

**Dariusz Kacprzak**

Politechnika Białostocka

e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

---

## **METODA FTOPSIS OPARTA NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH Z OBIEKTYWNYMI WAGAMI<sup>1</sup>**

---

### **THE FTOPSIS METHOD BASED ON ORDERED FUZZY NUMBERS WITH OBJECTIVE WEIGHTS**

---

DOI: 10.15611/pn.2018.507.08

JEL Classification: C44

**Streszczenie:** Praca prezentuje rozmytą metodę TOPSIS opartą na skierowanych liczbach rozmytych z obiektywnymi wagami. Wagi są wyznaczone na bazie zdefuzyfikowanej macierzy decyzyjnej, wykorzystując entropię. Analizowane są różne metody defuzyfikacji skierowanych liczb rozmytych oraz ich wpływ na uzyskane wagi, ranking wag i ranking wariantów decyzyjnych. Opracowanie zawiera podstawę teoretyczną prowadzonych badań oraz poglądowy przykład numeryczny. W wyniku analiz stwierdzono, że różne metody defuzyfikacji dają różne wagi kryteriów oraz różny ich ranking. Sprawia to, że ranking wariantów decyzyjnych może się zmieniać i być zależny od metody defuzyfikacji.

**Słowa kluczowe:** skierowane liczby rozmyte, defuzyfikacja, TOPSIS, wagi obiektywne.

**Summary:** The paper presents a fuzzy TOPSIS method based on ordered fuzzy numbers with objective weights. The weights are calculated based on the defuzzified decision matrix using entropy. Different defuzzification methods of ordered fuzzy numbers are analyzed and the influence of these methods on the obtained weights, the ranking of weights and the ranking of alternatives. The paper includes the theoretical basis of the study and a numerical example. Summing up the results, it can be concluded that different methods of defuzzification give different weightings of criteria and their ranking. This causes the ranking of alternatives can depend on the method of defuzzification.

**Keywords:** ordered fuzzy numbers, defuzzification, TOPSIS, objective weights.

---

<sup>1</sup> Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

## 1. Wstęp

Podejmowanie decyzji, biorąc pod uwagę różnorodne kryteria (czasami wzajemnie sprzeczne), stanowi nieodłączny element codziennego życia. Jednak rosnąca złożoność otaczającego nas świata sprawia, że zadania te stają się coraz trudniejsze. W tej sytuacji pomocne mogą okazać się tzw. dyskretne metody wielokryterialnego wspomagania decyzji (*Multiple Criteria Decision Making* – MCDM). Dysponują one gotowymi procedurami postępowania w celu pojęcia optymalnej decyzji w ramach dostępnych możliwości i przyjętych kryteriów oceny.

Jedną z najpopularniejszych metod MCDM jest metoda TOPSIS (*Technique for Order Preference using Similarity to Ideal Solution*) [Hwang, Yoon 1981]. Elementem wyróżniającym tę metodę jest wykorzystanie abstrakcyjnych rozwiązań referencyjnych, tzw. rozwiązania idealnego i antyidealnego. Liniowe uporządkowanie rozważanych wariantów decyzyjnych dokonuje się za pomocą wartości miernika syntetycznego wyznaczonego dla każdego wariantu, opartego na odległościach wariantu od rozwiązań referencyjnych.

Klasyczne wersje metod MCDM, w tym również metoda TOPSIS, zakładają, że macierz decyzyjna oraz wektor wag są znane precyzyjnie i wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych. Jednak w praktycznych zastosowaniach metod MCDM zaczęto stosować alternatywne do liczb rzeczywistych sposoby prezentacji ocen, pozwalające na matematyczny opis i przetwarzanie informacji nieprecyzyjnych, niepełnych czy wyrażonych za pomocą zmiennych lingwistycznych. Należą do nich m.in. liczby przedziałowe [Jahanshahloo i in. 2006] czy liczby rozmyte [Chen 2000]. Do tej grupy możemy również zaliczyć nowe podejście zapoczątkowane przez Roszkowską i Kacprzaka [Roszkowska, Kacprzak 2016], oparte na modelu skierowanych liczb rozmytych (Ordered Fuzzy Numbers – OFN).

Jednym z kluczowych elementów w metodach MCDM jest określenie wag (ważności) poszczególnych kryteriów, ponieważ mają one istotny wpływ na podejmowaną decyzję. Istnieje wiele metod wyznaczania wag, a większość z nich jest dzielona na dwie kategorie: wagi subiektywne i obiektywne, w zależności od źródła informacji, na których bazują. Wagi subiektywne opierają się jedynie na preferencjach i opiniach decydenta, odzwierciedlając jego subiektywną wiedzę i doświadczenie. Wagi obiektywne są wyznaczane na bazie modeli matematycznych wykorzystujących macierz decyzyjną, a pomijają preferencje i opinie decydenta.

Znaczna część zastosowań metod MCDM do rozwiązywania problemów rzeczywistych wykorzystuje wagi subiektywne. Jednak w sytuacjach gdy uzyskanie takich wiarygodnych wag nie jest możliwe, możemy wykorzystać wagi obiektywne. Jedną z metod wyznaczania wag obiektywnych jest metoda oparta na entropii. Entropia określa stopień nieuporządkowania zbioru, inaczej stopień jego wyjątkowości. Pozwala ona na wyznaczenie wag kryteriów na podstawie rozbieżności ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów. Im mniejsze zróżnicowanie ocen wariantów względem określonego kryterium, tym niższa waga tego kryterium. W szczególno-

ści, jeżeli wszystkie oceny wariantów decyzyjnych względem danego kryterium są jednakowe (brak różnicowania), wówczas waga tego kryterium jest równa zero, co oznacza brak jego wpływu na wynik końcowy.

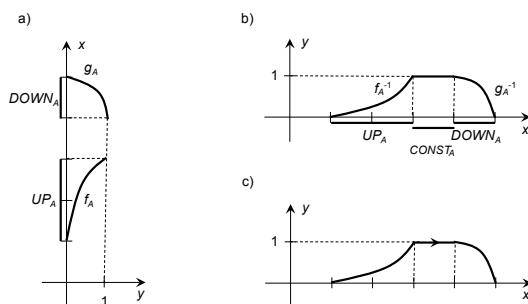
Celem pracy jest przedstawienie rozmytej metody TOPSIS opartej na skierowanych liczbach rozmytych z obiektywnymi wagami. Dodatkową własność OFN, skierowanie, wykorzystano do obrazowania typu kryterium. Obiektywne wagi kryteriów, po defuzyfikacji macierzy decyzyjnej, zostaną wyznaczone z wykorzystaniem entropii. Analizowane będą różne metody defuzyfikacji skierowanych liczb rozmytych oraz ich wpływ na uzyskane wagi, ranking wag i ranking wariantów decyzyjnych.

## 2. Skierowane liczby rozmyte

Model skierowanych liczb rozmytych (*Ordered Fuzzy Numbers* – OFN), zaproponowany w 2002 roku przez Kosińskiego, Prokopowicza i Ślęzaka i rozwijany w serii prac [Kosiński i in. 2002; Kosiński i in. 2003; Kosiński 2006], stanowi rozszerzeniem modelu wypukłych liczb rozmytych (*Convex Fuzzy Numbers* – CFN).

**Definicja 1.** [Kosiński 2006]. Skierowaną liczbą rozmytą  $A$  nazywamy uporządkowaną parę funkcji ciągłych  $(f_A, g_A)$ , gdzie  $f_A, g_A: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zbiór skierowanych liczb rozmytych oznaczamy przez  $\mathfrak{R}$ . Elementy skierowanej liczby rozmytej  $A$  nazywamy odpowiednio  $f_A$  – część wznosząca (UP) i  $g_A$  – część opadająca (DOWN). Aby zachować zgodność z modelem CFN, przez  $y$  oznaczmy zmienną niezależną funkcji  $f_A$  i  $g_A$ , a przez  $x$  ich wartości (rys. 1a).



**Rys. 1.** a) Skierowana liczba rozmyta  $A$ , b) Skierowana liczba rozmyta  $A$  przedstawiona w sposób nawiązujący do CFN, c) Strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację skierowanej liczby rozmytej  $A$

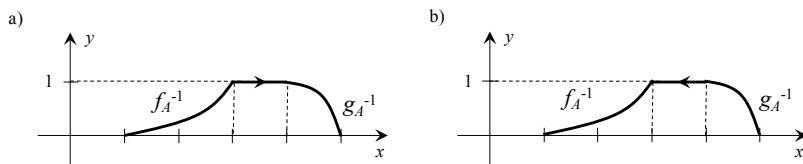
Źródło: [Kosiński i in. 2002].

Definicja 1 skierowanej liczby rozmytej  $A$  nie wymaga, aby funkcje  $f_A$  i  $g_A$  były odwracalne, a jedynie ciągłe. Jednak jeżeli dodatkowo założymy, że [Kosiński 2006]: (\*) funkcja  $f_A$  jest rosnąca, a funkcja  $g_A$  jest malejąca oraz że (\*\*)  $f_A(y) \leq$

$g_A(y)$  dla  $\forall y \in [0,1]$ , możemy określić funkcję przynależności  $\mu_A$  skierowanej liczby rozmytej  $A$  następująco (rys. 1b):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in [f_A(0), f_A(1)] \\ 1 & \text{gdy } x \in [f_A(1), g_A(1)] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in [g_A(1), g_A(0)] \end{cases}$$

Rysunek 1c pokazuje skierowaną liczbę rozmytą  $A$  wyposażoną w strzałkę – skierowanie – która obrazuje porządek odwróconych funkcji  $f_A$  i  $g_A$ . Para funkcji ciągłych  $(g_A, f_A)$  określa inną skierowaną liczbę rozmytą niż para  $(f_A, g_A)$ . Graficznie widoczne jest to w skierowaniu (rys. 2). Pozwala ono podzielić zbiór  $\mathfrak{R}$  na dwa podzbiory: skierowane liczby rozmyte o skierowaniu dodatnim, jeżeli skierowanie liczb jest zgodne z osią  $ox$  (rys. 2a), oraz skierowane liczby rozmyte o skierowaniu ujemnym w przeciwnym przypadku (rys. 2b).



**Rys. 2.** a) Skierowana liczba rozmyta  $(f_A, g_A)$  o dodatnim skierowaniu, b) Skierowana liczba rozmyta  $(g_A, f_A)$  o ujemnym skierowaniu

Źródło: [Kacprzak 2015].

Niech  $A = (f_A, g_A)$ ,  $B = (f_B, g_B)$  i  $C = (f_C, g_C)$  będą OFN. Działania arytmetyczne  $(+)$ ,  $(-)$ ,  $(\cdot)$  i  $(/)$  na liczbach  $A$  i  $B$  w modelu  $\mathfrak{R}$  są określone następująco:

$$\forall y \in [0,1] [f_C(y) = f_A(y) * f_B(y) \text{ i } g_C(y) = g_A(y) * g_B(y)]$$

gdzie  $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ ,  $A/B$  jest określone, gdy  $\forall y \in [0,1] |f_B(y)| > 0$  i  $|g_B(y)| > 0$ .

Liczby rzeczywiste są szczególnym przypadkiem skierowanych liczb rozmytych. W modelu  $\mathfrak{R}$  są one utożsamiane z parą funkcji stałych. Niech  $r \in \mathbb{R}$  oraz niech  $r'$  będzie funkcją stałą, tzn.  $r'(y) = r$  dla  $y \in [0,1]$ . Wówczas  $r^* = (r', r')$  jest OFN, która w  $\mathfrak{R}$  reprezentuje liczbę rzeczywistą  $r$ . Mnożenie liczby rzeczywistej  $r$  przez skierowaną liczbę rozmytą  $A = (f_A, g_A)$  ma postać:

$$\forall y \in [0,1] [r \cdot A = (r \cdot f_A(y), r \cdot g_A(y))].$$

W określeniu funkcji przynależności  $\mu_A(x)$  skierowanej liczby rozmytej  $A$  występują cztery liczby rzeczywiste  $f_A(0)$ ,  $f_A(1)$ ,  $g_A(1)$  i  $g_A(0)$ . Jeżeli funkcje  $f_A$  i  $g_A$  są liniowe, wówczas te cztery liczby jednoznacznie opisują skierowaną liczbę rozmytą  $A$ , którą możemy zapisać następująco:

$$A = (f_A(0), f_A(1), g_A(1), g_A(0)).$$

W przypadku gdy  $f_A(1) < g_A(1)$ , to liczby OFN będziemy nazywać trapezowymi skierowanymi liczbami rozmytymi, jeżeli  $f_A(1) = g_A(1)$ , będzie to trójkątna OFN. Niech  $A$  i  $B$  będą dwoma trapezowymi OFN oraz  $r \in \mathbb{R}$ . Wówczas określamy:

- mnożenie liczby  $A$  przez liczbą rzeczywistą  $r$

$$r \cdot A = (r \cdot f_A(0), r \cdot f_A(1), r \cdot g_A(1), r \cdot g_A(0))$$

- operacja maksimum liczb  $A$  i  $B$

$$\max\{A, B\} = (\max\{f_A(0), f_B(0)\}, \max\{f_A(1), f_B(1)\}, \max\{g_A(1), g_B(1)\}, \max\{g_A(0), g_B(0)\})$$

- operacja minimum liczb  $A$  i  $B$

$$\min\{A, B\} = (\min\{f_A(0), f_B(0)\}, \min\{f_A(1), f_B(1)\}, \min\{g_A(1), g_B(1)\}, \min\{g_A(0), g_B(0)\})$$

- odległość liczb  $A$  i  $B$

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{1}{4}[(f_A(0) - f_B(0))^2 + (f_A(1) - f_B(1))^2 + (g_A(1) - g_B(1))^2 + (g_A(0) - g_B(0))^2]}.$$

W praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych, np. w sterowaniu rozmytym, rozmytych systemach wnioskujących czy w rozmytych metodach wielokryterialnych (np. w FSAW), ważną rolę odgrywa operacja defuzyfikacji.

**Definicja 2.** [Kosiński, Wilczyńska-Sztyma 2010]. Odwzorowanie  $\phi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy operacją defuzyfikacji, jeżeli dla  $A \in \mathfrak{R}$  oraz  $r \in \mathbb{R}$  spełnia warunki: 1)  $\phi(r^*) = r$ , 2)  $\phi(A + r^*) = \phi(A) + r$ , 3)  $\phi(r^* \cdot A) = r \cdot \phi(A)$ .

Niech  $A = (f_A(0), f_A(1), g_A(1), g_A(0))$  będzie trapezową skierowaną liczbą rozmytą. Popularne metody defuzyfikacji to:

- FOM (first of maximum) –  $\phi_{FOM}(f_A, g_A) = f_A(1)$ ,
- LOM (last of maximum) –  $\phi_{LOM}(f_A, g_A) = g_A(1)$ ,
- MOM (middle of maximum) –  $\phi_{MOM}(f_A, g_A) = \frac{1}{2}(f_A(1) + g_A(1))$ ,
- RCOM (random choice of maximum) –  $\phi_{RCOM}(f_A, g_A) = \lambda f_A(1) + (1 - \lambda)g_A(1), \lambda \in [0, 1]$ ,
- GM (geometric mean) –  $\phi_{GM}(f_A, g_A) = \frac{g_A(1)g_A(0) - f_A(0)f_A(1)}{g_A(1) + g_A(0) - f_A(0) - f_A(1)}$ ,
- COG (centre of gravity) –  $\phi_{COG}(f_A, g_A) = \frac{\int_0^1 f_A(s) + g_A(s)}{2} (f_A(s) - g_A(s)) ds}{\int_0^1 (f_A(s) - g_A(s)) ds}$ ,
- KKCOM (Kosiński Kacprzak choice of maximum)
  - jeżeli funkcje  $f_A$  i  $g_A$  są stałe, wówczas:  $\phi_{KKCOM}(A) = \frac{f_A(1) + g_A(1)}{2}$ ,
  - jeżeli funkcja  $f_A$  lub  $g_A$  nie jest stała, wówczas:

$$\phi_{KKCOM}(A) = \frac{|f_A(1) - \int_0^1 f_A(s) ds| \cdot f_A(1) + |\int_0^1 g_A(s) ds - g_A(1)| \cdot g_A(1)}{|\int_0^1 f_A(s) ds - f_A(1)| + |\int_0^1 g_A(s) ds - g_A(1)|}.$$

### 3. Metoda FTOPSIS oparta na OFN z obiektywnymi wagami

Rozważmy problem wielokryterialny złożony ze zbioru wariantów decyzyjnych  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  oraz zbioru kryteriów  $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  obejmującego: stymulanty –  $B$  (im wyższa wartość, tym lepiej) i destymulanty –  $C$  (im niższa wartość, tym lepiej). Metoda FTOPSIS oparta na skierowanych liczbach rozmytych z obiektywnymi wagami składa się z następujących etapów.

1. Wyznaczenie rozmytej macierzy decyzyjnej  $X = (x_{ij})$  ( $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ), gdzie  $x_{ij} = (f_{ij}(0), f_{ij}(1), g_{ij}(1), g_{ij}(0))$  jest trapezową OFN będącą oceną  $i$ -tego wariantu decyzyjnego ze względu na  $j$ -te kryterium. Dodatkową własność OFN, skierowanie, wykorzystano do pokazania typu kryterium. Stymulanty będą miały skierowanie dodatnie, a destymulanty ujemne.
2. Wyznaczenie rozmytej znormalizowanej macierzy decyzyjnej  $Z = (z_{ij})$ , gdzie

$$z_{ij} = \begin{cases} \left( \frac{f_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{f_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{g_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{g_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)} \right) & \text{gdy } j \in B \\ \left( \frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(0)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(1)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(1)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(0)} \right) & \text{gdy } j \in C \end{cases}$$

3. Wyznaczanie wag kryteriów z wykorzystaniem entropii.
  - 3.1. Defuzyfikacja macierzy  $Z = (z_{ij})$  i otrzymanie macierzy  $\Phi(Z) = (\phi(z_{ij}))$ .
  - 3.2. Normalizacja  $\Phi(Z)$  i otrzymanie macierzy  $N = (n_{ij})$ , gdzie  $n_{ij} = \frac{\phi(z_{ij})}{\sum_{i=1}^m \phi(z_{ij})}$ .
  - 3.3. Wyznaczenie dla każdego kryterium entropii  $e_j = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m n_{ij} \ln n_{ij}$  (przyjmujemy, że  $n_{ij} \ln n_{ij}$  jest równe 0 jeżeli  $n_{ij} = 0$ ).
  - 3.4. Wyznaczenie dla każdego kryterium poziomu zmienności  $d_j = 1 - e_j$ .
  - 3.5. Wyznaczenie wag poszczególnych kryteriów zgodnie z formułą  $w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}$ .
4. Wyznaczenie ważonej znormalizowanej macierzy decyzyjnej  $V = (v_{ij})$ , gdzie  $v_{ij} = z_{ij} \cdot w_j = (f_{z_{ij}}(0) \cdot w_j, f_{z_{ij}}(1) \cdot w_j, g_{z_{ij}}(1) \cdot w_j, g_{z_{ij}}(0) \cdot w_j)$ .
5. Wyznaczenie rozwiązania idealnego  $A^+ = (v_1^+, \dots, v_n^+)$  i antyidealnego  $A^- = (v_1^-, \dots, v_n^-)$ , gdzie  $v_j^+ = \max_i v_{ij}$ ,  $v_j^- = \min_i v_{ij}$ .
6. Wyznaczenie dla każdego wariantu decyzyjnego  $A_i$  odległości od rozwiązania idealnego  $d_i^+ = \sum_{j=1}^n d(v_{ij}, v_j^+)$  i antyidealnego  $d_i^- = \sum_{j=1}^n d(v_{ij}, v_j^-)$ .
7. Wyznaczenie syntetycznego miernika  $RC_i$  określającego względną bliskość do rozwiązania idealnego  $A^+$  każdego wariantu decyzyjnego  $A_i - RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}$ .
8. Ranking wariantów decyzyjnych  $A_i$  względem ich bliskość do ideału  $A^+$ . Najlepszym wariantem jest ten z największą wartością  $RC_i$ .

#### 4. Przykład numeryczny

Zaprezentowana w poprzedniej części rozmyta metoda TOPSIS oparta na skierowanych liczbach rozmytych z obiektywnymi wagami wyznaczonymi za pomocą entropii zostanie wykorzystana w przykładzie numerycznym opartym na danych umownych. Pozwoli to przeanalizować wpływ metody defuzyfikacji na wagi kryteriów, ich ranking oraz ranking wariantów decyzyjnych.

Założmy, iż proces decyzyjny polega na ocenie pięciu wariantów decyzyjnych  $\{A_1, A_2, \dots, A_5\}$  względem pięciu kryteriów  $\{K_1, K_2, \dots, K_5\}$ . Kryteria  $K_1, K_2$  i  $K_3$  są destymulantami, natomiast  $K_4$  i  $K_5$  są stymulantami. Ponieważ w procesie podejmowania decyzji występuje niepewność i nieprecyzyjność ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów, zostały one opisane za pomocą trapezowych skierowanych liczb rozmytych i zestawione w tabeli 1. W przypadku stymulanty OFN mają skierowania dodatnie, natomiast dla destymulant ujemne. W tabeli 2 zestawiono wagi kryteriów obliczone z wykorzystaniem entropii, stosując różne metody defuzyfikacji (w RCOM przyjęto  $\lambda = 0.1$ ) oraz ich rankingi ( $R$ ). Tabela 3 pokazuje wyniki uzyskane rozmytą metodą TOPSIS opartą na skierowanych liczbach rozmytych z wagami pokazanymi w tabeli 2 oraz rankingi wariantów decyzyjnych ( $R$ ).

**Tabela 1.** Rozmyta macierz decyzyjna o elementach będących trapezowymi OFN

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
$A_1$	(16,14,12,10)	(11,10,9,8)	(7,6,5,4)	(5,6,7,8)	(10,12,14,16)
$A_2$	(21,19,17,15)	(12,11,10,9)	(6,5,4,3)	(7,8,9,10)	(15,17,19,21)
$A_3$	(19,17,15,13)	(9,8,7,6)	(8,7,6,5)	(5,6,7,8)	(13,15,17,19)
$A_4$	(23,21,19,17)	(10,9,8,7)	(6,5,4,3)	(6,7,8,9)	(17,19,21,23)
$A_5$	(21,19,17,15)	(11,10,9,8)	(8,7,6,5)	(4,5,6,7)	(15,17,19,21)

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2.** Wagi kryteriów wyznaczone z wykorzystaniem różnych metod defuzyfikacji (RCOM –  $\lambda = 0.1$ ) oraz ich rankingi –  $R$

	FOM		LOM		MOM		RCOM		GM		COG		KKCOM	
	$w_j$	$R$	$w_j$	$R$	$w_j$	$R$	$w_j$	$R$	$w_j$	$R$	$w_j$	$R$	$w_j$	$R$
$w_1$	0,197	4	0,237	2	0,219	2	0,234	2	0,220	2	0,222	2	0,221	2
$w_2$	0,118	5	0,138	5	0,129	5	0,136	5	0,128	5	0,128	5	0,128	5
$w_3$	0,219	3	0,295	1	0,261	1	0,289	1	0,272	1	0,291	1	0,280	1
$w_4$	0,245	1	0,170	3	0,203	3	0,176	3	0,197	3	0,190	3	0,193	3
$w_5$	0,220	2	0,160	4	0,187	4	0,165	4	0,182	4	0,169	4	0,178	4

Źródło: opracowanie własne.

Analizując uzyskane wyniki dotyczące wag, zestawione w tabeli 2, zauważmy, że różne metody defuzyfikacji dają różne wagi kryteriów, które możemy podzielić na trzy grupy. Pierwszą grupę stanowi metoda FOM, która daje następujący ranking wag:  $w_2 < w_1 < w_3 < w_5 < w_4$ . Pozostałe metody defuzyfikacji dają ten sam ranking wag postaci:  $w_2 < w_5 < w_4 < w_1 < w_3$ . Do drugiej grupy możemy zaliczyć metody LOM i RCOM, ponieważ dają nie tylko ten sam ranking, ale również uzyskane wagi są zbliżone wartościami. Wynika to z faktu wyboru stałej  $\lambda = 0.1$  w metodzie RCOM, co oznacza istotny wpływ na wartość defuzyfikacji elementu  $g(1)$  skierowanych liczb rozmytych. Ostatnią grupę stanowią metody MOM, GM, COG i KKCOM. Dają one ten sam ranking kryteriów oraz nieznaczne różnice w wartościach uzyskanych wag. Jest to konsekwencja definicji tych metod defuzyfikacji, które dla skierowanych liczb rozmytych zbliżonych do trapezów równoramiennych (tzn. gdy  $|f(1) - f(0)| \approx |g(0) - f(1)|$ ) dają zbliżone rezultaty.

**Tabela 3.** Wyniki metody FTOPSIS opartej na OFN z wykorzystaniem wag uzyskanych różnymi metodami defuzyfikacji (RCOM -  $\lambda = 0.1$ ) oraz rankingi wariantów decyzyjnych - R

	FOM		LOM		MOM		RCOM		GM		COG		KKCOM	
	$RC_i$	R	$RC_i$	R	$RC_i$	R	$RC_i$	R	$RC_i$	R	$RC_i$	R	$RC_i$	R
$A_1$	0,396	3	0,449	3	0,425	3	0,445	3	0,428	3	0,436	3	0,431	3
$A_2$	0,665	1	0,627	2	0,644	2	0,630	2	0,645	2	0,646	2	0,645	2
$A_3$	0,383	4	0,371	4	0,376	4	0,372	4	0,372	4	0,365	4	0,370	4
$A_4$	0,664	2	0,636	1	0,649	1	0,639	1	0,650	1	0,650	1	0,650	1
$A_5$	0,235	5	0,206	5	0,219	5	0,208	5	0,216	5	0,207	5	0,213	5

Źródło: opracowanie własne.

Zwróćmy również uwagę na wyznaczone wagi  $w_1$  oraz  $w_5$  uzyskane dla kryteriów  $K_1$  (destymulanta) oraz  $K_5$  (stymulanta). Oceny tych kryteriów są jednakowe, ale mają różny charakter i jako skierowane liczby rozmyte różnią się skierowaniem. Biorąc pod uwagę metodę defuzyfikacji FOM, widzimy, że przy tych samych ocenach dla stymulanty (kryterium  $K_5$ ) otrzymana waga ma wyższą wartość w stosunku do pozostałych metod, co oznacza wyższy wpływ na końcową decyzję. Natomiast w przypadku kryterium  $K_1$  (destymulanta) sytuacja jest odwrotna.

Analizując uzyskane wyniki działania metody FTOPSIS opartej na skierowanych liczbach rozmytych z wagami uzyskanymi różnymi metodami defuzyfikacji i zestawione w tabeli 3, możemy zauważyć, że metoda defuzyfikacji może mieć wpływ na ranking wariantów decyzyjnych. Metoda FOM daje ranking  $A_5 < A_3 < A_1 < A_4 < A_2$ , przy czym różnica między wariantami  $A_4$  i  $A_2$  jest niewielka. Z kolei pozostałe metody defuzyfikacji dają ranking  $A_5 < A_3 < A_1 < A_2 < A_4$ , w którym warianty  $A_4$  i  $A_2$  zamieniają się miejscami. Zauważmy również, że uzyskane wyniki względnej bliskości wariantów decyzyjnych do ideału ( $RC_i$ ) w przypadku metod defuzyfikacji LOM, MOM, RCOM, GM, COG i KKCOM są zbliżone wartościami.



## 5. Zakończenie

W pracy zaprezentowano rozmytą metodą TOPSIS opartą na skierowanych liczbach rozmytych z wagami obiektywnymi. Wagi zostały wyznaczone na bazie zdefuzyfikowanej macierzy decyzyjnej z wykorzystaniem entropii.

W trakcie analiz dokonano następujących obserwacji. Zastosowane różne metody defuzyfikacji skierowanych liczb rozmytych dają różne wagi kryteriów oraz różny ranking kryteriów. Dodatkowo w sytuacji gdy dwa kryteria są ocenione jednakowo, ale różnią się skierowaniami (jedno jest stymulantą, a drugie destymulantą), uzyskane wagi są różne i w zależności od zastosowanej metody defuzyfikacji wyróżniają jedno z kryteriów. To z kolei wpływa bezpośrednio na ranking wariantów decyzyjnych w rozmytej metodzie FTOPSIS.

Zastosowanie defuzyfikacji do wyznaczenia wag kryteriów sprawia, że tracimy wiele cennych informacji dotyczących skierowanych liczb rozmytych, takich jak symetria, szerokość nośnika i jądra, położenie na osi  $OX$ . Dalsze prace będą obejmowały wyznaczanie wag obiektywnych w postaci skierowanych liczb rozmytych.

## Literatura

- Chen C.T., 2000, *Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment*, Fuzzy Sets and Systems, no. 114, s. 1–9.
- Hwang C.L., Yoon K., 1981, *Multiple Attribute Decision Making, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer.
- Jahanshahloo G.R., Hosseinzadeh Lotfi F., Izadikhah M., 2006, *An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data*, Applied Mathematics and Computation, no. 175, s. 1375–1384.
- Kacprzak D., 2015, *Metoda FSAW oparta na skierowanych liczbach rozmytych*, Przegląd Statystyczny, nr 2, s. 165–181.
- Kosiński W., 2006, *On fuzzy number calculus*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., no. 16, s. 51–57.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002, *Drawback of fuzzy arithmetics – new intuitions and propositions*, [w:] *Methods of Artificial Intelligence*, eds. T. Burczyński, W. Cholewa, W. Moczulski, Gliwice, s. 231–237.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2003, *Ordered fuzzy numbers*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, vol. 51(3), s. 327–338.
- Kosiński W., Wilczyńska-Sztyma D., 2010, *Defuzzification and Implication within Ordered Fuzzy Numbers*, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Spain, s. 1073–1079.
- Roszkowska E., Kacprzak D., 2016, *The fuzzy SAW and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers*, Information Sciences, no. 369, s. 564–584.