzchni  $F$  określa zależność:

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{q}_{1-2} F = \varepsilon_{1-2} F C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] [\text{W}]. \quad (\text{IV-44})$$

**IV. 2. 2. Wymiana ciepła między powierzchnią  $F_1$  zamkniętą przez powierzchnię  $F_2$**

Schemat takiego przypadku pokazano na rys. IV. 9.



**Rys. IV. 9.** Jedna powierzchnia zamknięta przez drugą

W tym przypadku, podobnie jak poprzednio, obowiązuje zależność:

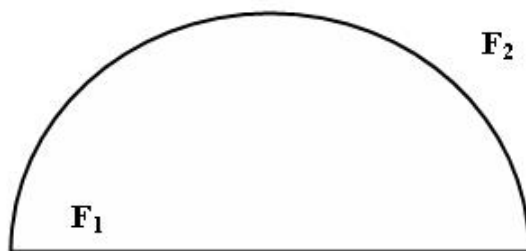
$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_{1-2} F_1 C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{IV-45})$$

przy czym teraz:

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (\text{IV-46})$$

Jeśli  $F_2 \gg F_1$ , to można przyjąć, że  $\varepsilon_{1-2} \approx \varepsilon_1$ .

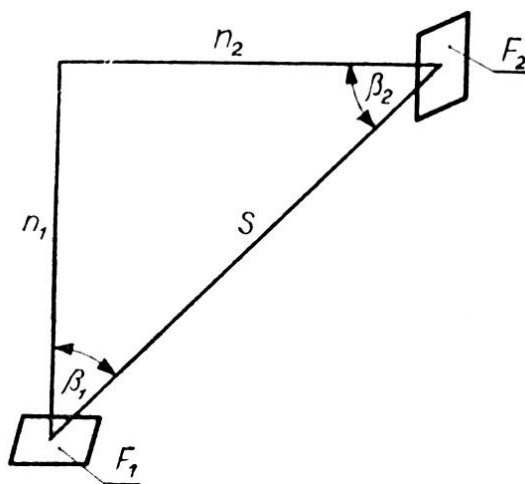
Dla układu jak na rysunku IV. 10, gdy dwie powierzchnie  $F_1$  i  $F_2$  tworzą jedną powierzchnię zamkniętą, obowiązują równania (IV-45) i (IV-46).



Rys. IV. 10. Schemat powierzchni  $F_1$  i  $F_2$  tworzących powierzchnię zamkniętą

#### IV. 2. 3. Wymiana ciepła między dwiema powierzchniami ustawionymi dowolnie

W przypadku dwóch płaszczyzn ustawionych dowolnie względem siebie (rys. IV. 11) można wyprowadzić, że:



Rys. IV. 11. Dwie płaszczyzny ustawione dowolnie względem siebie

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dF_1 dF_2}{\pi s^2}, \quad (\text{IV-47})$$

gdzie:  $\beta_1$  i  $\beta_2$  są to kąty, jakie tworzą normalne do powierzchni z promieniem łączącym środki obu powierzchni.



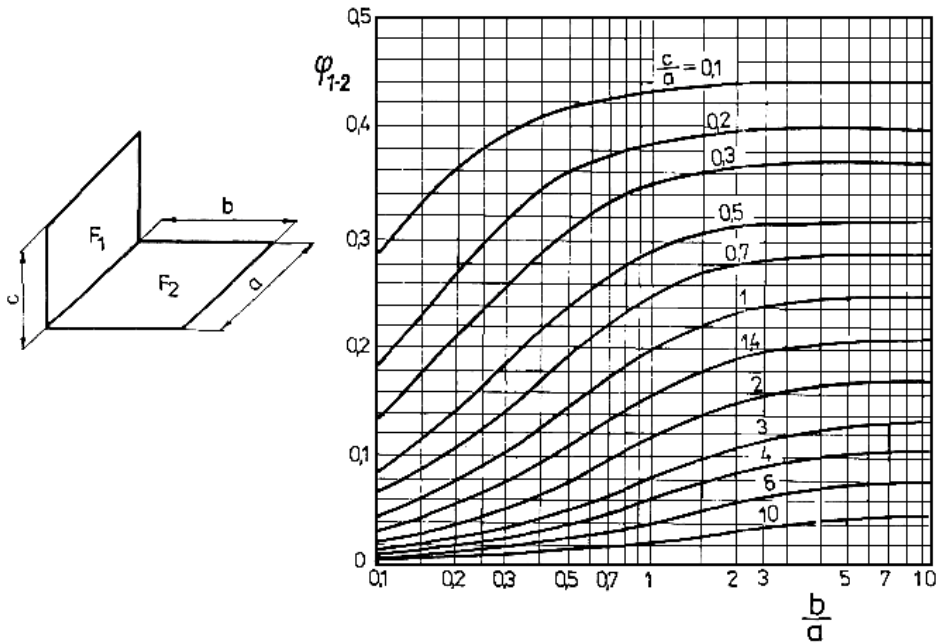
Korzystanie przy obliczeniach z wzoru (IV-47) jest utrudnione ze względu na konieczność rozwiązania występujących w nim całek. W prosty sposób jest to możliwe dla niewielu konfiguracji, dlatego dla wielu przypadków występujących w zagadnieniach praktycznych obliczono wartości funkcji  $\varphi_{1-2}$ , przedstawiając je najczęściej w postaci wykresów podawanych w literaturze (rys. IV. 12 i rys. IV. 13).

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{F} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dF_1 dF_2}{\pi s^2} \quad (\text{IV-48})$$

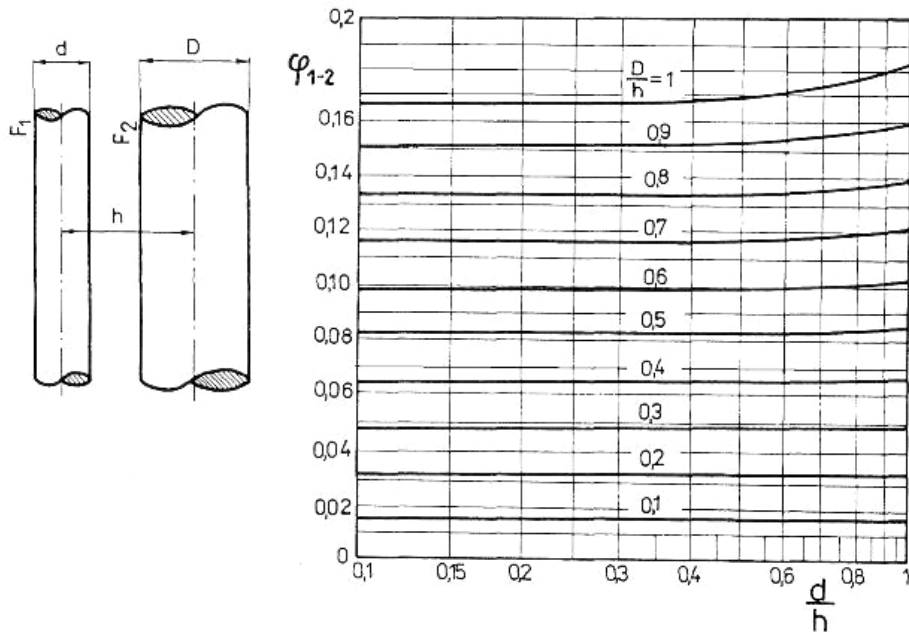
jest wielkością bezwymiarową i nosi nazwę stosunku konfiguracji lub współczynnika konfiguracji i podaje, jaka część pełnej emisji powierzchni  $F_1$  dociera do drugiej powierzchni  $F_2$ .

Strumień ciepła wymienianego oblicza się teraz z wzoru:

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi_{1-2} C_c F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (\text{IV-49})$$



Rys. IV. 12. Stosunek konfiguracji dla dwóch prostokątów o wspólnym boku



Rys. IV. 13. Stosunek konfiguracji dla dwóch nieskończenie długich walców

Przy wielu obliczeniach wygodnie jest korzystać z zasady wzajemności. Udowadnia się ją obliczając dwukrotnie stosunek konfiguracji, raz dla powierzchni  $F_1$  względem  $F_2$  ( $\varphi_{1-2}$ ) i drugi raz dla powierzchni  $F_2$  względem  $F_1$  ( $\varphi_{2-1}$ ).

W rezultacie otrzymuje się, że:

$$\varphi_{1-2}F_1 = \varphi_{2-1}F_2. \quad (\text{IV-50})$$

Zasada zamkniętości dotyczy wielu powierzchni promieniujących, zamykających pewną przestrzeń. Sumowanie wszystkich stosunków konfiguracji od danej powierzchni do wszystkich innych powierzchni odbijających daje w wyniku jedność:

$$\varphi_{1-1} + \varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} + \dots + \varphi_{1-n} = 1. \quad (\text{IV-51})$$

W zagadnieniach technicznych najczęściej spotykamy się z przypadkami wymiany ciepła przez promieniowanie wewnątrz przestrzeni zamkniętej. Daje się wtedy wyodrębnić powierzchnie, które tylko promieniują i inne, które odbierają promieniowanie i wreszcie takie, które tylko odbijają promieniowanie, a ich temperatury pozostają w równowadze.

Dla przypadku wymiany ciepła między dwiema doskonale czarnymi powierzchniami  $F_1$  i  $F_2$  w obecności powierzchni odbijających  $F_R$  można wprowadzić zależność określającą tzw. zmodyfikowany stosunek konfiguracji:

$$\varphi_{1-2}^* = \varphi_{1-2} + \frac{1}{\varphi_{1-R} + \frac{F_1}{F_2} \frac{1}{\varphi_{2-R}}}. \quad (\text{IV-52})$$

W odniesieniu do powierzchni szarych, spotyka się dwa sposoby postępowania. W pierwszym wykorzystuje się wprost zmodyfikowany stosunek konfiguracji i stosuje się równanie (IV-49) w postaci:

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi_{1-2}^* C_c F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (\text{IV-53})$$

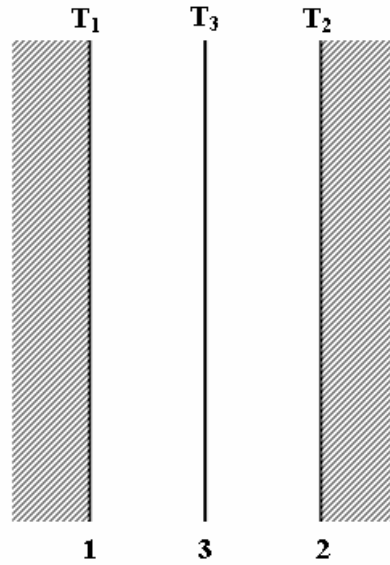
Drugi sposób, zaproponowany przez Hottela, chętnie stosowany przy obliczaniu pieców przemysłowych, polega na wykorzystaniu zależności:

$$\dot{Q}_{1-2} = \phi_{1-2} C_c F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{IV-54})$$

w której  $\phi$  jest stosunkiem konfiguracji powierzchni szarych:

$$\phi = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_{1-2}^*} + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (\text{IV-55})$$

Jednym ze sposobów ochrony przed nadmiernym promieniowaniem jest ekranowanie. Jeśli między dwie powierzchnie o temperaturach  $T_1$  i  $T_2$ , umieszczone w ośrodku przezroczystym, wstawimy przegrodę – rys IV. 14, to nagrzeje się ona do temperatury  $T_3$ .



Rys. IV. 14. Ekran między dwiema powierzchniami

Przyjmując równość emisyjności  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ , można napisać równania opisujące wymianę ciepła między powierzchniami:

$$\dot{q}_{1-3} = \varepsilon C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{IV-56})$$

oraz:

$$\dot{q}_{3-2} = \varepsilon C_c \left[ \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (\text{IV-57})$$

W procesie ustalonym obowiązuje  $\dot{q}_{1-3} = \dot{q}_{3-2}$ .

Porównując zatem równania (IV-56) i (IV-57) otrzymamy:

$$\left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right] = \left[ \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (\text{IV-58})$$

i

$$\left( \frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (\text{IV-59})$$

Podstawiając (IV-59) do (IV-56) uzyskamy:

$$\dot{q}_{1-3} = \frac{1}{2} \varepsilon C_c \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \dot{q}_{3-2}, \quad (\text{IV-60})$$

a więc:

$$\dot{q}_{1-3} = \dot{q}_{3-2} = \frac{1}{2} \dot{q}_{1-2}. \quad (\text{IV-61})$$

Znacznie większy efekt redukcji promieniowania można osiągnąć stosując ekran z materiału o mniejszym  $\varepsilon$ .

### IV. 3. PROMIENIOWANIE SŁONECZNE

Każde ciało wystawione na działanie promieni słonecznych pobiera tą drogą ciepło i równocześnie jego część wypromieniowuje w przestrzeń (mówi się, że wymienia ciepło z przestrzenią kosmiczną).

Ciepło promieniowania słonecznego pochłoniętego przez ciało opromieniowane określa zależność:

$$\dot{Q}_s = AC_c F \varphi d_a T_s^4, \quad (\text{IV-62})$$

w której:

- $A$  – zdolność absorpcyjna jaką wykazuje ciało w odniesieniu do promieni słonecznych, mogąca różnić się od wartości  $\varepsilon$ ,
- $F$  – powierzchnia opromieniowana,
- $C_c$  – stała promieniowania ciała doskonale czarnego,
- $\varphi$  – stosunek konfiguracji,
- $d_a$  – przezroczystość atmosfery,
- $T_s$  – temperatura słońca.

Do obliczeń praktycznych można przyjąć, że:

$$d_a = 0,82 \quad \text{i} \quad T_s = 6000 \text{ K.}$$

Równanie (IV-62) uprości się jeszcze bardziej, jeśli wprowadzimy efektywną gęstość strumienia energii zaabsorbowanej od słońca przez jednostkę powierzchni doskonale czarnej  $\dot{e}_s$ ,  $\text{W/m}^2$ :

$$\dot{e}_s = C_c \varphi d_a T_s^4. \quad (\text{IV-63})$$

Wtedy:

$$\dot{Q}_s = AF \dot{e}_s, \text{ W.} \quad (\text{IV-64})$$

Jednocześnie ciało wypromieniowuje w przestrzeń zamkniętą o bardzo dużej powierzchni ciepło:

$$\dot{Q}_z = \varepsilon C_c F' \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_o}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{IV-65})$$

gdzie:

$F'$  – powierzchnia oddająca ciepło, często różna od powierzchni pobierającej,

$\varepsilon$  – emisyjność ciała,

$T_o$  – tzw. efektywna temperatura przestrzeni otwartej,

$T_o = 230\text{K}$  ( $t_o = -43^\circ\text{C}$ ).

Ciepło wymienione wyniesie:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_s - \dot{Q}_z \quad (\text{IV-66})$$

i

$$\dot{Q} = AF\dot{e}_s - \varepsilon C_c F' \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_o}{100} \right)^4 \right], \text{ W.} \quad (\text{IV-67})$$

Kilka wartości  $A$  i  $\varepsilon_s$  podano w tablicach IV. 2 i IV. 3

**Tablica IV. 2**

Zdolność absorpcyjna promieni słonecznych dla różnych ciał

Materiał	A	Materiał	A
Asfalt	0,89	Papa	0,88
Cegła czerwona	0,70÷0,77	Stal ocynkowana nowa	0,66
Dachówka czerwona i brunatna	0,65÷0,74	Stal ocynkowana stara	0,89
Farba biała	0,12÷0,26	Papier biały	0,27
Farba czarna	0,97÷0,99	Stal polerowana	0,45
Glin polerowany	0,26	Stal utleniona, zardzewiała	0,74
Miedź polerowana	0,26		

**Tablica IV. 3**

Efektywna gęstość strumienia energii promieniowania słonecznego w pogodny dzień pod  $40^\circ$  szerokości geograficznej,  $\text{W/m}^2$

Godzina	Powierzchnia pionowa zwrócona na			Powierzchnia pozioma
	wschód	południe	zachód	
Szósta	227			47
Dziewiąta	611	81		675
Dwunasta		244		948
Piętnasta		81	611	675
Osiemnasta			547	47

#### IV. 4. PROMIENIOWANIE GAZÓW

Gazy i pary również mają zdolność emitowania bądź absorbowania energii promienistej, przy czym znaczenie praktyczne mają prawie wyłącznie gazy wieloatomowe, natomiast gazy jedno- i dwuatomowe mogą być traktowane jako przezroczyste (wyjątek stanowią CO i HCl). W obliczeniach inżynierskich uwzględnia się na ogół promieniowanie CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O i SO<sub>2</sub>.

Gazy nieprzezroczyste wykazują zdolność promieniowania tylko w określonych zakresach długości fal. Np. CO<sub>2</sub> promieniuje przy następujących długościach fal:

$$\lambda = 2,64 \div 2,84 \mu\text{m} ,$$

$$\lambda = 4,13 \div 4,47 \mu\text{m} ,$$

$$\lambda = 13 \div 17 \mu\text{m}$$

i dlatego w dokładnych obliczeniach należałoby to uwzględnić i istnieją takie metody, oparte na tzw. pasmowym modelu promieniowania gazów.

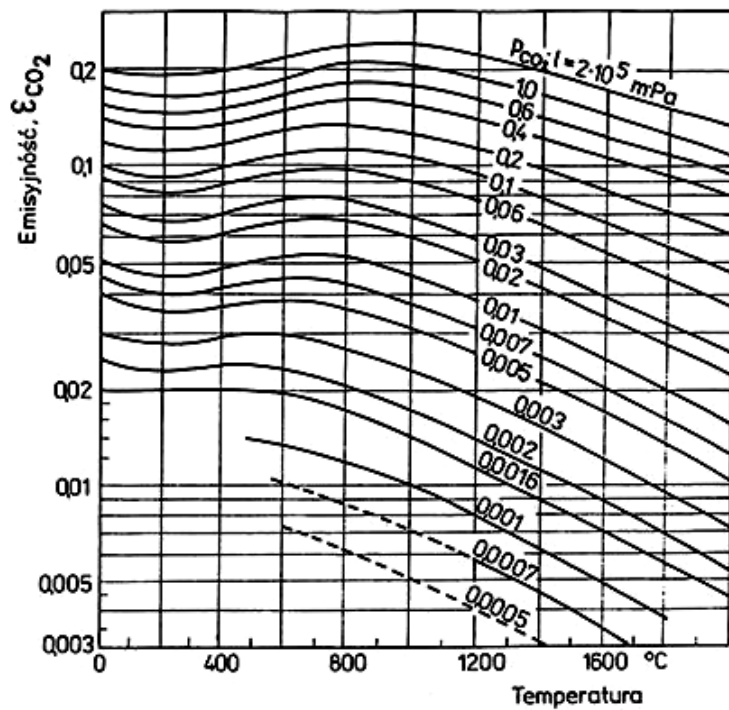
Wykazano, że gęstość strumienia energii promienistej gazu (gęstość emisji gazu) zależy od temperatury  $T$ , ciśnienia cząstkowego gazu  $p_i$  i grubości warstwy gazu, co można zapisać w postaci:

$$\dot{e}_{gi} = f(T, p_i, l) .$$

Warto zwrócić uwagę, że w przypadku gazów promieniuje (lub absorbuje) cała objętość gazu. Zależność promieniowania gazów od temperatury jest inna niż dla ciał stałych, np. dla CO<sub>2</sub> występuje wpływ temperatury w potęgze  $T^{3,5}$ , a dla H<sub>2</sub>O –  $T^3$ . Aby uprościć obliczenia, przyjmuje się, że również dla gazów obowiązuje prawo Stefana-Boltzmana:

$$\dot{e}_g = \varepsilon_g C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4 , \quad (\text{IV-68})$$

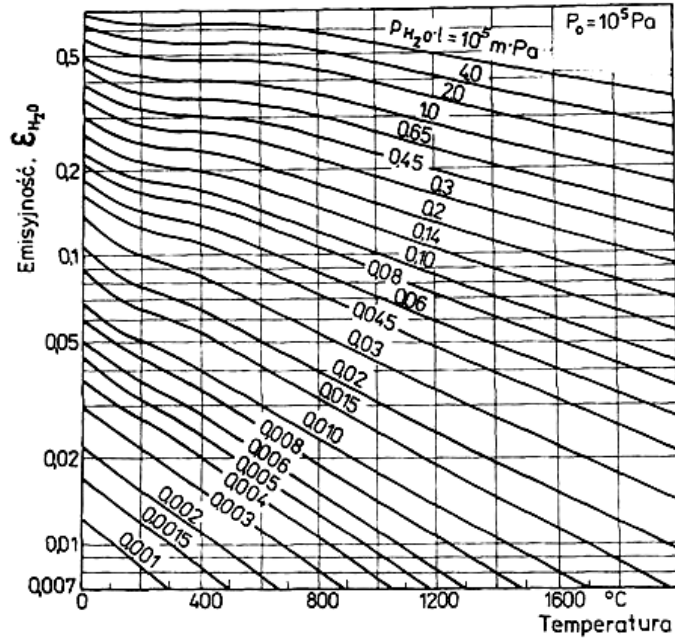
a wszystkie odstępstwa ujmuje się w emisyjności. Z tego względu obliczanie  $\varepsilon_g$  staje się skomplikowane i w praktyce inżynierskiej korzysta się z wykresów podających zależność emisyjności gazu od temperatury i iloczynu  $p \cdot l$  rys. (IV. 15) i rys (IV. 16).



$$l = 3,6 \frac{\text{objętość rozważanej bryły gazu}}{\text{pole powierzchni otaczającej tę bryłę}}$$
 przykładowo dla: kuli  $l = 0,6 d$ ,  
 sześciangu  $l = 0,6 a$ ,  
 szczeliny  $l = 1,8 h$

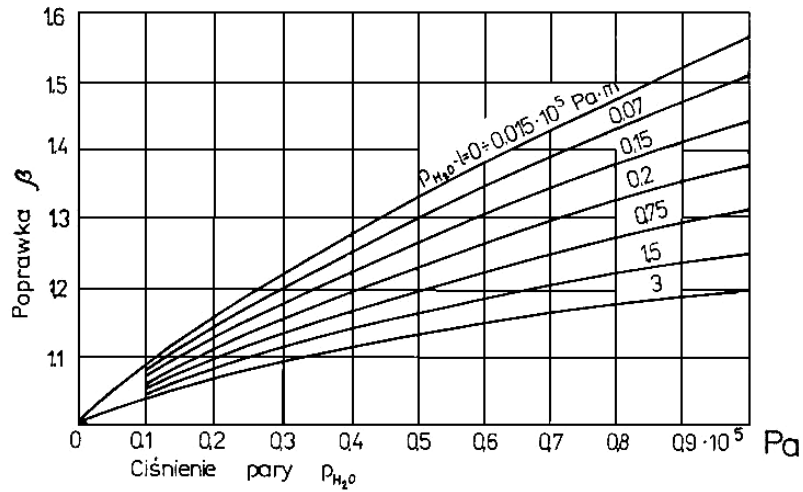
**Rys. IV. 15.** Emisyjność CO<sub>2</sub>





Rys. IV. 16. Emisyjność H<sub>2</sub>O

Przy nieco większych zawartościach pary wodnej należy uwzględnić poprawkę  $\beta$  (rys. IV. 17) i w obliczeniach przyjąć  $\beta \cdot \epsilon_g$ .

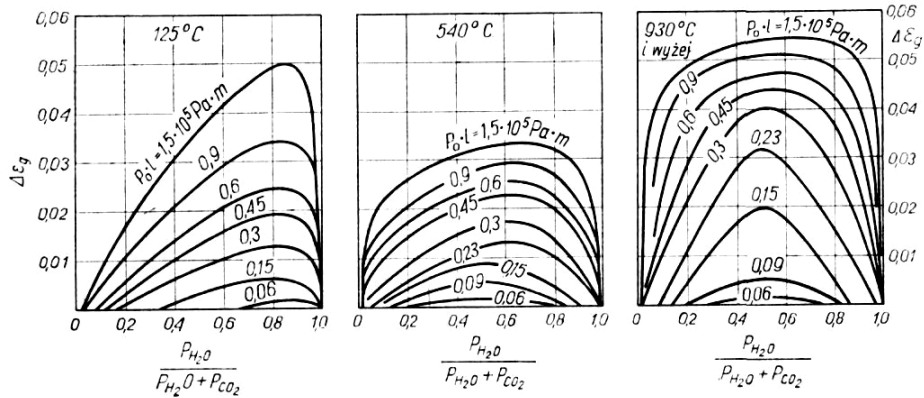


Rys. IV. 17. Poprawka emisyjności H<sub>2</sub>O

Jeśli promieniuje nie jeden gaz, np. tylko CO<sub>2</sub>, ale równocześnie H<sub>2</sub>O to wspólne promieniowanie będzie nieco mniejsze, bo każdy z tych gazów jest w pewnym stopniu „nieprzeźroczysty” dla drugiego i emisyjność takiej mieszaniny obliczymy jako:

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{CO_2} + \beta \varepsilon_{H_2O} - \Delta \varepsilon_g, \quad (IV-69)$$

gdzie  $\Delta \varepsilon_g$  jest poprawką uwzględniającą jednoczesną zawartość CO<sub>2</sub> i H<sub>2</sub>O (rys. IV.18).



Rys. IV. 18. Poprawka  $\Delta \varepsilon_g$  dla mieszanin zawierających CO<sub>2</sub> i H<sub>2</sub>O

Podane równanie (IV-68) podaje gęstość strumienia energii wypromieniowanej przez gaz w próżnię o temperaturze bliskiej zera bezwzględnego i nie uwzględnia obecności innego ciała biorącego udział w wymianie ciepła. Obliczenia dokładne dla takiego przypadku są bardzo złożone i do obliczeń praktycznych wymiany ciepła między gazem a ścianą S można skorzystać z następującego wzoru:

$$\dot{q}_{g-s} = \varepsilon'_s C_c \left[ \varepsilon_q \left( \frac{T_g}{100} \right)^4 - A_g \left( \frac{T_s}{100} \right)^4 \right], \quad \frac{W}{m^2}, \quad (IV-70)$$

gdzie:

- $T_g$  – temperatura gazu,
- $T_s$  – temperatura ściany,

$\varepsilon'_s$  – efektywna emisyjność ściany<sup>\*)</sup>, obliczona jako:

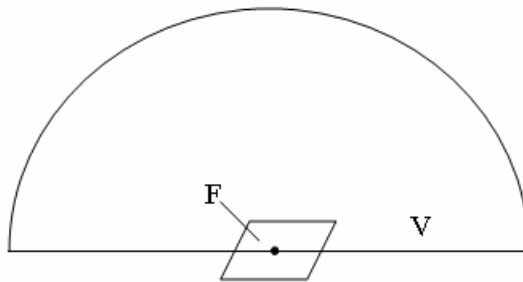
$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_s + 1}{2}, \quad (\text{IV-71})$$

$\varepsilon_s$  – emisyjność ściany,

$\varepsilon_q$  – emisyjność gazu w temperaturze gazu obliczona w podany poprzednio sposób (IV-69),

$A_g$  – absorpcyjność gazu w temperaturze ściany; w pierwszym przybliżeniu można przyjmować  $A_g = \varepsilon_g$ .

Przy obliczeniach emisyjności uwzględnialiśmy grubość warstwy  $l$ . Operowanie wprost grubością byłoby słuszne, gdyby drogi promieniowania były jednakowe, jak np. w przypadku promieniowania półkuli gazowej na element powierzchni umieszczony w środku tej półkuli.



Rys. IV. 19. Promieniowanie półkuli gazowej na element powierzchni

Dla innych przypadków używa się zastępczej grubości warstwy gazu  $l_e$  (podobnie jak w hydraulice średnicy zastępczej  $d_e$ ). Kilka wartości grubości zastępczej podano w tab. IV. 4.

Tablica IV. 4

Zastępcza grubość warstwy gazowej

Lp.	Kształt przestrzeni gazowej	$l_e$
1	Długi cylinder o średnicy $d$	0,9d
2	Sześcian o boku $a$	0,6a
3	Kula o średnicy $d$	0,6d
4	Warstwa gazu między dwiema nieskończonymi płytami o odstępnie $\delta$	1,8 $\delta$
5	Pęk długich rur w układzie heksagonalnym w odstępnie $x$ , $x = d$	2,8x
6	Pęk długich rur w układzie heksagonalnym w odstępnie $x$ , $x = 2d$	3,8x

<sup>\*)</sup> wielkość  $\varepsilon'_s$  uwzględnia fakt, że część promieniowania odbitego przez ścianę zostaje jej zwrócona na skutek nieprzeźroczystości warstwy gazu ( $\varepsilon'_s > \varepsilon_s$ )

Odrębnym i trudnym zagadnieniem jest promieniowanie świecącego płomienia. Powstałe podczas spalania gazy zawierają bowiem cząstki ciała stałego (pył + sadzę). Rozgrzane do wysokiej temperatury cząstki biorą udział w procesie radiacyjnej wymiany ciepła, co komplikuje niezmiernie obliczenia.

#### IV. 5. WYMIANA CIEPŁA PRZEZ PROMIENIOWANIE I RÓWNOCZESNE WNIKANIE

Jak podano w rozdziale III. 12 w przypadku wnikania ciepła przy przepływie gorących gazów należy posługiwać się zastępczym współczynnikiem wnikania  $\alpha_z$  obliczonym z zależności (I-9):

$$\alpha_z = \alpha_k + \alpha_r,$$

gdzie:  $\alpha_k$  jest współczynnikiem konwekcyjnym wyznaczonym z odpowiednich równań, natomiast  $\alpha_r$  oblicza się na ogół z zależności:

$$\alpha_r = \frac{\dot{q}_{CO_2} + \dot{q}_{H_2O}}{T_g - T_s} = \alpha_{r_{CO_2}} + \alpha_{r_{H_2O}}. \quad (IV-72)$$

Literatura podaje szereg zależności do obliczenia  $\dot{q}$ . Jedną z metod jest metoda Schacka, wg którego:

$$\dot{q}_{CO_2} = 10,4A(p_{CO_2}l)^{0,4} \left[ \left( \frac{T_g}{100} \right)^{3,2} - \left( \frac{T_s}{100} \right)^{3,2} \left( \frac{T_g}{T_s} \right)^{0,65} \right], \frac{W}{m^2} \quad (IV-73)$$

i

$$\dot{q}_{H_2O} = 1,16A(40 - 73p_{H_2O}l)(p_{H_2O}l)^{0,6} \left[ \left( \frac{T_g}{100} \right)^B - \left( \frac{T_s}{100} \right)^B \right], \frac{W}{m^2}, \quad (IV-74)$$

gdzie:

$$B = 2,32 + 1,37\sqrt[3]{p_{H_2O}l}, \quad (IV-75)$$

$A$  – absorpcyjność powierzchni,

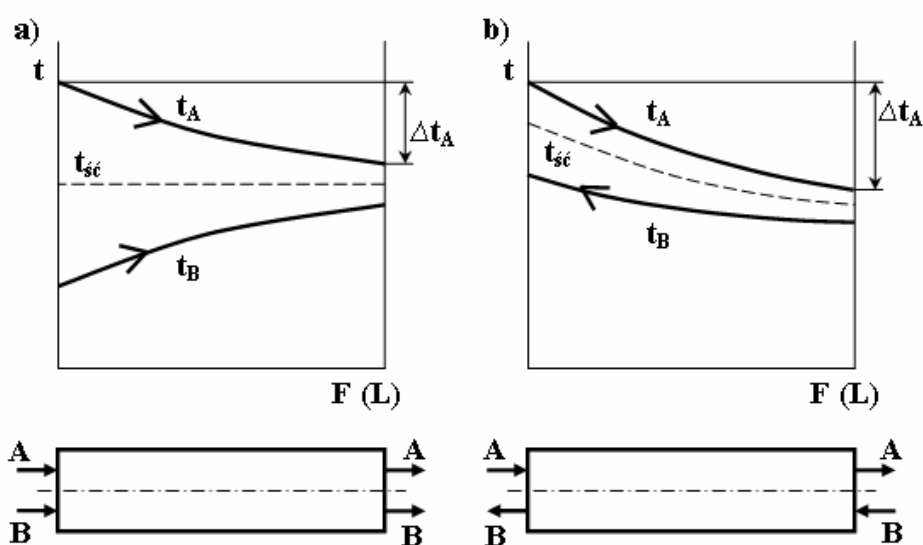
$T_g$  i  $T_s$  odpowiednio temperatury gazu i ściany.

Zawsze ważne pozostanie pytanie, kiedy należy uwzględnić wpływ promieniowania. Odpowiedź dadzą obliczenia, które wskażą, na ile istotny jest wpływ promieniowania (a więc jaka jest wartość  $\alpha_r$  w stosunku do  $\alpha_k$ ). Z przybliżeniem można przyjąć, że dla temperatury powyżej ok. 800°C można pomijać wpływ konwekcji, gdyż decyduje promieniowanie, a poniżej ok. 400°C wpływ promieniowania gazów staje się na tyle mały, że może być pomijany.

## V. OBLICZANIE PRZEPOŃOWYCH WYMIENNIKÓW CIEPŁA

Proces przekazywania ciepła przez jeden czynnik drugiemu, czyli ogrzewanie jednego czynnika przez drugi, jest powszechnie stosowany praktycznie we wszystkich dziedzinach techniki. Najczęściej jest on realizowany w przeponowych wymiennikach ciepła, zwanych również rekuperatorami.

Ze względu na kierunek przepływu czynników wymienniki dzielimy na wymienniki o przepływie równoległym (równoległoprądowe) lub mieszanym. Wymiennik równoległoprądowy może być wymiennikiem współprądowym lub przeciwpoprądowym rys. V. 1, na którym podano schematy przepływu czynników oraz zmianę ich temperatury wzdłuż wymiennika (względem powierzchni  $F$  lub długości  $L$ ).



Rys. V. 1. Rozkład temperatur i schematy przepływu: a) – wymiennik współprądowy, b) – wymiennik przeciwpoprądowy

W wymienniku przeciwpoprądowym można czynnik  $A$  bardziej ochłodzić (a czynnik  $B$  bardziej ogrzać) niż w wymienniku współprądowym, gdyż  $\Delta t_A$  przeciwpoprądu  $>$   $\Delta t_A$  współprądu.

Tak więc, w przeciwpoprądowym wymienniku ciepła wydajność cieplna (moc cieplna) będzie większa niż we współprądowym o tej samej powierzchni i przy tych samych temperaturach początkowych obu czynników.

Ponieważ zazwyczaj zależy nam na możliwie najlepszym wykorzystaniu ciepła, stosowanie przeciwprądu jest regułą. Zaletą współprądu jest natomiast bardziej wyrównany przebieg temperatury ściany i jej niższa temperatura maksymalna, co może mieć znaczenie ze względów konstrukcyjnych.

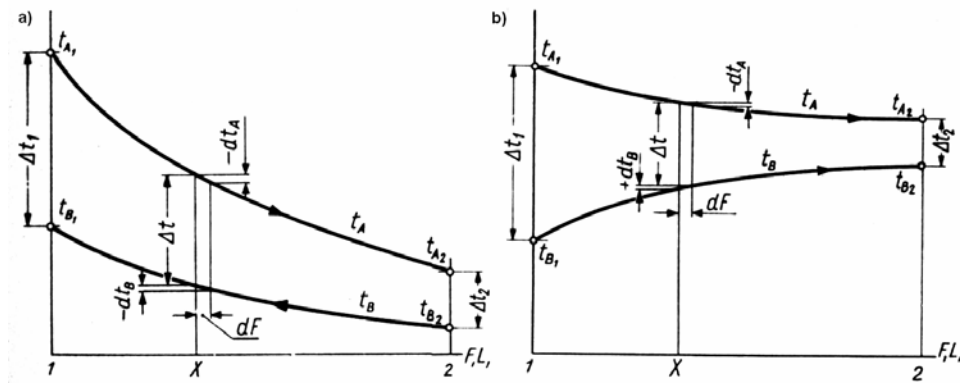
W wymienniku ciepła zachodzi proces przenikania ciepła, zgodnie z równaniem Pecleta

$$\dot{Q} = kF\Delta t. \quad (V-1)$$

Już z rys. V. 1 widać, że różnica temperatury między czynnikami A i B będzie, w ogólnym przypadku, zmieniać się wzdłuż wymiennika.

Ponieważ równanie (V-1) stanowi podstawę obliczenia powierzchni wymiany ciepła dla danego  $\dot{Q}$ , lub wyznaczenia wydajności (mocy) przy znanym  $F$ , należy w równaniu (V-1) posłużyć się pewną wartością średnią  $\Delta t_m$ , którą będziemy nazywać średnią różnicą temperatur<sup>\*)</sup>.

W celu określenia  $\Delta t_m$  należy rozpatrzyć proces zachodzący na elementarnej powierzchni  $dF$ , kiedy to  $\Delta t$  można traktować jako wielkość stałą (rys. V. 2).



Rys. V. 2. Temperatury czynników w wymienniku ciepła a) przeciwprądowym, b) współprądowym

Dla przeciwprądu napiszemy, że elementarny strumień ciepła oddanego przez czynnik A wynosi:

$$d\dot{Q} = -\dot{G}_A c_{pA} dt_A, \quad (V-2)$$

<sup>\*)</sup> Bywa także stosowany termin – średnia siła napędowa procesu przenikania ciepła.

a całkowity strumień ciepła:

$$\dot{Q} = -\dot{G}_A \int_1^2 c_{pA} dt_A \quad (\text{V-3})$$

Strumień ciepła przenikającego przez ścianę o powierzchni  $dF$ :

$$d\dot{Q} = k\Delta t dF, \quad (\text{V-4})$$

a całe wymienione ciepło:

$$\dot{Q} = F(k\Delta t)_m \quad (\text{V-5})$$

Zapis  $(k\Delta t)_m$  wskazuje, że w ogólnym przypadku zmieniać się może nie tylko różnica temperatury, ale również zmienna może być także wartość współczynnika przenikania ciepła  $k$ , np. z tytułu zmienności  $\alpha$ .

Z równania (V-4) otrzymamy:

$$dF = \frac{d\dot{Q}}{k\Delta t}, \quad (\text{V-6})$$

a po podstawieniu (V-2):

$$dF = \frac{-\dot{G}_A c_{pA} dt_A}{k\Delta t}. \quad (\text{V-7})$$

Po scałkowaniu:

$$F = -\dot{G}_A \int_1^2 \frac{c_{pA} dt_A}{k\Delta t}. \quad (\text{V-8})$$

Podstawiając teraz (V-8) do (V-5):

$$\dot{Q} = -\dot{G}_A \int_1^2 \frac{c_{pA} dt_A}{k\Delta t} (k\Delta t)_m. \quad (\text{V-9})$$

Porównując (V-3) i (V-9):

$$\dot{G}_A \int_1^2 c_{pA} dt_A = \dot{G}_A \int_1^2 \frac{c_{pA} dt_A}{k\Delta t} (k\Delta t)_m \quad (\text{V-10})$$

i:

$$(k\Delta t)_m = \frac{\int_1^2 c_{pA} dt_A}{\int_1^2 \frac{c_{pA} dt_A}{k\Delta t}}. \quad (\text{V-11})$$

Przyjmując stałość ciepła właściwego  $c_{pA} = \text{const}$ , otrzymamy:

$$(k\Delta t)_m = \frac{t_{A2} - t_{A1}}{\int_1^2 \frac{dt_A}{k\Delta t}}, \quad (\text{V-12})$$

a zakładając niezmienność wartości współczynnika przenikania ciepła,  $k = \text{const}$ :

$$\Delta t_m = \frac{t_{A2} - t_{A1}}{\int_1^2 \frac{dt_A}{\Delta t}}, \quad (\text{V-13})$$

przy czym równanie (V-5) przechodzi w:

$$\dot{Q} = kF\Delta t_m. \quad (\text{V-14})$$

Zależność (V-14) otrzymaliśmy, rozpatrując zmianę temperatury czynnika A. Gdyby podobne rozumowanie przeprowadzić dla czynnika B otrzymalibyśmy:

$$\Delta t_m = \frac{t_{B2} - t_{B1}}{\int_1^2 \frac{dt_B}{\Delta t}}, \quad (\text{V-15})$$

o wartości liczbowej równej wartości z wzoru (V-13).

Przeprowadzając obliczenia dla przypadku wymiennika współprądowego otrzymamy identyczne zależności na  $\Delta t_m$ .

Aby rozwiązać równanie (V-13) lub (V-15) należy znać zależność zmiany różnicy temperatury  $\Delta t$  wraz ze zmianą  $t_A$  bądź  $t_B$ , czyli:

$$\Delta t = f(t_A) \text{ lub } \Delta t = \varphi(t_B)$$

Najczęściej będzie można przyjąć, że są to zależności liniowe. Pomijając bowiem straty ciepła do otoczenia oraz przypadki równoczesnej wymiany ciepła wyraźnego i ciepła utajonego przemiany fazowej lub ciepła reakcji chemicznej, bilans cieplny wymiennika, dla stałych wartości  $c_{pA}$  i  $c_{pB}$ , przyjmuje postać:

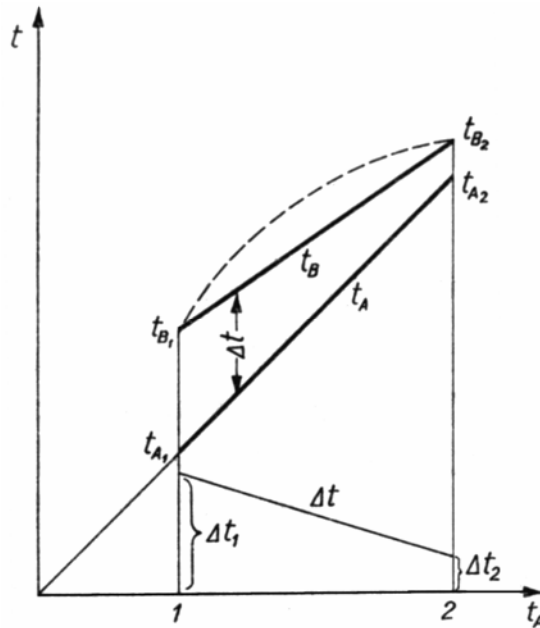
$$\dot{G}_A c_{pA} (t_A - t_{A1}) = \pm \dot{G}_B c_{pB} (t_B - t_{B1})^*. \quad (\text{V-16})$$

W takim przypadku, na wykresie w układzie  $t-t_B$  lub  $t-t_A$ , przebieg temperatur czynników między przekrojami 1 i 2 przedstawiają linie proste (rys. V. 3) i również  $\Delta t$  będzie zmieniać się liniowo wraz ze zmianą temperatury czynnika.

---

\*) „±” w równaniu (V-16) powoduje, że równanie to będzie prawdziwe zarówno dla współprądu jak i przeciwprądu i to niezależnie od relacji temperatur w przekrojach 1 i 2





Rys. V. 3. Przebieg temperatur czynników w układzie  $t-t_B$

Wykresu rys. V. 3 nie należy mylić z wykresem np. V. 2, zbudowanym w układzie  $t-F(L)$ .

Tę liniową zależność różnicy temperatury od jednej z temperatur można zapisać jako:

$$\Delta t = at_A + b \quad (V-17)$$

i podstawiając (V-17) do (V-13) otrzymamy:

$$\Delta t_m = \frac{t_{A2} - t_{A1}}{\int_1^2 \frac{dt_A}{at_A + b}} = \frac{t_{A2} - t_{A1}}{\frac{1}{a} \ln \frac{at_{A2} + b}{at_{A1} + b}} = \frac{at_{A2} - at_{A1}}{\ln \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}}, \quad (V-18)$$

a dodając i odejmując w liczniku  $b$ , otrzymamy:

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\ln \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}}, \quad (V-19)$$

a więc średnią logarytmiczną. Zależność (V-19) jest słuszna zarówno dla przeciwprądu, jak i współprądu. Czasem, aby uniknąć trudności obliczeniowych, równanie (V-19) zapisuje się w postaci:

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_{wieksza} - \Delta t_{mniejsza}}{\ln \frac{\Delta t_{wieksza}}{\Delta t_{mniejsza}}}. \quad (V-20)$$

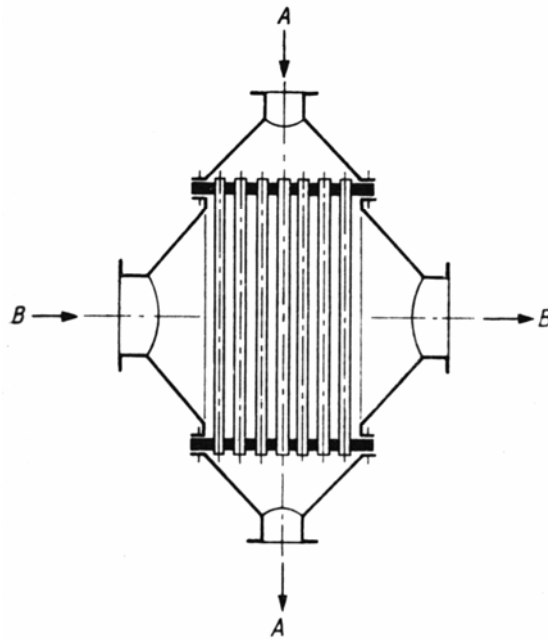
Istnieją jednak przypadki, gdy zależność różnicy temperatury od temperatury czynnika nie jest liniowa. Może to być wywołane np. wykraplaniem się cieczy przy ochładzaniu mieszaniny pary i gazu lub reakcją chemiczną z wyraźnym efektem cieplnym. Wtedy wystąpi deformacja liniowego przebiegu temperatury (linia przerywana na rys. V. 3) i należy skorzystać z równania (V-13), obliczając występującą w nim całkę metodami numerycznymi lub graficznie. Można także, w takim przypadku, podzielić wymiennik na kilka części i dla każdej z nich obliczyć średnią różnicę temperatury jako średnią logarytmiczną, wykonać dla każdej części bilans cieplny, a następnie dodać obliczone częściowe powierzchnie wymiany ciepła.

Gdy spodziewana jest wyraźna zmienność  $k$  (np. podczas odparowania przy przepływie, gdy silnie zmienia się  $\alpha$  po stronie wrzącej cieczy), należy skorzystać z równania (V-12).

Ogólnie można jednak stwierdzić, że w zdecydowanej większości przypadków możliwe jest stosowanie średniej logarytmicznej jako średniej różnicy temperatur dla całego wymiennika. Przy obliczaniu średniej logarytmicznej warto pamiętać, że jeśli  $\Delta t_2$  różni się mniej niż dwukrotnie od  $\Delta t_1$ , to średnią logarytmiczną można zastąpić średnią arytmetyczną.

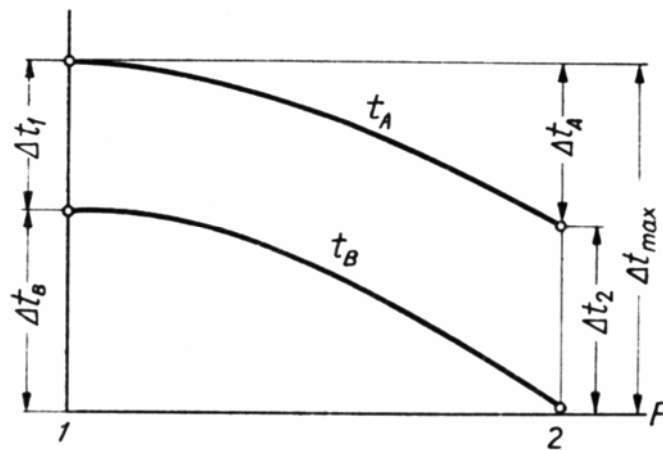
Oprócz wymienników równoległoprądowych stosowane bywają inne rozwiązania.

Typowym przykładem jest wymiennik o przepływie krzyżowym rys. V. 4.



Rys. V. 4. Wymiennik krzyżowoprądowy

W takim przypadku średnią różnicę temperatur obliczamy jako średnią logarymiczną dla zastępczego układu przeciwpłdowego (rys. V-5).

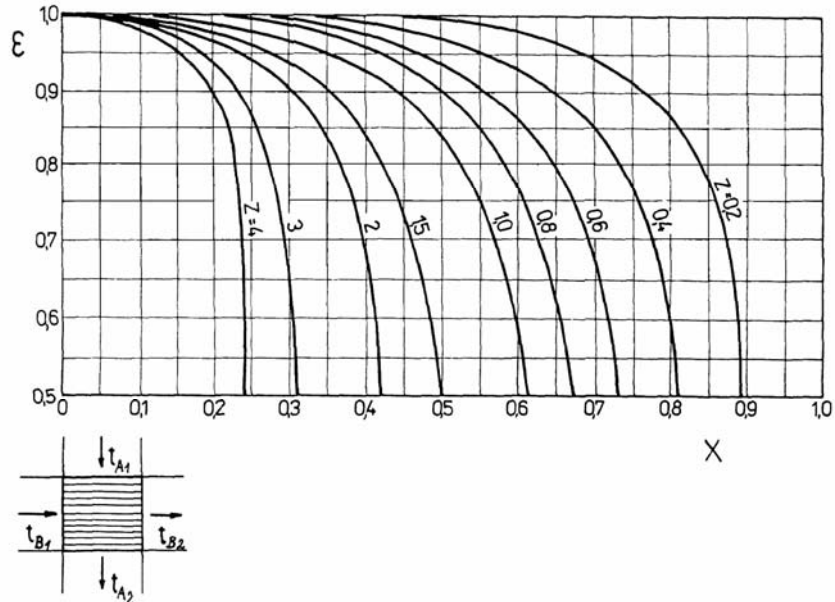


Rys. V. 5. Przebieg temperatur dla zastępczego układu wymiennika krzyżowoprądowego

a w równaniu podstawowym (V-14) uwzględniamy poprawkę  $\varepsilon$ :

$$\dot{Q} = kF\varepsilon\Delta t_m, \quad (\text{V-21})$$

odczytaną z odpowiednich wykresów (rys. V. 6).

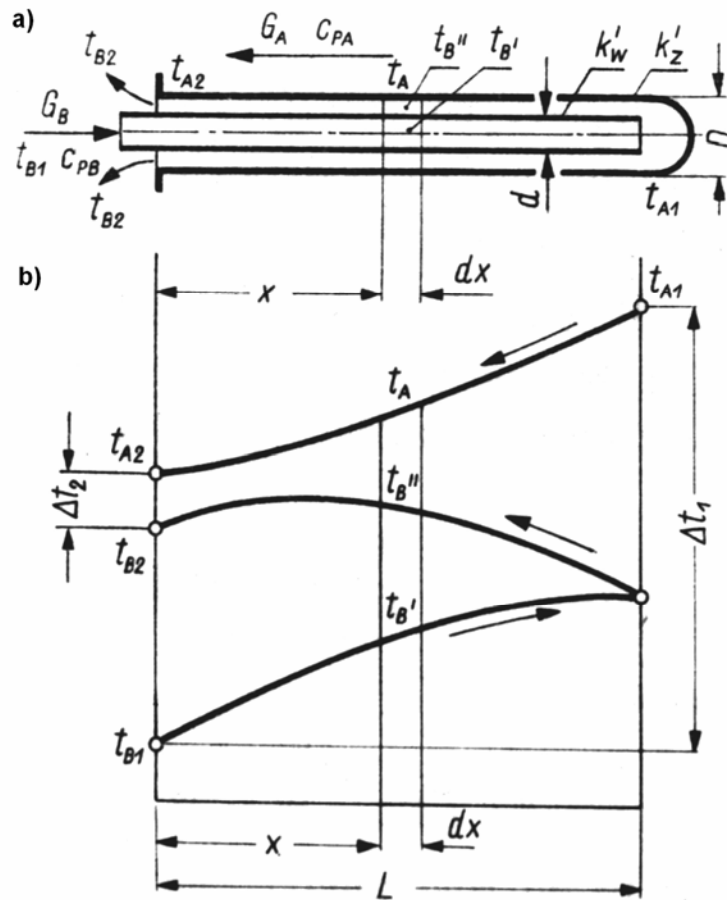


Rys. V. 6. Poprawka  $\varepsilon = f(X, Z)$  dla wymiennika krzyżowoprądowego

$$X = \frac{\Delta t_B}{\Delta t_{\max}}; \quad Z = \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \quad (\text{przy oznaczeniach wg rys. V. 5})$$

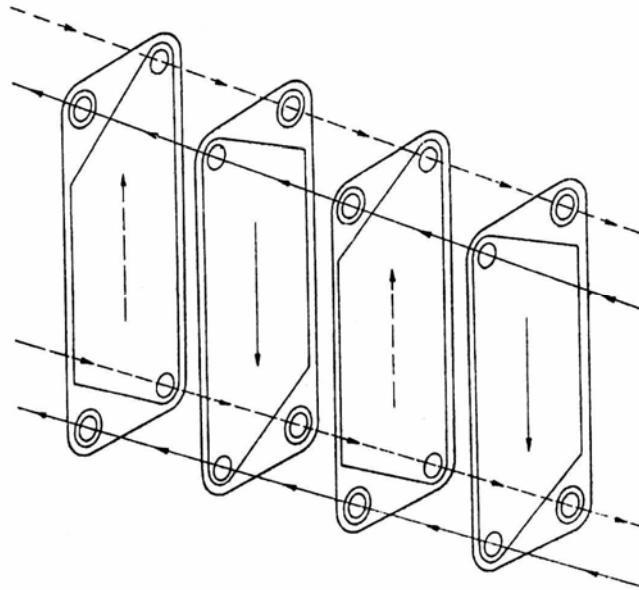
Dla innych układów przepływowych odpowiednie poprawki można znaleźć w literaturze („Tablice do obliczeń procesowych”).

Dużo bardziej skomplikowanym przypadkiem są tzw. wymienniki wieloczynnikowe. Przykładami mogą być wymienniki z rurami Fielda (rys. V.7) i wymienniki płytowe (rys. V.8). W obu przypadkach czynnik kontaktuje się przez ściany z czynnikami o różnych temperaturach, co bardzo utrudnia obliczenia.



Rys. V. 7. Element Fielda a) schemat przepływu, b) rozkład temperatur

Np. w elementach Fielda, w przekroju  $x$ , czynnik  $B$  o temperaturze  $t_B''$  kontaktuje się z jednej strony z czynnikiem  $B$  o temperaturze  $t_B'$  a z drugiej z czynnikiem  $A$  o temperaturze  $t_A$ .



Rys. V. 8. Schemat wymiennika płytowego

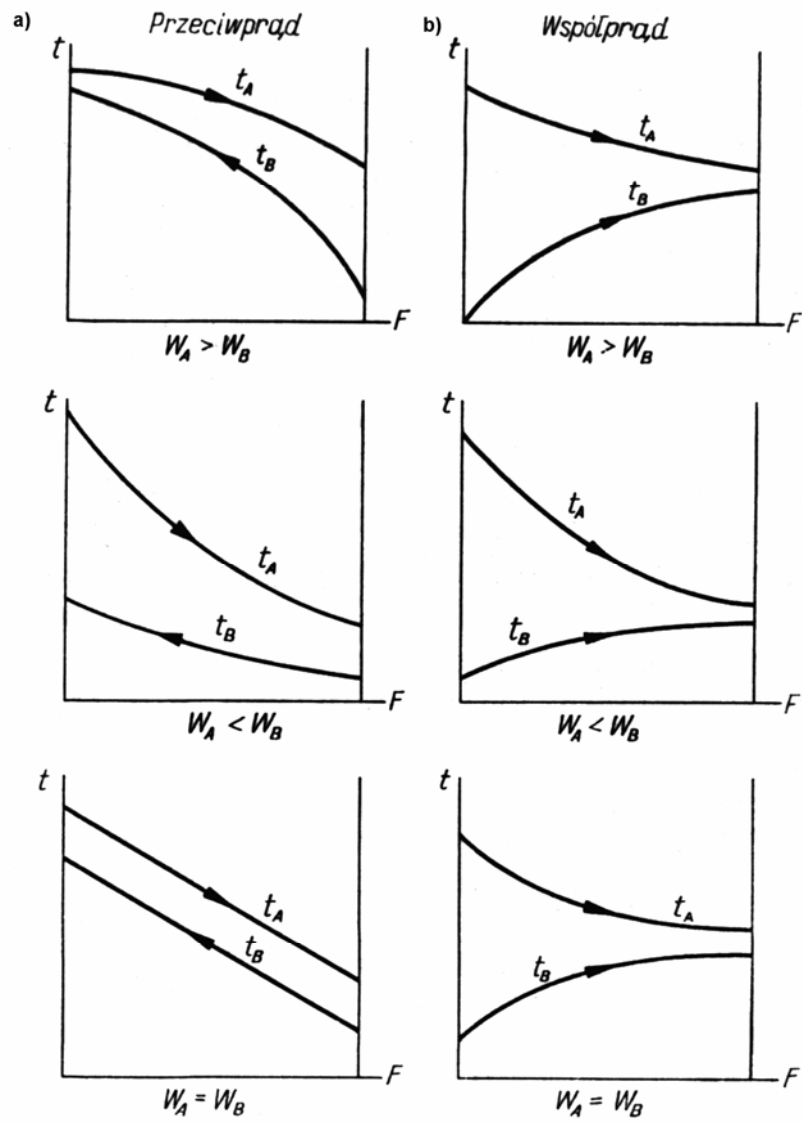
Przebieg zmian temperatury czynników wzdłuż wymiennika zależy od pojemności cieplnej zwanej również pojemnością strumienia i oznaczanej  $W$ .<sup>\*)</sup>

$$W = \dot{G}_i c_{pi}, \frac{W}{K} \quad (V-22)$$

Przebiegi zależności  $t = f(F)$  dla wymiennika przeciuprądowego i współprądowego, w zależności od relacji pojemności cieplnych czynników, pokazano na rys. V. 9.

<sup>\*)</sup> Pojemność cieplna bywa nazywana także równoważnikiem wodnym. W tradycyjnym układzie jednostek ciepło właściwe wody wynosiło  $c_p = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}}$  i wtedy pojemność

cieplna wody była liczbowo równa strumieniowi wody i miała wymiar  $\left[ \frac{\text{kcal}}{\text{godz} \cdot ^\circ \text{C}} \right]$ .



Rys. V. 9. Przebiegi temperatury czynników przy różnych relacjach pojemności cieplnych: a) wymiennik przeciuprądowy, b) wymiennik współprądowy

Można wykazać, że dla wymiennika przeciwpądowego obowiązuje:

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \exp \left[ -kF_2 \left( \frac{1}{W_A} - \frac{1}{W_B} \right) \right], \quad (\text{V-23})$$

a w dowolnym przekroju x:

$$\Delta t_x = \Delta t_1 \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_A} - \frac{1}{W_B} \right) \right]. \quad (\text{V-24})$$

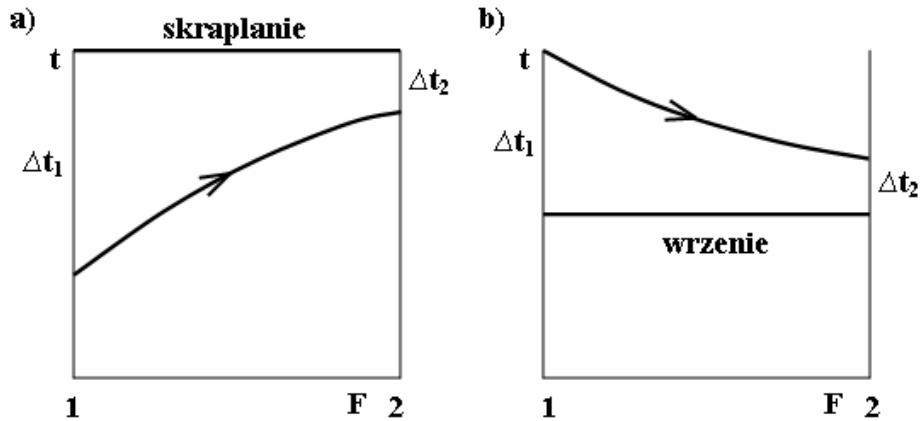
Natomiast dla wymiennika współpądowego:

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \exp \left[ -kF_2 \left( \frac{1}{W_A} + \frac{1}{W_B} \right) \right], \quad (\text{V-25})$$

a w dowolnym przekroju x:

$$\Delta t_x = \Delta t_1 \exp \left[ -kF_x \left( \frac{1}{W_A} + \frac{1}{W_B} \right) \right]. \quad (\text{V-26})$$

W przypadku niezmienności temperatury jednego z czynników, np. podczas wrzenia lub skraplania, przebiegi temperatur będą przedstawiać się jak na rys. V. 10.



**Rys. V. 10.** Rozkład temperatury czynników: a) w skraplaczu, b) w parowaczu



Obliczenie średniej logarytmicznej różnicy temperatur w tych przypadkach wykaże, że zarówno dla przeciwrądu jak i dla współrądu otrzymamy takie same wartości. Na tej podstawie w wielu podręcznikach można znaleźć stwierdzenia, że nie ma znaczenia, jaki zostanie zastosowany schemat przepływu czynników. Tymczasem należy pamiętać, że przy skraplaniu w przepływie i przy wrzeniu w przepływie mamy do czynienia z przepływami dwufazowymi i na ogół z bardzo dużą zmiennością wartości współczynnika przenikania ciepła, tak więc w obliczeniach należy posługiwać się wyrażeniem  $(k\Delta t)_m$ . Charakter zmian  $k$  wskazuje w tych przypadkach, że często, jakkolwiek nie zawsze, układ współrądowy jest korzystniejszy.

Zarówno ze względu na dobór materiału konstrukcyjnego przegrody jak również na właściwości czynnika, które mogą ulec niekorzystnej zmianie (destrukcja termiczna) podczas kontaktu ze zbyt gorącą powierzchnią, bardzo często konieczne jest wyznaczenie temperatury ściany (przegrody) oddzielającej czynniki.

Temperaturę tę znajdziemy rozwiązując układ równań:

$$\dot{Q} = \alpha_A F_A (t_A - t_{\acute{s}cA}), \quad (\text{V-27})$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} F (t_{\acute{s}cA} - t_{\acute{s}cB}), \quad (\text{V-28})$$

$$\dot{Q} = \alpha_B F_B (t_{\acute{s}cB} - t_B). \quad (\text{V-29})$$

Często, gdy opór przewodzenia ściany jest mały, można przyjąć, że  $t_{\acute{s}cA} \approx t_{\acute{s}cB}$ . Zakładając także, że  $F_A \approx F_B$ , otrzymamy:

$$t_{\acute{s}c} = \frac{\alpha_A t_A + \alpha_B t_B}{\alpha_A + \alpha_B}. \quad (\text{V-30})$$

## V. 1. TOK OBLICZANIA PRZEPONOWEGO WYMIENNIKA CIEPŁA

Dane wyjściowe do obliczenia wymiennika ciepła mogą być sformułowane w różny sposób. Często podany jest strumień jednego z czynników, jego temperatura początkowa i końcowa oraz informacje o drugim czynniku (np. chłodzenie wodą, chłodzenie powietrzem, ogrzewanie parą o określonych parametrach itp). Mogą też być podane strumienie obu czynników, temperatura początkowa i końcowa jednego z nich i jedna z temperatur drugiego. Przy obliczeniach trzeba w pierwszej kolejności ustalić strumień obu czynników i wszystkie temperatury.

Obliczanie wymiennika ciepła sprowadza się do rozwiązania równania (V-14)

$$\dot{Q} = kF\Delta t_m,$$

które w przypadku wyznaczania potrzebnej powierzchni wymiany ciepła, przekształca się do postaci:

$$F = \frac{\dot{Q}}{k\Delta t_m}. \quad (\text{V-31})$$

Strumień ciepła wymianianego  $\dot{Q}$  wyznacza się z bilansu:

$$\dot{Q} = \dot{G}_A c_{pA} \Big|_{t_{A1}}^{t_{A2}} (t_{A2} - t_{A1}) = \pm \dot{G}_B c_{pB} \Big|_{t_{B1}}^{t_{B2}} (t_{B2} - t_{B1}). \quad (\text{V-32})$$

Straty ciepła do otoczenia często są tak małe, że mogą być pominięte w obliczeniach, jeśli tak nie jest, trzeba uwzględnić je w bilansie. Np. jeśli straty występują po stronie czynnika cieplejszego A, to napiszemy:

$$\dot{Q} = \dot{G}_A c_{pA} \Big|_{t_{A1}}^{t_{A2}} (t_{A2} - t_{A1}) - \dot{Q}_{str} = \dot{G}_B c_{pB} \Big|_{t_{B1}}^{t_{B2}} (t_{B2} - t_{B1}). \quad (\text{V-33})$$

Jeśli jeden z czynników podlega przemianie fazowej, to bilans przyjmie postać:

$$\dot{Q} = \dot{G}_A r = \dot{G}_B c_{pB} \Big|_{t_{B1}}^{t_{B2}} (t_{B2} - t_{B1}). \quad (\text{V-34})$$

Bilans cieplny nie tylko daje nam odpowiedź co do wielkości strumienia wymianianego ciepła  $\dot{Q}$ , ale pozwala również wyliczyć brakujące dane odnośnie do strumieni i temperatur.

Po ustaleniu kierunku przepływu czynników (przeciwprąd lub współprąd), możliwe będzie narysowanie spodziewanego przebiegu temperatur i obliczenie średniej różnicy temperatur  $\Delta t_m$ .

W tym momencie dobrze jest oszacować spodziewaną wartość współczynnika przenikania ciepła  $k$  – pomocne tu mogą być informacje podawane w literaturze (tab. V. 1) – i obliczyć wstępnie, na podstawie równania (V-31) powierzchnię wymiany ciepła. Takie obliczenie, jakkolwiek bardzo przybliżone, pozwoli zorientować się, jakiej wielkości powierzchni wymiany ciepła można spodziewać się w wyniku obliczeń dokładnych, (czy będzie to wymiennik o powierzchni kilku, kilkudziesięciu czy kilkuset m<sup>2</sup>).

**Tabela V. 1**  
Współczynnik przenikania ciepła dla różnych przypadków,  $W/(m^2 \cdot K)$

Wymiana ciepła pomiędzy	Typowy płyn	Rodzaj konwekcji		Przykład zastosowania
		naturalna	wymuszona	
ciecz - ciecz	woda - olej	140÷340 30÷60	850÷1700 110÷280	wymienniki ciepła typu ciecz-ciecz
ciecz - gaz (ciśn. atm.)	woda - powietrze	6÷17	12÷60	radiatory
ciecz wrząca - - ciecz	woda - olej	110÷340 28÷110	80÷850 140÷340	chłodnice
gaz (ciśn. atm.) - - ciecz	powietrze - woda	6÷17	12÷57	chłodnice
gaz (ciśn. atm.) - - gaz	spaliny - para	3÷12	12÷34	przegrzewacze pary
gaz (ciśn. atm.) - - gaz	spaliny - powietrze	3÷10	15÷30	regeneratory ciepła
gaz (ciśn. atm.) - - wrząca ciecz	spaliny - woda	6÷7	12÷57	kotły parowe
kondensująca się para - ciecz	para wodna - ciecz para - olej para organiczna - - woda mieszanina paro- gazowa	280÷1100 57÷170 230÷450	850÷4500 110÷340 340÷1700 85÷1700	przegrzewacze cieczy i kondensatory
kondensująca się para - wrząca ciecz	para - woda para organiczna - - woda	450÷1700 280÷850	280÷220	wyparki

Teraz, projektując, należy dokonać szeregu wyborów dotyczących ustaleń: typu aparatu (płaszczowo-rurowy, płytowy, rura w rurze itd.), który czynnik skierować do której przestrzeni, dobrać niektóre wymiary np. średnicę rur i zakładając prędkość przepływu obliczyć liczbę rur, obliczyć przekrój przepływu przez przestrzeń międzyrurową. W tym miejscu pojawi się często kwestia doboru przegród i ich wymiarów. W tej części obliczeń konieczne będzie korzystanie z odpowiednich norm dotyczących np. średnic rur, średnic dennic, rozmieszczenia rur w dnach sitowych itd. Po ustaleniu tych wielkości można przystąpić do obliczenia wartości współczynnika wnikania ciepła dla obu czynników, korzystając najczęściej z odpowiednio dobranych dla danego przypadku równań Nusselta.

Obliczanie przepływowych wymienników ciepła

---

Mając obie wartości  $\alpha$  oraz znając materiał i grubość przegrody, oblicza się współczynnik przenikania ciepła z równania:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_B} + \sum \frac{1}{\alpha_0}, \quad (\text{V-35})$$

w którym  $\sum \frac{1}{\alpha_0}$  jest, odczytaną z odpowiednich tablic podawanych w literaturze (tab. V. 2), sumą oporów cieplnych osadów po obu stronach przegrody.

**Tabela V. 2**

Obustronny opór cieplny osadu  $\left[ \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \right]$

Przepływ ciepła pomiędzy płynami	Obustronny opór cieplny
aceton – woda (chłodnica kompresora)	0,00129
aceton – kwas octowy	0,00069
amoniak – woda (chłodnica kompresora)	0,00129
amoniak wrzący – solanka	0,00033
benzen – toluen	0,00033
butan – para wodna	0,00069 ÷ 0,00103
butan – woda (skraplacz)	0,00052
CO <sub>2</sub> +H <sub>2</sub> O – woda (skraplacz)	0,00086
CS <sub>2</sub> – woda (skraplacz)	0,00052
nafta – para wodna	0,00043
nafta – ropa naftowa	0,00052
n-Propanol – woda (skraplacz)	0,00052
olej gazowy – woda	0,00086
olej lekki – nafta	0,00086
olej – olej	0,00069
olej – ropa naftowa	0,00103
olej – woda	0,00069
roztwór cukru – para wodna	0,00060
roztwór K <sub>3</sub> PO <sub>4</sub> (30%) – woda	0,00033
roztwór sody kaustycznej – woda	0,00033
SO <sub>2</sub> – woda	0,00172
spaliny – woda	0,00086
powietrze – spaliny	0,00075
tlen – woda	0,00052
woda destylowana – woda	0,00033

W równaniu (V-35) przyjęto dla uproszczenia, że przewodzenie ciepła odbywa się przez ścianę płaską. W przypadku rur o małej grubości ścianki i wykonanych z materiału o dobrym przewodnictwie cieplnym, takie uproszczenie jest dopuszczalne.

Obliczoną z równania (V-35) wartość  $k$  wykorzystuje się we wzorze (V-31) i oblicza powierzchnię wymiany ciepła. Trzeba pamiętać, że w przypadku wymiennika płaszczowo-rurowego, po poprzednim założeniu rodzaju i liczby rur, obliczenie powierzchni sprowadzi się do wyznaczenia długości rur.

Teraz należy dodać pewną rezerwę powierzchni, wynika to z niedokładności równań wykorzystywanych przy obliczeniach, a także z przyjmowanych założeń upraszczających. Rezerwa ta z reguły wynosi kilkanaście procent, czasem więcej, a nawet i 30%.

Najczęściej okazuje się, że zaprojektowany wymiennik odbiega swymi wymiarami od rozwiązań zalecanych. Np. długość rur wypadła inna niż długości handlowe, lub wymiennik jest bardzo długi przy małej średnicy. Należy zatem zmienić odpowiednie, przyjęte wcześniej założenia i powtórzyć obliczenia. W przypadku wymienników płaszczowo-rurowych często okaże się, że konieczne jest zastosowanie aparatu wielobiegowego. Taka zmiana wywoła nie tylko konieczność obliczenia na nowo wartości współczynników wnikania ciepła, a co za tym idzie i  $k$ , ale i uwzględnienia poprawki  $\varepsilon$  przy  $\Delta t_m$ .

Kolejnym etapem jest wykonanie obliczeń sprawdzających kompensację wydłużeń cieplnych. Trzeba również obliczyć opory przepływu obu czynników oraz grubość izolacji cieplnej.

Zaproponowany tok postępowania dotyczył projektowania aparatu, tzn. obliczenia powierzchni wymiany ciepła. Innym sposobem, coraz częściej stosowanym, jest wybór odpowiedniego dla danych warunków aparatu spośród proponowanych przez producentów rozwiązań. W takim przypadku, dla założonej powierzchni oraz danych strumieni i temperatur sprawdza się strumień wymianianego ciepła. Przy takim postępowaniu często okazuje się, że korzystne jest połączenie (szeregowe, równoległe lub szeregowo-równoległe) kilku wymienników w jedną baterię. O celowości konkretnego rozwiązania zawsze powinien decydować rachunek kosztów.

## V. 2. OBLICZANIE WYMIENNIKÓW METODĄ LICZBY JEDNOSTEK WYMIANY CIEPŁA (NTU)

W krajach anglosaskich popularna jest metoda obliczania wymienników ciepła w oparciu o pojęcie sprawności (efektywności) cieplnej wymiennika i liczby jednostek wymiany ciepła. Metoda ta jest szczególnie użyteczna przy

porównywaniu pracy różnych aparatów oraz przy obliczaniu wymienników o prądzie mieszanym.

Jeśli znany jest strumień wymienianego ciepła i powierzchnia, a poszukuje się odpowiednich temperatur czynników, to korzystanie z równania (V-14) jest utrudnione ze względu na konieczność stosowania iteracji (funkcja logarytmiczna  $\Delta t_m$ ).

Trudność tę można ominąć posługując się koncepcją liczby jednostek wymiany ciepła NTU<sup>\*)</sup>. Porównując równania (V-14) i (V-16), z wykorzystaniem (V-22) można napisać:

$$\dot{Q} = W_A (t_{A2} - t_{A1}) = Fk\Delta t_m, \quad (\text{V-36})$$

a po podzieleniu otrzymać postać bezwymiarową:

$$\frac{kF}{W_A} = \frac{t_{A2} - t_{A1}}{\Delta t_m}. \quad (\text{V-37})$$

Liczba jednostek wymiany ciepła określona jest jako:

$$NTU = \frac{kF}{W_{\min}}, \quad (\text{V-38})$$

gdzie:

$W_{\min}$  oznacza mniejszą z dwóch pojemności cieplnych ( $W_A$  i  $W_B$ ).

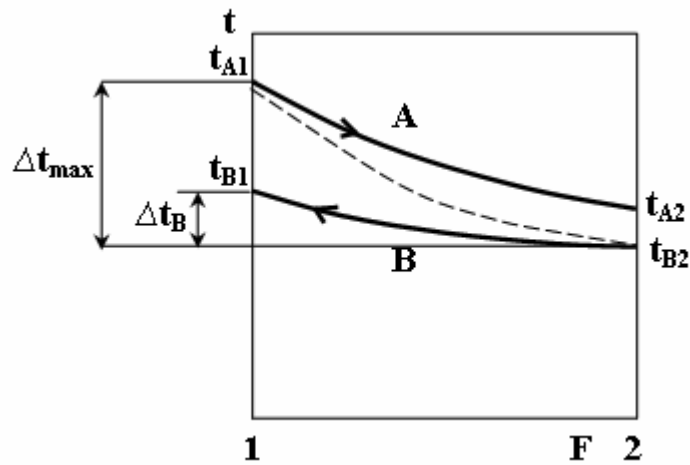
Efektywność cieplną (sprawność) definiuje się jako stosunek aktualnej mocy cieplnej  $\dot{Q}$  do maksymalnej możliwej mocy cieplnej  $\dot{Q}_{\max}$ :

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}}. \quad (\text{V-39})$$

Przez  $\dot{Q}_{\max}$  rozumie się strumień ciepła wymienianego w przeciwprądowym wymienniku ciepła przy  $F = \infty$ , a więc przy osiągnięciu przez czynnik chłodzony temperatury początkowej czynnika chłodzącego (linia przerywana na rys V. 11).

---

<sup>\*)</sup> NTU – Number of heat transfer unit. Proponowany jest również polski termin LJP (liczba jednostek przenikania), który nie zyskał większej popularności.



Rys. V. 11. Ilustracja przebiegu temperatur w wymienniku

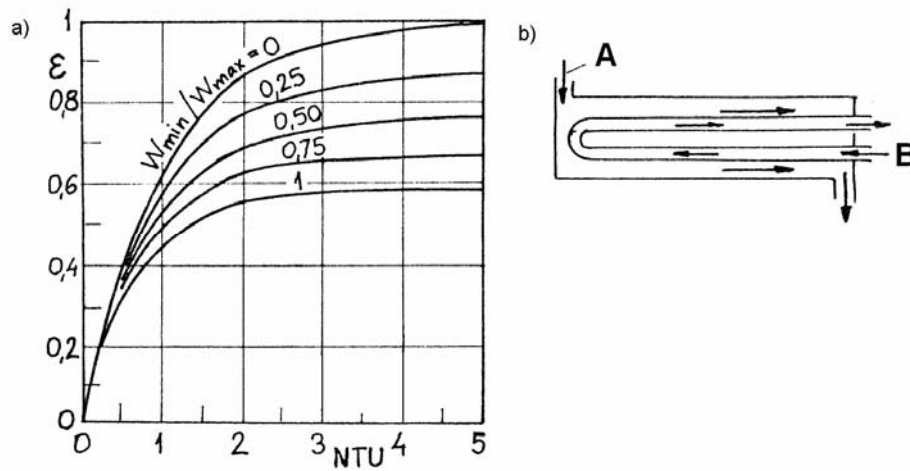
Zatem:

$$\varepsilon = \frac{t_{B1} - t_{B2}}{t_{A1} - t_{B2}} = \frac{\Delta t_B}{\Delta t_{\max}} \quad (\text{V-40})$$

i:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\max} \varepsilon. \quad (\text{V-41})$$

Dla różnych konstrukcji wymienników można znaleźć w literaturze wykresy podające zależność sprawności  $\varepsilon$  od liczby jednostek NTU i stosunku pojemności czynników  $\frac{W_{\min}}{W_{\max}}$ . Tytułem przykładu, dla wymiennika pętlicowego, wykres taki podano na rys. V. 12.



Rys. V. 12. Efektywność cieplna wymiennika pętlicowego:

a)  $\varepsilon = f\left(NTU, \frac{W_{max}}{W_{min}}\right)$ , b) schemat wymiennika

### V. 3. OBLICZANIE WYMIENNIKÓW O ELEMENTACH OŻEBROWANYCH

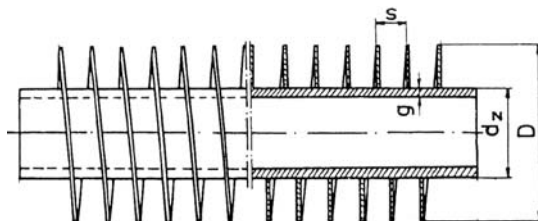
Często, celem zwiększenia powierzchni wymiany ciepła stosuje się ożebrowanie, szczególnie po stronie mniejszego współczynnika wnikania ciepła.

Charakterystyka rur stalowych z ożebrowaniem śrubowym gładkim przedstawiona została w tabeli V. 3.



Tablica V. 3

Charakterystyka rur stalowych z ożebrowaniem śrubowym gładkim



Rura		Żebro		Liczba żeber na 1 m rury	Zewnętrzna powierzchnia wymiany ciepła 1 m rury		Masa rury	Współczynnik ożebrowania $\varphi = \frac{F_z}{F_r}$
d <sub>z</sub>	g	D	s		F <sub>r</sub>	F <sub>z</sub>		
mm				szt/m	m <sup>2</sup> /m		kg/m	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	2	36	4	250	0,05	0,45	1,76	9,0
			5	200		0,37	1,54	7,4
			6	167		0,32	1,40	6,4
20	2	40	4	250	0,06	0,53	2,14	8,8
			5	200		0,43	1,88	7,1
			6	167		0,37	1,73	6,4
25	2	45	4	250	0,08	0,62	2,60	7,8
			5	200		0,51	2,31	6,4
			6	167		0,44	2,11	5,5
			8	125		0,35	1,87	4,4
30	2,5	56	4	250	0,09	0,95	4,38	10,5
			5	200		0,78	3,84	8,6
			6	167		0,66	3,49	7,3
			8	125		0,53	3,04	5,9
38	3,0	64	4	250	0,12	1,16	5,79	9,7
			5	200		0,95	5,15	7,9
			6	167		0,81	4,73	6,7
			8	125		0,64	4,19	5,3
		70	8	125		0,79	4,65	6,6
44,5	76,5	6	167	0,018	0,16	6,18	8,3	
		8	125		0,90	5,39	6,4	

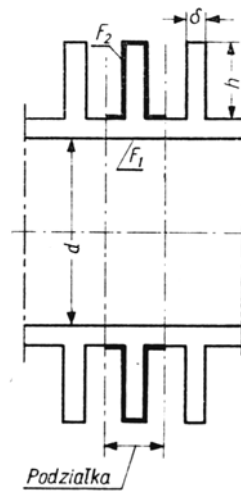
Przy obliczaniu wymiennika z powierzchnią ożebrowaną pojawiają się dwa problemy, jeden dotyczy obliczania współczynnika wnikania ciepła, a drugi obliczania wymiennika jako całości.

Pierwszy problem najlepiej jest rozwiązać posługując się danymi podawanymi przez producentów dla określonych typów rur, bowiem, ze względu na mnogość rozwiązań konstrukcyjnych brak jest równań ogólnych do obliczania  $\alpha$ . Równania szczegółowe mają zazwyczaj postać zależności:

$$Nu = CRe^A Pr^B,$$

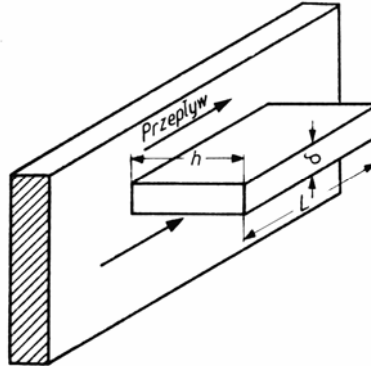
przy różnym definiowaniu wymiarów liniowych w liczbach  $Nu$  i  $Re$ . Często wymiarem tym jest wielkość  $z_p$ .

Dla żeber okrągłych nałożonych na rurę  $z_p = 2\sqrt{\frac{F_2}{2}}$ , gdzie  $F_2$  jest powierzchnią przypadającą na jedno żebro (zaznaczoną grubą linią na rys. V. 13).



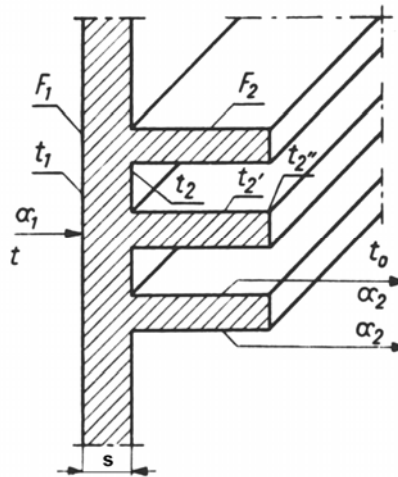
Rys. V. 13. Żebro okrągłe

Dla żeber podłużnych  $z_p = 2L$  (rys. V. 14)



Rys. V. 14. Żebro podłużne

Drugi problem to obliczenie współczynnika przenikania ciepła przez powierzchnię ożebrowaną (rys. V. 15)



Rys. V. 15. Przenikanie ciepła przez powierzchnię ożebrowaną

Przyjmijmy dla uproszczenia, że mamy do czynienia z cienkim żebrzem prostym o stałej temperaturze  $t_2$ , w takim przypadku, dla ustalonego ruchu ciepła, można napisać:

$$\dot{Q} = \alpha_1 F_1 (t - t_1), \quad (\text{V-42})$$

$$\dot{Q} \approx \frac{\lambda}{s} F_1 (t_1 - t_2), \quad (\text{V-43})$$

$$\dot{Q} = \alpha_2 F_2 (t_2 - t_0). \quad (\text{V-44})$$

Obliczając z poszczególnych równań różnice temperatury i dodając stronami, otrzymamy:

$$(t - t_0) = \dot{Q} \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{s}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_2 F_2} \right) \quad (\text{V-45})$$

i dalej:

$$(t - t_0) = \frac{\dot{Q}}{F_2} \left( \frac{F_2}{\alpha_1 F_1} + \frac{s F_2}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right), \quad (\text{V-46})$$

a oznaczając przez  $\varphi = \frac{F_2}{F_1}$  stopień ożebrowania powierzchni:

$$(t - t_0) = \frac{\dot{Q}}{F_2} \left( \frac{\varphi}{\alpha_1} + \frac{s\varphi}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right). \quad (\text{V-47})$$

Teraz:

$$\dot{Q} = k F_2 (t - t_0), \quad (\text{V-48})$$

gdzie:

$$\frac{1}{k} = \frac{\varphi}{\alpha_1} + \frac{s\varphi}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (\text{V-49})$$

W rzeczywistości temperatura żebra nie jest stała, lecz zmienia się od najniższej na szczycie do najwyższej u nasady żebra. Wprowadzając pewną średnią temperaturę żebra  $t_2'$  i nazywając sprawnością żebra  $\varepsilon$  stosunek różnic temperatury:

$$\varepsilon = \frac{t_2' - t_0}{t_2 - t_0}, \quad (\text{V-50})$$

napiszemy:

$$(t_2' - t_0) = \varepsilon (t_2 - t_0). \quad (\text{V-51})$$

Wstawiając (V-51) do (V-44), podobnie jak poprzednio można wyliczyć:

$$\frac{1}{k} = \frac{\varphi}{\alpha_1} + \frac{s\varphi}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon\alpha_2} \quad (V-52)$$

Można udowodnić <sup>\*)</sup>, że:

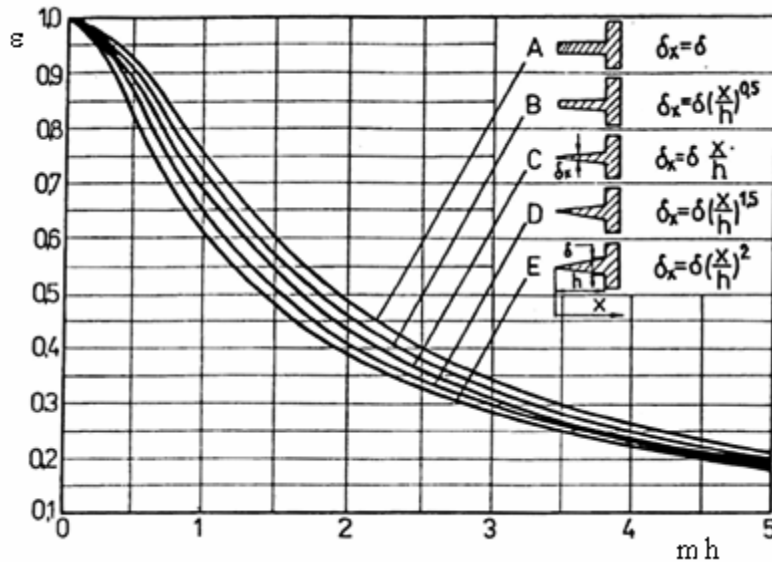
$$\varepsilon = \frac{t_2' - t_0}{t_2 - t_0} = \frac{th(mh)}{mh}, \quad (V-53)$$

gdzie:

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{\lambda\delta}} \quad (V-54)$$

W równaniu (V-54)  $\delta$  oznacza grubość żebra, a  $h$  jego wysokość.

Dla ułatwienia obliczeń, wartości  $\varepsilon$  podawane są w tabelach lub na wykresach (rys. V. 16), na których zazwyczaj oprócz wartości dla żeber prostokątnych podawane są sprawności dla żeber o innym przekroju.



Rys. V. 16. Sprawność żeber prostych o różnym przekroju

<sup>\*)</sup> Dowód podają wszystkie podręczniki z zakresu ruchu ciepła

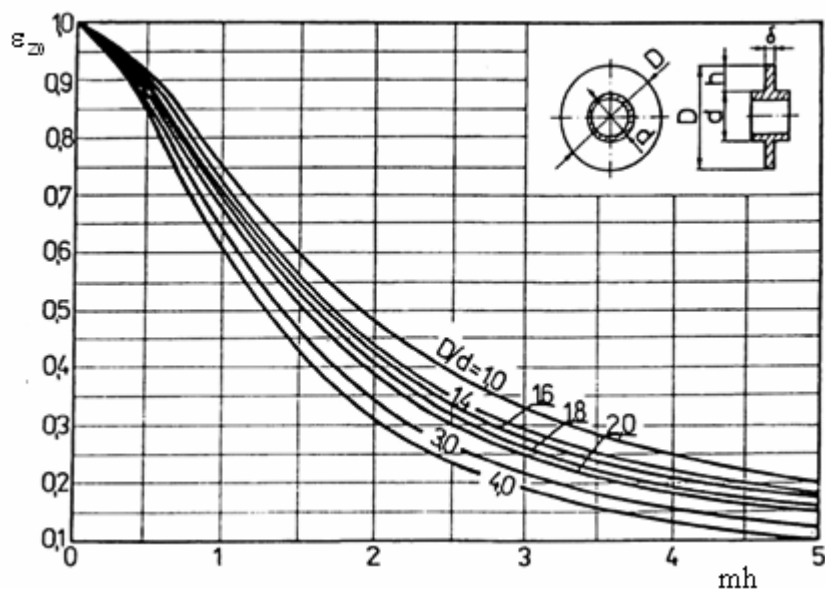
Tytułem przykładu można podać, że dla:

$$mh = 0,1 \quad \varepsilon = 0,997;$$

$$mh = 1 \quad \varepsilon = 0,782;$$

$$mh = 2,8 \quad \varepsilon = 0,354$$

Żebra okrągłe nałożone na rury oddają ciepło gorzej niż żebra prostokątne o tej samej powierzchni. Mniejszy przekrój u nasady żebra wymaga większego gradientu temperatury, co obniża średnią temperaturę żebra  $t_2'$ . Literatura podaje odpowiednie zależności, najczęściej w postaci wykresów, określające sprawność żebrowania okrągłego  $\varepsilon_{zo}$  (rys. V. 17) i tę wielkość stosuje się w równaniu (V-52).



Rys. V. 17. Sprawność żebra okrągłego

## VI. APARATY DO WYMIANY CIEPŁA

### VI. 1. SYSTEMATYKA

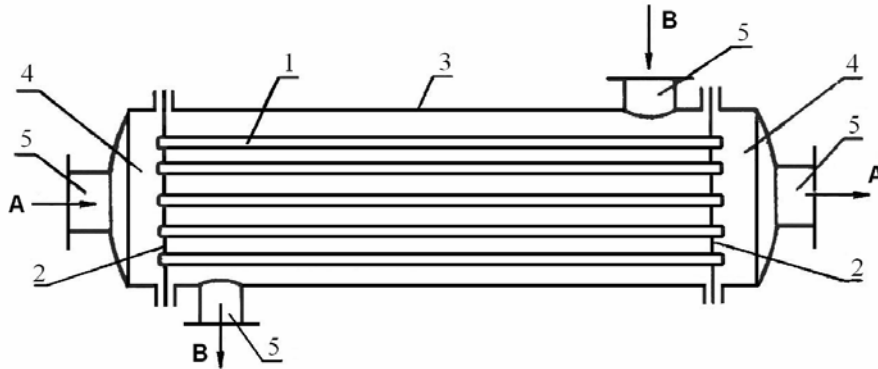
Aparaty, w których realizowany jest proces wymiany ciepła nazywane bywają, w zależności od funkcji jaką pełnią, kotłami, podgrzewaczami, chłodnicami, wyparkami, skraplaczami, grzejnikami itd. Niezależnie od tych nazw są to wszystko wymienniki ciepła, które dzieli się na trzy podstawowe grupy:

1. Wymienniki przeponowe, tzw. rekuperatory - są to aparaty, w których oba czynniki są oddzielone od siebie przegrodą (przeponą).
2. Regeneratory, nie mające przegrody oddzielającej czynniki, mające natomiast różnego kształtu elementy (kształtki, cegły, blachy), przez które na zmianę przepływa czynnik gorący i zimny. Podczas przepływu czynnika gorącego elementy te nagrzewają się, a potem oddają ciepło czynnikowi zimnemu. Z samej zasady działania, w regeneratorach zachodzą procesy nieustalanej wymiany ciepła.
3. Wymienniki bezprzeponowe mokre. W tych aparatach następuje bezpośredni kontakt czynników. Jako najczęściej spotykany przykład takich aparatów można podać chłodnię kominową, w której schładza się wodę poprzez jej bezpośredni kontakt z powietrzem, co prowadzi do częściowego odparowania wody. Proces zachodzący w wymienniku bezprzeponowym nazywamy jednoczesną wymianą ciepła i masy.

W dalszej części omówione zostaną wymienniki przeponowe.

### VI. 2. WYMIENNIKI PŁASZCZOWO-RUROWE

Jednym z najpopularniejszych rozwiązań konstrukcyjnych wymienników przeponowych są wymienniki płaszczowo-rurowe (rys. VI. 1).

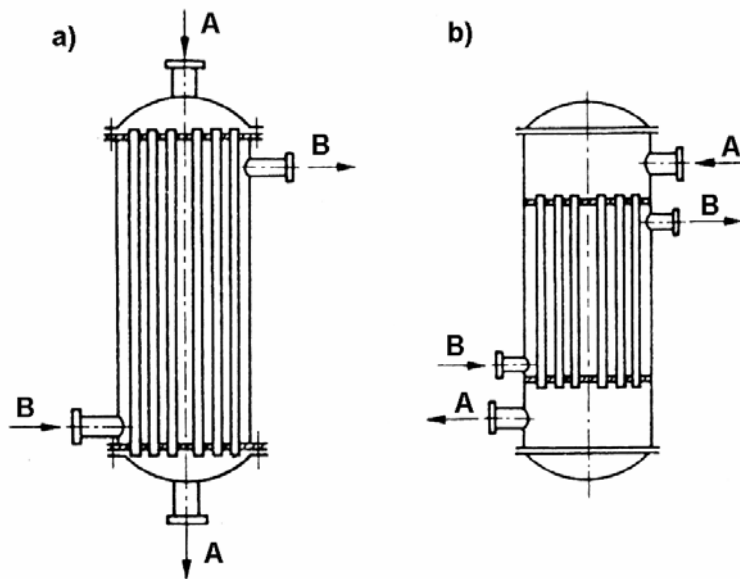


**Rys. VI. 1.** Wymiennik płaszczowo-rurowy: 1 - wiązka rur, 2 - płyty sitowe, 3 - płaszcz, 4 - dennice, 5 - króćce, A - czynnik płynący przez przestrzeń rurową, B - czynnik płynący przez przestrzeń międzyrurową

Wymienniki takie składają się z szeregu równoległych rur obudowanych płaszczem, zamocowanych w dnach sitowych. Ze względu na konieczność stosowania dużych prędkości czynnika w rurach, co powoduje podniesienie wartości współczynnika wnikania ciepła, stosuje się rury o niezbyt dużych średnicach.

Z dnami sitowymi połączone są komory zaopatrzone w króćce doprowadzające i odprowadzające czynnik. Pod względem konstrukcyjnym komory te mogą się różnić. Popularnie stosowane są wypukłe dennice z króćcami, które przykręca się bezpośrednio do den sitowych (rys. VI. 2a) lub przedłuża się płaszcz poza dna sitowe i do niego mocuje się króćce (rys. VI. 2b) doprowadzające czynnik do przestrzeni rurowej.

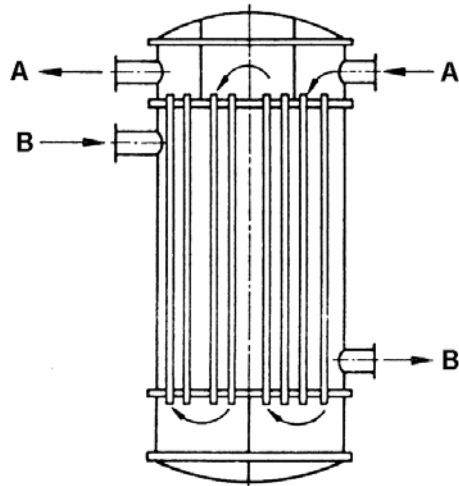




**Rys. VI. 2.** Jedn drogowy wymiennik ciepła płaszczowo-rurowy:  
 a) króćce zamontowane w dennicy, b) króćce zamontowane w płaszczu

Drugi czynnik (grzejny lub ogrzewany) doprowadza się i odprowadza króćcami do przestrzeni ograniczonej dnami sitowymi i płaszczem (przestrzeni międzyrurowej).

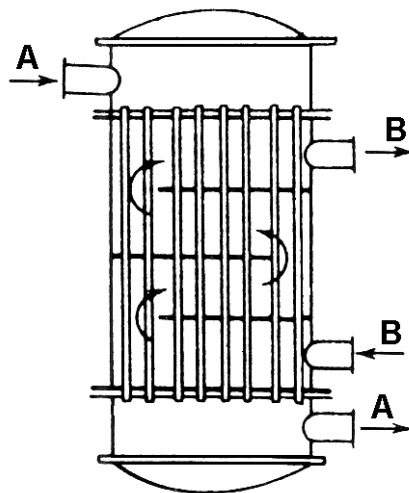
Jeżeli czynnik przepływa rurami jednokrotnie przez wymiennik, nosi on nazwę jedn drogowego. W wymiennikach takich przekrój przepływu przez przestrzeń międzyrurową jest znacznie większy od przekroju przez przestrzeń rurową, co powoduje, że przy zbliżonych strumieniach obu czynników prędkość w przestrzeni międzyrurowej jest znacznie mniejsza. Aby temu zaradzić, wymienniki płaszczowo-rurowe modyfikuje się, umieszczając w nich przegrody, co powoduje wydłużenie drogi przepływu kilka, a nawet kilkunastokrotnie. Modyfikacja ta powoduje, iż przy takiej samej powierzchni wymiany ciepła uzyskuje się znacznie większe prędkości przepływu. Przegrody stosuje się w przestrzeniach rurowych (rys. VI. 3) albo międzyrurowych (rys. VI. 4), albo w obu (rys. VI. 5).



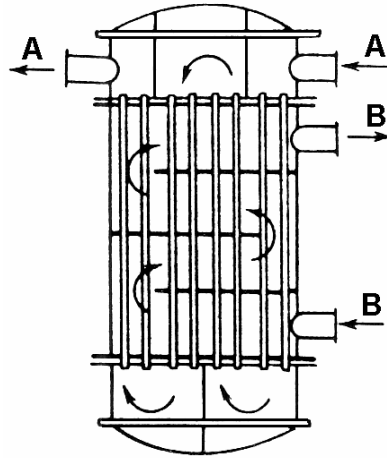
Rys. VI. 3. Wielodrogowy wymiennik ciepła

Wymienniki z przegrodami dzielącymi przestrzeń rurową na pęki nosi nazwę wymiennika wielodrogowego.

Najczęściej stosowanymi przegrodami dla przestrzeni międzyrurowych są tzw. przegrody segmentowe.



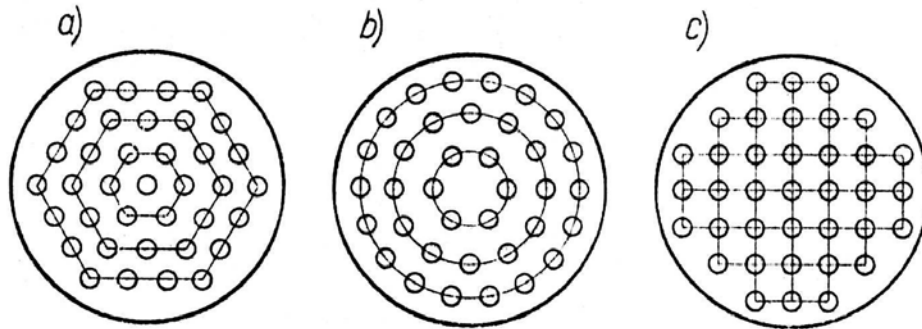
Rys. VI. 4. Wymiennik ciepła z przegrodami poprzecznymi segmentowymi w przestrzeni międzyrurowej



**Rys. VI. 5.** Czterodrogowy wymiennik ciepła z przegrodami poprzecznymi w przestrzeni międzyrurowej

Otwory w płycie sitowej, w które są montowane końce rur, wykonuje się większe o  $0,4 \div 2$  mm od średnicy zewnętrznej rury. O wielkości luzu, poza średnicą rury decyduje również sposób montażu. Odległość między osiami sąsiednich otworów nosi nazwę podziałki. Część płyty między otworami nosi nazwę mostka. Zwykle podziałka wynosi  $1,25 \div 1,5 d_z$ . Ze względu na wymaganą sztywność płyty sitowej i szczelność oraz trwałość połączeń rur z płytą zarówno jej grubość, jak i przekrój mostka nie mogą być zbyt małe.

Otwory w płycie sitowej najczęściej rozmieszczone są w wierzchołkach trójkątów równobocznych, tworzących tzw. układ heksagonalny (rys. VI. 6a). Układ ten zapewnia najciaśniejsze rozmieszczenie rurek. Poza układem heksagonalnym znane są również inne układy np. rozmieszczenie rurek na okręgach współśrodkowych kół (rys. VI. 6b) i w narożach kwadratów (rys. VI. 6c).



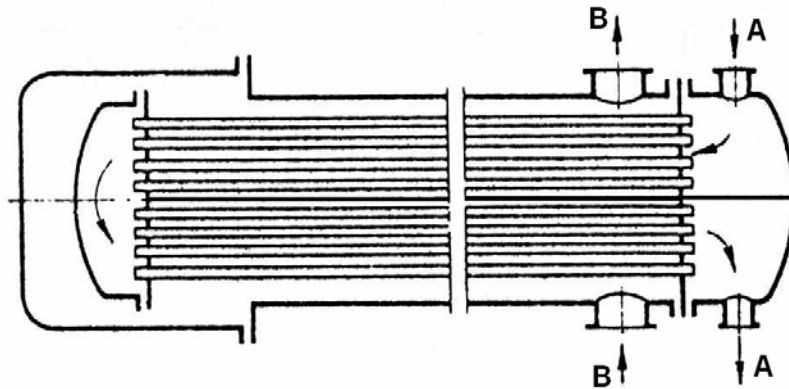
**Rys. VI. 6.** Układy rurek: a) układ heksagonalny, b) na okręgach współśrodkowych, c) w narożach kwadratów

Do budowy wymienników stosuje się rury bez szwu, tzw. rury kotłowe. Najczęściej stosuje się rury o średnicach zewnętrznych 16÷38 mm. Wymiary rur oraz rozmieszczenie otworów w dnach sitowych, a także długości całych wiązek są znormalizowane (patrz „Tablice do obliczeń procesowych”).

### VI. 3. WYMIENNIKI PŁASZCZOWO-RUROWE Z KOMPENSACJĄ WYDŁUŻEŃ CIEPLNYCH

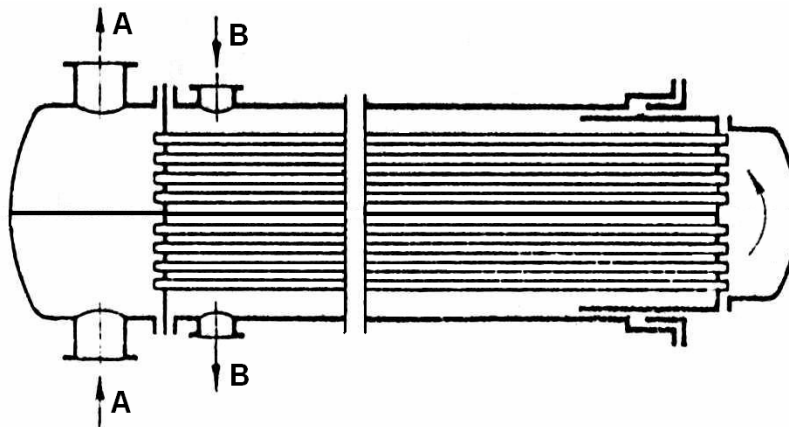
Czynniki przepływające przez rurki i przestrzeń rurową mają różne temperatury. Często stosowane są również różne materiały, z których wykonane są rurki i płaszcz. W wyniku tego występują różne wydłużenia cieplne obu tych elementów wymiennika, wywołujące powstawanie naprężeń, które mogą zniszczyć szczelność połączeń rurek z płytami sitowymi lub spowodować wyboczenie rurek. Można temu zapobiec budując wymienniki specjalnie wykonane, mające konstrukcję zapewniającą swobodną rozszerzalność rurek i płaszcza.

Na rysunku VI. 7 przedstawiono jedno z rozwiązań w postaci tzw. wymiennika ze swobodną głowicą.



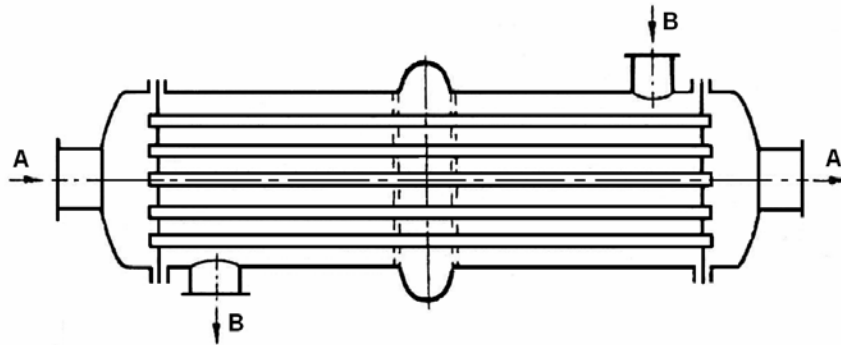
Rys. VI. 7. Wymiennik płaszczowo-rurowy ze swobodną głowicą pływającą

Innym rozwiązaniem zapewniającym kompensację wydłużeń cieplnych jest wymiennik z kompensacją dławikiem na płaszczu (rys. VI. 8).



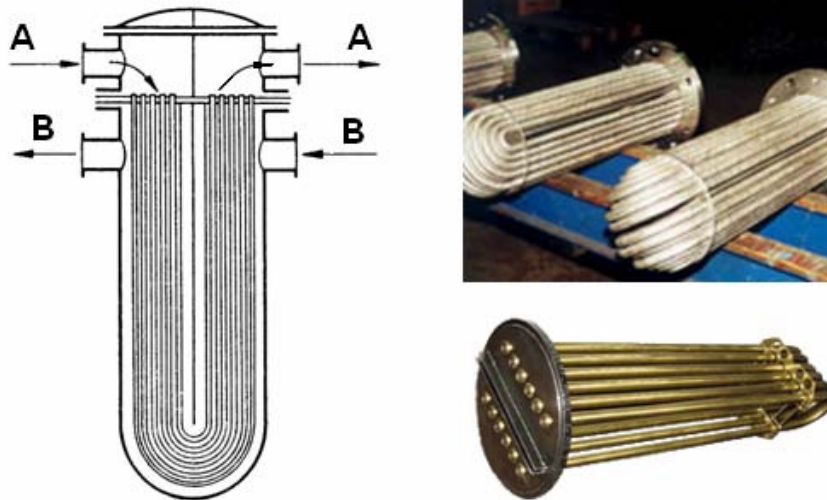
Rys. VI. 8. Wymiennik płaszczowo-rurowy z kompensacją dławikiem na płaszczu

Stosowane bywają również wymienniki płaszczowo-rurowe z kompensatorem soczewkowym (rys. VI. 9).



Rys. VI. 9. Wymiennik płaszczowo-rurowy z kompensatorem soczewkowym na płaszczu

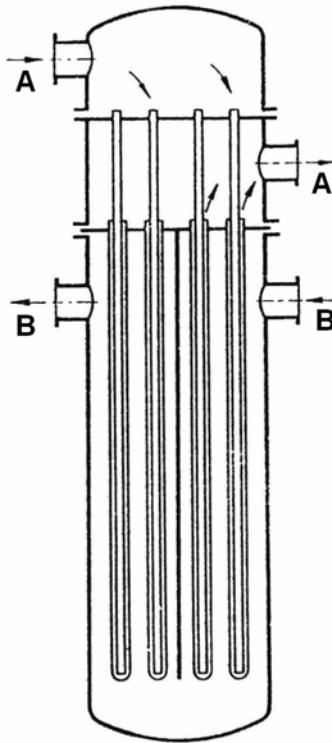
Odmiennym rozwiązaniem są wymienniki wyposażone w rury wygięte w kształcie litery U (rys. VI. 10), skąd też bierze się ich nazwa – wymienniki U-rurkowe.



Rys. VI. 10. Wymiennik ciepła U-rurkowy

Wymiennik ten ma tylko jedną płytę sitową, w której są umocowane oba końce rurek wygiętych w kształcie litery U. Umocowanie rurek tylko w jednej płycie sitowej pozwala na ich swobodne i niezależne wydłużanie się i kurczenie.

Na rysunku VI. 11 przedstawiono wymiennik płaszczowo-rurowy z kompensacją za pomocą rurek Fielda.

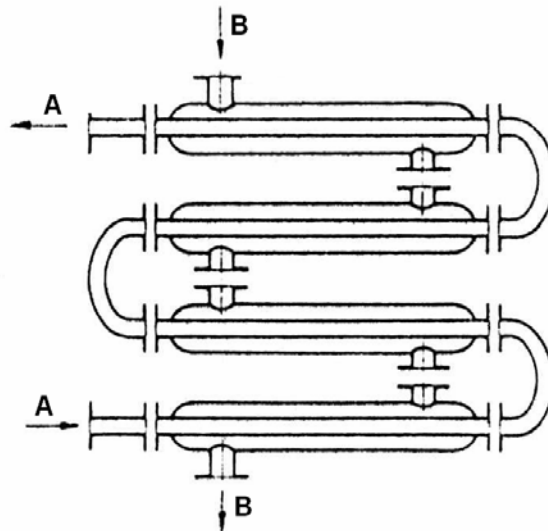


**Rys. VI. 11.** Wymiennik płaszczowo-rurowy z rurekami Fielda

Rurki są umocowane tylko jednym końcem w dnach sitowych. Takie jednostronne umocowanie każdej rury pozwala na jej całkowicie swobodne wydłużanie się. Wymienniki takie stosowane są przede wszystkim w przypadku wysokich temperatur, gdy występują znaczne wydłużenia.

VI. 4. WYMIENNIKI TYPU „RURA W RURZE”

Wymiennik taki jest zbudowany z rur o dwóch różnych średnicach, przy czym rura o średnicy mniejszej jest umieszczona centrycznie w rurze o średnicy większej. Jeden czynnik przepływa rurą wewnętrzną, a drugi – przestrzenią pierścieniową między rurami. Na rysunku VI. 12 przedstawiono schematycznie jedno z rozwiązań konstrukcyjnych wymiennika typu „rura w rurze”.

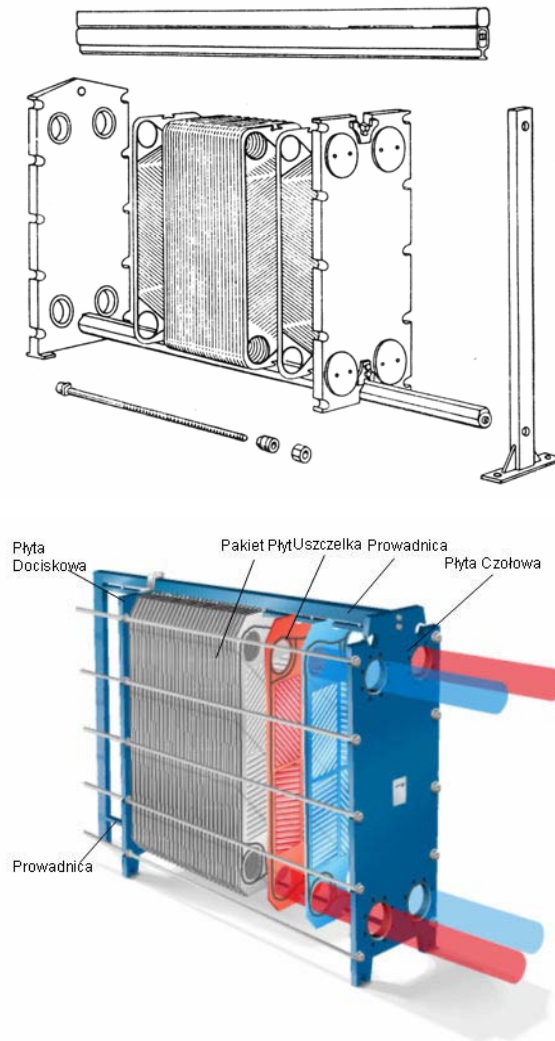


Rys. VI. 12. Wymiennik typu „rura w rurze”



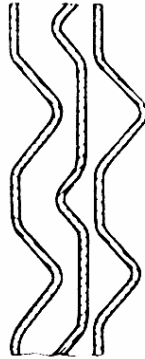
VI. 5. WYMIENNIKI PŁYTOWE

Wymienniki takie buduje się z pakietów płyt odpowiednio tłoczonych, składanych podobnie jak prasa filtracyjna (rys. VI. 13)



Rys. VI. 13. Płytowy wymiennik ciepła

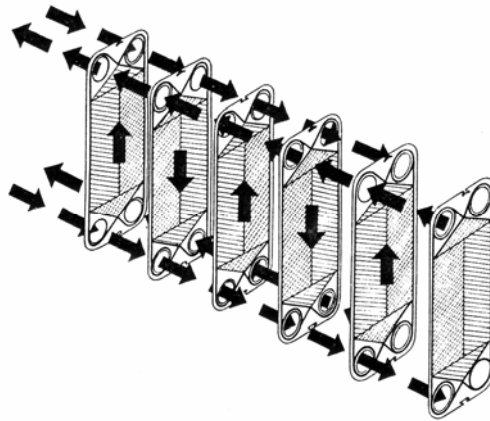
Każda z płyt ma odpowiednie wgłębienia i wypukłości. Pomędzy sąsiednimi płytami istnieje szczelina o szerokości 3÷6 mm (rys. VI. 14).



**Rys. VI. 14.** Wycinek przekroju podłużnego przestrzeni między płytowej

Zadaniem wytłoczeń na płycie jest wywoływanie zaburzeń w przepływie cieczy, co poprawia znacznie warunki wymiany ciepła.

Na narożach płyt znajdują się otwory (rys. VI. 15). Odpowiedni układ uszczelek sprawia, że dwa z nich służą jako wlot i wylot czynnika do przestrzeni między płytowej, a dwa pozostałe połączone są z następną przestrzenią między płytową i służą jako wlot i wylot drugiego czynnika.



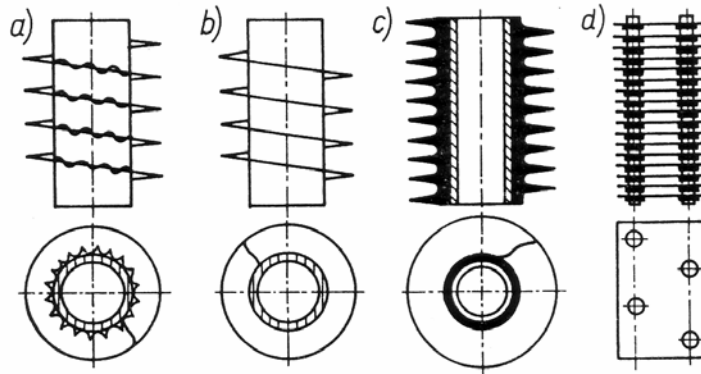
**Rys. VI. 15.** Schemat przepływu czynników w płytowym wymienniku ciepła

VI. 6. WYMIENNIKI CIEPŁA Z RURAMI ŻEBROWANYMI

Wymienniki takie stosuje się tam, gdzie po jednej stronie ściany współczynnik wnikania ciepła ma małą wartość w porównaniu z wartością  $\alpha$  po drugiej stronie ściany. Typowym przykładem jest wymiennik, w którym czynnikiem grzejnym jest para wodna, a ogrzewanym powietrze lub gdy czynnikiem chłodzącym jest parujący amoniak, a ochładzanym powietrze.

Żebrowane wymienniki ciepła stosuje się w przemyśle jako nagrzewnice i chłodnice powietrza, parowniki i skraplacze czynników chłodniczych. Najpopularniejsze stały się tam, gdzie wymagana jest klimatyzacja pomieszczeń, czyli w magazynach, chłodniach i suszarniach.

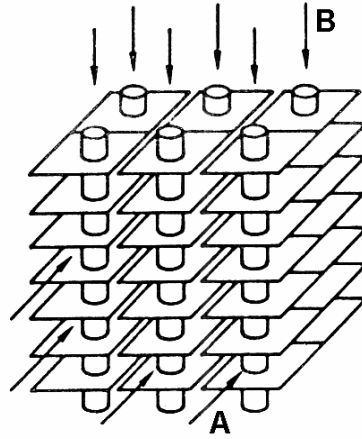
Żebrowanie wykonuje się zazwyczaj poprzecznie do osi rury. Żebra nacina się lub nawalcowuje na rurę lub też nakłada się je na zimno lub gorąco. Przykładowe rozwiązania konstrukcyjne przedstawia rys. VI. 16. Charakterystyki znormalizowanych rur żebrowanych podano w „Tablicach do obliczeń procesowych”.



**Rys. VI. 16.** Przykłady rozwiązań konstrukcyjnych rur żebrowanych: a) rura stalowa z marszczonymi u podstawy żebrami spiralnymi, b) rura z żebrami nawijanym nie marszczonym, c) rura z nawalcowanym żebrami zewnętrznymi, d) blok czterech rur z żebrami lamelowymi

Najnowsze rozwiązania konstrukcyjne wprowadziły na rynek wymienniki lamelowe z metali kolorowych. Kształt rur żebrowanych obejmuje przekroje kołowe i eliptyczne. Najmniejsze odstęp między lamelami wynoszą  $2,5 \div 15$  mm, między żebrami marszczonymi u dołu  $6 \div 8$  mm, a między żebrami gładkimi  $4 \div 6$  mm.

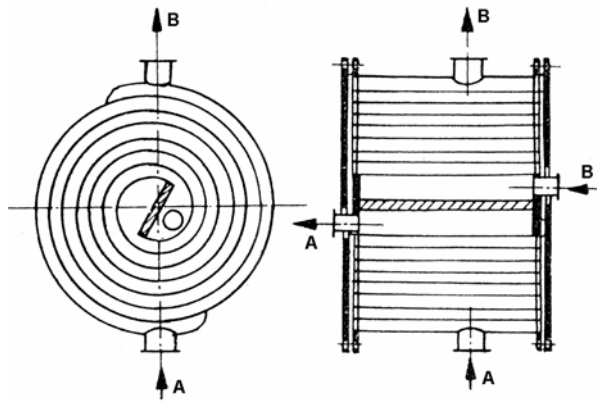
Wymienniki żebrowane mogą być budowane kilkurzędowo (rys. VI. 17), przy czym układ rur naprzemianległy jest często korzystniejszy pod względem wymiany ciepła od układu szeregowego.



Rys. VI. 17. Wymiennik ciepła żebrowany

#### VI. 7. WYMIENNIKI SPIRALNE

Spiralne wymienniki ciepła (rys. VI. 18) zbudowane są z dwóch taśm blachy, nawiniętych spiralnie w jednakowych odstępach dookoła rdzenia. Na powierzchniach czołowych znajdują się pokrywy stanowiące boczne uszczelnienie spirali.



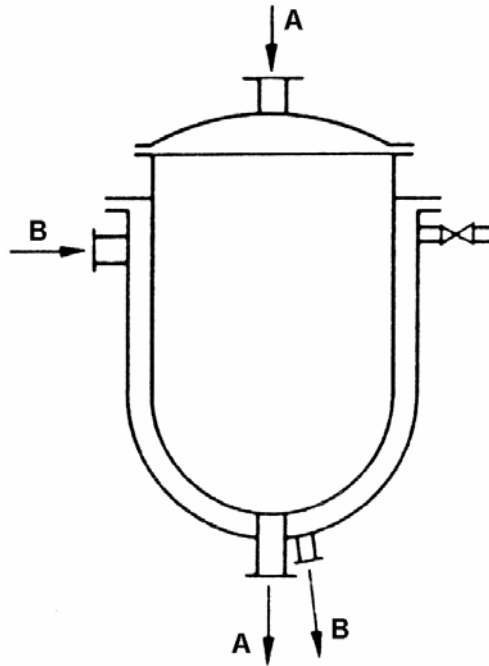
Rys. VI. 18. Spiralny wymiennik ciepła

Jeden z czynników doprowadzany jest centralnie, a odprowadzany na obwodzie, drugi odwrotnie – dopływa na obwodzie, a jest odprowadzany centralnie. Najczęściej centralnie doprowadza się czynnik grzewczy. W wyniku tego w zewnętrznych zwojach spirali przepływają czynniki o stosunkowo niskiej temperaturze.

#### VI. 8. APARATY Z PŁASZCZEM GRZEJNYM

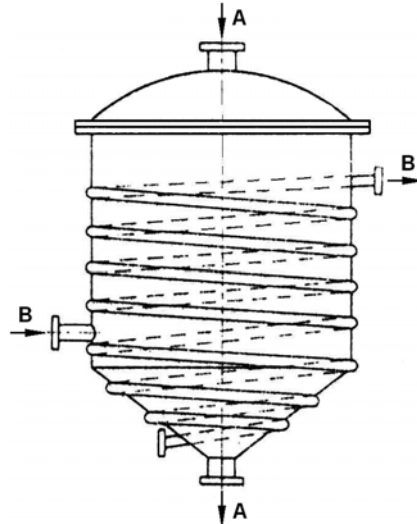
Należą one do najprostszych rozwiązań konstrukcyjnych wymienników ciepła. Dużą ich zaletą jest prostota konstrukcji i niski koszt, wadą natomiast nieduża powierzchnia wymiany ciepła. Aparaty takie mają podwójne ściany, między którymi przepływa czynnik grzewczy najczęściej w postaci pary wodnej lub gorącej wody (rys. VI. 19).

Płaszcz wymiennika jest wyposażony w króćce doprowadzające i odprowadzające czynnik grzewczy oraz zawór odpowietrzający.



Rys. VI. 19. Wymiennik ciepła z płaszczem grzejnym

Odmianę aparatów z ogrzewanym płaszczem stanowią aparaty o ściankach orurowanych (system Samka) rys. VI. 20.

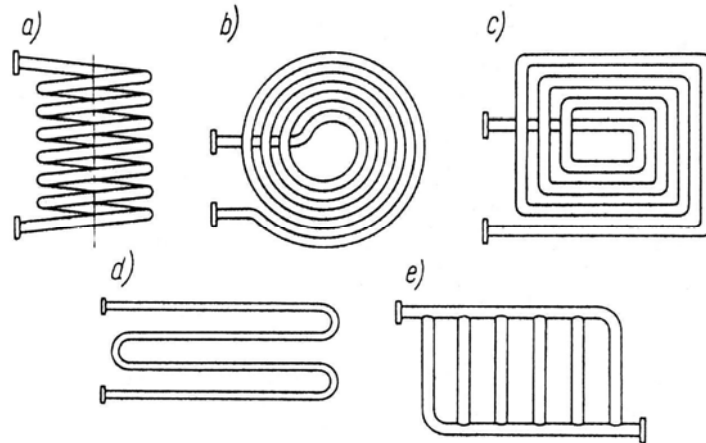


Rys. VI. 20. Aparat o ściankach orurowanych (system Samka)

#### VI. 9. WĘŻOWNICE

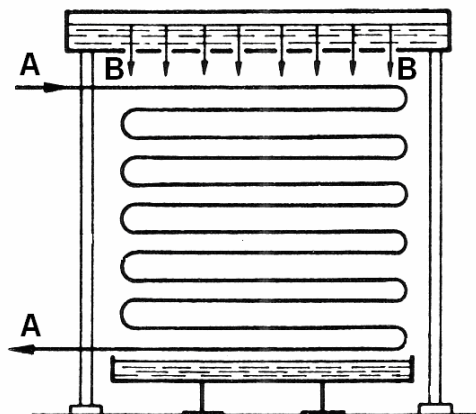
Bardzo popularnym rozwiązaniem konstrukcyjnym wymienników ciepła są aparaty z umieszczonym wewnątrz układem rur, przez który przepływa czynnik grzejny (lub chłodzący), wygiętych w kształcie spirali cylindrycznej, stożkowej, płaskiej lub linii falistej, zwanych wężownicami. Znane są również rozwiązania układów płaskich w postaci równoległych rur połączonych z jednej strony rurą doprowadzającą, z drugiej – rurą odprowadzającą czynnik.

Na rysunku VI. 21 przedstawiono przykładowo różne typy wężownic. Jeden czynnik wymieniający ciepło przepływa przez zwoje wężownicy, a drugi stanowi ich otoczenie.



Rys. VI. 21. Typy węzownic: a) węzownica przestrzenna, b), c), d), e) węzownice płaskie

Odmianę wymiennika zbudowanego w postaci płaskiej węzownicy jest chłodnica ociekowa, przedstawiona na rys. VI. 22.



Rys. VI. 22. Chłodnica ociekowa

Chłodnice ociekowe budowane są z poziomych rur ustawionych jedna nad drugą, połączonych kolanami. Zewnętrzna powierzchnia ścianki rur jest omywana cieczą wypływającą ze zbiornika umieszczonego nad rurami.

## LITERATURA

- [1] HOBLER T.: Ruch ciepła i wymienniki, WNT, Warszawa 1979.
- [2] KMIEĆ A.: Procesy cieplne i aparaty, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2005.
- [3] KOSTOWSKI E.: Przepływ ciepła, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2000.
- [4] KOSTOWSKI E.: Promieniowanie cieplne, WNT, Warszawa, 1993.
- [5] KOSTOWSKI E. i inni: Zbiór zadań z przepływu ciepła, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
- [6] LEWICKI P.: Inżynieria procesowa i aparatura przemysłu spożywczego, WNT, Warszawa 2005.
- [7] TRONIEWSKI L. i inni: Tablice do obliczeń procesowych. Skrypt nr 277, Wydawnictwo Politechniki Opolskiej, Opole 2006.
- [8] ZARZYCKI R.: Wymiana ciepła i ruch masy w inżynierii środowiska, WNT, Warszawa 2005.