

Zum Auflösungsvermögen eines aberrationsfreien, optischen Systems mit zeitlich veränderlicher Austrittspupille*

EUGENIUSZ WNUCZAK

Physikalisches Institut, Technische Hochschule, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland.

Es wird der Einfluß einer Änderung der Maße der Austrittspupille, AP (Durchmesser bei einer kreisförmigen, Breite bei einer rechteckförmigen), die während des Lichtdurchgangs durch ein aberrationsfreies optisches System stattfinden, auf die Belichtung und Gestalt des Beugungsbildes eines auf der optischen Achse gelegenen Punktopjekts, sowie auf das Auflösungsvermögen des Systems untersucht. Es wird festgestellt, daß im Fall linearer Änderung der Maße der AP (beim Öffnen und Schließen, wie z.B. bei einem photographischen Objektiv mit Zentralverschluss), das Auflösungsvermögen im Grenzfall um 15% bei einer kreisförmigen und 20% bei einer rechteckförmigen AP nach dem Kriterium von Rayleigh (im Verhältnis zu dem Wert, der der vollen Öffnung der AP während der ganzen Belichtungszeit entspricht), sinkt.

1. Die Intensitätsverteilung in einem in der Gauss'schen Ebene gelegenen Beugungsbild eines auf der optischen Achse eines aberrationsfreien, optischen Systems mit kreisförmiger Austrittspupille gelegenen Objektpunkts ist bekanntlich [1, 2] durch die Formel

$$G(z) = G(0) \left(\frac{2J_1(z)}{z} \right)^2 \quad (1)$$

mit

$$G(0) = \frac{\Phi S'}{r_0^2 \lambda^2} = \frac{MS'^2}{r_0^2 \lambda^2} = \frac{\pi^2 M b'^2}{r_0^2 \lambda^2} \quad (2)$$

gegeben, wobei $G(0)$ die Intensität des Lichts im Mittelpunkt des Beugungsbildes, (des Airy'schen Lichtscheibchens), $J_1(z)$ – die Bessel'sche Funktion I-er Ordnung, ersten Grades, Φ – den durch die Austrittspupille fließenden Lichtstrom, S' – die Fläche der Pupille, r_0 – den Radius der Gauss'schen Kugelfläche, λ – die Lichtwellenlänge, M – die Emitanz der Strahlung in der Austrittspupille, b' – den Radius der Pupille bedeuten. Das Argument z der Bessel-Funktion ist der Entfernung u' des betrachteten Punktes vom Beugungsbildmittelpunkt direkt

* Vorgetragen an der VI Polnisch-Tschechoslovakischen Konferenz für Optik, Lubiatów (Polen), 25–28 September, 1984.

proportional

$$z = \frac{2\pi b'}{r_0 \lambda} u'. \quad (3)$$

Ändert sich während des Lichtdurchgangs die Größe der Austrittspupille, z.B. wenn ihr Radius zunächst wächst und danach sich wieder zu Null verkleinert, wie es bei den photographischen Objektiven mit einem Zentralverschluß der Fall ist, so ändert sich während dieser Zeit auch das Beugungsbild. Das entgültig z.B. in einer Photoschicht aufgezeichnete Beugungsbild hängt von der gesamten Belichtung der einzelnen Punkte während der Zeit ($2T$), in der das Licht durch die Pupille geht, ab

$$H'(z) = \int_{-T}^T G(z) dt'. \quad (4)$$

Führt man eine relative Zeitskala t , einen relativen Pupillenradius b , eine relative Koordinate u sowie eine dimensionslose Größe \bar{z} durch die Beziehungen

$$t = \frac{t'}{T}, \quad b = \frac{b'}{b'_m}, \quad u = \frac{u'}{u'_m}, \quad \bar{z} = \frac{z}{b} = au, \quad (5)$$

mit

$$a = 2\pi \frac{b'_m u'_m}{r_0 \lambda} \quad (6)$$

ein, wobei b'_m den Höchstwert von b' und u'_m – einen beliebigen Bezugsabschnitt bedeuten, so kann man (4), wenn man bedenkt, daß b und somit auch z zeitabhängig sind, in die Gestalt

$$H'(\bar{z}) = TG_m(0) \int_{-1}^1 b^4(t) B^2(\bar{z}, t) dt \quad (7)$$

mit den Bezeichnungen

$$G_m(0) = \frac{\pi^2 M b'_m}{r_0^2 \lambda^2}, \quad (8)$$

$$B(\bar{z}, t) = \frac{2J_1(\bar{z} b(t))}{\bar{z} b(t)} \quad (9)$$

bringen.

Für einen zeitlich symmetrischen Verlauf des sich Öffnens und Schließens der Austrittspupille ($b(t) = b(-t)$), was praktisch am häufigsten der Fall ist, kann man statt (7) auch

$$H'(\bar{z}) = 2TG_m(0) \int_0^1 b^4(t) B^2(\bar{z}, t) dt \quad (10)$$

schreiben.

Für eine relative Belichtungsverteilung

$$H(\bar{z}) = \frac{H'(\bar{z})}{H'(0)}, \quad (11)$$

die in der Mitte des Beugungsbildes zu 1 genormt ist, folgt aus (10)

$$H(\bar{z}) = \frac{\int_0^1 b^4(t) B^2(\bar{z}, t) dt}{\int_0^1 b^4(t) dt}. \quad (12)$$

In einem Sonderfall, in dem der Radius der Austrittspupille zunächst linear, mit Null beginnend wächst, bleibt dann eine Zeit lang konstant, (b'_m) und schließlich wieder zu Null fällt, Abb. 1 wird $b(t)$ durch die Formeln:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1+t}{1-k}, & -1 \leq t \leq -k, & \quad k \neq 1, \\ b &= 1, & -k \leq t \leq k, & \\ b &= \frac{1-t}{1-k}, & k \leq t \leq 1, & \quad k \neq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

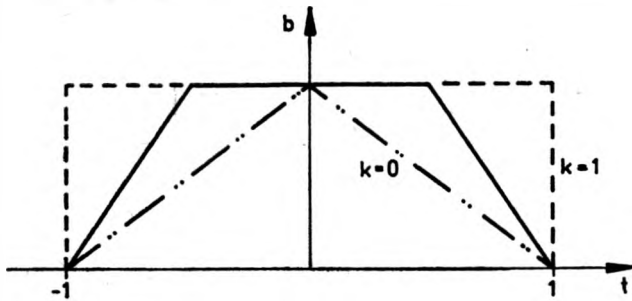


Abb. 1. Zeitverlauf des Radiuses der Austrittspupille (Breite bei einer rechteckförmigen)

festgelegt.

Das Integral im Nenner von (12) läßt sich in diesem Fall ermitteln und man bekommt somit

$$H(\bar{z}) = \frac{5}{4k+1} \int_0^1 b^4(t) B^2(\bar{z}, t) dt \quad (12a)$$

In der Abbildung 2a sind die anhand von (12a) und (13) errechneten Kurven der Belichtungsverteilung für drei Werte von k dargestellt worden. $k = 1$ bedeutet ein unendlich schnelles sich Öffnen und Schließen der Austrittspupille, $k = 0.5$ - den Fall, in dem die Zeit der Bewegung des Pupillenrandes gleich der Zeit ist, in der die Pupille völlig geöffnet ist und $k = 0$ - den Fall, in dem der Radius der Pupille sofort nach dem Erreichen des Höchstwertes zu sinken beginnt.

Es ist ersichtlich, daß je kürzer die Zeit, in der die Pupille völlig geöffnet ist (im Verhältniß zu ihrer ganzen "Arbeitsperiode"), um so breiter wird das aufgezeichnete Beugungsbild und somit um so kleiner das Auflösungsvermögen des optischen Systems.

Die in derselben Zeit $2T$ bei verschiedenen Werten von k durch die Austrittspupille durchgelassene Lichtenergie ist verschieden. Um die Energieverhältnisse richtig zu erfassen muß (10) mit ein und demselben Wert $H'(0)$ für $k = 1$ normiert werden. Aus (12) folgt in einem solchen Fall

$$\bar{H}(\bar{z}) = \int_0^1 b^4(t) B^2(\bar{z}, t) dt. \quad (12b)$$

Die Abbildung 2b stellt die Kurven der Belichtungsverteilung nach (12b) und (13) dar. Die zum Beugungsbild durch die Pupille durchgelassene Energie ist der durch die entsprechende $\bar{H}(\bar{z})$ -Kurve und die \bar{z} -Achse begrenzte Fläche proportional.

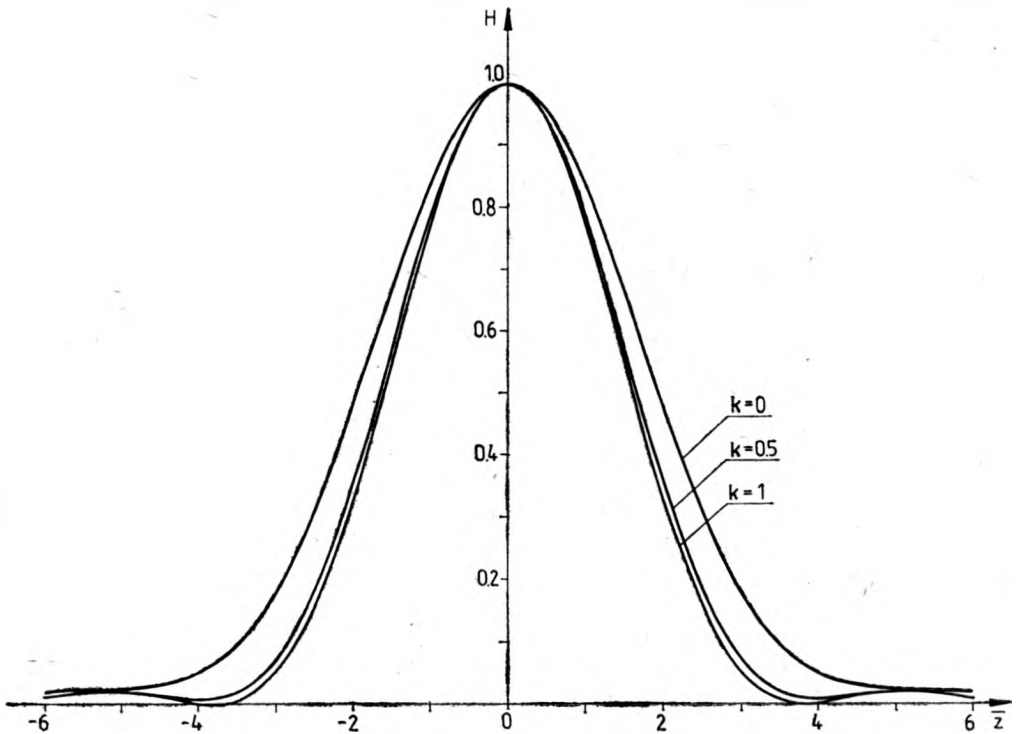


Abb. 2a. Belichtungsverteilung bei veränderlicher, kreisförmiger Austrittspupille

Das Auflösungsvermögen R kann für ein isoplanatisches optisches System als der Kehrwert der Entfernung der Maxima einer resultierenden $H(z)$ -Kurve errechnet werden, die zwei Objektpunkten entspricht, deren Belichtungsver-

teilungskurven nach (12), so gegeneinander verschoben sind, daß die Ordinate im Minimum im Verhältniss zu den Höchstwerten einen bestimmten, dem angenommenen Kriterium, z.B. von Rayleigh entsprechenden Wert P annimmt.

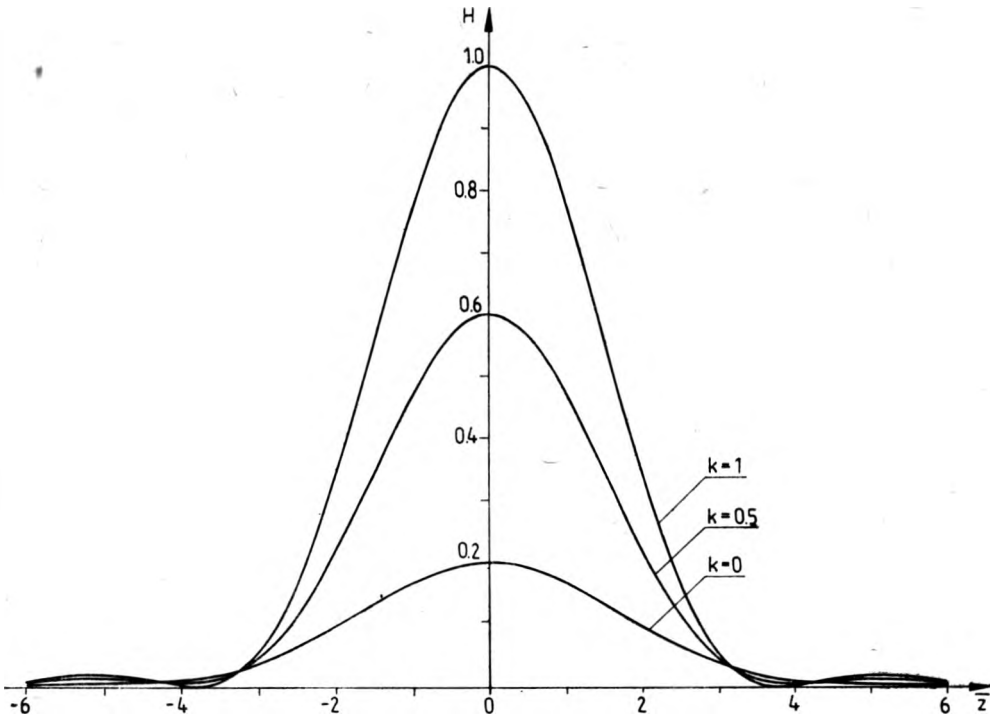


Abb. 2b. Belichtungsverteilung wie in Abb. 2a, bei gemeinsamer Normierung mit $H(0)$ für $k = 1$

Numerische Berechnungen wurden nach (12a) für einige Werte von k durchgeführt. Es wurden dabei relative Werte des Auflösungsvermögens, im Verhältniß zum Wert von $k = 1$, errechnet

$$z_w = \frac{R_k}{R_1} \tag{14}$$

Die Ergebnisse sind in der Tabelle zusammengestellt und in Abb. 3a graphisch dargestellt. Es ist ersichtlich, daß im Grenzfall $k = 0$ das Auflösungsvermögen um 14.9% nach dem Rayleigh-Kriterium ($P = 0.735$) sinkt.

2. Die Intensitätsverteilung im Beugungsbild im Fall einer rechteckförmigen Austrittspupille von der Höhe $2h'$ und Breite $2b'$ ist – für ein auf der optischen Achse gelegenes Punktobjekt und Bild in der Gauss'schen Ebene – durch die Formeln

$$G'(u', v') = G'(0, 0) \operatorname{sinc}^2 \frac{2\pi v' h'}{r_0 \lambda} \operatorname{sinc}^2 \frac{2\pi u' b'}{r_0 \lambda} \tag{15}$$

Relatives Auflösungsvermögen

k	Austrittspupille	
	kreisförmig	rechteckförmig
1	100 %	100 %
0,9	99,6	99,7
0,8	96,4	99,0
0,7	99,1	98,6
0,6	98,7	97,8
0,5	98,1	96,8
0,4	97,2	95,6
0,3	96,1	93,8
0,2	94,3	90,6
0,1	90,2	86,2
0	85,1	79,7

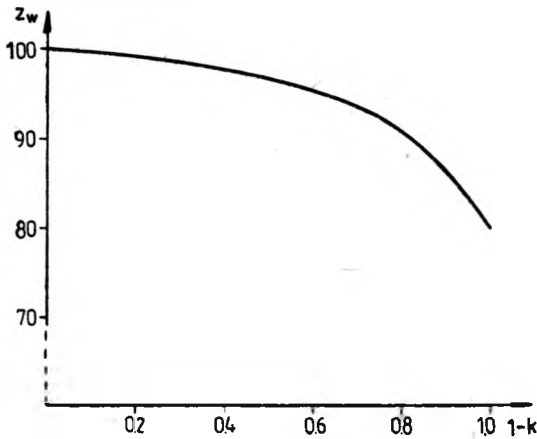


Abb. 3a. Relatives Auflösungsvermögen bei kreisförmiger, veränderlicher Austrittspupille

$$G'(0, 0) = \frac{\Phi S'}{r_0^2 \lambda^2} = \frac{MS'^2}{r_0^2 \lambda^2} = \frac{16Mh'^2 b'^2}{r_0^2 \lambda^2} \quad (16)$$

gegeben. u' , v' bedeuten die Koordinaten in der Gauss'schen Ebene mit den Achsen des Koordinatenkreuzes senkrecht und parallel zur Höhe der Pupille und Mittelpunkt in der Mitte des Beugungsbildes.

Unter Annahme einer konstanten Höhe und zeitabhängigen Breite der Austrittspupille ($2h' = \text{const}$, $b' = b'(t')$), und bei Beschränkung der Betrachtungen zu auf der u' -Achse gelegenen Punkten folgt aus (15), (16) unter Berücksichtigung von (5) und (6), mit $2b'_m$ -maximaler Breite der Austrittspupille:

$$G'(\bar{z}) = G'(0, 0) b^2(t) \text{sinc}^2[\bar{z} b(t)], \quad (17)$$

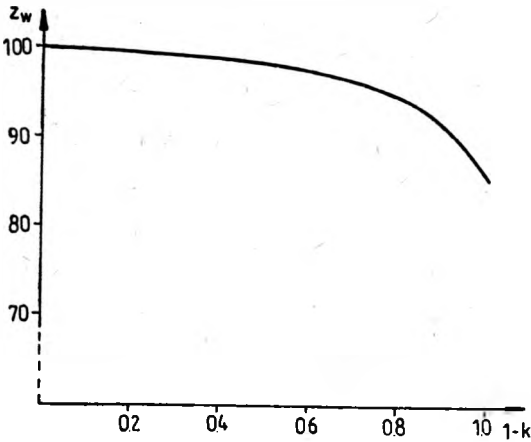


Abb. 3b. Relatives Auflösungsvermögen bei rechteckförmiger Austrittspupille

$$G'(0, 0) = \frac{16Mh'^2b_m'^2}{r_0^2\lambda^2} \quad (18)$$

$G'_m(0, 0)$ bezeichnet die Intensität der Strahlung im Mittelpunkt des Beugungsbildes bei maximaler Breite der Austrittspupille.

Die Belichtungsverteilung im Beugungsbild stellt somit, analog zu (10) die Formel

$$H'(\bar{z}) = 2TG'_m(0, 0) \int_0^1 b^2(t) \operatorname{sinc}^2[\bar{z}b(t)] dt \quad (19)$$

dar. Die relative Belichtungsverteilung wird nach (11) und (19) durch

$$H(\bar{z}) = \frac{\int_0^1 b^2(t) \operatorname{sinc}^2[\bar{z}b(t)] dt}{\int_0^1 b^2(t) dt} \quad (20)$$

dargestellt.

Im analogen Fall einer sich linear nach (13) öffnenden und schließenden, zentralen „Schlitzblende“ (Austrittspupille) lassen sich beide Integrale in (20) lösen und man erhält

$$H(\bar{z}) = \frac{6 [1 - (1 - k) \operatorname{sinc}(2\bar{z}) - k \cos(2\bar{z})]}{(2k + 1)(2\bar{z})^2} \quad (20a)$$

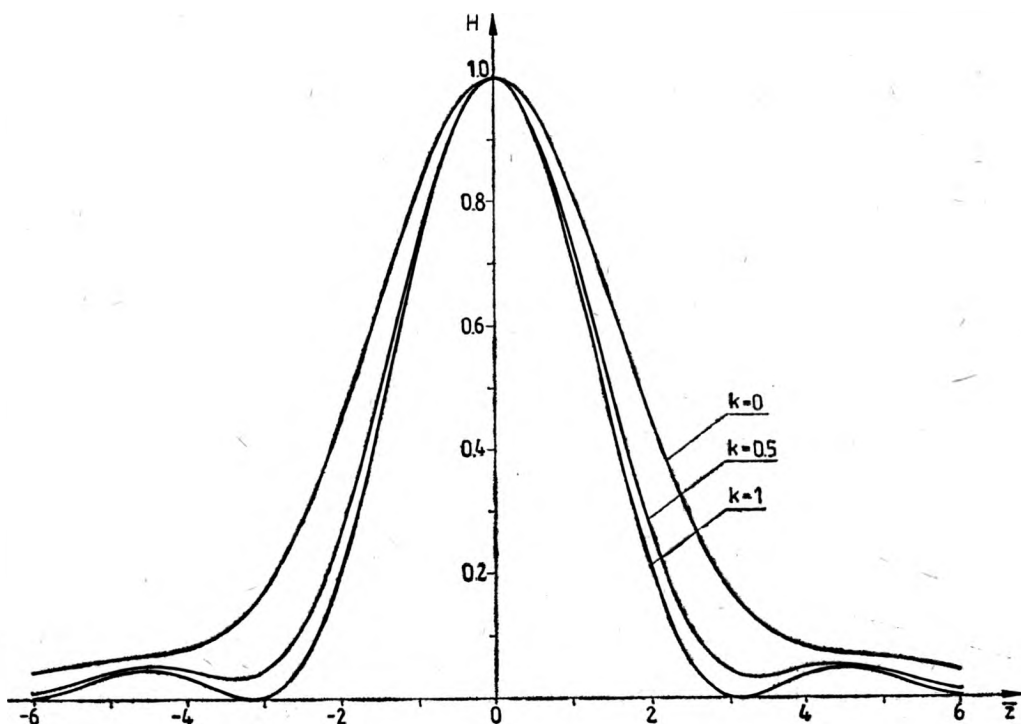


Abb. 4a. Belichtungsverteilung bei veränderlicher, rechteckförmiger Austrittspupille

Für den Fall einer gemeinsamen Normierung mit $H'(0)$ für $k = 1$ erhält man, analog zu (12b)

$$\bar{H}(z) = \frac{2[1 - (1 - k)\text{sinc}(2z) - k\cos(2z)]}{(2z)^2} \quad (20b)$$

Die Abbildung 4a stellt die Kurven der Belichtungsverteilung $H(z)$ nach (20a) für $k = 1, 0.5, 0$, die Abb. 4b – analoge Kurven $\bar{H}(z)$ nach (20b) dar.

Das relative Auflösungsvermögen wurde ebenso wie im Fall der kreisförmigen Austrittspupille berechnet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle zusammengestellt und graphisch in der Abb. 3b dargestellt. Der maximale Abfall des Auflösungsvermögens für $k = 0$ beträgt 20.3% nach dem Kriterium von Rayleigh und ($P = 0.811$).

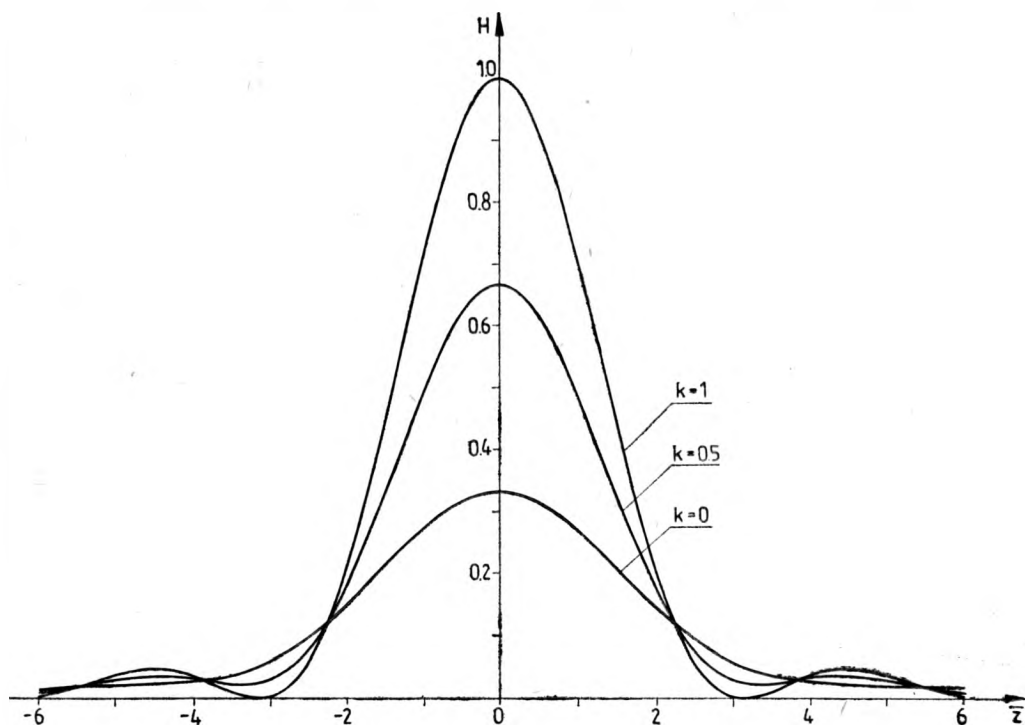


Abb. 4b. Belichtungsverteilung wie in Abb. 4a, bei gemeinsamer Normierung mit $H(0)$ für $k = 1$

Literatur

- [1] BORN M., WOLF E., *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford 1968.
 [2] RATAJCZYK F., *The Effect of Local Inhomogeneities and Discontinuities on the Imaging Quality of Optical Instruments* (in Polish), Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1979.

Received October 11, 1984

Der Autor is Herrn Professor F. Ratajczyk zu herzlichem Dank für die Anregung und Diskussionen bei der Bearbeitung des Thema verpflichtet.

Разрешающая способность безабберационной оптической системы с переменным во время экспозиции выходным зрачком

Исследовалось влияние изменения размеров выходного зрачка в безабберационной оптической системе происходящей во время регистрации света (нпр. в фотографической эмульсии) на распределение плотности излучения в дифракционном изображении точки, расположенной на оптической оси а также на разрешающую способность. Было обнаружено, что в случае линейного изменения размеров (открытие и раскрытие зрачка – подобно тому как центральный затво в объективах), разрешающая способность уменьшается по отношению к величине при постоянно открытом зрачке, в крайнем случае на 15% для кругового зрачка и на 20% для прямоугольного зрачка – по критерию Рэля.