Optica Applicata, Vol. XIV, No. 2, 1984

Sur la forme relativiste des conditions du stigmatisme parfait

HENRYK WOJEWODA*

Ecole Polytechnique de Wrocław, Institut de Physique, 50-370 Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, Pologne.

Dans ce travail nous avons généralisé les conditions du stigmatisme parfait d'Herschel et d'Abbe pour un système optique en mouvement (rectiligne uniforme). Les considérations théoriques sont basées sur le principe de relativité d'Einstein. En particulier, nous avons établi un facteur de correction relativiste du problème.

1. Conditions du stigmatisme parfait

Ce sont les généralisations relativistes de la relation d'Herschel et celle des sinus d'Abbe que nous nous proposons d'établir. Rappelons qu'il s'agit de l'imagerie stigmatique de deux éléments, l'un sur l'autre, à l'aide d'un système optique réel d'ouverture finie c'est-à-dire par des faisceaux larges de rayons lumineux. On sait bien qu'il n'est pas possible de réaliser généralement une imagerie stigmatique.

Dans le cas de l'imagerie stigmatique de deux petits segments axiaux, l'un sur l'autre, la condition d'Herschel est valable [1-7]:

$$g_x' n_2' \sin^2 \frac{u_2'}{2} = n_1' \sin^2 \frac{u_1'}{2} . \tag{1}$$

Ici (voir la Fig. 1) on a désigné: n_1', n_2' — indices de réfraction des milieux de l'espace objet et de l'espace image du système optique, u_1', u_2' — angles d'ouverture dans les deux espaces objet et image, $g_x' = \dfrac{dx_x'}{dx_x'}$ — grandissement linéaire

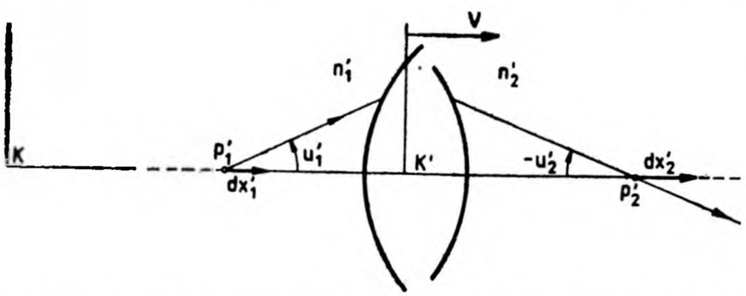

Fig. 1. La marche du rayon lumineux dans le système optique (condition d'Herschel)

* Presents address: Institus Universitaires Nationaux, Bejaia, Algerie.

longitudinal (axial) de l'imagerie. Les quantités accentuées sont relatives au référentiel propre du système optique. L'équation (1) détermine, par son abscisse dx_2', l'image stigmatique d'un point de l'axe infiniment voisin de P_1'. Soulignons, une fois de plus, que l'angle d'ouverture u_1' est un angle fini.

La condition des sinus d'Abbe est un critère d'importance plus pratique. Maintenant, il s'agit de l'imagerie stigmatique d'un objet élémentaire plan. La surface objet est perpendiculaire à l'axe de révolution du système optique. Pour que cet objet ait une image stigmatique, il faut et il suffit que la condition suivante soit respectée [1–8]:

$$g_y' n_2' \sin u_2' = n_1' \sin u_1'. \tag{2}$$

Dans cette relation $g_y' = dy_2'/dy_1'$ est le grandissement linéaire transversal de l'imagerie optique (Fig. 2). Les deux grandissements linéaires, longitudinal et transversal, sont liés entre eux par la relation suivante:

$$g_x' = \frac{n_2'}{n_1'} g_y'^2. \tag{3}$$

L'équation (2) détermine, par son abscisse dy_2', l'image stigmatique d'un point extra-axial infiniment voisin de P_1'. L'angle d'ouverture u_1' est également fini.

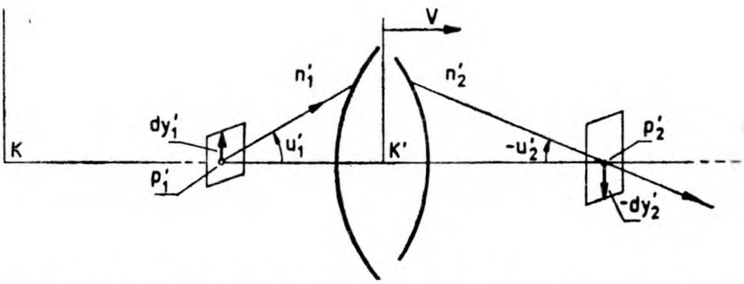

Fig. 2. La marche du rayon lumineux dans le système optique (condition d'Abbe)

Ainsi, nous sommes arrivés aux relations de départ (1) et (2) du problème posé. A l'occasion, faisons encore une remarque importante sur la nature de l'imagerie optique. La condition d'Herschel est incompatible avec la condition d'Abbe. C'est pourquoi, l'imagerie des objets volumineux au moyen des faisceaux larges de rayons lumineux est impossible, même lorsque le volume de l'objet est infiniment petit. Pour des faibles ouvertures du système optique (domaine paraxial), il n'y a que la compabilité approchée.

2. Aberration de la lumière

La relativité de l'imagerie optique se manifeste quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre. Par admission, le référentiel K' est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $V = \beta c_0$ (c_0 étant la vitesse de la lumière dans le vide) dans le référentiel K supposé immobile (Fig. 1 et Fig. 2). On admet que le principe de relativité d'Einstein est valable [9–14]. Dans ce cas, les formules de transformation des grandeurs caractérisant l'imagerie optique ont été trouvées [16–19].

Ainsi, pour l'angle d'aberration de la lumière on a

$$n' \sin \alpha' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, n \sin \alpha}{1 - n\beta \cos \alpha} \quad \text{ou bien} \quad n \sin \alpha = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, n' \sin \alpha'}{1 + n'\beta \cos \alpha'}, \tag{4}$$

où n est l'indice de réfraction du milieu dans le référentiel K. Cette formule représente l'effet relativiste d'aberration de la lumière dans le milieu [17].

L'indice de réfraction d'un milieu optique isotrope et homogène $n = c_0/c$ (c étant la vitesse de la lumière dans le milieu) se transforme comme suit [17, 19]

$$n' = \sqrt{1 + \frac{(n^2-1)(1-\beta^2)}{(1-n\beta\cos\alpha)^2}} \quad \text{ou bien} \quad n = \sqrt{1 + \frac{(n'^2-1)(1-\beta^2)}{(1+n'\beta\cos\alpha')^2}}. \tag{5}$$

Dans le cas particulier, quand $\alpha' = 0 = \alpha$, on obtient

$$n' = \frac{n-\beta}{1-n\beta} \quad \text{ou bien} \quad n = \frac{n'+\beta}{1+n'\beta}. \tag{6}$$

Afin d'établir les effets relativistes de l'imagerie optique, nous adoptons l'axe de révolution du système optique comme direction du mouvement. Nous admettons aussi que le système optique est au repos dans le référentiel K'. Dans ces conditions seul le grandissement linéaire transversal ne change pas quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre. En effet, dans une transformation de Lorentz le rapport des segments perpendiculaires à la direction du mouvement ne change pas (les mesures des longueurs se font par les procédés de la relativité). Le rapport des segments parallèles à la direction du mouvement n'est pas invariant car ces segments se trouvent dans les milieux optiques différents.

3. Condition relativiste d'Herschel

Passons à présent à la condition d'Herschel. Si donc on adopte l'axe du système optique comme direction du mouvement, on pourra dire que l'angle d'ouverture du système est assimilé à l'angle d'aberration de la lumière (angles formés par les rayons lumineux avec l'axe optique aux points objet et image). Par admission, le système optique est au repos dans le référentiel K'. Autrement dit, dans les considérations qui suivent, le système optique est en mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse $V = \beta c_0$ par rapport à l'observateur du référentiel K supposé *immobile*. Ainsi, par le choix convenable du référentiel on peut utiliser les deux conditions du stigmatisme parfait sous formes (1) et (2) comme formules de départ.

Pour l'étude des effets du mouvement du système optique mettons la formule (1) sous une autre forme. D'après la relation (3) pour les grandissements, dans le référentiel K' on a

$$g'_y n'_2 \sin\frac{u'_2}{2} = n'_1 \sin\frac{u'_1}{2}\,. \tag{7}$$

Passons maintenant au référentiel K. Conformément à nos remarques sur les grandissements, pour l'observateur de ce référentiel on a $g_y = g'_y$. En regard à la formule de transformation (4) nous trouvons finalement

$$\frac{g_y n_2 \sin\frac{u_2}{2}}{1 - n_2\beta\cos\frac{u_2}{2}} = \frac{n_1 \sin\frac{u_1}{2}}{1 - n_1\beta\cos\frac{u_1}{2}}\,. \tag{8}$$

Cette relation présente la condition d'Herschel pour le système optique en mouvement (dans le référentiel K).

L'effet relativiste du problème peut être caractérisé par l'expression

$$R = \frac{g_y n_2 \sin\frac{u_2}{2}}{n_1 \sin\frac{u_1}{2}} = \frac{1 - n_2\beta\cos\frac{u_2}{2}}{1 - n_1\beta\cos\frac{u_1}{2}}\,. \tag{9}$$

Lorsque $\beta \ll 1$ (faible vitesse du système optique ce qui est souvent le cas), on trouve en développant en série

$$R = 1 + n_1\beta\cos\frac{u_1}{2} - n_2\beta\cos\frac{u_2}{2} + n_1 n_2 \beta^2 \cos\frac{u_1}{2}\cos\frac{u_2}{2} + \ldots\,.$$

Ainsi, l'effet relativiste du premier ordre en β (tel que $\beta^2 = 0$) est déterminé par le facteur de correction

$$R = 1 - \beta\Delta\left(n\cos\frac{u}{2}\right). \tag{10}$$

4. Condition relativiste d'Abbe

D'une manière tout à fait analogue, on obtient la forme relativiste de la condition des sinus d'Abbe. Comme il a été dit plus haut, le système optique est au repos dans le référentiel *mobile* (référentiel K'). Par conséquent, dans ce référentiel la formule fondamentale (2) est valable. Il résulte de ce qui vient d'être dit que le grandissement linéaire transversal ne change pas quand on passe au référentiel *immobile* (référentiel K) c'est-à-dire on a $g_y = g'_y$. Ainsi, en vertu de la formule de transformation (4) on obtient

$$\frac{g_y n_2 \sin u_2}{1 - n_2\beta\cos u_2} = \frac{n_1 \sin u_1}{1 - n_1\beta\cos u_1}\,. \tag{11}$$

En introduisant le facteur de correction relativiste

$$Q = \frac{1-n_2\beta\cos u_2}{1-n_1\beta\cos u_1} \tag{12}$$

on peut aussi écrire

$$g_y n_2 \sin u_2 = Q n_1 \sin u_1. \tag{13}$$

C'est la condition des sinus sous forme relativiste. Elle généralise la formule (2) dans le cas d'un système optique en mouvement (par rapport à l'observateur).

5. Conclusions

Les formules (8) et (11) résolvent le problème posé. Le contenu physique de ces formules est le suivant: lorsque dans le référentiel K les conditions (8) et (11) sont satisfaites, l'imagerie optique des petits objets (linéaires ou plans respectivement) est stigmatique dans le référentiel propre du système optique (dans le référentiel K'). Soulignons aussi le fait que l'imagerie optique est relative; elle dépend de l'observateur. Ainsi, les résultats obtenus sont dans le cadre des études que nous avons entreprises [15–19]. Pour le moment ces résultats n'ont qu'une valeur théorique, mais il est à remarquer que la propagation de la lumière se fait toujours dans un milieu (et non pas dans le vide). Quant au système optique, il peut être aussi en mouvement par rapport à l'observateur.

Pour terminer indiquons le cas des vitesses extrêmement faibles du système optique. Les formules (8) et (11) se reduisent alors aux formules (1) et (2) bien connues et vérifiées par l'expérience.

Références bibliographiques

[1] Maréchal A., *Traité d'optique instrumentale. Imagerie optique. Aberrations.* Vol. 1, [Ed.] Rev. Opt. Théor. et Instr., Paris 1952.

[2] Chrétien H., *Cours du calcul des combinaisons optiques,* [Ed.] Rev. Opt., Paris 1938.

[3] Born M., Wolf E., *Principles of optics,* Pergamon Press, Oxford 1964.

[4] Tudorovski A. I., *Teoriya opticheskikh priborov* (in Russian), [Ed.] AN USSR, Moskva-Leningrad 1948.

[5] Slusarev G. G., *Geometricheskaya optika* (in Russian), [Ed.] AN USSS, Moskva 1946.

[6] Landsberg G. S., *Optika* (in Russian), [Ed.] OGIZ, Moskva 1947.

[7] Apenko M. I., Dubovik A. S., *Prikladnaya optika* (in Russian), [Ed.] Nauka, Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1971.

[8] Slusarev G. G., *Metody raschota opticheskikh sistem* (in Russian), [Ed.] Mashinostroenie, Leningrad 1969.

[9] Landau L., Lifszic E., *Teoria pola* (in Polish), PWN, Warszawa 1971.

[10] Fock W. A., *Teoriya prostranstva, vremeni i tyagoteniya* (in Russian), [Ed.] Gos.-Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1961.

[11] Trautman A., *Teoria względności* (in Polish), [Ed.] Ossolineum, Warszawa 1971.
[12] McCrea W. H., *Relativity Physics*, Methuen and Co. LTD, London 1947, New York 1954.
[13] Synge J. L., *Relativity: the special theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1958.
[14] Melcher H., *Relativitätstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.
[15] Wojewoda H., Optica Applicata **4** (1974), 64.
[16] Wojewoda H., Optica Applicata **4** (1974), 37.
[17] Wojewoda H., Annales des Fac. Pol. de l'UNAZA, Vol. 3, Lubumbashi-Kinshasa. (1977)
[18] Wojewoda H., Optica Applicata **8** (1978), 155.
[19] Wojewoda H., J. Optics (Paris) **1** (1981).

Received July 14, 1983

Релятивистская форма условий стигматического отображения

В статье обобщены условия стигматического оптического отображения Гершеля и Аббе для движущейся оптической системы. Теоретические рассуждения исходят из принципа относительности Эйнштейна. В особенности определена релятивистская поправка к формулам.