[illegible]

G. FUBINI - E. ČECH

GEOMETRIA PROIETTIVA DIFFERENZIALE

TOMO PRIMO

LABORAVI · FIDENTER

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

Tipografia del Seminario - Padova - III-1926

A

LUIGI BIANCHI

GLI AUTORI

PREFAZIONE

Scopo di quest' opera è quello di raccogliere e coordinare i risultati ottenuti in recenti studi di geometria differenziale: risultati che da soli costituiscono un nuovo ampio capitolo di dottrine geometriche dedicato alla ricerca delle proprietà differenziali invarianti per collineazioni. La grande ampiezza di queste ricerche, e il vasto sviluppo da esse ricevuto negli ultimi anni ha dato al libro una mole tale da consigliare alla Casa Editrice Nicola Zanichelli, così benemerita degli studii matematici italiani, di dividere l' opera in due volumi. L' indice darà una chiara idea degli argomenti trattati.

La redazione è dovuta alla collaborazione dei due autori; per i risultati che sembrano nuovi si troverà sovente, anche soltanto con la iniziale F oppure Č, indicato a quale dei due spetti la priorità.

Gli Autori infine esprimono qui tutta la loro riconoscenza sia alla Casa Zanichelli, sia agli illustri Colleghi che hanno voluto redigere notevolissime appendici per il loro trattato.

INTRODUZIONE

§ 1. - Coordinate, versi, orientazioni.

A) Coordinate di punto, piano, retta.

Siano x, y, z, t coordinate omogenee di punto, ξ, η, ζ, τ coordinate omogenee di piano. Indicheremo un punto o un piano con la sola sua prima coordinata x o ξ. Dati n punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oppure più semplicemente con $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ indicheremo sia *la matrice*

$$(1) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{array} \right\|$$

che *i massimi suoi minori*. Notazioni analoghe varranno per n piani ξ_i. Per $n=4$ tale matrice si riduce a un determinante. Per $n=3$ con (x_1, x_2, x_3) indichiamo quindi non solo la matrice delle x_i, y_i, z_i, t_i, $(i=1,2,3)$ ma anche i suoi minori del terzo ordine; e per evitare equivoci di segno, determiniamo senz'altro di considerare i complementi algebrici di x_4, y_4, z_4, t_4 in (x_1, x_2, x_3, x_4). Per $n=2$, con (x_1, x_2) indichiamo non solo la matrice delle x_i, y_i, z_i, t_i, $(i=1,2)$, ma anche i suoi minori del secondo ordine; e per evitare equivoci, porremo:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{ii}=0\,, \quad p_{ij}=-p_{ji} \\ p_{12}=(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -p_{21}\,;\ p_{13}=(x_1 z_2 - x_2 z_1) = -p_{31}\,; \\ \text{ecc.};\ p_{34}=(z_1 t_2 - z_2 t_1) = -p_{43}\,. \end{array} \right.$$

Le p_{rs} sono le coordinate di Plücker della retta congiungente i punti x_1 ed x_2.

Dualmente, se ξ_1, ξ_2 sono due piani, porremo:

$$\pi_{ii}=0,\ \pi_{12}=-\pi_{21}=(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1);\ \pi_{13}=-\pi_{31}=$$
$$=(\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1);\ldots;\ \pi_{34}=-\pi_{43}=(\zeta_1\tau_4-\zeta_4\tau_1).$$

Le π_{rs} sono le coordinate di Plücker della retta intersezione dei piani ξ_1, ξ_2. Ora, se i piani ξ_1, ξ_2 contengono i punti x_1, x_2, le due rette precedenti coincidono; ed è ben noto che le coordinate dei precedenti punti e piani (determinate al solito a meno di un fattore, perchè si tratta di coordinate omogenee) si possono scegliere in guisa che sia proprio:

$$\left\{\begin{array}{l} p_{12}=\pi_{34},\ p_{34}=\pi_{12},\ p_{13}=\pi_{42}=-\pi_{24}, \\ \pi_{13}=p_{42},\ p_{14}=\pi_{23},\ p_{23}=\pi_{14}. \end{array}\right. \tag{3}$$

Queste uguaglianze saranno indicate simbolicamente con

$$(x_1,\ x_2)=(\xi_1,\ \xi_2). \tag{4}$$

Se invece i punti x_1, x_2, x_1', x_2' giacciono su una stessa retta, la

$$(x_1,\ x_2)=(x_1',\ x_2') \tag{5}$$

indica che:

$$x_1y_2-x_2y_1=x_1'y_2'-x_2'y_1' \text{ ecc., } z_1t_2-z_2t_1=z_1't_2'-z_2't_1',$$

ossia, definendo le p' in modo analogo alle p, che: $p_{rs}=p'_{rs}$. Si noti il *differente* significato che, per definizione, hanno le (4), (5), dovuto al fatto che in (5) figurano in entrambi i membri coordinate x, x' di punto e in (4) coordinate x di punto in un membro, coordinate ξ di piano nell'altro. Così le:

$$(\xi_1,\ \xi_2)=(\xi_1',\ \xi_2') \tag{5$_{\text{bis}}$}$$

hanno un significato analogo a (5), indicano cioè che $\pi_{rs}=\pi'_{rs}$.

Talvolta le sei coordinate di una retta, anzichè essere contraddistinte da indici, sono indicate con lettere differenti; e si pone:

$$p_{12}=l,\ p_{13}=m,\ p_{14}=n,\ p_{34}=p,\ p_{42}=q,\ p_{23}=r.$$

Anche una retta sarà indicata, enunciandone una sola coordinata; e noi diremo sovente la retta p anzichè dire la retta di coordinate p_{rs} oppure p, q, r, l, m, n.

B) I simboli S, Σ.

Con una espressione del tipo Sx^2 (oppure $S\xi^2$, oppure $S\xi x$) indichiamo una somma, i cui addendi si ottengono dal primo, rotando le coordinate di punto o di piano. Così p. es.

$$(6)\qquad Sx^2=x^2+y^2+z^2+t^2,\quad S\xi^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\tau^2,$$
$$S\xi x=\xi x+\eta y+\zeta z+\tau t,\ \text{ecc.}$$

Invece con espressioni del tipo Σx_i^2, $\Sigma \xi_i x_i$, ecc. indichiamo somme i cui addendi si ottengono dal primo, facendo variare l'indice i. Così p. es. se abbiamo 3 punti x_i o 3 piani ξ_i $(i=1, 2, 3)$, poniamo:

$$(7)\qquad \Sigma x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad \Sigma\xi_i^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2,$$
$$\Sigma\xi_i x_i=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3,\ \text{ecc.}$$

Talvolta incontreremo anche espressioni del tipo

$$S\Sigma x_i^2=\Sigma Sx_i^2$$

e analoghe; il loro significato è chiaro senz'altro, così p. es. noi porremo:

$$(8)\qquad S\Sigma x_i^2=\sum_{i=1}^{3}(x_i^2+y_i^2+z_i^2+t_i^2),\ \text{ecc.}$$

se si tratta di 3 punti x_i.

Significato analogo ha la scrittura Spp', quando p e p' siano le coordinate di due rette. Se la prima congiunge i punti x_1, x_2, la seconda i punti x_3, x_4, così che

$$p = (x_1,\ x_2),\ p' = (x_3,\ x_4),$$

si porrà:

$$(9)\quad Spp' = p_{12}\,p'_{34} + p_{34}\,p'_{12} + p_{13}\,p'_{42} + p_{42}\,p'_{13} + p_{14}\,p'_{23} + p_{23}\,p'_{14} =$$

$$= (pl' + p'l + q'm + qm' + rn' + r'n).$$

$$(10)\qquad = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\,.$$

In particolare

$$Sp^2 = 2\,(p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23}) = 2\,(pl + qm + rn).$$

Cosicchè, com' è ben noto: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* p, q, r, l m, n, *siano coordinate di una retta è che* $Sp^2 = 0$; *affinchè* p *e* p' *siano due rette incidenti è che* $Spp' = 0$.

Se p è la retta individuata dai punti x_1, x_2 e p' la retta intersezione dei piani ξ_1 e ξ_2 così che

$$p = (x_1\ x_2),\quad p' = (\xi_1\,\xi_2)\ (*),$$

allora:

$$(11)\qquad Spp' = S\,(x_1,\ x_2)\,(\xi_1\,,\xi_2) = \begin{vmatrix} S\,\xi_1\,x_1 & S\,\xi_1\,x_2 \\ S\,\xi_2\,x_1 & S\,\xi_2\,x_2 \end{vmatrix}.$$

(*) Questa seconda uguaglianza indica che:

$$p'_{12} = \pi'_{34} = (\zeta_1\,\tau_2 - \tau_1\,\zeta_2),\ \ldots\ldots,\ p'_{34} = \pi'_{12} = (\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1).$$

C) Orientazioni di una retta.

Diremo punto *analitico* una quaterna di valori reali non tutti nulli delle x, y, z, t determinati a meno di un fattore *positivo*. Le quaterne x, y, z, t e $-x, -y, -z, -t$, pure individuando uno stesso punto geometrico, si considereranno pertanto come definenti due punti *analitici* distinti; in modo simile definiremo i piani *analitici*.

Due punti *analitici* x_1 ed x_2 determinano un *verso* sulla retta che li congiunge; il verso in cui si muove il punto

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \text{ per } \mu : \lambda$$

crescente; così due piani *analitici* ξ_1 e ξ_2 determinano nel loro fascio il verso in cui ruota il piano $\lambda \xi_1 + \mu \xi_2$ per $\mu : \lambda$ crescente.

Siano dati 4 punti analitici

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ tali che } (x_1 x_2 x_3 x_4) > 0 .$$

Considereremo *associati* il verso per $\mu : \lambda$ crescente in cui si muove il punto $\lambda x_1 + \mu x_2$, e quello in cui ruota il piano che dai punti x_1, x_2 proietta la punteggiata $\lambda x_3 + \mu x_4$. Al variare dei punti x_3, x_4 in guisa che sia sempre $(x_1 x_2 x_3 x_4) > 0$, cosicchè in particolare i punti x_i non diventano mai complanari, io dico *che non cambia l'associazione* dei versi sulla punteggiata x_1, x_2 e sul fascio dei piani passanti per essa. Ciò si può dimostrare direttamente, o con considerazioni di continuità, oppure anche trasformando la precedente definizione in modo da renderla indipendente da x_3, x_4. Siano ξ_1, ξ_2 due piani passanti per x_1, x_2, e sia $(\xi_1 \xi_2) = (x_1 x_2)$. Sarà:

$$S(\xi_1 \xi_2)(x_3 x_4) = S(x_1 x_2)(x_3 x_4)$$

cioè:

$$\begin{vmatrix} S \xi_1 x_3 & S \xi_1 x_4 \\ S \xi_2 x_3 & S \xi_2 x_4 \end{vmatrix} = (x_1 x_2 x_3 x_4) > 0 .$$

Il piano $\rho\,\xi_1 + \sigma\,\xi_2$ passa per $\lambda\,x_3 + \mu\,x_4$ se:

$$0 = S(\rho\,\xi_1 + \sigma\,\xi_2)(\lambda\,x_3 + \mu\,x_4) = \rho\lambda S\xi_1 x_3 +$$
$$+ \rho\mu S\xi_1 x_4 + \lambda\sigma S\xi_2 x_3 + \mu\sigma S\xi_2 x_4$$

ossia:

$$\frac{\sigma}{\rho} = -\frac{\frac{\mu}{\lambda} S\,\xi_1 x_4 + S\,\xi_1 x_3}{\frac{\mu}{\lambda} S\,\xi_2 x_4 + S\,\xi_2 x_3}$$

In virtù della precedente disuguaglianza $\frac{\sigma}{\rho}$ cresce con $\frac{\mu}{\lambda}$; ciò che avviene anche se le $(\xi_1\ \xi_2)$ differiscono per un fattore *positivo* dalle $(x_1\ x_2)$. Quindi:

Se i piani ξ_1, ξ_2 *passano per i punti* x_1 *ed* x_2, *se* $(\xi_1\ \xi_2)$ *differiscono per un fattore positivo dalle* $(\mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2)$, *allora sono associati i versi per* $\mu:\lambda$ *crescente nella punteggiata* $\lambda\,\mathrm{x}_1 + \mu\,\mathrm{x}_2$ *e nel fascio* $\lambda\xi_1 + \mu\xi_2$, *e sono pure tra loro associati i versi per* $\mu:\lambda$ *decrescente.*

Si noti che *questa associazione, se è dato il tetraedro fondamentale, dipende esclusivamente dalla retta* (e non dal modo come su essa sono stati scelti i punti x od i piani ξ). Ciò è evidente se ai punti x_1, x_2 sostituiamo altri due punti $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ in guisa che $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ differiscano per un fattore *positivo* da (x_1, x_2). Ma anche se cambiamo i segni, il modo d'associazione non varia. Infatti p. es. cambiando x_1 in $-x_1$, oppure x_2 in $-x_2$, oppure x_1 con x_2, si dovrà fare una operazione analoga sulle ξ, affinchè $(\xi_1\ \xi_2)$ e $(x_1\ x_2)$ differiscano per un fattore positivo. E la precedente associazione di versi resta inalterata.

Tale associazione di versi si dirà l'*orientazione proiettiva* della retta; essa dipende soltanto, data la retta, dal sistema di coordinate, cioè dal tetraedro di riferimento.

Dalla definizione segue immediatamente che, se sono dati 4 punti x_1, x_2, x_3, x_4 tali che $(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) > 0$, ossia, *se sono date due rette* p e p' [essendo $p = (x_1\ x_2)$, $p' = (x_3 x_4)$] *tali che* $Spp' > 0$, allora il verso per $\mu:\lambda$ crescente sulla punteggiata $\lambda x_1 + \mu x_2$ è quello associato al verso in cui ruota il piano che dalla stessa retta p proietta $\lambda x_3 + \mu x_4$, quando $\mu:\lambda$ cresce.

D) Orientazione di un fascio.

Sia dato un *elemento analitico* (x, ξ) cioè un punto analitico x e un piano analitico ξ che si appartengono, così che si abbia $S\,x\,\xi = 0$. Scegliamo in ξ altri due punti analitici x_2, x_3 in guisa tale che ξ e (x, x_2, x_3) differiscano per un fattore positivo; e per x facciamo passare due piani ξ_2, ξ_3 in guisa che altrettanto avvenga per x e (ξ, ξ_2, ξ_3). Allora x ed $[(x, x_2, x_3), \xi_2, \xi_3]$ differiranno per un fattore positivo. Il primo minore di questa matrice, cioè il complemento algebrico di χ nel determinante

$$[(x,\ x_2,\ x_3),\ \xi_2,\ \xi_3,\ \chi]$$

è il prodotto della matrice (x, x_2, x_3) per la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \tau_3 \end{vmatrix}$$

cambiato di segno, cioè, poichè $S\,\xi_2\,x = S\,\xi_3\,x = 0$, vale

$$-\,x\,S\,(x_2\,x_3)\,(\xi_2\,\xi_3) = -\,x\,(S\,x_2\,\xi_2\,S\,x_3\,\xi_3 - S\,x_2\,\xi_3\,S\,x_3\,\xi_2).$$

Poichè deve differire da x per un fattore positivo, l' *espressione*

$$S\,(x_2\,x_3)\,(\xi_2\,\xi_3) = S\,x_2\,\xi_2\,S\,x_3\,\xi_3 - S\,x_2\,\xi_3\,S\,x_3\,\xi_2$$

sarà negativa. E quindi, poichè il piano $\rho\,\xi_2 + \sigma\,\xi_3$ è incidente al punto $\lambda\,x_2 + \mu\,x_3$ quando

$$0 = S(\rho\,\xi_2 + \sigma\,\xi_3)(\lambda\,x_2 + \mu\,x_3) =$$

$$= \rho\,\lambda\,\{S\,\xi_2\,x_2 + \frac{\mu}{\lambda}\,S\,\xi_2\,x_3 + \frac{\sigma}{\rho}\,S\,\xi_3\,x_2 + \frac{\mu}{\lambda}\,\frac{\sigma}{\rho}\,S\,\xi_3\,x_3),$$

ne segue che $\dfrac{\sigma}{\rho}$ è *decrescente* per $\dfrac{\mu}{\lambda}$ *crescente* e viceversa.

Il verso di $\mu : \lambda$ *crescente sulla punteggiata* $\lambda x_2 + \mu x_3$ *che coincide col verso per* $\sigma : \rho$ *decrescente nel fascio* $\rho \xi_2 + \sigma \xi_3$ *(segato con* ξ*) si diranno il verso positivo nel fascio di vertice* x *e piano* ξ.

Mentre, dato il tetraedro di riferimento, *una retta individua la sua orientazione proiettiva, non basta dare un fascio per individuarne il suo verso positivo.* Questo infatti si *conserva cambiando contemporaneamente di segno* x *e* ξ, *ma si inverte cambiando di segno le sole* x *o le sole* ξ. Questo verso invertito si può anche considerare come il verso del fascio (ξ, x) indicato enunciando prima le coordinate del piano analitico ξ poi quelle del punto analitico x.

E) Alcune identità di matrici.

$$(12) \quad \begin{cases} [(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4)] = (x_1 x_2)(x_1 x_2 x_3 x_4) \\ [x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4), (x_1 x_3 x_4)] = x_1 (x_1 x_2 x_3 x_4)^2 \\ [(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4), (x_1 x_3 x_4), (x_2, x_3, x_4)] = (x_1 x_2 x_3 x_4)^3. \end{cases}$$

§ 2 - Collineazioni.

A) Preliminari.

Una collineazione è definita da formole del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{x} = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t \\ \overline{y} = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t \\ \overline{z} = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34} t \\ \overline{t} = a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} t \end{cases}$$

a cui corrisponde sui piani la:

$$(1)_{\text{bis}} \quad \xi = a_{11} \overline{\xi} + a_{21} \overline{\eta} + a_{31} \overline{\zeta} + a_{41} \overline{\tau}$$

e analoghe o anche, se A_{rs} è il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante $A = |a_{rs}|$, diviso per lo stesso A:

$$(1)_{ter} \qquad \overline{\xi} = A_{11}\xi + A_{12}\eta + A_{13}\zeta + A_{14}\tau.$$

Il determinante A, *differente da zero per collineazioni non degeneri, si dirà il modulo della collineazione.* È identicamente:

$$(2) \qquad S\xi x = S\overline{\xi}\,\overline{x}$$

La (1) si può riguardare come *prodotto* delle:

$$\overline{x} = \rho x, \quad \overline{x} = \frac{a_{11}}{\sqrt[4]{A}} x + \frac{a_{12}}{\sqrt[4]{A}} y + \frac{a_{13}}{\sqrt[4]{A}} z + \frac{a_{14}}{\sqrt[4]{A}} t$$

e analoghe, ove

$$\rho = \sqrt[4]{A}.$$

La prima si dirà una *collineazione moltiplicativa di fattore* ρ e geometricamente equivale alla trasformazione identica; la seconda si dirà *unimodulare* perchè ha il modulo 1. Questa decomposizione, che nel campo complesso è sempre possibile, è invece nel campo reale possibile soltanto se $A > O$. *Nel campo reale cioè ogni collineazione a modulo positivo è ancora scomponibile nel prodotto di una collineaz. moltiplicativa e di una unimodulare.* Invece *ogni collineazione a modulo negativo è prodotto di una collineaz. a modulo positivo e di una particolare collineaz. a modulo negativo* (p. es. della $\overline{x} = -x, \overline{y} = y, \overline{z} = z, \overline{t} = t$). *Quelle a modulo positivo conservano* il segno dei determinanti $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ e perciò *la legge di orientazione delle rette: quelle a modulo negativo* (o di seconda specie) *invertono tale legge di orientazione.*

Noi, per studiare gli invarianti proiettivi, cercheremo dapprima gli invarianti per le collineazioni unimodulari, che diremo *invarianti unimodulari.* Dedurremo poi da questi gli invarianti proiettivi per collineazioni a modulo positivo, *normando* le coordinate degli enti studiati (punti, rette o piani) cioè fissando in qualche modo il fattore di proporzionalità delle loro coordinate omogenee.

B) **Collineazioni nello spazio rigato.**

Una collineaz. moltiplicativa di fattore $\pm\rho$ individua evidentemente una trasformazione moltiplicativa di fattore ρ^2 sulle coordinate di retta; e viceversa una collineaz. unimodulare sulle x equivale ad una collineazione ancora unimodulare sulle coordinate di retta che trasforma in sè la forma quadratica

$$Sp^2 = 2\,(lp + mq + nr)\,,$$

e quindi anche la forma bilineare

$$Spp' = lp' + l'p + m'q + mq' + n'r + nr'\,.$$

Viceversa sia data una collineazione unimodulare sulle p che trasformi in sè stessa tali forme. Essa porterà due rette incidenti p, p' in due rette incidenti $\overline{p}$, $\overline{p}'$ e perciò porterà un fascio di rette in un fascio di rette, una stella di rette in un' altra stella oppure in un piano rigato. Io dico che il secondo caso è da escludere. Infatti in tal caso, o variando con continuità la trasform. considerata, o moltiplicandola per una collineazione unimodulare, possiamo supporre che alla nostra trasform. sulle p corrisponda nello spazio la reciprocità

$$\overline{\xi} = a\,x,\ \overline{\eta} = b\,y,\ \overline{\zeta} = c\,z,\ \overline{\tau} = d\,t$$

con a, b, c, d costanti, cosicchè la nostra trasformazione sarebbe

$$\overline{\pi}_{12} = \overline{p}_{34} = ab\,p_{12}, \overline{\pi}_{13} = \overline{p}_{42} = db\,p_{13}; \ldots\ldots ; \overline{\pi}_{34} = \overline{p}_{12} = cd\,p_{34}$$

che è a *modulo* negativo.

Una collineazione a modulo negativo è prodotto di una collineazione a modulo positivo per la collineazione,

$$\overline{x} = -x,\ \overline{y} = y,\ \overline{z} = z,\ \overline{t} = t.$$

Questa individua sulle coordinate di retta una trasf. lineare intera omog. a modulo — 1, che cambia di segno la forma Sp^2.

Una reciprocità è prodotto di una collineazione C per la reciprocità

$$\bar{\xi} = x, \bar{\eta} = y, \bar{\zeta} = z, \bar{\tau} = t,$$

alla quale sulle p corrisponde la

$$\overline{p}_{12} = p_{34}, \overline{p}_{13} = p_{42}, \text{ecc.}, \overline{p}_{34} = p_{12}$$

che è una trasform. di modulo negativo, che trasforma in sè la forma Sp^2. In conclusione:

Le trasform. sulle p *unimodulari che trasformano* Sp² *in sè sono tutte e sole quelle che corrispondono a collineazioni unimodulari, quelle a modulo — 1 che cambiano di segno* Sp² *corrispondono alle collineazioni di modulo — 1; quelle a modulo — 1 che trasformano* Sp² *in sè, e quelle unimodulari che cambiano* Sp² *di segno sono tutte e sole quelle che corrispondono ad una correlazione.*

§ 3 - Contatto di curve e superficie.

A) Contatto di curve.

Due curve C, $\overline{C}$ siano definite dando le coordinate *non* omogenee x, y, z ed $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, dei loro punti in funzione di due parametri u, $\overline{u}$. (Si suppone cioè $t = 1$, $\overline{t} = 1$). Se hanno comune un punto A, ivi sarà $x = \overline{x}$. Qui e nel seguito si intenderanno sempre sottintese le uguaglianze analoghe per y e per z. Se ivi si toccano sarà:

$$(1) \qquad x = \overline{x}, x_u = \sigma\, \overline{x}_{\overline{u}},$$

ove σ è un conveniente fattore. Il contatto sarà tripunto (di secondo ordine) se

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{x}^2},\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2\overline{z}}{d\overline{x}^2},$$

ossia se i rapporti

$$\frac{y_{uu}\,x_u - y_u\,x_{uu}}{x_u^3}\ \text{e}\ \frac{z_{uu}\,x_u - z_u\,x_{uu}}{x_u^3}$$

non mutano in A, sostituendo alle x, y, z, u le $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{u}$; in altre parole se esiste un' altra costante τ tale che:

(2) $$x_{uu} = \beta^2\,\overline{x}_{\overline{u}\overline{u}} + \tau\,\overline{x}_{\overline{u}} \text{ (e analoghe in } y, z),$$

La (1) si può enunciare dicendo che si può sulla $\overline{C}$ scegliere un nuovo parametro u', tale che in A sia

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial \overline{x}}{\partial u'}\ \left(\text{Basta che sia } \beta = \frac{\partial u}{\partial u'} \text{ nel punto } A\right).$$

La (2) si può enunciare dicendo che con conveniente scelta di tale parametro nel punto A si ha:

$$\frac{\partial^i x}{\partial u^i} = \frac{\partial^i \overline{x}}{\partial u'^i}\ (i = 1,\ 2)\ \left(\text{Basterà che in } A \text{ sia anche } \tau = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial u^2}\right).$$

Risultati analoghi valgono per contatti di ordine superiore. Se fin dal principio era $u = \overline{u}$, veniva determinata tra i punti delle due curve una corrispondenza, quando fossero considerati come omologhi punti individuati dallo stesso valore di u. In tal caso, se nella (1) è $\beta = 1$, o nella (2) $\beta = 1$, $\tau = 0$, diremo che il contatto è *analitico*, o anche che le due curve hanno in A comuni due o tre punti infinitamente vicini, omologhi l' uno dell' altro nella corrispondenza citata.

B) Contatto di superficie.

Siano S, $\overline{S}$ due superficie, i cui punti x, y, z ed $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ sono rispettivamente funzioni dei parametri u, v, e dei parametri $\overline{u}$, $\overline{v}$. Quando mai le superficie hanno un contatto di ordine r in un punto comune A di coordinate a, b, c? È necessario e sufficiente che, sviluppando $z-c$ in serie di potenze di $x-a$, $y-b$, oppure $\bar{z}-c$ in serie di potenze di $\bar{x}-a$, $\bar{y}-b$, si abbiano due sviluppi aventi a comune tutti i coefficienti fino a quelli dei termini di grado r inclusi, ossia che, assumendo a nuovi parametri u_1, v_1 sull' una le $x-a$, $y-b$, e sull' altra le $\bar{x}-a$, $\bar{y}-b$, siano identici i differenziali di x, y, z e quelli di $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ fino a quelli di ordine r inclusi. E questa proprietà si conserva per una trasformazione $u_1=\varphi(u_2, v_2)$, $v_1=\psi(u_2, v_2)$ dei parametri. Noi potremo servircene in guisa da rendere $u_2=u$, $v_2=v$; allora $\bar{u}$, $\bar{v}$ risulteranno funzioni delle u, v. Quindi: *Condizione necessaria ed evidentemente anche sufficiente affinchè le superficie S, $\bar{S}$ si tocchino di ordine r in un punto comune A è che si possano sostituire alle $\bar{u}$, $\bar{v}$ tali funzioni delle u, v che nel punto considerato i differenziali delle x, y, z e quelli delle $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ coincidano fino a quelli di ordine r inclusi.* Indicando cioè con α, β, γ, ecc. i valori nel punto A di convenienti derivate di queste funzioni, dovrà essere: (F).

$$(3)\qquad \bar{x}=x,\ x_u=\alpha\,\bar{x}_{\bar{u}}+\beta\,\bar{x}_{\bar{v}},\ x_v=\gamma\,\bar{x}_{\bar{u}}+\delta\,\bar{x}_{\bar{v}}$$

$$(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)\ \text{(per } r=1)$$

e inoltre, per $r=2$

$$(4)\quad \begin{cases} x_{uu}=\lambda\bar{x}_{\bar{u}}+\mu\,\bar{x}_{\bar{v}}+\alpha^2\,\bar{x}_{\bar{u}\bar{u}}+2\alpha\beta\,\bar{x}_{\bar{u}\bar{v}}+\beta^2\,\bar{x}_{\bar{v}\bar{v}} \\ x_{uv}=\nu\,\bar{x}_{\bar{u}}+\pi\,\bar{x}_{\bar{v}}+\alpha\gamma\,\bar{x}_{\bar{u}\bar{u}}+(\alpha\delta+\beta\gamma)\,\bar{x}_{\bar{u}\bar{v}}+\beta\delta\,\bar{x}_{\bar{v}\bar{v}} \\ x_{vv}=\rho\,\bar{x}_{\bar{u}}+\omega\,\bar{x}_{\bar{v}}+\gamma^2\,\bar{x}_{\bar{u}\bar{u}}+2\gamma\delta\,\bar{x}_{\bar{u}\bar{v}}+\delta^2\,\bar{x}_{\bar{v}\bar{v}} \end{cases}$$

(oltre alle analoghe in y, z)

Il contatto si dirà analitico, se $u=\bar{u}$, $v=\bar{v}$, $\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=\lambda=\mu=\nu=\rho=\nu=\omega=0$. Otteniamo un *caso particolare* di contatto del secondo ordine supponendo che:

$$(5)\qquad x=\bar{x}\quad x_u-\alpha\,\bar{x}_{\bar{u}}=x_v-\delta\,\bar{x}_{\bar{v}}=0$$

e che

$$(6)\qquad x_{uu}-\alpha^2\,x_{\bar{u}\bar{u}},\ x_{uv}-\alpha\delta\,x_{\bar{u}\bar{v}},\ x_{vv}-\delta^2\,x_{\bar{v}\bar{v}}$$

siano *combinazioni lineari* di x_u, x_v.

C) **Contatto di superficie in corrispondenza biunivoca.**

Supponiamo ora $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$, e quindi i punti di S, $\overline{S}$ in corrispondenza biunivoca. Quando mai avverrà che curve *omologhe* di S, $\overline{S}$, uscenti dal punto comune A hanno un contatto di ordine r?

Per $r = 1$ dovrà essere nel punto A identicamente in du, dv, in virtù della (1):

$$x_u\, du + x_v\, dv = \sigma\,(\overline{x}_{\overline{u}}\, du + \overline{x}_{\overline{v}}\, dv) \text{ ossia per (3)}$$

$$\alpha\, \overline{x}_{\overline{u}} + \beta\, \overline{x}_{\overline{v}} = \sigma\, \overline{x}_{\overline{u}} \qquad \gamma\, \overline{x}_{\overline{u}} + \delta\, \overline{x}_{\overline{v}} = \sigma\, \overline{x}_{\overline{v}}.$$

Ora, escludendo senz'altro i punti singolari, *le* $\overline{x}_{\overline{u}}$ *non possono essere proporzionali alle* $\overline{x}_{\overline{v}}$. E perciò sarà:

$$(7) \qquad \sigma = \alpha = \delta;\quad \beta = \gamma = 0 \qquad (\text{per } r = 1).$$

Per $r = 2$, oltre alle (7) dovrà essere inoltre nel punto A identicamente, comunque siano scelte le funzioni $u = u(t)$. $v = v(t)$ di un nuovo parametro t:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \sigma^2 \frac{d^2 \overline{x}}{dt^2} + \tau \frac{d\overline{x}}{dt} \qquad (\text{cfr. le (2)}),$$

ove σ ha il valore precedente, e τ può anche dipendere dai valori nel punto A delle u', v', u'', v''. Questa equazione, scritta per disteso, diventa:

$$(7)_{\text{bis}} \quad \begin{cases} x_u u'' + x_v v'' + x_{uu} u'^2 + 2 x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 = \\ = \sigma^2 (\overline{x}_u u'' + x_v \overline{v}'' + x_{uu} \overline{u}'^2 + 2 x_{uv} \overline{u}' \overline{v}' + x_{vv} \overline{v}'^2) + \\ + \tau (\overline{x}_u u'' + \overline{x}_v v''). \end{cases}$$

Sostituendovi i valori (4) e identificando i due membri si trova $\sigma^2 = \sigma$ e perciò $\sigma = 1$, perchè non può essere $\sigma = 0$, da cui seguirebbe $x_u = x_v = 0$, mentre noi abbiamo escluso i punti singolari; e inoltre che τ è indipendente da u'', v'' ed è lineare in u', v'. Cosicchè in fine si trova: (F)

$$(8) \qquad dx = d\overline{x} \quad d^2 x = d^2 \overline{x} + 2\,(l\,du + m\,dv)\,d\overline{x}$$

ossia:

$$(8)_{\text{bis}} \quad \left\{ \begin{array}{lll} x_u = \overline{x}_{\overline{u}} & x_{uu} = \overline{x}_{uu} + 2\,l\,\overline{x}_u & \\ & x_{uv} = \overline{x}_{uv} + (l\,\overline{x}_v + m\,\overline{x}_u) & x = \overline{x} \\ x_v = \overline{x}_{\overline{v}} & x_{vv} = \overline{x}_{vv} + 2\,m\,\overline{x}_v & \end{array} \right.$$

Alle (8) potremmo giungere direttamente, anche senza invocare le (4). Infatti, derivando $(7)_{\text{bis}}$ rispetto u'' o v'', si deduce tosto che $\sigma = 1$ e che τ è funzione delle sole u', v'; la $(7)_{\text{bis}}$ dimostra poi che τ è lineare omogenea in u', v'.

Le $(8)_{\text{bis}}$ sono un caso particolare delle (5) e (6).

Se ora ritorniamo a coordinate omogenee, ponendo $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ al posto di x, y, z, le (3) e (4) diventano del tipo:

$$\begin{array}{l} (3)_{\text{bis}} \\ \\ (4)_{\text{bis}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = r\,\overline{x} \qquad x_u = r\,(\alpha\,\overline{x}_u + \beta\,\overline{x}_v + l\,\overline{x}) \\ \qquad\qquad\qquad x_v = r\,(\gamma\,\overline{x}_u + \delta\,\overline{x}_v + m\,\overline{x}) \\ x_{uu} = r\,(\lambda\,\overline{x}_{\overline{u}} + \mu\,\overline{x}_{\overline{v}} + \alpha^2\,\overline{x}_{\overline{u}\,\overline{u}} + 2\,\alpha\,\beta\,\overline{x}_{\overline{u}\,\overline{v}} + \\ \qquad\qquad + \beta^2\,\overline{x}_{\overline{v}\,\overline{v}} + n\,\overline{x}),\ \text{ecc.} \end{array} \right.$$

e le $(8)_{\text{bis}}$ diventano:

$$(8)_{\text{ter}} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_u = \rho\,\overline{x} \qquad x_u = \rho(x_u + a\,x) \qquad x_v = \rho\,(x_v + b\,x) \\ x_{uu} = \rho\,[\overline{x}_{uu} + 2\,l\,\overline{x}_u + p\,\overline{x}] \\ x_{uv} = \rho\,[\overline{x}_{uv} + l\,\overline{x}_v + m\,\overline{x}_u + q\,\overline{x}] \\ x_{vv} = \rho\,[\overline{x}_{vv} + 2\,m\,\overline{x}_v + r\,\overline{x}]. \end{array} \right.$$

Il contatto è analitico se $l = a$, $m = b$. Si noti invece che il contatto del prim'ordine subordinato al contatto $(8)_{\text{ter}}$ del 2° ordine è sempre analitico.

§ 4. - Osservazioni varie.

A) Curve razionali di terzo grado.

Sia $\varphi(x, y)$ un polinomio omogeneo di 2° grado in due variabili x, y con discriminante diverso da zero; ψ sia un polinomio analogo di 3° grado.

Interpretiamo le

$$(1) \qquad \xi = x\varphi\,, \; \eta = y\varphi\,, \; \zeta = \psi$$

come coordinate omogenee di punto in un piano π. Tale punto al variare delle x, y (che noi considereremo come coordinate omogenee di punto su una retta r) descrive una cubica C razionale, in corrispondenza biunivoca coi punti di tale retta r.

L'equazione di C è

$$(2) \qquad \zeta\,\varphi\,(\xi\,, \eta) = \psi\,(\xi\,, \eta)$$

Se ne deduce, che, com'era evidente, il punto $\xi = \eta = 0$ è doppio per C, che ha ivi per tangenti le due rette definite dalla $\varphi(\xi, \eta) = 0$.

Alle intersezioni di C con una retta $\lambda\,\xi + \mu\,\eta + \nu\zeta = 0$ del suo piano, cioè alle terne di punti di C allineati corrisponde su r una schiera lineare ∞^2 di terne di punti: la schiera definita da:

$$(3) \quad (\lambda\,x + \mu\,y)\,\varphi(x\,, y) + \nu\,\psi(x\,, y) = 0 \qquad (\lambda\,, \mu\,, \nu = \text{cost.})$$

Se $\varphi\,(x\,, y) = kxy$, le $\xi = 0, \eta = 0$ sono le tangenti alla C nel punto doppio; e, se

$$\psi = a_{111}\,x^3 + 3a_{112}\,x^2\,y + 3a_{122}\,x\,y^2 + a_{222}\,y^3,$$

allora

$$\zeta - \frac{3}{k}\,(a_{112}\,\xi + a_{122}\,\eta) = 0$$

è la retta congiungente i tre *flessi* della C, ai quali pertanto corrisponde su r la terna dei punti definita dalla $a_{111}\,x^3 + a_{222}\,y^3 = 0$. Osserviamo che questa terna è l' unica delle terne (3) la quale sia *apolare* o *coniugata* alla φ, cioè *abbia un Hessiano proporzionale alla* $\varphi(x, y)$. Dunque: *Vi sono tre terne* (3) *di punti tra di loro coincidenti* (quelle corrispondenti alle tre tangenti di flesso della curva C); *i tre punti così determinati* (corrispondenti ai flessi di C) *appartengono ad una medesima terna* (3) *e precisamente a quella delle terne* (3) *che è apolare o coniugata alla* φ. *In generale, se* $\varphi(x, y) = a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2$ *con* $A = a_{12}\,a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, *e se* $A_{r,s}$ *è il complemento algebrico di* $a_{r,s}$ in A, *diviso per* A, *la terna* $b_{111}\,x^3 + 3b_{112}\,x^2\,y + 3\,b_{122}\,x\,y^2 + b_{222}\,y^3 = 0$ *è apolare alla* φ *se valgono le equazioni*

$$\sum_{r,s} A_{rs}\,b_{rs1} = \Sigma\,A_{r,s}\,b_{rs2} = 0.$$

Se la ψ è essa stessa apolare alla φ, se cioè $\sum\limits_{r,s} A_{r,s}\,a_{rsi} = 0$ per $i = 1, 2$, allora la retta dei flessi è senz'altro la retta $\zeta = 0$. Se invece così non è, la retta dei flessi è $\lambda\,\xi + \mu\,\eta + \nu\,\zeta = 0$, ove i rapporti $\lambda : \mu : \nu$ sono determinati dalla condizione che il primo membro di (3) sia apolare alla φ.

B) Varietà di terzo grado.

Sia φ una forma di 2^0 grado di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\varphi = \Sigma\,a_{rs}\,x_r\,x_s$$

col determinante $A = |a_{rs}| \neq 0$, e sia ψ una forma di 3^0 grado nelle medesime variabili. Sia r lo spazio ad $n - 1$ dimensioni, in cui le x sono coordinate omogenee; e sia π uno spazio ad n dimensioni in cui siano coordinate omogenee $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \zeta$. Poniamo:

$$\xi_1 = x_1\,\varphi,\ \xi_2 = x_2\,\varphi,\ \ldots,\ \xi_n = x_n\,\varphi,\ \zeta = \psi.$$

Allora, al variare delle x, il punto ξ, ζ descriverà una varietà V_{n-1} ad $n - 1$ dimensioni di *terzo* grado avente per equazione:

$$\zeta\,\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \tag{4}$$

Essa è razionale, e in corrispondenza biunivoca coi punti di r. Il punto $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$ è un punto doppio; la

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$$

è l'equazione del cono tangente in questo punto. Alle sezioni iperpiane di questa varietà corrisponde su r un sistema lineare di varietà, e precisamente il sistema lineare:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \sum_i \lambda_i x_i + \mu \psi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{5}$$

$$(\lambda_i, \mu = \text{cost.})$$

Tra di esse chiameremo *principale* quella, univocamente determinata, che è *coniugata od apolare* alla φ; e ricordo che una forma cubica $\Sigma b_{rst}\, x_r\, x_s\, x_t$ si dice apolare alla φ, se valgono le n condizioni

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, b_{rst} = 0 \quad (\text{per } t = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

ove con A_{rs} indichiamo, al solito, il complemento algebrico di a_{rs} in A, diviso per A. Se $\psi = \Sigma u_{rst}\, x_r\, x_s\, x_t$, allora, poichè

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Sigma \lambda_i x_i = \frac{1}{3} \Sigma (\lambda_r a_{st} + \lambda_s a_{rt} + \lambda_t a_{rs})\, x_r x_s x_t, \tag{7}$$

la (4) è apolare alla φ, se:

$$0 = \mu \sum_{r,s} A_{rs} a_{rst} + \frac{1}{3} \sum_{r,s} A_{rs} (\lambda_r a_{st} + \lambda_s a_{rt} + \lambda_t a_{rs})$$

ossia, se:

$$0 = \mu \sum_{r,s} A_{rs}\, a_{rst} + \frac{n+2}{3} \lambda_t, \tag{8}$$

le quali equazioni determinano i rapporti $\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots . \lambda_n : \mu$.

C) La retta principale del Togliatti.

Si deve al Togliatti la seguente generalizzazione a curve più generali della retta dei flessi di una cubica. Supponiamo di nuovo $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, *la* φ *un polinomio omogeneo di grado* m *nelle* x_i, *la* ψ *un polinomio omogeneo di grado* m + 1. Il punto

$$\xi = x\varphi\,,\ \eta = y\varphi\,,\ \zeta = \psi$$

(ove, come sopra, ξ, η, ζ sono coordinate omogenee in un piano π) genera, al variare di $x : y$ una curva *razionale* di grado $m + 1$ di equazione

$$\zeta\,\varphi\,(\xi\,,\eta) = \psi\,(\xi\,,\eta)$$

che ha nel punto $\xi = \eta = 0$ un punto m^{uplo}, in cui ha m tangenti definite dall'equazione

$$\varphi\,(\xi\,,\eta) = 0.$$

E, se $\varphi(\xi, \eta) = p_1\, p_2 \ldots . p_m$, ove p_i è un polinomio omogeneo di primo grado nelle ξ, η, allora tali tangenti sono le rette $p_i = 0$. Supponiamo che sia possibile determinare m costanti λ_i in guisa che

$$\psi - \sum_i \lambda_i\, p_i^{\,m+1}$$

sia divisibile per φ, ossia sia uguale al prodotto $\varphi\,\text{P}$, ove P è un polinomio omogeneo $\mu_1\,\xi + \mu_2\,\eta$ di primo grado nelle ξ, η. La retta $\zeta = \mu_1\,\xi + \mu_2\,\eta$ si dirà la retta *principale* (di Togliatti) della curva. Se p. es. $\varphi = k\,x\,y$ e

$$\psi = a_{111}\,x^3 + 3\,a_{112}\,x^2\,y + 3\,a_{122}\,x\,y^2 + {}_{222}\,y^3,$$

allora

$$p_1 = \xi\,,\ p_2 = \eta\,,\ \lambda_1 = a_{111}\,,\ \lambda_2 = a_{222}\,,$$

$$\text{P} = \frac{3\,a_{112}\,x + 3\,a_{122}\,y}{k}.$$

E la retta *principale* si riduce alla precedente retta dei flessi.

D) Una ulteriore generalizzazione.

Possiamo col Fubini ulteriormente estendere la definizione del Togliatti; supponiamo che delle m tangenti $p_i = 0$ *due* abbiano un ufficio ben distinto dalle altre; e senz'altro scegliamole come assi $\xi = 0$, $\eta = 0$. La nostra curva avrà per equazione

$$\xi \eta \zeta \chi (\xi, \eta) = \psi (\xi, \eta)$$

ove χ è di grado $m - 2$ nelle ξ, η. Supponiamo le costanti λ_1, λ_2 tali che $\psi - \lambda_1 \xi^{m+1} - \lambda_2 \eta^{m+1}$ sia divisibile per $\xi \eta$, ossia sia uguale al prodotto $\xi \eta Q$, ove Q è un polinomio omogeneo di grado $m - 1$ nelle ξ, η. Allora la curva $\chi \zeta - Q(\xi, \eta) = 0$ si dirà la *curva principale* definita dalla curva data e dalle due tangenti considerate; e anche per questa potremo, come sopra, definire una *retta principale*.

Oss. La definiz. data in *C)* si può esporre così: La curva $\psi - \zeta \varphi = 0$ e le curve (degeneri) $p_i^{m+1} = 0$ definiscono un sistema lineare di ∞^m curve, in cui generalmente vi è una sola curva che si scompone nelle m tangenti complessivamente di equazione $\varphi = 0$, e in una retta residua $\zeta = P$, che si dirà la retta principale.

La definiz. data in *D)* si può enunciare così: Nel sistema lineare di ∞^2 curve determinato dalla curva data e dalle $\xi^{m+1} = 0$, $\eta^{m+1} = 0$ esiste generalmente una sola curva che si spezza in queste tangenti $\xi \eta = 0$, e in una curva ulteriore $\chi \zeta = Q$, la curva *principale*.

Ulteriori e non difficili generalizzazioni ci sono inutili.

E) La divisione covariante.

Se $\varphi = \Sigma a_{r,s} x_r x_s$ è una forma quadratica binaria con discriminante $A \neq 0$, e ψ è una forma nelle stesse variabili x_1, x_2 di grado $m > 1$, noi potremo in un solo modo decomporre ψ in una somma $\psi_1 + \varphi \chi$, ove ψ_1 è apolare alla φ (*) e χ è di grado

(*) Una forma $F = \overset{m}{\underset{1}{\Sigma}} b_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ di m esimo grado nelle x_i dicesi apolare alla φ se per ogni sistema di valori per le $i_3, i_4, \ldots, i_m$ vale la:

$$\sum_{i_1, i_2} A_{i_1 i_2} b_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m} = 0.$$

Questa proprietà è *intrinseca*, cioè è invariante rispetto a una trasform. lineare omogenea eseguita sulle x.

$m-2$. Se $m-2>1$, potremo di nuovo operare nello stesso modo nella χ decomponendola nella somma di una forma χ_1 apolare alla φ e di un prodotto $\theta\,\varphi$, ove θ è di grado $m-4$. E così via. Se p. es. $\varphi = 2a_{12}\,x_1\,x_2$, e $\psi = \Sigma\, b_{rsth}\; x_r\,x_s\,x_t\,x_h$, si ha:

$$\varphi = (b_{1111}x_1^{\,4} + b_{2222}\,x_2^{\,4}) + \frac{\varphi}{2a_{12}}\,(4b_{1112}\,x^2 + 6b_{1122}\,xy + 4b_{2221}\,y^2),$$

di cui il primo termine è apolare alla φ, il secondo divisibile per φ.

Applicando di nuovo lo stesso procedimento si trova

$$\psi = (b_{1111}\,x_1^4 + b_{2222}\,x_2^4) + \varphi\left(\frac{2\,b_{1112}\,x^2 + 2\,b_{2221}\,y^2}{a_{12}}\right) + \\ + \left(\varphi^2\,\frac{3}{2\,a_{12}^2}\,b_{1122}\right)$$

Questa decomposizione si può generalizzare anche a forme quadratiche in più di 2 variabili x.

Capitolo I.

LA TEORIA DELLE CURVE (*).

§ 5 - La teoria delle curve in geometria euclidea.

A) Gli invarianti fondamentali.

Di solito in geometria euclidea una curva C si definisce dando le coordinate x, y, z cartesiane ortogonali di un suo punto in funzione di un parametro t. Curve *uguali* possono avere rappresentazioni distinte dovute sia alla loro diversa posizione nello spazio, sia alla diversa scelta del parametro t. Nello studio dell'intorno di un particolare punto O della curva ciò si può evitare, come è noto, nel modo seguente: si assumano come assi delle x, y, z la tangente, la normale principale, la binormale in O, e si dieno le y, z come funzioni della x. Siccome il piano osculatore $z = 0$ ha con C in O un contatto tripunto, e la tangente $y = z = 0$ un contatto bipunto, varrano delle formole

$$(1) \qquad y = a x^2 + \ldots, \quad z = b x^3 + \ldots,$$

dove i termini trascurati sono (per $x = 0$) di ordine superiore (risp. di ordine superiore al secondo e terzo ordine). Questo almeno nel caso che valgano alcune condizioni di continuità, deri-

(*) Questo Capitolo si può leggere man mano, soltanto allora che i suoi risultati saranno invocati nei Cap. successivi.

vabilità ecc., che supporremo senz' altro soddisfatte. Il triedro x, y, z sopra definito dicesi il triedro *principale* relativo al punto O: fin qui si è determinata la posizione, non l' orientazione dei suoi assi.

I valori delle a, b sono quantità *invarianti* in quanto che, se C' è una curva uguale a C, nel punto O' omologo di O restano per essa analogamente definiti due sviluppi $y = a^1 x^2 + \ldots$, $z = b^1 x^3 + \ldots$, dove è proprio $a^1 = a$, $b^1 = b$; ciò che prova essere i valori delle a, b invarianti per movimenti. Si noti però che l' indeterminazione nella orientazione degli assi porta con sè una indeterminazione di segno per le a, b, (cosicchè il nome di invarianti dovrebbe essere riservato alle a^2, b^2). Questa indeterminazione si può togliere con qualche convenzione supplementare: se p. es. $a \neq 0$, si può sull' asse delle y scegliere una direzione positiva tale che $a > 0$ (cioè che in un piccolo intorno di O la curva giaccia nel semispazio $y \geq 0$), e fissare, se $b \neq 0$, il segno di b imponendo al triedro principale di essere congruo al triedro coordinato iniziale. Si noti ancora che i valori delle a, b dipendono dall' unità di misura delle lunghezze. Vedremo ben presto che dare i valori delle a, b in O equivale a dare in O la curvatura $\frac{1}{\rho}$ e la torsione $\frac{1}{T}$.

Le simmetrie e, più generalmente, i movimenti di 2ª specie cambiano, nelle precedenti convenzioni, il segno della b.

B) Equazioni intrinseche di una curva.

Per definire completamente una curva si dovrebbero dare i valori delle a, b per ogni punto della curva, p. es. dare le a, b come funzioni del parametro t. Per scegliere in modo invariante questo parametro t, lo si pone uguale all' arco s definito dalla

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2}$$

in modo *intrinseco* (cioè indipendente dal parametro t) e *invariante* (per movimenti). Riguarderemo non essenziale l' indeterminazione di s dovuta all' arbitraria scelta dell' origine, da cui si contano gli archi s, e all' arbitrarietà del segno di ds, cioè del *verso*, in cui s si suppone crescente. Quest' ultima si potrebbe togliere, studiando le curve dotate di *verso*. Date la curvatura $\frac{1}{\rho}$ e la torsione $\frac{1}{T}$ in funzione di s, detti α, β, γ i coseni direttori della tangente volta nel verso dell'arco crescente, ξ, η, ζ quelli della normale principale e λ, μ, ν quelli della binormale, valgono le formole di Frenet

$$(3) \qquad x_s = \alpha, \alpha_s = \frac{\xi}{\rho}, \xi_s = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T}, \lambda_s = \frac{\xi}{T}$$

(e analoghe in y, β, η, μ e z, γ, ζ, ν).

Le coordinate rispetto al triedro principale in O sono caratterizzate dai valori iniziali delle $(x, \alpha, \xi, \lambda)$, (y, β, η, μ) e (z, γ, ζ, ν) che sono rispettivamente $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Si trova così, a meno d' infinitesimi d' ordine superiore

$$(4) \qquad \begin{cases} x = s - \dfrac{1}{6\rho^2} s^3 + \cdots, \; y = \dfrac{1}{2\rho} s^2 + \left(\dfrac{1}{\rho}\right)_s \dfrac{s^3}{6} + \cdots \\[2ex] z = -\dfrac{1}{6\rho T} s^3 + \cdots \end{cases}$$

dove con ρ, T sono indicati i valori di ρ, T nel punto O. Ne segue:

$$(5) \qquad y = \frac{1}{2\rho} x^2 + \cdots, \; z = -\frac{1}{6\rho T} x^3 + \cdots.$$

Quindi le a, b della (1) sono determinate dai valori di $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ nel punto O e viceversa. *Una curva è determinata* (a meno di movimenti) *dai valori di* $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ *dati in funzione* di s. Quanto ai segni rinvio a quanto si è detto più sopra. *Eliminando* α, ξ, λ *dalle equazioni di Frenet si trova un' equazione del quarto ordine*, a cui soddisfano le x, y, z come funzioni di s. I coefficienti di tale equazione dipendono esclusivamente dagli invarianti $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$, e loro derivate.

C) Nuova deduzione degli invarianti fondamentali.

Come $dx^2 + dy^2 + dz^2$ è un invariante per movimenti, così sono pure invarianti per movimenti le somme

$$(d^n x)^2 + (d^n y)^2 + (d^n z)^2, \qquad (n \geqq 1)$$

che hanno il grave inconveniente di dipendere da differenziali di un ordine n, che può superare 1. Evidentemente invece dipendono dal solo differenziale primo le seguenti forme *invarianti intrinseche* (di significato indipendente dal parametro t)

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2, \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix};$$

le quali valgono rispettivamente:

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \frac{ds^6}{\rho^2}, \quad -\frac{ds^6}{\rho^2 T}$$

(come si deduce dalle formole di Frenet). La considerazione di esse equivale alla considerazione di $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$.

Fissato che $\frac{1}{\rho} \geqq 0$ (per il che basta fissare, come abbiamo visto, in modo opportuno il verso positivo della normale principale), il segno di $\frac{1}{T}$ resta fissato, se si vuole che il triedro principale sia congruo al triedro coordinato iniziale.

Un movimento di *seconda specie* cambia il segno di $\frac{1}{T}$.

§ 6 - Geometria proiettivo-differenziale delle curve.

A) Preliminari analitici.

Sia $F_1 = \alpha_1 du$ un differenziale; sia α_1 funzione della u. Porremo:

$$(1) \qquad \alpha_1 \delta^r u = d^{r-1} F_1,$$

cosicchè in particolare, indicando α_1 con la semplice lettera α:

$$(2)\quad \delta^1 u = du,\ \delta^2 u = d^2 u + \frac{\alpha_u}{\alpha}\, du^2,\ \delta^3 u = d\,\delta^2 u + \frac{\alpha_u}{\alpha}\, du\,\delta^2 u, \text{ ecc.}$$

Sia $B_n = b_n\, du^n$ con b_n funzione di u, ed $n \geq 0$ (n intero). Varrà la

$$(3)\qquad d\,B_n = d(b_n\, du^n) = b_{n+1}\, du^{n+1} + n\, b_n\, du^{n-1}\, \delta^2 u,$$

se è posto:

$$(4)\qquad b_{n+1} = \frac{d\,b_n}{du} - n\,\frac{\alpha_u}{\alpha}\, b_n\,,$$

che noi chiameremo derivata *covariante* di b_n.

Se p. es. r, s, t sono interi positivi con $r + 2s + 3t = n$, vale la:

$$(5)\qquad d\,[b_n\, du^r (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^t] = b_{n+1}\, du^{r+1} (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^t + \\ + r\, b_n (du)^{r-1} (\delta^2 u)^{s+1} (\delta^3 u)^t + s\, b_n\, du^r (\delta^2 u)^{s-1} (\delta^3 u)^{t+1} + \\ + t\, b_n\, du^r (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^{t-1}\, \delta^4 u.$$

In altre parole *la sostituzione di $\delta^i u$ a $d^i u$ per $i > 1$ non altera le regole formali di derivazione*, purchè alla derivata *ordinaria di b_n si sostituisca la derivata covariante*. Anzi le due regole coincidono se $\alpha = \text{cost.}$

In particolare per una funzione $x_0 = x$ della u, posto:

$$(6)\qquad x_0 = x,\ x_1 = \frac{dx}{du} = x_u,\ x_2 = \frac{dx_1}{du} - \frac{\alpha_u}{\alpha}\, x_1, \text{ ecc.}$$

valgono le:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & dx = x_1\, du\,;\quad d^2 x = x_2\, du^2 + x_1\, \delta^2 u\,; \\ & d^3 x = x_3\, du^3 + 3x_2\, du\, \delta^2 u + x_1\, \delta^3 u\,; \\ & d^4 x = x_4\, du^4 + 6x_3\, du^2\, \delta^2 u + 3x_2\, (\delta^2 u)^2 + \\ & + 4x_2\, du\,\delta^3 u + x_1\, \delta^4 u\,; \\ & d^5 x = x_5\, du^5 + 10 x_4\, du^3\, \delta^2 u + 15 x_3\, du\, (\delta^2 u)^2 + \\ & + 10 x_3\, du^2\, \delta^3 u + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Si noti che *la derivata covariante di ogni potenza di α_1 è nulla.*
In particolare, se $F_3 = adu^3$ con $a = a_3 = \alpha^3 = \alpha_1{}^3$, valgono le:

$$(8) \quad F_3 = adu^3, \; dF_3 = 3a\,du^2\,\delta^2 u, \; d^2F_3 = 3adu^2\,\delta^3 u + 6a\,du(\delta^2 u)^2.$$

Se le forme F_1, B_n hanno significato *intrinseco* (indipendente dalla scelta della variabile indipendente u), i singoli addendi, in cui (3) decompone B_n, come pure i singoli termini di (5), hanno tutti significato *intrinseco.*

B) Applicazione della teoria delle curve.

Siano le coordinate omogenee x di un punto di una curva C date come funzioni continue, derivabili ecc. di un parametro u. Noi vogliamo caratterizzare C mediante elementi *intrinseci* (indipendenti da u), ed *invarianti* (per collineazioni). Cominceremo col limitarci alle collineazioni *unimodulari.* Elementi del tipo voluto sono i determinanti

$$(9) \qquad (x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^rx) \qquad (r = 3\,,\,4\,,\ldots),$$

il cui studio sarà ora ricondotto a espressioni dipendenti dai *soli differenziali primi.* Questo avviene già nel caso $r = 3$; se indichiamo con ω il suo segno, noi porremo:

$$(10) \qquad F_3{}^2 = (adu^3)^2 = \omega(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x) \quad (\omega = \pm 1).$$

Sia a *che* F_3 *sono dalla curva* C *determinati a meno del segno.*

I punti per cui $F_3 = 0$ sono i punti *a piano osculatore stazionario,* che noi considereremo come *singolari,* ed escluderemo dal nostro studio.

Il caso di F_3 identicamente nullo è quello delle curve piane (§ 8). Posto $\alpha = \alpha_1 = \sqrt[3]{a}$, assumeremo $\alpha_1\,du = F_1$ come forma fondamentale per la definizione dei differenziali $\delta^r u$ e delle derivate covarianti.

Sostituendo in (9) ai $d^r x$ i valori dati da (7), *tali determinanti si decomporranno parecchie espressioni tutte intrinseche ed invarianti* (per collineaz. unimodulari).

Il determinante (9) per $r = 4$ non porta a nulla di nuovo. Infatti per (10) è:

$$(x\,,\, dx\,,\, d^2 x\,,\, d^4 x) = 2\omega F_3 dF_3$$

Poichè per (8) e per la quarta delle (7):

$$(x\,,\, dx\,,\, d^2 x\,,\, d^4 x) = (x\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_4)\, du^7 + 6\,(x\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)\, du^5\, \delta^2 u$$

$$2\omega F_3\, dF_3 = 6\, a^2\, du^5\, \delta^2 u$$

si avrà:

(11) $$(x\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_4) = 0.$$

Per $r = 5$, dalle (7) si deduce:

$$\omega(x\,,\, dx\,,\, d^2x\,,\, d^5x) = \omega(x\, x_1\, x_2\, x_5)\, du^8 + \frac{10}{3} F_3 d^2 F_3 - \frac{5}{9}(dF_3)^2.$$

Il determinante (9) *per* $r = 5$ *porta alla considerazione della nuova forma* $\omega(x\, x_1\, x_2\, x_5)\, du^8$. Così potremmo continuare per $r = 6, 7, \ldots$

C) Le curve come luogo ed inviluppo.

Ma tutto il calcolo assume una forma più perspicua se noi consideriamo contemporaneamente le coordinate ξ del piano osculatore, che noi fisseremo in modo intrinseco con le:

(12) $$\xi = \frac{\omega}{a}(x\, x_u\, x_{uu}) = \frac{\omega}{a}(x\, x_1\, x_2).$$

È chiaramente:

(13) $$0 = S\xi x = S\xi x_1 = S\xi x_2 = S\xi_1 x_1 = S\xi_2 x.$$

(14) $$F_3 = S\xi d^3x = -\, Sd\xi d^2x = Sd^2\xi dx = -\, Sxd^3\xi \quad (^*)$$

come si vede tenendo conto delle $S\xi x = S\xi x_i = 0$ $(i = 1, 2)$, che

(*) Infatti per (10), si ha: $F_3^{\,2} = \omega\,(x\,,\, x_u\,,\, x_{uu}\,,\, d^3 x)\, du^3 =$
$= a du^3\, S\xi d^3 x = F_3\, S\xi d^3 x.$

sono la definizione delle ξ, e delle equazioni ottenute derivando. Per tali equazioni il prodotto

$$(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x)\,(\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi)$$

si trova uguale ad $(F_3)^4$. Per (10) sarà dunque:

$$(\xi\,,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi) = \omega\,F_3^2. \tag{10 bis}$$

Confrontando con le:

$$Sxd^3\xi = -F_3\,,\quad Sx\xi = Sxd\xi = Sxd^2\xi = 0$$

si trova la formola duale di (12):

$$x = -\frac{\omega}{a}\,(\xi\,,\,\xi_1\,,\,\xi_2). \tag{12 bis}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} 2\omega F_3\,dF_3 = d(\omega F_3^2) &= (x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^4x) = \\ &= \frac{F_3}{a}\,(x\,,\,x_1\,,\,x_2\,,\,d^4x) = \omega F_3 S\xi d^4x\,, \end{aligned}$$

cioè:

$$S\xi d^4x = 2dF_3.$$

Confrontando con le formole ottenute derivando (14), si ha:

$$2dF_3 = S\xi d^4x = -Sxd^4\xi = -2Sd\xi d^3x = 2Sdxd^3\xi \tag{15}$$

$$Sd^2xd^2\xi = 0 \tag{11 bis}$$

l' ultima delle quali equivale alla (11).

I determinanti (9) si possono sostituire con le $S\xi d^rx$, che ne differiscono solo per un fattore; sostituendo in queste forme alle d^rx i valori (7) e *tenendo conto del solo addendo che dipende dai differenziali primi*, si trovano forme del tipo richiesto.

Così p. es. si trova:

$$S\xi d^5x = F_5 + \frac{10}{3}\,d^2F_3 - \frac{5}{9}\,\frac{(dF_3)^2}{F_3} \tag{16}$$

$$(16)_{\text{bis}} \qquad Sd^3xd^2\xi = -Sd^2xd^3\xi = F_5 + \frac{1}{3}d^2F_3 - \frac{5}{9}\frac{(dF_3)^2}{F_3}$$

ove F_5 dipende dai soli differenziali primi. La $(16)_{\text{bis}}$ è un esempio del come, differenziando (15) ed $(11)_{\text{bis}}$, si possono ottenere tutte le forme $Sd^rxd^s\xi$ con $r+s=5$ espresse mediante F_3 ed F_5.

Così tutte le forme $Sd^rxd^s\xi$ con $r+s=6$ si possono esprimere mediante una sola forma del prim' ordine; il modo più semplice di scegliere questa è di porre:

$$(17) \qquad F_6 = Sd^3xd^3\xi$$

che, come segue facilmente dalle precedenti formole, dipende dai soli differenziali primi (è di *primo* ordine e di *sesto* grado).

Così si può trovare una forma F_7 del primo ordine e di settimo grado, mediante la quale si possono determinare tutte le forme

$$Sd^rxd^s\xi \text{ con } r+s=7.$$

Io dico che *queste forme F_3, F_5, F_6, F_7 tutte intrinseche e del primo ordine bastano a determinare la curva (a meno di collineazioni unimodulari).* Notiamo che la F_3 *è determinata a meno del segno* (così come il ds della geom. metrica). Noi lo potremo fissare, scegliendo un *verso positivo* sulla curva, e imponendo ad F_3 di essere positiva in tale verso. Con ciò alla curva C sostituiamo la nozione di curva con verso, di *curva orientata.*

D) Le equazioni differenziali fondamentali.

Per dimostrare il nostro teorema, scegliamo (in modo intrinseco ed invariante per collin. unimod.) un punto X e un piano Ξ definiti da:

$$(18) \quad \begin{cases} SX\xi = 1\,, & SXd\xi = SXd^2\xi = SXd^3\xi = 0 \\ S\Xi x = 1\,, & S\Xi dx = S\Xi d^2x = S\Xi d^3x = 0. \end{cases}$$

Differenziando si deduce $S\xi dX = Sd\xi dX = Sd^2\xi dX = 0$. Sarà perciò:

(19) $$dX = bx \quad \text{e analogamente} \quad d\Xi = \beta\xi,$$

dove i fattori di proporzionalità b, β sono forme differenziali di primo grado e primo ordine in u. Poichè i punti x, dx, d^2x, X non sono complanari, potremo determinare delle quantità a_n tali che:

(20) $$\begin{cases} d^3x = a_0 x + a_1 dx + a_2 d^2x + a_3 X \\ d^3\xi = \alpha_0\xi + \alpha_1 d\xi + \alpha_2 d^2\xi + \alpha_3\Xi. \end{cases}$$

Se ne deduce

$$S\xi d^3x = a_3 \text{ cioè } a_3 = F_3\,; \quad Sd\xi d^3x = -a_2 F_3, \text{ cioè } a_2 = \frac{dF_3}{F_3}$$

$$Sd^2\xi d^3x = a_1 F_3 = -Sd^3\xi d^2x\,;$$

$$Sd^3\xi d^3x = -a_0F_3 + a_1 dF_3 - a_2 Sd^2xd^3\xi = -a_0F_3$$

ossia:

(21) $$a_3 = F_3\,;\; a_2 = +\frac{dF_3}{F_3}\,;$$

$$a_1 = \frac{1}{F_3}\left(F_5 + \frac{1}{3}d^2F_3 - \frac{5}{9}\frac{(dF_3)^2}{F_3}\right);\quad a_0 = -\frac{F_6}{F_3}$$

insieme alle duali:

(21)$_{\text{bis}}$ $$\alpha_3 = -F_3\,;\; \alpha_2 = a_2\,;\; a_1 = \alpha_1\,;\; a_0 = -\alpha_0.$$

Moltiplicando le (20) tra di loro si trova:

$$F_6 = Sd^3xd^3\xi = 2F_6 - F_3^2 SX\Xi,$$

ossia:

(21)$_{\text{ter}}$ $$SX\Xi = \frac{F_6}{F_3^2}.$$

Da (18), (19) e dalle equazioni ottenute differenziando (20) si ottiene:

$$bF_3 = -bSxd^3\xi = -SdXd^3\xi = SXd^4\xi =$$

$$= SX(\xi d\alpha_0 + \Xi d\alpha_3 + \beta\alpha_3\xi) = d\left(\frac{F_6}{F_3}\right) - \beta F_3 - \frac{F_6}{F_3^2}dF_3$$

donde:

$$(21)_{\text{quater}} \qquad b + \beta = d\left(\frac{F_6}{F_3^{\,2}}\right).$$

Dunque le a, le α, *la* b + β *sono determinate da* F_3, F_5, F_6; e sarebbe facile provare che, nota F_7, *resta determinata* b — β, *cioè* b *e* β.

Posto $F_3 = adu^3$, $\dfrac{F_6}{F_3} = -\theta du^3$, $-\dfrac{F_5}{F_3} = qdu^2$, $b = cdu$, $\beta = \gamma du$, si ha per $(21)_{\text{quater}}$

$$(22) \qquad c + \gamma = -\left(\frac{\theta}{a}\right)_u \quad \text{ove } F_3 = adu^3,\ F_6 = -\theta adu^6.$$

Sostituendo in (20), i termini in $\delta^2 u$, $\delta^3 u$ si eliminano, e si ottengono *le equazioni differenziali fondamentali completamente determinate dalle forme precedenti.*

$$(23) \qquad \left\{\begin{array}{ll} x_3 = \theta x - qx_1 + aX & X_1 = cx \\ \xi_3 = -\theta\xi - q\xi_1 - a\Xi & \Xi_1 = \gamma\xi \end{array}\right.$$

Se noi cambiamo il parametro u *in guisa che* a = 1, esse diventano:

$$(23)_{\text{bis}} \left\{\begin{array}{ll} x''' + qx' - \theta x = X, & \xi''' + q\xi' + \theta\xi = -\Xi \\ X' = cX & ,\ \Xi' = \gamma\xi \end{array}\right. \qquad (c + \gamma = -\theta')$$

od anche:

$$(23)_{\text{ter}} \left\{\begin{array}{l} x'''' + qx'' + (q' - \theta)x' - (\theta' + c)x = 0 \\ \xi'''' + q\xi'' + (q' + \theta)\xi' + (\theta' + \gamma)\xi = 0 \end{array}\right. \quad c + \gamma = -\theta'$$

Queste equazioni insieme alla $\omega(x\, x'\, x''\, x''') = 1$, la quale, se soddisfatta nel punto iniziale, è soddisfatta dappertutto in virtù delle stesse $(23)_{\text{ter}}$, *determinano le* x, *e quindi la curva a meno di una collineaz. unimodulare*; e si ricordi, *sono esse stesse determinate da* F_3, F_5, F_6, F_7.

Dalle $(23)_{\text{ter}}$ *segue che le* x *e le* ξ *soddisfano ad equazioni aggiunte.*

E) Le curve di un complesso lineare.

Tali equazioni coincidono se $\theta = 0$. Esiste allora una trasform. lineare intera omogenea a coefficienti *costanti* che porta le x nelle ξ, e quindi le dx, d^2x, d^3x nelle $d\xi$, $d^2\xi$, $d^3\xi$. Poichè $\theta = 0$ è $F_6 = 0$.

E quindi per $(11)_{\text{bis}}$ e (17) è $Sx\xi = Sd^r x d^r \xi = 0$ per $r = 1, 2, 3$. Perciò tale trasformazione definisce un sistema nullo (*), il quale trasforma la curva pensata come luogo di punti nella curva stessa pensata come inviluppo. Le tangenti alla curva saranno rette del corrispondente complesso lineare. Vale pure il teorema reciproco. *Dunque la* $\mathrm{F}_6 = 0$ *o* $\theta = 0$ *caratterizza le curve di un complesso lineare.*

F) Significato del segno di $\omega = \pm 1$.

Le rette (x, dx) e $(\xi, d\xi)$ coincidono con la retta tangente in x. Perciò $(x\,dx) = \varkappa(\xi\,d\xi)$ con $\varkappa$ fattore di proporzionalità. Per la $Sd^2xd^2\xi = 0$, anche le rette (xd^2x) e $(\xi d^2\xi)$ coincidono. Se ne deduce differenziando che $\varkappa = \text{cost.}$ Differenziando di nuovo, si trae:

$$(dx\,d^2x) = -(x\,d^3x) + \varkappa(d\xi\,d^2\xi) + \varkappa(\xi\,d^3\xi)$$

donde:

$$S(dx, d^2x)(d\xi, d^2\xi) = -S(x, d^3x)(d\xi, d^2\xi) +$$
$$+ \varkappa S(d\xi, d^2\xi)(d\xi, d^2\xi) + \varkappa S(\xi, d^3\xi)(d\xi, d^2\xi)$$

ossia, per le identità dell'introduzione (§ 1 B)

$$\begin{vmatrix} Sdx\,d\xi & Sdx\,d^2\xi \\ Sd^2x\,d\xi & Sd^2x\,d^2\xi \end{vmatrix} = \varkappa(\xi, d\xi, d^2\xi, d^3\xi)$$

$$F_3^{\,2} = \varkappa\omega F_3^{\,2} \qquad \text{ossia} \qquad \varkappa = \omega.$$

(*) Infatti, se x è un punto prestabilito ad arbitrio della curva, ogni punto P dello spazio avrà coordinate che si possono scrivere nella forma $hx + kx' + lx'' + mx'''$, e sarà trasformato nel piano $h\xi + k\xi' + l\xi'' + m\xi'''$, che, per le precedenti identità, contiene il punto P.

Cioè vale l' identità (C)

$$(x, dx) = \omega(\xi, d\xi) \tag{24}$$

Dunque, essendo dato il verso positivo della curva, e quindi anche il segno di ognuna delle dx, $d\xi$, *i versi di* $\lambda x + \mu dx$ *e di* $\lambda\xi + \mu d\xi$ *danno l' orientazione proiettiva della retta tangente conforme alla nostra convenzione, oppure l' orientazione opposta secondo che* $\omega = 1$, *oppure* $\omega = -1$. Resta così intuitivo che le collineazioni a modulo -1 cambiano il segno di ω.

G) Le collineazioni a modulo qualsiasi.

Finora ci siamo occupati specialmente delle collineazioni unimodulari. E abbiamo scelto il parametro u in modo invariante per tali collineazioni. Conseguenza di tale scelta è stato che nelle $(23)_{ter}$ è mancato ogni termine in x''', ξ'''. Questa è una proprietà caratteristica del parametro u e delle sue funzioni lineari.

Studiamo ora una qualsiasi trasformazione moltiplicativa $x = \rho\overline{x}$, da cui segue $\xi = \rho\,\overline{\xi}$. Sarà:

$$du^6 = F_3^2 = \omega(x, dx, d^2x, d^3x) = \omega\rho^4(\overline{x}, d\overline{x}, d^2\overline{x}, d^3\overline{x}) =$$

$$= \rho^4\overline{F}_3^2 = \rho^4\overline{a}^2\, d\overline{u}^6,$$

se $\overline{a}$, $\overline{F}_3$, $\overline{u}$ sono i nuovi valori di a, F_3, u. Sarà dunque $\overline{a} = 1$, se il nuovo parametro $\overline{u}$ soddisfa alla $(d\overline{u} : du)^3 = 1 : \rho^2$. (Escludo che $d\overline{u} : du$ possa essere negativo, perchè $\overline{u}$ come u deve crescere nel verso positivo della curva). Noi dunque dovremo per studiare tutte le collineazioni a modulo positivo (che sono prodotto di una collineaz. unimodulare per una moltiplicativa) studiare ancora l'effetto di una trasformazione

$$x = \rho\overline{x}\,;\ \xi = \rho\overline{\xi}\,;\ \overline{u} = \overline{u}\,(u) \text{ con } (d\overline{u} : du)^3 = 1 : \rho^2\,;\ (F_3 = \rho^2\overline{F}_3^2)$$

È facile riconoscere che $F_6 : F_3 = \theta du^3$ non cambia (che cioè $\theta du^3 = \overline{\theta}\, d\overline{u}^3$), e, con un calcolo un po' più lungo, che non cambia neppure Vdu^4, quando si ponga:

$$V = \frac{3}{2}q'' + \frac{5}{2}\theta' + 5c + \frac{9}{20}q^2 = \frac{3}{2}q'' - \frac{5}{2}\theta' - 5\gamma + \frac{9}{20}q^2.$$

E, notiamolo, *le* $\theta = V = 0$ *caratterizzano le cubiche sghembe.* Infatti in tal caso, scelto ρ in guisa che sia nullo il corrispondente valore di q, dalle $\theta = V = 0$ segue $\theta = c = \gamma = 0$, e le $(23)_{\text{ter}}$ provano che x, ξ sono polinomi di terzo grado nella u.

Possiamo anche studiare l'effetto di un cambiamento del verso scelto sulla curva come positivo. Il nuovo valore $\overline{F}_3$ della forma cubica fondamentale è: $\overline{F}_3 = -F_3$; cosicchè, se $F_3 = du^3$ ed $\overline{F}_3 = d\overline{u}^3$, sarà $du = -d\overline{u}$ e, come si può supporre, $\overline{u} = -u$. Il nuovo valore della ξ è dato da:

$$\overline{\xi} = \omega(x, x_{\overline{u}}, x_{\overline{u}\,\overline{u}}) = -\omega(x, x_u\, x_{uu}) = -\xi.$$

Cosicchè il nuovo valore della F_6 e di θ sono dati da:

$$\overline{F}_6 = Sd^3\overline{\xi}\, d^3x = -Sd^3\xi d^3x = -F_6;\ \frac{\overline{F}_6}{\overline{F}_3} = \frac{F_6}{F_3};$$

$$\theta d\overline{u}^3 = \theta du^3;\ \overline{\theta} = -\theta.$$

Del resto ponendo in $(23)_{\text{ter}}$ $x = \overline{x}$, $\overline{u} = -u$, essa diventa:

$$\frac{d^4\overline{x}}{d\overline{u}^4} + q\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{u}^2} + \left(\frac{dq}{d\overline{u}} + \theta\right)\frac{d\overline{x}}{d\overline{u}} - \left(c - \frac{d\theta}{d\overline{u}}\right)\overline{x} = 0$$

che prova non solo la $\overline{\theta} = -\theta$, ma anche le $\overline{q} = q$, $\overline{c} = c$.

H) Coordinate normali.

Dunque, se $\theta \neq 0$, esiste un *verso* invariante, che chiameremo *normale*, a cui corrisponde un $\theta > 0$. Potremo poi moltiplicare le x per un fattore ρ in guisa che θ assuma il valore 1. Infatti, moltiplicando le x per ρ, il nuovo valore di θ soddisfa alla:

$$\overline{\theta}d\overline{u}^3 = \theta du^3 \quad \text{con} \quad (d\overline{u} : du)^3 = 1 : \rho^2.$$

La $\overline{\theta} = 1$ determina pertanto ρ a meno del segno. Restano dunque determinate (a meno di un contemporaneo cambiamento di segno) le coordinate x, ξ di punto e piano osculatore: noi le diremo coordinate *normali*. Il valore corrispondente di u si dirà l'*arco* proiettivo della curva. Una collineazione qualunque produce sulle coordinate normali una trasform. lineare a coeffic. *costanti*.

Se noi usiamo coordinate normali, i corrispondenti valori delle q, c (o, se si vuole, delle q, γ) *sono completamente determinati in funzione di* u. *I loro valori determinano la curva, e sono perciò nella geom. proiettiva gli analoghi della curvatura e della torsione metrica.* Ogni altro invariante proiettivo della curva si esprime mediante essi e le loro derivate.

Se fosse $\theta = 0$, noi potremmo definire delle coordinate *normali* (non un verso normale) imponendo che $V = 1$. (Restando escluse le sole curve per cui $\theta = V = 0$, cioè le cubiche sghembe). In tal caso basta la conoscenza della sola q.

Oss. Vi è un caso notevole in cui coordinate non *omogenee* possono assumersi a coordinate *normali*. Scegliamo un punto su ogni tangente; potremo fissare il fattore di proporzionalità delle x in guisa che esso sia il punto dx; il piano osculatore della curva da esso descritta è il piano (dx, d^2x, d^3x), cioè il piano Ξ. Al punto dx nel sistema nullo osculatore (§ 7) corrisponde il piano $d\xi$, che inviluppa una sviluppabile, di cui X è il punto di regresso. Quando mai avverrà che dx descriva una curva piana, e $d\xi$ inviluppi un cono, cioè quando mai X e Ξ saranno fissi, ossia $X' = \Xi' = 0$? Ciò avviene soltanto se $c = \gamma = 0$ e quindi anche $\theta' = 0$; cioè, o $\theta = 0$, e la curva appartiene a un complesso lineare (nel qual caso evidentemente, se X è fisso, è fisso anche il piano Ξ che gli corrisponde nel relativo sistema nullo) oppure $\theta = \text{cost.} \neq 0$. Le coordinate x, ξ sono perciò *normali*; e (poichè $c = \gamma = 0$) per $(23)_{\text{ter}}$ una di esse si può supporre costante, e quindi le altre tre si possono poi considerare come coordinate *non omogenee*.

§ 7. — Gli elementi geometrici fondamentali.

A) Sistema nullo osculatore.

Siano $\overline{x}$, $\overline{x}'$, $\overline{x}''$, $\overline{\xi}$ ecc. le coordinate di punto e piano osculatore e le loro derivate calcolate in un punto generico O della curva. Le coordinate x, ξ di un punto o di un piano qualsiasi dello spazio potranno scriversi nella forma:

$$(1)\quad x = l\overline{x} + m\overline{x}' + n\overline{x}'' + p\overline{x}''',\quad \xi = \lambda\overline{\xi} + \mu\overline{\xi}' + \nu\overline{\xi}'' + \pi\overline{\xi}'''.$$

La reciprocità definita nello spazio dalle

$$(2) \qquad \lambda = l\,,\ \mu = m\,,\ \nu = n\,,\ \pi = p$$

non dipende dal parametro u, rispetto a cui si deriva, e non varia neanche se moltiplichiamo le x, e quindi anche (secondo le convenzioni del § 6, C) le ξ, per un medesimo fattore ρ. Supposto per semplicità $a = 1$, si trova (indicando con q, θ il valore di q, θ nel punto O):

$$Sx\xi = \lambda p - l\pi + m\nu - n\mu + q(n\pi - \nu p) - \theta p\pi$$

cioè

$$(3) \quad Sx\xi = lL + mM + nN + pP = -(\lambda\Lambda + \mu\mathrm{M} + \nu\mathrm{N} + \pi\Pi)$$

ove

$$(4) \quad \begin{cases} L = -\pi\,, & M = \nu\,, & N = -\mu + q\pi\,, & P = \lambda - q\nu - \theta\pi\,, \\ \Lambda = -p\,, & \mathrm{M} = n\,, & \mathrm{N} = -m + qp\,, & \Pi = l - qn + \theta p. \end{cases}$$

Le l, m, n, p ed L, M, N, P sono coordinate di punto e piano nel tetraedro D che ha per vertici i punti $\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}'', \overline{x}'''$; le λ, μ, ν, π e $\Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \Pi$ sono coordinate di piano e punto nel tetraedro Δ che ha per faccie i piani $\overline{\xi}, \overline{\xi}', \overline{\xi}'', \overline{\xi}'''$. La reciprocità (2) si può definire con le:

$$(2)_{\text{bis}} \quad L = -p\,,\ M = n\,,\ N = -m + qp\,,\ P = l - qn - \theta p\,,$$

$$(2)_{\text{ter}} \quad \Lambda = -\pi\,,\ \mathrm{M} = \nu\,,\ \mathrm{N} = -\mu + q\pi\,,\ \Pi = \lambda - q\nu + \theta\pi.$$

Tenuti fissi i tetraedri D, Δ, e il valore di q, queste correlazioni descrivono, al variare di θ, un fascio di correlazioni; i punti che appartengono al piano corrispondente sono i punti per cui $\theta p^2 = 0$, *cioè i punti del piano osculatore* $\mathrm{p} = 0$, *a cui corrispondono gli stessi piani in tutte le correlazioni del fascio.* Questo fascio di correlazioni è individuato dalla correlazione degenere $L = M = N = 0$, $P = p$ e dal *sistema nullo* definito dalle

$$(5) \qquad L = -p\,,\ M = n\,,\ N = -m + qp\,,\ P = l - qn\,,$$

oppure:

$$(5)_{\text{bis}} \quad \Lambda = -\pi\,,\ \mathrm{M} = \nu\,,\ \mathrm{N} = -\mu + q\pi\,,\ \Pi = \lambda - q\nu\,,$$

oppure:

$$(5)_{\text{ter}} \qquad p = \pi\,,\ n = \nu\,,\ m = \mu\,,\ l = \lambda - \theta\pi.$$

Esso sarà chiamato il *sistema nullo osculatore*, di cui vedremo ben presto il significato geometrico.

B) Il tetraedro principale.

Vogliamo definire *in modo intrinseco un tetraedro invariante per collineazioni e correlazioni*, che nella attuale teoria compia l' ufficio che il triedro principale compie nella geometria metrica. Scelto *ad libitum* $\varepsilon = \pm 1$ (e non indicando più con indici derivate covarianti), poniamo:

$$(6) \qquad \begin{cases} l = y_1 + \dfrac{3}{10}\, q y_3 + \left(-\dfrac{1}{2}\,\theta + \dfrac{3}{10}\, q'\right)\varepsilon y_4 \\ m = \varepsilon\left(y_2 + \dfrac{7}{10}\, q y_4\right) \\ n = y_3 \\ p = \varepsilon y_4 \end{cases}$$

ossia:

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \begin{cases} y_1 = l - \dfrac{3}{10}\, q n + \left(\dfrac{1}{2}\,\theta - \dfrac{3}{10}\, q'\right) p \\ y_2 = \varepsilon\left(m - \dfrac{7}{10}\, q p\right) \\ y_3 = n \\ y_4 = \varepsilon p. \end{cases}$$

Il piano $\xi = \lambda\,\overline{\xi} + \mu\,\overline{\xi}' + \nu\,\overline{\xi}'' + \pi\,\overline{\xi}'''$ ha nel tetraedro D per (4) l' equazione:

$$-\pi l + \nu m + (q\pi - \mu) n + (\lambda - q\nu - \theta\pi) p = 0$$

che potremo scrivere nella forma:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0$$

ove sia posto:

$$(7) \qquad \begin{cases} \eta_1 = -\,\varepsilon\pi \\ \eta_2 = \nu \\ \eta_3 = \dfrac{7}{10}\, q\varepsilon\pi - \varepsilon\mu \\ \eta_4 = \lambda - \dfrac{3}{10}\, q\nu - \left(\dfrac{3q'}{10} + \dfrac{\theta}{2}\right)\pi \end{cases}$$

ossia:

$$(7)_{\text{bis}} \quad \begin{cases} \pi = -\varepsilon\eta_1 \\ \nu = \eta_2 \\ \mu = -\varepsilon\left(\eta_3 + \dfrac{7}{10}\, q\eta_1\right) \\ \lambda = \eta_4 + \dfrac{3}{10}\, q\eta_2 - \dfrac{\varepsilon}{2}\,\theta\eta_1 - \dfrac{3q'\varepsilon}{10}\,\eta_1 \end{cases}$$

che si ottengono da (6) sostituendo alle:

$$l\,,\; m\,,\; n\,,\; p\,,\; y_1\,,\; y_2\,,\; y_3\,,\; y_4\,,\; -\theta$$

le:

$$\lambda\,,\; \mu\,,\; \nu\,,\; \pi\,,\; \eta_4\,,\; -\eta_3\,,\; \eta_2\,,\; -\eta_1\,,\; -\theta.$$

Le (7) si possono considerare perciò come le formole *duali* delle (6). E la simmetria delle formole apparirà più chiara, se si pone:

$$(8) \qquad \zeta_1 = \eta_4\,,\; \zeta_2 = -\eta_3\,,\; \zeta_3 = \eta_2\,,\; \zeta_4 = -\eta_1.$$

Chiameremo *tetraedro principale* T in O quello in cui le y ed η (o ζ) definite da (6), (7), (8) sono coordinate di punto e piano; e lo assumeremo a tetraedro di riferimento.

Consideriamo le coordinate y di un punto della curva posto nell'intorno di un suo punto O. Supporremo naturalmente, come abbiamo visto sempre possibile, $a = 1$, $\theta = 1$ (opp. $\theta = 0$). Le y soddisferanno alle $(23)_{\text{ter}}$ del § 6 D; i loro valori iniziali in O e quelli delle loro derivate saranno date da (6), appena si conoscano i valori in O delle $l\,,\, m\,,\, n\,,\, p$ e loro derivate. Ora i valori di $l'\,,\, l''\,,\, l'''\,,\, m\,,\, m''\,,\, m'''\,,\, n\,,\, n'\,,\, n'''\,,\, p\,,\, p'\,,\, p''$ in O sono nulli, quelli di $l\,,\, m'\,,\, n''\,,\, p'''$ valgono 1. Potremo così trarre gli sviluppi in serie delle y. E si trova:

$$(9) \quad \begin{cases} y_1 = 1 - \dfrac{3q}{20}\, u^2 + \left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{3}{10}\, q'\right) \dfrac{u^3}{6} + \left(\dfrac{c}{24} + \dfrac{3q^2}{240}\right) u^4 + \\ \quad + \left(\dfrac{c'}{120} - \dfrac{3q}{10}\, \dfrac{\theta - 2q'}{120} - \dfrac{q}{120}\left\{\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{3}{10}\, q'\right\}\right) u^5 + \dots \\ y_2 : \varepsilon = u - \dfrac{7q}{10}\, \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{\theta - q'}{24}\, u^4 + \left(\dfrac{c - q''}{120} + \dfrac{7q^2}{1200}\right) u^5 + \dots \\ y_3 = \dfrac{1}{2}\, u^2 - \dfrac{q}{24}\, u^4 + \dfrac{\theta - 2q'}{120}\, u^5 + \dfrac{1}{720}\,(q^2 - 3q'' + c)\, u^6 + \dots \\ y_4 : \varepsilon = \dfrac{u^3}{6} - \dfrac{q}{120}\, u^5 + \dfrac{\theta - 3q'}{720}\, u^6 + \dots \end{cases}$$

Scambiando θ in $-\theta$ si hanno gli sviluppi delle ζ definite da (9).

L' interpretazione geometrica di questo tetraedro T *si avrà dall' esame dei seguenti elementi geometrici fondamentali.*

C) Altri elementi geometrici.

Punto O. Esso è ora definito dalle $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, o, in coordinate di piano, dalla $\eta_1 = 0$, oppure $\zeta_4 = 0$.

Piano osculatore in O. È il piano $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0$ ossia (come luogo dei punti) $y_4 = 0$.

Retta tangente in O. È la retta $y_3 = y_4 = 0$ ossia $\zeta_3 = \zeta_4 = 0$.

Cono quadrico osculatore in O. L'unico cono quadrico col vertice in O che ha con la curva C in O contatto di sesto ordine (tale cioè che sostituendo (9) nella sua equazione siano nulli tutti i coefficienti di u^n per $n \leqq 6$) è il cono:

$$2y_3^2 - 3y_2 y_4 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \zeta_4 = 3\zeta_2^2 - 8\zeta_1\zeta_3 = 0 \tag{10}$$

$\left(\text{Il primo membro di (10) vale } \dfrac{15q' - 7\theta}{240} u^7 + \ldots\right)$

Conica (inviluppo) osculatrice in O. È l'ente duale del precedente.

$$2\zeta_3^2 - 3\zeta_2\zeta_4 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad y_4 = 3y_2^2 - 8y_1 y_3 = 0. \tag{10 bis}$$

Fascio osculatore di cubiche (sghembe). Una cubica sghemba posta sul cono osculatore è intersezione di questo e di un cono quadrico che ha il vertice P p. es. sulla generatrice $y_2 = y_3 = 0$ del precedente, e che ha quindi un'equazione omogenea di 2° grado in y_2, y_3, $hy_1 + ky_4$ se $hy_1 + ky_4 = 0$ è un piano passante per P. Notando che

$$\left\{\begin{aligned} & y_2^2 - 2y_1 y_3 = -\frac{\theta}{60} u^6 - \frac{V}{180} u^6 + \ldots, \\ & y_3 y_4 = \frac{\varepsilon}{12} u^6 + \text{termini in } u^7 + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

si riconosce che soltanto le intersezioni del cono osculatore con uno dei coni

$$y_2^2 - 2y_1 y_3 + 2hy_3 y_4 = 0 \qquad (h = \text{cost.})$$

hanno in O contatto pentapunto con la curva data. Le *cubiche* così ottenute *hanno per equazioni parametriche in coordinate di punto o di piano osculatore :*

$$\frac{y_1 - hy_4}{y_2 : 2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{\frac{3}{2} y_4} = w \qquad (w \text{ parametro}) \tag{12}$$

$$\frac{\zeta_1 - h\zeta_4}{\zeta_2 : 2} = \frac{\zeta_2}{\zeta_3} = \frac{\zeta_3}{\frac{3}{2} \zeta_4} = w \tag{12 bis}$$

che se ne deducono mutando le y *in* ζ. *Esse definiscono tutte lo stesso sistema nullo: il sistema nullo osculatore* y = ζ.

Ponendo $2h = \frac{\varepsilon\theta}{5}$ si ha una cubica che per (11) ha in O con C un contatto 6 punto: *la* (prima) *cubica osculatrice*. Ponendo $2h = -\frac{\varepsilon\theta}{5}$ si ha *la* (seconda) *cubica osculatrice* che ha in O con C 6 *piani osculatori consecutivi comuni*. Per $h = 0$ si ha la *cubica armonica*, luogo dei coniugati armonici di O rispetto ai punti ove le precedenti cubiche incontrano le generatrici. *Queste cubiche coincidono solo se* $\theta = 0$, *cioè se la curva data* C *appartiene a un complesso lineare. Come i loro punti giacciono* (in ogni caso) *sul cono quadrico osculatore, così i loro piani osculatori inviluppano la conica osculatrice.*

Punto di Halphen (primo). I coni quadrici passanti per una cubica del fascio osculatore hanno per equazione

$$(13)\qquad 2a(2y_3^2 - 3y_2y_4) + b(y_2^2 - 2y_1y_3 + 2hy_3y_4) + 2c(3y_1y_4 - 3hy_4^2 - y_2y_3) = 0$$

$$(13)_{\text{bis}}\qquad (ab - c^2 = 0) \qquad (a\,,\ b\,,\ c = \text{cost.})$$

Il vertice del cono è quello, a cui corrisponde il parametro

$$(14)\qquad w = 2a : c = 2c : b.$$

Se $h = \varepsilon\theta : 10$, la cubica considerata è la prima osculatrice; il cono corrispondente alle $b = c = 0$ è il cono quadrico osculatore ed ha perciò in O con C un contatto 7 — punto. Se $\theta \neq 0$ vi è tra i (13) un altro cono che in O ha con C un contatto 7 — punto. Infatti il primo membro di (13), per le (9), ha, se $10\,h = \varepsilon\theta$, uno sviluppo

$$\left(-\frac{bV}{180} + \frac{\varepsilon\theta c}{60}\right)u^6 + \ldots.$$

Il cono (13) avrà con C in O un contatto 7 — punto non solo per $b = c = 0$, ma anche per $2c : b = 2\varepsilon\theta V : 3$, che dà luogo ad un cono, il cui vertice è il punto

$$(14)\qquad y_1 = \frac{\varepsilon\theta}{10} + \frac{2}{9}\varepsilon\theta V^2,\quad y_2 = \frac{2}{3}V^2,\quad y_3 = \varepsilon\theta V,\quad y_4 = 1,$$

che non coincide con O se $\theta \neq 0$, e che diremo il *primo punto* di Halphen. Esso è *l'unico punto della prima cubica osculatrice, da cui questa è proiettata secondo un cono quadrico avente in* O *un contatto* 7 *punto con la curva data* C. *Il piano, che da esso proietta la tangente in* O, *è il piano principale di Halphen, luogo dei punti da cui la prima cubica osculatrice è proiettata secondo un cono (cubico) avente in* O *un contatto* 7 — punto *con* C.

Il piano osculatore alla prima cubica osculatrice nel punto trovato si potrà dire il (primo) *piano di Halphen*. Dualmente troveremo sulla seconda cubica osculatrice un (secondo) *piano di Halphen*, che la oscula in un punto che chiameremo il (secondo) *punto di Halphen*.

Se $\theta = 0$ il (primo) punto di Halphen coincide con O, ecc.

Punto di Sannia (primo) è il punto comune alle ∞^2 quadriche che hanno in O un contatto 7 — punto con la curva data, e che perciò appartengono alla rete definita dalle quadriche

$$A = 2y_3^2 - 3y_2 y_4 = 0$$

$$B = y_3^2 - 2y_1 y_3 + \frac{2\varepsilon\theta}{10} y_3 y_4 + \frac{V}{5} y_4^2 = 0;$$

$$C = 3y_1 y_4 - \frac{3\varepsilon\theta}{10} y_4^2 - y_2 y_3 - \frac{3\varepsilon\theta}{10} y_4^2 = 0.$$

(Si noti infatti che le A, B, C per le (9) hanno sviluppi, che cominciano col termine in u^7). Trovando i punti ove la cubica $A = C = 0$ incontra la quadrica $B = 0$, si trova che il punto di Saunia è, se $\theta \neq 0$, il punto:

$$y_4 = 1, \quad y_3 = \varepsilon\theta V, \quad y_2 = \frac{2}{3} V^2, \quad y_1 = \frac{\varepsilon\theta}{5} + \frac{2}{9} \varepsilon\theta V^3.$$

Potremo, analogamente a quanto sopra, definire un secondo punto e due piani di Sannia. Notando che tra le quadriche aventi un contatto sette punto in O con C vi sono i coni che da O e dal primo punto di Halphen proiettano la cubica osculatrice [i quali hanno a comune, oltre a tale cubica, la generatrice che ne congiunge i vertici] troviamo: *Un punto della curva e i corrispondenti punti di Halphen e di Sannia sono allineati.*

Tutti questi enti, definiti se $\theta \neq 0$ cioè per curve non appartenenti a complessi lineari, permettono di caratterizzare il *tetraedro fondamentale. Il vertice* $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ *è il punto* O *generico della curva, lo spigolo* $y_3 = y_4 = 0$ *la tangente in* O, *il piano* $y_4 = 0$ *il piano osculatore in* O. *Lo spigolo* $y_2 = y_4 = 0$ *è la retta uscente da* O *posta sul piano osculatore che si appoggia alla congiungente i due punti di Halphen ed incontra la conica osculatrice in* O *e nel punto* $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, *in cui la conica osculatrice ha per tangente la retta* $y_1 = y_4 = 0$. *Definiti così gli spigoli del tetraedro posti in* $y_4 = 0$, *il sistema nullo osculatore determina gli altri tre. Questo tetraedro ha per faccie due piani osculatori della cubica armonica, e i due piani che dal punto di contatto di uno proiettano la tangente nell'altro.*

D) Una osservazione.

Sia $x + rdx$ un punto P della retta tangente, $\xi + rd\xi$ il piano π che gli corrisponde nel sistema nullo osculatore. Posto $x = \rho\bar{x}$, $\xi = \rho\bar{\xi}$, il punto P e il piano π avranno le coordinate $\bar{x} + \bar{r}d\bar{x}$ e $\bar{\xi} + \bar{r}d\bar{\xi}$, ove:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{r} + d \log \rho.$$

Sia $F_3 = du^3$, e siano $\left(x, \frac{dx}{du}\right) = t$ le coordinate di retta tangente. Se $(d\bar{u} : du)^3 = \frac{1}{\rho^2}$ sarà (§ 6 G) $\bar{F}_3 = d\bar{u}^3$, mentre $\bar{t} = \left(\bar{x}, \frac{d\bar{x}}{d\bar{u}}\right)$. Quindi:

$$t = \rho^2 \bar{t}\,(d\bar{u} : du) = \rho^{\frac{4}{3}}\bar{t}.$$

Perciò

$$t + \frac{3}{4} rdt \qquad \text{e} \qquad \bar{t} + \frac{3}{4}\bar{r}\,d\bar{t}$$

sono proporzionali. *La corrispondenza tra il punto* $\mathrm{x + rdx}$, *il piano* $\xi + \mathrm{rd}\xi$, *e la retta* $\mathrm{t} + \frac{3}{4}\mathrm{rdt}$ *è dunque indipendente dal fattore* ρ, *ed è dunque definibile geometricamente* (č). Infatti, posto $rdu = s$, il punto $x + rdx = x + sx'$ ha le coordinate $l = 1$, $m = s$, $n = p = 0$ ossia: $y_1 = 1$, $y_2 = \varepsilon s$, $y_3 = y_4 = 0$, la cui polare rispetto alla conica osculatrice è $3\varepsilon s y_2 - 4y_3 = y_4 = 0$, passante per i punti $(1, 0, 0, 0)$ e $\left(0, 1, \frac{3}{4}\varepsilon s, 0\right)$ [mentre t è la retta da $(1, 0, 0, 0)$ a $(0, \varepsilon, 0, 0)$ e t' è la retta da $(1, 0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1, 0)$] e conseguentemente coincide con $t + \frac{3}{4} rdt$, *che è dunque la polare di* $\mathrm{x + rdx}$ *rispetto alla conica osculatrice, come è la polare di* $\xi + \mathrm{rd}\xi$ *rispetto al cono osculatore.*

Proiettiamo ora la nostra curva da un punto $(a, b, 1, \varepsilon s)$ qualsiasi del piano $\xi + s\xi'$ (cioè del piano $\eta_4 = 1$, $\eta_3 = -\varepsilon s$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$) sul piano osculatore. La proiezione avrà per coordinate

$$\overline{y}_1 = y_1 - \frac{a}{\varepsilon s} y_4 = 1 - \frac{3q}{20} u^2 + \ldots;$$

$$\overline{y}_2 = y_2 - \frac{b}{\varepsilon s} y_4 = \varepsilon \left[u - \left(\frac{b}{6s} + \frac{7}{10} \frac{q}{6} \right) u^3 + \ldots \right]$$

$$\overline{y}_3 = y_3 - \frac{1}{\varepsilon s} y_4 = \frac{1}{2} u^2 - \frac{u^3}{6s} + \ldots; \quad \overline{y}_4 = 0.$$

La conica osculatrice, avente contatto 5 — punto con tale proiezione è la conica

$$y_2^2 - 2y_1 y_3 - \frac{2\varepsilon}{3s} y_2 y_3 + \alpha y_3^2 = 0,$$

ove è inutile specificare il valore di α; e la retta polare di $x + sx'$ rispetto a tale conica è sempre la retta $t + \frac{3}{4} r dt$ precedente; che è dunque anche *la retta polare di* $\mathrm{x} + \mathrm{r}d\mathrm{x}$ *rispetto alla conica osculatrice in* O *alla proiezione della curva fatta sul piano osculatore in* O *da un punto del piano* $\xi + \mathrm{r}d\xi$. (č).

§ 8. — Le curve piane.

Daremo un rapido sunto della teoria di queste curve. Se x (cioè x, y, z) sono le tre coordinate omogenee dei suoi punti, porremo $(x, dx, d^2x) = a^2 du^3$. Se ξ sono le coordinate di retta tangente è $S\xi x = S\xi x' = S\xi' x = 0$. Sarà perciò:

$$S\xi d^2x = - Sd\xi dx = Sxd^2\xi.$$

Imporremo alle ξ tale fattore di proporzionalità che:

$$(\xi, d\xi, d^2\xi) = a^2 du^3 = (x, dx, d^2x)$$

ossia che:

$$(\xi, d\xi, d^2\xi)\ (x\ dx\ d^2x) = (S\xi d^2x)^3 = (Sxd^2\xi)^3 = a^4 du^6.$$

Sarà:

$$S\xi d^2 x = -S dx d\xi = S x d^2\xi = a^2 du^2.$$

Noi sceglieremo u in guisa che $a=1$. Il parametro u così definito varia però, moltiplicando le x, ξ per uno stesso fattore. Sarà allora:

$$(x\,x'\,x''') = (x\,x'\,x'')'_u = 0 \text{ cioè } 0 = S\xi x''' = -S\xi' x'' = S\xi'' x' = -S x \xi'''.$$

Possiamo definire la curva dando l' equazione differenziale lineare cui soddisfano le x, y, z *di un suo punto e loro combinazioni lineari. Posto* pertanto

$x''' = hx'' + kx' + lx$ si avrà $hS\xi x'' = S\xi x'''$, cioè $h=0$ (nell' ipotesi $a=1$)

E all' equazione si può dare la forma:

$$x''' + 2qx' + (q' - \theta)x = 0.$$

Se noi moltiplichiamo le x per uno stesso fattore ρ, e contemporaneamente variamo il parametro u in guisa che sia ancora $a=1$, si riconosce facilmente che θdu^2 è *invariante*. Se $\theta=0$, scelto il citato fattore ρ in guisa che $q=0$, l' equazione si riduce alla $x'''=0$, le x, y, z sono pertanto polinomi di 2° grado di uno stesso parametro. Dunque, se $\theta=0$, *la curva è una conica*. Se $\theta \neq 0$, si potrà scegliere ρ in guisa che $\theta=1$. Il parametro corrispondente u sarà l'*arco proiettivo*, e le coordinate x, ξ corrispondenti le *coordinate* normali.

Esse *soddisfano alle due equazioni aggiunte:*

$$x''' + 2qx' + (q'-1)x = 0 \qquad \xi''' + 2q\xi' + (q'+1)\xi = 0.$$

La curva, se non è una conica, *è dunque definita dalla conoscenza della* q *in funzione dell' arco proiettivo* u.

Se x, x', ξ, ξ', q sono i valori di x, x', ecc. in un punto O della curva, ogni punto del piano $\overline{x}$ avrà coordinate del tipo $y_1 x + y_2 x' + y_3(x'' + qx)$ e ogni retta $\overline{\xi}$ del piano avrà coordinate del tipo $\zeta_1\xi + \zeta_2\xi' + \zeta_3(\xi'' + q\xi)$. Il punto e la retta si apparteranno se $\zeta_3 y_1 + \zeta_1 y_3 - \zeta_2 y_2 = 0$. *La conica osculatrice sia alla curva luogo che alla curva inviluppo* ha per equazioni $2y_1 y_3 - y_2^2 = 0$ pensata come luogo e $2\zeta_1\zeta_3 - \zeta_2^2 = 0$ pensata come inviluppo. La polarità rispetto a questa conica è definita dalla $\zeta_i = y_i$.

Il punto di Halphen ($y_1 = 2 \cdot 7^2 - 25q^2$, $y_2 = -490q$, $y_3 = 7 \cdot 25q^2$) è il punto comune alle cubiche che in O hanno un contatto 8 — punto con la curva data; *la cubica penosculante nodale*

$$5(2y_1 y_3 - y_2^2)y_2 - 4y_3^3 = 0$$

è l' unica cubica con punto doppio in O, che in O ha un contatto 8 punto con la curva data, ed ha per tangenti le rette $y_2 = y_3 = 0$. Ma tutta la configurazione così generata non ha trovato finora applicazione alcuna.

Una osservazione.

Nel seguito ci sarà utile la sola osserv. seguente. Se x, ξ, dx, d^2x, ecc. sono le coordinate x di un punto della curva e ξ della tangente corrispondente, e i loro differenziali, calcolate tutte in un punto fisso O, allora nella polarità rispetto alla conica osculatrice si corrispondono il punto $ax + bdx + cd^2x$ e la retta $a\xi + bd\xi + cd^2\xi$ quando le x e le ξ relative a un punto *generico* della curva sono legate dalla:

$$(x\,,\, dx\,,\, d^2x) = (\xi\,,\, d\xi\,,\, d^2\xi) \tag{1}$$

da cui segue

$$(x\,,\, dx\,,\, d^3x) = (\xi\,,\, d\xi\,,\, d^3\xi) \tag{1$_{\text{bis}}$}$$

che è equivalente alla:

$$S\xi d^3x = Sxd^3\xi \;(^*) \tag{1$_{\text{ter}}$}$$

ossia, per le:

$$S\xi d^2x = -Sd\xi dx = Sxd^2\xi\,; \tag{2}$$

alla:

$$S(d\xi d^2x - dxd^2\xi) = 0. \tag{1$_{\text{quater}}$}$$

(*) Infatti è evidentemente $\xi = \rho(x\,,\, dx)$, $x = \sigma(\xi\,,\, d\xi)$ con ρ, σ fattori di proporzionalità. Quindi (1) dà $\frac{1}{\rho} S\xi d^3x = \frac{1}{\sigma} Sxd^3\xi$. Ma, derivando le identità $S\xi x = S\xi dx = Sxd\xi = 0$, si ottengono le (2); e quindi $\rho = \sigma$. Perciò le $(1)_{\text{bis}}$, $(1)_{\text{ter}}$ sono equivalenti.

CAPITOLO II.

I FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE

---

§ 9. — Formole di calcolo assoluto.

A) Differenziali controvarianti.

Sia

$$G = \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s \quad (r\,, s = 1\,, 2\,, \ldots\,, n) \tag{1}$$

una forma quadratica differenziale col discriminante $A \neq 0$; sia A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in A diviso per A. Poniamo:

$$\begin{bmatrix} i\,h \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial u_h} + \frac{\partial a_{hl}}{\partial u_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial u_l}\right), \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} i\,h \\ l \end{pmatrix} = \sum_r A_{lr} \begin{bmatrix} i\,h \\ r \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Risolvendo le (3) si trova:

$$\begin{bmatrix} i\,h \\ l \end{bmatrix} = \sum_r a_{lr} \begin{pmatrix} i\,h \\ r \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Conserveremo il simbolo $\begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix}$ anzichè $\begin{pmatrix} i\,h \\ r \end{pmatrix}$ soltanto per l'elemento lineare di Gauss della geometria metrica.

Si dimostra che:

$$\frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial u_i} = \sum_r \begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Le (2) e (3) sono i cosidetti simboli di Christoffel di prima e di seconda specie. Porremo:

$$\left\{\begin{aligned} &\delta^1 u_i = \delta u_i = du_i\,; \quad \delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{r,s} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} du_r\, du_s \\ &\delta^3 u_i = d(\delta^2 u_i) + \sum_{r,s} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} du_r\, \delta^2 u_s\,, \text{ ecc.} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Tali espressioni saranno chiamate (F) *differenziali controvarianti*. Se noi alle variabili u_i sostituiamo n loro funzioni indipendenti u'_i, la forma G si muta in

$$\sum a'_{rs} du'_r\, du'_s \quad \text{ove} \quad a'_{rs} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial u'_r} \frac{\partial u_j}{\partial u'_s}. \tag{7}$$

Corrispondentemente si mutano i simboli di Christoffel. Ma, come è

$$du_i = \sum_r \frac{\partial u_i}{\partial u'_r} du'_r\,, \tag{8}$$

così si può dimostrare che formole affatto simili valgono per i differenziali controvarianti, che cioè:

$$\delta^s u_i = \sum_r \frac{\partial u_i}{\partial u'_r} \delta^s u'_r \quad \text{anche per } s = 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Se $n = 2$, *porremo sovente* $u_1 = u$, $u_2 = v$.

B) Alcune definizioni. Le geodetiche.

Diremo che un'espressione è *intrinseca*, se il suo valore non muta con un cambiamento di variabili u in loro funzioni u'; la diremo *impropriamente intrinseca* se essa resta immutata per cambiamenti di variabili a Iacobiano positivo, ma cambia di segno per trasformazioni a Iacobiano negativo.

Così p. es. dalle (7), (8), (9) si deduce:

$$A' = A \left[\frac{d(u_1 u_2 \ldots . u_n)}{d(u'_1 u'_2 \ldots . u'_n)} \right]^2 \tag{10}$$

e, se $n = 2$:

$$(du'_1 \delta^s u'_2 - du'_2 \delta^s u'_1) = \frac{d(u'_1 u'_2)}{d(u_1 u_2)} (du_1 \delta^s u_2 - du_2 \delta^s u_1). \tag{11}$$

$$(s = 2, 3, \ldots .)$$

Quindi, *per* n = 2, *le espressioni*

$$\sqrt{|A|}\, (du_1 \delta^2 u_2 - du_2 \delta^2 u_1) \tag{12}$$

e

$$\sqrt{|A|}\, (du_1 \delta^3 u_2 - du_2 \delta^3 u_1) \tag{13}$$

di cui, si noti, *la seconda è,* com'è facile verificare con le (5) e (6), *il differenziale della prima, sono entrambe impropriamente intrinseche.*

La prima di esse divisa per $\sqrt{\mathrm{G}}^{3}$ *dà la curvatura geodetica di una linea tracciata su una superficie, su cui* G *è l'elemento lineare. Le geodetiche si possono definire dicendo che essa è nulla.*

Si noti l'identità, che ben presto generalizzeremo:

$$dG = 2\, \Sigma a_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s . \tag{14}$$

Se dunque scegliamo lungo le geodetiche il parametro t definito dalla $dt = \sqrt{G}$, lungo esse sarà $\Sigma a_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{\delta^2 u_s}{dt} = 0$ e quindi, essendo nulla anche (12), esse soddisferanno alle

$$\frac{\delta^2 u_i}{dt^2} = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{15}$$

com'è ben noto. In questa trattazione si è escluso che lungo le geodetiche considerate sia $G = 0$, cioè abbiamo escluse le geodetiche di lunghezza nulla.

Le (15) per $i = 1, 2, \ldots, n$ definiscono anche per $n > 2$ le geodetiche, quando G sia assunto ad elemento lineare.

C) Derivate covarianti.

NB. Il lettore può leggere il resto di questo § man mano che esso sarà invocato nelle pagine seguenti; sarebbe troppo pesante leggerlo in una sola volta, almeno per chi non conosce già il calcolo assoluto.

Sia, per fissare la idee

$$(16)\qquad B_3 = \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \qquad (b_{rst} = b_{rts} = b_{srt} = \text{ecc.})$$

una forma cubica di carattere *intrinseco*, cioè indipendente dalla scelta dei parametri indipendenti u_i. Differenziando, e sostituendo alle $d^2 u$ i loro valori dedotti da (6), si trova:

$$(17)\qquad dB_3 = 3\,\Sigma\, b_{rst}\, \delta^2 u_r\, du_s\, du_t + \delta B_3$$

ove si è posto

$$(18)\qquad \delta B_3 = \Sigma\, b_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i\,,$$

$$(19)\qquad b_{rsti} = \frac{\partial b_{rst}}{\partial u_i} - \sum_q \binom{r\,i}{q} b_{qst} - \sum_q \binom{s\,i}{q} b_{rqt} - \Sigma \binom{t\,i}{q} b_{rsq}\,.$$

La (18) si dirà la forma δB prima covariante della B, il sistema (19), generalmente non simmetrico, si dirà il sistema primo derivato covariante del sistema delle b_{rst}. Com'è evidente anche il primo termine del secondo membro di (17) è *intrinseco*, come B_3 e dB_3; altrettanto avverrà perciò del secondo termine δB_3.

Altrettanto si può dire per forme B_r intrinseche di grado qualunque r; in particolare

$$(20)\qquad \begin{cases} \text{per } r = 1, \text{ se } B_1 = \Sigma\, b_r\, du_r\,, \text{ sarà:} \\ dB_1 = \Sigma\, b_r\, \delta^2 u_r + \delta B_1\,, \quad \delta B_1 = \Sigma\, b_{ri}\, du_r\, du_i \\ b_{ri} = \dfrac{\partial b_r}{\partial u_i} - \displaystyle\sum_q \binom{r\,i}{q} b_q \end{cases}$$

$$(21)\qquad \begin{cases} \text{per } r = 2, \text{ se } B_2 = \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s \quad (b_{rs} = b_{sr})\,, \text{ sarà:} \\ dB_2 = 2\,\Sigma\, b_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \delta B_2\,,\ \delta B_2 = \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \\ b_{rst} = \dfrac{\partial b_{rs}}{\partial u'_t} - \displaystyle\sum_q \binom{r\,t}{q} b_{qs} - \sum_q \binom{s\,t}{q} b_{qr}. \end{cases}$$

In particolare, se $B_2 = G = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s$, è:

$$a_{rst} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_t} - \sum_q \binom{r\,t}{q} a_{qs} - \sum_q \binom{s\,t}{q} a_{qr} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_t} - \begin{bmatrix} r\,t \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s\,t \\ r \end{bmatrix} = 0$$

cioè, come avevamo già trovato in (B)

$$dG = 2\Sigma a_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s \tag{14}$$

Cosicchè: *Il sistema derivato covariante del sistema fondamentale delle* a_{rs} *è nullo.*

Infine, se x è una forma intrinseca di grado $r = 0$, cioè se x è una funzione intrinseca, è:

$$\left\{\begin{array}{l} dx = \Sigma\, x_i\, du_i\,, \quad d^2 x = \Sigma\, x_i\, \delta^2 u_i + \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, du_s\,, \\ d^3 x = \Sigma\, x_i\, \delta^3 u_i + 3\,\Sigma\, x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \Sigma\, x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,, \end{array}\right. \tag{22}$$

ove:

$$\left\{\begin{array}{l} x_i = \dfrac{\partial x}{\partial u_i}\,; \quad x_{rs} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r\, \partial u_s} - \displaystyle\sum_q \binom{r\,s}{q} x_q\,; \\ x_{rst} = \dfrac{\partial x_{rs}}{\partial u_t} - \displaystyle\sum_q \binom{r\,t}{q} x_{qs} - \sum_q \binom{s\,t}{q} x_{qr} \end{array}\right. \tag{23}$$

sono *le cosidette derivate covarianti prime e seconde della* x. *Si noti che, se ai* δ^2u *sostituiamo i* d^2u, *e alle derivate covarianti le derivate ordinarie, queste formole si riducono alle formole abituali; con cui del resto esse coincidono, se le* a_{rs} *sono costanti.*

D) Una generalizzazione.

Se du_i, $d'u_i$, $d''u_i$, ecc. sono altrettanti sistemi di differenziali primi, e se p. es. la forma trilineare

$$B_3 = \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, d'u_s\, d''u_t\,,$$

ove non è più necessario supporre che b_{rst} sia simmetrico, ha carattere intrinseco, potremmo ripetere per essa un ragionamento analogo e chiamare primo sistema derivato covariante del sistema b_{rst}

quello definito da (19). Si trova di nuovo che

$$\Sigma b_{rsti}\, du_r\, d'u_s\, d''u_t\, d'''u_i$$

ha carattere intrinseco.

Noi porremo

$$b^{rst} = \sum_{l,j,h} A_{rl}\, A_{sj}\, A_{th}\, b_{ljh} \tag{24}$$

Sarà :

$$b_{rst} = \Sigma a_{rj}\, a_{sl}\, a_{th}\, b^{jlh}. \tag{25}$$

Notazioni analoghe saranno usate per sistemi binari, quaternari, ecc. (a 2, a 4 indici ecc.) In particolare

$$a^{rs} = \sum_{l,j} A_{rl}\, A_{sj}\, a_{lj} = \Sigma \varepsilon_{jr}\, A_{sj} = A_{rs} \tag{26}$$

$$(\varepsilon_{jj} = 1\,,\ \varepsilon_{jr} = 0 \text{ per } j \neq r).$$

I sistemi come b_{rst} sono i sistemi *covarianti* del Ricci, i sistemi b^{rst} i sistemi controvarianti. Se b^{rst} è controvariante, ed x, x', x'' sono tre funzioni intrinseche anche

$$\Sigma b^{rst}\, x_r\, x'_s\, x''_t$$

è intrinseco. Più avanti definiremo anche i sistemi misti.

E) I simboli a quattro indici e alcuni parametri differenziali.

Essendo per (26) A_{rs} un sistema controvariante, se ne deduce che i ben noti parametri differenziali

$$\Delta_1 x = \Sigma A_{rs}\, x_r\, x_s\ ,\quad \Delta_2 x = \Sigma A_{rs}\, x_{rs} \tag{27}$$

hanno significato intrinseco, se x è una funzione intrinseca.

Da (23) si deduce derivando :

$$x_{rst} - x_{rts} = \sum_{p,q} (st\,,\, pr)\, A_{pq}\, x_q \tag{28}$$

ove (st, pr) è il noto simbolo di Riemann definito dalla:

$$(30)\quad (rk, ih) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial u_i\, \partial u_k} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_r\, \partial u_h} - \frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial u_h\, \partial u_k} - \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial u_r\, \partial u_i}\right) +$$

$$+ \sum_{l, m} A_{lm}\left(\begin{bmatrix} r\,h \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\,k \\ l \end{bmatrix}\right).$$

Il sistema delle (rk, ih) è un sistema covariante; se $n = 2$, quelli dei simboli di Riemann che non sono nulli, a meno del segno, coincidono con $(12, 12)$.

La frazione $\dfrac{(12, 12)}{\mathrm{A}}$ *si chiama, se* n = 2, *la curvatura di* G.

F) Relazioni di apolarità.

Una forma intrinseca

$$\Sigma\, b_{rsth\ldots\ldots}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_h \ldots\ldots$$

si dice *apolare* o *coniugata alla* G, se per ogni sistema di valori delle $t, h, \ldots.$ vale la:

$$(31)\qquad \sum_{r, s} A_{rs}\, b_{rsth\ldots\ldots} = 0.$$

Questa relazione è intrinseca. *Così* $\mathrm{B} = \Sigma\, \mathrm{b}_{rs}\, \mathrm{du}_r\, \mathrm{du}_s$ *è apolare alla* G, *se*

(32) $\Sigma A_{rs} b_{rs} = 0$ ossia, per $n = 2$, se $a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - 2a_{12} b_{12} = 0$

ossia, posto

$$u_1 = u, \quad u_2 = v,$$

se le radici dv : du *della* G = 0 *e della* B = 0 *si separano armonicamente.* Possiamo conservare questo enunciato anche nel caso finora escluso $A = 0$; così la relazione di apolarità per due forme quadratiche G, B diventa simmetrica.

Sempre supposto che anche B abbia significato intrinseco, ed

$A \neq 0$, *la forma*

$$(33)\ C = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} b_{11}du_1 + b_{12}du_2 & b_{12}du_1 + b_{22}du_2 \\ a_{11}du_1 + a_{12}du_2 & a_{12}du_1 + a_{22}du_2 \end{vmatrix} = \Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s$$

impropriamente intrinseca *è una forma apolare ad entrambe ; se le forme date non sono proporzionali, se cioè* (33) *non è identicamente nullo, le forme quadratiche apolari alle* G , B *sono tutte e sole le forme proporzionali a* (33).

Se vale la (32), allora la forma B è apolare sia a G che a C. Ora C, essendo apolare alla G che ha il determinante $A \neq 0$, non può essere proporzionale a G; perciò, per il precedente teorema, esisterà un fattore λ tale che:

$$(34)\qquad B = \frac{\lambda}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} c_{11}\,du + c_{12}\,dv & c_{21}\,du + c_{22}\,dv \\ a_{11}\,du + a_{12}\,dv & a_{21}\,du + a_{22}\,dv \end{vmatrix}$$

Ricordando la (32) si trova che:

$$(35)\qquad \lambda = -\,sgn\,A = \pm 1.$$

§ 10. — Riassunto di alcuni teoremi metrici.

A) Triedri diretti e inversi.

Dato un sistema di assi cartesiani p. es. ortogonali x, y, z chiameremo positiva la faccia del piano $x\,y$ volta verso il raggio positivo delle z. Siano date altre 3 rette orientate non complanari a, b, c uscenti da un punto O; la faccia del piano $a\,b$, volta verso la direzione positiva di c, si dirà la faccia positiva di tale piano nel considerato triedro. Se con un movimento portiamo a coincidere le faccie positive dei piani $x\,y$ ed $a\,b$, allora può avvenire che coincidano i versi delle rotazioni che attraverso l'angolo concavo portano il raggio (cioè la direzione positiva) a nel raggio b, oppure il raggio x nel raggio y. In questo caso diremo che il triedro $a\,b\,c$ è *diretto,* o che segue la legge di *orientazione* determinata dal sistema coordinato xyz, nel caso opposto diremo che abc è un triedro *inverso*, o che non segue la legge di orientazione. *Il determinante dei coseni direttori di* a, b, c *è positivo nel primo caso, negativo nel secondo. Le simmetrie portano triedri diretti in inversi e viceversa;* altrettanto avviene per i movimenti di 2ª specie.

B) Le forme fondamentali di Gauss di una superficie.

Una superficie S sia definita dando le coordinate x, y, z dei suoi punti in funzione di due parametri $u = u_1$, $v = u_2$. Le x_u, y_u, z_u sono proporzionali ai coseni direttori della tangente ad una linea $v =$ cost. di S; e il fattore di proporzionalità è positivo, se noi scegliamo quel verso della tangente che è diretto nel verso delle u crescenti. Proposizione analoga vale per le x_v, y_v, z_v. Come verso della normale scegliamo quello tale che il verso delle u crescenti su una $v =$ cost., il verso delle v crescenti su una $u =$ cost., e il verso della normale formino un triedro diretto; i coseni direttori X, Y, Z di questa direzione normale renderanno positivo il determinante (x_u, x_v, X). Con queste convenzioni è fissata *la faccia positiva del piano tangente alla* S *in un suo punto* A *e anche della stessa superficie* S, almeno in un intorno di A.

Un cambiamento di variabili coordinate u_i *cambia, o non cambia tale faccia positiva, secondo che il suo Iacobiano è positivo o negativo.*

La forme fondamentali di Gauss sono:

$$(1) \qquad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = Sdx^2$$

$$(2) \qquad Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = SXd^2x = -SdXdx =$$

$$= \frac{(x_u, x_v, d^2x)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

La prima è intrinseca e invariante (per movimenti).

La seconda è impropriamente intrinseca, invariante per soli movimenti di prima specie, perchè cambia di segno per movimenti di seconda specie (oltre che per una trasformaz. dei parametri u_i a Iacobiano negativo).

In altre parole la seconda forma è completamente determinata soltanto se è data l'orientazione di S, cioè se è data la sua faccia positiva.

La prima forma è *l'elemento lineare* della S.

Date le forme (1), (2), la determinazione della superficie è ridotta all'integrazione del sistema

$$x_{11} = DX\,, \quad x_{12} = D'X\,, \quad x_{22} = D''X\,, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} X_u &= \frac{FD' - GD}{EG - F^2}\, x_u + \frac{FD - ED'}{EG - F^2}\, x_v\,, \\ X_v &= \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\, x_u + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}\, x_v\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ove le x_{rs} indicano derivate covarianti rispetto all'*elemento lineare*, assunto a forma G fondamentale. Per questo elemento lineare i simboli di Christoffel di seconda specie, anzichè con $\begin{pmatrix} rs \\ t \end{pmatrix}$, si indicheranno con $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$, come abbiamo già detto (§ 9 A).

Le condizioni di integrabilità delle (3), (4) danno le equazioni di Codazzi, e l'equazione di Gauss

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K\,, \tag{5}$$

ove K è la curvatura dell'elemento lineare. Esse sono le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè (1) e (2) individuino una superficie [oltre alla $EG - F^2 > 0$, almeno nel campo reale; questa ultima è l'unica condizione a cui deve soddisfare la (1)].

Le linee per cui è nulla la (1) sono le linee di *lunghezza nulla* (immaginarie coniugate nel campo reale); quelle che annullano (2) sono le *asintotiche*. Da ogni punto O della superficie escono due asintotiche, coincidenti se $DD'' - D'^2 = 0$, ossia se la curvatura $K = 0$. L'essere identicamente soddisfatta questa condizione caratterizza le *sviluppabili* (e loro casi limiti).

Se $D' = 0$, le linee u, v sono *coniugate* e dividono *armonicamente* le asintotiche; se $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \dfrac{D}{D''}$ è in più nullo, cioè se si possono mutare i parametri delle u, v in guisa che $D \pm D'' = 0$, il sistema delle u, v dicesi *isotermo-coniugato*.

I piani tangenti in due punti consecutivi di una direzione di S si incontrano nella direzione coniugata; il piano osculatore alle asintotiche uscenti da un punto di S coincide col piano tangente ad S in questo punto.

C) Raggi e linee di curvatura.

Le rette normali generano una congruenza, le cui sviluppabili corrispondono a un sistema ortogonale coniugato: il sistema delle linee di curvatura. I fuochi di una normale diconsi centri di curvatura, le loro distanze r_1, r_2 dai piedi della normale raggi di curvatura. *Il prodotto* $\dfrac{1}{r_1\, r_2}$ (curvatura totale della superficie) *coincide con la curvatura* K dell'elemento lineare. Soltanto sul piano e sulla sfera le linee di curvatura sono indeterminate.

D) Elemento lineare dell'immagine sferica.

Si considera sovente anche la terza forma

$$SdX^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2\,,$$

completamente determinata dalle prime due; i relativi simboli di seconda specie di Christoffel si indicano con $\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix}'$. Vale la:

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \sqrt{\frac{eg - f^2}{EG - F^2}} = K = \frac{1}{r_1 r_2}.$$

E) Superficie applicabili.

Se due superficie S, S' hanno uguale elemento lineare, diconsi applicabili. Ciò significa che la corrispondenza biunivoca tra i punti delle due superficie che hanno uguali coordinate u, v conserva lunghezze e angoli. Cioè, se O è un punto di S ed A, B sono punti di S infinitamente vicini del primo ordine (con coordinate, la cui differenza da quelle di O dipende dai differenziali primi du, dv), e se O', A', B' sono i punti omologhi di S', allora $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, l'angolo $A(O)B = A'(O')B'$. In altre parole esiste un movimento M, che porta O' in O e i punti infinitamente vicini ad O' del primo ordine nei punti omologhi infinitamente vicini ad O, cioè porta S' in una superficie $\overline{S}$, che con S ha comuni il punto O e i punti ad esso infinitamente vicini del primo ordine, ossia porta S' in una superficie $\overline{S}$ che con O ha un contatto *analitico* del primo ordine. Poichè O e i punti infinitamente vicini considerati si possono considerare complanari, è inutile distinguere i movimenti di prima o di seconda specie. *Il movimento* M *varierà con la coppia di punti omologhi* O, O' *considerati,* perchè, se così non fosse, uno stesso movimento M porterebbe S' in S; queste due superficie sarebbero uguali; pertanto avrebbero comune non solo l'elemento lineare, ma anche la seconda forma fondamentale (al più a meno del segno, se M è di seconda specie).

Se invece del contatto *analitico* imponessimo ad M di portare S' in una $\overline{S}$ tale che curve omologhe di S, $\overline{S}$ abbiano un contatto *geometrico*, basterebbe che su S, S' angoli omologhi fossero uguali, ossia che S, S' avessero elementi lineari proporzionali, o, come si suol dire, che S, S' fossero *conformemente applicabili.* In tal caso per ogni coppia di punti omologhi O, O' esiste una *similitudine* M che porta S' in una superficie $\overline{S}$ che con S ha in O un *contatto* analitico; e le S, S' si possono anche considerare come *applicabili nel gruppo delle similitudini.* Se poi questa similitudine M non variasse con la coppia di punti O, O' omologhi considerata, allora le superficie sarebbero *simili;* le loro seconde forme avrebbero un rapporto costante, il cui quadrato è uguale al rapporto dei loro elementi lineari.

§ 11. — Prime considerazioni di geom. proiettiva.

A) Le direzioni asintotiche.

Definiremo una superficie S, dando le coordinate omogenee x, y, z, t dei suoi punti in funzione di due parametri $u = u_1$ e $v = v_2$. Se per un momento con x', y', z', t' indichiamo coordinate correnti, l'equazione del piano tangente in un punto x di S è

$$(x\, x_u\, x_v\, x') = 0.$$

Poichè un punto di S infinitamente vicino al punto x ha le coordinate

$$x' = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \ldots .$$

esso apparterrà al piano tangente se è nulla l'espressione

$$(1)\quad (x\, x_u\, x_v\, d^2x) = (x, x_u, x_v, x_{uu}\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2)$$

$\left(\text{ove } x_{uu} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} \text{ ecc.}\right)$, che noi indicheremo con

$$(2)\qquad b_{11}\, du^2 + 2b_{12}\, du\, dv + b_{22}\, dv^2$$

$$(3)\quad b_{11} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uu})\,;\ b_{12} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})\,;\ b_{22} = (x\, x_u\, x_v\, x_{vv}).$$

Questa espressione, che evidentemente cambia soltanto per un fattore per una collineazione o per una trasformazione di parametri u, v, *definisce dunque, uguagliata a zero, le direzioni in cui il piano tangente taglia la superficie, cioè le asintotiche.* E del resto, se $t = 1$ ed x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali, essa coincide con $\sqrt{EG - F^2}\,(D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2)$. Noi *escluderemo sempre le superficie sviluppabili, cioè le superficie elementarissime per cui* $\mathrm{b}_{11}\, \mathrm{b}_{22} - \mathrm{b}^2_{12} = 0$; e *trascureremo pure come eccezionali i punti in cui fosse* $\mathrm{b}_{11}\, \mathrm{b}_{22} - \mathrm{b}^2_{12} = 0$. *Ammetteremo cioè sempre distinte le direzioni asintotiche uscenti da un punto della superficie.*

B) Le direzioni di Darboux.

Diconsi quadriche *osculatrici* in un punto O di S quelle che incontrano la superficie S in una linea che ha un punto *triplo* nel punto O (così come piano tangente in O è quello che incontra S in una linea che ha in O un punto *doppio*). Supponiamo $t = 1$, che $z = 0$ sia il piano tangente in O; varrà allora uno sviluppo

$$(4) \qquad z = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \ldots.$$

ove φ è un polinomio omogeneo di secondo grado in x, y, ψ è omog. di terzo grado in $x . y$ e dove sono trascurati i termini di grado superiore al terzo. Le quadriche osculatrici saranno le quadriche di equazione:

$$(5) \qquad \nu(z - \varphi) + z(\lambda x + \mu y + nz) = 0 \quad (\lambda, \mu, \nu, n = \text{cost.})$$

che incontrano la superficie in una linea determinata da (4) e da:

$$(6) \qquad \nu\psi + \varphi(\lambda x + \mu y) + \ldots = 0$$

ove, come sopra, sono trascurati i termini di grado superiore al terzo.

Le 3 tangenti alla linea d' intersezione hanno nel piano tangente $r = 0$ l' equazione

$$(7) \qquad \nu\psi + \varphi(\lambda x + \mu y) = 0.$$

Questo sistema lineare di terne di rette uscenti da O ha dunque una equazione identica alla (3) del § 4, *A*. In virtù dei risultati allora ottenuti abbiamo:

Tra le terne (7) *ve ne sono soltanto tre formate da tre direzioni coincidenti; le tre direzioni così determinate appartengono a loro volta ad una delle terne* (7): *a quella unica terna che è apolare a* φ. *Esse si dicono le direzioni di Darboux.*

Le quadriche osculatrici a cui corrisponde come terna (7) la terna delle direzioni di Darboux diconsi *quadriche di Darboux*. Se (5) è una di esse, le altre se ne deducono facendo variare n. Perciò:

Le quadriche di Darboux formano un fascio, cui appartiene la quadrica $z^2 = 0$ *formata dal piano tangente contato due volte (fascio di Darboux).*

Al sistema lineare (7) si perviene anche in altro modo. Tenuti fissi gli assi delle x, y e i punti unità di questi assi facciamo variare l'asse delle z; poniamo cioè:

$$z = hz', \quad x = x' + mz', \quad y = y' + pz'.$$

La (4) si muta in:

$$hz' = \varphi(x' + mz', y' + pz) + \psi(x', y') + \dots .$$

ove, come sopra, non si sono scritti i termini di grado superiore al terzo in x', y'. E questa equazione equivale appunto alla:

$$(8) \qquad z' = \frac{1}{h}\varphi(x', y') + \left[\nu\psi(x', y') + (\lambda x' + \mu y')\varphi(x', y')\right] + \dots,$$

ove $h = \frac{1}{\nu}$, e dove λ, μ sono parametri, che, al variare di l, m possono assumere valori arbitrarii. Come si vede, i termini di terzo grado descrivono precisamente il sistema lineare (7). Potremo dunque scegliere l'asse delle z in guisa che essi formino un polinomio *apolare* alla φ; e, se ad assi delle x, y abbiamo assunto le direzioni asintotiche, lo sviluppo assumerà la forma canonica:

$$(9) \qquad z = kxy + \frac{1}{6}(Ax^3 + Dy^3) + \dots .$$

Se l'asse delle z fosse stato scelto a caso, e quindi lo sviluppo fosse più generalmente

$$z = kxy + \frac{1}{6}(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3) + \dots,$$

le direzioni di Darboux sarebbero sempre quelle definite dalla:

$$Ax^3 + Dy^3 = 0.$$

Le direzioni coniugate di queste, per cui quindi $Ax^3 - Dy^3 = 0$, *diconsi le direzioni di Segre.*

§ 12. — Le forme differenziali fondamentali.

A) Primo metodo.

N. B. Il lettore può accontentarsi di studiare il secondo metodo dato in (B); chi vuole conoscere altri metodi veda le Mem. di Fubini, ove tali forme furono date per la prima volta.

Poniamo (cfr. le (1), (2) del § 11 A):

$$F_2 = \lambda(x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \lambda \Sigma b_{rs}\, du_r\, du_s\,, \tag{1}$$

$$\Phi_3 = \lambda(x\, x_u\, x_v\, d^3x) - \frac{3}{2}\, dF_2\,, \tag{2}$$

ove λ è una funzione delle u, v. Queste forme, una *quadratica*, l'altra *cubica*, dipendono dai soli differenziali *primi* delle u, v. Data la superficie S, queste forme variano:

α) quando si esegua sulle x una collineazione a coefficienti costanti,

β) quando si moltiplichino le x, y, z, t per uno stesso fattore $\rho(u, v)$,

γ) quando si muti la funzione λ,

δ) quando si mutino i parametri u, v.

Un facile calcolo prova che in tutti questi casi, e perciò anche quando su S si esegue una collineazione qualsiasi, tali forme subiscono una trasformazione del tipo:

$$\overline{F}_2 = 6F_2\,,\quad \overline{\Phi}_3 = 6\Phi_3 + (hdu + kdv)F_2 \tag{3}$$

Queste formole hanno una notevole interpretazione geometrica. Posto infatti $t = 1$, $x = u$, $y = v$, $\lambda = -1$:

$$F_2 = d^2z - z_x d^2x - z_y d^2y = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

$$\Phi_3 = (d^3z - z_x d^3x - z_y d^3y) - \frac{3}{2} dF_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(z_{xxx}dx^3 + 3z_{xxy}dx^2dy + 3z_{xyy}dxdy^2 + z_{yyy}dy^3\right)$$

Se nell'intorno del punto $O(x = y = z = 0)$ della nostra superficie è:

$$z = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \dots$$

ove φ è omogeneo di secondo grado, ψ di terzo, allora nell'intorno del punto considerato si ha:

$$(4) \quad F_2 = \frac{1}{2}\varphi(dx, dy) + \dots; \quad \Phi_3 = -3\psi(dx, dy) + \dots .$$

cioè per i risultati del § 3:

La $F_2 = 0$ *determina le direzioni asintotiche, la* $\Phi_3 = 0$ *una delle terne di direzioni in cui la superficie è incontrata da una quadrica osculatrice;* la indeterminazione per Φ_3 è proprio la stessa che avevamo trovato per queste terne di direzioni.

Sorge così l'idea *se non sia possibile rendere* Φ_3 *apolare ad* F_2 *così che la* $\Phi_3 = 0$ *definisca proprio le direzioni di Darboux.* Il risultato fondamentale, che ora proveremo, è che *ciò si ottiene semplicemente ponendo:*

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11} b_{22} - b^2_{12}|}}$$

che cioè la forma

$$(5) \qquad F_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11} b_{22} - b^2_{12}|}} (x\, x_u\, x_v\, d^3x) - \frac{3}{2} dF_2$$

è apolare alla

$$(6) \qquad F_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11} b_{22} - b^2_{12}|}} (x\, x_u\, x_v\, d^2x).$$

Avremo così conseguito insieme il risultato fondamentale di *scrivere l'equazione* $F_3 = 0$ *delle linee di Darboux in coordinate curvilinee* u, v *qualsiasi, e in qualunque sistema di coordinate omogenee* x, y, z, t.

Infatti, posto $B = b_{11} b_{22} - b^2_{12}$, $F_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{|B|}} \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$

con b_{rst} simmetrico in r, s, t, si ha:

$$b_{111} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}) - \frac{3}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial u} + \frac{3}{8} b_{11} \frac{B_u}{B},$$

$$b_{112} = b_{121} = b_{211} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uuv}) - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial v} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(b_{11}\frac{B_v}{B} + 2b_{12}\frac{B_u}{B}\right)$$

e analoghe per b_{222}, b_{221}. Quindi:

$$b_{22}\, b_{111} + b_{11}\, b_{221} - 2b_{12}\, b_{121} = b_{22}\left[(x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}) - \frac{\partial b_{11}}{\partial u}\right] +$$

$$+ b_{11}\left[(x\, x_u\, x_v\, x_{uvv}) - \frac{\partial b_{12}}{\partial v}\right]$$

$$- 2b_{12}\left[(x\, x_u\, x_v\, x_{uuv}) - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial v}\right] =$$

$$= -(x\, x_u\, x_v\, x_{vv})(x\, x_u\, x_{uv}\, x_{uu}) - (x\, x_u\, x_v\, x_{uu})(x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uv}) +$$

$$+ (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})(x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uu})$$

che è identicamente nullo, come si vede p. es. portando con una collineazione i punti x, x_u, x_v, x_{uv} nei vertici del tetraedro di riferimento (*). In modo simile si prova che anche:

(*) Ciò si può anche provare in modo diretto, osservando che, aggiungendo alla matrice $(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uv}\, x_{vv})$ una riga uguale alla prima, si ottiene un determinante nullo. Perciò:

$$x(x_u\, x_{uu}\, x_{uv}\, x_{vv}) - x_u\,(x\, x_{uu}\, x_{uv}\, x_{vv}) + x_{uu}\,(x\, x_u\, x_{uv}\, x_{vv}) - x_{uv}\,(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{vv}) +$$

$$+ x_{vv}(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uv}) = 0.$$

Analoghe identità si ottengono sostituendo alla x la y, oppure la z, oppure la t. Moltiplicandole rispettivamente per i complementi algebrici di X, Y, Z, T in $(x\, x_u\, x_v\, X)$ e sommando si ottiene l' identità del testo.

$$b_{11} b_{222} + b_{22} b_{112} - 2b_{12} b_{122} = 0 ;$$

quindi F_3 è apolare ad F_2. Dalla stessa definizione (5) e (6) segue:

Le forme F_2, F_3 *sono impropriamente intrinseche, invarianti per collineazioni unimodulari, restano moltiplicate per* ρ^4 *se si esegue una collineazione di fattore* ρ, *e per* -1 *se si esegue una collineazione a modulo* -1 oppure un cambiamento di variabili u, v a Iacobiano negativo.

Il loro rapporto $\mathrm{F}_3 : \mathrm{F}_2$ *è perciò intrinseco invariante, e sarà detto elemento lineare proiettivo.*

Posto

$$F_2 = \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s\,, \quad \text{è} \tag{7}$$

$$a_{11}\, a_{22} - a^2_{12} = A = -\varepsilon \sqrt{|\, b_{11}\, b_{22} - b^2_{12}\,|} \tag{8}$$

ove $\qquad \varepsilon = -\,sgn A = -\,sgn(b_{11}\, b_{22} - b^2_{12}) = \pm 1.$

Assunta la forma (impropriamente) intrinseca F_2 a forma fondamentale di un calcolo assoluto, valgono le:

$$(9)\quad \begin{cases} F_2 = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; d^2x) = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, du_s) \\ dF_2 = 2\, \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s = \dfrac{2}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) \\ d^3x = \Sigma\, x_r\, \delta^3 u_r + 3\, \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \Sigma\, x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \\ F_3 = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; \Sigma\, x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t) \end{cases}$$

Confrontando il precedente valore di dF_2 con quello ottenuto derivando, si trova anche la:

$$(9)_{\text{bis}} \qquad F_3 = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\,,\; x_{11}\, du + x_{12}\, dv\,,\; x_{21}\, du + x_{22}\, dv\,,\; dx)$$

Altre espressioni notevoli per F_2, F_3 troviamo in *B)*.

B) Nuovo metodo per definire le F_2, F_3.

Diciamo *positivo* quel verso nel fascio delle rette tangenti uscenti da un punto x che corrisponde al verso di $\mu : \lambda$ crescente nel fascio che da x proietta la punteggiata $\lambda x_u + \mu x_v$. Esso è *impropriamente* intrinseco, perchè si inverte se le u, v subiscono una trasformazione a Iacobiano negativo.

Le coordinate ξ del piano tangente soddisfano alle:

$$(10) \quad S\xi x = S\xi x_u = S\xi x_v = 0, \text{ donde segue } Sx\xi_u = Sx\xi_v = 0$$

e sono perciò date dalle:

$$(11) \qquad \xi = \lambda(x\ x_u\ x_v)$$

dove λ è un fattore di proporzionalità, che deve essere *positivo* se si vuole che il verso positivo del fascio (x, ξ) definito nell'Introd. coincida col precedente. Dalle stesse (10) segue anche:

$$(12) \qquad x = \mu(\xi\ \xi_u\ \xi_v)$$

Poniamo:

$$(13) \qquad F_2 = S\xi d^2x = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k\,.$$

Sarà per le (10) anche:

$$(13)_{\text{bis}} \qquad F_2 = -Sd\xi dx = Sxd^2\xi$$

e quindi:

$$(14) \qquad a_{ik} = S\xi x_{ik} = -S\xi_i\, x_k = -S\xi_k\, x_i = Sx\xi_{ik}$$

E sarà pure

$$(14)_{\text{bis}} \qquad a_{ik} = \lambda(x\ x_u\ x_v\ x_{ik}) = \mu(\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{ik}),$$

cosicchè:

$$F_2^2 = \lambda\mu(x\ x_u\ x_v\ d^2x)(\xi\ \xi_u\ \xi_v\ d^2\xi) = \lambda\mu \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & F_2 \\ 0 & -a_{11} & -a_{12} & L \\ 0 & -a_{21} & -a_{22} & M \\ F_2 & P & Q & R \end{vmatrix}$$

ove è inutile esplicitare L, M, P, Q, R, ossia:

$F_2^2 = -\lambda\mu A F_2^2$, così che $1 = -\lambda\mu A = \varepsilon\mu\lambda \,|\, A \,|$ ove $\varepsilon = -\, sgn A$

Dovendo essere $\lambda > 0$, μ avrà il segno ε di $-A$; e noi facciamo una convenzione *intrinseca* supponendo $\lambda = \varepsilon\mu = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}$.

Quindi:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\, x_u\, x_v) \qquad x = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}\,(\xi\, \xi_u\, \xi_v) \\ \qquad\qquad \varepsilon = -\, sgn A \\ (x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \sqrt{|A|}\, F_2 = \varepsilon(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, d^2\xi) \end{array}\right.$$

Si noti poi che con queste convenzioni

$$(16)\quad A = a_{11}a_{22} - a^2_{12} = \lambda^2\Big[(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})(x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) - (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})^2\Big]$$

Poichè $\lambda^2 = 1 : |A|$, sarà:

$$(16)_{\text{bis}}\quad \left|\begin{array}{l} \varepsilon = -\, sgn\Big\{(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})\,(x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) - \\ \qquad\qquad - (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})^2\Big\} = -\, sgn\, A \\ \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}} = \Big|(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})\,(x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) - (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})^2\Big|^{-\frac{1}{4}} \end{array}\right.$$

La forma F_2 coincide con la F_2 precedente; è impropriamente intrinseca, invariante per collineaz. unimodulari ecc.

Data la F_2, *i fattori di proporzionalità per le coordinate* x, ξ *di punto e piano tangente sono determinati a meno di un contemporaneo cambiamento di segno.*

Derivando le (13) e $(13)_{\text{bis}}$ si trova:

$$dF_2 = S\xi d^3x + Sd\xi d^2x = -\, Sd\xi d^2x - Sdxd^2\xi = Sdxd^2\xi + Sxd^3\xi.$$

Studiamo i singoli termini del 2°, 3°, 4° membro. Essi contengono i differenziali *secondi*, e, data F_2, sono tutti completamente determinati se si dà ancora (C)

(17) $$F_3 = \frac{1}{2} S(dxd^2\xi - d\xi d^2x),$$

la quale espressione dipende solo dai differenziali *primi*. Infatti

$$Sdxd^2\xi = S\Sigma x_i\, \xi_k\, du_i\, \delta^2 u_k + S\Sigma x_i\, \xi_{rs}\, du_i\, du_r\, du_s =$$
$$= -\Sigma a_{ik}\, du_i\, \delta^2 u_k + \Sigma (Sx_i\, \xi_{rs})\, du_i\, du_r\, du_s$$

insieme alla formola analoga per $Sd\xi d^2x$; cosicchè:

(17) bis $$F_3 = \frac{1}{2} \Sigma S(x_i\, \xi_{rs} - \xi_i\, x_{rs})\, du_i\, du_r\, du_s .$$

Noi porremo:

(18) $$F_3 = \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\ ;$$

non vi è possibilità di equivoco; con a_{rst} non val la pena di indicare le derivate covarianti della a_{rs}, che sono (§ 9 C) identicamente nulle. Anzi, derivando covariantemente (14), si trova:

(19) $$S\xi x_{rst} = -S\xi_r\, x_{st} = -S\xi_s\, x_{rt} = -S\xi_t\, x_{rs} =$$
$$= Sx_r\, \xi_{st} = Sx_s\, \xi_{rt} = Sx_t\, \xi_{rs} = -Sx\xi_{rst}.$$

E quindi

(19) bis $$a_{rst} = S\xi x_{rst}$$

in modo completamente conforme all' ultima delle (9).

Si noti che anche F_3 è, come F_2, impropriamente intrinseco, perchè tale è il metodo con cui, date le x, abbiamo fissate le ξ.

C) Le forme F_2, F_3 nella geometria metrica.

Sia $t = 1$, siano x, y, z coordinate cartesiane ortogonali; siano X, Y, Z i coseni direttori della normale. La (16) bis dà

(20) $$\lambda = \left| (EG - F^2)(DD'' - D'^2) \right|^{-\frac{1}{4}}$$

Perciò

$$F_2 = -\lambda(x_u\, x_v\, d^2x) = -\lambda(x_u\, x_v\, X)\,(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2)$$

E, se le X sono scelte in guisa che $(x_u\, x_v\, X) > 0$, sarà:

$$(21) \quad F_2 = -\left|\sqrt[4]{\frac{EG - F^2}{DD'' - D'^2}}\right| (Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2) =$$

$$= -\frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{\sqrt[4]{|K|}}$$

Siano $\xi = \nu X$, $\eta = \nu Y$, $\zeta = \nu Z$, τ le coordinate del piano tangente. È

$$F_2 = S\xi d^2x = \nu SXd^2x = \nu(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2).$$

Perciò

$$(22) \qquad \nu = -\frac{1}{\sqrt[4]{|K|}}$$

$$(23) \qquad F_3 = \frac{1}{2}\, dS(dxd\xi) - Sd\xi d^2x = -\frac{1}{2}\,\nu d(SXd^2x) -$$

$$-\frac{3}{2}\, d\nu\, SXd^2x - \nu SdXd^2x.$$

Ora le equaz. fondamentali della geometria metrica danno.

$$SXd^2x = +\Sigma D_{rs}\, du_r\, du_s \qquad (D_{11} = D\,;\, D_{12} = D'\,;\, D_{22} = D'')$$

$$dSXd^2x = \Sigma D_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t + 2\Sigma D_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\,;$$

$$SdXd^2x = -\Sigma D_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\,.$$

Trattandosi di questioni metriche, i differenziali controvarianti $\delta^2 u$ e le derivate D_{rst} covarianti sono state calcolate secondo l'elemento lineare di Gauss; cosicchè, per le equazioni di Codazzi, le D_{rst} formano un sistema simmetrico. Quindi

$$(24) \quad F_3 = \frac{1}{2\sqrt[4]{|K|}}\left(\Sigma D_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t - \frac{3}{4}\,\Sigma D_{rs}\, du_r\, du_s\, d\log|K|\right)$$

Che F_3 sia apolare ad F_2 si dimostra p. es. osservando che:

$$d\log K = d\log \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = (D_{111} D_{22} - 2D_{112} D_{12} + D_{11} D_{122}) du +$$
$$+ (D_{112} D_{22} - 2D_{122} D_{12} + D_{11} D_{222}) dv$$

oppure, più semplicemente, usando coordinate u, v asintotiche. Allora $D = D'' = 0$ ed F_3 si riduce, a meno di un fattore, ad $\left\{ {11 \atop 2} \right\} du^3 + \left\{ {22 \atop 1} \right\} dv^3$, ove i simboli $\left\{ \quad \right\}$ sono i simboli di Christoffel calcolati per l'elemento lineare.

La forma $\Sigma D_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$ definisce, uguagliata a zero, le direzioni comuni alla superficie e ad una delle quadriche osculatrici. Tale forma vale

$$ds^2 d\left(\frac{1}{R_n}\right) - 2\,\frac{ds^3}{T_g R_g},$$

ove $\dfrac{1}{R_n}$, $\dfrac{1}{R_g}$, $\dfrac{1}{T_g}$ sono la curvatura normale e geodetica, e la torsione geodetica.

$D)$ Una osservazione.

La $F_3 = 0$ definisce le linee di Darboux; se addottiamo la (17) come definizione di F_3, il fattore di proporzionalità delle ξ deve essere scelto non in modo arbitrario, ma col metodo precisato in $B)$. Se scegliamo invece tale fattore in modo arbitrario, la

$$\frac{1}{2} S(dx d^2\xi - d\xi d^2 x)$$

varia nel sistema lineare $\varrho F_3 + (h du + k dv) F_2$; cioè è una delle forme Φ_3-definite in A e definisce la terna di direzioni comuni alla superficie e ad una quadrica osculatrice. Perciò il fissare, come in B, il fattore di proporzionalità delle ξ equivale a scegliere, tra le quadriche osculatrici, una quadrica di Darboux.

§ 13. — Prime applicazioni.

A) Superficie correlative.

Le (13), $(13)_{\text{bis}}$ e (17) del § 12 dimostrano che *non solo le collineazioni, ma anche le correlazioni conservano le asintotiche e le linee di Darboux.*

Se O, O' sono punti consecutivi di una linea di Darboux, su una superficie correlativa ad O, O' corrispondono due piani tangenti π, π' consecutivi, i cui punti di contatto sono consecutivi su una linea di Darboux, e che quindi si tagliano nella direzione a questa coniugata: cioè (§ 11 *B*) su una *linea di Segre*. Sia S' correlativa ad S; allora le coordinate ξ' di un suo piano tangente si possono supporre coincidere con le coordinate x del punto omologo di S, cosicchè, per i risultati del § 12 *B*, le coordinate x' del punto generico di S', varranno $\varepsilon\xi$. Quindi le forme di S' saranno:

$$F'_2 = \varepsilon F_2 \quad F'_3 = -\varepsilon F_3 \tag{1}$$

e le due superficie avranno elementi lineari proiettivi uguali e di segno opposto.

Osserv. Per le nostre convenzioni il verso positivo nel fascio tangente in x ad S corrisponde al verso di $\mu : \lambda$ crescente sulla punteggiata $\lambda x_u + \mu x_v$, cioè è il verso positivo nel fascio (x, ξ) perchè $\xi : (x\, x_u\, x_v) > 0$.

Poichè $x : (\xi\, \xi_u\, \xi_v)$ ha il segno di ε, tale verso è il verso positivo del fascio che ha per sostegno la retta $(\xi_u\, \xi_v)$, o il verso opposto secondo che $\varepsilon > 0$ oppure $\varepsilon < 0$, ossia secondo che le asintotiche sono reali o complesse. E ciò è intuitivo. La retta da x ad $x + dx$ è coniugata della retta intersezione dei piani ξ, $\xi + d\xi$, e perciò con questa separa armonicamente le asintotiche; le due rette ruotano pertanto nello stesso verso soltanto se le asintotiche sono complesse, ossia se $\varepsilon < 0$, cioè appunto quando sono concordi i versi della punteggiata (x_u, x_v), del fascio (x, ξ) e del fascio di piani (ξ_u, ξ_v). Ecco il significato geometrico della ε!

B) **Significato geometrico del fattore di proporzionalità delle ξ.**

Le superficie S, S' siano due superficie che si toccano lungo una linea L, che assumiamo su entrambe a linea $v = 0$: la direzione coniugata alla direzione di L in un punto qualsiasi di L sarà la stessa su S, S'; supponiamo che le linee $u = cost.$ siano su S, S' tangenti per $v = 0$ a tali direzioni coniugate. Potremo dunque supporre che per $v = 0$ sia:

$$x = x', \quad x_u = x'_u, \quad x_{uu} = x'_{uu}, \quad \sigma x_v = x'_v$$

$$(\sigma = \text{fattore di proporzionalità}).$$

Anzi, mutando su una delle S, S' il parametro v in un altro che si annulli per $v = 0$ e che altrove abbia lo stesso segno di v, potremo rendere $\sigma = \pm 1$, senza così mutare la faccia scelta come positiva su S ed S'. Sarà allora per $v = 0$

$$\xi' = \sqrt{|A : A'|}\,\sigma\xi \qquad a'_{11} = \sqrt{|A : A'|}\,\sigma a_{11} \qquad a_{12} = a'_{12} = 0$$

$$A : A' = a_{11} a_{22} : a'_{11} a'_{22}, \text{ donde } a'_{22} = (A' : A)\sqrt{|A' : A|}\,\sigma a_{22}$$

ossia $$S\xi' x'_{vv} = (A' : A)\sqrt{|A' : A|}\,\sigma S\xi x_{vv},$$

ossia $$S\xi\left[\sigma\sqrt{|A:A'|}\,x'_{vv} - \frac{A'}{A}\sqrt{|A' : A|}\,\sigma x_{vv}\right] = 0$$

cioè

$$x'_{vv} - (A' : A)\,(|A' : A|)x_{vv}, \text{ così come } x_{uu} - x'_{uu} = 0, \; x_{uv}, \; x'_{uv}$$

sono per $v = 0$ combinazioni lineari di x, x_u, x_v.

Confrontando con (3) e (4) del § 3, *B*, si trova che il contatto delle due superficie è del secondo ordine soltanto se

$$(A' : A)\,(|A' : A|) = \sigma^2 = 1, \text{ cioè se } A = A'$$

e quindi: $$\xi' = \sigma\xi \quad (\text{con } \sigma = \pm 1).$$

Dunque: *Se due superficie* S, S' *a punti contemporaneamente ellittici o iperbolici* (così che A, A hanno lo stesso segno) *si toccano lungo una linea* L *non asintotica, il contatto è del second' or-*

dine soltanto se (tutt'al più a meno del segno) *hanno comuni su* L *le coordinate di punto e di piano tangente* (normate secondo le convenzioni del § 12 B).

Nel caso generale le direzioni asintotiche delle due superficie in un punto di L sono date da

$$a_{11}\,du^2 + a_{22}\,dv^2 = 0 \quad \text{e} \quad a'_{11}\,du^2 + a'_{22}\,dv^2 = 0\,,$$

di cui la seconda vale:

$$a_{11}\,du^2 + a_{22}(A' : A)\,(|A' : A|)dv^2 = 0\,,$$

ossia

$$\eta h^4 a_{11}\,du^2 + a_{22}\,dv^2 = 0\,, \quad \text{ove} \quad \eta = sgn\,\frac{A'}{A}\,, \quad h = \sqrt[4]{|A : A'|}$$

mentre è:
$$\xi' : \xi = 6h.$$

Perciò: *Se due superficie si toccano lungo una linea* L *non asintotica, e se poniamo* $\eta = 1$ *quando esse sono entrambe ad asintotiche reali o complesse, ed uguale a* -1 *quando una è ad asintotiche reali, l'altra ad asintotiche complesse, allora il birapporto delle quattro direzioni asintotiche contate in un certo ordine vale*

$$\left(\frac{1 - \sqrt{\eta}\,h^2}{1 + \sqrt{\eta}\,h^2}\right)^2,$$

ove h *è* $\pm\frac{\xi'}{\xi}$, *cioè è, a meno del segno, il rapporto delle coordinate di piano tangente per* S, S' *in un punto* $\mathrm{x} = \mathrm{x}'$ *di* L.

In altre parole la tangente $\mathrm{dv}^2 = 0$ *alla* L *contata due volte, la tangente coniugata* $\mathrm{du}^2 = 0$ *pure contata due volte, e le due coppie di tangenti asintotiche* $\mathrm{du}^2 : \mathrm{dv}^2 = -\,\mathrm{a}_{22} : \mathrm{a}_{11}$ e $\mathrm{du}^2 : \mathrm{dv}^2 = -\,\mathrm{a}_{22} : \eta \mathrm{h}^4 \mathrm{a}_{11}$ *appartengono a una stessa involuzione e formano il birapporto* $\eta \mathrm{h}^4$.

Se la linea L è di Darboux per S, sarà (per $v = 0$) $S\xi_u\,x_{uu} = S\xi_{uu}\,x_u$ per la (17) del § 12 B; quindi sarà:

$$(2) \qquad 6S(\xi'_u\,x'_{uu} - \xi'_{uu}\,x'_u) =$$

$$= S\Big[(h\xi_u + \xi h_u)x_{uu} - x_u\,(h\xi_{uu} + 2h_u\,\xi_u + \xi h_{uu})\Big] =$$

$$= hS(\xi_u\, x_{uu} - x_u\, \xi_{uu}) + 3h_u\, a_{11},$$

che è nullo soltanto se $h_u = 0$. Dunque:

Se due superficie si toccano in una linea L *non asintotica, che è linea di Darboux di una, essa è anche linea di Darboux per l'altra soltanto se i precedenti birapporti sono costanti lungo* L (*). *In particolare, se nei punti di* L *le due superficie hanno comune una, e quindi entrambe le direzioni asintotiche, se* L *è linea di Darboux per una, essa è linea di Darboux anche per l'altra.*

Dimostreremo ben presto che le linee $F_3 = 0$ di una superficie rigata non sviluppabile si riducono alle generatrici ed a una linea che incontra ogni generatrice generalmente in due punti: linea che diremo la linea *flecnodale* della rigata (la quale dunque, insieme alle generatrici, esaurisce le linee di Darboux della rigata stessa). Avremo dunque dal teor. precedente:

Le linee di Darboux L *di una superficie* S *che non sono anche asintotiche sono caratterizzate da ciò che le rigate formate dalle tangenti tirate nei punti di* L *ad uno dei sistemi di asintotiche di* S *hanno* L *come linea flecnodale; se ciò avviene per le asintotiche di un sistema, altrettanto avviene per l'altro.*

La (2), scritta nell'ipotesi che due superficie si tocchino lungo la linea $v = 0$, diventa nell'ipotesi che la linea di contatto sia qualunque:

$$(3)\quad F'_3 = \pm h\left(F_3 + \frac{3}{2} F_2 \frac{dh}{h}\right) \quad \text{(lungo la linea di contatto).}$$

Supposta S' rigata e quindi formata da rette tangenti ad S nei punti di L, questa linea L sarà flecnodale per S' se

$$\frac{dh}{h} = -\frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}.$$

(*) A pag. 35 della Mem. (Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine). (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, 1923, n. 28) Čech ha dimostrato che:

Se due superficie S *ed* S' *hanno contatto del secondo ordine almeno lungo una curva* C, *che è curva di Segre per* S, *condizione necessaria e sufficiente affinchè* C *sia curva di Segre anche per* S' *è che il contatto sia del terzo ordine almeno.*

Quindi:

Le tangenti ad una superficie S *uscenti dai punti di una linea* L *non asintotica si possono distribuire in* ∞^1 *rigate, per cui* L *è flecnodale. Consideriamo in ogni punto di* L *la tangente ad* L *contata due volte, la tangente coniugata pure contata due volte, la coppia delle asintotiche di* S *e la coppia delle asintotiche di una di queste rigate, che tutte appartengono ad una stessa involuzione. Il birapporto* φ *di queste quattro coppie è determinato dalla* $d\log\varphi = -\dfrac{8}{3}\dfrac{F_3}{F_2}$. *Ecco il significato geometrico trovato da Čech per l'elemento lineare proiettivo!*

Osserv. 1.ª Le considerazioni precedenti non si applicano al caso che la L, assunta a linea $v = 0$, sia asintotica. Se le $u =$ cost. sono anch'esse asintotiche su entrambe le superficie, si potrà supporre lungo L che $x = x'$, $x_u = x'_u$, $x'_v = \epsilon x_v + \alpha x_u$ con $\epsilon = \pm 1$, ecc. ecc.

Osserv. 2.ª Altra interpretazione di $F_3 : F_2$ si ha (Bompiani) studiando l'invariante J di una direzione generica e della terna di direzioni $F_3 = 0$ (di Darboux) o della terna coniugata (di Segre). Per le forme normali φ_3 e φ_2 (§ 14 *D*) si hanno (Bompiani) pure notevoli interpretazioni quando si studii il differenziale di J corrispondente a spostamenti lungo una curva della nostra superficie, il cui piano osculatore passi per l'*asse* (cfr. seg. Cap.)

Le curve per cui $J =$ cost. sono geodetiche per una metrica di Gauss definita da un elemento lineare proporzionale ad F_2 soltanto se la superficie è isotermo-asintotica ($\beta = \gamma$) ecc. (Bompiani).

Più avanti troveremo altre interpretazioni geometriche dovute allo stesso Bompiani ed a Wilczynski.

§ 14. — Le equazioni differenziali fondamentali e la terza forma differenziale.

A) Formole fondamentali.

I due piani ξ_u, ξ_v si tagliano in una retta uscente da x, e contenente il punto

$$(1) \qquad X = \frac{1}{2}\Delta_2 x = \frac{1}{2}\Sigma A_{rs}\, x_{rs}$$

perchè

$$(2) \qquad S\xi_i\, X = \frac{1}{2}\Sigma A_{rs}\, S\xi_i\, x_{rs} = -\frac{1}{2}\sum_{r,s} A_{rs}\, a_{rsi} = 0$$

per le relazioni di apolarità. Invece è

$$(3) \qquad S\xi X = \frac{1}{2}\Sigma A_{rs}\, S\xi x_{rs} = \frac{1}{2}\Sigma A_{rs}\, a_{rs} = 1,$$

cosicchè il punto X è distinto dal punto x, ed insieme ad x individua la retta $(\xi_u\, \xi_v)$. Derivando (3) e ricordando (2) si trae:

$$(4) \qquad SX_i\, \xi = 0.$$

Dualmente, posto

$$(5) \qquad \Xi = \frac{1}{2}\Delta_2 \xi = \frac{1}{2}\Sigma A_{rs}\, \xi_{rs},$$

si ha:

$$(6) \qquad Sx\Xi = 1, \quad Sx_i\, \Xi = 0, \quad Sx\Xi_i = 0.$$

La (3) dimostra che i punti x, x_u, x_v, X sono linearmente indipendenti; e perciò quattro quantità qualunque, p. es. x_{rs} (ed y_{rs}, z_{rs}, t_{rs}) si possono esprimere come loro combinazione lineare; potremo cioè scrivere:

$$x_{rs} = \lambda x_u + \mu x_v + \nu X + px \quad \text{(con le analoghe per } y, z, t),$$

donde:

$$a_{rs} = S\xi x_{rs} = \nu \qquad -a_{rsi} = S\xi_i\, x_{rs} = -\lambda a_{i1} - \mu a_{i2}$$

che permettono di determinare λ, μ. Si ha così in conclusione:

$$\text{(I)} \qquad x_{rs} = \sum_{p,q} a_{rsp} A_{pq} x_q + a_{rs} X + p_{rs} x.$$

In modo simile si provano le:

$$\text{(II)} \qquad \xi_{rs} = -\sum a_{rsp} A_{pq} \xi_q + a_{rs} \Xi + \pi_{rs} \xi.$$

In quanto alle p_{rs}, π_{rs} possiamo soltanto affermare: *Come le forme* F_2, F_3, *così anche le forme*

$$P = \Sigma p_{rs}\, du_r\, du_s, \quad \Pi = \Sigma \pi_{rs}\, du_r\, du_s$$

non mutano nè per collineazioni unimodulari, nè per cambiamento di parametri u, v *a Iacobiano positivo. Anche esse sono apolari alla* F_2. Infatti da (1) e (I) si deduce, per le relazioni di apolarità tra F_2 ed F_3:

$$2X = \Sigma A_{rs} x_{rs} = \Sigma A_{rs} \left[\Sigma a_{rsp} A_{pq} x_q + a_{rs} X + p_{rs} x \right] =$$

$$= 2X + x \Sigma A_{rs} p_{rs}$$

donde segue appunto $\Sigma A_{rs} p_{rs} = 0$. *Le direzioni per cui* $P = 0$ *e le direzioni per cui* $\Pi = 0$ formano *pertanto* due coppie di direzioni coniugate.

B) **La forma** P — Π.

Poniamo:

$$\text{(7)} \qquad \Omega = SX\Xi,$$

riservandoci di calcolarlo altrove. Dalle (I) e (II) si deduce:

$$\text{(8)} \qquad S\xi_{hk} x_{rs} = S\xi_{hk} (\Sigma a_{rsp} A_{pq} x_q + a_{rs} X + p_{rs} x) =$$

$$= \sum_{p,q} a_{rsp} A_{pq} a_{hkq} + p_{rs} a_{hk} + a_{rs} SX(-\Sigma a_{hkp} A_{pq} \xi_q + a_{hk} \Xi + \pi_{hk} \xi)$$

$$= \sum_{p,q} a_{rsp} A_{pq} a_{qhk} + p_{rs} a_{hk} + a_{rs} \pi_{hk} + a_{rs} a_{hk} \Omega$$

donde:

$$(9) \qquad S(\xi_{hk} x_{rs} - \xi_{rs} x_{hk}) = a_{hk}(p_{rs} - \pi_{rs}) + a_{rs}(\pi_{hk} - p_{hk}).$$

Ora, derivando covariantemente le $a_{111} = -S\xi_1 x_{11}$, $a_{112} = -S\xi_1 x_{12}$, si deduce:

$$(10) \quad -a_{1112} = S\xi_1 x_{112} + S\xi_{12} x_{11}\,; \quad -a_{1121} = S\xi_1 x_{121} + S\xi_{11} x_{12}.$$

Ora è: $$S\xi_1 x_{112} = S\xi_1 x_{121}.$$

Infatti per le (28) del § 9 *(E)*:

$$S\xi_1(x_{112} - x_{121}) = \Sigma \xi_1(12\,, p1) A_{pq} x_q =$$

$$= -\Sigma(12\,, p1) a_{1q} A_{pq} = -(12\,, 11) = 0.$$

E perciò, sottraendo le (10) si avrà per (9)

$$(11) \qquad a_{1121} - a_{1112} = S\xi_{12} x_{11} - S\xi_{11} x_{12} =$$

$$= a_{11}(\pi_{12} - p_{12}) - a_{12}(\pi_{11} - p_{11}),$$

insieme all'analoga

$$(11)_{\text{bis}} \qquad a_{2212} - a_{2221} = a_{22}(\pi_{12} - p_{12}) - a_{12}(\pi_{22} - p_{22})$$

e alla relazione di coniugio

$$(11)_{\text{ter}} \quad a_{22}(\pi_{11} - p_{11}) - 2a_{12}(\pi_{12} - p_{12}) + a_{11}(\pi_{22} - p_{22}) = 0.$$

Poichè, derivando covariantemente la relazione di coniugio $\sum_{r,s} A_{rs} a_{rsi} = 0$ si trova:

$$(12) \qquad \sum_{p,q} A_{pq} a_{pqij} = 0, \quad \text{(per ogni sistema di valori di } i\,, j)$$

si avrà dalle precedenti anche:

$$(11)_{\text{quater}} \quad a_{22}(\pi_{11} - p_{11}) - a_{11}(\pi_{22} - p_{22}) = 2(a_{1122} - a_{2211}).$$

Tutte queste equazioni bastano a determinare $\mathrm{P} - \Pi$, *quando sieno date* F_2, F_3.

Ma si può presentare il calcolo nel modo seguente. La forma:

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} (p_{11} - \pi_{11})du + (p_{12} - \pi_{12})dv & a_{11}du + a_{12}\,dv \\ (p_{12} - \pi_{12})du + (p_{22} - \pi_{22})dv & a_{21}du + a_{22}\,dv \end{vmatrix}$$

apolare alla F_2 ed alla $P - \Pi$ vale per le (11)

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{p,q} (a_{pq21} - a_{pq12})du_p\,du_q$$

Quindi, per i risultati del § 9 F, la forma $P - \Pi$, che è apolare a quest'ultima forma ed alla F_2 vale:

$$(13)\left\{\begin{aligned} P - \Pi &= \frac{1}{A}\begin{vmatrix} (a_{1112} - a_{1121})du + (a_{1212} - a_{1221})dv & a_{11}du + a_{12}dv \\ (a_{1212} - a_{1221})du + (a_{2212} - a_{2221})dv & a_{21}du + a_{22}dv \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{1112} - a_{1121} & a_{11} & dv^2 \\ a_{1212} - a_{1221} & a_{12} & -du\,dv \\ a_{2212} - a_{2221} & a_{22} & du^2 \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

Invece delle forme P e Π *basterà dunque, date le* F_2, F_3, *dare la forma*

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} Q = \Sigma(p_{rs} + \pi_{rs})du_r\,du_s &= \Sigma q_{rs}\,du_r\,du_s \\ \text{ove } q_{rs} &= p_{rs} + \pi_{rs} \end{aligned}\right.$$

$C)$ Altre equazioni fondamentali.

Derivando le (I), (II) si trovano delle equazioni:

$$\text{(III)} \qquad X_i = l_i\,x + \sum_{p,q} m_{ip}\,A_{pq}\,x_q$$

$$\text{(IV)} \qquad \Xi_i = \lambda_i \xi + \sum_{p,q} \mu_{ip} A_{pq} \xi_q$$

ove l, λ, m, μ sono completamente determinate dalle forme F_2, F_3, P, Π, ossia dalle tre forme F_2, F_3, Q.

Rinviando ad altro luogo lo scriverne completamente i valori, qui osserviamo soltanto:

α) Da (III) e (IV) segue:

$$(15) \qquad l_i + \lambda_i = SX_i \Xi + SX\Xi_i = \frac{\partial}{\partial u_i} SX\Xi = \Omega_i$$

β) Da (II) e da (III) si trae:

$$SX\xi_{ik} = \Omega a_{ik} + \pi_{ik} \; ; \quad SX_i \xi_k = -\Sigma m_{ip} A_{pq} a_{qk} = -m_{ik}.$$

Poichè, derivando $SX\xi_k = 0$, si trae $SX_i \xi_k + SX\xi_{ik} = 0$, sarà:

$$(16) \qquad m_{ik} = \pi_{ik} + \Omega a_{ik} \quad \text{e similmente} \quad \mu_{ik} = p_{ik} + \Omega a_{ik}.$$

In conclusione:

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \Sigma m_{ik} du_i du_k = \Pi + \Omega F_2 \; ; \; \Sigma \mu_{ik} du_i du_k = P + \Omega F_2 \\ \Sigma(l_i + \lambda_i) du_i = d\Omega. \end{array} \right.$$

Notiamo una proprietà del piano Ξ. Facciamo descrivere al punto x una linea L di S; e per ogni sua posizione consideriamo un punto $x' = X + rx$ della retta intersezione dei piani ξ_u e ξ_v, ove r è una funzione delle u, v. Quando mai la tangente alla linea L' descritta da x' incontra la tangente coniugata della tangente di L? Cioè quando mai i punti x' e dx' giacciono in un piano del fascio $\xi + \rho d\xi$? Il punto $x' = (rx + X)$ giace per le (2) sul piano $d\xi$; dovremo dunque esprimere che anche dx' sta in questo piano cioè che

$$0 = Sdx'd\xi = S(xdr + rdx + dX)d\xi = -(r + \Omega)F_2 - \Pi$$

la quale equazione dà, per ogni valore di r, *due direzioni corrispondenti per la linea* L di S. Queste due direzioni sono coniugate soltanto se $r = -\Omega$, cioè $x' = X - \Omega x$. Quest'ultimo punto insieme ai punti x, x_u, x_v determina appunto il piano Ξ. Ecco così definito geometricamente questo piano; dualmente si può definire geometricamente il punto X tra i punti della retta intersezione dei piani ξ_u, ξ_v. Su questa retta sono perciò caratterizzati per via proiettiva i punti x, X e il precedente punto $x' = X - \Omega x$; ogni altro suo punto si potrà caratterizzare mediante il birapporto che forma coi precedenti.

D) Il teorema fondamentale.

Le equazioni I, II, III, IV *sono per la geometria proiettiva l'analogo delle equazioni fondamentali* 3, 4 (§ 10, B) *della Geom. metrica, e permettono, date le forme* F_2, F_3, Q *di risalire alla superficie, che ne resta determinata a meno di una collineazione. Le loro condizioni d'integrabilità sono l'analogo nel caso attuale delle equazioni di Codazzi.*

§ 15. — Varii sistemi di coordinate x, ξ.

A) Un primo sistema di coordinate.

Noi potremmo scegliere a coordinate x, y, z, t di punto e ξ, η, ζ, τ di piano (che finora sono sempre determinate a meno di un fattore *comune*) coordinate tali che $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \pm 1$. Una tale ipotesi non è di carattere *intrinseco*, neanche se sulla superficie sono prefissate le linee coordinate u, v. Noi non ce ne serviremo mai, per quanto, se u, v sono le asintotiche, tali coordinate sieno quelle di cui fa uso la scuola di Wilczynski.

B) Coordinate non omogenee.

Potremmo usare o per i punti o per i piani coordinate non omogenee, ponendo p. es. $t = 1$, oppure $\tau = 1$. Questo metodo tratta però il piano $t = 0$, o il punto $\tau = 0$ in modo affatto particolare (con locuzione metrica, considera il piano $t = 0$ come piano all'infinito, il punto $\tau = 0$ come origine) ed è perciò da usare soltanto se nel problema che si studia vi è un piano od un punto in posizione affatto speciale. Se $t = 1$, dalle I si trae che $p_{rs} = 0$; se $\tau = 1$, è invece $\pi_{rs} = 0$. Viceversa, se le p_{rs} sono nulle, esiste una combinazione lineare delle x, y, z, t a coefficienti costanti, che è essa stessa una costante; un risultato duale vale se $\pi_{rs} = 0$.

C) Superficie rigate.

Per fare *una scelta di coordinate intrinseca, di carattere proiettivo*, e *dipendente soltanto dalla superficie considerata* dobbiamo cominciare dallo scrivere i discriminanti delle F_2, F_3.

$$(1)\quad \begin{cases} A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2\,; \\ R = 3a_{112}^2\,a_{221}^2 + 6a_{111}\,a_{222}\,a_{112}\,a_{221} - a_{111}^2\,a_{222}^2 - \\ \quad - 4a_{111}\,a_{122}^3 - 4a_{222}\,a_{112}^3 \\ \quad = 4(a_{112}\,a_{222} - a_{122}^2)\,(a_{111}\,a_{122} - a_{112}^2) - \\ \quad - (a_{111}\,a_{222} - a_{112}\,a_{221})^2. \end{cases}$$

L'identità $\Sigma A_{rs}\,a_{rs} = 2$, insieme alle relazioni di apolarità

$$\sum_{r,s} A_{rs}\,a_{rsi} = 0 \qquad (i = 1\,,\,2)$$

danno, risolute rispetto alle A_{rs}:

$$(2)\quad \begin{cases} A_{11} = \dfrac{a_{22}}{A} = \dfrac{2(a_{112}\,a_{222} - a_{221}^2)}{A^2 I}\,;\; A_{22} = \dfrac{a_{11}}{A} = \dfrac{2(a_{111}\,a_{221} - a_{112}^2)}{A^2 I} \\ \qquad - A_{12} = \dfrac{a_{12}}{A} = \dfrac{a_{111}\,a_{222} - a_{112}\,a_{221}}{A^2 I} \end{cases}$$

ove è posto:

$$(3)\qquad I = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\,,$$

almeno se $I \neq 0$. Se ne deduce che:

$$(4)\qquad R = A^4\,I^2(A_{11}\,A_{22} - A_{12}^2) = I^2\,A^3$$

almeno se $I \neq 0$, formola che, per continuità, deve valere anche se $I = 0$, come si può del resto dimostrare direttamente così. Se $I = 0$, la terza riga del determinante che figura in (3) non può essere combinazione lineare delle precedenti, perchè dalle relazioni di apolarità seguirebbe l'assurdo $2 = \Sigma A_{rs} a_{rs} = 0$. Dunque le prime due righe di tale determinante formano, se $I = 0$, una matrice nulla; ed esistono quindi due costanti c_1, c_2 tali che:

$$a_{111} : a_{112} : a_{221} : a_{222} = c_1^3 : c_1^2 c_2 : c_1 c_2^2 : c_2^3 .$$

Quindi: *Se* $\mathrm{I} = 0$, *la* F_3 *è un cubo perfetto; perciò* $\mathrm{R} = 0$, *e la* (4) *vale, anche se* $\mathrm{I} = 0$. *Viceversa da* (4) *si trae che, se* $\mathrm{R} = 0$, *anche* $\mathrm{I} = 0$ *ed* F_3 *è un cubo perfetto.*

Le relazioni di apolarità dicono *che allora il fattore lineare, di cui* F_3 *è il cubo, è anche fattore di* F_2; *viceversa, se* F_3, F_2 *hanno un fattore lineare comune, la* F_3 *è proporzionale al suo cubo.*

Le linee di S che annullano tale fattore lineare sono perciò asintotiche, per cui è nullo $S(dxd^2\xi - d\xi d^2x)$, ove ξ, che è il piano tangente ad S, è il piano osculatore di tale linea. Ora, prendendo i differenziali lungo tale linea, è

$$S\xi x = S\xi dx = S\xi d^2x = 0 \text{ e perciò } -Sd\xi d^2x = S\xi d^3x$$

$$Sxd\xi = Sdxd\xi = Sxd^2\xi = 0 \text{ e perciò } Sdxd^2\xi = -Sd\xi d^2x = S\xi d^3x.$$

Per le nostre linee avviene dunque che è identicamente $S\xi d^3x = 0$, cioè che ogni piano ξ ad esse osculatore è anche iperosculatore. Dunque le nostre linee sono piane, ed, essendo asintotiche di S, sono anche *rette*. E viceversa. Dunque:

Le superficie rigate sono caratterizzate dall'una o dall'altra delle relazioni equivalenti: α) $\mathrm{R} = 0$; β) $\mathrm{I} = 0$; γ) F_3 *è un cubo perfetto;* δ) F_2 *ed* F_3 *hanno un fattore lineare comune (che, uguagliato a zero, definisce le generatrici).*

Ne segue anche:

Se F_3 *è identicamente nullo, tutte le asintotiche sono rette, e la superficie, essendo doppiamente rigata, è una quadrica.*

D) Coordinate normali.

Escludiamo le rigate, di cui ci occuperemo altrove.

Osserviamo che, moltiplicando F_2 ed F_3 per uno stesso fattore $\mathfrak{G}$, l'*invariante assoluto* I *del sistema di queste forme resta moltiplicato per* $\mathfrak{G}^{-1}$. Noi dunque facciamo una ipotesi *intrinseca* imponendo alla I di valore -1. Chè, se fosse $I = k > 0$, basterebbe moltiplicare le x e le ξ per $\sqrt{k}$; e, se fosse $I = -k < 0$, basterebbe in più cambiare la faccia scelta come faccia positiva di S. Con questo metodo *alle forme* F_2, F_3 *sono sostituite due forme* φ_2, φ_3 *proporzionali completamente determinate in modo intrinseco invariante;* e le corrispondenti *coordinate* x, ξ *di punto e piano tangente sono completamente determinate* a meno di una collineazione unimodulare a coefficienti **costanti,** e in particolare a meno di un contemporaneo cambiamento di segno. Di più resta *intrinsecamente determinata in modo invariante una orientazione positiva della superficie.*

Queste coordinate x, ξ, *queste forme* φ_2, φ_3 *e le corrispondenti* P, Π, Q, *e questa orientazione si diranno coordinate, forme, ed orientazione normali.*

Poichè, date le coordinate omogenee arbitrarie x, occorre una radice quarta per determinare F_2, F_3, e la determinazione poi degli enti normali richiede ancora una radice quadrata, la determinazione degli enti normali, date le x, richiede l'estrazione di *una radice ottava.* Date le x, per passare alle coordinate normali, bisogna calcolare F_2, F_3, cioè bisogna ricorrere alle *derivate terze.*

Ogni sistema di coordinate omogenee che sia determinato dalla sola superficie in modo intrinseco invariante a meno di una collineaz. a coefficienti **costanti,** *e che richieda per la sua determinazione a partire da un qualsiasi sistema di coordinate omogenee soltanto derivazioni di ordine non superiore al terzo coincide, a meno di un fattore numerico inessenziale, con le coordinate normali.*

Infatti, se x sono le coordinate normali, ed x' è un altro sistema di coordinate che gode delle proprietà precedenti, allora il rapporto $x' : x$ sarebbe una quantità intrinseca invariante che dipende dalle derivate di coordinate omogenee generiche di ordine non superiore al terzo. Ciò che è assurdo, perchè la (9) del § 11 prova che con una proiettività (precisamente con una omologia) ogni superficie si può nell'intorno di un suo punto generico trasformare in una superficie collineare (e perciò ad essa uguale dal nostro punto di vista) definita da un'equazione

$$z = xy + (x^3 + y^3) + \dots \qquad (\text{ove } t = 1).\ (^*)$$

(*) Basterà nella formola citata cambiare i punti unità degli assi coordinati, cioè moltiplicare ciascuna delle x, y, z per una opportuna costante.

Perciò:

Il modo più semplice (che ricorre cioè a derivate di ordine minimo) *di definire un sistema di coordinate omogenee in modo intrinseco invariante, è quello di ricorrere alle derivate normali.*

E) Rette normali.

In coordinate *normali* x il punto $X = \frac{1}{2} \Delta_2 x$ e la retta (x, X) restano determinate in modo *intrinseco invariante*. Dalle I, II, confrontate con le equazioni fondamentali della geom. metrica sorge spontanea l'idea di dare a tale retta il nome di *normale proiettiva* (o di *prima* normale), e alla retta (ξ, Ξ) il nome di *seconda* normale.

Come vedremo, l'ultimo teorema dato in *D)* equivale al seguente:

Il modo più semplice *di estendere al campo proiettivo la nozione di retta normale in modo che le sviluppabili di queste formino un sistema coniugato* (che sarà il sistema delle *linee di curvatura proiettive*) *è quello sopra definito, che quindi appare come l'unico possibile.*

Questa definizione, pubblicata per la prima volta dal Fubini, fu ritrovata in modo affatto indipendente dal Green, che non ne pose però in luce il carattere di *necessità,* se si vuole la definizione *più semplice* possibile. Il Green cercò semplicemente in un certo fascio di rette una retta che descrivesse una congruenza, le cui sviluppabili determinassero su S un sistema coniugato.

F) Metrica normale.

Usando coordinate normali, un punto x' dello spazio in un intorno di un pezzo di S avrà per coordinate $x' = x + wX$, ove x è quel punto di S, da cui esce una normale passante per x', e w è un parametro. Le u, v, w si possono considerare come coordinate di un punto dello spazio in un intorno di S; e, se noi assumiamo come elemento lineare

$$ds^2 = \varphi_2 + dw^2, \tag{5}$$

avremo definito in tale intorno *una geometria metrica determinata dalla superficie* S *in modo intrinseco invariante.* In questa geom. metrica la nostra *normale* proiettiva incontra proprio ortogonalmente la superficie S; tutti gli invarianti metrici, curvatura geodetica, torsione ecc., diventano altrettanti invarianti proiettivi della S e degli enti connessi a tale superficie. In particolare sulla S resta definita una geometria metrica ($ds^2 = \varphi_2$), per cui le *asintotiche sono le linee di lunghezza nulla*, e di cui daremo più avanti un'interpretazione geometrica. *Così le espressioni*

$$\text{(6)} \qquad \sqrt{|A|}\,(du\delta^2 v - dv\delta^2 u) : \sqrt{\varphi_2^3}$$

$$\text{(7)} \qquad d\left\{\sqrt{|A|}\,(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)\right\} : \varphi_2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{|A|}\,(du\delta^3 v - dv\delta^3 u) : \varphi_2^{\frac{3}{2}}$$

sono per una linea di S *degli invarianti proiettivi : la prima* (curvatura geodetica nella nostra metrica) *si potrebbe chiamare la curvatura asintotica.*

Si possono anche estendere le nozioni di *torsione*, e di *torsione geodetica.*

Così *l'espressione*

$$\frac{1}{T_p} = (x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x) : \varphi_2^{\frac{3}{2}}\,,$$

calcolata in coordinate normali, è un invariante nullo soltanto per le sezioni piane, che perciò si può chiamare torsione proiettiva.

Tenendo conto delle equazioni fondamentali (I) e (II), questa espressione si può calcolare facilmente; rinviandone l'esame al § seguente, osserviamo soltanto che, se $\delta^2 u_i = \delta^3 u_i = 0$, allora essa si riduce a $\dfrac{1}{T_g} = \dfrac{P_6}{\varphi_2^{\frac{3}{2}}}$, dove P_6 *è una forma differenziale di sesto grado e del primo ordine.* La torsione proiettiva di una linea a curvatura asintotica nulla si riduce perciò precisamente ad $\dfrac{1}{T_g}$; e, poichè $\dfrac{1}{T_g}$ ha uguali valori per due linee tra loro tangenti, *esso, calcolato per una linea qualsiasi* L *di* S *in un punto* A, *vale la torsione proiettiva di quella linea tangente in* A *ad* L *che ha la curvatura* *asintotica nulla.* Perciò alle linee di curvatura asintotica nulla possiamo dare il nome di *geodetiche proiettive*, e alla frazione $\frac{1}{T_g}$ quello di *torsione geodetica proiettiva.*

Ritroveremo più avanti queste quantità da un altro punto di vista.

§ 16. — Il caso di linee coordinate asintotiche.

A) Le forme F_2, F_3, P, Π, Q.

Se le u, v sono asintotiche, supposte reali, è:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &0 = a_{11} = a_{22} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uu}) = (x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) = \\ &\qquad\qquad = (\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uu}) = (\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{vv}) \\ &(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = (\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uv}) = \omega a_{12}^2, \quad \text{ove} \\ &\omega = sgn(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = sgn(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uv}) = sgn a_{12} \\ &\varepsilon = -\, sgn A = sgn a_{12}^2 = 1 \\ &X = \frac{1}{2}\Delta_2 x = \frac{x_{uv}}{a_{12}}, \quad \Xi = \frac{1}{2}\Delta_2 \xi = \frac{\xi_{uv}}{a_{12}} \end{aligned}\right.$$

Porremo sovente:

$$(2)\qquad |a_{12}| = e^\theta \quad ; \qquad a = a_{12}\,.$$

Essendo F_3 apolare ad F_2, sarà:

$$(3)\qquad F_2 = 2a_{12}\, du dv = 2a du dv\,;$$

$$F_3 = a_{12}(\beta du^3 + \gamma dv^3) = a(\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

Se $a_{12} = \beta\gamma$, *le coordinate sono normali* (e la superficie non è rigata).

Se $\beta = \gamma = 0$, *allora* $F_3 = 0$, *e la superficie è una quadrica; se* $\beta = 0$, *le* v = cost. *sono rette; se* $\gamma = 0$, *le* u = cost. *sono rette.* Questi teoremi, conseguenza dei precedenti risultati generali, riceveranno conferma anche dalle seguenti deduzioni. Le equazioni fondamentali (I) e (II), e i risultati relativi a P — II danno ora:

I) . $$x_{11} = \beta x_2 + p_{11} x, \quad x_{22} = \gamma x_1 + p_{22} x,$$

ossia:

I $_{\text{bis}}$) $$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \qquad x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x$$

insieme alle:

II) $$\xi_{11} = -\beta \xi_2 + \pi_{11} \xi \qquad \xi_{22} = -\gamma \xi_1 + \pi_{22} \xi$$

ossia:

II $_{\text{bis}}$) $$\xi_{uu} = \theta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11} \xi \qquad \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi$$

(4) $$p_{12} = \pi_{12} = 0 \quad \pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta \theta_v \quad \pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \gamma \theta_u$$

Posto poi:

(5) $$q_{11} = p_{11} + \pi_{11} \qquad q_{12} = 0 \qquad q_{22} = p_{22} + \pi_{22}$$

è:

(6) $$\begin{cases} \dfrac{1}{2} q_{11} = p_{11} + \dfrac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v) = \pi_{11} - \dfrac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v) \\[2ex] \dfrac{1}{2} q_{22} = p_{22} + \dfrac{1}{2}(\gamma_u + \gamma\theta_u) = \pi_{22} - \dfrac{1}{2}(\gamma_u + \gamma\theta_u). \end{cases}$$

Le q_{11}, q_{22} *sono auto-duali.*

B) **Flecnodi.**

Nei punti soddisfacenti alla $\gamma = 0$ la (I)$_{\text{bis}}$ dimostra che x, x_v, x_{vv} sono collineari cioè che *nei punti per cui* $\gamma = 0$ *le asintotiche* u = cost. *hanno un flesso.*

Proveremo *che in tale punto la retta tangente all' asintotica* u = cost. *ha un contatto quadripunto con la superficie. Teoremi analoghi valgono per i punti soddisfacenti alla* $\beta = 0$.

Per provarlo assumiamo $t = 1$ ed a coordinate x, y, z quelle determinate dai seguenti valori iniziali:

$$x = 0\,,\; x_u = 1\,,\; x_v = 0\,,\; x_{uv} = 0$$

$$y = y_u = y_{uv} = 0\,,\; y_v = 1$$

$$z = z_u = z_v = 0\,,\; z_{uv} = 1.$$

Sviluppando con la formola di Taylor, troviamo per le $(1)_{\text{bis}}$, scrivendo i soli termini che ci interessano, indicando con $u = v = 0$ il punto considerato, e con θ_u, β, γ, ecc. i valori di θ_u, β, γ ecc. in questo punto

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x &= u + \frac{1}{2}(\theta_u u^2 + \gamma v^2) + \frac{1}{6}(\gamma_v + \gamma\theta_v)v^3 + \ldots \\ y &= v + \frac{1}{2}(\beta u^2 + \theta_v v^2) + \ldots . \\ z &= uv + \frac{1}{6}(\beta u^3 + 3\theta_u u^2 v + 3\theta_v uv^2 + \gamma v^3) + \\ &\quad + \frac{1}{12}(\gamma_v + \gamma\theta_v)v^4 + \ldots . \end{aligned}\right.$$

cioè (scrivendo dei termini di grado superiore al terzo soltanto *quello in* y^4):

$$(8)\qquad z = xy - \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3) + \frac{1}{12}(2\gamma\theta_v - \gamma_v)y^4 + \ldots .$$

Si riconosce appunto che, *soltanto ove* $\gamma = 0$, *la tangente asintotica* $z = x = 0$ *ha un contatto almeno quadripunto con la superficie.*

Se è identicamente $\gamma = 0$, le asintotiche $u = cost.$ hanno in ogni punto un flesso, e quindi sono rette come già sapevamo. La superficie risulta *rigata*, e le sue linee di Darboux si riducono alle generatrici $u = cost.$, e alle linee soddisfacenti alle $\beta = 0$.

Ora per una *superficie non rigata* i punti, in cui $\beta = 0$ oppure $\gamma = 0$ diconsi *flecnodi;* per una superficie rigata, in cui sia identicamente p. es. $\beta = 0$, diconsi *flecnodi* i punti che annullano γ. Ivi la *tangente all'asintotica curva* ha un contatto quadripunto con la superficie, cioè *incontra quattro generatrici infinitamente vicine.* Poichè quattro rette hanno generalmente *due* direttrici, segue *che su ogni generatrice* v $=$ cost. *vi sono generalmente due flecnodi,* ossia che con opportuna scelta del parametro u, la γ *è un polinomio di secondo grado in* u; ciò che, come vedremo, si deduce facilmente anche dalle condizioni d'integrabilità delle $(\mathrm{I})_{\mathrm{bis}}$. Il luogo dei flecnodi dicesi *linea flecnodale. Su una rigata le linee di Darboux si riducono alle generatrici e alla linea flecnodale.*

Dallo sviluppo (8) si trae un'altra conseguenza: *La tangente asintotica* $\mathrm{z} = \mathrm{x} = 0$ *ha un contatto pentapunto con la superficie nei punti ove* $\gamma = \gamma_{\mathrm{v}} = 0$, *cioè nei punti ove la linea flecnodale* $\gamma = 0$ *o ha un punto doppio oppure è tangente a una asintotica* $\mathrm{u} = \mathrm{cost.}$

Nel caso delle rigate questo e il precedente teorema si possono dimostrare anche in un altro modo; cercando cioè quando la retta (x, x_v), che è tangente all'asintotica $u = cost.$, incontra una generatrice, cioè una retta $\left(x + x_v\, dv + \frac{1}{2} x_{vv}\, dv^2 + \ldots,\right.$ $\left. x_u + x_{uv}\, dv + \frac{1}{2} x_{uvv}\, dv^2 + \ldots\right)$

L'equazione in dv che si trova ammette $dv = 0$ come radice quadrupla se $\gamma = 0$, come radice quintupla se $\gamma = \gamma_v = 0$.

C) Osservazioni varie.

È facile calcolare

$$\Omega = SX\Xi = S\, \frac{x_{uv}\, \xi_{uv}}{a_{12}^2}. \tag{9}$$

Osserviamo innanzi tutto le identità:

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&0 = a_{11} = S\xi x_{uu} = S\xi_u\, x_u = Sx\xi_{uu}\\
&0 = a_{22} = S\xi x_{vv} = S\xi_v\, x_v = Sx\xi_{vv}\\
&a_{12} = \pm e^{\theta} = S\xi x_{uv} = -S\xi_u\, x_v = -S\xi_v\, x_u = Sx\xi_{uv}\\
&a_{111} = \beta a_{12} = -S\xi_u\, x_{11} = -S\xi_u\, x_{uu} = Sx_u\, \xi_{uu}\\
&a_{222} = \gamma a_{12} = -S\xi_v\, x_{vv} = Sx_v\, \xi_{vv}\\
&a_{112} = 0 = Sx_u\, \xi_{uv} = S\xi_u\, x_{uv} = -S\xi_v\, x_{11} =\\
&\qquad = -S\xi_v\, x_{uu} - \frac{\partial a_{12}}{\partial u} = Sx_v\, \xi_{uu} + \frac{\partial a_{12}}{\partial u}\\
&a_{221} = 0 = Sx_v\, \xi_{uv} = S\xi_v\, x_{uv} =\\
&\qquad = -S\xi_u\, x_{vv} - \frac{\partial a_{12}}{\partial v} = Sx_u\, \xi_{vv} + \frac{\partial a_{12}}{\partial v}
\end{aligned}
\right.
$$

Quindi:

$$
\Omega = \frac{1}{a_{12}^2}\frac{\partial}{\partial v} Sx_u\, \xi_{uv} - \frac{1}{a_{12}^2} Sx_u \frac{\partial \xi_{vv}}{\partial u} =
$$

$$
= -\frac{1}{a_{12}^2} Sx_u \frac{\partial}{\partial u}(\theta_v \xi_v - \gamma\xi_u + \pi_{22}\xi) =
$$

$$
= -\frac{1}{a_{12}^2}\left[\theta_{uv} Sx_u\, \xi_v - \gamma Sx_u\, \xi_{uu}\right] = \frac{1}{a_{12}}(\theta_{uv} + \beta\gamma)
$$

cioè

$$
(9)_{\text{bis}}\qquad \Omega = SX\Xi = S\frac{x_{uv}\,\xi_{uv}}{a_{12}^2} = \frac{1}{a_{12}}(\theta_{uv} + \beta\gamma) =
$$

$$
= \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial^2 \log a_{12}}{\partial u \partial v} + \frac{\beta\gamma}{a_{12}}.
$$

La Ω *vale pertanto il rapporto* ($\beta\gamma : a_{12}$ in coordinate asintotiche) *della forma normale* φ_2 *alla* F_2, *diminuito della curvatura di* F_2: *così enunciato,* il teor. permette di calcolare Ω *in coordinate* u, v *qualsiasi.*

Le linee di Darboux hanno per equazione $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$, quelle di Segre $\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0$. Chiamiamo *isotermo-asintotiche* le superficie per cui

$$\frac{\partial^2 \log \beta : \gamma}{\partial u \partial v} = 0. \tag{11}$$

Per esse si potranno scegliere i parametri delle u, v in guisa che $\beta = \gamma$.

D) Condizioni di integrabilità.

Diamo una prima forma delle condizioni d'integrabilità, che studieremo più tardi in modo più completo. Esprimendo che i valori di x_{uuvv} tratti da (I) derivando coincidono, si trovano le condizioni

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma_{uu} + 2\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}(\gamma\theta_u) + \theta_v\theta_{uv} = \beta\gamma_v + 2\beta_v\gamma + \theta_{uvv},\\
&\beta_{vv} + 2\frac{\partial p_{11}}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}(\beta\theta_v) + \theta_u\theta_{uv} = \gamma\beta_u + 2\beta\gamma_u + \theta_{uuv},\\
&\theta_u\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + \beta\frac{\partial p_{22}}{\partial v} + 2p_{22}\beta_v + \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial v^2} =\\
&\qquad = \theta_v\frac{\partial p_{11}}{\partial v} + \gamma\frac{\partial p_{11}}{\partial u} + 2p_{11}\gamma_u + \frac{\partial^2 p_{22}}{\partial u^2},
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

che si possono presentare in forma più semplice. Ad una trasformazione moltiplicativa di coordinate $x = \rho x'$ corrispondono le $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $a_{12} = \rho^2 a'_{12}$. Ponendo in (I) $x = \rho x'$ con $\rho^2 = a_{12} : a'_{12}$, si trova facilmente che:

$$\theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - 2p_{11} = \theta'_{uu} - \frac{1}{2}\theta'^2_u - \beta\theta'_v - 2p'_{11}$$

e l'analoga in p_{22}. Sottraendo dunque β_v dai due membri, si trova che: *le quantità*

$$(13) \quad \begin{cases} L = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v - 2p_{11} = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 + \\ \qquad + \beta\theta_v + \beta_v - 2\pi_{11} = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - q_{11} \\ M = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u - 2p_{22} = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 + \\ \qquad + \gamma\theta_u + \gamma_u - 2\pi_{22} = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - q_{22} \end{cases}$$

non mutano neanche per una trasformazione $x = \rho x'$, cioè *non mutano per una qualsiasi collineazione.* E le (12) si riducono alle:

$$(14) \qquad L_v = -(2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u), \qquad M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v);$$

$$(15) \qquad \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu}.$$

Infatti le (14) equivalgono le prime due delle (12); l'ultima di queste, quando alle $\frac{\partial p_{11}}{\partial v}$, $\frac{\partial p_{22}}{\partial u}$ si sostituiscono i valori tratti dalle altre due, diventa:

$$2\beta\frac{\partial p_{22}}{\partial v} + 4p_{22}\beta_v - \beta_{vvv} - \gamma\theta_u\theta_{uu} - 2\beta_v\theta_{vv} - \beta\theta_{vvv} +$$
$$+ \beta\gamma_{uv} - \gamma_u\theta_u^2 + \theta_u\beta\gamma_v + 2\theta_u\gamma\beta_v =$$
$$= 2\gamma\frac{\partial p_{11}}{\partial u} + 4p_{11}\gamma_u - \gamma_{uuu} - \beta\theta_v\theta_{vv} - 2\gamma_u\theta_{uu} - \gamma\theta_{uuu} +$$
$$+ \gamma\beta_{uv} - \beta_v\theta_v^2 + \theta_v\gamma\beta_u + 2\theta_v\beta\gamma_u$$

a cui si riduce anche la (15) in virtù di (13).

In coordinate non omogenee ($t = 1$) l'ultima delle (12) è una identità, perchè $p_{11} = p_{22} = 0$. Non lo è invece la (15) che si può in tal caso considerare come la condizione d'integrabilità delle (13) pensate come equazioni nella θ.

La forma $\mathrm{Ldu}^2 + \mathrm{Mdv}^2$ *è invariante per collineazioni* (e reciprocità), *ma non è intrinseca,* come si riconosce studiando su 0 l'effetto di un cambiamento dei parametri delle asintotiche nell'ipotesi semplificatrice che $t = 1$ e quindi $p_{11} = p_{22} = 0$. Ma è facile riconoscere pure che, posto

$$(16) \qquad \pm e^{\varphi} = \beta\gamma \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\gamma} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\beta} \quad \text{oppure} \quad \sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,, \ldots$$

$$(17) \qquad \pm e^{\psi} = \beta\gamma \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\beta} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\gamma} \quad \text{oppure} \quad \sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,, \ldots$$

$$\left(\text{se p. es. } \beta = 0, \text{ ponendo } \varphi = -\log|\gamma|\,, \quad \psi = \frac{1}{2}\log|\gamma|\right)$$

allora la forma:

$$(18) \qquad \left(L - \varphi_{uu} + \frac{1}{2}\varphi_u^2\right)du^2 + \left(M - \psi_{vv} + \frac{1}{2}\psi_v^2\right)dv^2,$$

è *intrinseca, pure essendo ancora invariante per collineazioni a modulo qualsiasi;* essa si può perciò talvolta con vantaggio sostituire alla P (o Π, oppure Q), che è invariante solo per collineazioni unimodulari.

Da tutto questo si possono anche dedurre *le condizioni d'integrabilità in coordinate* u, v *qualsiasi,* che furono date in forma concisa per la prima volta dal Fubini nelle sue Note: *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei vol. 27_2, 1918). Non le scriveremo qui, perchè più tardi le daremo sotto un'altra forma, dovuta al Čech.

E) Calcolo di $(x\, dx\, d^2x\, d^3x)$. Il cono di Segre.

Supporremo le x coordinate omogenee qualsiasi. È, se $u = u_1$ e $v = u_2$ sono asintotiche:

$$d^2x = \Sigma x_i\, \delta^2 u_i + (\beta x_v + p_{11}\, x)du^2 + 2x_{uv}\, dudv + (\gamma x_u + p_{22}\, x)dv^2$$

$$d^3x = \Sigma x_i \delta^3 u_i + 3\left\{(\beta x_v + p_{11}x)du\delta^2 u + x_{uv}(du\delta^2 v + dv\delta^2 u) + \right.$$

$$\left. + (\gamma x_u + p_{22}x)dv\delta^2 v\right\} +$$

$$+ x_{111}du^3 + (x_{112} + 2x_{121})du^2dv + (x_{121} + 2x_{122})dudv^2 + x_{222}dv^3$$

Ora

$$x_{111} = \frac{\partial x_{11}}{\partial u} - 2\theta_u x_{11} = p_{11}x_u + (\beta_u - 2\beta\theta_u)x_v + \beta x_{uv} + \ldots$$

$$x_{112} + 2x_{121} = 3\frac{\partial x_{11}}{\partial v} + 2\theta_{uv}x_u = (3\beta\gamma + 2\theta_{uv})x_u + 3\pi_{11}x_v + \ldots$$

e analoghe dove sono trascurati i termini in x, e dove, si ricordi $\beta_v + p_{11} + \beta\theta_v = \pi_{11}$.

Quindi, posto

$$A = \delta^3 u + 3\gamma dv\delta^2 v + p_{11}du^3 + (3\beta\gamma + 2\theta_{uv})du^2dv$$
$$+ 3\pi_{22}dudv^2 + (\gamma_v - 2\gamma\theta_v)dv^3,$$

$$B = \delta^3 v + 3\beta du\delta^2 u + p_{22}dv^3 + (3\beta\gamma + 2\theta_{uv})dudv^2$$
$$+ 3\pi_{11}dvdu^2 + (\beta_u - 2\beta\theta_u)du^3,$$

$$C = 3(du\delta^2 v + dv\delta^2 u) + \beta du^3 + \gamma dv^3,$$

sarà:

$$\frac{(x\ dx\ d^2x\ d^3x)}{(x\ x_u\ x_v\ x_{uv})} = \begin{vmatrix} du & dv & 0 \\ \delta^2 u + \gamma dv^2 & \delta^2 v + \beta du^2 & 2dudv \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

$$= -2dudv\left[\begin{array}{r} (du\delta^3 v - dv\delta^3 u) + 3(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) + \\ + (\beta_u - 2\beta\theta_u)du^4 - (\gamma_v - 2\gamma\theta_v)dv^4 \\ + (3\pi_{11} - p_{11})dvdu^3 + (p_{22} - 3\pi_{22})dudv^3 \end{array}\right]$$

$$+ \left[3(du\delta^2 v + dv\delta^2 u) + \beta du^3 + \gamma dv^3\right]\left[du\delta^2 v - dv\delta^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3\right].$$

Se F_3' è il covariante cubico $a(\beta du^3 - \gamma dv^3)$ di F_3 e G è la espressione intrinseca $a(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)$, avremo:

$$G = a(du\delta^2 v - dv\delta^2 u) \qquad dG = a(du\delta^3 v - dv\delta^3 u)$$

$\left(\text{cioè la curvatura geodetica rispetto all'elemento } F_2 \text{ è } G : \sqrt{F_2}^{\,3}\right)$,

$$dF_2 = 2a(du\delta^2 v + dv\delta^2 u)$$

$$dF_3' = 3a(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) + a_{1111} du^4 + a_{1112} du^3 dv - a_{2221} du dv^3 - a_{2222} dv^4$$

$$= 3a(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) + \left[\frac{\partial(a\beta)}{\partial u} - 3\theta_u a\beta\right] du^4 +$$

$$+ \frac{\partial(a\beta)}{\partial v} du^3 dv - \frac{\partial(a\gamma)}{\partial u} du dv^3 - \left[\frac{\partial(a\gamma)}{\partial v} - 3\theta_v a\gamma\right] dv^4 .$$

Essendo $(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = a^2$, ne deduciamo:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} (x\, dx\, d^2x\, d^3x) = &- F_2\left[dG + dF_3' + F_2(\pi_{11} du^2 - \pi_{22} dv^2)\right] \\ &+ \left(\frac{3}{2} dF_2 + F_3\right)\left(G + F_3'\right). \end{aligned} \right.$$

Si noti che $\pi_{11} du^2 - \pi_{22} dv^2$ si scrive subito anche in coordinate curvilinee qualsiasi; essa è la forma quadratica apolare ad F_2 e alla forma $\Sigma \pi_{rs} du_r du_s$, covariante al loro sistema.

Cosicchè la (19) *permette di calcolare* $(\mathrm{x\ dx\ d^2x\ d^3x})$ *in coordinate qualsiasi.* Uguagliando a zero, si trova l'equazione delle sezioni piane. Ne segue facilmente (cfr. la Nota di F. citata più avanti) che *l'equazione delle sezioni piane è determinata dalle nostre forme e viceversa;* cosicchè *due superficie poste in una corrispondenza biunivoca, che conservi le sezioni piane, sono collineari* (ciò che è evidente per superficie algebriche e che per superficie qualsiasi si può dimostrare direttamente (cfr. la Nota del Fubini negli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino 1914 vol. 49 pag. 786).

Cambiando di segno β, γ si trova l'equazione delle curve di contatto della nostra superficie con un cono $(\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi) = 0$.

L'equazione:

$$(20) \qquad (x\, dx\, d^2x\, d^3x) = (\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi) \ (^*)$$

non contiene i differenziali terzi e si riduce alla:

$$(20)_{\text{bis}} \quad - F_2 \left[2dF_3' + F_2 \left\{ (\pi_{11} - p_{11})du^2 - (\pi_{22} - p_{22})dv^2 \right\} \right] +$$
$$+ 2GF_3 + 3F_3'dF_2 = 0$$

che dev'essere indipendente da a, perchè, moltiplicando le x e quindi anche le ξ per uno stesso fattore, la (20) resta equivalente a sè stessa. Sviluppando la formola precedente si trova infatti che (20) si può scrivere quando si consideri u come funzione della v $\left(\text{e si ponga } u' = \dfrac{du}{dv},\ u'' = \dfrac{d^2u}{dv^2}\right)$:

$$(20)_{\text{ter}} \quad 2\, \frac{\beta u'^3 + \gamma}{u'^3}\, u'' = \left(\frac{\gamma_v}{u'^2} - \beta_u u'^2 \right) + 2 \left(\frac{\gamma_u}{u'} - \beta_v u' \right) = 0 .$$

Le curve C definite da questa equazione hanno un importante significato geometrico. Sia π un piano osculatore in x ad una di queste curve C, contenente perciò anche 2 altri punti consecutivi ad x sulla curva C. Consideriamo un quarto punto consecutivo preso *non su* C, ma sull'intersezione della superficie con π. Il primo membro di (20), e quindi per la $(20)_{\text{ter}}$ anche il secondo membro sarà nullo. Perciò i piani tangenti alla superficie in questi quattro punti concorreranno in un'unico punto. Al § 24 del Cap. III° troveremo che $(20)_{\text{ter}}$ definisce le *pangeodetiche*. Abbiamo dunque:

In un punto O *di una superficie il piano osculatore* π *di una qualsiasi pangeodetica uscente da* O gode della proprietà *che i 4 piani tangenti in* O *ed in* 3 *punti consecutivi dell'intersezione di* π *con la nostra superficie passano per un medesimo punto.*

Al § 24 del Cap. III° studieremo il cono inviluppato da que-

(*) Per superficie ad asintotiche non reali, alla (20) si dovrebbe sostituire l'equazione ottenuta, moltiplicando per ε uno solo dei due membri.

sti piani: cono che per la prima volta è stato considerato dal Segre. La equazione (20) è dovuta al Čech; essa è molto notevole, perchè permette di fare i calcoli in coordinate u, v qualsiasi. Si veda anche l'ultimo teorema del § 22. Il Fubini trovò per la prima volta le forme F, studiando appunto l'espressione (x, dx, d^2x, d^3x).

F) **Confronto con le formole della Geom. metrica.**

Supposto $t = 1$, siano x, y, z coordinate cartesiane ortogonali. Sarà:

$$(19)\quad x_{uu} = \left\{ {11 \atop 1} \right\} x_u + \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_v \,, \qquad x_{vv} = \left\{ {22 \atop 1} \right\} x_u + \left\{ {22 \atop 2} \right\} x_v \,,$$

ove $\left\{ {ij \atop h} \right\}$ sono calcolati per l'elemento lineare di Gauss. Confrontate con le precedenti, si deduce:

$$(20)\quad \theta_u = \left\{ {11 \atop 1} \right\}, \quad \theta_v = \left\{ {22 \atop 2} \right\}, \quad \beta = \left\{ {11 \atop 2} \right\}, \quad \gamma = \left\{ {22 \atop 1} \right\}.$$

Ne segue che i nostri β, γ *non sono che i simboli* $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ *per l'elemento lineare di Gauss;* se p. es. $\beta = 0$, sarà $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$, cioè le $v = cost.$ avranno curvatura geodetica nulla ed, essendo asintotiche, saranno rette, come già sapevamo. Sarà poi:

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = \omega a_{12}^2 = \pm D' \sqrt{EG - F^2}\,, \\ &a_{12} = \sqrt{D' \sqrt{EG - F^2}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{\rho}}\,, \end{aligned} \right.$$

ove $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$ è la curvatura totale della superficie, in completo accordo con la (21) del § 12 C.

La coordinate normali si ottengono dalle precedenti, moltiplicando per

$$(22) \qquad \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\sqrt{D'\sqrt{EG-F^2}}}} = \sqrt{\beta\gamma}\, e^{-\theta:2}$$

Si noti che, posto $E_{11}=E$, $E_{12}=F$, $E_{22}=G$, conseguenza differenziale delle

$$\frac{\partial E_{ik}}{\partial x_l} = \sum_\mu E_{i\mu}\begin{Bmatrix} kl \\ \mu \end{Bmatrix} + \sum_\mu E_{k\mu}\begin{Bmatrix} il \\ \mu \end{Bmatrix}$$

sono le formole:

$$(23)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{F}{\rho^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{F}{\rho^2} \end{cases}$$

e che conseguenza delle equazioni di Codazzi (essendo ora $D=D''=0$) sono le:

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{\rho}}{\partial v}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{\rho}}{\partial u}$$

E, per le (20), (21):

$$\theta_{uv} + \beta\gamma = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}_v + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}_u + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_u + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{F}{\rho^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 \log\sqrt{\rho}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log\sqrt{\rho}}{\partial u}\,\frac{\partial \log\sqrt{\rho}}{\partial v} - f$$

cioè

$$(24) \qquad a_{12}\,\Omega = \theta_{uv} + \beta\gamma = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u \partial v} - f,$$

che è la quantità che si presenta nella celebre equazione di Moutard.

§ 17. — Applicazione agli invarianti di un sistema coniugato.

A) Calcolo di tali invarianti.

Le $\bar{u}$, $\bar{v}$ formino un sistema coniugato; sia

$$du = r d\bar{u} + s d\bar{v} \quad , \quad dv = S d\bar{u} + R d\bar{v} \tag{1}$$

cosicchè:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} = r \frac{\partial}{\partial u} + S \frac{\partial}{\partial v} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{v}} = s \frac{\partial}{\partial u} + R \frac{\partial}{\partial v}, \tag{1 bis}$$

$$rR + sS = 0, \tag{2}$$

$$d\bar{u} = \frac{1}{2r} du + \frac{1}{2S} dv \quad , \qquad d\bar{v} = \frac{1}{2s} du + \frac{1}{2R} dv. \tag{3}$$

Per la (2) le condizioni d'integrabilità danno:

$$\left\{\begin{aligned} s_{\bar{u}} = r_{\bar{v}} &= r s_u + S s_v = r s_u + \frac{S s^2}{R^2} R_u = \\ &= rs\left(\frac{s_u}{s} - \frac{R_u}{R}\right) = rs \frac{\partial log(s:R)}{\partial u}, \\ R_{\bar{u}} = S_{\bar{v}} &= r R_u + S R_v = r R^2 \frac{s_v}{s^2} + S R_v = \\ &= RS\left(\frac{R_v}{R} - \frac{s_v}{s}\right) = RS \frac{\partial log R : s}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Sarà poi:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = rs \frac{\partial^2}{\partial u^2} + RS \frac{\partial^2}{\partial v^2} + rs \frac{\partial \log s : R}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} + \tag{5}$$

$$+ RS \frac{\partial \log R:s}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Sarà dunque (posto $a = a_{12}$)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = \left(rs\theta_u + RS\gamma + rs \frac{\partial \log s:R}{\partial u}\right)x_u + \tag{6}$$

$$+ \left(rs\beta + RS\theta_v + RS \frac{\partial \log R:s}{\partial v}\right)x_v + (rsp_{11} + RSp_{22})x =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2r}\left(rs \frac{\partial \log as:R}{\partial u} + RS\gamma\right) + \frac{1}{2S}\left(rs\beta + RS \frac{\partial \log aR:s}{\partial v}\right)\right\} x_{\bar{u}}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2s}\left(rs \frac{\partial \log as:R}{\partial u} + RS\gamma\right) + \frac{1}{2R}\left(rs\beta + RS \frac{\partial \log aR:s}{\partial v}\right)\right\} x_{\bar{v}}$$

$$+ (rsp_{11} + RSp_{22})x.$$

Questa è una equazione di Laplace per le coordinate x di punto, di cui il primo invariante è:

$$\left\{\begin{aligned} I = {} & \frac{1}{4rs}\left(rs \frac{\partial \log as:R}{\partial u} + RS\gamma\right)^2 + \frac{1}{4RS}\left(RS \frac{\partial \log aR:s}{\partial v} + rs\beta\right)^2 \\ & + rsp_{11} + RSp_{22} - \\ & - \left[\frac{1}{2r}\left(rs \frac{\partial \log as:R}{\partial u} + RS\gamma\right) + \frac{1}{2S}\left(rs\beta + RS \frac{\partial \log aR:s}{\partial v}\right)\right]_{\bar{u}} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Poniamo:

$$\frac{s}{R} = -\frac{r}{S} = \rho; \tag{8}$$

allora

(9) $du - \rho dv = 0$ è l'equazione delle $\bar{u} = \text{cost.}$

(10) $\dfrac{\partial}{\partial \bar{u}} = S\left(\dfrac{\partial}{\partial v} - \rho \dfrac{\partial}{\partial u}\right)$. (Qui S *non* è un simbolo di somma).

L' ultimo termine del secondo membro di (7) diventa:

$$-\frac{1}{2}\left[s\theta_u+s\frac{\rho_u}{\rho}-R\frac{\gamma}{\rho}-\rho s\beta+R\theta_v-R\frac{\rho_v}{\rho}\right]_{\bar{u}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{R\left[\rho\theta_u+\rho_u-\frac{\gamma}{\rho}-\beta\rho^2+\theta_v-\frac{\rho_v}{\rho}\right]\right\}_{\bar{u}}$$

$$=-\frac{1}{2}S(R_v-\rho R_u)\left(\rho\theta_u+\rho_u-\frac{\gamma}{\rho}-\beta\rho^2+\theta_v-\frac{\rho_v}{\rho}\right)$$

$$-\frac{1}{2}RS\left(\frac{\partial}{\partial v}-\rho\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\rho\theta_u+\rho_u-\frac{\gamma}{\rho}-\beta\rho^2+\theta_v-\frac{\rho_v}{\rho}\right).$$

Per le condizioni d'integrabilità è $R_u : R^2 = s_v : s^2$; e perciò il fattore

$$-\frac{1}{2}S(R_v-\rho R_u)$$

del primo termine dell'ultimo membro vale $\frac{1}{2}RS\frac{\rho_v}{\rho}$.

Se ne deduce, ricordando (2) e le (13) del § 16 D che:

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{2I}{Ss}=&\left(L\rho-\frac{M}{\rho}\right)+\\&+\left[\rho_{uu}-\frac{1}{2}\frac{\rho_u^2}{\rho}-2\frac{\partial^2\log\rho}{\partial u\partial v}+\frac{\rho_{vv}}{\rho^2}-\frac{3}{2}\frac{\rho_v^2}{\rho^3}\right]\\&+\left(-\frac{2}{\rho}\gamma_u-2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^3}-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\rho^3}+2\gamma\frac{\rho_u}{\rho^2}+\gamma_v\frac{1}{\rho^2}\right)\\&+\left(2\beta_v\rho-\beta_u\rho^2-2\beta\rho\rho_u+\frac{1}{2}\beta^2\rho^3+2\beta\rho_v\right).\end{aligned}\right.$$

Dunque: (F)

La forma $8\mathrm{I}d\bar{\mathrm{u}}\,d\bar{\mathrm{v}}=\frac{2\mathrm{I}}{\mathrm{Ss}}\left(-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{du}^2+\rho\mathrm{dv}^2\right)$, *che ha un significato indipendente dal modo con cui sono stati scelti i parametri*

$\overline{\mathrm{u}}$, $\overline{\mathrm{v}}$ *del sistema coniugato che si considera, si calcola appena data l'equazione* $\mathrm{du} - \rho \mathrm{dv} = 0$ *delle* $\overline{\mathrm{u}} = \mathrm{cost.}$ *oppure* $\mathrm{du} + \rho \mathrm{dv} = 0$ *delle* $\overline{\mathrm{v}} = \mathrm{cost.}$ *senza che si debbano calcolare le equazioni di queste curve in termini finiti o ricorrere a quadrature.*

L'altro invariante se ne deduce scambiando r con s, R con S, cioè cambiando ρ in $-\rho$ ed Ss in $Rr = -Ss$. Lo diremo il *secondo* invariante.

Gli invarianti per l'equazione di Laplace relativa ai piani tangenti se ne deducono semplicemente sostituendo $-\beta$, $-\gamma$ a β, γ.

$B)$ Sistemi coniugati ad invarianti uguali.

La differenza dei due invarianti per l'equazione di Laplace relativa alle coordinate di punto è quindi il prodotto di Ss per

$$-2\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} - 2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^3} + \gamma_v\frac{1}{\rho^2} - \beta_u\rho^2 - 2\beta\rho\rho_u$$

che vale, (F), posto $-\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{C}{D}$:

$$\frac{\partial^2 \log\dfrac{C}{D}}{\partial u \partial v} - \left(\gamma\frac{C}{D}\right)_v + \left(\beta\frac{D}{C}\right)_u \tag{12}$$

Dunque: *Il sistema coniugato* $\mathrm{Cdu}^2 + \mathrm{Ddv}^2 = 0$ *ha invarianti di punto uguali, se* (12) *è nullo.*

L'uguagliare a zero il solo primo termine caratterizza, si noti, i sistemi isotermi coniugati.

L'uguagliare a zero la (12), *in cui si cambino i segni di* β, γ, *caratterizza similmente i sistemi coniugati a invarianti tangenziali uguali.*

Poichè cambiare i segni di β, γ equivale a cambiare il segno di $\dfrac{C}{D}$, cioè a sostituire al sistema coniugato $Cdu^2 + Ddv^2 = 0$ il sistema coniugato armonico (che lo divide armonicamente) $Cdu^2 -$

$-Ddv^2 = 0$, ne deduciamo (Fubini) il teor. di Darboux (Théorie des surf. 1896 Tomo 4, p. 72):

Se un sistema coniugato ha invarianti di punto uguali, il sistema coniugato armonico ha uguali invarianti tangenziali e viceversa.

Segue pure immediatamente: *Se un sistema coniugato gode di due delle tre proprietà seguenti: di avere uguali invarianti di punto, di avere uguali invarianti tangenziali, di essere isotermo coniugato, gode pure della terza; ed anche il sistema coniugato armonico gode delle stesse proprietà.*

Se una superficie contiene un tale sistema coniugato, potremo cambiare i parametri u, v *delle asintotiche in guisa che* C = D = 1. Risulterà perciò dall'annullarsi di (12) *che* $\beta_u = \gamma_v$. Tali superficie diconsi di *Ionas.*

Notiamo ancora: *Se due superficie hanno le stesse* β, γ *cioè lo stesso elemento lineare proiettivo, cioè se, come vedremo, sono proiettivamente applicabili, su di esse si corrispondono i sistemi coniugati ad invarianti uguali.* (F).

All'equazione ottenuta uguagliando (12) a zero, si possono sostituire delle equazioni più semplici. Tale equazione dice infatti che

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\log D + \gamma\frac{C}{D}\right)du + \left(\frac{\partial}{\partial v}\log C + \beta\frac{D}{C}\right)dv$$

è un differenziale esatto $d\log\varphi$, cioè che:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{D}{\varphi} + \gamma\frac{C:\varphi}{D:\varphi} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{C}{\varphi} + \beta\frac{D:\varphi}{C:\varphi} = 0$$

Posto $\varphi = \psi H$, ove H è una funzione arbitraria, e sostituito $C:\psi$ e $D:\psi$ alle C, D, col che il rapporto $C:D$ resta immutato, queste equazioni diventano

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{D}{H} + \gamma\frac{C}{D} = \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{C}{H} + \beta\frac{D}{C} = 0,$$

ossia:

$$D_u + \gamma C = D\frac{H_u}{H}; \quad C_v + \beta D = C\frac{H_v}{H}, \tag{13}$$

che sono lineari in C, D. Poichè H è arbitrario, si può, volendo, scegliere $H = 1$; e le (13) diventano allora:

(14) $$D_u = -\gamma C, \qquad C_v = -\beta D.$$

La determinazione dei sistemi coniugati a invarianti uguali è ridotta al semplicissimo sistema **lineare** (14) (F).

C) Un'altra applicazione.

La differenza tra il *primo* invariante dell'equazione di Laplace per le coordinate di punto ed il *secondo* invariante tangenziale vale dunque il prodotto di Ss per

$$-2\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} - \frac{2}{\rho}\gamma_u + 2\gamma\frac{\rho_u}{\rho^2} + 2\rho\beta_v + 2\beta\rho_v$$

cioè vale

(15) $$2Ss\left\{(\beta\rho)_v - \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)_u - \frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v}\right\}$$

Posto $\rho = +\frac{A}{B}$, l'eguagliare a zero questa espressione (15) equivale, (quando si moltiplichino A, B per uno stesso opportuno fattore) a imporre le:

(16) $$A_v + \gamma B = 0 \qquad B_u + \beta A = 0$$

affatto analoghe alle (14); vedremo che queste equazioni equivalgono a dire che le tangenti alle linee $\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}$ cioè alle $\overline{u} = \text{cost.}$ $(du - \rho dv = 0)$ formano una congruenza W. Se ne deduce il teor. (F):

Se il primo invariante in coordinate di punto è uguale al secondo invariante tangenziale, le rette tangenti alle curve del primo sistema ($\overline{\text{u}} = \text{cost.}$) *formano una congruenza* W.

Se questo avviene anche per le linee coniugate $\overline{\text{v}} = \text{cost.}$, *cioè se le equazioni di Laplace per i punti o per i piani tangenti* *hanno uguali invarianti, scambiati di posto, cioè se tali equazioni sono aggiunte, allora, scegliendo opportunamente i parametri* u , v *delle asintotiche, potremo supporre* $\rho = 1$; *il sistema coniugato che si considera è pertanto isotermo coniugato ; e*, come si vede da (15) , $\beta_v = \gamma_u$. *Le superficie, su cui esiste un tale sistema, sono le superficie* R *di Tzitzeica e Demoulin.*

L'analogia tra le (14) e (16) non è soltanto formale; vedremo che, *integrate le* (16) *cioè trovate le congruenze* W *di cui* S *è prima falda focale, si sanno integrare le* (14), *cioè trovare i sistemi coniugati a invarianti uguali con sole derivazioni ; e viceversa, integrate le* (14), *si sanno integrare le* (16) *con sole quadrature.*

Notiamo ancora che se due superficie sono in corrispondenza biunivoca, e se per la seconda β' e γ' sono i valori delle β , γ , la differenza dei due invarianti citati ha uguali valori sulle due superficie [per il sistema coniugato, a cui appartengono le $du - \rho dv = 0$] soltanto se :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[(\beta' - \beta)\rho\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[(\gamma' - \gamma)\frac{1}{\rho}\right]. \tag{16}$$

Supponiamo che le due superficie debbano aver uguale tanto il primo invariante in coordinate di punto che il secondo invariante tangenziale. Allora basterà che sia soddisfatta la (16), e che siano uguali i primi invarianti in coordinate di punto; cioè, indicando con L' , M' i valori di L , M per le due superficie, dovrà essere soddisfatta, oltre alla (16), anche la :

$$\begin{aligned}
&\rho^2\left(L - \rho\beta_u - 2\beta\rho_u + \frac{1}{2}\beta^2\rho^2\right) - \\
&\qquad - \left(M + 2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{1}{\rho^2} - \frac{\gamma_v}{\rho}\right) = \\
&= \rho^2\left(L' - \rho\beta'_u - 2\beta'\rho_u + \frac{1}{2}\beta'^2\rho^2\right) - \\
&\qquad - \left(M' + 2\gamma'\frac{\rho_v}{\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma'^2}{\rho^2} - \frac{\gamma'_v}{\rho}\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Le (16), (17) hanno un ufficio fondamentale nella teoria della deformazione delle congruenze.

Ancora una osservazione: *Per le superficie isotermo asintotiche* $\left(\text{per cui } \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\beta}{\gamma} = 0\right)$ *si possono mutare i parametri* u, v *delle asintotiche in guisa che* $\beta = \gamma$.

Per tali superficie le equazioni (14) *e* (16) *sono perfettamente equivalenti. Si ha così una trasformazione* (F) *delle congruenze* W *che hanno una tale superficie come prima falda focale; la soluzione di* (14) *che, come abbiamo enunciato, si deduce con sole derivazioni da una soluzione di* (16) *è ancora una soluzione di* (16) *e individua pertanto ancora una congruenza* W.

§ 18. — Nuovi studii in coordinate asintotiche u, v.

A) Coordinate non omogenee e di Lelieuvre.

Sia $t = 1$; e quindi x, y, z siano *non* omogenee. Le equazioni

$$S\Xi x_u = S\Xi x_v = 0\,, \qquad S\xi x_u = S\xi x_v = 0$$

(i cui primi membri si riducono a tre soli termini perchè $t_u = t_v = 0$) provano che esiste una quantità λ tale che

$$\Xi = \lambda\xi \qquad H = \lambda\eta \qquad Z = \lambda\zeta\,.$$

Poichè $\Xi = \frac{1}{2}\Delta_2\xi$, sarà:

$$\varphi_{uv} = \lambda a_{12}\varphi \qquad (\text{per } \varphi = \xi, \eta, \zeta, \textbf{ non} \text{ per } \varphi = \tau)$$

Ora

$$\Omega = SX\Xi = \lambda SX\xi = \lambda.$$

Perciò (§ 16 *C*) sarà:

(1) $\quad \varphi_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)\varphi \qquad (\text{per } \varphi = \xi, \eta, \zeta, \textit{ non} \text{ per } \varphi = \tau)$

che è la classica equazione di Moutard.

Se ne deduce:

I piani tangenti alle asintotiche di una superficie tagliano un piano qualunque $t = 0$ *in un sistema coniugato ad invarianti tangenziali uguali.* Questo teorema è il duale del seguente, che è ben noto, e che si dimostra supponendo $\tau = 1$. *Proiettando da un punto su un piano le asintotiche d'una superficie si ottiene un sistema coniugato ad invarianti* (di punto) *uguali.*

Viceversa siano ξ, η, ζ tre soluzioni indipendenti di una equazione di Laplace ad invarianti uguali, che potremo supporre ridotta alla forma

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \varphi_{uv} = R\varphi .$$

Costruiamo le equazioni

$$(2) \qquad \xi_{uu} = \alpha\xi_u - \beta\xi_v + \pi_{11}\xi \qquad \xi_{vv} = -\gamma\xi_u + \varepsilon\xi_v + \pi_{22}\xi ,$$

a cui soddisfano le funzioni ξ, η, ζ. Le $(1)_{\text{bis}}$ e (2) hanno 3 soluzioni indipendenti comuni, e soddisfano perciò alle condizioni d'integrabilità. Da queste si trae innanzi tutto $\alpha_v = \varepsilon_u$, cosicchè si può porre $\alpha = \theta_u$, $\varepsilon = \theta_v$, e inoltre si trae che:

$$(3) \qquad R = \theta_{uv} + \beta\gamma , \qquad \pi_{11} = \beta_v + \beta\theta_v , \qquad \pi_{22} = \gamma_u + \gamma\theta_u .$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta_v - \beta\theta_v\right) = -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u ,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma - \gamma\theta_u\right) = -2\gamma_v\beta - \gamma\beta_v .$$

In particolare sono dunque soddisfatte, com'era prevedibile *a priori*, le condizioni d'integrabilità per il sistema formato dalle *sole* (2); ed esisterà pertanto una quarta funzione $\tau(u, v)$, linearmente indipendente dalle precedenti che soddisfa a (2), ma non ad $(1)_{\text{bis}}$. Ciò che del resto si potrebbe dimostrare *a posteriori*, verificando direttamente i seguenti risultati. Il piano ξ, η, ζ, τ inviluppera una superficie S, su cui le u, v saranno le asintotiche.

La $S\xi x_u = 0$ diventa per $(1)_{\text{bis}}$

$$\frac{1}{R}(\xi_{uv} x_u + \eta_{yv} y_u + \zeta_{uv} z_u) + \tau t_u = 0.$$

Confrontando con la $S\Xi x_u = 0$, ossia $S\xi_{uv} x_u = 0$ si deduce:

$$(\tau_{uv} - R\tau) t_u = 0$$

ossia, poichè τ non soddisfa ad $(1)_{\text{bis}}$, $t_u = 0$; similmente si prova che $t_v = 0$, ossia che $t = cost.$, ossia che x, y, z daranno coordinate non omogenee [e quindi che $p_{11} = \pi_{11} - (\beta_v + \beta\theta_v)$ e p_{22} sono nulle, come si poteva dedurre anche da (3)]. Dalle $S\xi x_u = S\xi_u x_u = 0$, che si riducono a somme di soli *tre* termini, si trae:

$$(4) \qquad x_u = \rho \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{e analoghe in } y, z \\ \rho = \text{fattore di proporzionalità} \end{pmatrix}$$

Similmente, se σ è un altro fattore, si trae:

$$(4)_{\text{bis}} \qquad x_v = -\sigma \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} \qquad (\text{e analoghe in } y, z).$$

Dovendo essere $S\xi_v x_u = S\xi_u x_v$, sarà $\rho = \sigma$. Si riconosce poi che le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte se $\rho_u = \rho_v = 0$, p. es. per $\rho = 1$. Si ha così:

$$(5) \quad dx = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u du - \eta_v dv & \zeta_u du - \zeta_v dv \end{vmatrix} \quad (\text{e analoghe in } y, z).$$

Queste sono le ben note formole di Lelieuvre, che permettono di calcolare x, y, z *con sole quadrature.* Sarà inoltre:

$$(x \; x_u \; x_v \; x_{uv}) = -(x_u \; x_v \; x_{uv}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \eta_v & \zeta_v \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \xi & \xi_u & \xi_v \\ \eta & \eta_u & \eta_v \\ \zeta & \zeta_u & \zeta_v \end{vmatrix}^2 .$$

Calcolando le derivate di quest'ultimo determinante, si trova per le $(1)_{\text{bis}}$, (2) che esso vale ke^{θ} con $k = cost.$ D'altra parte

$$(\xi \; \xi_u \; \xi_v \; \xi_{uv}) = \begin{vmatrix} \xi & \xi_u & \xi_v \\ \eta & \eta_u & \eta_v \\ \zeta & \zeta_u & \zeta_v \end{vmatrix} (\tau_{uv} - R\tau) .$$

E, calcolando le derivate di $\tau_{uv} - R\tau$, si trova che, moltiplicando la τ per un fattore costante, si può rendere $\tau_{uv} - R\tau = ke^{\theta}$. Perciò,

$$(\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{uv}) = k^2 e^{2\theta} = (x\ x_u\ x_v\ x_{uv}).$$

E si ritorna completamente alle usuali formole della teoria delle superficie appena si osservi che, essendo θ determinata a meno di una costante additiva dalle $\theta_u = \alpha$, $\theta_v = \varepsilon$, possiamo servirci di tale indeterminazione per rendere $k = 1$.

Abbiamo conseguito *un ulteriore risultato che cioè la* τ, la quale *non soddisfa alla* $(1)_{\text{bis}}$ *soddisfa invece alla :*

$$\tau_{uv} = R\tau + e^{\theta} = R\tau + a_{12}, \tag{6}$$

completando così il risultato di Lelieuvre.

Si capisce ora perchè il Lelieuvre, nella geometria metrica, *sostituisca le precedenti* ξ, η, ζ *ai coseni direttori della normale. Le* ξ, η, ζ *insieme alla* τ sono proprio quelle coordinate del piano tangente che corrispondono alle coordinate non omogenee $x, y, z, 1$ secondo le nostre convenzioni $(x\ x_u\ x_v\ x_{uv}) = (\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{uv})$ relative al caso $\varepsilon = 1$ di asintotiche reali.

B) Asintotiche appartenenti a complessi lineari.

Nella teoria delle curve avevamo scelto coordinate corrispondenti di punto x e di piano osculatore ξ in guisa che $(x\, dx\, d^2x\, d^3x) = (\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)$. Ora, se x descrive una superficie di cui ξ è il piano tangente, allora ξ è anche osculatore ad ogni asintotica; Čech ha fatto l'importante osservazione che *le coordinate* ξ *scelte con le nostre convenzioni per le superficie sono proprio le stesse, cui giungeremmo con le convenzioni relative alle asintotiche.* Infatti, se ci muoviamo su una asintotica $v = cost.$, e se ξ è il piano tangente alla superficie, allora per le equazioni fondamentali (I) e (II)

$$(\xi\ d\xi\ d^2\xi\ d^3\xi) = (\xi\ \xi_u\ \xi_{uu}\ \xi_{uuu})du^3 = (\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{uv})\beta^2 du^3 =$$

$$= (x\ x_u\ x_v\ x_{uv})\beta^2 du^3 = (x\ dx\ d^2x\ d^3x).$$

Dunque tutte le nostre formole relative alle curve si possono senz'altro applicare alle asintotiche. Così p. es. *le* v = cost. *apparteranno ad un complesso lineare se lungo* v = cost. *è* $\mathrm{S}d^3x d^3\xi = 0$, *ossia* $\mathrm{S}x_{uuu}\xi_{uuu} = 0$, *equazione che, tenuto conto delle equazioni fondamentali* I° e II°, *diventa l'equazione di Čech :*

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} = \beta\gamma. \tag{7}$$

Se $\gamma = 0$, e quindi le $u = cost.$ sono rette, allora questa equazione ci dice che β è prodotto di due funzioni, una della sola u, una della sola v.

La linea flecnodale $\beta = 0$ sarà perciò contemporaneamente definita da una equazione $v = cost.$, e perciò sarà un'asintotica, oppure una coppia di asintotiche (cfr. 16 B pag. 92), e quindi sarà una retta o una coppia di rette, direttrici della rigata. Ne segue, come del resto apparirà ancora più chiaro dal capitolo sulle rigate, che:

Le superficie rigate, per cui le asintotiche curve appartengono ad un complesso lineare, sono tutte e sole le rigate appartenenti ad una congruenza lineare a direttrici coincidenti o distinte, le quali sulla superficie esauriranno la linea flecnodale.

Si può poi dimostrare: *Tutte le asintotiche curve* (v = cost.) *di una di queste rigate sono* (proiettivamente) *identiche* (*).

Escludiamo ora il caso $\gamma = 0$ delle rigate; più tardi noi troveremo *le superficie qui cercate come tutte quelle che sono trasformate*

(*) Nel Capitolo dedicato alle rigate vedremo che, se $\gamma = 0$, si può supporre θ funzione della sola u, supporre $p_{22} = 0$, $\beta = U(av^2 + bv + c)$ con U, a, b, c funzioni della sola u; e infine $p_{11} = p - aUv$ con p funzione della sola u. Nel nostro caso potremo anzi supporre le a, b, c costanti e, mutando v in $v +$ cost. $\left(\text{oppure } \frac{1}{v}\right)$ supporre anche $c = 0$. Dalle equazioni fondamentali si trae che le x, y, z, t soddisfano tutte all'equazione $\varphi_{uu} - \theta_u \varphi_u - p\varphi = 0$, ove $\varphi = -\frac{1}{U}(x_{uu} - \theta_u x_u - [p + bU]x)$. Questa equaz. di quarto ordine nelle x, y, z, t ha coefficienti indipendenti dalla v, ed è perciò la stessa per tutte le asintotiche $v =$ cost.; le quali sono dunque proiettivamente identiche.

di una rigata mediante una congruenza W. Noi qui le determineremo per via puramente analitica. Dai valori di L_v, M_u dati dalle prime due condizioni d'integrabilità (pag. 95) si deduce per la (7):

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u^2} + U\,,\\
M &= -\,\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log\beta}{\partial v}\right)^2 + V\,,
\end{aligned}
$$

ove U è funzione della sola u, V della v. L'ultima condizione d'integrabilità dà poi:

$$
(9)\qquad \beta V' + 2V\beta_v = \gamma\,\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2}\right\} +
$$

$$
+\,2\gamma_u\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2}\right\} + \gamma_{uuu} + \gamma U' + 2\gamma_u U\,.
$$

Ora hanno, come sappiamo (pag. 96), significato *intrinseco*, sia

$$
\left[L - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial\log\beta}{\partial u}\right)^2\right]du^2
$$

che

$$
\left[M + \frac{\partial^2\log\beta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log\beta}{\partial v^2}\right)\right]dv^2
$$

cioè sia

$$
\left[-4\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial\log\beta}{\partial u}\right)^2 + \frac{8}{5}\,U\right]du^2 \quad \text{che} \quad V dv^2.
$$

Poichè anche $\beta\,\dfrac{du^2}{dv}$ è intrinseco, segue che possiamo cambiare i parametri u, v delle asintotiche in guisa che $U = 0$ e che V sia uguale a 0, oppure ad 1. Sostituendo questi valori di U, V e quello di γ dedotto da (7) nella (9), si trova un'equazione nella sola β, di cui è inutile occuparci, perchè, come dicemmo, affronteremo il problema per altra via.

C) Superficie di cui tutte le asintotiche appartengono a complessi lineari.

Supponiamo che tanto le $u = cost.$ che le $v = cost.$ appartengano a complessi lineari. Insieme alla (7) varrà la

$$\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} = \beta\gamma\,, \tag{10}$$

dalle quali si deduce $\dfrac{\partial^2 \log \dfrac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} = 0$. *Le superficie cercate sono dunque isotermo-asintotiche; con un cambiamento di parametri* u, v *si potrà perciò rendere* $\beta = \gamma$; e le (7), (10) *si ridurranno alla equazione di Liouville*

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = \beta^2, \tag{11}$$

di cui l'integrale generale è

$$\beta = \frac{\sqrt{U' V'}}{U + V}, \tag{12}$$

ove U è funzione della sola u, V della v.

Si avrà poi, come in B,

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u}\right)^2 + U_1\,, \\ M &= -\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial v}\right)^2 + V_1\,, \end{aligned} \tag{13}$$

con U_1 nuova funzione della sola u, V_1 della v. E le condizioni d'integrabilità danno $(\beta^2 V_1)_v = (\beta^2 U_1)_u$, cosicchè

$$\beta^2(V_1 du + U_1 dv) \text{ è un differenziale esatto } d\varphi.$$

Integrando si trova:

$$\varphi = -\frac{V' V_1}{U+V} + V_2 = -\frac{U' U_1}{U+V} + U_2\,,$$

dove U_2 è una nuova funzione della sola u, V_2 della v. Identificando i due valori di φ, si trova:

$$V_2 U - U_2 V + V_2 V - V_1 V' - U_2 U + U_1 U' = 0$$

che, derivata rispetto ad u ed a v, dà: $V_2' U' = U_2' V'$, cioè:

$$V_2 = kV + h\,, \qquad U_2 = kU + l \qquad (k\,, h\,, l = cost.)$$

che, sostituiti nella precedente, danno:

$$U_1 U' - kU^2 + (h-l)U = V_1 V' - kV^2 + (l-h)V.$$

Essendo i due membri uno funzione della sola u, l'altro della sola v, saranno una stessa costante p. E quindi:

$$(13)_{\text{bis}} \quad U_1 = \frac{kU^2 + (l-h)U + p}{U'}\,, \quad V_1 = \frac{kV^2 + (h-l)V + p}{U'}$$

$$(h\,, k\,, l\,, p = cost.)$$

Le (12), (13), $(13)_{\text{bis}}$ individuano le nostre superficie; *al variare delle costanti* h, k, l, p *non tutte essenziali, non varia* $\beta = \gamma$, *cioè non varia l'elemento lineare proiettivo; e perciò le superficie corrispondenti sono tutte proiettivamente applicabili tra di loro.*

Per $\mathrm{k} = \mathrm{p} = \mathrm{l} - \mathrm{h} = 0$ *si hanno le superficie di Tzitzeica-Wilczynski,* che ritroveremo più tardi per tutt'altra via; così pure soltanto più tardi studieremo le relazioni *tra i precedenti risultati, la teoria delle congruenze* W *che hanno una quadrica per falda focale, e le superficie a curvatura nulla negli spazi di curvatura costante.*

§ 19. — Le rette tangenti.

Accanto ai punti ed ai piani tangenti studiamo ora le rette tangenti. Siano $dv:du$ e $\delta v:\delta u$ i parametri corrispondenti a direzioni coniugate. Sarà:

$$\delta u = a_{12}\,du + a_{22}\,dv \qquad \delta v = -a_{11}\,du - a_{12}\,dv\,.$$

La retta congiungente i punti x e $\delta x = x_u\,\delta u + x_v\,\delta v$ coinciderà con la intersezione dei piani ξ e $d\xi = \xi_u\,du + \xi_v\,dv$; cosicchè, se λ è un fattore di proporzionalità, sarà $(\xi d\xi) = \lambda(x\,,dx)$, o, più precisamente:

$$(\xi\,\xi_u)du + (\xi\,\xi_v)dv = \lambda[(x\,x_u)\delta u + (x\,x_v)\delta v]$$

che, per evitare equivoci, scriveremo per disteso:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_u & \eta_u \end{vmatrix} du + \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix} dv = \lambda\left\{\begin{vmatrix} z & t \\ z_u & t_u \end{vmatrix} \delta u + \begin{vmatrix} z & t \\ z_v & t_v \end{vmatrix} \delta v\right\}$$

insieme alle analoghe ottenute con permutazione circolare di $\eta\,,\zeta\,,\tau$ nei primi membri, di $z\,,t\,,y$ nei secondi.

Moltiplicandole rispettivamente per $y_u\,,z_u\,,t_u$ e sommando si trova

$$-\lambda \begin{vmatrix} y & z & t \\ y_u & z_u & t_u \\ y_v & z_v & t_v \end{vmatrix} \delta v = \lambda\sqrt{|A|}\,\xi\delta v =$$

$$= \xi(y_u\eta_u + z_u\zeta_u + t_u\tau_u)du - \xi_u(\eta y_u + \zeta z_u + \tau t_u)du +$$

$$+ \xi(y_u\eta_v + z_u\zeta_v + t_u\tau_v)dv - \xi_v(\eta y_u + \zeta z_u + \tau t_u)dv$$

$$= \xi(-a_{11} - \xi_u x_u)du - \xi_u(-\xi x_u)du +$$

$$+ \xi(-a_{12} - x_u\xi_v)dv - \xi_v(-\xi x_u)dv$$

$$= \xi(-a_{11}\,du - a_{12}\,dv) = \xi\delta v\,.$$

Perciò $\lambda = \frac{1}{\sqrt{|A|}}$ e si hanno le equazioni del Fubini:

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} (\xi\eta_u - \eta\xi_u) = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}} \{-a_{11}(zt_v - tz_v) + a_{12}(zt_u - tz_u)\} \\[2ex] (\xi\eta_v - \eta\xi_v) = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}} \{-a_{12}(zt_v - tz_v) + a_{22}(zt_u - tz_u)\} \end{cases}$$

che sono equazioni analoghe a quelle che in geometria metrica danno le derivate dei coseni direttori della normale in funzione lineare delle derivate delle coordinate di punto.

Čech ha osservato che

$$d'u = du \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|A|}}\,\delta u\,, \quad d'v = dv \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|A|}}\,\delta v$$

soddisfano identicamente alla

$$a_{11}(d'u)^2 + 2a_{12}\,d'u\,d'v + a_{22}(d'v)^2 = 0$$

cosicchè, comunque siano state scelte le du, dv, il rapporto $d'u : d'v$ caratterizza le direzioni asintotiche. Le tangenti asintotiche sono dunque le rette

$$(x\,dx) \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|A|}}(x\,,\,\delta x) = (x\,,\,dx) \pm \sqrt{\varepsilon}\,(\xi\,,\,d\xi)\,,$$

comunque siano scelte le du, dv (Č).

§ 20. — Applicabilità proiettiva.

A) Il teorema fondamentale.

Siano date due superficie S, $\overline{S}$ in corrispondenza biunivoca, che noi rappresenteremo dando le coordinate x ed $\overline{x}$ dei loro punti come funzioni degli stessi parametri u, v. Noi, estendendo le definizioni del § 2, diremo col Fubini che:

Le superficie S, $\overline{\mathrm{S}}$ *si diranno proiettivamente applicabili se, per ogni coppia di punti omologhi* O, $\overline{\mathrm{O}}$ *esiste una collineazione* M *che porta* $\overline{\mathrm{S}}$ *in una superficie* S′, $\overline{\mathrm{O}}$ *nel punto* O *in guisa che curve omologhe tracciate su* S *ed* S′ *ed uscenti da* O *vi abbiano un contatto del secondo ordine.* (Se ciò avvenisse per una sola coppia di punti omologhi, le superficie sarebbero applicabili soltanto in essa). Notiamo:

1°) Se la M non variasse al variare di $O, \overline{O}$, le $S, \overline{S}$ sarebbero (proiettivamente) identiche, perchè M le porterebbe l'una nell'altra.

2°) Non si è parlato di contatti del *primo* ordine, perchè dalla corrispondenza biunivoca segue che i fasci di tangenti omologhe uscenti da due punti omologhi O, O' sono collineari; perciò una definizione che parlasse di *soli* contatti del primo ordine condurrebbe a chiamare proiettivamente applicabili due superficie qualunque in corrispondenza biunivoca.

3°) Il *contatto*, di cui abbiamo parlato, può essere *geometrico* od *analitico*. Questi due casi (di cui gli analoghi nella geometria metrica portano l'uno all'applicabilità *effettiva*, l'altro all'applicabilità o corrispondenza *conforme*) non sono distinti, come risulterà da quanto segue, nella geom. proiettiva.

Siano dunque S ed $\overline{S}$ due superficie proiettivamente applicabili nella coppia di punti omologhi x ed $\overline{x}$. Se con x' indico il trasformato di $\overline{x}$ mediante la collineazione M, allora

$$(x' \; x_u' \; x_v' \; d^2x') = \mu(\overline{x} \; \overline{x}_u \; \overline{x}_v \; d^2\overline{x}),$$

ove μ è il modulo di M. Avendo 2 curve omologhe di S ed S' uscenti da $O = O'$ un contatto del secondo ordine, varranno le equazioni $(8)_{ter}$ del § 3 dell'Introduz.; e perciò

$$(x \; x_u \; x_v \; d^2x) = \rho^4 (x' \; x_u' \; x_v' \; d^2x') = \mu\rho^4 (\overline{x} \; \overline{x}_u \; \overline{x}_v \; d^2\overline{x})$$

Perciò le forme F_2 ed $\overline{F}_2$ per le due superficie saranno in O, O' proporzionali, cioè in O, O' si corrisponderanno *le asintotiche*. Supponiamo *questa condizione soddisfatta in ogni coppia di punti omologhi;* le superficie S ed $\overline{S}$ avranno forme F_2 ed $\overline{F}_2$ proporzionali. E, moltiplicando le coordinate dei punti di $\overline{S}$ per un opportuno fattore, e trasformando, se necessario, la $\overline{S}$ con una collineazione a modulo negativo, potremo supporre che le forme F_2 ed $\overline{F}_2$ siano identiche.

Se $\overline{x}$, x sono una coppia di punti omologhi, potremo ancora supporre $x' = x$. Le relazioni che legano in tali punti le x'_u, x'_{uu}, ecc. alle x, x_{uu} ecc. date dalle $(8)_{ter}$ del § 3 dell'Introd. varranno anche (essendo $F_2 = F_2'$) quando alle derivate ordinarie si sostituiscono le covarianti; e allora, scritte le F_3, F_3' servendoci della $(9)_{bis}$ del § 12 concludiamo che $F_3 - F_3'$ è divisibile per F_2 e quindi, essendo apolare ad F_2, è identicamente nulla. Perciò $F_3 = F_3' = \overline{F}_3$; cioè *le due superficie avranno uguale elemento lineare proiettivo.* Ad ugual risultato si giungerebbe confrontando le equazioni fondamentali (I) per le x_{rs}, x'_{rs} e le equaz. citate che esprimono il contatto di curve omologhe.

Viceversa se F_2 ed $\overline{F}_2$ sono identiche e se in una coppia di punti omologhi è $F_3 = \overline{F}_3$, sarà in tale coppia di punti $(x\, x_u\, x_v\, X) = (\overline{x}\, \overline{x}_u\, \overline{x}_v\, \overline{X})$, perchè le forme F_2 ed $\overline{F}_2$ coincidono, e noi potremo con una collineaz. unimodulare trasformare $\overline{S}$ in una superficie S' tale che, per i valori considerati delle u, v, sia $x = x'$, $x_u = x_u'$, $x_v = x_v'$, $X = X'$, $F_3 = F_3'$. Dalle equazioni fondamentali si deduce che allora $x_{rs} - x'_{rs} = (p_{rs} - p'_{rs})x$, che cioè nei punti considerati le S, S' hanno il contatto voluto. Perciò: (F)

Condizione necessaria per l'applicabilità proiettiva di due superficie poste in corrispondenza biunivoca in una coppia di punti omologhi è che in questi si corrispondano le asintotiche. Se poi questa prima condizione è soddisfatta per ogni coppia di punti omologhi, condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva in una coppia di punti omologhi è che in questa coppia di punti le superficie abbiano uguale elemento lineare proiettivo $\mathrm{F}_3 : \mathrm{F}_2$, *o, ciò che è lo stesso, abbiano le stesse forme* φ_2, φ_3, *e differiscano soltanto per la forma* P (*o* Π *o* Q).

B) Una proprietà caratteristica di due superficie proiettivamente applicabili.

Due superficie S, $\overline{\mathrm{S}}$ *in corrispondenza biunivoca sono proiettivamente applicabili in una coppia di punti omologhi* A, $\overline{\mathrm{A}}$, *se i piani osculatori alle linee di* S *uscenti da* A, *e i piani osculatori* *alle linee omologhe di* $\overline{S}$ *uscenti da* $\overline{A}$ *formano due stelle collineari.* Ecco una semplice dimostrazione (F) di questo teorema di Čech.

In tale collineazione a piani passanti per una retta tangente in A ad S corrispondono piani passanti per la tangente omologa di $\overline{S}$. Usando coordinate non omogenee x, y, z nulle in A, potremo quindi trasformare $\overline{S}$ in una superficie S' passante per A in guisa che in A cioè in $x = y = z = 0$ sia

$$x' = y' = z' = 0 \qquad x_u = \sigma x_u' \qquad x_v = \sigma x_v' \qquad \text{(e analoghe in } y, z)$$

e che piani osculatori a curve omologhe delle S ed S' coincidano; con una conveniente omologia di centro A potrò rendere $\sigma = 1$; ma, poichè questa omologia lascia fermo ogni piano uscente da A, in particolare i piani osculatori citati, piani osculatori a curve omologhe uscenti da A continueranno ancora a coincidere. Cioè il piano per tre punti

$$x = 0\,, \quad x + dx\,, \quad x + dx + \frac{1}{2}\, d^2x$$

di S, cioè il piano per l'origine che contiene i punti $dx = dx'$ e d^2x dovrà contenere anche il piano d^2x'. E perciò sarà:

$$(1)\quad 0 = (dx\,, d^2x\,, d^2x' - d^2x) = (x_u\, x_v\, D_2x' - D_2x)(du\, d^2v - dv\, d^2u)$$
$$+ (dx\; D_2x\; D_2x')$$

ove è posto

$$D_2x = x_{uu}\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2 \text{ ed analoghe.}$$

Annullando i termini in d^2u, d^2v si trova

$$\Big[x_u\; x_v\; D_2(x' - x)\Big] = 0$$

cosicchè [essendo per le ipotesi fatte fin dal principio del libro $(x_u\, x_v) \neq 0$, perchè i punti singolari sono esclusi] sarà:

$$D_2x' - D_2x = \lambda x_u + \mu x_v \qquad \text{(e analoghe in } y, z),$$

ove λ, μ sono forme quadratiche in du, dv. La (1) diventa così:

$$0 = (dx, D_2x, \lambda x_u + \mu x_v) = (\lambda dv - \mu du)(x_v\, x_u\, D_2x).$$

Non potendo essere identicamente nullo il secondo fattore (perchè altrimenti in A la S avrebbe asintotiche indeterminate, caso da noi sempre escluso) sarà $\lambda dv - \mu du = 0$. Cioè

$$\frac{\lambda}{du} = \frac{\mu}{dv}$$

sarà una forma $\rho du + \sigma dv$ in du, dv. Si avrà pertanto

$$D_2x' = D_2x + (\rho du + \sigma dv)dx\ ;$$

formola che, per i risultati dell'introduzione, prova appunto che curve omologhe di S, S' uscenti da A vi hanno un contatto del secondo ordine. A questo teorema si può dare col prof. Bianchi il seguente enunciato:

Se S *ed* S' *sono superficie in corrispondenza biunivoca e, ad ogni sistema di curve di* S *uscenti da un punto fisso* O *di* S *coi piani osculatori formanti fascio corrispondono curve di* S' *uscenti dal punto omologo* O' *con piani osculatori ancora formanti fascio, le due superficie sono in* O, O' *proiettivamente applicabili.*

Escluso questo caso, allora, se tra S, S' si corrispondono le asintotiche, a nessuno dei precedenti sistemi di curve di S uscenti da O corrisponde un sistema analogo di curve su S'.

Se tra S, S' le asintotiche non si corrispondono, esiste una sola retta r uscente da O tale che alle curve di S, i cui piani osculatori in O contengono r, corrispondono curve di S', i cui piani osculatori in O' formano ancora un fascio. La r si può chiamare l'asse della corrispondenza tra S ed S' nel punto O.

C) Un'altra proprietà caratteristica delle superficie proiettivamente applicabili.

Se S *ed* $\overline{\mathrm{S}}$ *sono proiettivamente applicabili, ed* A, $\overline{\mathrm{A}}$ *è una coppia di punti omologhi, esiste una collineazione che porta* S *in una superficie* S' *dotata della seguente proprietà: Ogni striscia di* *elementi del primo ordine relativa alla superficie* S, *la quale contenga l'elemento formato da* A *e dal relativo piano tangente e la striscia omologa di* S' *hanno in* A *tre elementi successivi comuni* (Čech).

In altre parole, se in A *è* u=v=0, *gli sviluppi delle coordinate non omogenee* x, y, z, *e di* $\mathrm{p}=\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$, $\mathrm{q}=\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$ *secondo le potenze di* u, v *relativi ad* S *oppure ad* S' *hanno comuni i termini di grado inferiore al terzo.* Usiamo nella dim. coordinate *omogenee.*

Nelle nostre ipotesi si può supporre che S, $\overline{S}$ abbiano le stesse forme F_2, F_3. Potremo scegliere il tetraedro di riferimento, e trasformare $\overline{S}$ con una collineazione in una superficie S' in guisa che per $u=v=0$ i punti x, x' coincidano con $(0, 0, 0, 1)$, i punti x_u, x_u' con $(1, 0, 0, 0)$, i punti x_v, x_v' con $(0, 1, 0, 0)$, i punti X, X' con $(0, 0, 1, k)$.

Allora dalle equazioni fondamentali segue che

$$x=u+A+\ldots, \quad y=v+B+\ldots, \quad z=C+\ldots, \quad t=1+D+\ldots$$

ove A, B, C, D sono forme di secondo grado in u, v, di cui le prime tre *non* dipendono dalle p_{rs}, che sulle due superficie possono anche avere valori distinti; cosicchè per le x', y', z' varranno sviluppi del tipo:

$$x'=u+A+\ldots., \quad y'=v+B+\ldots., \quad z=C+\ldots.$$

mentre invece

$$t'=1+D'+\ldots.,$$

ove D' può essere una forma di secondo grado, distinta da D.

Dunque $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ hanno sviluppi in serie che, fino ai termini di secondo grado inclusi, coincidono con gli sviluppi di $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$. L'equazione del piano tangente è nelle notazioni di Monge $\frac{z}{t}=p\frac{x}{t}+q\frac{y}{t}$. Quindi le p, q coincidono con $-\xi:\zeta$ ed $-\eta:\zeta$, cioè, a meno del segno, sono

$$(y\,z\,t):(x\,y\,t), \quad \text{e} \quad (x, z, t):(x, y, t),$$

ove sia posto

$$(y\,z\,t) = \begin{vmatrix} y & z & t \\ y_u & z_u & t_u \\ y_v & z_v & t_v \end{vmatrix} \quad \text{ed analoghe.}$$

Anche gli sviluppi di p, q coincidono dunque, fino ai termini di secondo grado inclusi con quelli di p', q', come si era enunciato.

Ne segue anche facilmente che in A le S, S' hanno un contatto del terzo ordine, ma questa non è affatto una proprietà caratteristica.

CAPITOLO III.

GLI ELEMENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI

§ 21. — La quadrica di Lie.

A) Sua definizione.

Nella teoria delle curve sghembe è notevole specialmente il sistema nullo osculatore in un loro punto; di cui sono analoghi per le superficie i sistemi nulli osculatori alle due asintotiche uscenti da un punto di esse. Ma accanto a queste corrispondenze ve ne sono molte altre, notevoli per molte ragioni. Qui studieremo le più semplici. Se $\overline{x}$ è un punto fisso di una superficie S, e $\overline{\xi}$ è il corrispondente piano tangente, le coordinate di ogni altro punto x e piano ξ dello spazio ambiente si possono scrivere nella forma:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x'\overline{x} + y'\overline{x}_u + z'\overline{x}_v + t'\overline{X} \\ \xi = \xi'\overline{\xi} + \eta'\overline{\xi}_u + \zeta'\overline{\xi}_v + \tau'\overline{\Xi}. \end{cases}$$

Si noti che, mentre x', t', ξ', τ' hanno significato intrinseco, ciò non avviene per y', z' le quali si dovrebbero considerare come un sistema controvariante; altrettanto dicasi delle η', ζ'. La condizione $S\xi x$ di appartenenza di punto e piano diventa, indicando senz' altro con Ω, a_{ik} i valori delle Ω ed a_{ik} nel punto considerato:

$$(2)\qquad x'\tau' + \xi' t' + t'\tau'\Omega - \left[a_{11}\, y'\eta' + a_{12}(y'\zeta' + \eta' z') + a_{22}\, z'\zeta'\right] = 0$$

che si muta in sè stessa cambiando le x' (cioè x', y', z', t') nelle ξ'.

Quindi la *correlazione* definita dalle:

$$(3)\qquad \xi' = x',\quad \eta' = y',\quad \zeta' = z',\quad \tau' = t$$

non è che la polarità rispetto alla quadrica Q di equazione

$$(4)\qquad 2x't' + \Omega t'^2 - (a_{11}\, y'^2 + 2a_{12}\, y'z' + a_{22}\, z'^2) = 0.$$

La correlazione (3) ha carattere evidentemente intrinseco ed invariante per collineazioni [perchè non muta neanche se moltiplichiamo le coordinate dei punti di S per uno stesso fattore $\rho(u, v)$] (*); altrettanto avverrà di questa quadrica, che chiameremo la *quadrica di Lie* relativa al punto considerato $\bar{x}$ di S.

Proseguiremo per semplicità i calcoli con coordinate u, v asintotiche. Sarà $a_{11}=a_{22}=0$, $F_3=a_{12}(\beta du^3 + \gamma du^3)$, $\Omega=\frac{1}{a_{12}}\beta\gamma - K$, $K = -\frac{1}{a_{12}}\theta_{uv}$, $a_{12} = \pm e^\theta$, $X = \frac{1}{a_{12}} x_{uv}$; e l'equazione della quadrica sarà:

$$(4)_{\text{bis}}\qquad 2x't' - 2a_{12}\, y'z' + \left(\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K\right)t'^2 = 0.$$

B) Interpretazioni geometriche della forma φ_2 e dell'elemento lineare $\varphi_3 : \varphi_2$.

Per quanto non abbiano relazioni con gli ulteriori sviluppi di questo Capitolo, sarà bene dare almeno l'enunciato di alcuni dei teoremi trovati dal Bompiani (**). In un punto O di una super-

---

(*) Questo fatto intuitivo sarà verificato in *C)*.

(**) Atti della R. Accad. di Torino (Aprile 1924).

ficie S costruiamo la quadrica di Lie che assumiamo ad assoluto di una metrica di Cayley.

Se O′ *è infinitamente vicino ad* O *su* S, *il birapporto che serve a misurare la distanza da* O′ *al piano tangente in* O *su una trasversale generica uscente da* O′ *vale* $\frac{1}{3}\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$.

Se Q *è una quadrica che ha per generatrici le tangenti asintotiche in* O, *ed* O′, O″ *sono punti vicini ad* O *sulle due asintotiche uscenti da* O, *il birapporto che serve a definire la distanza* O′O″ *nella metrica definita da* Q *vale* $h\varphi_2 = 2h\beta\gamma\, du\, dv$, *ove* h *è una costante numerica* $\left(\frac{1}{18}\right.$ se Q è la quadrica di Lie$\left.\right)$.

Se da un punto generico si proiettano le rette OO′, OO″ *sul piano tangente, il birapporto di tali proiezioni e delle direzioni asintotiche vale* $\frac{1}{8}\varphi_2$.

Nella Mem. cit. si troveranno anche altri teoremi analoghi, che tutti danno svariati significati geometrici delle nostre forme. (Cfr. anche § 13 *B* e 23 *C*)

C) **Fascio delle quadriche di Darboux.**

Consideriamo le coordinate x', y', z', t' di un punto di S posto in un intorno di $\overline{x}$. Esse per $u = v = 0$ si riducono ad $1, 0, 0, 0$, le loro derivate x'_u, y'_u, ecc., le x'_v ecc. e le x'_{uv} ecc. si riducono rispettivamente ad $0, 1, 0, 0$, ad $0, 0, 1, 0$ ed infine a $0, 0, 0, a_{12}$. Per le equazioni differenziali fondamentali sarà, posto al solito $\theta = \log|a_{12}|$:

$$x' = 1 + \text{termini almeno di } 2^\circ \text{ grado in } u, v$$

$$y' = u + \frac{1}{2}(\theta_u u^2 + \gamma v^2) + \text{termini almeno di } 3^\circ \text{ grado}$$

$$z' = v + \frac{1}{2}(\theta_v v^2 + \beta u^2) + \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

$$t' = a_{12} uv + \frac{a_{12}}{6}(\beta u^3 + 3\theta_u u^2 v + 3\theta_v u v^2 + \gamma v^3) + \text{termini}$$

almeno di 4° grado.

Quindi

t'^2 si annulla per $u = v = 0$ del quart' ordine

$$\frac{1}{a_{12}}(x't' - a_{12}y'z') = \frac{-1}{3}(\beta u^3 + \gamma v^3) + \text{termini almeno di } 4^\circ \text{ grado}.$$

Perciò il fascio delle quadriche determinato dalla quadrica di Lie e dal piano tangente $t' = 0$ *contato due volte coincide col fascio di quadriche di Darboux. In altre parole la quadrica di Lie è una delle quadriche di Darboux.* (§ 11, *B*).

In questo fascio si possono anche determinare altre quadriche. A tal fine mutiamo le coordinate $\overline{x}$ di un punto di S, ponendo $\overline{x} = \rho(u, v)x^0$, ove ρ è un fattore di proporzionalità. Il nuovo valore a_{12}^0 di a_{12} è dato da $a_{12} = \rho^2 a_{12}^0$. Poniamo, analogamente alla (1)

$$x = x'' x^0 + y'' x_u^0 + z'' x_v^0 + t'' \frac{x_{uv}^0}{a_{12}^0}.$$

Sarà chiaramente:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \rho x' + \rho_u y' + \rho_v z' + \frac{\rho_{uv}}{\rho^2 a_{12}^0} t' \\ y'' &= \rho y' + \frac{t'}{\rho^2 a_{12}^0}\rho_v \\ z'' &= \rho z' + \frac{t'}{\rho^2 a_{12}^0}\rho_u \end{aligned} \right. \qquad t'' = \frac{1}{\rho} t'$$

da cui (indicata con K^0 la curvatura di $2a_{12}^0 du dv$) seguono le identità:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} K &= \frac{1}{\rho^2}K^0 - \frac{2}{a_{12}^0}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} \\ 2x''t'' - 2a_{12}^0 y''z'' &= 2x't' - 2a_{12}y'z' + \frac{2}{a_{12}}\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} t'^2 \end{aligned} \right.$$

da cui segue non soltanto che *la quadrica di Lie non è mutata* perchè il primo membro di $(4)_{\text{bis}}$ vale proprio

$$2x''t'' - 2a_{12}^0 y''z'' + \left(\frac{\beta\gamma}{a_{12}^0} - K^0\right)t''^2 = 0$$

ma anche più generalmente che la quadrica di Darboux

$$(7) \qquad 2x't' - 2a_{12}y'z' + t'^2\left(\mu\frac{\beta\gamma}{a_{12}^0} - K\right) = 0$$

ha per nuova equazione la perfettamente analoga

$$2x''t'' - 2a_{12}^0 y''z'' + t''^2\left(\mu\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K^0\right) = 0\,.$$

Perciò ogni quadrica di Darboux si può caratterizzare dando il valore del corrispondente parametro μ, che è sottoposto all'unica condizione di essere una *quantità intrinseca invariante*.

Per $\mu = 1$ si ha la quadrica di Lie.

Per $\mu = \infty$ il piano tangente contato due volte.

Per $\mu = -\dfrac{1}{\beta\gamma}\dfrac{\partial^2 \log\beta\gamma}{\partial u \partial v}$ si ha una quadrica che, quando si scelgano coordinate normali ($\beta\gamma = a_{12}$), ha l'equazione

$$(7)_{\text{bis}} \qquad x't' - a_{12}y'z' = 0 \qquad (a_{12} = \beta\gamma)\,,$$

e che diremo perciò la quadrica *normale*. Essa passa per il punto $x' = y' = z' = 0$, $t' = 1$, che in questo caso è il punto X *della normale proiettiva*.

Per $\mu = 0$ si ha una *quadrica*, che coincide con quella che Wilczynski trovò per altra via e chiamò *canonica*. La sua equazione è ancora $(7)_{\text{bis}}$ se sulla superficie sono adottate coordinate tali che $K = 0$ (p. es. le coordinate di Wilczynski).

Del resto, data una qualsiasi delle quadriche di Darboux, si può sempre scegliere il fattore ρ in modo che l'equazione della quadrica considerata sia proprio del tipo $(7)_{\text{bis}}$

$$x''t'' - a_{12}^0 y''z'' = 0\,;$$

contemporaneamente resta scelta una coppia di rette $x'' = t'' = 0$ ed $y'' = z'' = 0$ *polari reciproche* rispetto alle quadriche di Darboux. Comunque sia scelto ρ, i risultati precedenti dimostrano che i termini dello sviluppo in serie di $\frac{1}{a_{12}^0} x''t'' - y''z''$ si riducono a $-\frac{1}{3}(\beta u^3 + \gamma v^3)$ a meno di termini del quart'ordine, che cioè

$$\frac{1}{a_{12}^0}\left(\frac{t''}{x''} - a_{12}^0 \frac{y''z''}{x''}\right) + \frac{1}{3}\left\{\beta\left(\frac{y''}{x''}\right)^3 + \gamma\left(\frac{z''}{x''}\right)^3\right\}$$

è sempre infinitesimo del quarto ordine, che cioè tutte le varie superficie cubiche V_3 definite dalla:

$$t''x''^2 - a_{12}^0 y''z''x'' + \frac{a_{12}^0}{3}(\beta y''^3 + \gamma z''^3) = 0 \tag{8}$$

hanno un contatto del terz'ordine con la superficie data, e che, al variare di ρ, nello sviluppo di $\frac{1}{a_{12}^0}\frac{t''}{x''}$ in serie di potenze di $\frac{y''}{x''}$, $\frac{z''}{x''}$ variano soltanto i termini del quarto grado o di grado superiore. Perciò lo studio delle varie quadriche di Darboux si può illustrare con la considerazione delle varie superficie cubiche (8) che hanno con S un contatto del terz'ordine, o con l'esame delle varie coppie di rette (una uscente da $\bar{x}$, l'altra posta in $\bar{\xi}$) polari reciproche rispetto alle quadriche di Darboux, o con l'esame dei termini di quarto grado nello sviluppo in serie recentemente citato. Di tali studii si occuparono Green e Wilczynski studiando qualche caso particolare (*).

(*) *Nelle Trans. of the Amer. Math. Soc.* tomi 9 e 20. Per altri sviluppi in serie cfr. FUBINI *Annali di Mat.* Ser. 3, Tomo 25 (1916) pag. 229 e seg. Invarianti proiettivi-differenziali ecc.

D) La quadrica di Lie come iperboloide osculatore.

Da ogni punto di una asintotica $u = \text{cost.}$ tiriamo le tangenti all'asintotica $v = \text{cost}$, che esce da tale punto; altrettanto facciamo per ogni asintotica $v = \text{cost.}$ Otterremo così due sistemi di *rigate asintotiche* della superficie S; da ogni punto x di S escono due di tali rigate, una di ciascun sistema. Lasciando il soprassegno, una di tali rigate sarà il luogo dei punti $x'' = x + wx_u$, (*) ove la u si tenga costante, che sono perciò funzioni dei due parametri v, w. L'equazione $(x'' x_w'' x_v'' d^2x'')=0$ delle sue asintotiche è, tenuto conto delle equazioni fondamentali I per le x:

$$0 = dv\left(2\frac{dw}{w^2} - a_{12}\left[\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K\right]dv\right).$$

Un primo sistema di asintotiche è formato dalle generatrici, che sulla nostra rigata hanno per equazione $v = \text{cost.}$ Invece la tangente all'asintotica curva uscente dal punto $x'' = x + wx_u$ passerà per il punto:

$$x_v'' + x_w''\frac{dw}{dv} = x_v + wx_{uv} + \frac{a_{12}}{2}w^2 x_u\left(\frac{\beta\gamma}{a_{12}} - K\right).$$

Tale tangente è pertanto il luogo descritto dal punto

$$x\left\{1 + Zw\frac{a_{12}}{2}\left(K - \frac{\beta\gamma}{a_{12}}\right)\right\} + wx_u + Z(x_v + wx_{uv})$$

al variare del nuovo parametro Z. Il punto precedente ha, con le notazioni del § 21 *A*, le coordinate

$$x' = 1 + Zw\frac{a_{12}}{2}\left(K - \frac{\beta\gamma}{a_{12}}\right),\quad y' = w,\quad z' = Z,\quad t' = Zw$$

(*) Qui x'' ha tutt'altro significato che in § 21, *C*.

e pertanto, qualunque siano Z e w, giace sulla quadrica di Lie relativa al punto $\overline{x}$. Ora la rigata luogo delle tangenti alle asintotiche curve di una rigata R'' uscenti dai punti di una generatrice è, com'è ben noto, la rigata osculatrice alla R'' nei punti della generatrice considerata (che contiene 3 generatrici consecutive di R''). Quindi:

La quadrica di Lie relativa a un punto $\overline{\mathrm{x}}$ *è la quadrica osculatrice alle due rigate asintotiche della superficie considerata uscenti dal punto* $\overline{\mathrm{x}}$.

Un'altra dimostrazione di questo teorema sarà data al Cap. IV § 2 *B*.

§ 22. — La corrispondenza di Segre.

Diremo che un'equazione $v = \varphi(u)$ definisce una *linea* L della superficie data, cioè un sistema di ∞^1 punti della superficie e dei relativi piani tangenti. Tre consecutivi di questi punti definiscono un *piano osculatore* della L; così come dualmente diremo *punto di regresso* di L il punto intersezione di tre consecutivi dei precedenti ∞^1 piani. Un piano osculatore è quello dei tre punti

$$x\,,\quad dx = x_u\,du + x_v\,dv\,,\quad d^2x = x_u\,\delta^2 u + x_v\,\delta^2 v + \Sigma x_{rs}\,du_r\,du_s$$

ed è perciò il piano μ di coordinate

$$(1)\qquad \xi(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3) + 2\xi_u\,du^2 dv - 2\xi_v\,du\,dv^2,$$

mentre il corrispondente punto di regresso M è il punto

$$(2)\qquad x(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u - \beta du^3 + \gamma dv^3) + 2x_u\,du^2 dv - 2x_v\,du\,dv^2.$$

Ad ogni piano μ uscente da un punto $\overline{x}$ di S potremo far corrispondere il punto M di regresso per una linea a cui μ sia osculatore, cioè il punto d'incontro dei piani tangenti ad S in $\overline{x}$ e nei due punti consecutivi in cui μ incontra S.

Questa corrispondenza tra i punti (2) e i piani (1) è la *cor-*

rispondenza di Segre. Con le notazioni del § 21 essa è definita dalle:

$$x' = \xi'\eta'\zeta' + \beta\eta'^3 + \gamma\zeta'^3 , \quad y' = \eta'^2\zeta' , \quad z' = \zeta'\eta'^2 ,$$

che è una *corrispondenza birazionale cubica. Ai piani di un fascio (il cui asse* r *passi per il punto* $\overline{\mathrm{x}}$ *considerato) corrisponde nel piano* $\overline{\xi}$ *tangente in* $\overline{\mathrm{x}}$ *una cubica razionale tangente alle asintotiche, la cui retta dei flessi è la polare della* r *rispetto alla quadrica di Lie.*

A un piano corrisponde lo stesso punto nella polarità di Lie e nella corrispondenza di Segre soltanto se $\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0$, *cioè se il piano passa per una direzione di Segre!* (F).

Ecco una proprietà geometrica molto semplice di queste linee. Il Prof. Segre le aveva definite con un'altra proprietà:

Sia π *un piano tale che il corrispondente punto di regresso* P *sia stazionario* (cioè P sia intersez. dei piani tangenti ad S in 4 punti consecutivi dell'intersezione di S e di π). *L'inviluppo di tali piani* π *è un cono* (di Segre cfr. § 16 *E*) *di sesta classe che tocca il piano tangente nelle direzioni asintotiche e nelle direzioni di Darboux. Il punto* P *descrive una curva di* 6° *grado che nel punto* $\overline{\mathrm{x}}$ *tocca le asintotiche e le direzioni di Segre.* Noi ritroveremo questo risultato al § 24.

Tutte queste proprietà verranno approfondite meglio in un altro capitolo.

§ 23. — Geodetiche, e analoghi sistemi di curve.

A) Primi teoremi.

Le linee geodetiche nella metrica di cui F_2 è elemento lineare hanno per equazione $du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u = 0$. Più generalmente studiamo le linee che soddisfano ad *un' equazione del secondo ordine*

$$(1) \quad a_{12}(du\delta^2 v - dv\delta^2 u) = a_{12}(Bdu^3 - Cdv^3) + 2ha_{12}dudv(l_1 du - l_2 dv)$$

ove con h indichiamo una costante. La equazione (1) è intrinseca, se la forma data $a_{12}(Bdu^3 - Cdv^3)$ è intrinseca, e se tale è $l_1 du - l_2 dv$, in altre parole se la forma data al secondo membro di (1) è intrinseca: noi l'abbiamo decomposta in due addendi, uno apolare ad F_2, l'altro divisibile per F_2. Se io pongo $x = \rho\bar{x}$, e indico con $\bar{a}_{12}$, $\overline{\delta^2 u}$ ecc. i nuovi valori di a_{12}, $\delta^2 u$, ecc., si ha: $a_{12} = \rho^2 \bar{a}_{12}$, $\delta^2 u = \overline{\delta^2 u} + 2\frac{\rho_v}{\rho} du^2$, ecc. Se si vuole dunque che la (1) abbia un carattere invariante per collineazioni, bisogna far *la convenzione* che alla $x = \rho\bar{x}$, $a_{12} = \rho^2 \bar{a}_{12}$ corrispondano le $B = \bar{B}$, $\bar{C} = C$,

$$h\bar{l}_1 = hl_1 + \frac{\rho_u}{\rho} \qquad h\bar{l}_2 = hl_2 + \frac{\rho_v}{\rho}.$$

Se così è, diremo che la (1) è anche invariante. Dunque la (1) è intrinseca, se tale è il secondo membro; le (1) intrinseche anche invarianti sono definite da una forma $a_{12}(Bdu^3 - Cdv^3)$ che si trasformi come la F_3, e dai due punti $x_u + hl_1 x$, $x_v + hl_2 x$ delle tangenti asintotiche, o dalla retta che li congiunge che è posta sul piano tangente e che potremmo chiamare il *secondo asse* della (1).

Appare già di qui la *corrispondenza tra i differenziali* $\mathrm{h}(\mathrm{l}_1 \mathrm{du} - \mathrm{l}_2 \mathrm{du})$ *e le rette del piano tangente: corrispondenza tale che, al variare del parametro* h, *la retta corrispondente* (segnando due punteggiate proiettive [aventi il punto x comune] sulle due tangenti asintotiche) *descrive un fascio, cioè determina un punto* $\mathrm{l}_2 \mathrm{x}_u - \mathrm{l}_1 \mathrm{x}_v$ *del piano tangente.*

Chiameremo *primo asse* della (1) la retta polare del secondo asse rispetto alla quadrica di Lie, cioè l'intersezione dei piani $\xi_i + h\xi l_i$.

Il piano μ osculatore, e il punto M di regresso di una delle nostre linee sono il piano:

$$\xi \left[Bdu^3 - Cdv^3 + 2hdudv(l_1 du - l_2 dv) + \beta du^3 - \gamma dv^3 \right] + \\ + 2\xi_u du^2 dv - 2\xi_v du dv^2$$

e il punto

$$x \left[Bdu^3 - Cdv^3 + 2hdudv(l_1 du - l_2 dv) - \beta du^3 + \gamma dv^3 \right] + \\ + 2x_u du^2 dv - 2x_v du dv^2 .$$

Per ogni direzione $du:dv$ esce una delle nostre linee. Le precedenti formole dimostrano che al variare di $du:dv$

Tutte le linee soddisfacenti a (1) *uscenti da un punto* $\overline{\mathrm{x}}$ *della superficie hanno un punto di regresso che descrive una cubica razionale avente le asintotiche per tangenti nel punto doppio* $\overline{\mathrm{x}}$, *e il secondo asse della* (1) *per retta dei flessi; una proprietà duale vale per i piani osculatori. Al variare di* h *la retta dei flessi per la cubica e la retta cuspidale del cono duale descrivono due fasci polari rispetto alla quadrica di Lie.* (F.)

In particolare per le geodetiche $(\mathrm{B}=\mathrm{C}=\mathrm{l}_1=0)$ *la retta dei flessi è la retta* $(\xi\,,\,\Xi)$ *e la retta cuspidale è la retta* $(\mathrm{x}\,,\,\mathrm{X})$. *La retta cuspidale per le geodetiche proiettive* (quelle relative alla forma normale φ_2) *è proprio la normale proiettiva.* Ecco una relazione tra geodetiche e normale, che ricorda l'analoga, ma più semplice relazione tra geodetiche e normale nella geometria metrica! (F.)

La nostra cubica si riduce a una retta soltanto se

$$\mathrm{B}=\beta\,,\quad \mathrm{C}=\gamma\,;$$

il cono duale si riduce a un fascio (come avviene per le geodetiche della geometria metrica) *soltanto se* $\mathrm{B}+\beta=\mathrm{C}+\gamma=0$.

In generale si ha: *I piani osculatori alle tre curve soddisfacenti a* (1) *e tangenti alle direzioni definite da* $(\mathrm{B}+\beta)\mathrm{du}^3=(\mathrm{C}+\gamma)\mathrm{dv}^3$ *si incontrano in una stessa retta. In particolare* $(\mathrm{B}=\mathrm{C}=\mathrm{l}_1=0)$ *ciò avviene delle tre geodetiche relative alla forma* F_2 *tangenti ad una direzione di Segre* (C.) Teoremi duali valgono per i punti di regresso.

Siano S ed S' due superficie in corrispondenza biunivoca, i cui punti sono caratterizzati da uguali valori delle coordinate u, v. Siano O ed O' due punti omologhi. Le curve C' di S', uscenti da O', i cui piani osculatori in O' passano per una retta fissa uscente da O', soddisfano in O' ad una equazione del tipo (1). Altrettanto avverrà per le curve C omologhe uscenti da O su S; e quindi i piani osculatori a queste curve C inviluppperanno, come ha osservato esplicitamente il Castelnuovo, uno dei nostri coni di terza classe.

B) Terne apolari (*).

Siamo quindi condotti a studiare senz'altro quelle terne di curve *soddisfacenti ad* (1), *le cui direzioni formano una terna apolare alle asintotiche,* cioè quelle terne di curve, a cui corrispondono tre valori λ, $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$ di $du:dv$, ove $\varepsilon^3=1$. Supposto $h=1$, i tre piani osculatori saranno:

$$\xi(D+E\varepsilon^r+F\varepsilon^{2r})+2\lambda^2\varepsilon^{2r}\xi_u-2\lambda\varepsilon^r\xi_v$$

ove

$$D=(B+\beta)\lambda^3-(C+\gamma)\,,\quad E=-2\lambda l_2\,,\quad F=2l_1\lambda^2.$$

Ora i due piani $\xi_u-\rho\xi$ e $\xi_v-\sigma\xi$ individuano una retta uscente dal punto x della superficie considerata; e viceversa una retta uscente da x non posta sul piano tangente ξ determina due piani $\xi_u-\rho\xi$ e $\xi_v-\sigma\xi$. Queste quantità ρ e σ si potranno assumere pertanto a coordinate delle rette uscenti da x; esse diventano infinite per le rette poste sul piano ξ. In coordinate ρ, σ di retta i precedenti piani osculatori hanno per equazione

$$(D+E\varepsilon^r+F\varepsilon^{2r})+2\lambda^2\varepsilon^{2r}\rho-2\lambda\varepsilon^r\sigma=0.$$

E, se per un momento pensiamo ρ, σ come coordinate cartesiane in un piano ausiliario, queste equazioni determinano i lati di un triangolo avente per baricentro il punto $-\dfrac{F}{2\lambda^2}$, $\dfrac{E}{2\lambda}$. A questi valori di ρ, σ corrisponde la retta intersezione dei piani $\xi_u+l_1\xi$, $\xi_v+l_2\xi$. Perciò:

Tre curve soddisfacenti a (1), *uscenti da* $\overline{x}$ *con direzioni formanti una terna apolare* (alle asintotiche) *hanno piani osculatori che formano un triedro, rispetto al quale il piano tangente* ξ *ha per retta polare il primo asse della* (1). (F.)

(*) Qui e nel seguito sono sovente tacitamente escluse le superficie rigate ($\beta\gamma=0$).

Ecco una nuova proprietà geometrica di questa retta, a cui corrisponde una proprietà duale per il secondo asse.

Soltanto se $D = 0$ *i tre piani osculatori precedenti formano un fascio, il cui asse è proprio il primo asse della* (1). (F.)

C) Le coppie apolari e la conica di Wilczynski Interpretazione non euclidea della metrica proiettiva.

Recentemente (1923) il Wilczynski ha aggiunto ai precedenti risultati del Fubini una osservazione notevole. Consideriamo una coppia delle nostre curve con direzioni formanti una *coppia apolare*, cioè con direzioni coniugate, corrispondenti cioè ai valori $\pm\lambda$ di $du : dv$. Posto $\mu = \lambda^2$, i loro due punti di regresso determinano una retta, su cui giacciono evidentemente anche i punti (combinazione lineare dei precedenti) (*).

$$x\Big[(\beta - B)\mu + 2l_2\Big] + 2x_v\,, \qquad x\Big[(\gamma - C) + 2l_1\mu\Big] + 2\mu x_u.$$

Adottando a coordinate correnti di un punto $x'x + y'x_u + z'x_v$ del piano tangente proprio le x', y', z', *tale retta*, al variare di μ, *inviluppa la conica*

$$(x' - l_1 y' - l_2 z')^2 = (\beta - B)(\gamma - C)y'z'\,,$$

che tocca le tangenti asintotiche $y' = 0$ e $z' = 0$, *e rispetto alla quale il punto* $\overline{x}$ *considerato della nostra superficie ha per polare precisamente il secondo asse della* (1)! Ciò che dà una ulteriore proprietà di questa retta. Prendiamo ora sulla nostra superficie accanto al punto $\overline{x}$ il punto infinitamente vicino $\overline{x} + d\overline{x} = x + x_u du + x_v dv$, cioè accanto al punto $x' = 1$, $y' = z' = 0$ anche il punto 1, du, dv. La retta che li congiunge incontra la precedente conica nei punti soddisfacenti alla:

$$(x' - l_1 y' - l_2 z') : y' : z' = \pm\sqrt{(\beta - B)(\gamma - C)du dv} : du : dv\,.$$

(*) Indichiamo con x, o con $\overline{x}$ un medesimo punto della superficie.

Proiettiamo i due punti precedenti $(1, 0, 0)$ ed $(1, du, dv)$, e queste due intersezioni dal punto $x' - l_1 y' - l_2 z' = z' = 0$. Troveremo le quattro rette.

$$H(x' - l_1 y' - l_2 z') - z' = 0 ,$$

corrispondenti ai seguenti 4 valori di H:

$$H = 0 , \quad \frac{dv}{1 - l_1 du - l_2 dv} = dv , \quad \pm \frac{dv}{\sqrt{(\beta - B)(\gamma - C) du dv}} .$$

Perciò il birapporto di queste 4 rette, cioè dei precedenti 4 punti vale, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore:

$$1 + 2\sqrt{(\beta - B)(\gamma - C) du dv} .$$

Ora, assunta la precedente conica come assoluto di una metrica non euclidea, questo birapporto ha un logaritmo, che, a meno di un fattore numerico arbitrario, vale la distanza ds non enclidea di x, $x + dx$; per ds vale dunque la:

$$ds^2 = 2m(\beta - B)(\gamma - C) du dv$$

$$(m = \text{costante numerica arbitraria}).$$

Per $B = C = 0$ si ha la metrica (normale) del Fubini. Si ha quindi il teorema di Wilczynski:

Per le curve corrispondenti a valori arbitrarii di l_1, l_2, a_{12}, *p. es. per le geodetiche relative ad una qualsiasi forma* F_2 *avviene che, assunta la corrispondente conica come conica assoluto, la metrica non euclidea che ne viene definita coincide con la metrica proiettiva del Fubini; questa appare dunque come una metrica non euclidea ad assoluto variabile da punto a punto.* Questa interpretazione *della forma* $ds^2 = 2\beta\gamma du dv$ *è da porre accanto all'interpretazione che Čech ha dato per l'elemento lineare proiettivo.* (§ 13, B). Cfr. anche i teoremi di Bompiani (§ 21, B).

$D)$ **Curve di un fascio; l'asse della superficie.**

Un caso particolare di equazioni (1) è quella a cui soddisfano le curve di un fascio, cioè le curve per cui

$$(2) \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{du}{dv} = \text{cost.} \qquad (\lambda = \text{funzione di } u, v).$$

Differenziando (2) si trova che vale la (1), ove sia posto

$$B = C = 0, \quad h = 1, \quad l_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda a_{12}}{\partial u},$$

$$l_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log a_{12} : \lambda}{\partial v}.$$

Un tale sistema di curve sarà detto un *fascio* di curve.

Dunque anche per le curve di un fascio avviene che *i piani osculatori nel punto* $\overline{x}$ *della superficie* S *per quelle curve del fascio che escono da* $\overline{x}$ *inviluppano un cono di terza classe; la sua retta cuspidale* (intersezione dei tre piani cuspidali) *è la retta polare del piano tangente rispetto al triedro formato dai piani osculatori a* 3 *curve qualsiasi del fascio, le cui direzioni* $\lambda, \lambda\varepsilon, \lambda\varepsilon^2$ *formino una terna apolare.*

E questi tre piani osculatori passano proprio per tale retta cuspidale soltanto se $\beta\lambda^3 - \gamma = 0$, cioè se la terna di direzioni considerata è la terna delle direzioni di Segre. Per queste vale dunque il seg. teorema, molto analogo a quello precedentemente enunciato:

L'unica terna di curve di un fascio uscenti da un punto $\overline{x}$, *le cui direzioni formano una terna apolare, e i cui piani osculatori passano per una stessa retta è la terna corrispondente alle curve di Segre* (Č.)

Questa retta è poi la polare del piano tangente rispetto al triedro dei piani osculatori in $\overline{x}$ *ad un'altra terna qualsiasi di curve dello stesso fascio con direzioni formanti una terna apolare, p. es. alle tre curve di Darboux; e tale retta è anche la retta cuspidale del cono* *di terza classe inviluppato dai piani osculatori in* $\overline{\mathrm{x}}$ *alle curve di tale fascio; ed è anche polare del piano tangente rispetto al cono quadrico* (duale della conica di Wilczynski) *relativo al fascio considerato* (F).

Questa retta si dirà il *primo asse* della superficie in $\overline{x}$; la sua retta duale, posta sul piano tangente, si dirà il *secondo asse, che contiene i punti di regresso delle curve di Segre.*

Il primo asse (o, senz'altro, l'*asse*) *è l'intersezione dei piani*

$$(3) \qquad \begin{gathered} 2\xi_u - \left(\theta_u + \frac{1}{3}\frac{\gamma_u}{\gamma} - \frac{1}{3}\frac{\beta_u}{\beta}\right)\xi, \\ 2\xi_v - \left(\theta_v - \frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\gamma} + \frac{1}{3}\frac{\beta_v}{\beta}\right)\xi \end{gathered}$$

cioè la retta congiungente il punto x *al punto*

$$(4) \qquad \begin{gathered} 2x_{uv} + \left(\frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\gamma} - \frac{1}{3}\frac{\beta_v}{\beta} - \theta_v\right)x_u + \\ + \left(\frac{1}{3}\frac{\beta_u}{\beta} - \frac{1}{3}\frac{\gamma_u}{\gamma} - \theta_u\right)x_v \end{gathered}$$

I punti di regresso delle curve di Darboux (e dualmente i loro piani osculatori) godono di una proprietà assai meno semplice. Essi sono i punti

$$x\left\{\gamma + l_1\lambda^2\varepsilon^{2r} - l_2\lambda\varepsilon^r\right\} - x_u\lambda^2\varepsilon^{2r} - x_v\lambda\varepsilon^r$$

ove
$$\lambda^3 = -\gamma:\beta, \quad l_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log(\lambda a_{12}),$$

$$l_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log(a_{12}:\lambda).$$

Ogni conica del piano tangente che nel punto $\overline{\mathrm{x}}$ (cioè nel punto $x'=1$, $y'=z'=t'=0$) *tocca p. es. la tangente asintotica* $z'=0$ ha una equazione del tipo:

$$cy'^2 + 2gy'z' + 2fx'z' + hz'^2 = 0 .$$

Determinati c, g, f, h in guisa che *essa contenga i* 3 *punti di regresso citati,* si riconosce subito che *essa passa anche per il punto ove l'altra tangente asintotica incontra il secondo asse.* (Č).

§ 24. — Le pangeodetiche. Il fascio canonico.

Noi abbiamo studiato non solo le geodetiche proiettive, ma anche più generalmente le geodetiche per ogni forma F_2. Ora studieremo le estremali per l'integrale dell'*elemento lineare proiettivo* $F_3 : F_2$, che, come sappiamo, *è sempre uguale a* $\varphi_3 : \varphi_2$. Le chiameremo *pangeodetiche.*

Se noi annulliamo la variazione prima di $\int \frac{\varphi_3}{\varphi_2}$, troviamo:

$$2\left(\frac{\gamma_u}{u'} - \beta_v u'\right) + \left(\frac{\gamma_v}{u'^2} - \beta_u u'^2\right) = 2\,\frac{\beta u'^3 + \gamma}{u'^3}\,u''$$

$$\left(u' = \frac{du}{dv}\,,\ u'' = \frac{d^2u}{dv^2}\right)$$

che è la stessa equazione trovata al § 16 *E.* Questa equazione del Fubini è stata da Čech (§ 16 *E*, per le superficie ad asintotiche reali) scritta nella forma semplicissima:

$$(x\, dx\, d^2x\, d^3x) = (\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi).$$

Ricordando i risultati del § 5 se ne deduce l'osservazione dovuta pure al Čech:

Se due superficie hanno contatto del secondo ordine lungo una curva, questa, se è pangeodetica per una di esse, è pangeodetica anche per l'altra.

L'ultimo teorema del § 16 *E serve a dare una definizione geo-*

metrica delle pangeodetiche, perchè dà una proprietà caratteristica dei loro piani osculatori.

Il piano osculatore ad una pangeodetica, cioè il piano passante per x, $x_u u' + x_v$, $x_u u'' + x_{uu} u'^2 + 2x_{uv} u' + x_{vv}$, ove u'' è dato dalla precedente equazione, è il piano

$$w_2 \xi + w_0(2\xi_u - \theta_u \xi) + w_1(2\xi_v - \theta_v \xi),$$

ove:

$$w_2 = 2(\beta^2 du^6 - \gamma^2 dv^6) + (\beta_u du^4 - \gamma_v dv^4) du dv +$$

$$+ 2(\beta_v du^2 - \gamma_u dv^2) du^2 dv^2$$

$$w_0 = 2du^2 dv(\beta du^3 + \gamma dv^3); \qquad w_1 = -2du dv^2(\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

Posto $w_0 = \rho du$, $w_1 = -\rho dv$, sarà $-\rho^6 = 2w_0 w_1(\beta w_0^3 - \gamma w_1^3)$. Moltiplicando quindi per ρ^6 il valore di w_2, si trova:

$$0 = 2w_0 w_1 w_2 (\beta w_0^3 - \gamma w_1^3) + 2(\beta^2 w_0^6 - \gamma^2 w_1^6) - (\beta_u w_0^4 - \gamma_v w_1^4) w_0 w_1 +$$

$$+ 2w_0^2 w_1^2 (\beta_v w_0^2 - \gamma_u w_1^2).$$

Considerate le w_i come le coordinate di un piano uscente da $\overline{x}$, se ne deduce (cfr. l'ultimo teor. del § 22) che *l'inviluppo dei piani osculatori alle pangeodetiche uscenti da un punto coincide col cono di Segre ed è un cono Γ_6 di sesta classe, che tocca il piano tangente nelle 2 direzioni asintotiche e nelle 3 direzioni di Darboux* (F. e Č.) Al sistema lineare determinato da Γ_6 e dai due coni (degeneri) $w_0^6 = 0$, $w_1^6 = 0$ appartiene un solo cono spezzato nei fasci $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ dei piani passanti per una tangente asintotica e in un cono Γ_4 di quarta classe. L'equazione di Γ_4 si trova essere:

$$0 = 2w_2(\beta w_0^3 - \gamma w_1^3) + (\gamma_v w_1^4 - \beta_u w_0^4) + 2w_0 w_1(\beta_v w_0^2 - \gamma_u w_1^2).$$

Troviamo (Introd. § 4 *C*) le rette *principali* di questi due coni. Dobbiamo cercare, tra i coni del sistema lineare determinato da Γ_4 e dai fasci di piani aventi per sostegno una retta di Darboux, ciascuno contato quattro volte, quel cono che si spezza in questi tre fasci di piani, e in un quarto fascio, il cui sostegno sarà la retta principale di Γ_4. E uno studio analogo si farà poi per Γ_6.

Un facile calcolo dimostra che la retta *principale* di Γ_4 è

$$w_2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \log \gamma\beta^2}{\partial u} w_0 + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial v} w_1\right) = 0\,,$$

cioè è la retta d' intersezione dei piani

$$(1) \quad 2\xi_u + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \gamma\beta^2}{\partial u} - \theta_u\right)\xi\,, \quad 2\xi_v + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial v} - \theta_v\right)\xi\,,$$

cioè è la retta che congiunge x ad

$$(1)_{\text{bis}} \quad x_{uv} + \frac{1}{6}\left(-3\theta_u + \frac{\partial \log \gamma\beta^2}{\partial u}\right)x_v + \frac{1}{6}\left(-3\theta_v + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial v}\right)x_u\,.$$

Così la retta *principale* di Γ_6 è la retta intersezione dei piani

$$(2) \quad 4\xi_u + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \gamma^4\beta^5}{\partial u} - 2\theta_u\right)\xi\,, \quad 4\xi_v + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta^4\gamma^5}{\partial v} - 2\theta_v\right)\xi$$

che congiunge x al punto

$$(2)_{\text{bis}} \quad x_{uv} + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial \log \beta^4\gamma^5}{\partial v} - 6\theta_v\right)x_u + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial \log \gamma^4\beta^5}{\partial u} - 6\theta_u\right)x_v$$

da confrontare con le (2) e (3) del precedente § relative all'asse.

In coordinate *normali* ($\beta\gamma = a_{12}$) l'asse e le rette principali sono quelle che congiungono il punto x al punto:

$$(3) \quad \begin{cases} x_{uv} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\gamma_v}{\gamma} + 2\,\dfrac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\beta_u}{\beta} + 2\,\dfrac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v & \text{(asse) } (\breve{\mathrm{C}}.) \\[2ex] \left.\begin{array}{l} x_{uv} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\gamma_v}{\gamma} + 2\,\dfrac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\beta_u}{\beta} + 2\,\dfrac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v \\[2ex] x_{uv} - \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{\gamma_v}{\gamma} + 2\,\dfrac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{\beta_u}{\beta} + 2\,\dfrac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v \end{array}\right\} & \text{(rette } \textit{principali}\text{) (F.)} \end{cases}$$

Si noti che la retta congiungente x al punto

$$(3)_{\text{bis}} \qquad x_{uv} - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_v}{\gamma} + 2\,\frac{\beta_v}{\beta}\right)x_u - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta} + 2\,\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v \qquad \text{(F.)}$$

si può (F) definire come la retta *pseudoprincipale*, la quale è sostegno di un fascio di piani, che, insieme ai fasci di piani aventi per sostegno una retta di Darboux, formano un cono (degenere) appartenente al sistema lineare determinato da Γ_4 e dai fasci di piani aventi per sostegno una tangente asintotica, ciascuno contato 4 volte.

L'asse, le rette principali (3) e $(3)_{\text{bis}}$ *e la normale proiettiva appartengono ad uno stesso fascio; il fascio canonico*, in cui troveremo ben presto altre rette fondamentali per la teoria.

Così p. es. *la normale proiettiva si potrebbe definire come l'unica retta del fascio canonico, le cui sviluppabili corrispondono per una superficie generica ad un sistema coniugato.* Noi chiameremo *canoniche* tutte le rette congiungenti x ad

$$x_{uv} + \lambda\left(\frac{\gamma_v}{\gamma} + 2\,\frac{\beta_v}{\beta}\right)x_u + \lambda\left(\frac{\beta_u}{\beta} + 2\,\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v,$$

ove λ *ha un valore numerico* $\left(\lambda = -\frac{1}{3}\right.$ per l'asse, $\lambda = -\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{12}, -\frac{1}{2}$ per le rette principali, $\lambda = 0$ per la normale proiettiva$\left.\right)$.

§ 25. — Congruenze di rette (*).

A) Sviluppabili e fuochi.

Abbiamo già visto al § 23 che a un differenziale $l_1 du - l_2 dv$ corrisponde una coppia di rette duali: la retta r' congiungente i punti $x_u + l_1 x$, $x_v + l_2 x$, intersezione dei piani ξ e $\xi_{uv} + l_1 \xi_v +$

(*) Oltre ai primi studii del Fubini negli Atti della R. Accad. di Torino (1918) si devono ricordare le posteriori, ma importanti ricerche del Green.

$+ l_2 \xi_u$, e la retta r duale, intersezione dei piani $\xi_u + l_1 \xi$, $\xi_v + l_2 \xi$ congiungente i punti x ed $x_{uv} + l_1 x_v + l_2 x_u$.

Noi preferiremo considerare queste due rette come *definite dal differenziale coniugato* $l_1 du + l_2 dv$, convenendo che ad una trasformazione $x = \rho \bar{x}$ corrisponda la $\bar{l}_i = l_i + \frac{\rho_i}{\rho}$ per $i = 1, 2$. Sovente scriveremo $l = l_2$, $l_1 = m$.

Al variare di u, v la retta r descrive una congruenza K, la r' una congruenza K', che diremo congruenze *duali*. Cerchiamo i fuochi della retta r della congruenza K. Se $x + R(x_{uv} + lx_u + mx_v)$ ne è un fuoco, devono potersi trovare $du : dv$ e due parametri λ, μ in guisa che:

$$dx + Rd(x_{uv} + lx_u + mx_v) = \lambda x + \mu(x_{uv} + lx_u + mx_v).$$

Tenuto conto delle equazioni fondamentali I, il primo membro si potrà scrivere nella forma $Ax_u + Bx_v + Cx_{uv} + Dx$; sarà $D = \lambda$, $C = \mu$, $B = \mu m$, $A = \mu l$, cioè dovrà essere $B = mC$, $A = lC$.

Ora si trova:

$$C = R(d\theta + ldv + mdu),$$

$$A = du + R\left[(\beta\gamma + \theta_{uv})du + dl + l\theta_u du + m\gamma dv + \pi_{22} dv\right],$$

e una formola analoga per B. Eliminando dalle $B - mC = A - lC = 0$ la R, si giunge *all'equazione delle sviluppabili di* K:

$$(1)\quad 0 = \left(\pi_{11} + \frac{\partial m}{\partial u} - m\theta_u + l\beta - m^2\right)du^2 + (m_v - l_u)dudv +$$

$$+ (-\pi_{22} - l_v + l\theta_v - m\gamma + l^2)dv^2.$$

Incidentalmente voglio osservare che *alla terza forma fondamentale* $\pi_{11} du^2 + \pi_{22} dv^2$ di una superficie si poteva giungere anche studiando tale equazione (1) p. es. per $l = m = 0$.

Eliminando invece $du : dv$ e ponendo $R = \rho : a_{12}$ (cosicchè ρ avrà significato intrinseco) si giunge all'equazione che determina i fuochi

$$(2)\quad \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left[2\frac{\beta\gamma}{a_{12}} + \frac{2}{a_{12}}\theta_{uv} + \frac{1}{a_{12}}(l_u + m_v - 2lm)\right] + \ldots = 0.$$

L'equazione delle *sviluppabili* di K' *si otterrà da* (1) *cambiando* β, γ *in* $-\beta, -\gamma$ *e* π_{11} *in* p_{11}. Ricordo che:

$$(3)\quad \begin{cases} \pi_{11} = \frac{1}{2}(q_{11} + \beta_v + \beta\theta_v) & p_{11} = \frac{1}{2}(q_{11} - \beta_v - \beta\theta_v) \\ \pi_{22} = \frac{1}{2}(q_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u) & p_{22} = \frac{1}{2}(q_{22} - \gamma_u - \gamma\theta_u) \end{cases}$$

Se $a_{12} = \beta\gamma$, ed $l = m = 0$, cioè se r è la normale proiettiva, i valori di $\frac{1}{\rho}$ diconsi le curvature (proiettive), i valori di ρ i raggi proiettivi di curvatura, perchè nella metrica proiettiva sono le distanze dai fuochi di una normale proiettiva al suo piede. La (2) dimostra che:

La semicurvatura proiettiva media $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ *vale la curvatura della forma* φ_2 *diminuita di* 1; teorema che ricorda l'analogo di Gauss per la curvatura totale di una superficie nella geometria metrica. (F.)

I centri di curvatura e i punti x, X si dividono armonicamente se φ_2 ha la curvatura $+1$, cioè *se la quadrica di Lie e la quadrica normale coincidono.* (Č.)

Una congruenza $K(K')$ si dirà *coniugata (armonica)* alla superficie, se le sue sviluppabili corrispondono a un sistema *coniugato* di questa, o sono indeterminate. Basta osservare la (1) per concludere:

Quando la congruenza K *è coniugata alla superficie, la* K' *è armonica; ciò che avviene soltanto quando* $l dv + m du$ *è un differenziale esatto; nel qual caso,* con una trasformazione di coordinate $x = \rho\bar{x}$, *si può renderlo identicamente nullo,* donde segue:

La più generale congruenza K *coniugata alla superficie è quella delle rette congiungenti* x *a* $(\rho x)_{uv}$ *ossia a* $\Delta_2(\rho x)$.

Ricordando qual'è il modo più semplice per determinare un ρ (§ 15 *D*) ne deduciamo (F.):

La più semplice congruenza K *coniugata alla superficie e determinata in modo intrinseco invariante è quella delle normali proiettive.* Teoremi duali si hanno per K'.

B) Le direttrici di Wilczynski.

Ci chiediamo: *Quando si corrispondono le sviluppabili di* K, K′?

Caso 1°) $l_u \neq m_v$; le sviluppabili non sono indeterminate, nè corrispondono a un sistema coniugato. In tal caso dovrà essere:

$$\pi_{11} + l\beta = p_{11} - l\beta \qquad \pi_{22} + m\gamma = p_{22} - m\gamma$$

ossia per le (3), se $\beta\gamma \neq 0$:

$$(4) \qquad l = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta a_{12}}{\partial v} \qquad m = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \gamma a_{12}}{\partial u}.$$

La retta canonica per $\lambda = -\frac{1}{2}$, *già trovata al* § 24 *coincide con la retta* r *qui determinata.*

La retta r corrispondente si dirà *direttrice*, o *prima direttrice*, la r' *seconda direttrice*; la loro scoperta è dovuta a Wilczynski, che le ha definite come *le direttrici della congruenza comune ai complessi lineari osculatori delle due asintotiche* (*). Per dimostrarne questa loro proprietà basterà dimostrare che *esse sono il luogo dei punti che hanno lo stesso piano polare in questi due complessi.* Ora noi sappiamo (§ 18 *B*) che, considerate le ξ come coordinate del piano osculatore ad una asintotica, esse seguono le nostre convenzioni relative alle curve; e perciò nel sistema nullo osculatore ad una asintotica $v =$ cost. al punto

$$x_{uu} - \theta_u x_u - \frac{1}{2} q_{11} x \text{ corrisponde il piano } \xi_{uu} - \theta_u \xi_u - \frac{1}{2} q_{11} \xi$$

(*) Bompiani ne ha scoperto la seguente proprietà. Demoulin ha dimostrato che le quadriche di Lie hanno un inviluppo che tocca la quadrica di Lie relativa a un punto P della superficie, oltre che in P, in 4 punti vertici di un quadrangolo, di cui quattro lati appartengono alla quadrica di Lie, e i due rimanenti sono reciproci rispetto ad essa. *Una direttrice di Wilczynski si può definire come la retta uscente da* P *che si appoggia a questi due lati.*

cioè, per le equazioni fondamentali I, al punto A

$$\beta x_v + \left(p_{11} - \frac{1}{2} q_{11}\right)x = \beta x_v - \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v)x$$

corrisponde il piano

$$-\left[\beta\xi_v - \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v)\xi\right],$$

i quali evidentemente si corrispondono anche nel sistema nullo osculatore dell'altra asintotica u=cost. Altrettanto dicasi del punto B di coordinate $\gamma x_u - \frac{1}{2}(\gamma_u + \gamma\theta_u)x$ e del piano corrispondente. La retta AB, che è precisamente *la seconda direttrice sopra definita, ha dunque nei due sistemi nulli la stessa retta polare, che è precisamente la prima direttrice, duale di AB, cioè polare di AB anche rispetto alla quadrica di Lie. Dalla teoria delle superficie rigate seguirà poi che* A *e* B *sono i coniugati armonici del punto considerato* $\overline{\mathrm{x}}$ *della superficie* S *rispetto ai punti flecnodali delle corrispondenti generatrici delle rigate asintotiche uscenti da* $\overline{\mathrm{x}}$; ciò che dà un *quarto* modo per definire la retta AB. (Ricorderò qui che Wilczynski ha anche studiato i complessi lineari osculatori alle rigate asintotiche).

1ª Oss. Se la superficie iniziale è rigata, p. es. $\beta = 0$, *per tutte le congruenze* K , K' *definite, scegliendo* l *ad arbitrio e ponendo*

$$\mathrm{m} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \gamma \mathrm{a}_{12}}{\partial \mathrm{u}}$$

avviene che alle sviluppabili di K *corrispondono le sviluppabili di* K'.

2ª Oss. Non si esclude che i valori (4) soddisfino alla $l_u = m_v$. Si vede subito che ciò avviene ossia che *le congruenze delle direttrici sono coniugate od armoniche alla superficie soltanto se questa è isotermo asintotica* $\left(\frac{\partial^2 \log\beta : \gamma}{\partial \mathrm{u}\partial \mathrm{v}} = 0\right)$.

C) Congruenze *K* coniugate e *K'* armoniche ad *S*, tra cui si corrispondono le sviluppabili.

Rispondiamo ora alla domanda postaci in *B)* nel caso di congruenze armoniche coniugate ad S, cioè nel caso $l_u = m_v$. Le sviluppabili si corrispondono se, posto $l = -\dfrac{\partial \log\Phi}{\partial v}$, $m = -\dfrac{\partial \log\Phi}{\partial u}$, è:

$$\frac{\beta\Phi_v - \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v)\Phi}{\Phi_{uu} - \theta_u\Phi_u - \frac{1}{2}q_{11}\Phi} = \frac{\gamma\Phi_u - \frac{1}{2}(\gamma_u + \gamma\theta_u)\Phi}{\Phi_{vv} - \theta_v\Phi_v - \frac{1}{2}q_{22}\Phi}.$$

Oppure, essendo $l_u = m_v$, potremmo, cambiando il fattore di proporzionalità delle x, rendere, come già sappiamo, $l = m = 0$. La nostra condizione diventa allora semplicemente: $\pi_{11} : p_{11} = \pi_{22} : p_{22}$ equivalente alla $p_{11} : q_{11} = p_{22} : q_{22}$ [cfr. le (3)].

Una semplice proprietà geometrica di queste congruenze si trova, ponendoci con Čech la seguente domanda: *Quando mai si può scegliere sulla retta* r *in* ∞^1 *modi un punto* P *ed in corrispondenza il piano* π *che lo proietta da* r′, *in guisa che al variare di* r *il punto* P *descriva una superficie* S′, *di cui* π *è il piano tangente?*

Se con x' e ξ' indico, per brevità, le coordinate di P, π, dovrà essere:

$$S\xi' x' = S\xi' x_u' = S\xi' x_v' = 0.$$

Per ipotesi esistono due parametri ρ, σ tali che:

$$x' = x_{uv} + lx_u + mx_v + \rho x, \qquad \xi' = \xi_{uv} + l\xi_u + m\xi_v + \sigma\xi.$$

Sostituendo nelle precedenti e trascurando i termini che non dipendono nè da ρ, nè da σ, si trova:

$$\rho = -\sigma + \ldots \quad \rho_u = (\theta_u + 2m)\rho + \ldots \quad \rho_v = (\theta_v + 2l)\rho + \ldots$$

Per l'ipotesi fatta *la posizione iniziale di* P *è arbitraria, perchè alle congruenze* K, K′ *corrispondono* ∞^1 *superficie* S′. Le condizioni d'integrabilità delle precedenti equazioni in ρ devono pertanto essere identicamente soddisfatte. *Ciò dà* $l_u = m_v$, *provando che le congruenze* K, K′ *devono essere coniugate alla superficie* S; e, variando il solito fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee, potremo supporre $l = m = 0$, e quindi:

$$x' = x_{uv} + \rho x \qquad \xi' = \xi_{uv} + \xi\sigma.$$

E quindi

$$x_u' - \theta_u x' = Ex_u + Fx_v + \left(\beta p_{22} + \frac{\partial p_{11}}{\partial v} + \rho_u - \rho\theta_u\right)x,$$

ove non ci interessano i valori di E, F. La $S\xi' x' = 0$ determina $\sigma + \rho$; la $S\xi' x_u' = 0$ diventa, per le precedenti:

$$\rho_u = \rho\theta_u - \frac{\partial p_{11}}{\partial v} - \beta p_{22}.$$

E la $S\xi' x_v' = 0$ dà analogamente:

$$\rho_v = \rho\theta_v - \frac{\partial p_{22}}{\partial u} - \gamma p_{11}.$$

La condizione d'integrabilità è:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p_{11v} + \beta p_{22}}{a_{12}}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p_{22u} + \gamma p_{11}}{a_{12}}\right)$$

che, in virtù della ultima delle (12) § 16, diventa:

$$p_{22}(\beta_v + \beta\theta_v) = p_{11}(\gamma_u + \gamma\theta_u),$$

che equivale alle precedenti $p_{11} : \pi_{11} = p_{22} : \pi_{22}$ in virtù delle (3).

Alla domanda sopra postaci *soddisfano perciò tutte e sole le congruenze* K, K′ *armoniche ad* S, *su cui si corrispondono le sviluppabili.*

D) Le superficie a curvatura — 2.

Possiamo chiederci con Čech anche *quando mai si può in* ∞^1 *modi scegliere su* r′ *un punto* P *il quale generi una superficie* Σ, *a cui sia tangente il piano* π *che da* P *proietta* r. Se P è il punto

$$x' = \lambda(x_u + mx) + \mu(x_v + lx),$$

il piano π è

$$\xi' = \lambda(\xi_u + m\xi) - \mu(\xi_v + l\xi).$$

La condizione $S\xi' dx' = 0$ dà, posto $\rho = \lambda : \mu$

$$\rho_u = \beta\rho^2 - (2m + \theta_u)\rho \qquad \rho_v = -\gamma + (2l + \theta_v)\rho.$$

La condizione d'integrabilità, che deve essere soddisfatta identicamente in ρ, dà:

$$2l = -\frac{\beta_v}{\beta} - \theta_v \qquad 2m = -\frac{\gamma_u}{\gamma} - \theta_u$$

$$l_u + m_v + (\beta\gamma + \theta_{uv}) = 0\,.$$

Dalle prime due si trae: *Le congruenze cercate sono quelle delle direttrici di Wilczynski.* E l'ultima dà poi, sostituendovi i valori trovati delle l, m, l'equaz. di Liouville:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log\beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma = 0.$$

Si trova così che, cambiando i parametri delle u, v si può porre $\beta\gamma = (u + v)^{-2}$; si trova poi dalle equaz. precedenti:

$$\frac{\gamma}{\rho} = \frac{k - u}{k + v}\,\frac{1}{u + v}, \quad \beta\rho = \frac{k + v}{k - u}\,\frac{1}{u + v} \quad (k = \text{cost.})$$

cioè: *Le superficie* S *per cui esistono due congruenze duali* K, K′ *del tipo richiesto sono quelle, per cui la curvatura della forma* φ_2 *vale* -2; *e per queste superficie le congruenze* K, K′ *sono quelle delle direttrici di Wilczynski. La* S *ed ogni* Σ, *come è facile riconoscere, sono falde focali di una congruenza* C. Infatti, posto $\mu = 1$, $\lambda = \rho$, il calcolo effettivo dimostra che $x'_v - \rho x'_u$ è combinazione lineare di x e di $\rho x_u + x_v$, cioè di x ed x', precisamente come avviene di $\rho x_u + x_v = x' - (\rho m + l)x$.

Quelle delle precedenti superficie che sono isotermo-asintotiche (per cui cioè si può supporre $\beta = \gamma$) *sono tutte e sole le superficie, di cui le asintotiche appartengono a complessi lineari.* (§ 18 C). In tal caso la C è congruenza W.

E) **Le congruenze a sviluppabili indeterminate.**

Vogliamo verificare col calcolo diretto che le congruenze K a sviluppabili indeterminate sono quelle, le cui rette escono da un punto fisso, insieme al teorema duale per K'. Se le sviluppabili di K sono indeterminate, è $l_u = m_v$ ed esiste una funzione Φ tale che $-d\log\Phi = mdu + ldv$.

Esprimendo che (1) è un'identità si trova:

$$\Phi_{uu} = \theta_u \Phi_u - \beta\Phi_v + \pi_{11}\Phi\,, \qquad \Phi_{vv} = \theta_v \Phi_v - \gamma\Phi_u + \pi_{22}\Phi$$

Perciò Φ è una combinazione lineare $b\xi + c\eta + e\zeta + f\tau$ delle coordinate di piano tangente con $b\,,c\,,e\,,f =$ cost.; la retta r generica della congruenza K è l'intersezione dei piani $\xi' = \xi\Phi_v - \Phi\xi_v$, $\xi'' = \xi\Phi_u - \Phi\xi_u$. È evidente che questi due piani passano per il punto fisso $(b\,,c\,,e\,,f)$, per cui passano dunque tutte le rette di K.

Se, come in casi analoghi, avessimo cambiato coordinate omogenee in guisa che $l = m = 0$, cioè $\Phi = 1$, la (1) sarebbe riuscita un'identità se $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$. Cambiando tetraedro di riferimento, avremmo potuto rendere la quarta coordinata τ del piano tangente uguale ad 1; la retta r, intersezione di ξ_u, ξ_v sarebbe passata sempre per il punto $x = y = z = 0$. Ci chiediamo ora: *Quando avviene che le sviluppabili sia di* K *che di* K' *sono indeterminate?* In tal caso si possono (essendo $mdu + ldv$ un differenziale esatto) scegliere le coordinate omogenee di punto in guisa che $l = m = 0$. Le sviluppabili saranno indeterminate se $p_{11} = p_{22} = \pi_{11} = \pi_{22} = 0$. L'essere $p_{11} = p_{22} = 0$ significa che, cambiando il tetraedro di riferimento, si può rendere p. es. la $t = 1$, in modo che le $x\,,y\,,z$ siano coordinate *non omogenee*. Essendo $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$ le coordinate di piano tangente devono soddisfare ad una equazione lineare a coefficienti costanti:

$$h\xi + k\eta + r\zeta + \tau = \text{cost.}, \quad (h\,,k\,,r = \text{cost.})$$

(Cfr. più sotto). Scritta l'equazione del piano tangente nella forma:

$$\xi(x-h) + \eta(y-k) + \zeta(z-r) + (\tau + h\xi + k\eta + \zeta r) = 0$$

se ne deduce che, con una traslazione di assi ed una similitudine, tale piano acquista l'equazione

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 1 ;$$

le nostre superficie (come si vede interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali) *sono dunque quelle, i cui piani tangenti hanno la distanza* $\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$ *dall'origine, ossia* (§ 18 A) essendo ξ, η, ζ di Lelieuvre, *sono quelle per cui tale distanza vale* $\sqrt[4]{-\frac{1}{K}}$, *ove* K *qui indica la curvatura totale di Gauss* (o almeno si riducono a queste superficie con un cambiamento di assi coordinati).

Si potrebbe anche dire che *le nostre superficie sono quelle, a cui,* secondo le nostre convenzioni, *a coordinate non omogenee* ($t = 1$) *di punto corrispondono coordinate non omogenee di piano.*

Noi abbiamo scritto poco fa la relazione lineare che lega le ξ, η, ζ, τ (in virtù delle $\pi_{ii} = 0$) nella forma $h\xi + k\eta + r\zeta + \tau = \text{cost.}$ Ciò è lecito, escluso il caso che tale equazione abbia la forma $h\xi + k\eta + r\zeta = \text{cost.}$, e non contenga τ. In questo caso, cambiando assi, posso ridurre p. es. $\xi = 1$, pure conservando $t = 1$. La congruenza K luogo delle rette (ξ_u, ξ_v) appare (quando il piano $t = 0$ si consideri come piano all'∞) come la congruenza delle rette parallele all'asse delle x, e la congruenza K' come la congruenza delle rette all'infinito. *Questo è dunque il caso particolare che si presenta quando il punto comune alle rette di* K *giace nel piano stesso, a cui appartengono le rette di* K'.

Si noti ancora che dalle $\pi_{ii} = p_{ii} = 0$ segue $\beta\theta_v + \beta_v = \gamma\theta_u + \gamma_u = 0$; *la retta* r *che genera* K *è la retta che unisce* x *ad* x_{uv}, *che, per tali condizioni, è la direttrice.* Partendo da questo fatto studieremo di nuovo queste superficie al § 28.

§ 26. — Lo spigolo *(edge)* di Green.

Cerchiamo il polo B di una tangente asintotica (x, x_v) in un punto x della nostra superficie rispetto alla conica osculatrice dell'altra asintotica $v = \text{cost.}$ nella sola ipotesi $\beta \neq 0$. Secondo le convenzioni del Cap. I°, a forma cubica F_3 dell'asintotica $v = \text{cost.}$

posso assumere la forma

$$\frac{1}{2} S(x_u \xi_{uu} - \xi_u x_{uu}) du^3 = \beta a_{12} du^3,$$

e come coordinate t della sua retta tangente le

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{a_{12}\beta}} (x, x_u).$$

Dal § 7 D si deduce che il polo della retta $t_u + \frac{4}{3}\sigma t$ rispetto alla conica osculatrice della $dv = 0$ è il punto $x_u + \sigma x$. Posto $\sigma = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial u}\log(a_{12}^2 : \beta)$, se ne deduce che *il polo della retta* (x, x_v), *cioè della tangente all'asintotica* u = cost., *è il punto* B

$$(1) \qquad x_u - \frac{1}{4}\frac{\partial \log a_{12}^2 : \beta}{\partial u} x.$$

Il punto B si può anche *definire come il polo della retta* (x x_v) *rispetto alla conica osculatrice della proiezione dell'asintotica* v = cost. *fatta sul piano tangente* ξ *da un punto qualsiasi* V *del piano*

$$(2) \qquad \xi_u - \frac{1}{4}\frac{\partial \log a_{12}^2 : \beta}{\partial u} \xi,$$

che è il piano polare di B *sia nella polarità di Lie, che in quella definita dal sistema nullo osculatore alla* v = cost. (Č.)

Analogamente, se $\gamma \neq 0$, definiamo un punto A sulla tangente asintotica (x, x_u). La retta AB si dirà *il secondo spigolo, la retta duale il primo spigolo, o senz'altro lo spigolo.*

Ne segue: *I punti* A, B *ove il secondo spigolo taglia le tangenti asintotiche sono coniugati rispetto ai due coni quadrici osculatori alle asintotiche (nel punto* x *considerato sulla superficie* S) *i quali abbiano il vertice* V *sul primo spigolo.*

Consideriamo una retta del piano tangente ξ passante per il punto B, e la retta duale congiungente x ad $x_{uv} + lx_u -$

$-\frac{1}{4}\frac{\partial \log a_{12}^2 : \beta}{\partial u} x_v$ (dove l è per ora arbitrario). Scrivendo la condizione che i coefficienti di du^2 nelle equazioni delle sviluppabili di K, K' coincidano, troviamo $l\beta + \frac{1}{2}(\beta_v + \beta\theta_v) = 0$. Quindi:

Se $\beta \neq 0$, la retta r congiungente x ad

$$x_{uv} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log(\beta a_{12}) x_u - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial u}\log(a_{12}^2 : \beta) x_v \tag{3}$$

gode delle proprietà dello spigolo per ciò che riguarda la asintotica v=cost.; *l'involuzione di direzioni di cui una coppia corrisponde alle sviluppabili della congruenza* K *luogo di* r, *e un'altra coppia alle sviluppabili della congruenza duale* K' *ha per raggio doppio la tangente all'asintotica* v = cost.

Nel caso $\gamma = 0$ Sullivan era giunto a questa retta studiando i complessi osculatori alla superficie rigata data; e Green l'aveva per le rigate (cioè appunto nel caso $\gamma = 0$) sostituita alla direttrice del Wilczynski. Green, dopo il Fubini, ma in modo indipendente, era poi giunto al concetto di normale proiettiva cercando una retta del fascio determinato dall'asse e dalla direttrice, la quale generasse una congruenza coniugata alla superficie data; con questo metodo però, come già abbiamo osservato, non si *riconosce la necessità* della definizione da noi posta per la normale proiettiva.

§ 27. — Il fascio canonico.

Le rette (§ 24, 25 *B* e 26) *congiungenti* x *ad*

$$x_{uv} + \lambda\left(\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} x_v\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \frac{\beta\gamma}{a_{12}}}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log \frac{\beta\gamma}{a_{12}}}{\partial u}\right),$$

[di cui l'ultimo termine si annulla in coordinate normali] *descri-*

vono il fascio canonico. Precisamente per

$\lambda = 0$ *si ha la normale proiettiva,* (F.)

$\lambda = -\frac{1}{2}$ *si ha la direttrice,* (di Wilczynski) (Cfr. anche § 24)(F.)

$\lambda = -\frac{1}{4}$ *si ha lo spigolo,* (di Green)

$\lambda = -\frac{1}{3}$ *si ha l'asse,* (di Čech) (*)

$\lambda = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}$ *si hanno le rette principali,* (F.)

$\lambda = \infty$ *si ha la tangente canonica della data superficie,* (F.)

$\lambda =$ *costante numerica* si ha *una retta canonica.*

Tutte queste rette formano, a 4 a 4, birapporti soltanto numerici. Così p. es. la retta coniugata armonica della tangente canonica rispetto alla normale proiettiva e alla direttrice è lo spigolo; la coniugata della tangente canonica rispetto alla normale proiettiva e all'asse è una delle rette principali; la coniugata della tangente canonica rispetto alla normale e alla precedente retta principale è l'altra retta principale. Lo spigolo e la direttrice dividono armonicamente la normale e l'asse.

Solo le rette normali descrivono per qualunque superficie una congruenza coniugata alla superficie; un'altra delle precedenti gode

---

(*) Le rette congiungenti x ad

$$x_{uv} + \sqrt[3]{\beta\gamma^2}\, x_u + \sqrt[3]{\beta^2\gamma}\, x_v - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\, x_u - \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\, x_v\right),$$

dove i $\sqrt[3]{\ }$ sono scelti in modo che il loro prodotto sia $\beta\gamma$, sono (Bompiani) intersezione dei piani osculatori a due linee di Darboux e del piano osculatore ad una linea di Segre.

della stessa proprietà soltanto se la superficie è isotermo asintotica, nel qual caso la congruenza generata da una qualsiasi retta canonica è coniugata alla superficie.

Quando mai le rette canoniche coincidono tutte tra loro? Evidentemente soltanto se

$$\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} = 0,$$

cioè se le linee di Darboux sono geodetiche per l'elemento lineare $2\beta\gamma du dv$ (Bompiani).

Cambiando i parametri u, v delle asintotiche potrò allora rendere $\beta = \gamma = 1$; e le coordinate normali ($a_{12} = \beta\gamma = 1$) soddisferanno alle:

$$x_{uu} = x_v + xp_{11} \qquad x_{vv} = x_u + xp_{22}.$$

La condizioni d'integrabilità danno tosto:

$$p_{11} = cu + h \qquad p_{22} = cv + k \qquad (c\,, h\,, k = \text{cost.})$$

Le superficie di coincidenza (per cui cioè coincidono le rette canoniche) *sono le superficie, i cui punti soddisfano a equazioni del tipo:*

$$(1) \qquad x_{uu} = x_v + x(cu + h)\,, \qquad x_{vv} = x_u + x(cu + k).$$

$$(c\,, h\,, k = \text{cost.})$$

e sono tutte tra di loro proiettivamente applicabili (perchè hanno gli stessi valori di β, γ). Queste equazioni si integrano immediatamente nel caso $c = 0$.

In tal caso, posto $x = Ae^{mu+nv}$ (A, m, n = cost.), si trova:

$$m^2 = n + h\,, \quad n^2 = m + k\,, \qquad \text{ossia } (m^2 - h)^2 = m + k.$$

Se m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sono le 4 radici di questa equazione (supposte distinte), ed n_i i corrispondenti valori della n, a coordinate dei punti della nostra superficie potremo addottare le:

$$(2) \qquad x = e^{m_1u+n_1v},\ y = e^{m_2u+n_2v},\ z = e^{m_3u+n_3v},\ t = e^{m_4u+n_4v}.$$

Determinando le costanti r_i con le equazioni $\Sigma m_i r_i = \Sigma n_i r_i = \Sigma r_i = 0$, troviamo che l'*equazione delle nostre superficie è l'equazione omogenea di grado zero*

$$(3) \qquad x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3} t^{r_4} = \text{cost}.$$

Se $h = k = 0$, si ha $m_i = 0, 1, \alpha, \alpha^2$ ed $n_i = 0, 1, \alpha^2, \alpha$ con $\alpha^3 = 1$, e la superficie si riduce alla $yzt = x^3$. *Tutte le altre superficie di coincidenza sono dunque proiettivamente applicabili su questa.*

Lasciamo al lettore l'esame del caso che non tutte le m_i siano distinte. Viceversa *ogni superficie* (3) *è una superficie di coincidenza* (per cui $c = 0$). Infatti, posto $t = 1$, l'equazione (3) diventa del tipo: $z = x^r y^s$; per una tale superficie l'equazione delle asintotiche è

$$r(r-1)y^2dx^2 + 2rsxydxdy + s(s-1)x^2dy^2 = 0.$$

Se α, β sono le radici costanti di questa, considerata come un'equazione nell'incognita $\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y}$, si riconosce che le equazioni delle asintotiche sono

$$u = \log x - \alpha \log y = \text{cost.} \qquad , \qquad v = \log x - \beta \log y = \text{cost.}$$

e che perciò $\log x$, $\log y$, $\log z$ sono lineari nelle u, v, mentre $\log t = 0$.

Essendo $t = 1$, sarà $p_{11} = p_{22} = 0$. E, per calcolare β, basterà ricordare le due equaz. (nelle θ_u, β, riguardate come incognite) $x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v$, $y_{uu} = \theta_u y_u + \beta y_v$, per dedurne che $\beta = \text{cost}$. Similmente si prova $\gamma = \text{cost.}$, come si voleva.

Queste ultime superficie godono di un'altra notevolissima proprietà. Consideriamo una collineazione $x' = k_1 x$, $y' = k_2 y$, $z' = k_3 z$, $t' = k_4 t$ con $k_i = \text{cost}$. Sia S una superficie ed S' la sua trasformata per tale collineazione. Se S ed S' sono le falde focali di una congruenza, di cui u e v sono le sviluppabili, varranno delle equazioni del tipo:

$$x_u = \lambda x + \mu x' \qquad x'_v = \rho x + \sigma x',$$

ossia:

$$x_u = (\lambda + \mu k_1)x \quad , \quad x_v = \left(\sigma + \frac{\rho}{k_1}\right)x$$

e analoghe in y, z, t.

Moltiplicando x, y, z, t per uno stesso fattore posso rendere $\lambda = 0$. Sarà allora:

$$\frac{\partial^2 \log x}{\partial u \partial v} = k_1 \mu_v = \sigma_u + \frac{\rho_u}{k_1} \qquad \text{(e analoghe per } y, z, t\text{)}.$$

Dunque

$$(4) \qquad k_i \mu_v - \sigma_u - \frac{\rho_u}{k_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ma, se la collineazione non si riduce ad una identità, vi saranno almeno due delle k_i distinte tra di loro. Dalle corrispondenti equazioni (4) si deduce che i rapporti $\mu_v : \sigma_u : \rho_u$ sono costanti.

Potremo dunque porre $\mu = m\varphi_u$, $\sigma = s\varphi_v$, $\rho = r\varphi_v$ con m, s, r costanti e φ funzione di u, v. Sarà così:

$$x_u = k_1 m \varphi_u x \qquad x_v = \left(s + \frac{r}{k_1}\right)\varphi_v x$$

e quindi

$$k_1 m \varphi_{uv} = \left(s + \frac{r}{k_1}\right)\varphi_{uv}$$

che deve valere anche per k_2, k_3, k_4. Se $\varphi_{uv} \neq 0$, allora $k_1 m = s + \frac{r}{k_1}$. E quindi sia x, che y, z, t sarebbero, a meno di fattori costanti, uguali ad e^φ; e il punto $(x\,y\,z\,t)$ sarebbe fermo. Dunque $\varphi_{uv} = 0$, $\varphi = U + V$ con U funzione della sola u, V della v; ed è

$$x = h_1 e^{Uk_1 m + \left(s + \frac{r}{k_1}\right)V} \qquad (h_1 = \text{cost.})$$

insieme all'analoghe per y, z, t. E, se le r_i sono costanti tali che

$$\Sigma r_i = \Sigma k_i r_i = \Sigma r_i \left(s + \frac{r}{k_i}\right) = 0,$$

la nostra superficie ha l'equazione del tipo $x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3} t^{r_4} = \text{cost.}$, *cioè è una superficie di coincidenza con* $c = 0$ (su cui però le attuali u, v segnano un sistema coniugato). *Tali superficie sono dunque caratterizzate dal fatto di essere prima falda focale di una congruenza* W, *la cui seconda falda le è collineare in una proiettività di tipo generico.*

§ 28. — Le superficie per cui una retta canonica passa per un punto fisso, e superficie duali.

A) Caso delle normali proiettive.

Studiamo quando le *seconde* normali giacciono in un piano fisso e perciò generano una congruenza a sviluppabili indeterminate. In coordinate *normali* ciò avverrà se $p_{11} = p_{22} = 0$, se cioè le coordinate *normali* sono anche *coordinate non omogenee*, cioè quando, calcolato l'invariante I in coordinate *non omogenee*, si trova $I = \text{cost.}$; *questa condizione*, per $z = f(x, y)$, *equivale ad una equazione alle derivate parziali del terzo ordine per* z. *Il piano fisso su cui giacciono le seconde normali* (*aventi i punti* x_u, x_v) *risulta poi il piano* $t = 0$ *all'infinito.* Un teorema duale vale per le superficie, le cui *prime normali* passano per un punto fisso (l'analogo proiettivo delle *sfere*). (Č.)

B) Formole generali.

Studiamo una retta canonica qualsiasi con $\lambda \neq 0, \infty$. Perchè la *prima* retta considerata passi per un punto fisso, e quindi generi una congruenza a sviluppabili indeterminate, la superficie dovrà essere isotermo-asintotica; e noi potremo supporre $\beta = \gamma$. Scegliamo coordinate *non omogenee* di piano tangente ($\pi_{11} = \pi_{22} = 0$). La retta considerata è quella che congiunge x ad

$$x_{uv} - \frac{H_v}{H} x_u - \frac{H_u}{H} x_v . \qquad \left(H = \sqrt{a_{12}}\, \beta^{-3\lambda-1}\right)$$

Scrivendo che le sviluppabili sono indeterminate, si trova:

$$H_{uu} = \theta_u H_u - \beta H_v \qquad H_{vv} = \theta_v H_v - \beta H_u .$$

Ora

$$a_{12} = H^2 \beta^{2(1+3\lambda)} , \qquad \theta = \log a_{12} = 2 \log H + 2(1 + 3\lambda) \log \beta$$

E quindi (§ 16 D):

$$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta_u^2 + \beta\theta_v + \beta_v = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[\log \beta^{2(1+3\lambda)}\right] -$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\log \beta^{2(1+3\lambda)}\right] \right\}^2 + \beta \frac{\partial}{\partial v} \log \beta^{2(1+3\lambda)} + \beta_v .$$

Una formola analoga vale per M.

Possiamo ora cambiare coordinate omogenee in guisa che:

$$(1) \quad a_{12} = \beta^{2(1+3\lambda)} \qquad \theta = 2(1 + 3\lambda) \log \beta \qquad \text{e quindi } H = 1.$$

Dal confronto dei valori precedenti di L, M con quelli validi in generale risulta che sarà $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$, come precedentemente. Potremo perciò supporre contemporaneamente $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$, $H = 1$. Sarà poi:

$$(2) \quad p_{11} = \pi_{11} - \beta\theta_v - \beta_v = -3(1 + 2\lambda)\beta_v ; \quad p_{22} = -3(1 + 2\lambda)\beta_u .$$

Varranno così le:

$$(3) \quad \begin{cases} x_{uu} = -(k + 1) \dfrac{\beta_u}{\beta} x_u + \beta x_v + k\beta_v x , \\[2ex] x_{vv} = \beta x_u - (k + 1) \dfrac{\beta_v}{\beta} x_v + k\beta_u x , \\[2ex] \text{ove:} \qquad k = -3(1 + 2\lambda) \qquad 2(1 + 3\lambda) = -k - 1. \end{cases}$$

Essendo $H = 1$, la nostra retta canonica è semplicemente la retta congiungente x ad x_{uv}. Con una collineaz. unimodulare a coefficienti costanti, che non muta i valori delle p, π, potremo portare il punto fisso per cui passa tale retta nel punto $x = y = z = 0$.

Varrà pertanto una equazione

(4) $x_{uv} + \mu x = 0$ (per $x = x, y, z$, **non** per $x = t$).

Scrivendo che (3), (4) formano un sistema integrabile, si trova:

$$
(5) \quad \begin{cases}
\mu = (k+1)\dfrac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} - \beta^2 = -(\theta_{uv} + \beta\gamma) \\[2ex]
\mu_u + (k+1)\mu\dfrac{\beta_u}{\beta} + k(\beta_{vv} + \beta\beta_u) = 0 \\[2ex]
\mu_v + (k+1)\mu\dfrac{\beta_v}{\beta} + k(\beta_{uu} + \beta\beta_v) = 0.
\end{cases}
$$

Sostituendo nelle ultime due il valore di β dato dalla prima, si trovano due equazioni alle derivate parziali per β.

C) **Il caso $1 + k = 0$ (per l'asse).** (Č.)

Le (5) diventano semplicemente

(6) $$\beta_{uu} + 3\beta\beta_v = \beta_{vv} + 3\beta\beta_u = 0.$$

Gli assi passano per il punto fisso O di coordinate $x=y=z=0$; cioè tutti i piani osculatori ad ogni linea di Segre passano per O. *Si tratta delle superficie di Čech a linee di Segre piane.* Le (3), (4) diventano

(7) $x_{uu} = \beta x_v - \beta_v x \quad x_{vv} = \beta x_u - \beta_u x$ (per $x = x, y, z, t$)

(8) $x_{uv} = \beta^2 x$ (per $x = x, y, z$, **non** per $x = t$).

Una prima soluzione di (6) è

(I) $$\beta = \text{cost.}$$

Altre soluzioni si trovano supponendo che β sia funzione della sola $w = au + bv$ con $a, b = \text{cost.}$

Le (6) danno $a^2\beta_{ww} + 3b\beta\beta_w = b^2\beta_{ww} + 3a\beta\beta_w = 0$ donde $a^3 = b^3$;

perciò potremo supporre, se $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$, che w valga $\varepsilon^{2i} v + \varepsilon^i u$ con $i = 0, 1, 2$ e $\beta_{ww} + 3\beta\beta_w = 0$, ossia $\beta_w + \frac{3}{2}\beta^2 = \text{cost.}$, donde:

$$\text{(II)} \qquad \beta = \frac{2}{3}\frac{1}{w+a} \quad (a = \text{cost.})$$

oppure
$$\beta = \frac{2}{3}\alpha \operatorname{cotg}(\alpha w + a) \quad (\alpha, a = \text{cost.})$$

Esclusi questi tipi più semplici, passiamo al caso generale. Dalle (6), sottraendo, si deduce:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{3}{2}\beta^2\right) = 0.$$

Similmente, se $\varepsilon^3 = 1$, si trova:

$$\left(\varepsilon^i \frac{\partial}{\partial u} - \varepsilon^{2i}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\varepsilon^i \beta_u + \varepsilon^{2i}\beta_v - \frac{3}{2}\beta^2\right) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Posto $w_0 = u + v$, $w_1 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$, $w_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$, se ne deduce che:

$$\varepsilon^i \beta_u + \varepsilon^{2i}\beta_v - \frac{3}{2}\beta^2 = F_i'(w_i) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

ove F_i è una funzione della sola w_i. Sommando, dopo aver moltiplicato per 1, o per ε^i, o per ε^{2i}, si deduce:

$$-\frac{9}{2}\beta^2 = \sum_i F_i'(w_i)$$

$$3\beta_v = \sum_i \varepsilon^i F'(w_i)$$

$$3\beta_u = \sum_i \varepsilon^{2i} F'(w_i).$$

Dunque, scegliendo opportunamente le costanti additive in F, si avrà:

$$\text{(A)} \qquad -\frac{9}{2}\beta^2 = \Sigma F_i'(w_i) \qquad 3\beta = \sum_i F_i(w_i).$$

La

$$\beta_u + \beta_v - \frac{3}{2}\beta^2 = F_0'(w_0)$$

dà, derivando successivamente, e ricordando i valori di β_{uu}, β_{vv}:

$$\beta_{uv} - 3\beta(\beta_u + \beta_v) = F_0''(w_0), \text{ ecc.},$$

donde si trae:

$$F_0'''' + 6F_0'F_0'' = 0. \quad \text{(Ugual formola si trova per } F_1 \text{ ed } F_2).$$

Per ognuna delle F vale perciò la

$$F_i''' + 3F_i'^2 = \text{cost.} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{2}F_i''^2 + F_i'^3 = c_i w_i + d_i \quad (c_i, d_i = \text{cost.})$$

donde

$$\text{(B)} \qquad F_i' = -2p_{(i)}(w_i + \alpha_i)$$

$$\left[\text{oppure } -2\alpha_i^2 \operatorname{cotg}(\alpha_i x + \beta_i) - \frac{4\alpha_i^2}{3} \text{ oppure } \frac{-2}{(x+\alpha)^2} \text{ oppure } \alpha_i\right]$$

ove α_i, β_i sono costanti, e la $p_{(i)}$ è una funzione ellittica p di Weierstrass a periodi qualsiasi. Ma dalle (A) si deduce:

$$-9\beta\beta_u = \Sigma\varepsilon^{2i}F_i''(w_i) = -3\beta\,.\,3\beta_u = \Sigma F_i(w_i)\,\Sigma\varepsilon^{2i}F_i'(w_i)$$

$$-9\beta\beta_v = \Sigma\varepsilon^{i}F_i''(w_i) = -3\beta\,.\,3\beta_v = \Sigma F_i(w_i)\,\Sigma\varepsilon^{i}F_i'(w_i)$$

donde, eliminando F_0'' oppure F_1'', si trae:

$$\text{(C)} \qquad \frac{F_1''(w_1) - F_2''(w_2)}{F_1'(w_1) - F_2'(w_2)} = F_0(w_0) + F_1(w_1) + F_2(w_2) =$$

$$= \frac{F_0''(w_0) - F_2''(w_2)}{F_0'(w_0) - F_2'(w_2)}$$

eccetto il caso che due delle F_i' siano una stessa costante, e quindi β sia funzione di una sola delle w_i: caso che abbiamo già esaurito. Dal confronto dei primi due membri si trae che, se p. es. diamo da u, v tali incrementi che w_1 aumenti di un periodo ω_1 di F_1' e w_2 resti immutato, allora w_0 aumenta di un periodo di F_0'; e, poichè in tal caso w_0 aumenta di $-\omega_1$, deduciamo che i periodi di F_1' sono periodi anche di F_0'. Si prova poi che le F' hanno tutte e tre gli stessi periodi, ripetendo più volte tale ragionamento. In conclusione troviamo per le (B) che:

$$F_i' = -2p(w_i + a_i) \quad \text{oppure} \quad F_i' = -2\alpha^2 \operatorname{cotg}^2\left[\alpha(w_i + a_i)\right] - \frac{4\alpha^2}{3}$$

$$\text{oppure} \qquad F_i' = -\frac{2}{(w_i + a_i)^2} \quad \text{insieme alle } (A),$$

ove le a_i sono costanti, la p è una (sola) funzione p di Weierstrass a periodi qualsiasi, α è una costante.

Senza fare una discussione completa, del resto facilissima, si trova che:

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} &\beta = \frac{2}{3}\left[\zeta(w_0 + a_0) + \zeta(w_1 + a_1) + \zeta(w_2 + a_2)\right] \\ &\text{oppure} \quad \beta = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{w_0 + \alpha_0} + \frac{1}{w_1 + \alpha_1} + \frac{1}{w_2 + \alpha_2}\right] \\ &\text{oppure} \quad \beta = \frac{2}{3}\alpha\left[\operatorname{cotg}\alpha(w_0 + a_0) + \operatorname{cotg}\alpha(w_1 + a_1) + \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left. + \operatorname{cotg}\alpha(w_2 + a_2)\right] \\ &(\alpha,\ a_i = \text{cost.};\ \Sigma a_i = 0;\ \zeta = \text{funzione } \zeta \text{ di Weierstrass}). \end{aligned} \right.$$

Si è così determinata la β; cioè sono *determinate completamente le forme fondamentali della nostra superficie.* Si può anche determinare la superficie in termini finiti, dando le coordinate di un suo punto in modo esplicito. Per ciò che riguarda questo studio rinviamo alla Mem. originale del Čech nelle *Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk* (Brno, année 1922, N.° 11).

Qui ci accontenteremo di provare che: *I piani delle linee di Segre inviluppano un cono di terza classe* W. Un tale piano passa per un punto x della superficie, per $\varepsilon x_u + x_v$, perchè $du = \varepsilon dv$ è una direzione di Segre, e per il punto $x = y = z = 0$.

Se x', y', z', t' sono coordinate correnti, avrà per equazione

$$0 = \begin{vmatrix} x & \varepsilon x_u + x_v & x' \\ y & \varepsilon y_u + y_v & y' \\ z & \varepsilon z_u + z_v & z' \end{vmatrix}$$

che indicheremo con $\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' = 0$. Indichiamo ora con $\xi x' + \eta y' + \zeta z' = 0$ l'equazione di un piano generico per il punto $x' = y' = z' = 0$; io dico che i piani delle linee di Segre inviluppano il cono di terza classe

$$0 = W = (2\beta^3 - \beta_{uv})(\xi x + \eta y + \zeta z)^3 +$$

$$+ 2\left[(\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u)^3 + (\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v)^3\right]$$

$$- 6\beta(\xi x + \eta y + \zeta z)(\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u)(\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v) +$$

$$+ 3\beta_v(\xi x + \eta y + \zeta z)^2(\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u) +$$

$$+ 3\beta_u(\xi x + \eta y + \zeta z)^2(\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v).$$

Dalle (7), (8) segue tosto che $W_u = W_v = 0$, cioè *che il cono* $\mathrm{W} = 0$ *è un cono fisso nello spazio*; d'altra parte, essendo

$$\xi' x + \eta' y + \zeta' z = 0 \qquad \xi' x_u + \eta' y_u + \zeta' z_u = -(x\, x_u\, x_v)$$

$$\xi' x_v + \eta' y_v + \zeta' z_v = -\varepsilon(x\, x_u\, x_v)$$

segue che $W = 0$ per $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, $\zeta = \zeta'$.

D) Il caso $k=0$ delle direttrici.
Le superficie di Tzitzeica-Wilczynski.

Le (5) diventano:

$$\mu = \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} - \beta^2 ; \quad (\mu\beta)_u = (\mu\beta)_v = 0 \quad \text{cioè } \mu = \frac{k}{\beta} \quad (k = \text{cost.})$$

Dunque la β soddisferà all'unica condizione:

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} = \beta^2 + \frac{k}{\beta}. \tag{9}$$

Le (3) e (4) danno poi:

$$x_{uu} = -\frac{\beta_u}{\beta} x_u + \beta x_v \quad x_{vv} = \beta x_u - \frac{\beta_v}{\beta} x_v \quad (\text{per } x = x, y, z, t). \tag{10}$$

$$x_{uv} = \left(\beta^2 - \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v}\right) x = -\frac{k}{\beta} x \tag{11}$$

(per $x = x$, y, z, **non** per $x = t$).

Noi abbiamo $\pi_u = p_u = 0$; cioè a coordinate omogenee di punto corrispondono coordinate omogenee di piano; siamo nel caso già studiato al § 25 E. Ma esaminiamo la questione più minutamente.

Noi abbiamo scelto a punto $x = y = z = 0$ quello per cui passano le prime direttrici. D'altra parte per (11)

$$0 = S x_{uv} \xi_u = -\frac{k}{\beta}(x\xi_u + y\eta_u + z\zeta_u) + t_{uv}\tau_u = \left(t_{uv} + \frac{k}{\beta} t\right)\tau_u$$

Poichè t *non* soddisfa a (11) sarà $\tau_u = 0$; similmente si trova $\tau_v = 0$, cioè $\tau = $ cost. Dalle $S\xi x_{uv} = a_{12} = \dfrac{1}{\beta}$ si trae in modo simile

$$\frac{1}{\beta\tau} = t_{uv} + \frac{k}{\beta} t \tag{12}$$

che è l'equazione, analoga ad (11), cui soddisfa la t.

Distinguiamo due casi:

1°) $k = 0$. Se ne deduce $t \neq$ cost.; cioè le x, y, z *non* si possono assumere a coordinate non omogenee. Le (10) ed (11) per $k = 0$ provano però che esse sono legate da una relazione $ax + by + cz =$ cost. a coefficienti a, b, c costanti. Sarà perciò $ax_i + by_i + cz_i = 0$ per $i = 1, 2$. E le $S\xi_{uv} x_i = 0$ danno, essendo $\tau_{uv} = 0$, che $\xi_{uv} : \eta_{uv} : \zeta_{uv} = a : b : c$. Dunque: *Se* $k = 0$, *le seconde direttrici giacciono nel piano* ξ_{uv}, *che è un piano fisso di coordinate* $a, b, c, 0$ *passante quindi per l'origine, cioè per il punto comune alle prime direttrici.*

Le superficie corrispondenti sono per la $(\log\beta)_{uv} = \beta^2$ *un caso particolare di quelle, le cui asintotiche appartengono a complessi lineari e si ottengono dalle formole del* § 18 *C ponendo nelle* $(13)_{\text{bis}}$ $k = h - l = p = 0$.

Otteniamo così anche il risultato: *Tutte le superficie, le cui asintotiche appartengono a complessi lineari o sono una superficie* S *le cui prime direttrici passano per un punto fisso* O, *e le seconde direttrici giacciono in un piano contenente* O, *oppure sono proiettivamente applicabili su una tale superficie.*

2°) Supponiamo ora $k \neq 0$. Moltiplicando u, v per una stessa costante posso rendere $k = 1$. Essendo $p_{11} = p_{22} = 0$, esiste una relazione

$$ax + by + cz + dt = \text{cost.} \quad \text{con} \quad a, b, c, d \text{ costanti}$$

che non può [soddisfacendo le x, y, z alla (11) con $k \neq 0$] essere indipendente dalla t. Dunque $d \neq 0$; e, ponendo $ax + by + cz + dt$ al posto della t, posso rendere $t =$ cost. Con questo cambiamento della sola variabile t, e non delle x, y, z l'origine resta fissa, e la τ si moltiplica al più per una costante; e resta perciò costante; anzi la possiamo rendere uguale ad 1. Essendo $t =$ cost., la (12) prova che anche $t = 1$. Dunque x, y, z *sono coordinate non omogenee di punto e le* ξ, η, ζ *coordinate non omogenee di piano. Le* x, y, z *soddisfano a* (10) e (12); *le* ξ, η, ζ *alle*

$$(10)_{\text{bis}} \qquad \xi_{uu} = -\frac{\beta_u}{\beta}\xi_u - \beta\xi_v \quad , \quad \xi_{vv} = -\beta\xi_u - \frac{\beta_v}{\beta}\xi_v \, ,$$

come risulta dalla teoria generale, e in più alla:

$$(12)_{\text{bis}} \qquad \xi_{uv} + \frac{1}{\beta}\xi = 0 \qquad (\text{per } \xi = \xi, \eta, \zeta \textit{ non } \text{per } \xi = \tau = 1).$$

La $(12)_{\text{bis}}$ si prova, osservando che moltiplicando per x (oppure per x_i) e sommando con le analoghe in η, ζ, si trovano delle identità.

Il piano su cui giacciono le seconde direttrici è il piano $\xi_{uv} + \dfrac{1}{\beta}\xi$, *che è dunque, nelle coordinate attuali, il piano all'infinito. Il suo polo* rispetto alla quadrica di Lie, cioè il *centro della quadrica di Lie è il punto* $\mathrm{x}_{uv} + \dfrac{1}{\beta}\mathrm{x}$, *cioè il punto ove concorrono le prime direttrici.* Per le nostre superficie dunque *il centro della quadrica di Lie è fisso* (il caso 1° sarebbe quello in cui queste quadriche sono paraboloidi).

Nel § 25 *E* abbiamo già dato quella proprietà metrica, da cui Tzitzeica è partito per trovare queste superficie. Qui aggiungeremo altre proprietà dovute a Tzitzeica.

La rigata asintotica corrispondente ad una $u =$ cost. è il luogo dei punti $(x + wx_u, y + wy_u, z + wz_u, 1)$ al variare di v, w. Il piano ξ' ad essa tangente è determinato dalle:

$$S\xi' x = S\xi' x_u = S\xi'(x_v + wx_{uv})$$

che, per $w = \infty$, diventa il piano definito dalle:

$$S\xi' x = S\xi' x_u = 0 \quad , \quad 0 = S\xi' x_{uv} = -\frac{1}{\beta}(x\xi' + y\eta' + z\zeta') = \frac{\tau'}{\beta}.$$

Perciò $\tau' = 0$; tale piano passa per O. Quindi: *I piani asintotici* (tangenti all'infinito) *delle rigate asintotiche delle nostre superficie inviluppano coni col vertice nel centro della quadrica di Lie.*

Si trova facilmente che l'equazione delle asintotiche curve di tale rigata è $2\dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{1}{w}\right) = \dfrac{1}{\beta}$, e che esse hanno un flesso solo nei punti $\dfrac{1}{w} = 0$. Perciò:

La linea flecnodale delle rigate asintotiche delle precedenti superficie si riduce alla sezione col piano all'infinito contata due volte.

È evidente che x, y, z si possono considerare come coordinate omogenee della proiezione di un punto della superficie fatta dal centro della quadrica di Lie sul piano all'infinito. Su tale piano le tangenti ad una linea $v =$ cost. lungo una linea $u =$ cost. sono il luogo dei punti $x_u + wx$; una di queste tangenti incontra la consecutiva nel punto $x' = x_u$, che giace sia su di essa che sulla consecutiva congiungente $x_u + x_{uv}dv$ ad $x + x_v dv$, perchè, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore è per (11)

$$(x_u + x_{uv}dv) + \frac{dv}{\beta}(x + x_v dv) = x_u = x',$$

od anche perchè x'_v giace sulla retta (x, x_u).

Dunque: *Il punto* $\mathrm{x}' = \mathrm{x}_u$ *descrive sul piano all'infinito il trasformato di Laplace del sistema delle* u, v. La retta $(x' x_u')$, cioè la retta $(x_u x_{uu})$ incontra similmente la consecutiva $(x_u + x_{uv}dv$, $x_{uu} + x_{uuv}dv)$ nel punto $x_{uu} + \dfrac{\partial \log\beta}{\partial u} x_u = x_v$, che si ottiene da x con la trasformazione di Laplace inversa di quella inizialmente considerata.

Sul piano all' ∞ *il sistema delle* u, v *ammette una trasformazione ciclica di Laplace di ordine* 3.

§ 29. — Le superficie di Čech a linee di Darboux piane.

Il piano osculatore a una linea di Darboux è (in coordinate normali $a_{12} = \beta\gamma$)

$$\varphi = \left(\beta\gamma + \varepsilon^2 \frac{\partial\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}{\partial v}\right)\xi - \varepsilon^2\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\xi_u - \varepsilon\sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,\xi_v \quad (\varepsilon^3 = 1).$$

La linea di Darboux è piana, se questo piano non si muove quando ci spostiamo sulla curva, cioè se

$$\varepsilon^2\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\varphi_u - \varepsilon\sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,\varphi_v \quad \text{è proporzionale alla } \varphi.$$

Servendoci delle equazioni fondamentali per le ξ, si trova che:

$$(1)\quad \begin{cases} \varepsilon^2\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\varphi_u - \varepsilon\sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,\varphi_v + \left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}{\partial v} + \sqrt[3]{\dfrac{\beta}{\gamma}}\,\dfrac{\partial\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial v}\right) - \right. \\ \left. - \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial u} + \sqrt[3]{\dfrac{\gamma}{\beta}}\,\dfrac{\partial\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}{\partial u}\right)\right]\varphi = (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2)\xi, \end{cases}$$

dove P_1, P_2 sono espressioni complicate, mentre

$$P_0 = \beta\gamma\,\frac{\partial^2 \log\sqrt[3]{\beta:\gamma}}{\partial u\partial v}.$$

Ora, *se tutte le linee di Darboux sono piane*, deve essere $P_0 = P_1 = P_2 = 0$. In particolare dunque $P_0 = 0$, e *la superficie è isotermo-asintotica.*

Possiamo dunque supporre $\beta = \gamma$, sicchè

$$\varphi = \beta\left[\left(\beta + \varepsilon^2\frac{\beta_u}{\beta} + \varepsilon\frac{\beta_v}{\beta}\right)\xi - \varepsilon^2\xi_u - \varepsilon\xi_v\right].$$

La (1) diventa:

$$(2)\qquad \beta\left[\varepsilon^2\varphi_u - \varepsilon\varphi_v + 2\left(\varepsilon\frac{\beta_v}{\beta} - \varepsilon^2\frac{\beta_u}{\beta}\right)\varphi\right] = P\xi$$

ove:

$$P = \varepsilon\left(\frac{\beta_{uu}}{\beta} - 2\frac{\beta_u^2}{\beta^2} - \pi_{11}\right) - \varepsilon^2\left(\frac{\beta_{vv}}{\beta} - 2\frac{\beta_v^2}{\beta^2} - \pi_{22}\right).$$

Le superficie cercate soddisfano dunque alle:

$$(3)\qquad \pi_{11} = \frac{\beta_{uu}}{\beta} - 2\frac{\beta_u^2}{\beta^2}\quad,\quad \pi_{22} = \frac{\beta_{vv}}{\beta} - 2\frac{\beta_v^2}{\beta^2}.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni fondamentali per le ξ, queste diventano semplicemente (in coordinate *normali:* $a_{12} = \beta\gamma$):

$$(4)\qquad \left(\frac{\xi}{\beta}\right)_{uu} + \xi_v = 0 \qquad \left(\frac{\xi}{\beta}\right)_{vv} + \xi_u = 0.$$

Sostituendo alle ξ le $\xi\beta$ (con che le nuove coordinate ξ *non saranno più le coordinate normali*) le (4) diventano:

$$(5)\qquad \xi_{uu} + \beta_v \xi + \beta\xi_v = \xi_{vv} + \beta_u \xi + \beta\xi_u = 0.$$

E il piano φ di una linea di Darboux diventa il piano:

(6) $\varphi = \beta^2(\beta\xi - \varepsilon^2\xi_u - \varepsilon\xi_v)$. Porremo $\pi_i = (-\beta\xi + \varepsilon^{2i}\xi_u + \varepsilon^i\xi_v)(i=1,2,3)$.

Le condizioni d'integrabilità delle (5) sono:

$$(7)\qquad \beta_{uu} + \beta\beta_v = \beta_{vv} + \beta\beta_u = 0$$

affatto analoghe alle (6) del precedente § corrispondenti al caso che le linee di Segre siano piane. L'integrale generale si trova come al § 28 C essere

$$(8)\qquad \beta = 2(\zeta w_0 + \zeta w_1 + \zeta w_2)$$

$$w_0 = u + v + a_0, \quad w_1 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v + a_2, \quad w_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v + a_3,$$

ove le a_i siano costanti di somma nulla cosicchè $\Sigma w_i = 0$.

Vi sono altri due soli casi, in cui la β non si riduca ad una funzione di una sola delle w_i: i casi seguenti, che si possono del resto considerare come casi limiti del precedente:

$$(9)\qquad \beta = 2a(\operatorname{cotg} a w_0 + \operatorname{cotg} a w_1 + \operatorname{cotg} a w_2) \qquad (a = \text{cost.})$$

$$(10)\qquad \beta = 2\left(\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right).$$

Degli altri casi possibili, di quelli cioè, in cui la β si riduce ad una funzione di una sola delle w, parleremo più avanti.

Posto

(11) $\varepsilon^{2i}\beta_u + \varepsilon^i\beta_v - \frac{1}{2}\beta^2 = f(w_i)$ [funzione della sola w_i per le (7)],

si trova nei tre casi rispettivamente:

$$f(w_i) = -6pw_i \quad \text{oppure} \quad -6a^2 \mathrm{cotg}\, aw_i \quad \text{oppure} \quad -\frac{6}{w_i^2}$$

e in ogni caso

$$(12) \qquad f''' = -2ff' \quad ; \quad f' = -(\varepsilon^{2i}\beta\beta_u + \varepsilon^i\beta\beta_v - \beta_{uv})$$

Derivando (6) si trova:

$$(13) \quad \frac{d^2\pi_i}{dw_i^2} = (2\varepsilon^{2i}\beta\beta_u + 2\varepsilon^i\beta\beta_v - \beta_{uv})\xi + (\varepsilon^{2i}\beta^2 - 2\varepsilon^i\beta_u - \beta_v)\xi_u +$$

$$+ (\varepsilon^i\beta^2 - 2\varepsilon^{2i}\beta_v - \beta_u)\xi_v - \beta\xi_{uv}.$$

$$(13)_{\text{bis}} \qquad \frac{d^3\pi_i}{dw_i^3} = (\beta^2 - 2\varepsilon^{2i}\beta_u - 2\varepsilon^i\beta_v)\frac{d\pi_i}{dw_i} +$$

$$+ 2(\varepsilon^{2i}\beta\beta_u + \varepsilon^i\beta\beta_v - \beta_{uv})\pi_i$$

ossia per (12)

$$(13)_{\text{ter}} \qquad \frac{d^3\pi_i}{dw_i^3} = -2\frac{d}{dw_i}\left[\pi_i f(w_i)\right]$$

ossia

$$(14) \qquad \frac{d^2\pi_i}{dw_i^2} + 2\pi_i f(x_i) + A = 0,$$

ove il piano A è costante (è fisso), e, confrontando con (13), si trova essere il piano

$$(15) \qquad A = (\beta_{uv} - \beta^3)\xi - \beta_v\,\xi_u - \beta_u\,\xi_v + \beta\xi_{uv}.$$

Moltiplicando (14) per $f'(w_i)$, e, tenendo conto di (7), si trova:

$$(14)_{\text{bis}} \qquad f'(w_i)\frac{d^2\pi_i}{dw_i^2} - \pi_i f'''(w_i) + Af'(w_i) = 0,$$

donde, integrando:

$$(14)_{\text{ter}} \qquad f'(w_i)\frac{d\pi_i}{dw_i} - f''(w_i)\pi_i + Af(w_i) + \frac{1}{2}B = 0,$$

ove B è un nuovo piano *fisso* che, sostituendo nella precedente a $\frac{d\pi_i}{dw_i}$ il valore ottenuto derivando, si vede essere il piano:

$$(16) \qquad B = \beta(3\beta\beta_{uv} - 2\beta_u\beta_v - \beta^4)\xi - (2\beta_u{}^2 + \beta^2\beta_v)\xi_u -$$

$$- (2\beta_v{}^2 + \beta^2\beta_u)\xi_v + (\beta^3 - 2\beta_{uv})\xi_{uv}.$$

Integrando l'ultima equazione ottenuta, si trova:

$$(17) \qquad \frac{\pi_i}{f'(w_i)} + A\int\frac{f(w_i)}{f'^2(w_i)}dw_i + \frac{1}{2}B\int\frac{dw_i}{[f'(w_i)]^2} = C_i,$$

ove i piani C_0, C_1, C_2 sono pure *fissi* nello spazio.

Servendoci di (15) e (16) calcoliamo $(2\beta_{uv} - \beta^3)A + \beta B$, ove alle ξ, ξ_u, ξ_v si sostituiscano i valori dedotti da (6) in funzione lineare delle π. Troviamo:

$$(18) \qquad \Sigma\lambda_i\pi_i + \frac{3}{2}\beta(2\beta_{uv} - \beta^3)A + \frac{3}{2}\beta^2 B = 0,$$

ove è posto:

$$\lambda_i = \beta_{uv}^2 - \beta^2\beta_u\beta_v + \varepsilon^i\beta(\beta_v\beta_{uv} + \beta\beta_u^2) + \varepsilon^{2i}\beta(\beta_u\beta_{uv} + \beta\beta_v^2).$$

Da (12) si deduce che

$$\lambda_i f'(w_i) = \beta_{uv}^3 - 3\beta^2\beta_u\beta_v\beta_{uv} - \beta^3\beta_u^3 - \beta^3\beta_v^3 = \mu,$$

ove μ non dipende più dall'indice i, sicchè (18) diventa:

$$\mu\Sigma\frac{\pi_i}{f'(w_i)} + \frac{3}{2}\beta(2\beta_{uv} - \beta^3)A + \frac{3}{2}\beta^2 B = 0$$

che, confrontata con (17) dà

$$(19)\qquad A\left\{\frac{3}{2}\,\frac{\beta}{\mu}(2\beta_{uv}-\beta^3)-\Sigma\int\frac{f(w_i)dw_i}{f'^2(w_i)}\right\}+$$
$$+B\left[\frac{3}{2}\,\frac{\beta^2}{\mu}-\Sigma\int\frac{dw_i}{f'(w_i)^2}\right]+\Sigma C_i=0.$$

Non essendo le β funzione di una sola delle w_i, e quindi $\beta_u^3 \mp \beta_v^3$, nei secondi membri delle (15), (16) i coefficienti di ξ_u, ξ_v non sono proporzionali; perciò i piani A, B non possono coincidere; e quindi i coefficienti di A, B in (19) sono delle costanti che, con opportuna scelta dei limiti inferiore d'integrazione [il calcolo effettivo prova che si possono scegliere questi limiti uguali a zero] si possono rendere nulle. Sarà così:

$$(20)\qquad \Sigma C_i=0\quad,\quad \Sigma\int_0^{w_i}\frac{f(w_i)}{f'^2(w_i)}=\frac{3}{2\mu}\,\beta(2\beta_{uv}-\beta^3)\,,$$
$$\Sigma\int_0^{w_i}\frac{dw_i}{f'^2(w_i)}=\frac{3}{2\mu}\,\beta^2.$$

Dalla definizione di π_i segue che:

$$3\beta\xi=-\Sigma\pi_i=A\Sigma f'(w_i)\int_0^{w_i}\frac{f(w)}{f'^2(w)}\,dw+$$
$$+\frac{1}{2}\,B\Sigma f'(w_i)\int_0^{w_i}\frac{dw}{f'^2(w)}-\Sigma C_i f'(w_i)\,,$$

insieme alle analoghe in η, ζ, τ. Scegliendo opportunamente il tetraedro di riferimento, si avranno pertanto le formole seguenti valide nel caso (8):

$$\xi:\eta:\zeta:\tau=\Sigma p'(w_i)\int_0^{w_i}\frac{dw}{(pw-e_1)\,(pw-e_2)}:$$

$$: \Sigma p'(w_i) \int_0^{w_i} \frac{dw}{(pw - e_2)(pw - e_3)} :$$

$$: (p'w_0 - p'w_2) : (p'w_1 - p'w_2) \,, \qquad (w_0 + w_1 + w_2 = 0)$$

oppure nel caso (9):

$$\xi : \eta : \zeta : \tau = \Sigma \rho_i (1 + \rho_i^2) \int_\infty^{\rho_i} \frac{dw}{(1 + w^2)^3} :$$

$$: \Sigma \rho_i (1 + \rho_i^2) \int_\infty^{\rho_i} \frac{dw}{(1 + w^2)^3} :$$

$$: \left[\rho_0(1 + \rho_0^2) - \rho_2(1 + \rho_2^2)\right] : \left[\rho_1(1 + \rho_1^2) - \rho_2(1 + \rho_2^2)\right] ,$$

oppure nel caso (10):

$$\xi : \eta : \zeta : \tau = \Sigma w_i^2 : \Sigma w_i^4 : \left(\frac{1}{w_0^3} - \frac{1}{w_2^3}\right) : \left(\frac{1}{w_1^3} - \frac{1}{w_2^3}\right).$$

Le integrazioni si sanno eseguire; nel primo caso le e_i sono i valori di pw negli zeri di $p'w$ (semiperiodi); nel secondo caso le ρ sono parametri legati dalla: $\rho_0 \rho_1 + \rho_0 \rho_2 + \rho_1 \rho_2 = 0$.

Dai calcoli precedenti si deduce facilmente:

Se β *non dipende da una sola delle* w, *come può avvenire in qualche caso limite, allora: I piani di ogni sistema di linee di Darboux inviluppano tre coni quadrici, perchè soddisfano alla* $(13)_{ter}$. *Le* w_1 *si possono considerare come i parametri sui tre coni–inviluppo. Imponendo la* $\Sigma \mathrm{w}_1 = 0$, *i tre piani corrispondenti hanno una intersezione che genera la nostra superficie.*

I vertici dei tre coni sono per le (14) *e* $(14)_{ter}$ *in linea retta sulla retta intersezione dei piani* A, B; *due qualunque dei tre coni risultano prospettivi, quando si facciano corrispondere due piani, i cui parametri* w_1 *abbiano uguali valori. I tre piani di prospettività formano un fascio ed incontrano la retta dei vertici in tre punti,* *che sono il covariante cubico dei tre vertici, ed intersecano la superficie in tre linee di Segre particolari* (*).

Se invece β dipende da una sola delle w, come avviene nei casi limiti $\beta = 2a\cot g(aw_i)$ $(a = \text{cost.})$, $\beta = \dfrac{2}{w_i}$, $\beta = \text{cost.}$, *allora nei primi due casi un sistema di linee di Darboux* $w_1 = \text{cost.}$ *è formato da coniche, nell'ultimo caso si ha l'unica superficie a linee di Darboux tutte coniche ; le sue linee di Segre sono pure curve piane e precisamente cubiche con un punto di regresso.*

§ 30. — Breve riassunto di altre ricerche.

A) Se $x, y, z, t = 1$ sono coordinate cartesiane ortogonali, e se $\left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\}$ sono i simboli di Christoffel per l'elemento lineare di Gauss, allora la retta normale *metrica* è la retta congiungente x ad $x_{uv} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} x_u - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} x_v$, essendo sempre u, v asintotiche. La retta duale (che potremo chiamare la *seconda* normale metrica) è la congiungente i punti $x_u - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} x$ ed $x_v - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} x$, cioè i due punti

$$x_i - \frac{1}{2} x \frac{\rho_i}{\rho}, \quad y_i - \frac{1}{2} y \frac{\rho_i}{\rho}, \quad z_i - \frac{1}{2} y \frac{\rho_i}{\rho}, \quad - \frac{1}{2} \frac{\rho_i}{\rho},$$

ove $-\dfrac{1}{\rho^2}$ è la curvatura di Gauss. Quindi : *Le superficie a curvatura costante metrica sono quelle per cui la seconda normale me-*

(*) Si consideri l'omografia tra le due stelle (A, B, C_i) ed (A, B, C_j), che al piano $k_1 A + k_2 B + k_3 C_i$ dell'una fa corrispondere il piano $k_1 A + k_2 B + k_3 C_j$ dell'altra ; essa è una prospettività ; il piano di prospettività essendo $C_i - C_j = 0$. La (17) prova che i coni inviluppati da π_i, π_j si corrispondono in tale prospettività, quando si considerino come omologhi i piani per cui $w_i = w_j$. Infine (20) dimostra che C_k $(i, j, k = 1, 2, 3)$ e $C_i - C_j$ dividono armonicamente i piani C_i, C_j

trica è all'infinito, ossia la prima normale passa per il centro della quadrica di Lie.

B) Sia K una congruenza di rette r uscenti dai punti O di una superficie S. I piani focali di r incontrano S nelle direzioni determinate dalle sviluppabili della congruenza, uscenti da r. Il teorema per la congruenza K' duale, dovuto a Green, si enuncia:

Se K' *è una congruenza di rette* r' *poste sui piani tangenti alla superficie* S, *le rette che da un punto* O *di* S *proiettano i fuochi della corrispondente retta* r' *determinano le direzioni coniugate di quelle corrispondenti alle sviluppabili.*

C) Green ha anche considerato una coppia *qualsiasi* di sistemi di linee u, v della S. Ha chiamato *asse* in un punto O di S l'intersezione dei piani osculatori alle linee u, v uscenti da O, *raggio* (ray) la retta unente i due fuochi delle congruenze generate dalle tangenti alle linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$, che giacciono sul piano tangente in O (e sono distinte da O). Ha chiamato *assi–tangenti* e *raggi-tangenti* le direzioni corrispondenti alle sviluppabili della congruenza degli assi o dei raggi, ha chiamato *assi–rigate* R_u le rigate luogo dei raggi uscenti dai punti di una $v = \text{cost.}$, e in modo simile ha definito le *assi–rigate* R_v. Ecco i più notevoli risultati del Green:

Su un asse giacciono i fuochi F, F' *della congruenza degli assi, e i punti* P, Q *ove i piani osculatori alle* $\mathrm{v} = \text{cost.}$ *ed* $\mathrm{u} = \text{cost.}$ *uscenti su* S *dal piede* O *dell'asse toccano* $\mathrm{R_u}$, $\mathrm{R_v}$. *Il coniugato armonico di* O *rispetto ad* F, F' *è anche coniugato di* O *rispetto a* P, Q. *Le assi–tangenti incontrano un raggio nei suoi fuochi soltanto se le rette tangenti alle* $\mathrm{u} = \text{cost.}$ *ed alle* $\mathrm{v} = \text{cost.}$ *generano congruenze* W.

Se le u, v *sono coniugate, esse formeranno un sistema a invarianti uguali, soltanto se le raggi–tangenti sono coniugate; se in più le tangenti alle* u, v *generano congruenze* W, *allora le* u, v *formano un sistema isotermo–coniugato.*

D) Per interpretazioni geometriche dei sistemi isotermi coniugati rinviamo alla Mem. di Wilczynski a pag. 208 del Tomo 85 dei Math. Ann.

E) Finiremo dimostrando ($\breve{\mathrm{C}}$.) un bel teorema di Wilczynski sui sistemi coniugati ad invarianti tangenziali uguali.

Se le u, v *formano un sistema coniugato ad invarianti tangen-*

ziali uguali, la intersezione dei piani osculatori alle u , v *in un punto comune genera una congruenza armonica alla superficie. E viceversa. Un risultato duale vale naturalmente per i sistemi coniugati con uguali invarianti di punto.*

Infatti nelle ipotesi del teorema, posso fissare le coordinate di piano tangente in guisa che $\xi_{uv} = \lambda\xi$. Sarà $S\xi_u x = S\xi_u x_v = 0$ perchè il sistema è coniugato e $S\xi_u x_{vv} = (S\xi_u x_v)_v - \lambda S x_v \xi = 0$. Cioè il piano ξ_u è osculatore alle $u = \text{cost.}$; e similmente ξ_v è osculatore alle $v = \text{cost.}$ La congruenza citata nell'enunciato è dunque quella delle rette (ξ_u, ξ_v); e noi sappiamo che, comunque siano fissate le coordinate di piano tangente, una tal congruenza è sempre armonica alla superficie.

CAPITOLO IV.

SUPERFICIE RIGATE (Č.) (*)

§ 31. — Applicazione delle formole generali del Capitolo II al caso particolare di una superficie rigata.

In questo Capitolo studiamo la classe più semplice di superficie non sviluppabili che è quella delle *superficie rigate*. Tale studio particolare è persino necessario, giacchè una parte essenziale dei risultati generali, e cioè il concetto di coordinate e forme *normali*, qui non si può applicare. Cominciamo coll'esplicitare le formole generali nel caso attuale supponendo che le rette generatrici siano le $v =$ cost.

Nel § 32 ritroveremo per via diretta tutti i seguenti risultati. Applicando qui le formole generali, dobbiamo porre, se le $v =$ cost. sono le *generatrici*:

$$a_{11} = a_{111} = a_{112} = a_{122} = 0 \ , \ A = -a_{12}^2 < 0 \ , \ \varepsilon = -\operatorname{sgn} A = 1 \ ,$$

$$F_2 = (2a_{12}\,du + a_{22}\,dv)dv \quad , \quad F_3 = a_{222}\,dv^3 \, ,$$

$$2X = \Sigma A_{ik} x_{ik} = -\frac{a_{22}}{a_{12}^2} x_{11} + \frac{2}{a_{12}} x_{12} \, .$$

(*) I risultati più importanti di questo Capitolo sono stati esposti, per la prima volta, (in boemo) nel Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, t. LIII, 1923-4.

Le equazioni fondamentali (Cap. II, § 14 *A*) danno quindi, eliminando X:

(1) $x_{11} = p_{11} x\,,\ a_{22} x_{12} - a_{12} x_{22} + a_{222} x_1 + (a_{12} p_{22} - a_{22} p_{12}) x = 0.$

Notiamo pure la relazione di coniugio (Cap. II § 14 *A*)

$$(1)_{\text{bis}} \qquad 2p_{12} a_{12} = a_{22} p_{11}.$$

I valori dei simboli di Christoffel essendo

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{12}} \frac{\partial a_{12}}{\partial u}, \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0\,, \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2a_{12}} \frac{\partial a_{22}}{\partial u}, \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{a_{22}}{a_{12}^2} \frac{\partial a_{12}}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{a_{22}}{a_{12}^2} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} + \frac{1}{2a_{12}} \frac{\partial a_{22}}{\partial v}\,,$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{12}} \frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2a_{12}} \frac{\partial a_{22}}{\partial u}\,,$$

la prima delle (1) si può scrivere

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial \log a_{12}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - p_{11} x = 0\,.$$

Se ne deduce subito che

$$x = \varphi(u\,, v) y + \psi(u\,, v) z$$

dove i due punti y e z non dipendono che da v. [Le lettere x, y, z non significano più tre coordinate dello stesso punto, ma tre punti diversi]. Cambiando il fattore di proporzionalità di x, si può supporre $\varphi(u\,, v) = 1$. La ψ dipende poi necessariamente da u, perchè x descrive una *superficie*, e possiamo sceglierla addirittura come nuovo parametro u, sicchè (e *quest' ipotesi sarà fatta per tutto ciò che segue*)

$$(2) \qquad x = y + uz$$

L'equazione precedente dà poi, tenendo conto anche di $(1)_{\text{bis}}$

$$(3) \qquad \frac{\partial \log a_{12}}{\partial u} = 0 \quad , \quad p_{11} = 0 \quad , \quad p_{12} = 0.$$

È del resto geometricamente chiaro senz'altro che l'ipotesi (2) è sempre legittima: *I punti* y *e* z *descrivono due curve in corrispondenza biunivoca definita da uguali valori di* v (*curve direttrici* della rigata) *e la superficie rigata che indicheremo con la lettera* R, *è il luogo delle rette che congiungono punti corrispondenti.* Indicheremo con apici le derivate delle espressioni che non dipendono che da v; p. es. $y' = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{dy}{dv}$.

L'equazione (Cap. II, § 12 A)

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}}(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = a_{12}$$

dà, sostituendovi dalla (2),

$$(yz\, y'z') = \omega a_{12}^2\,, \tag{4}$$

essendo posto

$$\omega = \mathrm{sgn}(yz\, y'z') = \mathrm{sgn} a_{12} = \pm 1. \tag{4}_{\text{bis}}$$

Le coordinate ξ del piano tangente, fissate al solito modo (Cap. II, § 12 B) sono

$$\xi = \frac{1}{|a_{12}|}(y\,, z\,, y' + uz') = \frac{(y\,, z\,, y' + uz')}{\sqrt{|y\,, z\,, y'\,, z'|}}.$$

Quindi ξ è lineare in u e porremo

$$\xi = \eta + u\zeta\,,\quad \eta = \frac{1}{|a_{12}|}(yzy')\,,\quad \zeta = \frac{1}{|a_{12}|}(yzz'). \tag{5}$$

Donde il teorema di Chasles: *Il fascio dei piani* π *tangenti lungo una generatrice* g *è proiettivo alla punteggiata dei punti* P *di contatto. Questa proiettività definisce la generatrice* g' *infinitamente vicina alla* g, *perchè si può pensare come ottenuta proiettando da* g' *coi piani* π *i punti* P.

Le $S\xi x = S\xi x_u = \ldots = 0$ danno:

$$S\eta y = S\eta z = S\zeta y = S\zeta z = S\eta y' = S\eta' y = S\zeta z' = S\zeta' z = 0 \tag{6}$$

e le $Sx_u\,\xi_v = Sx_v\,\xi_u = -a_{12}$ danno poi

$$(6)_{\text{bis}} \qquad -S\eta' z = S\eta z' = +S\zeta' y = -S\zeta y' = a_{12}.$$

Dalle (6) e $(6)_{\text{bis}}$ si trae derivando:

$$S\eta' z' = \frac{\partial}{\partial v} S\eta z' - S\eta z'' = \frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{|a_{12}|}(yzy'z''),$$

$$S\zeta' y' = \frac{\partial}{\partial v} S\zeta y' - S\zeta y'' = -\frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{|a_{12}|}(yzz'y'').$$

Derivando (4) se ne deduce $S\eta' z' = S\zeta' y'$. Poichè

$$Sx_v\,\xi_v = S(y' + uz')(\eta' + u\zeta') = -a_{22}$$

si trae che $\frac{a_{22}}{a_{12}}$ è *un polinomio di secondo grado nella* u

$$(7) \qquad \frac{a_{22}}{a_{12}} = 2(a + 2bu + cu^2)$$

dove:

$$(7)_{\text{bis}} \qquad a = -\frac{1}{2a_{12}} S\eta' y', \quad b = -\frac{1}{2a_{12}} S\zeta' y' = -\frac{1}{2a_{12}} S\eta' z', \quad c = -\frac{1}{2a_{12}} S\zeta' z'.$$

Così pure dalla

$$a_{222} = \frac{1}{2}(Sx_v\,\xi_{vv} - x_{vv}\,\xi_v) =$$

$$= \frac{1}{2} S\Big[(y' + uz')(\eta'' + u\zeta'') - (y'' + uz'')(\eta' + u\zeta')\Big]$$

deduciamo che:

$$(8) \qquad \frac{a_{222}}{a_{12}} = A + 2Bu + Cu^2,$$

(dove A non indica più il discriminante di F_2), e dove:

$$(8)_{\text{bis}} \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{2a_{12}} S(y'\eta'' - y''\eta'), \\ B &= \frac{1}{4a_{12}} S(y'\zeta'' - y''\zeta' + z'\eta'' - z''\eta'), \\ C &= \frac{1}{2a_{12}} S(z'\zeta'' - z''\zeta'). \end{aligned} \right.$$

L'elemento lineare proiettivo è

$$(8)_{\text{ter}} \qquad \frac{F_3}{F_2} = \frac{1}{2} \frac{(A + 2Bu + Cu^2)dv^2}{du + (a + 2bu + cu^2)dv}.$$

Dalla seconda delle (1) dove ora $p_{12} = 0$, si trae

$$(x_{22}, x_1, x_2, x_{12}) = p_{22}(x, x_1, x_2, x_{12}),$$

ossia:

$$p_{22} = \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)}{\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)} = \frac{(y'' + uz'', z, y', z')}{(y, z, y', z')},$$

che è un polinomio

$$(9) \qquad p_{22} = (P - C)u + (N - B)$$

di primo grado nella u. Essendo (Cap. II, § 16 A)

$$\pi_{22} - p_{22} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{a_{222}}{a_{12}},$$

si deduce:

$$(9)_{\text{bis}} \qquad \pi_{22} = (P + C)u + (N + B).$$

La (1) diventa

$$(1)_{\text{ter}} \quad 2(a + 2bu + cu^2)x_{12} - x_{22} + (A + 2Bu + Cu^2)z + p_{22}\, x = 0.$$

Posto al solito $\theta = \log|a_{12}|$, i valori attuali dei simboli di Christoffel sono

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = 2(b+cu), \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{a_{22}}{a_{12}}\theta' + \frac{1}{2}\frac{a_{22}}{a_{12}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2a_{12}}\frac{\partial}{\partial v}\left(a_{12}\cdot\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{a_{22}}{a_{12}}\theta' + \frac{1}{2}\frac{a_{22}}{a_{12}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = (a'-\theta' a) + 2(b'-\theta' b)u + (c'-\theta' c)u^2 +$$

$$+ 4(a+2bu+cu^2)(b+cu),$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \theta' - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = \theta' - 2(b+cu).$$

Sviluppando ed eguagliando a zero identicamente nella u la $(1)_{ter}$, si trova quindi:

$P + c' - \theta' c = 0$ (che è l'*unica* condizione d'integrabilità)

$$y'' = (\theta'-2b)y' + 2az' + (N-B)y + (a'-a\theta'+A)z,$$

$$z'' = -2cy' + (\theta'+2b)z' + (2b'-2b\theta'+N+B)z + (c\theta'-c'-C)y.$$

Si introduce simmetria definendo una quantità j con la

$$j = -N + ac - b^2 - b' + b\theta'. \tag{10}$$

E si hanno così *le equazioni fondamentali per i punti* y, z *di due direttrici:*

$$\left\{\begin{aligned} y'' &= (\theta'-2b)y' + 2az' + (-b'+b\theta'+ac-b^2-B-j)y + \\ &\qquad + (a'-a\theta'+A)z, \\ z'' &= -2cy' + (\theta'+2b)z' + (-c'+c\theta'-C)y + \\ &\qquad + (b'-b\theta'+ac-b^2+B-j)z. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Le equazioni (7) e $(9)_{\text{bis}}$ mostrano che *per* η *e* ζ *valgono equazioni che differiscono dalle precedenti soltanto nei segni* di A, B, C:

$$(11)_{\text{bis}}\quad \begin{aligned} \eta'' &= (\theta'-2b)\eta' + 2a\zeta' + (-b'+b\theta'+ac-b^2+B-j)\eta + \\ &\qquad + (a'-a\theta'-A)\zeta, \\ \zeta'' &= -2c\eta' + (\theta'+2b)\zeta' + (-c'+c\theta'+C)\eta + \\ &\qquad + (b'-b\theta'+ac-b^2-B-j)\zeta. \end{aligned}$$

Teorema fondamentale.

Dato l'elemento lineare proiettivo $(8)_{\text{ter}}$ *basterà quindi la conoscenza della sola* N, *o della* j, *per determinare completamente la superficie.* (Si noti che θ può assumere valori arbitrarii al variare del fattore di proporzionalità delle y, z).

§ 32. — Deduzione diretta dei risultati precedenti e prime applicazioni.

A) Nuova deduzione delle (11).

Prima di proseguire, voglio mostrare come si possa giungere ai risultati del § precedente in modo diretto, indipendente cioè dalla teoria generale delle superficie. Il metodo, di cui faremo uso, è del resto applicabile a casi più generali negli iperspazi. Come al § precedente, definiamo la rigata R come luogo delle rette congiungenti punti omologhi y e z di due curve C_y e C_z in corrispondenza biunivoca, punti le cui coordinate sono funzioni di un parametro v, sicchè il punto generico x di R è dato dalla

$$(1)\qquad x = y + uz.$$

Porremo

$$(2)\qquad (yz\,dy\,dz) = \omega(a_{12}dv)^2, \quad \omega = \pm 1$$

ossia, indicando con apici derivate rapporto alla v,

$$(yzy'z') = \omega a_{12}{}^2, \quad \omega = \operatorname{sgn}(yzy'z'),$$

e supponiamo, come è lecito, anche $\operatorname{sgn} a_{12} = \omega$. Le coordinate della generatrice p di R sono nella solita notazione

$$p = (yz). \tag{3}$$

Le coordinate ξ del piano tangente ad R nel punto x sono

$$\xi = \frac{\lambda}{dv}(y, z, dx) = \lambda\Big[(y, z, y') + u(y, z, z')\Big],$$

oppure, posto

$$\eta = \lambda(yzy'), \quad \zeta = \lambda(yzz'),$$

$$\xi = \eta + u\zeta. \tag{4}$$

Per determinare λ in modo indipendente dalla scelta del parametro v, basta porre la condizione

$$(yz) = \pm(\eta\zeta).$$

È (Introduzione § 1 E)

$$(yzy', yzz') = (yz)(yzy'z'),$$

sicchè risulta subito:

$$\lambda^2(yzy'z') = \pm 1 = \omega.$$

Prendendo p. es. $\lambda > 0$, risulta

$$\eta = \frac{(yzy')}{\sqrt{|yzy'z'|}}, \quad \zeta = \frac{(yzz')}{\sqrt{|yzy'z'|}} \tag{4$_{\text{bis}}$}$$

$$(\eta\zeta) = \omega(yz). \tag{3$_{\text{bis}}$}$$

L'equazione $(3)_{\text{bis}}$ dà il significato geometrico del segno ω: *Un verso scelto nella punteggiata* p *e il verso corrispondente nel fascio dei piani tangenti sono associati nel senso dell'introduzione* § 1 *C allora e allora soltanto che* $\omega = 1$.

Accanto alle precedenti, valgono le formole duali

$$(5)\qquad y=\frac{(\eta\zeta\eta')}{\sqrt{|(\eta\xi\eta'\xi')|}}\ ,\quad z=\frac{(\eta\zeta\zeta')}{\sqrt{|(\eta\xi\eta'\xi')|}}$$

$$(\eta\zeta\eta'\zeta')=\omega(a_{12}\,dv)^2$$

che il lettore verificherà facilmente.

Sono evidenti le identità (6) e $(6)_{\text{bis}}$ del § precedente. Derivandole, si vede subito che si può porre (è $\theta=\log|a_{12}|$)

$$a=-\frac{1}{2a_{12}}S\eta'y'=\frac{1}{2a_{12}}S\eta y''=\frac{1}{2a_{12}}S\eta''y\,,$$

$$(6)\qquad b=-\frac{1}{2a_{12}}S\eta'z'=-\frac{1}{2a_{12}}S\zeta'y'=\frac{1}{2a_{12}}S\eta z''-\frac{1}{2}\theta'$$

$$=+\frac{1}{2a_{12}}S\zeta y''+\frac{1}{2}\theta'=\frac{1}{2a_{12}}S\eta''z+\frac{1}{2}\theta'=\frac{1}{2a_{12}}S\zeta''y-\frac{1}{2}\theta',$$

$$c=-\frac{1}{2a_{12}}S\zeta'z'=\frac{1}{2a_{12}}S\zeta z''=\frac{1}{2a_{12}}S\zeta''z\,.$$

Dalle $(4)_{\text{bis}}$ si vede che si ha anche

$$(6)_{\text{bis}}\qquad a=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzy'y'')\,,\ b=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzy'z'')-\frac{1}{2}\theta'=$$

$$=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzz'y'')+\frac{1}{2}\theta',\ c=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzz'z'')\,.$$

Notiamo pure l'identità

$$4a_{12}^2(ac-b^2)=\begin{vmatrix} Sy'\eta' & Sy'\zeta' \\ Sz'\eta' & Sz'\zeta' \end{vmatrix}=S(y'z')(\eta'\zeta').$$

Ora dalle $(4)_{\text{bis}}$ si ha

$$(\eta'\zeta')=\frac{1}{a_{12}^2}\Big[(yzy'')+(yz'y')-\theta'(yzy')\,,\ (yzz'')+(y'zz')-\theta'(yzz')\Big]$$

$$=\frac{1}{a_{12}^2}(y''z'')\,(yzy''z'')+P\,,$$

dove P soddisfa alla $SP(y'z') = 0$, sicchè

$$(6)_{\text{ter}} \qquad ac - b^2 = \frac{1}{4a_{12}^4}(yzy''z'')(y'z'y''z'').$$

Definiamo le A, B, C dalle $(8)_{\text{bis}}$ del § precedente e poniamo

$$(7) \qquad j = \frac{1}{4a_{12}} S(y'\zeta'' - y''\zeta' - z'\eta'' + z''\eta') - 3(ac - b^2).$$

(Si vedrà fra poco che ciò coincide col valore di j definito dalla (10) del § precedente). Il lettore stabilirà facilmente le formole

$$A = \frac{\omega}{2a_{12}^2}\left[-(yzy'y''') + 3(yy'z'y'') + 3\theta'(yzy'y'')\right],$$

$$(8) \qquad B = \frac{\omega}{4a_{12}^2}\left[-(yzy'z''') - (yzz'y''') + 3(yy'z'z'') + \right.$$
$$\left. + 3(zy'z'y'') + 3\theta'(yzy'z'') + 3\theta'(yzz'y'')\right],$$

$$C = \frac{\omega}{2a_{12}^2}\left[-(yzz'z''') + 3(zy'z'z'') + 3\theta'(yzz'z'')\right],$$

$$j = \frac{\omega}{4a_{12}^2}\left[(yzz'y''') - (yzy'z''') - (yy'z'z'') + \right.$$
$$\left. + (zy'z'y'') + 2(yzy''z'') + \theta'(yzz'y'') - \theta'(yzy'z'') - 3\omega(yzy''z'')(y'z'y''z'')\right]$$
$$+ \frac{1}{2}(\theta'' - \theta'^2).$$

che esprimono le A, B, C, j mediante sole coordinate di punto.

I punti y, z, y', z' essendo linearmente indipendenti, valgono equazioni della forma

$$y'' = p_{11}y' + p_{12}z' + q_{11}y + q_{12}z,$$
$$z'' = p_{21}y' + p_{22}z' + q_{21}y + q_{22}z.$$

Moltiplicando con η e ζ e confrontando con le (6), e con le (6) e (6)$_{\text{bis}}$ del § precedente, si trova

$$2a_{12}a = a_{12}p_{12} \quad , \quad 2a_{12}b - a_{12}\theta' = -a_{12}p_{11} \, ,$$

$$2a_{12}b + a_{12}\theta' = a_{12}p_{12} \quad , \quad 2a_{12}c = -a_{12}p_{21} \, ,$$

ossia

$$p_{11} = -2b + \theta' \, , \quad p_{12} = 2a \, , \quad p_{21} = -2c \, , \quad p_{22} = 2b + \theta' .$$

Moltiplicando invece con η' e ζ' si deduce

$$S\eta' y'' = -2a_{12}ap_{11} - 2a_{12}bp_{12} - a_{12}q_{12} = -a_{12}(2a\theta' + q_{12}) \, ,$$

$$S\zeta' y'' = -2a_{12}bp_{11} - 2a_{12}cp_{12} + a_{12}q_{11} =$$
$$= a_{12}(4b^2 - 4ac - 2b\theta' + q_{11}) \, ,$$

$$S\eta' z'' = -2a_{12}ap_{21} - 2a_{12}bp_{22} - a_{12}q_{22} =$$
$$= -a_{12}(4b^2 - 4ac + 2b\theta' + q_{22}) \, ,$$

$$S\zeta' z'' = -2a_{12}bp_{21} - 2a_{12}cp_{22} + a_{12}q_{21} = a_{12}(-2c\theta' + q_{21}).$$

Ora derivando le (7)$_{\text{bis}}$ del § 1 e tenendo conto delle (8)$_{\text{bis}}$ del § 1 e della (7) si trova

$$S\eta' y'' = -a_{12}(a' + a\theta' + A) \, ,$$

$$S\zeta' y'' = -a_{12}(b' + b\theta' + 3ac - 3b^2 + B + j) \, ,$$

$$S\eta' z'' = -a_{12}(b' + b\theta' - 3ac + 3b^2 + B - j) \, ,$$

$$S\zeta' z'' = -a_{12}(c' + c\theta' + C) \, ,$$

sicchè

$$q_{11} = -b' + b\theta' + ac - b^2 - B - j \, , \quad q_{12} = a' - a\theta' + A \, ,$$

$$q_{21} = -c' + c\theta' - C \, , \quad q_{22} = b' - b\theta' + ac - b^2 + B - j .$$

Ecco ritrovate, con un procedimento più semplice, le equazioni fondamentali (11). Nello stesso modo si possono verificare le (3).

B) Applicazione alla quadrica di Lie.

Sappiamo dal Cap. III § 21 *D* che *la quadrica di Lie di una rigata è il suo iperboloide osculatore;* lo si indicherà nel seguito con la lettera *H*. *Per un valore fisso di* v, *il piano polare del punto*

$$(9) \qquad \rho_1 y + \rho_2 z + \sigma_1 y' + \sigma_2 z'$$

rispetto ad H *è*

$$(9)_{\text{bis}} \qquad \rho_1 \eta + \rho_2 \zeta + \sigma_1 \eta' + \sigma_2 \zeta'.$$

Ciò si vede quasi immediatamente da *l. c.* Ne vogliamo dare qui un'altra dimostrazione. In primo luogo, si vede dalle (6) e $(6)_{\text{bis}}$ del § 31 che la condizione d'incidenza

$$S(\rho_1 y + \rho_2 z + \sigma_1 y' + \sigma_2 z')(\overline{\rho}_1 \eta + \overline{\rho}_2 \xi + \overline{\sigma}_1 \eta' + \overline{\sigma}_2 \xi') = 0$$

è simmetrica in $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$ e $\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2$, senza essere soddisfatta identicamente per $\rho_1 = \overline{\rho}_1$ ecc., sicchè la correlazione definita dalle (9) e $(9)_{\text{bis}}$ è proprio una polarità rispetto ad una quadrica *H*. Ma di più si ha per le (11) del § 31

$$p = (yz), \qquad p' = (yz') - (zy'),$$

$$(10) \qquad p'' = (yz'') - (zy'') + 2(y'z') = -2c(yy') +$$

$$+(\theta'+2b)(yz') - (\theta'-2b)(zy') - 2a(zz') + 2(ac-b^2-j)(yz) + 2(y'z').$$

Ora dalla $(3)_{\text{bis}}$ § 32 e $(11)_{\text{bis}}$ § 31 si vede che similmente

$$\omega p = (\eta\zeta) \quad , \quad \omega p' = (\eta\zeta') - (\zeta\eta'),$$

$$\omega p'' = -2c(\eta\eta') + (\theta'+2b)(\eta\zeta') - (\theta'-2b)(\zeta\eta') - 2a(\zeta\zeta') +$$

$$+ 2(ac - b^2 - j)(\eta\zeta) + 2(\eta'\zeta'),$$

sicchè ogni retta linearmente dipendente da p, p', p'' è polare di sè stessa rispetto ad *H*, *c. d. d.* (Lo stesso si può far vedere, con la stessa facilità, delle generatrici del secondo sistema di *H*, cfr. § 34).

La dimostrazione precedente ci permette di provare per un'altra via il teorema del Cap. III, § 21 D che, *in un punto* x *di una superficie qualunque, la quadrica di Lie è l'iperboloide osculatore di ciascuna rigata asintotica (cioè di ognuna delle 2 rigate generate dalle tangenti asintotiche d'un sistema lungo la curva asintotica dell'altro sistema)*. Per chiarezza si supponga S riferita alle asintotiche. Una delle rigate del teorema è generata dalla retta luogo del punto $x_u + tx$, dando a u valore costante. Si vede subito che, se ξ è il piano tangente ad S, allora:

$$S\xi_u(x_u + tx) = S\xi(x_u + tx) = S(\xi_u + t\xi)_v (x_u + tx) = 0 ,$$

cosicchè il piano tangente alla rigata nel punto $x_u + tx$ è $\xi_u + t\xi$. Ora è $(xx_u) = (\xi\xi_u)$ [cfr. Cap. II, § 19 (V)], sicchè la nostra scelta del fattore delle coordinate del piano tangente è d'accordo con la $(3)_{\text{bis}}$ del § presente. Il piano polare del punto

$$\rho_1 x + \rho_2 x_u + \sigma_1 x_v + \sigma_2 x_{uv}$$

rispetto all'iperboloide osculatore coincide quindi col piano polare

$$\rho_1 \xi + \rho_2 \xi_u + \sigma_1 \xi_v + \sigma_2 \xi_{uv}$$

dallo stesso punto rispetto alla quadrica di Lie, *c. d. d.*

§ 33. — Orientazione delle generatrici; espressioni intrinseche. Formole relative al cambiamento di variabili.

Le quantità a, b, c, A, B, C, j precedentemente definite sono evidentemente invarianti per sostituzioni unimodulari. Occorre trovare delle espressioni che siano di più indipendenti dalla scelta particolare delle u, v (intrinseche) ed invarianti per sostituzioni moltiplicative. Ma bisogna tener presente che noi qui non facciamo uso di coordinate curvilinee u, v qualunque, ma soltanto tali che sia

$$x = y + uz$$

i punti y e z non dipendendo che da v. La trasformazione più generale che non cambia tale ipotesi è

$$(1) \qquad u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}}{\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}}, \quad v = V, \quad \bar{x} = \rho(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}) x,$$

$\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, V, \rho$ essendo funzioni di $\bar{v}$ tali che

$$\rho V(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) \gtrless 0.$$

Nella teoria delle superficie generali abbiamo chiamata intrinseca un'espressione il cui valore non cambia mutando le u, v ma *non alterando il fattore di* x. Corrispondentemente dovremmo qui chiamare intrinseca ogni espressione che non varia ponendo

$$u = \lambda_2 + \mu_2 \bar{u}, \quad v = V, \quad \bar{x} = x.$$

Ma qui troviamo più opportuno, chiamare *intrinseca* soltanto ogni espressione che non varia ponendo

$$(2) \quad u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}}{\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}}, \; v = V, \; \bar{x} = (\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}) x, \; (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2 = 1.$$

Per un'espressione intrinseca *nel senso ora precisato* l'esame del comportamento per sostituzione moltiplicativa si riduce a cercare come essa si trasformi ponendo

$$(3) \qquad u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad \bar{x} = \rho x.$$

Le trasformazioni (2) sono di due specie; quelle di *prima specie* per cui $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1$ e quelle di *seconda* per cui $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = -1$. Una espressione che non varia per quelle di prima specie e cambia invece di segno se $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = -1$, si dirà *impropriamente intrinseca.* Geometricamente, essendo

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} = \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})^2},$$

le trasformazioni (2) di seconda specie cambiano il *verso positivo* *sulle generatrici*, se si chiama verso positivo quello di u crescente. Il lettore verifichi, eseguendo la trasformazione (2) nella (7) del § 32 che *la quantità* $\dfrac{j}{a_{12}^2}$ *è intrinseca*. Ne daremo al § seguente una dimostrazione più facile.

Anche l'*equazione* $A + 2Bu + Cu^2 = 0$ è intrinseca, anzi intrinseca ed invariante. Infatti, noi sappiamo dalla teoria generale che l'espressione (8) $_{ter}$ del § 31 (elemento lineare) non cambia affatto per la (1). *I due punti sopra ogni generatrice per cui* $A + 2Bu + Cu^2 = 0$ *sono i punti flecnodali della generatrice; al variare di* v *essi descrivono le due curve flecnodali* di R. Ciò sappiamo già dal Cap. II § 16 B; un'altra dimostrazione sarà data al § 37.

Per vedere come si trasforma l'espressione $A + 2Bu + Cu^2$ per la sostituzione generale (1), si può (F.) far uso dell'invarianza dell'elemento lineare proiettivo.

Da (1) si ha

$$du = \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})^2} d\bar{u} + (\ldots) d\bar{v} \quad , \quad dv = V' d\bar{v} \, ,$$

dove non importa precisare il valore di $(\ldots)$. Se ne deduce tosto:

$$\frac{1}{2} \frac{(A + 2Bu + Cu^2) dv^2}{du + (a + 2bu + cu^2) dv} =$$

$$\frac{V'^2}{2(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)} \frac{[A(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})^2 + 2B(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})(\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}) + C(\lambda_2 + \mu_2 u)^2] d\bar{v}^2}{d\bar{u} + (\ldots) d\bar{v}} ,$$

sicchè

$$\bar{A} + 2\bar{B}\bar{u} + \bar{C}\bar{u}^2 = \tag{4}$$

$$= \frac{V'^2}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} \left[A(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})^2 + 2B(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})(\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}) + C(\lambda_2 + \mu_2 \bar{u})^2 \right].$$

D'altra parte, dal Cap. II sappiamo che è in virtù di (1)

$$\bar{F}_2 = \rho^2 (\lambda_1 + \mu_1 u)^2 F_2 \, ,$$

ed, essendo

$$F_2 = 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2 =$$

$$= 2a_{12} \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1 \overline{u})^2} V' d\overline{u}\, d\overline{v} + (\ldots) d\overline{v}^2,$$

sarà:

$$\overline{a}_{12} = V' \rho^2 (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) a_{12}, \tag{5}$$

sicchè:

$$\frac{1}{\overline{a}_{12}^{\,2}} (\overline{A} + 2\overline{B}\,\overline{u} + \overline{C}\,\overline{u}^2) = \tag{4 bis}$$

$$= \frac{1}{\rho^4 (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)} \frac{1}{a_{12}^{\,2}} \Big[A(\lambda_1 + \mu_1 \overline{u})^2 + 2B(\lambda_1 + \mu_1 \overline{u})(\lambda_2 + \mu_2 \overline{u}) +$$
$$+ C(\lambda_2 + \mu_2 \overline{u})^2 \Big]$$

ossia:

$$\frac{1}{\overline{a}_{12}^{\,2}} (\overline{A} + 2\overline{B}\,\overline{u} + \overline{C}\,\overline{u}^2) = \tag{4 ter}$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \mu_1 \overline{u})^2}{\rho^4 (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)} \cdot \frac{1}{a_{12}^{\,2}} (A + 2Bu + Cu^2).$$

L'aspetto della formola a cui si è arrivati rende spontanea l'idea d'introdurre coordinate omogenee sulla generatrice ponendo $u = t_2 : t_1$. Poichè

$$x = y + uz = y + \frac{\lambda_2 + \mu_2 \overline{u}}{\lambda_1 + \mu_1 \overline{u}} z = \frac{1}{\rho(\lambda_1 + \mu_1 \overline{u})} \overline{x} =$$

$$= \frac{1}{\rho(\lambda_1 + \mu_1 \overline{u})} (\overline{y} + \overline{u}\,\overline{z}),$$

è in virtù di (1)

$$\overline{y} = \rho(\lambda_1 y + \lambda_2 z) \quad , \quad \overline{z} = \rho(\mu_1 y + \mu_2 z). \tag{6}$$

Posto al solito $p = (yz)$, è $\overline{p} = \rho^2 p$; le sostituzioni (2) di prima specie non cambiano dunque il fattore delle coordinate delle generatrici.

Per definire come si trasformano t_1, t_2, è naturale porre la condizione

$$\overline{t_1}\,\overline{y} + \overline{t_2}\,\overline{z} = \rho(t_1 y + t_2 z).$$

Se ne deduce subito:

$$(6)_{\text{bis}} \qquad t_1 = \lambda_1 \overline{t_1} + \mu_1 \overline{t_2} \ , \quad t_2 = \lambda_2 \overline{t_1} + \mu_2 \overline{t_2}.$$

Ponendo nella $(4)_{\text{bis}}$ $u = \dfrac{t_2}{t_1}$, essa si scrive ora semplicemente:

$$(4)_{\text{quater}} \qquad \frac{1}{a_{12}^{\,2}}(At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2) =$$

$$= \rho^4(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\frac{1}{\overline{a}_{12}^{\,2}}(\overline{A}\,\overline{t}_1^2 + 2\overline{B}\,\overline{t}_1\,\overline{t}_2 + \overline{C}\,\overline{t}_2^2).$$

In particolare, posto $\rho = 1$, $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \pm 1$, si vede che *la forma quadratica*

$$(7) \qquad \frac{1}{a_{12}^{\,2}}(At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2) = f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = f(t)$$

è impropriamente intrinseca, vale a dire, mutando il parametro v, ed eseguendo la $(6)_{\text{bis}}$ in cui $(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2 = 1$, essa non cambia oppure cambia di segno secondo che $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1$ oppure $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = -1$. Questa proposizione è essenziale nella nostra teoria delle rigate. Al § prossimo se ne vedrà un'altra dimostrazione. Lo studio della forma intrinseca $f(t)$ e di $j : a_{12}^{\,2}$ sarà eseguito al § 35.

§ 34 — Linee asintotiche, la forma bilineare intrinseca.

A) Linee asintotiche.

Le generatrici $v =$ costante di una rigata formano un sistema di curve asintotiche. Per brevità, indicheremo in questo Capitolo, col termine asintotiche quelle dell'altro sistema (*), date dall'equazione differenziale $2a_{12}du + a_{22}dv = 0$ ossia

$$\frac{du}{dv} + a + 2bu + cu^2 = 0 . \tag{1}$$

L'equazione (1) ha la forma di Riccati, ed il suo integrale ha quindi la forma

$$u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \alpha}{\lambda_1 + \mu_1 \alpha}, \quad \alpha \text{ costante arbitraria.}$$

Segue il teorema di Serret, che *le asintotiche segnano sulle generatrici punteggiate proiettive.* Posto

$$u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}}{\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}},$$

il punto $y + \bar{u}z$ descrive un'asintotica se $\bar{u}$ è costante. Cerchiamo la corrispondente trasformazione delle coordinate omogenee t_1, t_2. Posto $u = t_2 : t_1$, la (1) diventa

$$t_2' t_1 - t_1' t_2 + at_1^2 + 2bt_1 t_2 + ct_2^2 = 0$$

che, introducendo un nuovo parametro σ, posso scrivere nella forma:

$$t_1' = (b + \sigma)t_1 + ct_2, \quad t_2' = -at_1 + (-b + \sigma)t_2 .$$

(*) Con ciò non escludiamo il caso che R sia una quadrica.

Posto

$$t_1=\lambda_1\overline{t}_1+\mu_1\overline{t}_2,\quad t_2=\lambda_2\overline{t}_1+\mu_2\overline{t}_2,$$

il precedente sistema deve essere soddisfatto dando alle $\overline{t}$ valori costanti qualunque, sicchè λ_1, λ_2 e μ_1, μ_2 ne sono due soluzioni particolari. Supposto $\rho=1$, deve essere secondo le nostre convenzioni $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=\pm 1=$ costante. Se ne deduce subito $\sigma=0$, cosicchè:

(2) $$t_1'=bt_1+ct_2,\quad t_2'=-at_1-bt_2.$$

Se R *è riferita alle asintotiche, è* $a=b=c=0$. Se R non è riferita alle asintotiche, vi si può arrivare cambiando il parametro col porre

$$u=\frac{\lambda_2+\mu_2\overline{u}}{\lambda_1+\mu_1\overline{u}}$$

e più precisamente

(3) $$t_1=\lambda_1\overline{t}_1+\mu_1\overline{t}_2,\quad t_2=\lambda_2\overline{t}_1+\mu_2\overline{t}_2$$

senza cambiare v e il fattore delle x; dove λ_1, λ_2 e μ_1, μ_2 sono due soluzioni del sistema lineare (2) scelte in modo che sia

(3) bis $$\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=1.$$

Secondo il § precedente, sarà poi

(3) ter $$\overline{y}=\lambda_1 y+\lambda_2 z,\quad \overline{z}=\mu_1 y+\mu_2 z.$$

Si considerino qui $v, \overline{t}_1, \overline{t}_2$ come variabili indipendenti; le derivate parziali di t_1 e t_2 rapporto a v sono date da (2). Essendo

$$t_1 y+t_2 z=\overline{t}_1\overline{y}+\overline{t}_2\overline{z},$$

si ha quindi derivando rapporto alla v sotto le ipotesi fatte

(4) $$t_1\dot{y}+t_2\dot{z}=\overline{t}_1\overline{y}'+\overline{t}_2\overline{z}',$$

dove abbiamo posto

$$(5) \qquad \dot{y} = y' + by - az, \quad \dot{z} = z' + cy - bz$$

Introducendo le $\dot{y}$, $\dot{z}$, le equazioni (11) del § 31 assumono la forma più perspicua

$$(6) \qquad \begin{aligned} y' &= -by + az + \dot{y}, \quad z' = -cy + bz + \dot{z}, \\ \dot{y}' &= -(B + j)y + Az + (\theta' - b)\dot{y} + a\dot{z}, \\ \dot{z}' &= -Cy + (B - j)z - c\dot{y} + (\theta' + b)\dot{z}. \end{aligned}$$

Correlativamente, posto

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \dot{\eta} = \eta' + b\eta - a\zeta, \quad \dot{\zeta} = \zeta' + c\eta - b\zeta,$$

si ha:

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \eta' &= -b\eta + a\zeta + \dot{\eta}, \quad \zeta' = -c\eta + b\zeta + \dot{\zeta}, \\ \dot{\eta}' &= (B - j)\eta - A\zeta + (\theta' - b)\dot{\eta} + a\dot{\zeta}, \\ \dot{\zeta}' &= -C\eta - (B + j)\zeta - c\dot{\eta} + (\theta' + b)\dot{\zeta}. \end{aligned}$$

Alle (6) e $(6)_{\text{bis}}$ si associano le formole seguenti che seguono subito dal § 31

$$(6)_{\text{ter}} \qquad \begin{aligned} &Sy\eta = 0, \; Sy\zeta = 0, \; Sz\eta = 0, \; Sz\zeta = 0, \\ &S\dot{y}\eta = 0, \; S\dot{y}\zeta = -a_{12}, \; S\dot{z}\eta = a_{12}, \; S\dot{z}\zeta = 0, \\ &Sy\dot{\eta} = 0, \; Sy\dot{\zeta} = a_{12}, \; Sz\dot{\eta} = -a_{12}, \; Sz\dot{\zeta} = 0, \\ &S\dot{y}\dot{\eta} = 0, \; S\dot{y}\dot{\zeta} = 0, \; S\dot{z}\dot{\eta} = 0, \; S\dot{z}\dot{\zeta} = 0. \end{aligned}$$

Notiamo pure qui le formole

$$(6)_{\text{quater}} \qquad (yz\dot{y}\dot{z}) = \omega a_{12}^2 \quad (\eta\zeta\dot{\eta}\dot{\zeta}) = \omega a_{12}^2$$

che si hanno subito dalle (4) § 31 e (5) § 32 e le formole

$$(6)_{\text{quinquies}} \qquad \begin{aligned} &(\eta\zeta) = \omega(yz), \; (\eta\dot{\eta}) = -\omega(y\dot{y}), \; (\zeta\dot{\zeta}) = -\omega(z\dot{z}) \\ &(\eta\dot{\zeta}) = -\omega(z\dot{y}), \; (\zeta\dot{\eta}) = -\omega(y\dot{z}), \; (\dot{\eta}\dot{\zeta}) = \omega(\dot{y}\dot{z}). \end{aligned}$$

Queste ultime si possono dedurre facilmente dalle $(6)_{\text{ter}}$ e $(6)_{\text{quater}}$. P. es., essendo

$$S\eta y = S\eta\dot{y} = S\dot{\eta}y = S\dot{\eta}\dot{y} = 0,$$

è

$$(\eta\dot{\eta}) = \lambda(y\dot{y}) .$$

Ora

$$(\eta\dot{\eta}\zeta\dot{\zeta}) = -(\eta\zeta\dot{\eta}\dot{\zeta}) = -\omega a_{12}^2,$$

$$(\eta\dot{\eta}\zeta\dot{\zeta}) = \lambda S(y\dot{y})\,(\zeta\dot{\zeta}) = \lambda \begin{vmatrix} Sy\zeta & Sy\dot{\zeta} \\ S\dot{y}\zeta & S\dot{y}\dot{\zeta} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = \lambda a_{12}^2,$$

sicchè $\lambda = -\omega$, ecc.

Continuando a considerare v, $\bar{t_1}$, $\bar{t_2}$ come variabili indipendenti, deriviamo l' identità (4) rapporto alla v. Per le (6) si ottiene

$$t_1\Big[-(B+j)y + Az + \theta'\dot{y}\Big] + t_2\Big[-Cy + (B-j)z + \theta'\dot{z}\Big] =$$

$$= \bar{t}_1\bar{y}'' + \bar{t}_2\bar{z}'' = \bar{t}_1\Big[-(\bar{B}+\bar{j})\bar{y} + \bar{A}\bar{z} + \theta'\bar{y}'\Big] +$$

$$+ \bar{t}_2\Big[-\bar{C}\bar{y} + (\bar{B}-\bar{j})\bar{z} + \theta'\bar{z}'\Big]$$

e quindi per la (4) stessa

$$t_1\Big[-(B+j)y + Az\Big] + t_2\Big[-Cy + (B-j)z\Big] =$$

$$= \bar{t}_1\Big[-(\bar{B}+\bar{j})\bar{y} + \bar{A}\bar{z}\Big] + \bar{t}_2\Big[-\bar{C}\bar{y} + (\bar{B}-\bar{j})\bar{z}\Big].$$

Correlativamente

$$t_1\Big[(B-j)\eta - A\zeta\Big] + t_2\Big[C\eta - (B-j)\zeta\Big] =$$

$$= \bar{t}_1\Big[(\bar{B}-\bar{j})\bar{\eta} - \bar{A}\bar{\zeta}\Big] + \bar{t}_2\Big[\bar{C}\bar{\eta} - (\bar{B}+\bar{j})\bar{\zeta}\Big].$$

Queste equazioni valgono anche senza l'ipotesi che i coefficienti della sostituzione (3) siano soluzioni di (2), purchè sia $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1$. Infatti, S essendo una tale sostituzione, è chiaro che si possono trovare due sostituzioni S_1, S_2 della stessa forma e con cofficienti soddisfacenti alla (2) e tali che S sia il prodotto di S_1 e dell'inversa di S_2. Partendo da (4), lo stesso si può dire per la:

$$t_1\dot{y} + t_2\dot{z} = \overline{t}_1\dot{\overline{y}} + \overline{t}_2\dot{\overline{z}}$$

B) **La forma bilineare fondamentale.**

Indicando con τ_1, τ_2 e $\overline{\tau}_1$, $\overline{\tau}_2$ risp. altri valori di t_1, t_2 e $\overline{t}_1$, $\overline{t}_2$, la forma bilineare

$$S(t_1\dot{y} + t_2\dot{z})\left\{\tau_1\left[(B-j)\eta - A\zeta\right] + \tau_2\left[C\eta - (B+j)\zeta\right]\right\}$$

non cambia per la sostituzione

$$\begin{matrix} t_1 = \lambda_1\overline{t}_1 + \mu_1\overline{t}_2, & \tau_1 = \lambda_1\overline{\tau}_1 + \mu_1\overline{\tau}_2 \\ t_2 = \lambda_2\overline{t}_1 + \mu_2\overline{t}_2, & \tau_2 = \lambda_2\overline{\tau}_1 + \mu_2\overline{\tau}_2 \end{matrix} \qquad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1.$$

Per le $(6)_{\text{ter}}$ la forma bilineare scritta sopra è

$$a_{12}\left[At_1\tau_1 + (B+j)t_1\tau_2 + (B-j)t_2\tau_1 + Ct_2\tau_2\right].$$

Più precisamente, si trova che *la forma bilineare*

$$(7)\quad f\begin{pmatrix} t_1, & \tau_1 \\ t_2, & \tau_2 \end{pmatrix} = f(t,\tau) = \frac{1}{a_{12}^2}\Big[At_1\tau_1 + B(t_1\tau_2 + t_2\tau_1) + Ct_2\tau_2 + $$

$$+ j(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\Big]$$

è impropriamente intrinseca. Per ciò che abbiamo provato, basta dimostrare che: 1° essa non cambia introducendo un nuovo parametro $\bar{v}$ al posto di v, 2° essa cambia di segno per la sostituzione $t_1 = -\bar{t}_1$, $t_2 = \bar{t}_2$ che equivale alla $y = -\bar{y}$, $z = \bar{z}$, $\eta = -\bar{\eta}$, $\zeta = \bar{\zeta}$, $a_{12} = -\bar{a}_{12}$; e ciò si vede subito dalle $(6)_{\text{bis}}$ e $(8)_{\text{bis}}$ del § 31 e (7) del § 32.

Dire che $f(t, \tau)$ è impropriamente intrinseca, equivale evidentemente a dire che $\frac{j}{a_{12}^2}$ è intrinseca e che la forma quadratica $f(t)$ è impropriamente intrinseca, il che abbiamo visto, per tutt'altra via, al § precedente.

È spontanea la domanda: *quale è il significato geometrico della proiettività definita sopra ogni generatrice dalla relazione bilineare* $f(t, \tau) = 0$?

La relazione $f(t, \tau) = 0$ è intrinseca, ma non invariante; e quindi non si può caratterizzare con elementi dipendenti soltanto dalla rigata R, ma occorre anche tener conto del fattore scelto per le coordinate $p = (yz)$ della generatrice. Per interpretare geometricamente il fattore delle p, si può considerare il complesso lineare di coordinate $p' = \frac{dp}{dv}$. Questo complesso (variabile al variare di v) contiene evidentemente la congruenza lineare speciale delle tangenti di R nei punti della generatrice corrispondente. Viceversa se facciamo passare, per ogni valore di v, un complesso lineare (non speciale) per la congruenza lineare delle tangenti di R nei punti della generatrice corrispondente, si può scegliere il fattore di p in modo che il complessso scelto abbia per coordinate le p', il che del resto non determina p che a meno di un fattore numerico. Il complesso p' contiene evidentemente tutte le generatrici del secondo sistema di H (tangenti asintotiche di R) convenendo chiamare primo sistema di generatrici di H quello cui appartiene la generatrice corrispondente p di R. Invece due sole generatrici del primo sistema di H appartengono al complesso p', cioè p ed un altra generatrice q. Dico che

$$q = (\dot{y}\dot{z}) \tag{8}$$

La retta q essendo intrinseca [cfr. (4)], si può supporre R riferita alle asintotiche. Allora $q = (y'z')$ e per le (10) del § 32:

$$2q = p'' - \theta' p' + 2jp \tag{9}$$

sicchè q sta su H. D'altra parte è

$$Sqp' = S(y'z')\Big[(yz') - (zy')\Big] = 0,$$

c. d. d. Osserviamo che l'equazione (9) vale evidentemente anche se R non è riferita alle asintotiche.

Considerando la retta q come immagine del fattore delle p, si arriva facimente al significato geometrico della proiettività $f(t, \tau) = 0$. *Si consideri la rigata* S *generata da* q; *fissato* v, *si costruisca il piano tangente di* R *nel punto* $t_1 y + t_2 z$; *nel punto d'intersezione di questo piano con la retta* q, *si costruisca il piano tangente di* S; *l'intersezione di quest'ultimo piano con la retta* p *è il punto* $\tau_1 y + \tau_2 z$ *corrispondente a* $t_1 y + t_2 z$ *nella proiettività* $f(t, \tau) = 0$.

Infatti l'intersezione del primo piano dell'enunciato con q essendo evidentemente $t_1 \dot{y} + t_2 \dot{z}$, le (6) mostrano che l'intersezione del secondo piano dell'enunciato con p è

$$t_1\Big[-(B + j)y + Az\Big] + t_2\Big[-Cy + (B - j)z\Big].$$

Ora

$$\begin{vmatrix} \tau_1, & -(B + j)t_1 - Ct_2 \\ \tau_2, & At_1 + (B - j)t_2 \end{vmatrix} = f(t, \tau), \text{ c. d. d.}$$

La quantità $\dfrac{j}{a_{12}{}^2}$ essendo intrinseca, per vedere come si trasforma per la sostituzione generale (1) del § 3, basta esaminare l'effetto della (3) del § 33. La (7) del § 32 mostra subito (si può per semplicità supporre $a = c = b = 0$) che è

$$\text{(10)} \qquad \bar{j} = j + \rho\left(\frac{1}{\rho}\right)'' + \theta'\frac{\rho'}{\rho}, \text{ se } \bar{u} = u, \ \bar{v} = v, \ x = \rho x.$$

C) Congruenza flecnodale.

La congruenza generata dalle generatrici del primo sistema delle quadriche osculatrici H si chiama la *congruenza flecnodale* di R; una rigata qualunque della congruenza flecnodale si può scegliere come la rigata delle rette q disponendo del fattore arbitrario delle p. In particolare possiamo scegliere il fattore ρ in modo che $\bar{q}$ descriva una sviluppabile della congruenza flecnodale, per il chè occorre e basta che la proiettività $\bar{f}(\bar{t}, \bar{\tau}) = 0$ sia degenere, ossia che sia soddisfatta la condizione

$$\bar{A}\bar{C} - (\bar{B} + \bar{j})(\bar{B} - \bar{j}) = \bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 + \bar{j}^2 = 0;$$

dalla (10) e dalla (4) del § precedente si ha

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' - \theta'\left(\frac{1}{\rho}\right)' + j \pm \sqrt{B^2 - AC} = 0. \tag{11}$$

Le tangenti asintotiche nei punti flecnodali si chiamano *tangenti flecnodali* di R e le rigate che esse generano si dicono *trasformate flecnodali* di R. I punti doppi delle proiettività $\bar{f}(\bar{t}, \bar{\tau}) = 0$ sono i punti flecnodali; applicando quest'osservazione alle proiettività $\bar{f} = 0$ degeneri, si arriva alla proposizione di Wilczynski che *le due trasformate flecnodali di* R *sono le due falde focali della congruenza flecnodale di* R. Da ciò appunto il termine di congruenza fllecnodale. La congruenza flecnodale è quindi un caso particolare delle congruenze con ambedue le falde focali rigate (che saranno studiate al Cap. seguente).

Terminiamo questo § con un'osservazione relativa alle *correlazioni*. Per passare da R ad una superficie correlativa, basta sostituire η e ζ alle y e z e quindi, per le $(4)_{\text{bis}}$ e (5) del § 32 y e z alle η e ζ. Da ciò si vede immediatamente che *la forma bilineare* $\mathrm{f}(\mathrm{t}, \tau)$ *si cambia in* $-\mathrm{f}(\tau, \mathrm{t})$ *passando alla rigata correlativa*; in altre parole, la forma quadratica $f(t)$ cambia di segno, e la quantità $\dfrac{j}{a_{12}'^{\,2}}$ non cambia.

§ 35. — Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a due curve flecnodali distinte.

A) Coordinate normali.

Per arrivare dalla forma quadratica intrinseca $f(t)$ e dalla quantità intrinseca $\dfrac{j}{a_{12}^2}$ ad espressioni che siano anche invarianti, occorre esaminare l'effetto della sostituzione moltiplicativa $\bar{x} = \rho x$. Abbiamo già osservato che è (cfr. $(4)_{\text{quater}}$ del § 33 e (10) del § 34)

$$(1) \qquad \bar{f}(t) = \frac{1}{\rho^4} f(t), \quad \frac{\bar{j}}{\bar{a}_{12}^2} = \frac{1}{a_{12}^2}\left[j + \rho\left(\frac{1}{\rho}\right)'' + \theta' \frac{\rho'}{\rho}\right] \text{ (*)}$$

Le variabili t_1, t_2 della forma quadratica $f(t)$ non sono completamente determinate; esse si possono sostituire, come sappiamo, da $\bar{t}_1, \bar{t}_2$, dove

$$t_1 = \lambda_1 \bar{t}_1 + \mu_1 \bar{t}_2, \quad t_2 = \lambda_2 \bar{t}_1 + \mu_2 \bar{t}_2, \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm 1;$$

se $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = -1$, occorre inoltre cambiare il segno delle A, B, C. *Il discriminante* $B^2 - AC$ di $f(t)$ *è quindi intrinseco*; e *l'effetto della sostituzione moltiplicativa* $\bar{x} = \rho x$ *è*

$$(1)_{\text{bis}} \qquad B^2 - AC = \rho^8 (\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C}).$$

Il segno

$$(1)_{\text{ter}} \qquad \varepsilon = sgn\,(B^2 - AC)$$

di $B^2 - AC$ *è quindi intrinseco ed invariante;* ciò è a priori chiaro, essendo $\varepsilon = 1$ se le due curve flecnodali sono reali e distinte, $\varepsilon = -1$ se le due curve flecnodali sono immaginarie coniugate,

---

(*) È facile verificare che il valore di $\dfrac{\bar{j}}{\bar{a}_{12}^2}$ è indipendente dalla scelta particolare di v.

ed $\varepsilon = 0$ se le due curve flecnodali coincidono. In questo § supporremo $\varepsilon^2 = 1$; *è spontanea l' idea di normalizzare il fattore arbitrario colla supposizione intrinseca ed invariante*

$$B^2 - AC = \varepsilon. \tag{2}$$

Le coordinate p corrispondenti si diranno *coordinate normali;* la $(1)_{\text{bis}}$ mostra che le coordinate normali contengono un radicale quarto; precisamente se p non sono normali, le coordinate normali sono

$$\pm \sqrt[4]{|B^2 - AC|}\, p.$$

Il segno delle coordinate normali non è determinato; la scelta di esso equivale, come sappiamo, alla scelta del verso positivo sulle generatrici. Possiamo scegliere anche la variabile indipendente v in modo sostanzialmente determinato, supponendo (in coordinate normali) $a_{12} = \pm 1$, ossia

$$\frac{1}{2} Sdp \cdot dp = (yz\, dy\, dz) = \omega dv^2, \quad \omega = \pm 1. \tag{3}$$

(Il segno ω del resto non è invariante che rispetto a collineazioni a modulo positivo).

La variabile v determinata da (3) a meno del segno e di una costante additiva si dirà l' *arco proiettivo* della rigata. In coordinate non normali è

$$\omega dv^2 = \sqrt{|B^2 - AC|}\, (yz\, dy\, dz).$$

B) **Invarianti fondamentali d' una rigata a linee flecnodali distinte.**

Nei calcoli seguenti faremo uso di coordinate normali, assumeremo l' arco proiettivo come variabile indipendente ed inoltre supporremo la rigata R riferita alle asintotiche. Le variabili t_1, t_2 non sono ancora completamente determinate; fissando anche il verso positivo sulle generatrici, è ancora lecito di porre

$$t_1 = \lambda_1 \bar{t_1} + \mu_1 \bar{t_2}, \quad t_2 = \lambda_2 \bar{t_1} + \mu_2 \bar{t_2}, \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1$$

(4) $$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \textit{ costanti};$$

se invece invertiamo il verso positivo sulle generatrici, dobbiamo porre

$$t_1 = \lambda_1 \bar{t}_1 + \mu_1 \bar{t}_2, \quad t_2 = \lambda_2 \bar{t}_1 + \mu_2 \bar{t}_2, \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = -1$$

(4) bis $$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \textit{ costanti};$$

e di più, *cambiare il segno di* A, B, C. La quantità j corrispondente alle nostre ipotesi è intrinseca ed invariante; la forma quadratica

(5) $$f(t) = At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2$$

a discriminante $B^2 - AC = \varepsilon$ è impropriamente intrinseca (cambiando di segno, se si inverte il verso positivo sulle generatrici) ed invariante; *e tali sono pure le forme*

$$f'(t) = A' t_1^2 + 2B' t_1 t_2 + C' t_2^2,$$

(5) bis $$f''(t) = A'' t_1^2 + 2B'' t_1 t_2 + C'' t_2^2$$

dove gli apici indicano derivate rispetto all'arco proiettivo v*; però con l'avvertenza che* f′(t) *cambia di segno anche se si inverte il verso positivo dell'arco proiettivo.* Essendo $a = b = c = 0$, R *è ben determinata, a meno di collineazioni, date* f(t) *e* j *in funzione di* v; (se si vuole determinare R a meno di collineazioni a modulo positivo, bisogna conoscere anche il segno ω). Osserviamo ancora che può essere $B^2 - AC = 0$ per qualche generatrice particolare; tali generatrici sono da escludersi come singolari, se si fa uso di coordinate normali e dell'arco proiettivo.

Derivando la (2) si ottiene:

$$AC' + CA' - 2BB' = 0;$$

le forme quadratiche $f(t)$ e $f'(t)$ sono quindi *coniugate; i due punti* (5)ter *che sono definiti da* f′(t) = 0 *sopra ogni generatrice sono coniugati armonici rispetto alla coppia dei punti flecnodali e si diranno* **punti armonici** *della generatrice;* essi descrivono le due **curve armoniche** di R. Se ne vedrà più avanti un significato geometrico;

un significato più semplice sarà dato al § 37. Il risultante delle forme $f(t)$ e $f'(t)$

$$4\,(B^2 - AC)\,(B'^2 - A'C') - (AC' + CA' - 2BB')^2$$

si riduce, in virtù di (2) e $(5)_{\text{ter}}$, a $4\varepsilon h$, dove

$$h = B'^2 - A'C' \tag{6}$$

è intrinseco ed invariante; si vedrà fra poco che è $\mathrm{h} = 0$ *allora ed allora soltanto che* R *possiede una retta direttrice.* La quantità

$$k = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \tag{7}$$

è impropriamente intrinseca ed invariante, ma cambia di segno anche invertendo il verso positivo di v. Si vedrà *al* § 37 *che è* $\mathrm{k} = 0$ *allora e allora soltanto che* R *appartiene ad un complesso lineare; in particolare se* $\mathrm{h} = 0$, *è anche* $\mathrm{k} = 0$. Ciò si può verificare con facile calcolo. Infatti

$$2k^2 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & -2B & A \\ C' & -2B' & A' \\ C'' & -2B'' & A'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2(B^2 - AC) & AC' + CA' - 2BB' & AC'' + CA'' - 2BB'' \\ AC' + CA' - 2BB' & -2(B'^2 - A'C') & A'C'' + C'A'' - 2B'B'' \\ AC'' + CA'' - 2BB'' & A'C'' + C'A'' - 2B'B'' & -2(B''^2 - A''C'') \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2\varepsilon & 0 & 2h \\ 0 & -2h & -h' \\ 2h & -h' & -2(B'' - A''C'') \end{vmatrix} = 0, \text{ se } h = 0.$$

Dalla $(5)_{\text{ter}}$ segue per un noto teorema d'algebra (o se si vuole di geometria proiettiva) che, se $\varepsilon = -1$, $h \geqq 0$. Dimostriamo il

Teorema fondamentale:

Se $\mathrm{h} \neq 0$, *cioè se* R *ha curve flecnodali distinte, e non possiede nessuna retta direttrice, la superficie* R *è determinata a meno di colli-*

neazioni, se si conoscono $\varepsilon = \pm 1$, $h \neq 0$, k, j *in funzione dell'arco proiettivo* v; *ma affinchè* R *esista, deve essere* $h > 0$ *se* $\varepsilon = -1$. Basta vedere che la forma quadratica $f(t)$ ne è ben determinata a meno di sostituzioni della forma (4), $(4)_{\text{bis}}$. Per fissare le idee, supponiamo $\varepsilon = 1$, $h > 0$; il lettore vedrà da sè che il teorema vale anche per $\varepsilon = -1$, $h > 0$, e per $\varepsilon = 1$, $h < 0$. Il dare h e k equivale a supporre soddisfatte *per un valore iniziale* $v = v_0$ le

$$(8) \qquad B^2 - AC = 1, \; B'^2 - A'C' = h, \; AC' + CA' - 2BB' = 0,$$

e *dappertutto* le equazioni ottenute derivando

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} AC'' + CA'' - 2\,BB'' = 2h, \\ A'C'' + C'A'' - 2\,B'B'' = -h', \end{array} \right.$$

oltre alla

$$\begin{vmatrix} A\,B \\ A'B' \end{vmatrix} C'' + \begin{vmatrix} B\,C \\ B'C' \end{vmatrix} A'' - \begin{vmatrix} A\,C \\ A'C' \end{vmatrix} B'' = k\,.$$

Le (9) si possono risolvere rispetto a A'', B'', C''; infatti il loro determinante vale

$$\begin{vmatrix} A\,B \\ A'B' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & -2B \\ C' & -2B' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B\,C \\ B'C' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2B & A \\ -2B' & A' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A\,C \\ A'C' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C\,A \\ C'A' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C & -2B & A \\ C' & -2B' & A' \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2\,(B^2 - AC) & AC' + CA' - 2BB' \\ AC' + CA' - 2BB' & -2(B'^2 - A'C') \end{vmatrix} = 4h.$$

Le (9) determinano dunque completamente le A, B, C appena siano date $h > 0$, k con l'unica condizione che i *valori iniziali* soddisfino alle (8). Noi possiamo con una delle trasformazioni (4) portare i valori iniziali delle radici di $f = 0$, $f' = 0$ (reali per ipotesi) in un gruppo armonico prefissato a piacere, p. es. le radici di $f = 0$ nei punti $u = 0, \infty$, quelle di $f' = 0$ in $u = 1, -1$. Sarà inizialmente

$$A = C = 0, \quad B' = 0, \quad A' + C' = 0$$

sicchè le (8) danno

$$B^2 = 1, \quad A'^2 = h,$$

e abbiamo quattro gruppi possibili di valori iniziali e cioè

$$\left.\begin{array}{lll} 1^\circ & f(t) = 2t_1 t_2, & f'(t) = \sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2), \\ 2^\circ & f(t) = -2t_1 t_2, & f'(t) = \sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2), \\ 3^\circ & f(t) = 2t_1 t_2, & f'(t) = -\sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2), \\ 4^\circ & f(t) = -2t_1 t_2, & f(t) = -\sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2). \end{array}\right\} \text{per } v = v_0.$$

Ma tutti questi casi sono equivalenti per le nostre trasformazioni (4) e $(4)_{\text{bis}}$; infatti da 1° per es. si passa a 2° ponendo $t_1 = \overline{t_2}$, $t_2 = \overline{t_1}$ e cambiando i segni, a 3° ponendo $t_1 = -\overline{t_1}$, $t_2 = \overline{t_2}$ e cambiando i segni, ed a 4° ponendo $t_1 = \overline{t_2}$, $t_2 = -\overline{t_1}$. Pertanto considerando non distinti due sistemi di valori di A, B, C che si deducono l'uno dall'altro con una delle trasformazioni (4) o $(4)_{\text{bis}}$, le A, B, C sono completamente determinate dalle equazioni differenziali (9) e dalle condizioni iniziali (8), c. d. d. Dimostreremo al § 38 che il calcolo si può fare in modo che non si abbia ad integrare che un' equazione di Riccati.

Supponiamo invece $h = 0$. Dimostreremo:

Se $h = 0$, *una delle radici* $t_1 : t_2$ *di* $f(t) = 0$ *è costante, e una delle linee flecnodali è una direttrice rettilinea.* Infatti si può porre:

$$f(t) = f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = 2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(\beta_1 t_2 - \beta_2 t_1)$$

sicchè

$$f'(t) = 2(\alpha_1' t_2 - \alpha_2' t_1)(\beta_1 t_2 - \beta_2 t_1) + 2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(\beta_1' t_2 - \beta_2' t_1).$$

Abbiamo visto sopra che è, in virtù di $h = 0$, $f'\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$ oppure $f'\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$; sia p. es.

$$f'\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 2(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)(\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1') = 0.$$

Ma $(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2=\varepsilon \gtrless 0$, sicchè $\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'=0$ ossia $\alpha_1:\alpha_2=$ $=$ costante.

Per un momento escludiamo il caso che tutte le due radici e quindi per la (2) anche tutti i coefficienti di f siano costanti; allora $\alpha_1:\alpha_2$ è reale sicchè $\varepsilon=1$; e con una trasformazione (4) si può ottenere che sia $\alpha_1=0$ ossia $C=0$. La linea $t_1=0$ generata dal punto z è quindi flecnodale ed asintotica e dunque *retta*. Ciò si verifica facilmente. Infatti, se $a=b=c=C=\theta'=0$, la seconda delle (11) del § 31 si riduce a

$$z''=(B-j)z,$$

sicchè fra le quattro coordinate z vi sono due relazioni lineari a coefficienti costanti. Supposto $C=0$, la (2) dà

$$B=\sigma=\pm 1, \tag{10}$$

sicchè

$$f(t)=t_1(At_1+2\sigma t_2).$$

Le trasformazioni (4) che non cambiano l'ipotesi $C=0$ sono

$$\bar{t}_1=\lambda\bar{t}_1,\ \ t_2=\mu\bar{t}_1+\frac{1}{\lambda}\bar{t}_2,\ (\lambda,\ \mu \text{ costanti},\ \lambda\neq 0).$$

Sostituendo in $f(t)$ si ottiene

$$f(t)=\bar{t}_1(\bar{A}\bar{t}_1+2\sigma\bar{t}_2),$$

dove

$$\bar{A}=A\lambda^2+2\sigma\lambda\mu.$$

Delle trasformazioni $(4)_{\text{bis}}$ non occorre che considerare una sola, p. es. la

$$t_1=\bar{t}_1,\ t_2=-\bar{t}_2,$$

seguita dal cambiamento di segno di f, che dà

$$-f(t)=\bar{t}_1(-A\bar{t}_1+2\sigma\bar{t}_2).$$

Si vede dunque che tanto il segno σ quanto la quantità

$$D = \frac{A''}{A'} \tag{11}$$

sono intrinseci ed invarianti, e che quindi:

2° Teorema fondamentale:

Una rigata R *con una sola retta direttrice e con un' altra curva flecnodale non retta, è determinata, a meno di collineazioni, date* $\sigma = \pm 1$, D *e* j *in funzione dell' arco proiettivo.*

Resta il caso che tutti i coefficienti di $f(t)$ siano costanti. Il ragionamento che precede mostra che R *possiede due rette direttrici distinte, reali o immaginarie se i coefficienti della* f *sono costanti.*

È evidente il teorema: *Una rigata* R *con due rette direttrici distinte, cioè appartenente ad una congruenza lineare non speciale è determinata a meno di collineazioni conoscendo* $\varepsilon = \pm 1$ *e* j *in funzione dell' arco proiettivo* v.

L' osservazione fatta alla fine del § 34 permette di indicare subito l' effetto del passaggio da R ad una superficie correlativa. Se $h \neq 0$, ε, h e j non cambiano e k cambia di segno. Sarebbe facile dedurre senza calcoli che $k = 0$ è la condizione perchè la rigata appartenga ad un complesso lineare. Se $h = 0$, ed i coefficienti di $f(t)$ non sono tutti costanti, D e j non cambiano, muta invece il segno η. Infine una rigata appartenente ad una congruenza lineare ammette sempre correlazioni in sè.

C) Alcune applicazioni geometriche (*).

Terminiamo il § con *l' interpretazione geometrica delle coordinate normali.* Per quanto abbiamo detto al § 34, basta interpretare la

(*) Le quadriche W_1 e W_2 e le rette q_1 e q_2 che qui definiremo furono introdotte per la prima volta da Čech nella memoria: « Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek » (Géométrie proiective de cinq droites infiniment voisines) nelle Publications de la Faculté des Sciences de l' Université Masaryk, 1921, n. 4.

posizione della retta q corrispondente [che diremo *generatrice principale di H* (*)]. A tale scopo determiniamo, per un valore fisso di v, il luogo dei poli della generatrice corrispondente rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche. Per l'asintotica generata da $x = y + uz$ il polo della generatrice è, secondo il Cap. III § 26

$$4x_v - \frac{\partial \log \frac{a_{12}^2}{\gamma}}{\partial v} x,$$

Essendo $F_3 = a_{12}\gamma dv^3$, sarà [(8) del § 31]

$$a_{12} = 1, \ \gamma = A + 2Bu + Cu^2,$$

$$4x_v - \frac{\partial \log \frac{a_{12}^2}{\gamma}}{\partial v} x = 4(y' + uz') + \frac{A' + 2B'u + C'u^2}{A + 2Bu + Cu^2}(y + uz).$$

Posto al solito $u = t_2 : t_1$, *il polo della generatrice* p *rispetto alla conica osculatrice dell'asintotica* $t_1 y + t_2 z$ *è*

$$(12) \qquad 4f(t)(t_1 y' + t_2 z') + f'(t)(t_1 y + t_2 z).$$

Per fissare le idee si supponga $h \geqq 0$. Le forme $f(t)$ e $f'(t)$ sono allora prive di fattor comune sicchè: *Fissato* v, *il luogo dei poli della generatrice corrispondente di* R *è una cubica sghemba* C. *Le generatrici del primo sistema di* H *sono bisecanti di* C; *in particolare, la generatice* p *di* R *interseca* C *nei punti flecnodali. La generatrice principale* q *di* H *interseca* C *in una coppia di punti armonica rispetto alle tangenti flecnodali. Le generatrici del secondo sistema di* H *che passano pei punti d'intersezione di* q *e* C *incontrano* p *nei punti armonici di* p. La retta p e la cubica C sono la base di un fascio di quadriche, al quale appartengono due coni i cui vertici sono rispettivamente nei due punti flecnodali; è notevole la quadrica del fascio coniugata armonica di H rispetto ai due coni del fascio, che è quindi *il luogo delle rette che congiungono i poli della*

(*) La rigata generata da q è quella che il Wilczynski chiama rigata principale della congruenza flecnodale.

generatrice p *rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche che passano per i diversi punti* x *di* p *ai punti coniugati armonici di* x *rispetto ai punti flecnodali; tale quadrica sarà indicata con la lettera* W_1. Incontreremo la quadrica W_1 ai Cap. IX e X nello studio delle corrispondenze Σ e delle quadriche di Moutard. Posto per un punto generico dello spazio

$$x = \lambda y + \mu z + \lambda_1 y' + \mu_1 z', \tag{13}$$

e riguardando λ, μ, λ_1, μ_1 come coordinate di x in un sistema di riferimento dipendente da v, si trova facilmente che l'equazione di W_1 è

$$4[A\lambda\lambda_1 + B(\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu) + C\mu\mu_1] - (A'\lambda_1^2 + 2B'\lambda_1\lambda_2 + C'\lambda_2^2) = 0. \tag{14}$$

Correlativamente, il piano polare di p rispetto al cono osculatore dell'asintotica $t_1 y + t_2 z$ è

$$4f(t)(t_1\eta' + t_2\zeta') + f'(t)(t_1\eta + t_2\zeta). \tag{12$_{\text{bis}}$}$$

Il fascio di piani di asse p e l'insieme dei piani che si ottengono da $(12)_{\text{bis}}$ al variare di t_1, t_2 sono la base di una schiera di quadriche. Indichiamo con W_2 la quadrica della schiera coniugata armonica di H rispetto alle due coniche della schiera. Essendo ξ un piano generico dello spazio, posto

$$\xi = \lambda\eta + \mu\zeta + \lambda_1\eta' + \mu_1\zeta' \tag{13$_{\text{bis}}$}$$

in coordinate λ, μ, λ_1, μ_1 [diverse da quelle definite da (13)] l'equazione di W_2 è la stessa (6).

Se R possiede una retta direttrice, la cubica C si spezza in tale retta ed in una conica che interseca la retta direttrice nel suo punto d'incontro con la generatrice principale di H. Se R possiede due rette direttrici, C si spezza in queste due rette e nella generatrice principale di H. Ciò si vede immediatamente dalla (12). Ometto pure le facili dimostrazioni delle osservazioni seguenti: *Le quadriche* W_1 *e* W_2 *sono polari reciproche tanto rispetto ad* H, *quanto rispetto al complesso lineare osculatore* (§ 37) di R. Se R appartiene ad una congruenza lineare, W_1 e W_2 coincidono. In generale, W_1 e W_2 si toccano lungo p, ed hanno in comune due generatrici dell' altro sistema che escono dai punti armonici. *Le due generatrici di* W_2 *passanti per un punto flecnodale di* p (una delle quali è appunto p) *sono coniugate armoniche rispetto alla tangente flecnodale* (tangente asintotica nel punto flecnodale) *e la tangente alla curva flecnodale.*

Qualche importanza ha pure quella generatrice q_1 del primo sistema (cui appartiene p) di W_1 che interseca C in due punti coniugati armonici rispetto a quelle generatrici dell' altro sistema che escono dai punti flecnodali di p; la definizione di tale retta essendo analoga a quella di q, la diremo *generatrice principale di* W_1. Un facile calcolo dà

$$\begin{aligned}(14)\qquad q_1 = &(A'C'-B'^2)(yz)+4(A'C-BB')(yz')-4(AC'-BB')(zy')+\\ &+4(BC'-CB')(yy')+4(AB'-A'B)(zz')+16(AC-B^2)(y'z').\end{aligned}$$

Correlativamente si definisce la *generatrice principale* q_2 *di* W_2, le cui coordinate sono

$$\begin{aligned}(14)_{\text{bis}}\qquad q_2 = &(A'C'-B'^2)(yz)+4(AC'-BB')(yz')-4(A'C-BB')(zy')-\\ &-4(BC'-CB')(yy')-4(AB'-A'B)(zz')+16(AC-B^2)(y'z').\end{aligned}$$

È dunque

$$q_1+q_2+2hp+32\varepsilon q=0:$$

le due coppie di rette p, q; q_1, q_2 *appartengono ad una schiera rigata e si dividono armonicamente. Se* h $=0$, q, q_1 *e* q_2 *hanno un punto comune sulla direttrice di* R.

§ 36. — Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a curve flecnodali coincidenti.

A) Determinazione di queste rigate per mezzo di invarianti.

Qui vogliamo studiare il caso, escluso al § precedente, che sia identicamente $B^2-AC=0$. Il discriminante di $f(t)$ essendo nullo, si ha

$$(1) \qquad f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \sigma(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)^2 = \sigma(\alpha t)^2, \quad \sigma = \pm 1,$$

il segno σ dipendendo dal verso scelto come positivo sulle generatrici di R. Per scegliere in modo intrinseco e invariante il fattore arbitrario di p o, ciò che è lo stesso, di $f(t)$, il procedimento del § 35 non si applica più. Escludiamo dapprima *il caso che l'unica curva flecnodale* $\alpha_1 y + \alpha_2 z$ *sia retta; in tal caso,* come vedremo al § prossimo, *la rigata apparterrebbe ad una congruenza lineare speciale;* riferendo R alle asintotiche supponiamo dunque che $\alpha_1 : \alpha_2$ non sia costante, sicchè il determinante

$$\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1' = (\alpha\alpha')$$

sarà $\gtrless 0$. Del resto, può essere $(\alpha\alpha') = 0$ per delle generatrici particolari; noi le escluderemo come singolari. Poniamo

$$(2) \qquad \delta = \operatorname{sgn}(\alpha\alpha') \quad , \quad \delta = \pm 1;$$

sicchè (cfr. la (1) § 35) δ è intrinseco (non dipendendo neanche del verso positivo sulle generatrici) ed invariante, ma dipende però dal verso positivo del parametro v. Per scegliere in modo determinato il fattore arbitrario di $f(t)$ basta supporre

$$(3) \qquad (\alpha\alpha') = \delta.$$

Le coordinate p corrispondenti a (3) e a $\sigma = 1$, che sono quindi ben determinate *anche nel segno,* si diranno *coordinate normali.* Anche la variabile indipendente v si può scegliere in modo ben determinato (anche nel segno) a meno di una costante additiva supponendo, se p sono coordinate normali:

$$(4) \qquad \frac{1}{2} Sdp.dp = (yzdydz) = \omega dv^2, \quad \omega = \pm 1, \quad \delta = 1;$$

la si dirà l'*arco proiettivo* di R. Non c'è pericolo d'equivoco colla denominazione del § 35, le coordinate normali e l'arco proiettivo ivi definiti essendo identicamente nulli per $B^2 - AC = 0$.

Supponiamo che le p siano coordinate normali, che R sia riferita alle asintotiche, e che v sia l'arco proiettivo, sicchè

$$f(t) = (\alpha t)^2 \quad , \quad (\alpha\alpha') = 1.$$

Derivando si ha $(\alpha\alpha'') = 0$ sicchè

$$\alpha_1'' = l\alpha_1 \quad , \quad \alpha_2'' = l\alpha_2. \tag{5}$$

3° Teorema fondamentale:

La quantità l è evidentemente intrinseca ed invariante ed il seguente teorema è ovvio: *Una rigata* R *a curve flecnodali coincidenti, ma non appartenente ad una congruenza lineare, è determinata a meno di collineazioni dati gli invarianti* l *e* j *in funzione dell'arco proiettivo.* Dall' osservazione alla fine del § 34 si deduce che una correlazione non cambia che il verso positivo dell' arco proiettivo.

In secondo luogo supponiamo che sia (riferita R alle asintotiche) $\alpha_1 : \alpha_2 =$ costante. Si può determinare il fattore di $f(t)$ e quindi quello di p *a meno di un fattore costante* ponendo la condizione che α_1 e α_2 stesse siano costanti; fatto ciò, si può scegliere dv secondo la (4). Essendo c una costante arbitraria si può ancora sostituire dv e j con

$$c dv \quad , \quad c^{-2} j.$$

Supposto $j \gtrless 0$, sia

$$e = \operatorname{sgn} j \quad , \quad w = \int \sqrt{|j|}\, dv\,;$$

w è ben determinata a meno del segno e di una costante additiva.

4° Teorema fondamentale:

Una rigata R *appartenente ad una congruenza lineare speciale per cui* $\mathrm{j} \gtrless 0$ *è determinata a meno di collineazioni dato* $\mathrm{e} = \pm 1$, *e* $\dfrac{\mathrm{d}\log|\mathrm{j}|}{\mathrm{dw}}$ *in funzione di* w. *Se invece* $\mathrm{j} = 0$, non esiste nessun differenziale intrinseco ed invariante e nessuna espressione finita intrinseca ed invariante: la variabile v non si può fissare che a meno di sostituzioni del tipo $av+b$ con a, b costanti arbitrarie. *La rigata* R *se* $\mathrm{j}=0$, *ammette quindi* ∞^3 *collineazioni in sè* (*) *ed è dunque la rigata cubica di Cayley.* Ciò si conferma del resto subito integrando le equazioni (11) del § 31. Postovi

$$A=1 \quad , \quad B=C=0 \quad , \quad \theta'=0 \quad , \quad j=0 \quad , \quad a=b=c=0\,,$$

esse diventano

$$y''=z \quad , \quad z''=0\,,$$

ed integrando si ha:

$$z=(0\,,0\,,1\,,v) \quad , \quad y=\left(1\,,v\,,\frac{v^2}{2}\,,\frac{v^3}{6}\right),$$

$$x=y+uz=\left(1\,,v\,,\frac{v^2}{2}+u\,,\frac{v^3}{6}+uv\right)$$

ossia, indicando con $1\,,x\,,y\,,z$ le quattro coordinate di x,

$$x=v \quad , \quad y=\frac{v^2}{2}+u \quad , \quad z=\frac{v^3}{6}+uv\,,$$

$$z=xy-\frac{x^3}{3}.$$

B) **Alcune interpretazioni geometriche.**

Analogamente a quanto si è fatto al § 35 si possono interpretare geometricamente le coordinate normali. Si consideri anche qui, per un valore fisso di v, il luogo dei poli di p rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche. Tale luogo è sempre dato dalla (12) § 35, ma qui si può scartare il fattore (αt); sicchè rimane

---

(*) Non soltanto ∞^1 perchè ogni rigata appartenente ad una congruenza lineare (generale o speciale) ammette ∞^1 collineazioni in sè che lasciano invariate le singole generatrici.

(6) $$2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(t_1 y' + t_2 z) + (\alpha_1' t_2 - \alpha_2' t_1)(t_1 y + t_2 z).$$

Quindi *il luogo dei poli di una generatrice rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche è una conica.* Con la lettera W_1 indichiamo qui il piano della conica, cioè il piano

(7) $$\alpha_1'\eta + \alpha_2'\zeta - 2(\alpha_1\eta' + \alpha_2\zeta').$$

Correlativamente, i piani polari della generatrice p rispetto ai coni osculatori delle asintotiche sono dati da

(6)$_{\text{bis}}$ $$2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(t_1\eta' + t_2\zeta') + (\alpha_1' t_2 - \alpha_2' t_1)(t_1\eta + t_2\zeta),$$

e sono i piani tangenti di H passanti per il punto W_2

(7)$_{\text{bis}}$ $$\alpha_1' y + \alpha_2' z - 2(\alpha_1 y + \alpha_2 z)$$

che è il polo di W_1 rispetto ad H. Se $(\alpha\alpha') = 0$ la detta conica si spezza nella direttrice e nella retta $q = (y'z')$ corrispondente a quella scelta del fattore di p per cui i coefficiènti di $f(t)$ sono costanti. Se invece $(\alpha\alpha') \gtrless 0$ la conica è propria. Supponiamo come sopra $(\alpha\alpha') = 1$ e chiamiamo, come al § 35, *generatrice principale di* H la retta q corrispondente. Il punto della conica (6) situato sulla generatrice principale di H sta nel piano osculatore della curva flecnodale (unica). Infatti, tale punto è dato da $\alpha_1' y + \alpha_2' z$. D'altra parte, le equazioni (11) del § 31 si riducono, per le ipotesi fatte, a

$$y'' = (\alpha_1\alpha_2 - j)y + \alpha_2^2 z\ ,\ z'' = -\alpha_1^2 y - (\alpha_1\alpha_2 + j)z\,,$$

sicchè

$$\alpha_1 y'' + \alpha_2 z'' = -j(\alpha_1 y + \alpha_2 z)$$

e quindi

$$(\alpha_1 y + \alpha_2 z)'' = -j(\alpha_1 y + \alpha_2 z) + 2(\alpha_1' y' + \alpha_2' z') + \alpha_1'' y + \alpha'' z$$

ed osservando (5)

$$2(\alpha_1' y' + \alpha_2' z') = (\alpha_1 y + \alpha_2 z)'' + (j - l)(\alpha_1 y + \alpha_2 z).$$

La generatrice principale di H *incontra* quindi *l'intersezione del piano* W_1 *col piano osculatore alla curva flecnodale;* correlativamente si vede che *essa incontra pure la retta che congiunge il punto* W_2 *al punto cuspidale della sviluppabile circoscritta a* R *lungo la curva flecnodale.*

È notevole che lo studio fatto a questo § ed al precedente si può applicare senz' altro anche a coordinate non asintotiche. Riprendiamo la sostituzione (3) del § 34 che conduce a coordinate asintotiche e, come ivi, consideriamo v, $\overline{t_1}$, $\overline{t_2}$ come variabili indidipendenti. Derivando rapporto alla v l'identità

$$\overline{f}(\overline{t}) = f(t),$$

si trova subito

$$\overline{f}'(\overline{t}) = \dot{f}(t), \quad \overline{f}''(\overline{t}) = \ddot{f}(t),$$

dove:

$$(8) \quad \left| \begin{aligned} &\dot{f}(t) = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1 t_2 + \dot{C}t_2^2, \quad \ddot{f}(t) = \ddot{A}t_1^2 + 2\ddot{B}t_1 t_2 + \ddot{C}t_2^2, \\ &\dot{A} = A' + 2(Ab - Ba), \quad \dot{B} = B' + Ac - Ca, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \dot{C} = C' + 2(Bc - Cb), \\ &\ddot{A} = \dot{A}' + 2(\dot{A}b - \dot{B}a) = A'' + 4(A'b - B'a) + \\ &\qquad + 2[A(b' + 2b^2 - ac) - B(a' + 2ab) + Ca^2], \\ &\ddot{B} = \dot{B}' + \dot{A}c - \dot{C}a = B'' + 2(A'c - C'a) + \\ &\qquad + A(c' + 2bc) - 4Bac - C(a' - 2ab), \\ &\ddot{C} = \dot{C}' + 2(\dot{B}c - \dot{C}b) = C'' + 4(B'c - C'b) + \\ &\qquad + 2[Ac^2 + B(c' - 2bc) - C(b' - 2b^2 + ac)]. \end{aligned} \right.$$

Basta sostituire le $\dot{f}(t)$ e $\ddot{f}(t)$ alle $f'(t)$ e $f''(t)$ per formare le espressioni generali di h e k. Sarà utile che il lettore faccia tale generalizzazione formale per tutte le formole dei § 35, 36 assumendo anche la variabile indipendente v in modo arbitrario.

§ 37. — Il complesso lineare osculatore.

Nel seguito si suppone R riferita alle asintotiche; l'osservazione finale del § precedente permette senz' altro estendere le formole al caso di coordinate qualunque. Le formole fondamentali (11) del § 31 si riducono alle

(1) $y'' = \theta' y' - (B + j)y + Az \quad , \quad z'' = \theta' z' + (B - j)z - Cy.$

Posto al sollto $p = (yz)$, $q = (y'z')$, si hanno quindi le formole seguenti, in cui i termini trascurati a destra sono combinazioni lineari di p, p' e delle precedenti

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
p'' &= 2q + \theta' p' - 2jp, \text{ già osservato al § 34, (10)} \\
q' &= C(yy') + B[(y'z) - (yz')] + A(zz') + 2\theta' q - jp', \\
q'' &= C'(yy') + B'[(y'z) - (yz')] + A'(zz') + \ldots, \\
q''' &= C''(yy') + B''[(y'z) - (yz')] + A''(zz') + \ldots
\end{aligned}
$$

Se ne traggono subito diverse conseguenze. Cerchiamo in primo luogo le direttrici della *congruenza lineare osculatrice* determinata da quattro generatrici successive: se r è una direttrice di tale congruenza, deve essere

$$Srp = Srp' = Srq = Srq' = 0.$$

Le prime tre condizioni dànno che

$$r = (t_1 y + t_2 z,\ t_1 y' + t_2 z') = t_1^2 (yy') - t_1 t_2 \left[(y'z) - (yz')\right] + t_2^2 (zz')$$

sicchè dalla (4) del § 31 si ha:

$$Srq' = -\omega a_{12}{}^2 (At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2) = -\omega a_{12}{}^2 f(t).$$

Le direttrici della congruenza lineare osculatrice sono quindi le tangenti flecnodali come si sapeva a priori. Si vede anche che, *se* $A = B = C = 0$, R *è una quadrica* come si può stabilire facilmente in altri modi; se $A = B = C = 0$ per un valore di v, H *iperoscula* R *lungo la generatrice corrispondente. Condizione* affinchè q'' sia combinazione lineare di p, p', q, q' o *che* R *appartenga ad una congruenza lineare si trova subito essere*

$$\text{(3)} \qquad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}:$$

che cioè le radici di $\mathrm{f} = 0$ siano *costanti* (cosa che sapevamo già almeno nel caso $B^2 - AC \gtrless 0$). *Condizione* affinchè q''' sia combinazione lineare delle precedenti o *che* R *appartenga ad un complesso lineare è* $\mathrm{k} = 0$, come abbiamo già enunciato.

Le rette del complesso lineare osculatore Ω sono combinazioni lineari di p, p', q, q', q''. Vi appartengono tutte le generatrici del primo sistema di H che sono combinazioni lineari delle sole p, p', q; per fissare la posizione di Ω basta adunque trovare le due generatrici di H del secondo sistema che vi appartengono. Sia

$$r = (t_1 y + t_2 z,\ t_1 y' + t_2 z') = t_1^2 (yy') - t_1 t_2 \left[(y'z) - (yz')\right] + t_2^2 (zz')$$

una di queste due rette. Affinchè r sia combinazione lineare di p, p', q, q', q'' è necessario che r sia combinazione lineare delle q e q'' sole, sicchè si trova la condizione

$$\text{(4)} \qquad \begin{vmatrix} t_1^2 & C & C' \\ t_1 t_2 & -B & -B' \\ t_2^2 & A & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2 & Bt_1 + Ct_2 \\ A' t_1 + B' t_2 & B' t_1 + C' t_2 \end{vmatrix} = 0$$

Il primo membro di quest' equazione è lo Iacobiano delle forme $f(t)$ e $f'(t)$; il suo discriminante vale

$$4(AB' - A'B)(BC' - B'C) - (AC' - A'C)^2 =$$
$$= 4(AC - B^2)(A'C' - B'^2) - (AC' + CA' - 2BB')^2.$$

Affinchè esso sia identicamente nullo, deve essere identicamente o

$$B^2 - CA = 0$$

oppure

$$A'C' - B'^2 = \left(\frac{d}{dv}\sqrt{|AC - B^2|}\right)^2.$$

Vi sono due classi di superficie rigate per cui tutti i complessi lineari osculatori Ω *sono speciali: la prima è quella delle rigate a curve flecnodali coincidenti; la seconda è quella delle rigate che posseggono una direttrice retta.* Nel secondo caso, supposte coordinate normali, è $h = 0$, condizione che ci è nota dal § 35. Nel caso generale la (4) definisce sopra ogni generatrice due punti diversi che si dicono, per il loro significato, i *punti del complesso* (della generatrice) *perchè per essi passano le generatrici di* H *del secondo sistema appartenenti al complesso lineare osculatore.* Le curve generate da tali punti al variare di v si dicono le *curve del complesso* di R. *Le tre coppie di punti sopra ogni generatrice: dei punti flecnodali, dei punti armonici, dei punti del complesso sono armoniche a due a due,* sicchè due coppie e due soltanto sono reali. *Ecco la nuova definizione delle curve armoniche promessa al* § 35! Osserviamo ancora, lasciando la dimostrazione al lettore come esercizio: *Se per un valore particolare di* v *è* $B^2 - AC = 0$, *la curva flecnodale tocca in generale la generatrice corrispondente ed* Ω *non è speciale. Può accadere invece che la curva flecnodale abbia un punto doppio; allora* Ω *è speciale.*

Cerchiamo ancora il complesso lineare osculatore dell' asintotica descritta dal punto

$$x = t_1 y + t_2 z$$

dove t_1 e t_2 sono costanti. Posto

$$\xi = t_1 \eta + t_2 \zeta,$$

dal Cap. I (§ 7 *A*) sappiamo che, rispetto a tal complesso, il piano polare del punto

$$\lambda x + \lambda_1 x' + \lambda_2 x''$$

è il piano

$$\lambda \xi + \lambda_1 \xi' + \lambda_2 \xi''.$$

Essendo

$$\lambda x + \lambda_1 x' = \lambda t_1 y + \lambda t_2 z + \lambda_1 t_1 y' + \lambda_1 t_2 z',$$

$$\lambda \xi + \lambda_1 \xi' = \lambda t_1 \eta + \lambda t_2 \zeta + \lambda_1 t_1 \eta' + \lambda_1 t_2 \zeta',$$

il piano $\lambda\xi + \lambda_1 \xi'$ è anche il piano tangente di H nel punto $\lambda x + \lambda_1 x'$; segue che tutte le generatrici del primo sistema di H appartengono al complesso in questione; di più

$$\lambda x + \lambda_2 (x'' - \theta' x') = \left\{\lambda t_1 - \lambda_2 \left[t_1(B + j) + t_2 C\right]\right\} y +$$

$$+ \left\{\lambda t_2 + \lambda_2 \left[t_1 A + t_2 (B - j)\right]\right\} z,$$

$$\lambda \xi + \lambda_2 (\xi'' - \theta' \xi') = \left\{\lambda t_1 + \lambda_2 \left[t_1 (B - j) + t_2 C\right]\right\} \eta +$$

$$+ \left\{\lambda t_2 - \lambda_2 \left[t_1 A + t_2 (B + j)\right)\right\} \zeta.$$

Condizione affinchè il piano $\lambda\xi + \lambda_2 (\xi'' - \theta' \xi')$ sia il piano tangente di H nel punto $\lambda x + \lambda_2 (x'' - \theta' x')$ è

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda t_1 - \lambda_2 [t_1 (B + j) + t_2 C], & \lambda t_2 + \lambda_2 [t_1 A + t_2 (B - j)] \\ \lambda t_1 + \lambda_2 [t_1 (B - j) + t_2 C], & \lambda t_2 - \lambda_2 [t_1 A + t_2 (B + j)] \end{vmatrix} =$$

$$= f(t) \lambda_2 (\lambda_2 j - \lambda).$$

Escludendo il caso triviale di $f(t) = 0$, otteniamo i due punti di p da cui escono le generatrici del secondo sistema di H appartenenti al complesso lineare osculatore dell' asintotica generata da x; il primo è x, come era evidente a priori, il secondo è

$$jx + x'' - \theta' x' = -(t_1 B + t_2 C) y + (t_1 A + t_2 B) z,$$

ossia il coniugato armonico di x rispetto ai punti flecnodali. Segue subito che le tangenti flecnodali sono polari l' una dell' altra rispetto al complesso: in altre parole: *il complesso lineare osculatore dell' asintotica curva di una rigata contiene la congruenza lineare* *osculatrice della rigata. Se tutte le asintotiche di una rigata appartengono a complessi lineari, la rigata appartiene ad una congruenza lineare;* la reciproca si prova pure facilmente. Ma il nostro risultato ha un' altra conseguenza interessante. Al Cap. III, § 25 *B)* abbiamo definito, per un punto generico di una superficie non rigata S, le due *direttrici* come la coppia di rette polari l' una dell' altra rispetto ai complessi lineari osculatori delle due asintotiche incrociantisi nel punto corrispondente di S; la prima direttrice passa per il punto considerato di S, la seconda sta nel piano tangente, e le due rette sono polari reciproche anche rispetto alla quadrica di Lie. Abbiamo pure enunciato un'altra definizione delle direttrici che ora siamo in grado di provare equivalente alla primitiva. *Si considerino le due rigate generate dalle tangenti asintotiche di un sistema di* S *lungo la curva asintotica dell' altro sistema, passanti per il punto* x *considerato di* S. *Sopra la generatrice passante per* x *di una tale rigata, si consideri il coniugato armonico di* x *rispetto ai punti flecnodali: i due punti così ottenuti stanno sopra la seconda direttrice (e correlativamente per la prima direttrice).* Infatti l'asintotica di S essendo evidentemente asintotica anche sulla rigata, una facile considerazione basta a dedurre la proposizione da ciò che si è provato poco fa, tenendo conto del fatto che le due rigate hanno in x il medesimo iperboloide osculatore.

§ 38. — Ulteriore studio di superficie rigate a curve flecnodali distinte, prive di retta direttrice.

Sia data una rigata R a curve flecnodali distinte in coordinate normali, riferita alle asintotiche e v sia l'arco proiettivo (sono le ipotesi del § 35). Supposto $h \gtrless 0$ (se $\varepsilon = -1$, $h > 0$) vogliamo studiare più da vicino come si determina la forma quadratica $f(t)$ dagli invarianti h e k, dati in funzione di v. Distinguiamo due casi.

1° *caso.* $\varepsilon = 1$. La forma $f(t)$ si può decomporre in due fattori lineari reali, sia

$$f(t) = 2(\alpha t)(\beta t). \tag{1}$$

Qui, e nel seguito

$$(\alpha t) = \alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1 \quad , \quad (\beta t) = \ldots, \ldots$$

Dal significato di ε si ha $(\alpha\beta)^2 = 1$ ed evidentemente è lecito supporre

$$(1)_{\text{bis}} \qquad (\alpha\beta) = 1.$$

Le forme lineari (αt), (βt) non sono completamente determinate dalle (1) e $(1)_{\text{bis}}$; ρ essendo funzione qualunque di v, possiamo sostituire (αt) e (βt) rispettivamente con $\rho(\alpha t)$, $\rho^{-1}(\beta t)$ e quindi $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$ rispettivamente con $\rho^2(\alpha\alpha')$, $\rho^{-2}(\beta\beta')$. Sia

$$(2) \qquad \delta = \operatorname{sgn}(\alpha\alpha')(\beta\beta').$$

Non può essere $\delta = 0$ perchè allora sarebbe $h = 0$ come si verifica facilmente. Escludiamo anche i valori particolari di v per cui fosse $h = 0$ e quindi $\delta = 0$. Possiamo dunque fissare le forme (αt) e (βt) a meno di un cambiamento simultaneo di segno, ponendo la condizione

$$(3) \qquad (\alpha\alpha') = \delta(\beta\beta') = n \gtrless 0.$$

Derivando la (2) si deduce

$$(4) \qquad (\alpha\beta') = (\beta\alpha') = m.$$

Le n e m, nonchè il segno δ, sono evidentemente invarianti per le sostituzioni (4) del § 35.

È facile vedere che, dati ad arbitrio $\delta = \pm 1$, m, n in funzione dell'arco proiettivo v, la forma quadratica $f(t)$ esiste ed è ben determinata a meno di tali sostituzioni. Infatti, da $(1)_{\text{bis}}$ si vede che $(\alpha' t)$ e $(\beta' t)$ sono combinazioni lineari delle (αt) e (βt), e dalle (3) e (4) si deduce che è precisamente

$$(5) \qquad \begin{aligned} (\alpha' t) &= -m(\alpha t) + n(\beta t) \\ (\beta' t) &= -\delta n(\alpha t) + m(\beta t). \end{aligned}$$

Basta quindi prendere per (α_1, β_1) e (α_2, β_2) due soluzioni del sistema differenziale

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \alpha' = -m\alpha + n\beta \quad , \quad \beta' = -\delta n\alpha + m\beta$$

legate da $(1)_{\text{bis}}$; il che è possibile, la $(\alpha\beta) = \text{cost.}$ essendo conseguenza delle equazioni $(5)_{\text{bis}}$. Da (5) si deduce tosto

$$(6) \qquad f'(t) = 2n\left[-\delta(\alpha t)^2 + (\beta t)^2\right] \; , \; h = 4\delta n^2 \, , \; k = 16\delta m n^2 .$$

Dati h e k, sono quindi determinati δ, m, n^2 ma *non* il segno di n. Infatti tal segno cambia invertendo il verso positivo sulle generatrici, ossia per una sostituzione della forma $(4)_{\text{bis}}$ del § 35.

Se si vuole determinare soltanto la superficie R e non le sue asintotiche, non è necessario integrare il sistema $(5)_{\text{bis}}$. Posto infatti

$$\bar{t}_1 = (\alpha t) \quad , \quad \bar{t}_2 = (\beta t)$$

valgono per t_i fisse le equazioni (cfr. le (2) del § 34)

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \bar{t}_1' &= (\alpha' t) = \bar{b}\,\bar{t}_1 + \bar{c}\,\bar{t}_2 \, , \\ \bar{t}_2' &= (\beta' t) = -\bar{a}\,\bar{t}_1 - \bar{b}\,\bar{t}_2 . \end{aligned}$$

Confrontando con (5) si ha

$$\bar{a} = \delta n \quad , \quad \bar{b} = -m \quad , \quad \bar{c} = n .$$

Omettendo i soprassegni otteniamo il risultato: *Se la rigata* R *possiede due diverse curve flecnodali di cui nessuna è retta, possiamo normalizzare* (a meno di un cambiamento di segni) *i fattori delle coordinate* y *e* z *dei punti flecnodali in modo che sia* (l'arco proiettivo di R essendo la variabile indipendente)

$$\left.\begin{aligned} a &= \delta n \quad , \quad b = -m \quad , \quad c = n \\ A &= 0 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 0 \, , \end{aligned}\right. \qquad \delta = \pm 1 .$$

m e n essendo legate agli invarianti h e k dalle $h = 4\delta n^2$, $k = 16\delta mn$.

Le equazioni (6) del § 34 sono allora

$$(7)\qquad \begin{aligned} y' &= my + \eta n z + \dot{y} \quad , \quad \dot{y}' = m\dot{y} + \eta n \dot{z} - (1 + j)y \\ z' &= -ny - mz + \dot{z} \quad , \quad \dot{z}' = -n\dot{y} - m\dot{z} + (1 - j)z . \end{aligned}$$

Se $\delta = 1$ le curve armoniche sono reali e generate dai punti $y \pm z$, se invece $\delta = -1$ le curve del complesso sono reali e generate dai punti $y \pm z$. Le (11) del § 31 sono

$$(7)_{\text{bis}}\qquad \begin{aligned} y'' &= 2my' + 2\delta n z' + (m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j)y + \delta n' z \\ z'' &= -2ny' - 2mz' - n'y + (-m' + \delta n^2 - m^2 + 1 - j)z . \end{aligned}$$

Se ne deduce una dimostrazione molto semplice di un interessante teorema di Sullivan:

Se le due curve flecnodali di una rigata sono piane, anche le curve del complesso e le curve armoniche sono piane e tutti i loro piani appartengono ad un fascio. Indichiamo con y_i e z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ le quattro coordinate di y e z. Scegliendo convenientemente il sistema di riferimento, possiamo supporre per le ipotesi del teorema $y_3 = 0$, $z_4 = 0$. Le $(7)_{\text{bis}}$ dànno poi

$$2nz_3' + n'z_3 = 0 \qquad 2ny_4' + n'y_4 = 0$$

sicchè $z_3 : y_4 = \lambda =$ costante. La curva descritta dal punto $x = y + cz$ (c costante) sta quindi nel piano fisso

$$x_3 - \lambda c x_4 = 0 .$$

2° *caso.* $\varepsilon = -1$, $h > 0$. La forma quadratica $f(t)$ essendo definita, si può scegliere il verso positivo sulle generatrici in modo che $f(t)$ sia *positiva.* Si può dunque porre

$$(8)\qquad f(t) = (\alpha t)^2 + (\beta t)^2 .$$

Dal significato di ε si ha $(\alpha\beta)^2 = 1$ e si può supporre anche qui

$$(8)_{\text{bis}}\qquad (\alpha\beta) = 1 .$$

Derivando si deduce

$$(\alpha\beta') = (\beta\alpha') = m. \tag{9}$$

Le forme lineari (αt) e (βt) non sono ancora completamente determinate; ρ essendo una funzione arbitraria dell'arco proiettivo v, si può sostituirle ordinatamente con

$$\cos\rho(\alpha t) + \sin\rho(\beta t) \quad , \quad -\sin\rho(\alpha t) + \cos\rho(\beta t)$$

e quindi le espressioni $(\alpha\alpha')$ e $(\beta\beta')$ ordinatamente con

$$\cos^2\rho(\alpha\alpha') + 2m\cos\rho\sin\rho + \sin^2\rho(\beta\beta') + \rho',$$

$$\sin^2\rho(\alpha\alpha') - 2m\cos\rho\sin\rho + \cos^2\rho(\beta\beta') + \rho',$$

sicchè $(\alpha\alpha') - (\beta\beta')$ viene sostituito da

$$[(\alpha\alpha') - (\beta\beta')]\cos 2\rho + 2m\sin 2\rho.$$

Segue che possiamo fissare le (αt) e (βt) a meno di un cambiamento simultaneo di segni col porre le condizioni $m > 0$ (non può essere $m = 0$ perchè risulterebbe $h = 0$ contro l'ipotesi) e

$$(\alpha\alpha') = (\beta\beta') = n. \tag{10}$$

Come al caso precedente, si deducono senza fatica dalle $(8)_{\text{bis}}$, (9) e (10) le formole

$$(\alpha' t) = -m(\alpha t) + n(\beta t) \quad , \quad (\beta' t) = -n(\alpha t) + m(\beta t) \tag{11}$$

da cui si deduce

$$f'(t) = -2m[(\alpha t)^2 - (\beta t)^2] \tag{12}$$

$$h = 4m^2, \quad k = 32m^2 n, \tag{13}$$

il che insieme con la $m > 0$ determina univocamente le m, n, dalle $h > 0$, k. Per costruire dalle $h > 0$ e k o ciò che è lo stesso, dalle $m > 0$ ed n la forma quadratica $f(t)$, basta scegliere per $(\alpha_1\beta_1)$, e $(\alpha_2\beta_2)$ due soluzioni del sistema differenziale

$$\alpha' = -m\alpha + n\beta, \quad \beta' = -n\alpha + m\beta$$

legate dalle $(8)_{bis}$. Se non ci interessano le asintotiche di R, non è necessario integrare le equazioni precedenti. Posto infatti

$$(\alpha t) = \bar{t}_1, \quad (\beta t) = \bar{t}_2$$

valgono le $(6)_{bis}$ e il confronto con le (11) dà

$$\bar{a} = n, \quad \bar{b} = -m, \quad \bar{c} = n.$$

Dalle (8) e (12) si ha poi

$$\bar{A} = 1, \quad \bar{B} = 0, \quad \bar{C} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} \bar{A}\bar{t}_1 + \bar{B}\bar{t}_2, & \bar{B}\bar{t}_1 + C\bar{t}_2 \\ \bar{A}'\bar{t}_1 + \bar{B}'\bar{t}_2, & \bar{B}'\bar{t}_1 + \bar{C}'\bar{t}_2 \end{vmatrix} = 4m\bar{t}_1\bar{t}_2 .$$

Omettendo i soprassegni otteniamo il risultato: *Se la rigata reale* R *priva di retta direttrice ha le due curve flecnodali immaginarie possiamo normalizzare* (a meno di un cambiamento simultaneo di segni) *i fattori delle coordinate* y *e* z *dei punti del complesso in modo che sia* (l'arco proiettivo essendo la variabile indipendente)

$$a = n, \quad b = -m < 0, \quad c = n,$$

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1,$$

m *e* n *essendo legate agli invarianti* h *e* k *dalle* (13). *Le curve armoniche sono descritte dai punti* y $\pm$ z, *le curve flecnodali dai punti immaginari* y $\pm$ i z. Le equazioni (6) del § 4 sono nel caso considerato

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} y' &= my + nz + \dot{y}, & \dot{y}' &= -jy + z + m\dot{y} + n\dot{z}, \\ z' &= -ny - mz + \dot{z}, & \dot{z}' &= -y - jz - n\dot{y} - m\dot{z}. \end{aligned}$$

§ 39. — La trasformazione flecnodale.

Torniamo a considerare una rigata R a due curve flecnodali reali e distinte senza retta direttrice. Scegliendo l'arco proiettivo di R come variabile indipendente e fissando convenientemente i fattori delle coordinate y e z dei punti flecnodali delle generatrici, possiamo scrivere le equazioni (7) del § 38:

$$
(1)\qquad \begin{aligned} &y' = my + \delta n z + \dot{y}, && \dot{y}' = m\dot{y} + \delta n \dot{z} - (1+j)\,y \\ &z' = -ny - mz + \dot{z}, && \dot{z}' = -n\dot{y} - m\dot{z} + (1-j)z. \end{aligned}
$$

Per ogni v, il significato geometrico del tetraedro formato dai punti y, z, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ci è noto: (yz) è la generatrice di R, $(y\dot{y})$ e $(z\dot{z})$ sono le tangenti flecnodali (§ 34) ed $(\dot{y}\dot{z})$ è la generatrice principale di H (§ 35). Al § 34 abbiamo chiamato *trasformate flecnodali* di R le rigate R_1 e R_2 generate rispettivamente dalle rette $(y\dot{y})$ e $(z\dot{z})$. Essendo

$$
(1)_{\text{bis}}\qquad (y z y' z) = \omega,
$$

se determiniamo la generatrice generica di R_1 dai punti (cfr. § 33)

$$
(2)\qquad y_1 = y, \quad z_1 = \frac{\dot{y}}{n},
$$

sarà

$$
(2)_{\text{bis}}\qquad (y_1 z_1 y_1' z_1') = -\omega.
$$

Possiamo omettere i facili calcoli con cui si deduce da (1)

$$
y_1'' = \frac{n'}{n} y_1' + 2n z_1' + \left(m' - \frac{mn'}{n} + m^2 - \delta n^2 + 1 + j\right) y_1 + n' z_1,
$$

$$
\begin{aligned} z_1'' = -2\,\frac{j}{n}\, y_1' - \frac{n'}{n} z_1' + \left[-\left(\frac{1+j}{n}\right)' - 2\frac{m}{n}\right] y_1 + \\ + \left(m' - \frac{mn'}{n} + m^2 - \delta n^2 - \frac{n''}{n} + \frac{n'^2}{n^2} - 1 + j\right) z_1. \end{aligned}
$$

Indicando con indice 1 le quantità relative a R_1, risulta dal confronto colle (11) § 31

$$
a_1 = n,\ b_1 = -\frac{1}{2}\frac{n'}{n},\ c_1 = \frac{j}{n},
$$

$$
(3)\qquad A_1 = 0,\ \ B_1 = -1,\ \ C_1 = -\frac{n'}{n} + 2\frac{m}{n},
$$

$$
j_1 = \frac{1}{2}\frac{n''}{n} - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n^2} - m' + \frac{mn'}{n} - m^2 + \delta n^2.
$$

La $A_1=0$ dice che *il punto* y *genera anche sulla* R_1 *una curva flecnodale.* Questa proprietà è stata segnalata dal Wilczynski che ha osservato più in generale che esistono ∞^1 rigate che toccano R lungo la curva flecnodale generata da y ed hanno pure nella curva di contatto una curva flecnodale. Ma tale proprietà ci è già nota: infatti, al Cap. II § 13 *B* pag. 76 abbiamo dimostrato un teorema più generale relativo a superficie qualunque. Delle (3) si deduce di più $B_1^2-A_1C_1=1$ ossia osservando la $(2)_{\text{bis}}$: *Una trasformata flecnodale di* R *corrisponde ad* R *con uguaglianza d'arco proiettivo.*

Analogamente, posto

$$(4) \qquad y_2=z\,,\ z_2=\frac{\dot z}{n}\,,\ (y_2 z_2 y_2' z_2')=-\omega\,,$$

le quantità relative all'altra trasformata flecnodale R_2 di R sono

$$a_2=n\,,\ b_2=-\frac{1}{2}\frac{n'}{n}\,,\ c_2=\frac{j}{n}\,,$$

$$(5) \qquad A_2=0\,,\ B_2=1\,,\ C_2=\frac{n'}{n^2}+2\frac{m}{n}\,,$$

$$j_2=\frac{1}{2}\frac{n''}{n}-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n^2}+m'-\frac{mn'}{n}-m^2+\delta n^2\,.$$

Il confronto delle prime righe delle (3) e (5) dice che, facendo corrispondere il punto y_1+uz_1 di R_1 al punto y_2+uz_2 di R_2, le asintotiche curve di R_1 e R_2 si corrispondono. Ciò si poteva prevedere: infatti, la congruenza delle rette congiungenti y_1+uz_1 a y_2+uz_2 è la congruenza flecnodale di R che sappiamo essere una congruenza W a falde focali R_1 e R_2. Per brevità, diciamo $y(z)$ il *primo* punto flecnodale della generatrice $(y\dot y)$ di R_1 $[(z\dot z)$ di $R_1]$. La seconda riga delle (3) dice che la seconda curva flecnodale di R_1 è generata dal punto

$$(6)^{a} \qquad \left(-\frac{1}{2}\frac{n'}{n}+m\right)y+\dot y\,;$$

similmente si vede che la seconda curva flecnodale di R_2 è generata dal punto

$$(6)^b \qquad \left(-\frac{1}{2}\frac{n'}{n}-m\right)z+\dot{z}\,.$$

Donde il teorema di Wilczynski: *La retta che congiunge i due secondi punti flecnodali di* R_1 *e* R_2 *corrispondenti al medesimo valore di* v, *appartiene ad* H *allora e allora soltanto che* $m=0$, *che cioè* R *appartenga ad un complesso lineare.* Essendo per le (1)

$$y''+(n-2m)y'+(-m'+m^2=\delta n^2+1+j)y=$$

$$=2\delta n\left[\dot{z}+\left(\frac{1}{2}\frac{n'}{n}-m\right)z\right],$$

l' intersezione del piano $(yy'y'')$ con la retta $(z\dot{z})$ è

$$(6)^c \qquad \dot{z}+\left(\frac{1}{2}\frac{n'}{n}-m\right)z\,;$$

similmente si trova che l' intersezione del piano $(zz'z'')$ con la retta $(y\dot{y})$ è

$$(6)^d \qquad \dot{y}+\left(\frac{1}{2}\frac{n'}{n}+m\right)y\,.$$

Il confronto delle espressioni (6) conduce subito al teorema: *La generatrice del primo sistema di* H *che passa per l' intersezione del piano osculatore alla prima curva flecnodale di* R_1 *con la generatrice di* R_2 *e la generatrice di* H *che passa il secondo punto flecnodale di* R_1 *sono coniugate armoniche rispetto alla generatrice di* R *e alla generatrice principale di* H. (Naturalmente tutte le rette dell' enunciato devono corrispondere al medesimo valore di v). Questo teorema è dal Wilczynski riguardato come definizione geometrica della generatrice principale di *H.* Il lettore troverà facendo un calcolo privo di difficoltà che nel teorema enunciato compaiono elementi dipendenti da *sei* generatrici successive di *R*, mentre è facile trovare che la generatrice principale di *H* non dipende che da *cinque* generatrici successive di *R*. Per questa ragione la definizione geometrica della generatrice principale data al § 35 sembra preferibile: il teorema precedente dà piuttosto la costruzione geometrica del secondo punto flecnodale di R_1 (e naturalmente anche di R_2).

Mediante le formole (8) del § 36 si deduce dalle (3) e (5)

$$\dot{A}_1 = 2n\,, \quad \dot{B}_1 = \frac{n'}{n} - 2m\,, \quad \dot{C}_1 = -\frac{n''}{n} + \frac{n'^2}{n^3} + 2\frac{m'}{n} - 2\frac{j}{n},$$

$$\ddot{A}_1 = -2n' + 4mn\,, \quad \ddot{B}_1 = 2\frac{n''}{n} - 2\frac{n'^2}{n^2} - 4m' + 4j\,,$$

$$\ddot{C}_1 = -\frac{n'''}{n^2} + 3\frac{n'n''}{n^3} - 2\frac{n'^3}{n^4} + 2\frac{m''}{n} - 2\frac{j'}{n} + 2\frac{n'j}{n^2} - 4\frac{mj}{n}\,,$$

$$\dot{A}_2 = -2n\,, \quad \dot{B}_2 = -\frac{n'}{n} - 2m\,,$$

$$\dot{C}_2 = \frac{n''}{n^2} - \frac{n'^2}{n^3} + 2\frac{m'}{n} + 2\frac{j}{n}\,,$$

$$\ddot{A}_2 = 2n' + 4mn\,, \quad \ddot{B}_2 = -2\frac{n''}{n} + 2\frac{n'^2}{n^2} - 4m' - 4j\,,$$

$$\ddot{C}_2 = \frac{n'''}{n^2} - 3\frac{n'n''}{n^3} + 2\frac{n'^3}{n^4} + 2\frac{m''}{n} + 2\frac{j'}{n} - 2\frac{n'j}{n^2} - 4\frac{mj}{n}.$$

Seguono i valori degli invarianti h e k per R_1 e R_2:

$$h_1 = 2\frac{n''}{n} - \frac{n'^2}{n^2} - 4\frac{mn'}{n} + 4m^2 - 4m' + 4j\,,$$

$$k_1 = -2\frac{n'''}{n} + 12\frac{mn''}{n} + 12\frac{m'n'}{n} - 24\frac{m^2n'}{n} + 4m'' - 24mm' + 16m^3 + 16mj - 8\frac{n'j}{n} + 4j'\,,$$

(7)

$$h_2 = 2\frac{n''}{n} - \frac{n'^2}{n^2} + 4\frac{mn'}{n} + 4m^2 + 4m' + 4j\,,$$

$$k_2 = 2\frac{n'''}{n} + 12\frac{mn''}{n} + 12\frac{m'n'}{n} + 24\frac{m^2n'}{n} + 4m'' +$$

$$+ 24mm' + 16m^3 + 16mj + 8\frac{n'j}{n} + 4j'.$$

La trasformazione flecnodale merita senza dubbio uno studio più approfondito. Ma qui ci limitiamo ad una semplice applicazione delle formole (7) proponendoci la domanda: *Può accadere che le due trasformate flecnodali* R_1 *e* R_2 *di una rigata* R *siano collineari fra loro, corrispondendosi nell'omografia le tangenti flecnodali appartenenti alla medesima generatrice di* R? Le condizioni del problema sono

$$h_1 = h_2, \quad k_1 = k_2, \quad j_1 = j_2.$$

Ora dalle (3), (5) e (7) si ha

$$h_1 - h_2 = -\frac{8}{n}(mn)', \quad j_1 - j_2 = -2n\left(\frac{m}{n}\right)'$$

sicchè mn e $\frac{m}{n}$ sono costanti. Due casi son possibili: 1° m e n sono costanti; 2° $m = 0$. Nel primo caso $k_1 - k_2 = -8j'$, sicchè anche j è costante. Viceversa, se m, n e j sono costanti, tutte le condizioni del problema sono soddisfatte. Le equazioni differenziali (1) non cambiano in questo caso mettendo $v +$ costante al posto di v sicchè *R ammette un gruppo continuo ∞^1 di omografie in sè.* Le equazioni in termini finiti di R si potrebbero scrivere quindi senz'altro. Nel secondo caso $k_1 + k_2 = 0$, sicchè $k_1 = k_2 = 0$ *e tutte le tre superficie* R, R_1, R_2 *appartengono a complessi lineari*. Viceversa se R e R_1, p. es., appartengono a complessi lineari Ω e Ω_1 rispettivamente, la polarità rispetto Ω_1 non cambia R_1 e la polarità rispetto Ω la porta in R_2, sicchè il prodotto delle due correlazioni è una omografia (biassiale) che porta R_1 in R_2. Essendo $m = 0$,

$$k_1 - k_2 = -4\frac{n'''}{n} - 16\frac{n'j}{n} - 8j'.$$

Dunque n può prendersi ad arbitrio purchè diverso da zero, e j si determina dall'equazione differenziale lineare

$$j' = -2\frac{n'}{n}j - \frac{1}{2}\frac{n'''}{n},$$

che integrata dà

$$j = \frac{1}{4n^2}(n'^2 - 2nn'' + \text{cost.})$$

La classe delle rigate a cui siamo arrivati è interessante perchè ogni rigata della classe si deduce semplicemente da una linea a curvatura costante di uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante. Si osservi dapprima che i complessi lineari Ω, Ω_1, Ω_2 cui appartengono ordinatamente le rigate R, R_1, R_2 appartengono ad un fascio, perchè, come abbiamo già osservato, Ω_1 e Ω_2 sono polari rispetto a Ω. La congruenza lineare Δ base del fascio può essere generale o speciale. Per brevità, limitiamoci al caso che Δ sia generale. Sia Q_4 una quadrica a quattro dimensioni immagine delle rette del nostro spazio. Le immagini C, C_1, C_2 delle rigate R, R_1, R_2 sono tre curve in corrispondenza biunivoca sopra Q_4, contenute in tre spazi S_4, S_4^1, S_4^2 a quattro dimensioni; S_4, S_4^1, S_4^2 si intersecano in uno spazio S_3 a tre dimensioni che interseca Q_4 in una quadrica Q_2 che è generale, essendo immagine della congruenza non speciale Δ. Gli spazii S_4, S_4^1, S_4^2 intersecano Q_4 in tre quadriche a tre dimensioni Q_3, Q_3^1, Q_3^2 immagini dei complessi Ω, Ω_1, Ω_2. Siano P, P_1, P_2 i punti di C, C_1, C_2 corrispondenti ad un valore di v scelto ad arbitrio. La retta $\overline{P_1 P_2}$ è polare rispetto a Q_4 dello spazio osculatore π_3 a tre dimensioni della curva C in P, essendo P_1 e P_2 le immagini delle direttrici della congruenza lineare osculatrice di R appartenente al valore scelto di v. Ora π_3 sta evidentemente nell'iperpiano S_4 sicchè la retta $P_1 P_2$ passa per un punto fisso O. Sia $\overline{Q_3}$ la proiezione di Q_3^1 e di Q_3^2 dal punto O sull'iperpiano S_4. Una facile considerazione o un facile calcolo mostra che le due quadriche Q_3 e $\overline{Q_3}$ dello spazio S_4 si toccano in tutti i punti della quadrica Q_2. Sia $\overline{C}$ la proiezione della curva C_1 dal punto O nello spazio S_4 che è quindi una curva giacente su $\overline{Q_3}$ e sia $\overline{P}$ il punto di $\overline{C}$ corrispondente al valore di v scelto sopra. La retta $P_1 P_2$ essendo la polare di π_3 rispetto a Q_4, il punto $\overline{P}$ è il polo di π_3 rispetto a Q_3, e quindi gli iperpiani π_3 corrispondenti ai diversi valori di v toccano la quadrica Q_3^* polare di $\overline{Q}_3$ rispetto Q_3, che tocca pure Q_3 in tutti i punti di Q_2. Introduciamo ora nello spazio S_4 una metrica euclidea riguardando S_3 come iperpiano all'infinito e Q_2 come l'assoluto: le quadriche Q_3 e Q_3^* appaiono in questa metrica come ipersfere concentriche. La curva C sta sull'ipersfera Q_3 e i suoi iperpiani osculatori *(e quindi anche i suoi piani osculatori)* (*) toccano l'ipersfera concentrica Q_3^*. Questi piani osculatori intersecano Q_3 nei circoli osculatori di C che hanno quindi raggio costante e la *curva* C *è una linea a curvatura costante tracciata sopra lo spazio a curvatura costante (ipersfera)* Q_3.

Analogamente si può trattare il caso di Δ speciale che conduce a dedurre R da una linea a curvatura costante dell'ordinario spazio euclideo (**).

§ 40. — L'applicabilità proiettiva di superficie rigate.

Il teorema generale Cap. II § 20 *A)* mostra subito che una rigata non può essere applicabile che su una rigata. In particolare una quadrica non è applicabile che su una quadrica e si dimostra subito: *due quadriche sono proiettivamente applicabili se si corrispondono i due sistemi di generatrici.* Escludiamo il caso delle quadriche. Siano R e R_1 due rigate riferite alle asintotiche. Riteniamo le solite notazioni per R, e facciamo uso delle stesse notazioni con indice *1* per R_1. Secondo le $(8)_{ter}$ § 31 condizione necessaria e sufficiente affinchè sia possibile stabilire fra R e R_1 una corrispondenza biunivoca che sia una deformazione proiettiva è che si possa risolvere rispetto u_1 e v_1 l'equazione

$$(1) \qquad \frac{(A+2Bu+Cu^2)dv^2}{du} = \frac{(A_1+2B_1u_1+C_1u_1^2)\,dv_1^2}{du_1}.$$

(*) Più intuitivo è il ragionamento correlativo: se tutti i punti di C stanno su Q_3, tutte le tangenti di C toccano Q_3.

(**) Cfr. una Nota (in boemo) di Čech, nel *Časopis pro pěstování mat. a fys.*, vol. 52, 1923.

In primo luogo si vede che se vi sono soluzioni, esse si ottengono uguagliando u_1 ad una funzione della sola u e v_1 ad una funzione della sola v. Cambiando il parametro v_1 (se l' applicabilità è possibile in diversi modi, tal cambiamento in generale è diverso per i diversi modi di realizzarla) si può dunqne supporre $v = v_1$. Sicchè si ha più semplicemente

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \frac{du}{A + 2Bu + Cu^2} = \frac{du_1}{A_1 + 2B_1u_1 + C_1u_1^2}$$

dove adesso A, B, C, A_1, B_1, C_1 sono funzioni della sola v. Senza ledere le generalità si può supporre o che $B^2 - AC = \pm 1$, o, se $B^2 - AC = 0$, che la forma $f(t)$ sia normalizzata secondo una delle regole del § 36.

Cominciamo con l' ipotesi che le A, B, C siano costanti. Evidentemente non è possibile soddisfare a $(1)_{\text{bis}}$ che se anche le A_1, B_1, C_1 sono costanti: *Una rigata appartenente ad una congruenza lineare* (non importa se generale o speciale) *non può essere proiettivamente applicabile che su rigate appartenenti pure a congruenze lineari.* Ecco il teorema inverso: *Due rigate appartenenti a congruenze lineari sono sempre* (anche se una congruenza è generale e l'altra speciale) *proiettivamente applicabili in* ∞^3 *modi.* Infatti se nelle (1) le A, B, C, $A_1 : C_1$, $B_1 : C_1$ sono costanti, per passare da (1) a $(1)_{\text{bis}}$ occorre cambiare il parametro v_1 in modo che anche le A_1, B_1, C_1 risultino costanti. Ciò è evidentemente sempre possibile e se $v_1 = \varphi(v)$ è una maniera di farlo, le altre sono $v_1 = a\varphi(v) + b$, con a, b costanti qualunque $(a \gtrless 0)$. Scegliendo le a, b, la $(1)_{\text{bis}}$ determina u_1 in funzione di u, il che introduce una terza costante arbitraria. Si vede subito che: *Se le due congruenze sono speciali, comunque si realizzi l' applicabilità, la corrispondenza fra i punti delle generatrici corrispondenti è sempre proiettiva.* Se una congruenza è generale e l' altra è speciale, tale corrispondenza non può essere proiettiva. *Se le due congruenze sono generali, allora nel campo complesso* ∞^2 *delle* ∞^3 *maniere di realizzare l' applicabilità hanno la proprietà che la corrispondenza fra i punti delle generatrici corrispondenti è proiettiva; nel campo reale, tali applicabilità non esistono che se le due congruenze sono simultaneamente od iperboliche od ellittiche.* Come esercizio, il lettore parta dalle equazioni in termini finiti delle due rigate e determini le ∞^3 applicabilità, supponendo ordinatamente le due congruenze generali ecc.

Passiamo al caso che nessuna delle rigate appartenga ad una congruenza lineare. Integrando la $(1)_{bis}$ in cui v si riguarda come parametro, si ottiene una delle quattro equazioni

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{u_1-\alpha_1}{u_1-\beta_1}=\lambda\left(\frac{u-\alpha}{u-\beta_1}\right)^{\mu}, \qquad \frac{u_1-\alpha_1}{u_1-\beta_1}=\lambda e^{\frac{\mu}{u-\alpha}},\\
&\lambda e^{\frac{\mu}{u_1-\alpha_1}}=\frac{u-\alpha}{u-\beta}, \qquad \frac{\lambda}{u-\alpha}+\frac{\lambda_1}{u_1-\alpha_1}=\mu,
\end{aligned}
$$

dove α, β, α_1, β_1, λ, λ_1, μ sono funzioni di v che possono essere immaginarie. In particolare, $u=\alpha$ e $u=\beta$ (o soltanto $u=\alpha$) sono le equazioni delle due linee flecnodali di R, sicchè *una almeno delle α e β (p. e. α) non è costante*, altrimenti R apparterrebbe ad una congruenza lineare, contro la supposizione. Ora osservando il comportamento della funzione u_1 di u nell'intorno del punto $u=\alpha$ si vede subito che u_1 dipende necessariamente anche da v, se vale la seconda o la terza delle (2), oppure se vale la prima e se $\mu^2 \mp 1$. Tali casi sono dunque impossibili, e non restano che due possibilità

$$
\frac{u_1-\alpha_1}{u_1-\beta_1}=\lambda\left(\frac{u-\alpha}{u-\beta}\right)^{\pm 1}, \text{ oppure } \frac{\lambda}{u-\alpha}+\frac{\lambda_1}{u_1-\alpha_1}=\mu .
$$

Nè deduciamo: 1° se le linee flecnodali di R coincidono, coincidono pure quelle di R_1 e viceversa 2°; è

$$
u_1=\frac{pu+q}{ru+s};
$$

e p, q, r, s sono necessariamente costanti, perchè u_1 non dipende che da u. Cambiando il parametro u_1 possiamo dunque supporre $u_1=u$, dopodichè la $(1)_{bis}$ dà $A_1=A$, $B_1=B$, $C_1=C$. E seguono ora senz'altro i teoremi:

Se due rigate R *e* R_1 *proiettivamente applicabili non appartengono a congruenze lineari, le due curve flecnodali di* R_1 *sono distinte o coincidenti, reali od immaginarie, come quelle di* R, *e si* *corrispondono nell' applicabilità. Le rigate* R *e* R_1 *si corrispondono con uguaglianza d' arco proiettivo.*

Se una delle due rigate (e quindi anche l' altra) è a curve flecnodali distinte e priva di retta direttrice, condizione necessaria e sufficiente per l' applicabilità proiettiva è che, per uguali valori di arco proiettivo, il segno ε *e gli invarianti* h *e* k *siano uguali sulle due superficie. Se* R *e quindi anche* R_1 *possiede una retta direttrice, condizione necessaria e sufficiente per l' applicabilità proiettiva è che, per uguali valori dell' arco proiettivo, il segno* σ *e l' invariante* D [§ 35 (11)] *siano uguali sulle due superficie.*

Se R *(e quindi* R_1*) è a curve flecnodali coincidenti, condizione necessaria e sufficiente per l' applicabilità proiettiva è che, per uguali valori dell' arco proiettivo* [§ 36, (4)], *l' invariante* I [§ 36, (5)] *sia uguale per le due superficie.*

Non importa invece il valore dell' invariante j. Dunque: *Le deformate proiettive di una rigata che non appartiene ad una congruenza lineare dipendono da una funzione arbitraria di un argomento,* che è appunto la j. Se ne deduce per es. che, se le curve flecnodali di R sono reali e distinte (coincidenti), esistono due deformate proiettive (una deformata) R_1 di R tali che le generatrici principali delle quadriche di Lie di R_1 descrivano una sviluppabile. Basta porre $j = \pm 1$ ($j = 0$); cfr. § 34, (11).

Le ricerche precedenti danno immediatamente la soluzione del problema di trovare *le rigate che ammettono un gruppo continuo di deformazioni proiettive in sè. Esse sono di due tipi diversi:* 1° *una rigata* R *di una congruenza lineare, generale o speciale, ammette* ∞^3 *deformazioni proiettive in sè;* 2° *una rigata* R, *che non è di una congruenza lineare, ammette* ∞^1 *deformazioni in sè, se o* $\mathrm{h} \gtrless 0$, $\mathrm{h} =$ cost., $\mathrm{k} =$ cost., *oppure* $\mathrm{h} = 0$, $\mathrm{D} =$ cost., *o infine* $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 0$, $\mathrm{I} =$ cost. È interessante rilevare che in tutti e due i casi si può indicare una deformata proiettiva R_1 di R tale che le deformazioni corrispondenti di R_1 in sè siano delle semplici omografie: se R appartiene ad una congruenza lineare, R_1 è la rigata cubica di Cayley, negli altri casi R_1 si ottiene da R sostituendo a j una costante scelta ad arbitrio.

CAPITOLO V.

CONGRUENZE, CONGRUENZE W E TRASFORMAZIONI PER CONGRUENZE W (*).

§ 41. — Congruenze di assegnata prima falda focale.

A) Formole fondamentali.

Supporremo in quanto segue la superficie S ad asintotiche reali. Se così non fosse, si potrebbero ancora applicare gli stessi metodi ricorrendo ai sistemi u, v isotermi-coniugati.

Sia dunque S una superficie riferita alle asintotiche u, v. Se A, B sono funzioni delle u, v, il punto

$$\overline{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \tag{1}$$

descrive al variare di μ una tangente alla linea $\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}$. Queste linee sono determinate dal solo rapporto $A:B$.

Affinchè $\overline{x}$ sia il secondo fuoco della congruenza generata da queste tangenti (congruenza che è la più generale di quelle che hanno S per falda focale) dovrà avvenire che

$A\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} - B\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}$ sia combinazione lineare delle x ed $Ax_u + Bx_v$.

(*) I principali risultati di questo Capitolo furono pubblicati in varie note dei Rendic. della R. Accad. dei Lincei (1922-23-24) da G. Fubini.

Esplicitando questa condizione (*), osservando che per le equazioni del § 16 A le derivate di $\overline{x}$ sono combinazioni lineari di x, x_u, x_v, x_{uv}, si trova tosto, posto al solito $a_{12}=e^\theta$ che:

$$(2)\qquad \mu=-A_u-A\theta_u-B_v-B\theta_v+A\frac{B_u+A\beta}{B}+B\frac{A_v+B\gamma}{A}.$$

Risultati duali si trovano scambiando coordinate x di punto e ξ di piano tangente, e cambiando A, B, β, γ in A, $-B$, $-\beta$, $-\gamma$. O così, o col calcolo diretto si trova che i piani passanti per la retta $(x, \overline{x})$ sono i piani

$$(3)\qquad \overline{\xi}=\lambda\xi+2(A\xi_u-B\xi_v)$$

e che questo piano tocca la seconda falda focale, se

$$(4)\qquad \lambda=-A_u-A\theta_u+B_v+B\theta_v+A\frac{B_u+A\beta}{B}-B\frac{A_v+B\gamma}{A}.$$

Notiamo che

$$(\xi,\overline{\xi})=2A(\xi,\xi_u)-2B(\xi,\xi_v)=2A(x,x_u)+2B(x,x_v)=(x,\overline{x}).$$

I fattori di proporzionalità furono scelti in guisa da assicurare la coincidenza delle coordinate $(\xi,\overline{\xi})$ e $(x,\overline{x})$.

Trascureremo il caso $AB=0$ delle congruenze a falde focali coincidenti. Si noti che le λ, μ dipendono soltanto dalle A, B e dai coefficienti dell' elemento lineare proiettivo (non dalle p_{rs}). Perciò:

Se una una falda focale S *di una congruenza* K *si deforma proiettivamente, trascinando con sè i raggi di* K, *i secondi fuochi, e i secondi piani focali vanno nei nuovi secondi fuochi o secondi piani focali.*

Si ha poi, derivando e tenendo conto delle citate formole del § 16 A:

$$(5)\qquad \overline{x}_u=\frac{B_u+A\beta}{A}\overline{x}+Mx-\lambda\left(x_u-\frac{2B}{\lambda}x_{uv}\right)$$

(*) Che equivale alla: $S(A\xi_u-B\xi_v)(A\overline{x}_u-B\overline{x}_v)=0$.

$$\text{ove } M = \mu_u + 2Ap_{11} - \frac{B_u + A\beta}{B}\mu,$$

(6)
$$\overline{x}_v = \frac{A_v + B\gamma}{A}\overline{x} + Lx + \lambda\left(x_v + \frac{2A}{\lambda}x_{uv}\right)$$

$$\text{ove } L = \mu_v + 2Bp_{22} - \frac{A_v + B\gamma}{A}\mu.$$

Se ne deduce, derivando di nuovo:

(7)
$$\left\{\begin{aligned}
\overline{x}_{uu} &= \left(\frac{B_u + A\beta}{B}\overline{x}\right)_u + 4B^2\frac{W}{\lambda}x_{uv} + \rho_{11}x + \sigma_{111}\left(x_u - \frac{2B}{\lambda}x_{uv}\right) + \\
&\qquad + \sigma_{112}\left(x_v + \frac{2A}{\lambda}x_{uv}\right) \\
\overline{x}_{vv} &= \left(\frac{A_v + B\gamma}{A}\overline{x}\right)_v + 4A^2\frac{W}{\lambda}x_{uv} + \rho_{22}x + \sigma_{221}\left(x_u - \frac{2B}{\lambda}x_{uv}\right) + \\
&\qquad + \sigma_{222}\left(x_v + \frac{2A}{\lambda}x_{uv}\right) \\
\overline{x}_{uv} &= \left(\frac{B_u + A\beta}{B}\overline{x}\right)_v + (-N + 4AB)\frac{x_{uv}}{\lambda} + \rho_{12}x + \sigma_{121}\left(x_u - \frac{2B}{\lambda}x_{uv}\right) \\
&\qquad + \sigma_{122}\left(x_v + \frac{2A}{\lambda}x_{uv}\right),
\end{aligned}\right.$$

ove non ci interessa dare i valori delle ρ, σ, e dove:

(8)
$$W = \left(\frac{A_v + B\gamma}{A}\right)_u - \left(\frac{B_u + A\beta}{B}\right)_v$$

(9)
$$N = \lambda\mu + 2A\left(\mu_u + 2Ap_{11} - \mu\frac{B_u + A\beta}{B}\right) -$$
$$- 2B\left(\mu_v + 2Bp_{22} - \mu\frac{A_v + B\gamma}{A}\right).$$

Si noti che ne segue:

(10)
$$(\overline{x}\,\overline{x}_u\,\overline{x}_v\,d^2\overline{x}) = \left(x, x_u - \frac{2B}{\lambda}x_{uv}, x_v + \frac{2A}{\lambda}x_{uv}, \frac{x_{uv}}{\lambda}\right) \times$$

$$\times\begin{vmatrix} \mu & 2A & 2B & 0 \\ M & -\lambda & 0 & 0 \\ L & 0 & \lambda & 0 \\ \Sigma\rho_{ik}\,du_i\,du_k & \Sigma\sigma_{ik1}\,du_i\,du_k & \Sigma\sigma_{ik2}\,du_i\,du_k & 4W(Bdu+Adv)^2+2Ndudv \end{vmatrix}=$$

$$=(x\,x_u\,x_v\,d^2x)\frac{4W(Bdu+Adv)^2-2Ndudv}{\lambda}(2BL\lambda-\lambda^2\mu-2A\lambda M)$$

$$=-N(x\,x_u\,x_v\,d^2x)\left[4W(Bdu+Adv)^2-2Ndudv\right].$$

Indicheremo con N' la quantità dedotta da N, cambiando il segno di B, β, γ (ciò che non muta W). Allora, essendo

$$(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})=(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,\xi_{uv}),$$

si dedurrà col calcolo duale

$$(\overline{\xi}\,\overline{\xi}_u\,\overline{\xi}_v\,d^2\,\overline{\xi})=-N'(x\,x_u\,x_v\,d^2\,x)\left[4W(Adv-Bdu)^2-2N'dudv\right].$$

Dovendo questa espressione essere proporzionale alla precedente, perchè entrambe sono proporzionali alla forma F_2 per la *seconda* falda focale $\overline{S}$, sarà:

$$(11)\qquad -N+4WAB=-N'-4WAB$$

$$(12)\qquad \frac{(\overline{\xi}\,\overline{\xi}_u\,\overline{\xi}_v\,\overline{\xi}_{uv})}{(\overline{x}\,\overline{x}_u\,\overline{x}_v\,\overline{x}_{uv})}=\frac{N}{N'}=\frac{N}{N-8WAB}\quad(\text{se } NN'\neq 0).$$

Le $\overline{\xi}$ non sono dunque normate secondo le convenzioni da noi poste per le superficie; alle $\overline{x}$ dovrebbero corrispondere le $\overline{\xi}\sqrt[4]{\dfrac{N'}{N}}$. Alle $\overline{x}$ corrispondono le $\overline{\xi}$ soltanto se $\mathrm{N}=\mathrm{N}'$ *ossia* $\mathrm{W}=0$; *le $\overline{\xi}$ sono in generale normate in modo che* $(x\,\overline{x})=(\xi,\overline{\xi})$. Si noti che:

α) $2dudv=0$ è l'equazione delle asintotiche della superficie S iniziale.

β) $Bdu\pm Adv=0$ è quella delle sviluppabili.

γ) $4W(Bdu+Adv)^2-2Ndudv=0$ quella delle asintotiche della seconda falda $\overline{S}$. Essa si può scrivere anche $N'(Bdu+Adv)^2-$ $-N(Bdu-Adv)^2=0$.

Il caso $W = 0$, *in cui le* $\overline{x}$, $\overline{\xi}$ *si corrispondono nella legge di normazione, è quello delle congruenze* W.

Il caso $N = 0$ *od* $N' = 0$ *è quello in cui la seconda falda focale degenera come luogo di punti od inviluppo di piani.*

Il rapporto $N' : N$ *è il birapporto delle due coppie di direzioni asintotiche con le due coppie formate ciascuna dalla direzione corrispondente ad uno dei 2 sistemi di sviluppabili contata due volte; o anche* $\left(\frac{\sqrt{N'}-\sqrt{N}}{\sqrt{N'}+\sqrt{N}}\right)^2$ *è il birapporto delle 4 direzioni asintotiche.*

Lasciando invariata la congruenza, possiamo moltiplicare sia le x per uno stesso fattore ρ, sia le A, B per un fattore σ. Nel primo caso anche le ξ, le $\overline{x}$, le $\overline{\xi}$ restano moltiplicate per lo stesso fattore ρ, e dalle formole precedenti segue che W, N, N' restano inalterate. Nel secondo caso le ξ restano inalterate, le $\overline{x}$, $\overline{\xi}$ moltiplicate per σ, N ed N' restano moltiplicate per σ^2. *Quindi sia* W *che* $N : AB$ *sono invarianti della congruenza, di cui sopra abbiamo dato il significato geometrico.*

Mentre però $N : AB$ *ha significato intrinseco, ciò non avviene per* W; *ha invece significato intrinseco la forma* $W du dv$.

B) Nuova interpretazione delle formole precedenti.

Noi possiamo definire la congruenza, dando il punto x della falda S e il piano $\overline{\xi}$ della falda $\overline{S}$, imponendo la sola condizione

$$S x \overline{\xi} = 0 \tag{13}$$

che dice essere x, $\overline{\xi}$ un elemento. Se questa condizione non fosse soddisfatta, il nostro studio equivarrebbe a quello di una coppia di superficie, che si potrebbe svolgere con metodi analoghi ai seguenti, ma di cui qui non ci occupiamo. Altri invarianti della nostra coppia di superficie si otterebbero studiando le espressioni

$$S x d\overline{\xi}\ ,\quad S\overline{\xi} dx\ ,\quad S dx d\overline{\xi}\ ,\quad S d^m x d^r \overline{\xi} \quad \text{ecc.} \tag{14}$$

L'annullarsi del primo e quindi, nel caso attuale, anche del secondo dice che le superficie S ed $\overline{S}$ coincidono; ciò che noi escluderemo. Supposto che u, v siano le asintotiche di S, dall'annullarsi della $S\bar{\xi}x$ deduciamo l'esistenza di quantità λ, A, B tali che:

$$\bar{\xi} = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v) \tag{15}$$

donde:

$$\left\{\begin{aligned} d\bar{\xi} &= \Big\{(\lambda + 2A_u + 2A\theta_u)du + 2(A_v + B\gamma)dv\Big\}\xi_u + \\ &\quad + \Big\{-2(A\beta + B_u)du + (\lambda - 2B_v - 2B\theta_v)dv\Big\}\xi_v + \dots \\ S\bar{\xi}dx &= 2(Bdu - Adv)a_{12} \\ Sd\bar{\xi}dx &= 2a_{12}\Big[-(A_v + B\gamma)dv^2 + (A\beta + B_u)du^2 - \\ &\qquad - (\lambda + A_u + A\theta_u - B_v - B\theta_v)dudv\Big]. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

L'ultima è divisibile per la penultima soltanto se λ è dato dalla formola trovata in principio del §. Se ne deduce *il teorema di Fubini, che può servire alla teoria delle congruenze in coordinate* u, v *qualsiasi:*

Se x *descrive una superficie* S *e* $\bar{\xi}$ *passa per* x *ed inviluppa una superficie* $\bar{S}$, *che con* S *è in corrispondenza biunivoca,* questa corrispondenza *è determinata da una congruenza di cui* S *ed* $\bar{S}$ *sono falde focali soltanto se* $\mathrm{S}dxd\bar{\xi}$ *è divisibile per* $\mathrm{S}\bar{\xi}dx$. *E in tal caso* $\mathrm{S}\bar{\xi}dx = 0$ *è la equazione di un sistema di sviluppabili.*

Precisamente si ha in tal caso:

$$\frac{Sdxd\bar{\xi}}{S\bar{\xi}dx} = \frac{A\beta + B_u}{B}du + \frac{B\gamma + A_v}{A}dv. \tag{17}$$

Dunque: *Soltanto se la congruenza è* W, *il precedente quoziente è un differenziale esatto. In tal caso, moltiplicando le* $\bar{\xi}$ *per uno stesso conveniente fattore* ρ, *potremo rendere tale quoziente identicamente nullo, cioè*

$$Sdxd\bar{\xi} = 0\,, \tag{18}$$

ossia:

$$B_u = -A\beta \qquad A_v = -B\gamma . \tag{19}$$

Siano le x, y, z, t coordinate non omogenee, cioè $t = 1$. La $S\bar{\xi}x = 0$ diventa un'equazione, che determina τ. La $Sdxd\bar{\xi} = 0$ diventa:

$$dxd\bar{\xi} + dyd\bar{\eta} + dzd\bar{\zeta} = 0$$

che, se interpretiamo $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ come spostamenti infinitesimi del punto di cui x, y, z sono coordinate cartesiane, diventa l'equazione delle deformazioni infinitesime nella geom. euclidea di una superficie. Se ne deduce *il classico teorema della geom. metrica, di cui qui si riconosce l'intima ragione proiettiva, che collega la teoria delle congruenze* W *a quella delle deformazioni infinitesime metriche.*

Se invece $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$, *e quindi* x, y, z, t *si possono pensare come coordinate di Weierstrass nella geometria non euclidea, le precedenti equazioni*

$$\mathrm{S}\bar{\xi}\mathrm{x} = 0 \qquad \mathrm{Sd}\bar{\xi}\mathrm{dx} = 0$$

diventano quelle, cui soddisfano le componenti $\bar{\xi}$ *dello spostamento di* x *in una deformazione infinitesima* (nel senso non euclideo) *della superficie* S. Si è così dimostrato per altra via il teorema di Fubini, già intuito dal Bianchi:

Se noi diamo anche in geom. non euclidea una deformazione infinitesima ad una superficie S, *e tiriamo per ogni punto* x *di* S *il raggio normale al corrispondente spostamento* $\bar{\xi}$ *e posto nel piano tangente* ξ, *troviamo una congruenza* W.

Dalle $S\bar{\xi}x = Sd\bar{\xi}dx = 0$ si ha che per ogni funzione $\rho(u, v)$ vale la $Sd(\rho x)\, d(\rho\bar{\xi}) = 0$. Ora $d(\rho x)$ descrive, al variare di $du{:}dv$ un raggio; questi raggi descrivono una congruenza *armonica* ad S (anzi la congruenza *armonica* più generale, variabile col variare di ρ). Così $d(\rho\bar{\xi})$ descrive un raggio della più generale congruenza *coniugata* ad $\bar{S}$.

Quindi: *Se* S *ed* $\bar{\mathrm{S}}$ *sono falde focali di una congruenza* W, *tra i punti dei raggi delle congruenze armoniche ad* S *e i piani di quelle coniugate ad* $\bar{\mathrm{S}}$ *intercede una corrispondenza tale che punto e piano corrispondenti si appartengono.*

Vale il teor. di Čech: *Questa corrispondenza non è per ogni sistema di valori* u, v *che la polarità rispetto al sistema nullo osculatore della congruenza* (determinato dal complesso lineare osculatore alla congruenza, di cui parleremo più avanti). Il teor. di Čech si può enunciare:

Su ogni piano tangente ad una superficie S, *falda focale di una congruenza* W, *si tiri una retta* r, *e sia* r′ *la retta polare rispetto al sistema nullo osculatore. Se la congruenza formata dalle* r *ha sviluppabili che corrispondono a un sistema coniugato, altrettanto avviene della congruenza delle rette* r′.

§ 42. — Formole fondamentali della teoria delle congruenze W.

Abbiamo già osservato al precedente § e si dimostra direttamente nel modo più semplice che, se la congruenza è W, cioè se $W=0$, si possono moltiplicare le A, B per uno stesso fattore tale che:

$$A_v = -B\gamma \qquad B_u = -A\beta. \tag{1}$$

Potremmo invece moltiplicare le A, B per un tale fattore che

$$\frac{B}{A}\gamma = (\log B)_v \qquad \frac{A}{B}\beta = (\log A)_u$$

giungendo pure a risultati semplici; e potremmo procedere in altro modo, fissando che $S dx d\bar{\xi} : S\bar{\xi} dx$ abbia un altro valore prefissato. Noi però adottiamo la prima convenzione. Resta così provato (F.):

La determinazione di una congruenza W *di data prima falda focale* S *è ridotta a quella del sistema lineare* (1).

Confrontando con le (16) del § 17 C si deduce il teorema (F.):

Su una superficie S *i sistemi coniugati tali che l'equazione corrispondente di Laplace per le coordinate di punto ha un invariante uguale all'invariante non omologo dell'equazione tangenziale sono tutti e soli quelli che corrispondono alle sviluppabili delle congruenze* W, *di cui* S *è una falda focale.*

Se ne deduce ricordando le altre formole del § 41:

(2) $$A_{uv} = -B\gamma_u + A\beta\gamma \qquad B_{uv} = -A\beta_v + B\beta\gamma.$$

(3) $$\lambda = -A_u - A\theta_u + B_v + B\theta_v.$$

(4) $$\mu = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v.$$

(5) $$\overline{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \quad ; \quad (6) \quad \overline{\xi} = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v).$$

(7) $$\overline{x_u} = (\mu_u + 2Ap_{11})x - \lambda x_u + 2Bx_{uv}.$$

(8) $$\overline{x_v} = (\mu_v + 2Bp_{22})x + \lambda x_v + 2Ax_{uv}.$$

(9) $$\begin{aligned} N &= \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp_{22}) \\ &= \lambda\mu + 2A(\lambda_u + 2A\pi_{11}) + 2B(\lambda_v - 2B\pi_{22}). \end{aligned}$$

(10) $$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{N}\overline{x} + 2\left(\frac{A}{N}\overline{x_u} - \frac{B}{N}\overline{x_v}\right); \\ \xi &= \frac{\mu}{N}\overline{\xi} + 2\left(\frac{A}{N}\overline{\xi_u} + \frac{B}{N}\overline{\xi_v}\right) \end{aligned} \right.$$

che permettono di dedurre la prima dalla seconda falda focale.

(11) $$(\overline{x}\ \overline{x_u}\ \overline{x_v}\ \overline{x_{uv}}) = N^2(x\ x_u\ x_v\ x_{uv})$$

ossia:

(12) $$\overline{a}_{12} = \pm N a_{12}$$

$$\text{cioè (posto anche } |\overline{a_{12}}| = e^{\overline{\theta}}) \qquad \overline{\theta} = \theta + \log|N|$$

Data la congruenza (cioè $A : B$) le A, B *sono note a meno d'un fattore comune, che le* (1) *permettono di determinare per quadrature. Rimane l'indeterminazione di un fattore costante inessenziale.* Il carattere *invariantivo* di N appare poi meglio, introducendo le L, M del § 16 D. Vale infatti la:

(9) bis $$N = (2BB_{vv} + 2B^2M - B_v^2) - (2AA_{uu} + 2A^2L - A_u^2)$$

affatto equivalente alle precedenti. Una trasformazione simile si poteva eseguire anche nel caso di congruenze generali.

Oltre le A , B, *le* λ , μ *e la* N *vi sono due altri elementi essenziali : le* S , T *che qui definiremo, ponendo*

$$(13)\qquad S=\mu_{uu}-\theta_u\mu_u+\beta\mu_v-\mu(\beta_v+\beta\theta_v)+$$

$$+4B\beta p_{22}+4A_u p_{11}+2A\frac{\partial p_{11}}{\partial u}+2B\frac{\partial p_{11}}{\partial v}.$$

$$(14)\qquad T=\mu_{vv}-\theta_v\mu_v+\gamma\mu_u-\mu(\gamma_u+\gamma\theta_u)+$$

$$+4A\gamma p_{11}+4B_v p_{22}+2A\frac{\partial p_{22}}{\partial u}+2B\frac{\partial p_{22}}{\partial v}.$$

Si trova, derivando le precedenti :

$$(15)\quad \overline{x}_{uu}-\theta_u\overline{x}_u+\beta\overline{x}_v-\pi_{11}\overline{x}=xS=\frac{S}{N}(2A\overline{x}_u-2B\overline{x}_v+\lambda\overline{x})$$

$$(16)\quad \overline{x}_{vv}-\theta_v\overline{x}_v+\gamma\overline{x}_u-\pi_{22}\overline{x}=xT=\frac{T}{N}(2A\overline{x}_u-2B\overline{x}_v+\lambda\overline{x})$$

Confrontando con le equazioni fondamentali relative alla superficie $\overline{S}$ $\left[\overline{x}_{uu}=\overline{\theta}_u\overline{x}_u+\overline{\beta}\,\overline{x}_v+\overline{p}_{11}\overline{x}\right.$ e analoga per $\left.\overline{x}_{vv}\right]$, si ha:

$$(17)\qquad N_u=2AS \qquad N_v=-2BT.$$

$$(18)\quad \beta+\overline{\beta}=-2B\frac{S}{N}=-\frac{B}{A}\frac{N_u}{N}\;;\;\gamma+\overline{\gamma}=2A\frac{T}{N}=-\frac{A}{B}\frac{N_v}{N}.$$

$$(19)\quad \overline{p}_{11}-\pi_{11}=\frac{\lambda}{2A}\frac{N_u}{N}=\lambda\frac{S}{N}\;;\;\overline{p}_{22}-\pi_{22}=-\frac{\lambda}{2B}\frac{N_v}{N}=\lambda\frac{T}{N}.$$

Le (12), (17), (18), (19) *danno tutti gli elementi* $\overline{\theta}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{p}_{ii}$ *della seconda falda focale* $\overline{S}$, *che ne è completamente determinata.* Risulta di più che, se dalla seconda falda $\overline{S}$ si vuole tornare alla prima, ossia se si assume la $\overline{S}$ come superficie di partenza, basta alle μ, λ, A, B, N sostituire le:

$$(20)\quad \bar{\mu} = \frac{\lambda}{N}, \quad \bar{A} = \frac{A}{N}, \quad \bar{B} = -\frac{B}{N}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\mu}{N}, \quad \bar{N} = \frac{1}{N}.$$

Cosicchè varranno anche le formole:

$$(21)\qquad p_{11} = \bar{\pi}_{11} - \frac{\mu}{2A}\frac{N_u}{N} \qquad p_{22} = \bar{\pi}_{22} - \frac{\mu}{2B}\frac{N_v}{N}$$

dedotte dalle (19), scambiando le due falde focali. Ma poichè

$$\pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta\theta_v \;, \quad \bar{\pi}_{11} - \bar{p}_{11} = \bar{\beta}_v + \bar{\beta}\,\bar{\theta}_v = \bar{\beta}_v + \bar{\beta}\left(\theta_v + \frac{N_v}{N}\right)$$

e analoghe per p_{ii}, π_{ii},

si deduce dal confronto di tutte queste formole tra le p, π, tenendo conto dei valori di $\beta + \bar{\beta}$ e di $\gamma + \bar{\gamma}$ *l'equazione fondamentale:*

$$(22)\qquad N_{uv} + \frac{A}{B}\beta N_v + \frac{B}{A}\gamma N_u = 0\,,$$

che chiameremo l'equazione in N.

§ 43. — Le congruenze W con $N =$ cost.

Proveremo ben presto che, se r *sono le sei coordinate di una retta della nostra congruenza, le* r_{uv} *sono combinazioni lineari di* r, r_u, r_v *e che per ogni retta* r *il complesso lineare che è in involuzione con* r, r_u, r_v, r_{uu}, r_{vv} *è anche in involuzione con* r_{uv} *cioè contiene tutte le rette* r, r + dr, r + dr + $\frac{1}{2}$ d²r, *e perciò è il complesso lineare osculatore alla congruenza.*

Se dunque r_{uuu}, r_{vvv}, sono combinazioni lineari delle r, r_u, r_v, r_{uu}, r_{vv} allora le r sono legate da una relazione lineare a coefficienti costanti, cioè la congruenza appartiene a un *complesso lineare.* Il calcolo effettivo prova che ciò avviene quando $N =$ cost., ma noi possiamo evitare il calcolo nel seguente modo. Se $N=\text{cost.}\neq 0$, le formole del precedente § dicono che

$$\beta+\overline{\beta}=0\,,\quad \gamma+\overline{\gamma}=0\,,\quad \overline{\pi}_{ik}=p_{ik}\,,\quad \overline{p}_{ik}=\pi_{ik}\,.$$

Le coordinate $\overline{x}$ soddisfano dunque alle stesse equazioni fondamentali, cui soddisfano le ξ. Se ne deduce quindi che le due falde focali S ed $\overline{S}$ sono superficie trasformate l'una nell'altra da una correlazione; e, poichè un punto x (piano ξ) di una appartiene al piano $\overline{\xi}$ (punto $\overline{x}$) omologo dell'altra, tale correlazione è un sistema nullo, e la nostra congruenza appartiene evidentemente al corrispondente complesso lineare. Viceversa se la congruenza appartiene a un complesso lineare, le falde focali chiaramente si corrispondono nel sistema nullo definito da tale sistema.

Dunque: *Le congruenze* W *per cui* $\text{N}=\text{cost.}\neq 0$ *sono quelle che appartengono ad un complesso lineare.*

Alle precedenti considerazioni si sottrae il caso $N=0$, in cui la seconda falda focale $\overline{S}$ ha una forma F_2 nulla. In tal caso le:

$$Nx=\lambda\overline{x}+2(A\overline{x}_u-B\overline{x}_v)\qquad N\xi=\mu\overline{\xi}+2(A\overline{\xi}_u+B\overline{\xi}_v)$$

diventano, per $N=0$, moltiplicando le $\overline{x}$ e le $\overline{\xi}$ per convenienti fattori:

$$A\overline{x}_u-B\overline{x}_v=0\qquad A\overline{\xi}_u+B\overline{\xi}_v=0\,.$$

Quindi, se $u'=\text{cost.}$, $v'=\text{cost.}$ sono le equazioni delle sviluppabili della congruenza, è

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial u'}=\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial v'}=0\,;\quad \overline{x}=\overline{x}(v')\,,\quad \overline{\xi}=\overline{\xi}(u')$$

cioè i punti $\overline{x}$ si riducono ad ∞^1 punti, i piani $\overline{\xi}$ ad ∞^1 piani. Poichè, $S\overline{x}\,\overline{\xi}=0$ identicamente in u', v' segue che ogni punto $\overline{x}$ giace su ognuno dei piani $\overline{\xi}$, e che quindi i punti $\overline{x}$, trovandosi su tutti i piani $\overline{\xi}$, appartengono a una retta, per cui passano tutti i piani $\overline{\xi}$.

Una congruenza W, *per cui* N $=0$, *appartiene a un complesso lineare speciale, l'asse del quale è la sua seconda falda focale.*

Questo teorema del Fubini è stato nel modo seguente reso intuitivo dal Prof. Segre. Se $N=0$, la forma F_2 relativa ad $\overline{S}$ è identicamente nulla; e pertanto $\overline{S}$ si riduce ad una linea L. La congruenza è luogo delle generatrici di ∞^1 coni, aventi i vertici su L. Questi coni possono ridursi a fasci di rette: cosa impossibile nelle nostre ipotesi secondo le quali la prima falda focale S è una effettiva superficie non sviluppabile. Se i coni sono curvi, e P, P', P'' sono i vertici di 3 coni consecutivi, il complesso lineare osculatore alla congruenza in una sua retta r uscente da P dovrà contenere tutti i regoli determinati da r e da due rette consecutive. Prendendo queste 2 rette sul cono di vertice P, se ne deduce che il complesso è speciale; prendendo queste due rette una uscente da P', l'altra da P'' si deduce che P, P', P'' sono sull'asse del complesso, che costituirà perciò la seconda falda focale della congruenza.

§ 44. — Confronto coi risultati classici della geometria metrica.

Supponiamo nota la μ, e proponiamoci di calcolare A, B e quindi la nostra congruenza. Assumendo λ come nuova incognita ausiliaria, le nostre equazioni in A, B diventano:

$$A_v = -B\gamma \qquad B_u = -A\beta. \tag{1}$$

$$2A_u = -2A\theta_u - (\lambda + \mu) \qquad 2B_v = -2B\theta_v + (\lambda - \mu). \tag{2}$$

Scrivendone le condizioni d'integrabilità troviamo:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_v = -\mu_v - 2A(\theta_{uv} + \beta\gamma) + 2B(\gamma\theta_u + \gamma_u) \\ \lambda_u = \mu_u + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) - 2A(\beta\theta_v + \beta_v). \end{array}\right. \tag{3}$$

Scrivendo infine la condizione d'integrabilità di queste ultime, troviamo:

$$(4)\qquad \mu_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu + 2B\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + 2A\frac{\partial p_{11}}{\partial v} = 0.$$

Senza più oltre occuparci del caso generale, supponiamo le coordinate non omogenee cioè $p_{11} = p_{22} = 0$, $t = 1$.

Questa equazione si riduce alla equazione di Moutard (Cap. II, § 18)

$$(5)\qquad \mu_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu = 0,$$

al cui studio è dunque ridotta la ricerca delle congruenze W. Ora questa equazione è appunto la base della teoria metrica di tali congruenze, così come è svolta nelle classiche lezioni del Bianchi.

Le equazioni che definiscono S, T si riducono per le $p_{ii}=0$ a:

$$(6)\qquad \mu_{uu} - \theta_u\mu_u + \beta\mu_v - \mu\pi_{11} = S = \frac{1}{2A}N_u.$$

$$(7)\qquad \mu_{vv} - \theta_v\mu_v + \gamma\mu_u - \mu\pi_{22} = T = -\frac{1}{2B}N_v.$$

Se sostituiamo 0 al posto di S, T, queste 3 equazioni nella μ sono le stesse cui soddisfano le coordinate ξ, η, ζ del piano tangente (loc. cit.) e perciò sono illimitatamente integrabili. Ne segue facilmente, scrivendo che esse sono compatibili anche quando i secondi membri delle ultime due sono S e T che

$$(8)\qquad \beta T = S_v \qquad \gamma S = T_u$$

ossia

$$(8)_{\text{bis}}\qquad S_v = (-\beta)(-T) \qquad (-T)_u = -\gamma S.$$

Sostituendo alle S, T *i loro valori* $N_u : 2A$ *e* $-N_v : 2B$, *si ritrova l'equazione fondamentale* (22) *del* § 42 *in* N.

Nel caso $\mu = 0$ la congruenza degenera; questo fatto noto ci risulta evidente poichè, essendo qui $p_{ii} = 0$, è anche $N = 0$.

La formola:

$$(9)\qquad \overline{\xi_u} = (\lambda_u + 2A\pi_{11})\xi - \mu\xi_u - 2B\xi_{uv} =$$

$$= \Big[\mu_u + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) - 2A(\beta\theta_v + \beta_v) + 2A\pi_{11}\Big]\xi - \mu\xi_u - 2B\xi_{uv}$$

(con le analoghe in η, ζ) diventa per le:

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta\theta_v + \beta_v \quad , \quad \xi_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)\xi$$

appunto la:

$$(10) \qquad \overline{\xi}_u = \mu_u \xi - \mu \xi_u \quad \text{ossia} \quad \frac{\overline{\xi}_u}{\mu^2} = -\left(\frac{\xi}{\mu}\right)_u ;$$

si trova analogamente $\dfrac{\overline{\xi}_v}{\mu^2} = \left(\dfrac{\xi}{\mu}\right)_v$.

Ritroviamo così la classica formola della trasformazione di Moutard. Ne deduciamo poi:

$$(11) \qquad \overline{\xi}_{uv} = \frac{\mu_u}{\mu}\overline{\xi}_v + \frac{\mu_v}{\mu}\overline{\xi}_u .$$

Cioè: *Il piano* $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, 1 *inviluppa una superficie* $\overline{\Sigma}$, *su cui le* u, v *formano un sistema coniugato a uguali invarianti tangenziali* (cioè relativi all'equazione di Laplace per le coordinate di piano tangente).

Anche sulla superficie S_0 *inviluppata dal piano* ξ, η, ζ, μ (le cui coordinate soddisfano tutte all'equazione di Moutard iniziale) *le* u, v *descrivono un sistema coniugato a invarianti tangenziali uguali.*

Calcolando l'equazione $(\overline{\xi}_u \; \overline{\xi}_v \; d^2\overline{\xi}) = 0$ delle asintotiche della superficie $\overline{\Sigma}$ si trova:

$$(12) \qquad S du^2 = T dv^2 \qquad \text{od anche} \qquad \frac{1}{A} N_u du^2 + \frac{1}{B} N_v dv^2 = 0.$$

Cercando invece l'equazione delle asintotiche di S_0, inviluppo del piano ξ, η, ζ, μ si trova:

$$(13) \qquad S du^2 + T dv^2 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{A} N_u du^2 = \frac{1}{B} N_v dv^2$$

Le asintotiche di $\overline{\Sigma}$ *e di* S_0 *determinano sulla* S *due sistemi coniugati che si tagliano armonicamente e che, si noti, sono,* come le A, B, N, *indipendenti dal piano* $\mathrm{t}=0$ *assunto nei calcoli precedenti come piano all' infinito.*

Le equazioni $(8)_{\text{bis}}$ *cui soddisfano* S, $-\mathrm{T}$ *si deducono da quelle cui soddisfano* A, B *mediante lo scambio di* β, γ. Se ne deduce il teor. (F.):

Data una congruenza W *di cui una falda* S *sia isoterma–asintotica* $(\beta=\gamma)$, *o anche data l' equazione* $\mathrm{du}:\mathrm{A}=\mathrm{dv}:\mathrm{B}$ *di un sistema di sviluppabili* (col che le A, B sono determinate a meno di un fattore, la cui ricerca si esegue per le (1) con sole quadrature), *le tangenti alle linee* $\mathrm{du}:\mathrm{S}=\mathrm{dv}:-\mathrm{T}$ *descrivono pure una congruenza* W.

Nel caso generale, confrontando con le (14) del § 17 *B*, vediamo che:

Sulla S *le linee corrispondenti alle asintotiche di* S_0 *formano un sistema coniugato a invarianti tangenziali uguali,* com' è intuitivo *perchè piani tangenti omologhi di* S, S_0 *si incontrano sul piano* $\mathrm{t}=0$, su cui segnano lo stesso sistema di linee; *e il sistema coniugato di* S, *armonico al precedente, cioè quello che corrisponde alle asintotiche di* $\overline{\Sigma}$, *ha uguali gli invarianti di punto.* Ecco un nuovo significato della equazione cui soddisfa la N!

Le asintotiche di una delle 3 superficie S, S_0, $\overline{\Sigma}$ *corrispondono sulle altre due a un sistema coniugato.*

Se indichiamo per un momento con $p=\text{cost.}$, $q=\text{cost.}$ le equazioni delle asintotiche di S_0, formanti su S, $\overline{\Sigma}$ un sistema coniugato, varranno equazioni del tipo:

$$x_{pq}=rx_p+sx_q \qquad \overline{\xi}_{pq}=\rho\xi_p+\sigma\xi_q.$$

Dalla $Sdxd\overline{\xi}=0$ donde $Sx_p\overline{\xi}_q=0$ otteniamo derivando:

$$Sx_p\overline{\xi}_{pq}+S\overline{\xi}_p x_{pq}=0 \qquad Sx_p(\rho\,\overline{\xi}_p+\sigma\,\overline{\xi}_q)+S\,\overline{\xi}_p(rx_p+sx_q)=0$$

$\sigma Sx_p\overline{\xi}_q+sS\overline{\xi}_p x_q=0$ che, confrontata con la $Sx_p\overline{\xi}_q+S\overline{\xi}_p x_q=0$, dà $\sigma=s$.

In modo simile si prova $r=\rho$. Quindi, *relativamente al sistema coniugato comune, le coordinate non omogenee di un punto della* S *e di un piano tangente della* $\overline{\Sigma}$ *soddisfano a una stessa equazione di Laplace.* Vale pure l' oss. (F.):

Date le equazioni differenziali (du : A = dv : B) *di un sistema di sviluppabili col che le* A , B, *come già abbiamo detto, si calcolano con sole quadrature, allora, trovate le* A , B, *senza ulteriori quadrature non solo si calcolano tutti gli elementi della congruenza, ma anche le equazioni differenziali* $\mathrm{S}du^2 \pm \mathrm{T}dv^2$ *dei precedenti sistemi coniugati. E viceversa, dato uno di questi sistemi coniugati, le* S , T *si calcolano con sole quadrature; e con ulteriori quadrature si possono calcolare tutti gli elementi della congruenza.*

Infatti le tre equazioni (5), (6), (7) nella μ si sanno integrare se $S = T = 0$ ed hanno per soluzioni le combinazioni lineari di ξ, η, ζ. Determinata la μ, le (1), (2), (3) determinano A, B, λ con nuove 3 costanti arbitrarie, cosicchè otterremo sei sistemi di valori linearmente indipendenti $A^{(i)}, B^{(i)}, \lambda^{(i)}, \mu^{(i)}$ [la i è un indice, non un simbolo di calcolo assoluto] di cui ogni altra soluzione è, se $S = T = 0$, una combinazione lineare.

Ora, essendo $S = T = 0$, è $N = \text{cost.}$; e quindi la congruenza appartiene a un complesso lineare; questa osservazione basta a provare che la $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, ecc. si trovano senza quadrature. Nel caso generale in cui S e T non sono nulle, si ponga $A = \Sigma k^{(i)} A^{(i)}$, $B = \Sigma k^{(i)} B^{(i)}$, ecc. Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie dimostra che le k si trovano con sole quadrature.

Si osservi però che, *mentre, date le* A , B *non sono più necessarie quadrature, se invece sono date le* S , T, *sono ancora necessarie delle quadrature.* Ciò che spiega la maggior semplicità della teoria proiettiva (F.) in confronto alla teoria classica, che si volge alla determinazione della μ, da cui segue subito la conoscenza delle S, T. Ed ecco l'intima ragione di questo fatto.

Mentre date le A , B, *la corrispondente congruenza è determinata, il dare le* S , T *individua le infinite congruenze che si ottengono da una di esse combinandola linearmente con le congruenze di un complesso lineare.*

Se invece di dare le sole S, T, si desse effettivamente la μ, permane ancora una indeterminazione; infatti, se $\mu = 0$, si ha, nelle attuali ipotesi $t = 1$, che $\overline{t} = 0$, che cioè *la congruenza ha per seconda falda focale una retta posta nel piano che abbiamo assunto come piano all' infinito.*

§ 45. — L'equazione delle congruenze W in coordinate di retta.

Ritornando a coordinate omogenee, le coordinate $r=(x\,\overline{x})$ di una retta generica della nostra congruenza soddisfano alle:

$$(1)\qquad \begin{cases} r = A(x\,x_u) + B(x\,x_v) \quad ; \\ r_u = -\dfrac{\lambda+\mu}{2}(x\,x_u) + B(x_u\,x_v) + B(x\,x_{uv}) \\ r_v = \dfrac{\lambda-\mu}{2}(x\,x_v) - A(x_u\,x_v) + A(x\,x_{uv})\,; \\ r_{uv} = (\theta_{uv}+\beta\gamma)r + \lambda(x_u\,x_v) - \mu(x\,x_{uv}) \end{cases}$$

donde:

$$(2)\qquad r_{uv} - \left(\frac{\partial \log B}{\partial v} + \theta_v\right) r_u - \left(\frac{\partial \log A}{\partial u} + \theta_u\right) r_v +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial \log A}{\partial u} + \theta_u\right)\left(\frac{\partial \log B}{\partial v} + \theta_v\right) - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\right] r = 0\,.$$

Le coordinate r *di una retta descrivente una congruenza* W *soddisfano ad una equazione di Laplace, le cui caratteristiche sono le asintotiche delle falde focali.* Il complesso lineare in involuzione con $r\,, r_u\,, r_v\,, r_{uu}\,, r_{vv}$ è in involuzione anche con r_{uv}, cioè è *osculatore alla nostra congruenza.* Gli invarianti di tale equazione sono uguali soltanto quando $A:B=U:V$, ove U è funzione della sola u, V della v. Posto $A:U=B:V=C$, le (1) del § 44 danno:

$$(3)\qquad \beta = -\frac{V}{U}\frac{C_u}{C} \quad , \quad \gamma = -\frac{U}{V}\frac{C_v}{C}.$$

Cambiando i parametri delle $u\,, v$ si renda $U=V=1$. Sarà:

$$(4)\qquad \beta = -\frac{\partial \log C}{\partial u} \quad , \quad \gamma = -\frac{\partial \log C}{\partial v} \quad \text{e quindi} \quad \beta_v = \gamma_u\,.$$

Perciò: *Soltanto le superficie* R (per cui cioè i parametri delle asintotiche si possono scegliere in guisa che $\beta_v = \gamma_u$) *sono falde focali di una congruenza* W, *le cui rette soddisfano ad una equazione di Laplace ad invarianti uguali. Tale congruenza è formata dalle tangenti alle* u — v = cost.; *da quanto segue apparirà che altrettanto avviene delle tangenti alle linee* u + v = cost., *le quali con le precedenti formano un sistema coniugato, che si dice* R.

Per vedere tutto questo chiaramente, chiediamoci quando *sia le tangenti ad un sistema di linee, che le tangenti alle linee coniugate formano congruenze* W. In tal caso per le due congruenze $A : B$ ha valori uguali e di segno opposto. Dovendo entrambi soddisfare la

$$(5) \qquad W = \frac{\partial^2 \log \frac{A}{B}}{\partial u \partial v} + \left(\frac{B}{A}\gamma\right)_u - \left(\frac{A}{B}\beta\right)_v = 0 ,$$

caratteristica delle congruenze W, sarà appunto $\dfrac{\partial^2 \log(A:B)}{\partial u \partial v} = 0$, cioè $A : B = U : V$, come nel caso precedente. Cioè:

Se le tangenti a un sistema di linee tracciate su una superficie S *formano una congruenza* W, *condizione necessaria e sufficiente affinchè anche le tangenti coniugate formino una congruenza* W *è che tali linee insieme alle coniugate formino un sistema* R, *ossia che l'equazione di Laplace cui soddisfano le coordinate delle rette della data congruenza abbia invarianti uguali.*

Altrettanto avverrà perciò anche del sistema coniugato, immagine delle sviluppabili sulle seconde falde focali; e le successive trasformate di Laplace della nostra congruenza sono tutte congruenze della stessa specie. Si noti in più che i *sistemi coniugati* R *sono tutti isotermo–coniugati.*

Se $u \pm v =$ cost. formano un sistema coniugato R, a coordinate delle tangenti a tali linee possiamo assumere le

$$(6) \qquad \rho = \frac{1}{a_{12}} \left[(x\, x_u) + (x\, x_v)\right] \qquad \rho' = \frac{1}{a_{12}} \left[(x\, x_u) - (x\, x_v)\right]$$

le quali hanno il vantaggio di essere *invarianti;* perchè, moltiplicando le x per un fattore k, e quindi a_{12} per k^2, esse non mutano.

Valgono le:

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial u}(\rho+\rho')=\beta(\rho-\rho') \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}(\rho-\rho')=\gamma(\rho+\rho')$$

ossia:

$$(8)\qquad (C\rho)_u=-C^2\left(\frac{\rho'}{C}\right)_u \quad , \quad (C\rho)_v=C^2\left(\frac{\rho'}{C}\right)_v$$

donde:

$$(9)\quad \rho_{uv}+(\Gamma_{uv}-\Gamma_u\Gamma_v)\rho=0 \ , \ \rho'_{uv}+(-\Gamma_{uv}-\Gamma_u\Gamma_v)\rho'=0 \ \ (\Gamma=\log C).$$

Queste equazioni sono pertanto trasformate di Moutard l' una dell' altra.

Le ρ_{14}, ρ_{24}, ρ_{34} sono le coordinate del punto ove la retta ρ incontra il piano $t=0$; risultato analogo vale per ρ'. Dai risultati del § 18 si deduce che tali due punti si possono considerare come proiezioni di due superficie Σ', Σ'' di cui u, v sono le asintotiche. Supposto $t=1$, è:

$$(10)\ \rho_{41}=\frac{1}{a_{12}}(x_u+x_v) \ , \ \rho_{42}=\frac{1}{a_{12}}(y_u+y_v) \ , \ \rho_{43}=\frac{1}{a_{12}}(z_u+z_v)$$

che noi potremo pensare (loc. cit.) essere *tre* delle *quattro* coordinate omogenee di un punto di Σ', mentre le coordinate ξ', η', ζ', τ' corrispondenti del piano tangente soddisfano alla $\tau'=1$ (sono *non* omogenee). E dalle formole date loc. cit., *duali* di quelle di Lelieuvre, risulta:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\xi'}{\partial u}&=\begin{vmatrix}\rho_{42} & \rho_{43}\\ \dfrac{\partial\rho_{42}}{\partial u} & \dfrac{\partial\rho_{43}}{\partial u}\end{vmatrix}=\frac{1}{a_{12}^2}\begin{vmatrix}y_u+y_v & z_u+z_v\\ (\beta-\theta_u)y_v+y_{uv} & (\beta-\theta_u)z_v+z_{uv}\end{vmatrix}\\ \frac{\partial\xi'}{\partial v}&=-\begin{vmatrix}\rho_{42} & \rho_{43}\\ \dfrac{\partial\rho_{42}}{\partial v} & \dfrac{\partial\rho_{43}}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{1}{a_{12}^2}\begin{vmatrix}y_u+y_v & z_u+z_v\\ (\gamma-\theta_v)y_u+y_{uv} & (\gamma-\theta_v)z_u+z_{uv}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Derivando, ricordando la $\beta_v=\gamma_u$ e le equazioni fondamentali per Σ'

(12) $$\xi'_{uu} = \theta'_u \xi'_u - \beta' \xi'_v \qquad \xi'_{vv} = \theta'_v \xi'_v - \gamma' \xi'_u$$

(dove appare chiaro il significato dei simboli)

si trova che le quantità β', γ' relative a Σ' sono date da:

(13) $$\beta + \beta' = \theta_u + \theta'_u \; ; \quad \gamma + \gamma' = \theta_v + \theta'_v \quad \theta + \theta' = \log(\theta_u + \theta_v - \beta - \gamma)$$

Anche Σ' è perciò una superficie R; e così pure Σ''. È facile precisare tale proprietà giungendo al teorema seguente:

Le intersezioni con un piano di due congruenze R, *trasformate di Laplace, sono proiezioni delle asintotiche di due superficie* Σ'', Σ', *che sono ancora superficie* R, *anzi sono falde focali di una nuova congruenza* W *che si dirà trasformata* T *della falda focale* S *comune alle due congruenze iniziale.* Vale anche il teorema duale, perchè le correlazioni portano superficie R in superficie R.

§ 46. — Le congruenze di Wilczynski.

Ci chiediamo quando *due congruenze aventi a comune una falda focale* S, *su cui le loro sviluppabili segnano lo stesso sistema coniugato, appartengono entrambe a complessi lineari.*

Entrambe le congruenze saranno W, perciò il sistema coniugato sarà un sistema R, le cui equazioni si potranno porre nella forma $u \pm v =$ cost., mentre è $\beta_v = \gamma_u$. Le due congruenze si ottengono ponendo

(1) $$A = B = e^{-\varphi} \qquad \text{oppure} \qquad A = -B = e^{+\varphi}$$

ove $$\varphi_u = \beta \;, \quad \varphi_v = \gamma .$$

Gli elementi della seconda congruenza saranno contrassegnati con apici.

Per entrambe si calcolino μ, λ, N. Si trova subito:

(2) $$N = A^2(2\varphi_{uu} - 2\varphi_{vv} - \varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \theta_u^2 - \theta_v^2 +$$
$$+ 2\varphi_u \theta_v - 2\varphi_v \theta_u - 2\theta_{uu} + 2\theta_{vv} + 4p_{11} - 4p_{22}),$$

(3) $$N' = A'^2(-2\varphi_{uu} + 2\varphi_{vv} - \varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \theta_u^2 - \theta_v^2 +$$
$$+ 2\varphi_u\theta_v - 2\varphi_v\theta_u - 2\theta_{uu} + 2\theta_{vv}),$$

donde, sottraendo:

(4) $$\frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}) = (\varphi_{uu} - \varphi_{vv}).$$

Sommando si trova invece:

(5) $$\frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} + N'e^{-2\varphi}) = \frac{1}{2}(\varphi_v^2 - \varphi_u^2) -$$
$$-\left(\theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - p_{11}\right) + \left(\theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - p_{22}\right)$$

cioè, ricordando la $\beta_v = \gamma_u$, e i valori delle L, M definiti al § 16 D,

(6) $$\frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} + N'e^{-2\varphi}) = \frac{1}{2}(\varphi_v^2 - \varphi_u^2) - L + M.$$

Le condizioni (14), (15) della teoria delle superficie (§ 16 D) danno pertanto:

$$M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) = 2\varphi_v\varphi_{uv} - \varphi_u\varphi_{vv} =$$
$$= -2\varphi_v\varphi_{uv} - \varphi_u\left\{\varphi_{uu} - \frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi})\right\}$$

donde, se N, N' sono costanti, se cioè le nostre congruenze appartengono a complessi lineari,

(7) $$M = -\varphi_v^2 - \frac{1}{2}\varphi_u^2 + \frac{1}{8}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}) + V$$

[V = funzione della sola v].

E similmente si trova:

(8) $$L = -\varphi_u^2 - \frac{1}{2}\varphi_v^2 - \frac{1}{8}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}) + U$$

[U = funzione della sola u].

Confrontando col precedente valore di $L - M$, se ne deduce $U = V$ cioè

(9) $$U = V = m = \text{cost.}$$

Ora, se N ed N' sono costanti:

$$\beta_{vvv} - \gamma_{uuu} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\varphi_{vv} - \varphi_{uu}) = -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\frac{Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}}{4} =$$

$$= -\varphi_{uv}\frac{Ne^{2\varphi} + N'e^{-2\varphi}}{2} - \varphi_u\varphi_v(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}).$$

Se ne deduce facilmente che anche la terza condizione (5) del § 16 D d'integrabilità è soddisfatta.

La nostra ricerca è ridotta allo studio della sola equazione:

(10) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi})$$

Se una *almeno* delle citate congruenze W è degenere, se p. es. $N' = 0$, questa equazione si riduce alla nota equazione di Liouville

(11) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \frac{N}{4}e^{2\varphi}$$

il cui integrale generale è dato dalla $e^{\varphi} = \text{cost.}\frac{\sqrt{X'Y'}}{X+Y}$, ove X è funzione soltanto di $u + v$ ed Y di $u - v$.

Se nè N, nè N' sono nulli, allora, essendo φ determinato a meno di una costante additiva h dalla $d\varphi = \beta du + \gamma dv$, possiamo sostituire $\varphi + h$ alla φ deducendone:

(12) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \frac{1}{4}(Ne^{2h}e^{2\varphi} - N'e^{-2h}e^{-2\varphi}).$$

Scegliendo h in modo che $Ne^{2h} = \pm N'e^{-2h}$ si trova, moltiplicando u, v per una stessa costante:

(13) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \varepsilon(e^{2\varphi} \mp e^{-2\varphi}) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

che è *l'equazione da cui dipende la ricerca delle superficie a curvatura costante e da cui nel campo proiettivo dipende la ricerca delle superficie su cui esiste un sistema coniugato le cui tangenti definiscono due congruenze appartenenti entrambe a complessi lineari.*

Ricordo che le superficie a curvatura costante (così come le deformate delle quadriche) sono (Bianchi) casi particolari di superficie R; le tangenti a un qualsiasi sistema di linee di curvatura di una superficie a curvatura costante sono W.

§ 47. — Congruenze W di cui una falda focale S è quadrica.

A) Primi teoremi.

Se S è una quadrica, è $\beta = \gamma = 0$. Dunque $A = U$ è funzione della sola u, $B = V$ della v. *Le congruenze aventi una quadrica* S *per falda focale sono dunque quelle le cui sviluppabili inviluppano su di essa linee, che con le coniugate formano un sistema isotermo-coniugato.*

Posto $t = 1$, $y = u$, $z = v$, $x = uv$, si ha $\theta = p_{11} = p_{22} = 0$ e quindi

$$(1)\quad \mu = -U' - V', \quad \lambda = -U' + V', \quad N = U'^2 - V'^2 - 2UU'' + 2VV''$$

$$(2)\quad \bar{\beta} = \bar{\beta} + \beta = \frac{2VU'''}{N} \quad , \quad \bar{\gamma} = \bar{\gamma} + \gamma = -\frac{2UV'''}{N}.$$

La seconda falda focale $\bar{\mathrm{S}}$ *è rigata* ($\bar{\beta}\bar{\gamma} = 0$) *soltanto se o* U *è funzione di secondo grado della* u, *o* V *della* v. Se p. es. $A = U = au^2 + 2bu + c$ ($a, b, c =$ cost.), allora

$$(3)\quad \bar{\gamma} = \frac{2V'''(au^2 + 2bu + c)}{4(ac - b^2) + (V'^2 - 2VV'')}.$$

Dunque: *Se una congruenza* W *ha per falde focali una quadrica* S *ed una rigata* $\bar{\mathrm{S}}$ *questa appartiene a una congruenza lineare* (perchè l'equazione $\bar{\gamma} = 0$ ha due radici $u =$ cost.), *e le sue asintotiche* *curve appartengono ciascuna a un complesso lineare. Se* $\overline{\mathrm{S}}$ *non è rigata, ma* S *è sempre una quadrica, l' identità*

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \log \overline{\beta}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \overline{\gamma}}{\partial u \partial v} = \overline{\beta}\,\overline{\gamma}$$

prova che le asintotiche curve della seconda falda $\overline{\mathrm{S}}$, *di qualunque sistema siano, appartengono ciascuna ad un complesso lineare.*

È poi evidente che sono equivalenti i 3 fatti seguenti:

a) U *e* V *sono polinomi di secondo grado;* b) *la congruenza appartiene a un complesso lineare;* c) *anche la seconda falda focale è una quadrica.*

In tal caso con una trasform. lineare (reale o no; intera o fratta) sulla u e una trasformazione analoga sulla v (cioè con una proiettività applicata ad S) potremo ridurre U ad 1 (se $U=0$ ha radici coincidenti che si mandano all'∞) oppure ad au ($a=$ cost.) e similmente la V ad 1 oppure ad av ($a=$ cost.) Le linee $du:U = dv:V$ saranno quindi riducibili ad uno dei tipi: $u-v=$ cost. (nel qual caso $N=0$ e la seconda falda degenera in una retta) oppure $ue^{-hv}=$ cost. ($h=$ cost.) oppure $u:v^h=$ cost. ($h=$ cost.)

B) Interpretazione nella geometria non euclidea.

Assumeremo S come assoluto di una metrica non euclidea di Cayley. Le coordinate di un punto di $\overline{S}$ sono:

$$(5) \quad \begin{cases} \overline{x} = -(U'+V')uv + 2(vU+uV) \quad ; \quad \overline{t} = -(U'+V'); \\ \overline{y} = -(U'+V')u + 2U \quad ; \quad \overline{z} = -(U'+V')v + 2V; \end{cases}$$

formole notevoli che danno in termini finiti per mezzo di una funzione arbitraria U della u e V della v le equazioni di una superficie $\overline{S}$.

Posto

$$(6) \qquad x' = 2V - V'v \quad , \quad y' = -V' \quad , \quad z' = v \quad , \quad t' = 1,$$

questo punto, al variare di v, descrive una curva C'. Le equazioni precedenti che si possono scrivere:

$$
(7) \qquad \begin{aligned} &\overline{x} = ux' + (2U - U'u)z' \quad ; \quad \overline{y} = uy' + (2U - U'u)t' \; ; \\ &\overline{z} = x' - U'z' \quad ; \quad \overline{t} = y' - U't' \end{aligned}
$$

provano che: *Le asintotiche* u = cost. *di* $\overline{S}$ *sono tutte tra loro collineari* (proiettive a C'); e *altrettanto dicasi delle* v = cost. Poichè dalle precedenti equazioni segue che $\overline{x}\,\overline{t} - \overline{y}\,\overline{z}$ è proporzionale ad $x'\,t' - y'\,z'$ segue che *le collineazioni che portano un' asintotica di* $\overline{S}$ *in un' altra asintotica dello stesso sistema lasciano invariata la quadrica* S, *e nella metrica di Cayley sopra definita si riducono a movimenti.* La tangente a una asintotica $v =$ cost. di $\overline{S}$ incontra S in un punto $\overline{x}_u + \rho\overline{x}$, ove ρ è definito dalla:

$$
(\overline{x}_u + \rho\overline{x})\,(\overline{t}_u + \rho\overline{t}) = (\overline{y}_u + \rho\overline{y})\,(\overline{z}_u + \rho\overline{z}) \,,
$$

ossia:

$$
(8) \qquad U'' + 2U'\rho + 2U\rho^2 = 0 \,.
$$

Le generatrici $u = u_0$ di S a cui si appoggia tale tangente sono date dalla:

$$
(9) \qquad u_0 = \frac{y_u + \rho y}{t_u + \rho z} = u + \frac{1}{\rho}
$$

che dipende esclusivamente dalla coordinata u del punto di $\overline{S}$, ove si è tirato la tangente all' asintotica $v =$ cost. Dunque:

Le tangenti alle asintotiche (p. es. $v =$ cost.) *di un sistema della* $\overline{S}$ *tirate per i punti di un' asintotica* (u = cost.) *dell'altro sistema incontrano* S *in una stessa coppia di generatrici* (u = cost.), *e nella nostra metrica sono pertanto parallele di Clifford.* (La funzione U determina tale corrispondenza tra u e i due valori u_0; significato geometrico analogo ha la funzione V).

Le linee $\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{U}} + \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{V}} = 0$ *inviluppate su* $\overline{S}$ *dai raggi della nostra congruenza hanno dunque per tangenti tali raggi che sono anche tangenti ad* S. *Perciò nella nostra metrica esse sono su* $\overline{S}$ *linee di lunghezza nulla.* Ciò si controlla col calcolo nel modo seguente:

Essendo $\overline{x}\,\overline{t}-\overline{y}\,\overline{z}=-4UV$, l'elemento lineare di $\overline{S}$ nella nostra metrica è, a meno di un fattore costante arbitrario:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & d\left(\frac{\overline{y}}{\sqrt{UV}}\right)d\left(\frac{\overline{z}}{\sqrt{UV}}\right)-d\left(\frac{\overline{t}}{\sqrt{UV}}\right)d\left(\frac{\overline{x}}{\sqrt{UV}}\right)= \\ & =\left(\frac{du}{U}+\frac{dv}{V}\right)\left(\frac{2UU''-U'^2}{U}du+\frac{2VV''-V'^2}{V}dv\right)\end{aligned}\right.$$

che si scompone appunto nel prodotto di due fattori, di cui il primo è $\dfrac{du}{U}+\dfrac{dv}{V}$, come si voleva verificare. Ma, osservando che anche il secondo è un differenziale esatto, si ha in più:

Le superficie $\overline{\mathrm{S}}$ *sono nella metrica di Cayley superficie a curvatura nulla.* La congruenza W iniziale è quella delle tangenti al primo sistema di linee $\dfrac{du}{U}+\dfrac{dv}{V}=0$ di lunghezza nulla; la simmetria del risultato fa prevedere che *anche le tangenti al secondo sistema di linee di lunghezza nulla formano un' altra congruenza* W *avente le stesse falde focali.* Infatti per $\overline{S}$ è:

$$(11)\qquad \overline{\beta}=2VU''':N \quad , \quad \overline{\gamma}=-2UV''':N.$$

Affinchè le tangenti alle altre linee di lunghezza nulla

$$(12)\qquad \frac{du}{\overline{A}}=\frac{dv}{\overline{B}} \qquad \overline{B}:\overline{A}=-\frac{2UU''-U'^2}{U}:\frac{2VV''-V'^2}{V}$$

formino una congruenza W è necessario che

$$\frac{\partial^2\log\overline{A}:\overline{B}}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\overline{B}\,\overline{\gamma}}{\overline{A}}\right)_u-\left(\frac{\overline{A}\,\overline{\beta}}{\overline{B}}\right)_v=0,$$

equazione che si trova identicamente soddisfatta.

Oss. In un punto di $\overline{S}$ tiriamo le tangenti alle due linee di lunghezza nulla, che ne escono; esse incontreranno la quadrica in due punti A, B. Siano (u, v) le coordinate curvilinee di A ed

(u_1, v_1) quelle di B. Si trova che:

$$(13) \qquad u_1 = u - 2\frac{U}{U'} \qquad\qquad v_1 = v - 2\frac{V}{V'}.$$

Così la U e la V si possono pensare anche come le funzioni che definiscono la corrispondenza tra A e B. Il fatto che u_1 è funzione della sola u, e v_1 della sola v dimostra in altro modo l'ultimo teorema ottenuto.

Questo teorema risulterà pure evidente, se si riesce a invertire il penultimo, cioè a dimostrare: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le tangenti a un sistema di linee di lunghezza nulla* (in una metrica di Cayley) *per una superficie* $\overline{\mathrm{S}}$ *formino una congruenza* W, *è che* $\overline{\mathrm{S}}$ *sia a curvatura nulla.*

Adottando i simboli della geom. metrica, indicando con x, y, z, t *coordinate di Weierstrass*, cosicchè $Sx^2 = 1$ (se $Sx^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ è l'equazione dell'assoluto), sia

$$2F du dv = S(dx^2)$$

l'elemento lineare di una superficie $\overline{S}$ riferita alle linee di lunghezza nulla. Una tangente in un punto $\overline{x}$ di $\overline{S}$ alla $v =$ cost. incontrerà l'assoluto S nel punto $\overline{x}_u$. Affinchè questa congruenza sia W è necessario e sufficiente che l'equazione

$$(\overline{x}_u\, \overline{x}_{uu}\, \overline{x}_{uv}\, d^2\overline{x}_u) = 0$$

delle asintotiche di S coincida con la equazione

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0$$

delle asintotiche di $\overline{S}$. Posto $\varphi = \log F$, le equazioni fondamentali della teoria delle superficie danno:

$$(14) \quad x_{uu} = \varphi_u x_u + D\xi \quad , \quad x_{uv} = -Fx + D'\xi \quad , \quad x_{vv} = \varphi_v x_v + D''\xi ,$$

se ξ *sono le coordinate di Weierstrass di piano tangente.* Tenendo conto di queste equazioni, ed escludendo al solito che $\overline{S}$ sia sviluppabile e che quindi possa essere $D = D' = 0$, si riconosce facilmente che le precedenti equazioni coincidono soltanto se $\varphi_{uv}=0$, cioè se la curvatura di $\overline{S}$ è nulla, come si doveva provare.

L' equazione di Gauss per $\overline{S}$ prova allora che, *in coordinate* u, v *qualsiasi*,

$$DD''-D'^2=-(EG-F^2) \tag{15}$$

E, poichè dalle formole della geometria non euclidea, si deduce:

$$\left\{\begin{aligned} &(x\, x_u\, x_v\, d^2x)\,(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, d^2\xi)= \\ &\qquad =-(DD''-D'^2)\,(Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2)^2 \\ &(x\, x_u\, x_v\, d^2x)=\sqrt{EG-F^2}\,(Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2)\,, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

si ha nel nostro caso:

$$(x\, x_u\, x_v\, d^2x)=\pm(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, d^2\xi)\,. \tag{17}$$

Cioè: *Le coordinate di Weierstrass di punto e di piano tangente si corrispondono* (per le nostre superficie $\overline{S}$) *secondo la legge da noi posta in generale al* § 12 *per ogni superficie.* Questo teorema ha una semplice interpretazione geometrica: *La normale non euclidea della nostra superficie coincide con la prima direttrice di Wilczynski.* Infatti, scritto l' elemento lineare riferito alle asintotiche nella forma:

$$du^2+2\cos\omega\, du dv+dv^2,$$

il precedente teorema prova che la seconda forma di Gauss

$$2\operatorname{sen}\omega\, du dv$$

coincide con la nostra forma F_2. La direttrice di Wilczynski è la retta congiungente x ad

$$x''=x_{uv}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log\beta a_{12}}{\partial v}\,x_u-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\log\gamma a_{12}}{\partial u}\,x_v \tag{18}$$

ove $a_{12}=\operatorname{sen}\omega$ e β, γ coincidono (come per la geom. euclidea) coi valori di $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}$ e $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}$. Poichè $\omega_{uv}=0$ (perchè $\overline{\mathrm{S}}$ è a curvatura nulla) il punto x'' coincide con x_{uv}, cioè per noti teor. di geom. metrica, con $-Fx+D'\xi$; la direttrice di Wilczynski coincide perciò con la retta (x, ξ), che è proprio la *normale* non euclidea.

Tutti questi risultati dimostrano che le nostre superficie $\overline{S}$ coincidono con quelle studiate dal Bianchi negli Annali di Matem. Ser. 2, tomo 24, 1896, pag. 93. Nella mem. del Bianchi si trova in più dimostrato che: *Le normali non euclidee* (cioè le *prime direttrici*) *di una delle nostre superficie formano ancora congruenze* W, *le cui falde focali sono ancora superficie del medesimo tipo. Viceversa ognuna delle nostre superficie si può pensare falda focale della congruenza delle prime direttrici di un' altra superficie del medesimo tipo.*

C) Inversione dei teoremi dati in *A*.

Invertendo il significato delle S, $\overline{S}$ cerchiamo di provare, se possibile, i reciproci dei teoremi dati in A. Il primo si enuncerebbe: *Se* S *è una superficie non rigata le cui asintotiche appartengono ciascuna ad un complesso lineare, allora* S *è falda focale di congruenze* W, *di cui l'altra falda* $\overline{\mathrm{S}}$ *è una quadrica;* vedremo che *questo teorema non si può dire sempre vero,* perchè può capitare che $\overline{S}$ *degeneri* (caso in cui il teorema non ha senso). Nelle nostre ipotesi

$$(19)\quad \beta=\gamma\,;\ \frac{\partial^2\log\beta}{\partial u\partial v}=\beta^2 \text{ donde } \beta=\sqrt{U'V'}:(U+V)\ (\text{cfr. § 18 } B, C)$$

Se $\overline{S}$ deve essere una quadrica, cioè se deve essere $\overline{\beta}=\overline{\gamma}=0$, sarà:

$$(20)\quad \beta=\beta+\overline{\beta}=-\frac{B}{A}\,\frac{N_u}{N}\,,\ \beta=\gamma=\gamma+\overline{\gamma}=-\frac{A}{B}\,\frac{N_v}{N}.$$

Poichè

$$(21)\qquad A_v=-B\beta \qquad B_u=-A\beta$$

sarà

$$(21)_{\text{bis}}\qquad \frac{B_u}{B}=\frac{N_u}{N}\quad;\quad \frac{A_v}{A}=\frac{N_v}{N}\,,$$

e quindi per la (22) del § 42

$$B_v : B = \beta_v : \beta \qquad A_u : A = \beta_u : \beta . \tag{21 ter}$$

Perciò

$$B = \beta X \qquad A = \beta Y \qquad \begin{pmatrix} U \text{ ed } X \text{ funzioni della sola } u \\ V \text{ ed } Y \quad » \qquad » \qquad v \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$(\beta Y)_v = -\beta^2 X \qquad (\beta X)_u = -\beta^2 Y , \tag{23}$$

donde:

$$\beta Y = \frac{XU'}{U+V} + \text{funzione della sola } u = \frac{\sqrt{U'V'}}{U+V} Y. \tag{24}$$

$$\beta X = \frac{YV'}{U+V} + \text{funzione della sola } v = \frac{\sqrt{U'V'}}{U+V} X \tag{25}$$

Perciò $\dfrac{Y\sqrt{V'} - X\sqrt{U'}}{U+V}$ dev'essere funzione sia della sola u, che della sola v, e perciò deve essere costante. Quindi:

$$X\sqrt{U'} = -HU + K \quad , \quad Y\sqrt{V'} = HV + K \quad (H, K = \text{cost.}) \tag{26}$$

e quindi:

$$A = \frac{\sqrt{U'}}{U+V}(HV + K) \qquad B = \frac{\sqrt{V'}}{U+V}(-HU + K). \tag{27}$$

Scegliamo coordinate omogenee tali che $a_{12} = 1 : \beta$. Sarà allora:

$$\mu = A\left(-\frac{A_u}{A} + \frac{\beta_u}{\beta}\right) + B\left(-\frac{B_v}{B} + \frac{\beta_v}{\beta}\right) = 0 . \tag{28}$$

$$N = 4A^2 p_{11} - 4B^2 p_{22} . \tag{29}$$

Nella nostra ipotesi per $|a_{12}| = e^\theta$ è:

$$L = -\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log\beta}{\partial u}\right)^2 - 2p_{11} \text{ e analoga per } M. \tag{30}$$

Confrontando coi valori di L, M dedotti al § 18 C, si trovano i valori di p_{11}, p_{22}; e se ne deduce il valore di N. Si trova così:

$$(31)\quad \frac{N(U+V)^2}{2} = -(HV+K)^2[kU^2+(l-h)U+p]+$$

$$+(-HU+K)^2[kV^2+(h-l)V+p],$$

ove h, k, l, p sono costanti dipendenti dalla superficie S considerata.

Poichè le $\overline{\beta}=\overline{\gamma}=0$ equivalgono alle $N_u : N = B_u : B$ e $N_v : N = A_v : A$, dovrà essere

$$(32)\qquad N = P\,\frac{(HV+K)(-HU+K)}{U+V} \qquad (\text{con } P = \text{cost.})$$

Identificando i due valori trovati per N, se ne deduce:

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &H^2(h-l) - 2kHK = -\frac{P}{2}H^2,\\ &K^2(h-l) - 2pHK = \frac{P}{2}K^2,\\ &kK^2 - pH^2 = -\frac{P}{2}KH. \end{aligned}\right.$$

La prima divisa per H si riduce alla seguente formola (che sussiste (*) anche se $H=0$):

$$(34)\qquad H(h-l) - 2k\,K = -\frac{P}{2}H.$$

In modo simile si trova:

$$(34)_{\text{bis}}\qquad K\,(h-l) - 2pH = \frac{P}{2}K.$$

(*) Se $H=0$, è $K \neq 0$, perchè altrimenti o $U'=V'=0$ (caso assurdo, perchè ne seguirebbe $\beta=\gamma=0$, cioè che S è una quadrica contro l'ipotesi) oppure $A=B=0$, caso in cui le S, $\overline{S}$ coinciderebbero contro l'ipotesi.

E queste due equazioni equivalgono alle tre precedenti. Eliminando le H, K, non contemporaneamente nulle, come abbiamo già osservato, se ne deduce:

$$(35) \qquad (h-l)^2 - 4kp = \frac{P^2}{4},$$

che determina P a meno del segno; per ogni valore di P si determinano poi le H, K dalle formole precedenti. Quindi, com' era prevedibile, *ognuna delle nostre superficie* S *è falda focale di due congruenze* W *aventi per seconda falda focale una quadrica.* Il teorema ha eccezione nel caso $(h-l)^2 - 4kp = 0$; le congruenze W corrispondenti (essendo $P=0$) hanno N *uguale a zero*, e *perciò hanno una seconda falda focale degenere.* Questo avviene in particolare se $k = h - l = p = 0$, cioè *se la superficie appartiene al caso limite di Tzitzeica-Wilczynski.*

Quanto alle rigate S di una congruenza lineare, si noti che, scegliendo opportunamente i parametri delle asintotiche e il fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee, si può rendere:

$$(36) \qquad a_{12} = 1,\ \theta = 0,\ p_{11} = \beta = 0,\ \gamma = 2bu + c \quad (b, c = \text{cost.}) \quad (^*)$$

e quindi, per le condizioni d' integrabilità, p_{22} *è funzione della sola* v. Indicando con U, V funzioni della sola u, o della sola v, si trae:

$$(37) \qquad B = V'; \qquad A = -(2bu + c)V + U$$

Se si vuole che la corrispondente congruenza W abbia per seconda falda focale una quadrica $(\overline{\beta} = \overline{\gamma} = 0)$, dovrà essere:

$$(38) \qquad N_u = 0 \qquad \gamma = 2bu + c = \frac{(2bu+c)V - U}{V'}\,\frac{N_v}{N}$$

ossia

$$(2bu+c)\left(V' - V\frac{N_v}{N}\right) = -U\frac{N_v}{N}$$

(*) Si suppone qui che una delle direttrici sia l' asintotica $u = \infty$. Altrimenti γ sarebbe un polinomio di 2° grado in u.

con N funzione della sola v. Dunque $U = k(2bu + c)$ con $k = \text{cost.}$; e perciò, aggiungendo a V una costante, potremo supporre $U = 0$. E la precedente equazione diventa $N = hV$ con $h = \text{cost.}$ Vediamo dunque quando dalle:

$$B = V'; \quad A = -(2bu + c)\,V \text{ segue } N = hV \text{ con } h = \text{cost.} \tag{39}$$

Esplicitando il valore di N si trova

$$hV = 4b^2V^2 - V''^2 - 2V'(2bV' - V''' + 2V'p_{22}) \tag{40}$$

Data una rigata appartenente a una congruenza lineare, ad ogni soluzione V di questa equazione (purchè $V \neq \text{cost}$; perchè $B \neq 0$) *corrisponde una congruenza* W, *le cui falde focali si riducono alla data rigata ed a una quadrica.* (Due soluzioni V proporzionali individuano la stessa congruenza).

§ 48. — Congruenze W con le due falde rigate *(non quadriche)*

Siano S ed $\overline{S}$ rigate; e sia $\overline{\beta} = 0$, $\gamma = 0$, cosicchè le $v = \text{cost.}$ sono asintotiche su $\overline{S}$, le $u = \text{cost.}$ su S. Le formole che danno $\beta + \overline{\beta}$ e $\gamma + \overline{\gamma}$ si riducono a:

$$\beta = -\frac{B}{A}\frac{N_u}{N} \text{ ossia } \frac{B_u}{B} = \frac{N_u}{N}; \quad \overline{\gamma} = -\frac{A}{B}\frac{N_v}{N} \tag{1}$$

L' equazione (22) (§ 42) in N diventa pertanto:

$$N_{uv} + \frac{A}{B}\beta N_v = 0 \text{ ossia } N_{uv} - \frac{N_u N_v}{N} = 0 \text{ ossia } \frac{\partial^2 \log N}{\partial u \partial v} = 0, \tag{2}$$

che per le precedenti dà:

$$\frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{donde} \quad \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = 0 \quad (*) \tag{3}$$

(*) Infatti la $B_{uv} = -A\beta_v + B\beta\gamma$ dà $B_{uv} + A\beta_v = 0$ e per la precedente equazione del testo $A\beta_v = -\dfrac{B_u B_v}{B} = +A\beta\dfrac{B_v}{B}$ ossia $\beta_v : \beta = B_v : B$.

Cambiando il parametro u potremo ridurre β ad una funzione della sola v (necessariamente un polinomio al massimo di secondo grado, se il parametro di v è stato scelto opportunamente), e la S è una rigata di una congruenza lineare, cosicchè si può supporre:

$$(4) \qquad \theta = p_{22} = 0, \quad p_{11} = p_{11}(u); \quad \beta = 2bv + c \quad (b, c = \text{cost}).$$

Dalle (1) del § 42 si deduce, indicando con U o V una funzione della sola u o v:

$$(5) \qquad A = U' \qquad B = -U\beta + V$$

dove, per la $(\log B)_{uv} = 0$, essendo $U' = A \neq 0$, deve essere $V = \beta + \text{cost}$.

Mutando dunque U in $U + \text{cost}$, sarà:

$$(6) \qquad A = U' \qquad B = -U\beta.$$

Basta calcolare N per dedurne che N è funzione della sola u e che quindi anche $\overline{\gamma} = 0$. Dunque si ha il teorema di Segre:

Se le due falde di una congruenza W *sono rigate, e alle asintotiche curve della prima corrispondono generatrici della seconda, questa seconda falda è una quadrica e possiede pertanto un altro sistema di generatrici, a cui corrispondono le rette della prima falda focale.* Escluse dunque le già studiate congruenze W, di cui una falda focale è quadrica, per studiare le congruenze W a falde focali rigate, *basterà studiare il caso che sulle due falde focali si corrispondano le generatrici,* che p. e. $\gamma = \overline{\gamma} = 0$.

Potremo supporre $\theta = 1$, $\beta = -p_2 v^2 + p_3 v + p_4$, $p_{11} = p_1 + v p_2$ ove le p_i sono funzioni della sola u, e infine $p_{22} = 0$. Le equazioni fondamentali dicono che A è funzione della sola u, e che, posto

$$\frac{dq_i}{du} = + A p_i,$$

si ha:

$$(7) \qquad B = \varphi(v) + q_2 v^2 + q_3 v - q_4 .$$

Dobbiamo ora esprimere che $\overline{\gamma}$ è nullo come γ. Ricordando il valore di $\gamma + \overline{\gamma}$, ciò equivale a dire che $N_v = 0$. Esplicitando il valore di N, si trova che la $N_v = 0$ equivale a $\varphi'''(v) = 0$, cioè alla $\varphi = 0$, quando si aggiungano alle q_i opportune costanti. *Data una superficie rigata con le sole integrazioni necessarie al calcolo delle* q *si trovano le congruenze* W, *di cui essa è falda focale, e la seconda falda è pure rigata.*

§ 49. — Superficie trasformate delle rigate con congruenze *W*.

Sia $\overline{S}$ rigata, e precisamente sia $\overline{\beta} = 0$. Sarà:

$$\beta = -\frac{B}{A}\frac{N_u}{N} \quad \text{ossia} \quad B_u = B\frac{N_u}{N}.$$

L'equazione in N diventa così:

$$N_{uv} - \frac{N_u}{N} N_v = N\beta\gamma \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial^2 \log N}{\partial u \partial v} = \beta\gamma$$

donde, per le precedenti

$\dfrac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} = \beta\gamma$ ossia $BB_{uv} = B_u B_v + B^2\beta\gamma$ ossia $(-A\beta_v + B\beta\gamma)B =$ $= -A\beta B_v + B^2\beta\gamma$ cioè $\beta_v : \beta = B_v : B$, e infine, per le precedenti

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = \beta\gamma \quad (\text{se } \beta \neq 0).$$

Se una superficie S *(non rigata) è trasformata con una congruenza* W *in una rigata* $\overline{\text{S}}$, *le asintotiche di* S *che corrispondono alle generatrici di* $\overline{\text{S}}$ *appartengono a complessi lineari* (Segre).

I metodi qui svolti permettono di dimostrare facilmente il teorema reciproco: *Se le asintotiche di un dato sistema di una superficie* S *appartengono ciascuna a un complesso lineare, la* S *è trasformata di una* $\overline{\text{S}}$ *rigata, le cui generatrici corrispondono a tali asintotiche.* Questo teorema ci dà un metodo *geometrico per* *trovare tutte le superficie, di cui un sistema di asintotiche è formato da linee appartenenti a complessi lineari.* Questo metodo, come nel precedente §, richiede le sole quadrature necessarie a determinare le q (e lascia la $\varphi(v)$ del citato § completamente indeterminata).

Supponiamo dunque che valga la (1). Come sopra si riconosce che imporre la condizione $\overline{\beta}=0$ equivale a imporre che sia

$$N_u : N = B_u : B \tag{2}$$

da cui segue:

$$\beta_v : \beta = B_v : B \tag{3}$$

che dovremo ricordare assieme alle:

$$\left\{\begin{aligned} &A_v = -B\gamma, \quad B_u = -A\beta \\ &A_u = -\mu - A\theta_u - \frac{B}{\beta}(\beta_v + \beta\theta_v) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

dove la μ si riguarda come nuova incognita. Si deve dimostrare che si può trovare μ in guisa che (3), (4) risultino integrabili e compatibili con (2). La condizione d' integrabilità dà soltanto:

$$\mu_v = B(\gamma_u + \gamma\theta_u) - A(\theta_{uv} + \beta\gamma) - \frac{B}{\beta}(\beta_v + \beta\theta_v)_v . \tag{5}$$

La (2), per la $S = \frac{1}{2A} N_u$ e per la (6) del § 44 dà:

$$\mu_{uu} - \theta_u \mu_u + \beta\mu_v - \mu(\beta_v' + \beta\theta_v) = -\frac{N}{2B}\beta \tag{6}$$

ove, usando per semplicità coordinate *non* omogenee ($p_{it} = 0$), si ha:

$$N = 2A\mu_u - 2B\mu_v + \mu^2 + 2\frac{B}{\beta}(\beta_v + \beta\theta_v)$$

cosicchè la (6) si riduce a:

$$\mu_{uu} + \left(\frac{A}{B}\beta_u - \theta_u\right)\mu_u + \frac{\beta}{2B}\mu^2 = 0 . \tag{7}$$

Le condizioni d' integrabilità delle (3), (4), (5), (7) si riducono a quelle relative alla (5), (7). Da (5) si trae derivando, come potevamo aspettarci (§ 44), l' equazione di Moutard

$$\mu_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu. \tag{8}$$

I valori di μ_{uuv} dedotti da (7), (8) si riconoscono identicamente uguali, appena si ricordino le condizioni d'integrabilità della teoria delle superficie, e la identità

$$\left(\frac{A}{B}\beta - \theta_u\right)_v = -\frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} - \theta_{uv} = -\theta_{uv} - \beta\gamma.$$

In conclusione dunque *restano arbitrari i valori iniziali delle* A, B, μ, μ_u; e, poichè, solo moltiplicandoli per una stessa costante, la congruenza non varia, si ha il teorema (F.) che *una delle nostre superficie è falda focale di* ∞^3 *congruenze* W, *di cui la seconda falda è rigata.*

§ 50. — Composizione di Bianchi di due congruenze *W*.

Siano date due congruenze *W* aventi una stessa falda focale S. Ne indicheremo gli elementi caratteristici con A_i, B_i, μ_i, λ_i, N_i per $i=1,2$. Se z_1, z_2 sono due costanti, anche $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$ e $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$, soddisfacendo alle (1) del § 44, individueranno una congruenza *W;* e chiaramente il relativo valore di N sarà $N = N_1 z_1^2 + N_{12} z_1 z_2 + N_2 z_2^2$, ove:

$$N_{12} = N_{21} = \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + 8(A_1 A_2 p_{11} + B_1 B_2 p_{22}) + \tag{1}$$
$$+ 2\left(A_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial u} + A_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial u} - B_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial v} - B_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial v}\right).$$

Invece il valore corrispondente di S è la funzione $z_1 S_1 + z_2 S_2$ lineare in z_1.

La $\frac{1}{2A} N_u = z_1 S_1 + z_2 S_2 = \frac{z_1}{2A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{z_2}{2A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}$ diventa

$$\frac{1}{2(z_1A_1+z_2A_2)}\left(z_1^2\frac{\partial N_1}{\partial u}+z_1z_2\frac{\partial N_{12}}{\partial u}+z_2^2\frac{\partial N_2}{\partial u}\right)=\frac{z_1}{2A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}+\frac{z_2}{2A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}$$

cosicchè varrà la:

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial u}=\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}, \tag{2}$$

insieme all' analoga:

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial v}=\frac{B_2}{B_1}\frac{\partial N_1}{\partial v}+\frac{\partial N_2}{\partial v}. \tag{3}$$

Sorge dunque spontanea l' idea di porre

$$N_{12}=\omega+\Omega, \tag{4}$$

dove le funzioni ω, Ω sono definite dalle:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_u=\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}=2A_2S_1 && \Omega_u=\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}=2A_1S_2 \\ &\omega_v=\frac{B_2}{B_1}\frac{\partial N_1}{\partial v}=-2B_2T_1 && \Omega_v=\frac{B_1}{B_2}\frac{\partial N_2}{\partial v}=-2B_1T_2 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Che ciò sia legittimo si deduce da ciò che, in virtù dell' equazione cui soddisfa N_1, le condizioni d' integrabilità per le equazione in ω sono soddisfatte. Si trova infatti:

$$\omega_{uv}=-\frac{A_2\beta}{B_1}\frac{\partial N_1}{\partial v}-\frac{B_2\gamma}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}. \tag{6}$$

Poniamo ora:

$$\left\{\begin{aligned} x_{12}&=\omega x+\left(-\lambda_2x_1-2A_2\frac{\partial x_1}{\partial u}+2B_2\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\\ x_{21}&=\Omega x+\left(-\lambda_1x_2-2A_1\frac{\partial x_2}{\partial u}+2B_1\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Sostituendo alle $\overline{x}=x_i$ e loro derivate i valori dedotti dalle (5), (7), (8) del § 42 per $A=A_i$, $B=B_i$, si trova:

$$(x_{12}+x_{21})=x(\omega+\Omega-N)=0.$$

Trattandosi di coordinate omogenee, se ne deduce che i punti x_{12}, x_{21} coincidono.

Sostituendo ad x il valore dedotto dalla (10) § 42, ponendo $A=A_1$, $B=B_1$, si trova:

$$x_{12}=x_1\left(-\lambda_2+\frac{\omega\lambda_1}{N_1}\right)+\frac{\partial x_1}{\partial u}\left(-2A_2+2\frac{A_1}{N_1}\omega\right)+ \tag{8}$$
$$+\frac{\partial x_1}{\partial v}\left(2B_2-\frac{2B_1}{N_1}\omega\right).$$

Cioè il punto x_{12} si trova nel piano tangente ad S_1 nel punto x_1, e simultaneamente anche nel piano tangente ad S_2 nel punto x_2.

Poichè, posto

$$A_1'=-A_2+\frac{A_1}{N_1}\omega,\quad B_1'=B_2-\frac{B_1}{N_1}\omega,\quad \mu_1'=-\lambda_2+\frac{\omega\lambda_1}{N_1}, \tag{9}$$
$$\lambda_1'=-\mu_2+\frac{\omega\mu_1}{N_1},$$

si ha:

$$\frac{\partial A_1'}{\partial v}=\gamma B_1'+\frac{B_1}{A_1}\frac{\partial \log N_1}{\partial v}B_1'=-\gamma_1 B_1' \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_1'}{\partial u}=-A_1'\beta_1, \tag{10}$$

la retta congiungente x_1 ad x_{12} descrive una congruenza W. E sarà provato che x_{12} ne è il secondo fuoco, se si osserva che, in virtù della $e^{\theta_1}=a_1=aN=Ne^{\theta}$, vale la:

$$\mu_1'=-\frac{\partial A_1'}{\partial u}-\frac{\partial B_1'}{\partial v}-A_1'\frac{\partial \log a_1}{\partial u}-B_1'\frac{\partial \log a_1}{\partial v}, \tag{11}$$

che appunto corrisponde alla (4) del § 42.

Si ha pure:

$$\left\{\begin{aligned} S_1'&=-S_2+\Omega\frac{S_1}{N_1}\\ T_1'&=T_2-\Omega\frac{T_1}{N_1}\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Poichè ω è definito dalle (5) a meno di una costante arbitraria additiva, segue:

Se S *è trasformata* W (cioè trasformata con congruenze W) *di altre due superficie* S_1 *ed* S_2, *esistono* ∞^1 *superficie* S_{12} *che sono trasformate* W *sia di* S_1 *che di* S_2, *che di tutte le* ∞^1 *superficie trasformate* W *della* S *mediante le congruenze* W *definite dalle:* $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$ *e* $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$. *Tali superficie si determinano con una quadratura.*

Si ha $N'_1 = \lambda'_1 \mu'_1 + 2A'_1\left(\frac{\partial \lambda'_1}{\partial u} + 2A'_1 \pi^{(1)}_{11}\right) + 2B'_1\left(\frac{\partial \lambda'_1}{\partial v} - 2B'_1 \pi^{(1)}_{22}\right)$ dove le $\pi^{(1)}$ sono calcolate per la superficie S_1. Sostituendo alle λ'_1, μ'_1 ecc. i loro valori si trova:

$$N'_1 = N_2 + \frac{\omega^2}{N_1^2} N_1 - \frac{\omega}{N_1} N_{12} = N_2 - \frac{\omega\Omega}{N_1}; \quad (N_{12} = \omega + \Omega). \tag{13}$$

§ 51. — Le trasformazioni W di Fubini delle superficie isotermo-asintotiche.

Quando mai sulle falde focali di una congruenza si corrispondono le linee di Darboux? In tal caso si corrisponderanno anche le asintotiche, Hessiano di queste, e la congruenza sarà W. Con le precedenti notazioni la fattaci domanda equivale a chiederci quando sarà

$$\bar\beta : \beta = \bar\gamma : \gamma \text{ ossia } N_u \frac{B}{A} : N_v \frac{A}{B} = \beta : \gamma \text{ ossia } BS : -AT = \beta : \gamma, \tag{1}$$

ossia, per le (5), (6), (7) del § 44, usando per la prima falda focale coordinate non omogenee, e quindi ponendo $p_{11} = p_{22} = 0$, quando

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{uu} - \theta_u \mu_u + \beta \mu_v - \pi_{11}\mu = \rho \frac{\beta}{B} \\ &\mu_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu = 0 \\ &\mu_{vv} + \gamma \mu_u - \theta_v \mu_v - \pi_{22}\mu = \rho\frac{\gamma}{A} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\text{essendo } \rho \text{ un fattore di proporzionalità}) \\ &S = \frac{1}{2A} N_u = \rho\frac{\beta}{B}; \\ &T = -\frac{1}{2B} N_v = -\rho\frac{\gamma}{A}. \end{aligned} \tag{2}$$

da ricordare insieme alle:

$$(3)\quad \begin{cases} A_v = -B\gamma \quad B_u = A\beta \\ 2A_u = -\mu - \lambda - 2A\theta_u \quad 2B_v = \lambda - \mu - 2B\theta_v \\ \lambda_u = \mu_u + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) - 2A(\beta\theta_v + \beta_v) \\ \lambda_v = -\mu_v - 2A(\theta_{uv} + \beta\gamma) + 2B(\gamma\theta_u + \gamma_u) \end{cases}$$

donde, se consideriamo A, B, λ, μ tutte come incognite, si hanno come condizione di integrabilità la seconda delle (2), come già sappiamo, oltre alle condizioni di integrabilità delle prime tre equazioni nella sola μ, che si trovano (per la $A_v = -B\gamma$) essere:

$$(4)\qquad \frac{\partial \log \frac{\rho\beta}{AB}}{\partial v} = \frac{\partial \log \frac{\rho\gamma}{AB}}{\partial u} = 0. \ (*)$$

Sarà dunque $\dfrac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} = 0$; e, mutando i parametri delle u, v, si potrà supporre $\beta = \gamma$, e quindi $\rho = k\dfrac{AB}{\beta}$. Si ha dunque il teor. di F. (escluso il caso elementare $\rho = 0$):

Tutte e sole le superficie isotermo-asintotiche sono falde focali di una congruenza sulle cui falde si corrispondono le linee di Darboux. Se S *è isotermo asintotica, una di tali congruenze avente* S per prima falda focale è determinata dai valori iniziali di A, B, λ, μ, μ_u, μ_v e dal valore di k. Ma, poichè, moltiplicando A, B, λ, μ per uno stesso fattore, la congruenza non cambia, *una superficie isotermo-asintotica è falda focale di* ∞^6 *congruenze della specie voluta, la cui seconda falda focale è ancora isotermo-asintotica.* Questo teor. dà una trasformazione per congruenze W delle superficie isotermo-asintotiche, per cui la Sig.ª Ragazzoni ha dimostrato il teorema di permutabilità, che segue immediatamente dalle nostre formole. Dalle precedenti ($S = \rho\beta : B = kA$, $T = -kB$) segue

(*) Resta escluso il caso $\rho = 0$, che è il caso elementare delle congruenze W appartenenti a un complesso lineare, e che hanno per falde focali due superficie reciproche.

$$N_u = 2kA^2, \quad N_v = 2kB^2. \tag{5}$$

Siano date due di queste congruenze W, di cui S è prima falda focale, corrispondenti ai valori k_1, k_2 della k. Dalla (2) del § 50 segue:

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial u} = 2(k_1 + k_2) A_1 A_2 \tag{6}$$

oltre alla analoga in v.

Le $\omega_u = 2k_1 A_1 A_2$, $\omega_v = 2k_1 B_1 B_2$ provano che $\omega = \frac{k_1}{k_1 + k_2} N_{12} + c$ ove $c =$ cost. (se $k_1 + k_2 \neq 0$). *Per le nostre congruenze la* ω, *e le relative superficie del teorema di permutabilità si trovano senza quadrature* (se $k_1 + k_2 \neq 0$). Vediamo se tra esse ce n' è ancora qualcuna *isotermo-asintotica.*

Dovrà essere:

$$\frac{\partial N_1'}{\partial u} = l A_1'^2 \quad \frac{\partial N_1'}{\partial v} = l B_1'^2 \quad (l = \text{cost.}) \tag{7}$$

cioè:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(N_2 + \frac{\omega^2}{N_1} - \frac{\omega}{N_1} N_{12}\right) = l\left(-A_2 + \frac{A_1 \omega}{N_1}\right)^2 \text{ e analoga in } v. \tag{8}$$

Queste equazioni sono soddisfatte soltanto per $l = k_2$, $c = 0$.

Se S_1 *ed* S_2 *sono superficie isotermo-asintotiche trasformate* W *di una superficie* S *isotermo-asintotica, tra le superficie* S_{12} *del teorema di permutabilità* (nel caso $k_1 + k_2 \neq 0$) *ve ne è una sola isotermo-asintotica che si determina senza quadrature. Quindi,* come nelle classiche trasformazioni del Bianchi, *se di una superficie* S *isotermo-asintotica si conoscono le trasformate per congruenze* W, *l' applicazione successiva a queste ultime delle trasformazioni per congruenze* W *si esegue in termini finiti (senza neanche integrazioni).*

Anche il caso $k_1 + k_2 = 0$ si studia facilmente, come ha osservato Čech. Se $k_1 + k_2 = 0$, allora:

$$\frac{\partial N_1'}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(N_2 + \frac{\omega^2}{N_1} - \frac{\omega}{N_1} N_{12}\right) = 2k_2\left(-A_2 + \frac{\omega}{N_1} A_1\right)^2 + \tag{9}$$
$$+ 2k_2 \frac{A_1}{N_1} N_{12}\left(A_2 - \omega \frac{A_1}{N_1}\right).$$

$$(9)_{\text{bis}} \qquad \frac{\partial N_1'}{\partial v} = 2k_2\left(-B_2 + \frac{\omega}{N_1}B_1\right)^2 + 2k_2\frac{B_1}{N_1}N_{12}\left(B_2 - \omega\frac{B_1}{N_1}\right).$$

$$(10) \qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial u} = \frac{\partial N_{12}}{\partial v} = 0 \quad N_{12} = \text{cost.}$$

come segue immediatamente dalle precedenti equazioni. Dunque le (7) saranno identicamente soddisfatte per $N_{12} = 0$; *e in tal caso tutte le ∞^1 superficie del teorema di permutabilità, determinabili per quadrature, saranno isotermo-asintotiche. (Invece, se $N_{12} \neq 0$, nessuna sarà tale).*

Delle superficie isotermo asintotiche è caso particolare interessante quello delle superficie di Tzitzeica - Wilczynski. Nel caso di queste, supposto $p_{11} = p_{22} = 0$, si hanno le:

$$a_{12} = \frac{1}{\beta}, \quad \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} = \beta^2 - \frac{1}{\beta}, \quad \pi_{11} = \pi_{22} = 0\,.$$

Le precedenti equazioni si riducono alle:

$$\mu_{uu} + \frac{\beta_u}{\beta}\mu_u + \beta\mu_v = kA \qquad \mu_{uv} - \frac{1}{\beta}\mu = 0$$

$$\mu_{vv} + \frac{\beta_v}{\beta}\mu_v + \beta\mu_u = -kB \quad \lambda_u = \mu_u + 2\frac{B}{\beta} \quad \lambda_v = -\mu_v - 2\frac{A}{\beta}$$

$$A_v = -B\beta \qquad B_u = -A\beta \qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{A}{\beta} = -\frac{\lambda + \mu}{2A}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{B}{\beta} = \frac{\lambda - \mu}{2B}\,.$$

E, se poniamo:

$$k = \frac{4h}{1-h^2}, \quad 2A = -(1+h)\beta\mu_v\,, \quad 3B = -(1-h)\beta\mu_u\,, \quad \lambda = h\mu,$$

tutte queste equazioni si riducono alle:

$$\mu_{uu} + \frac{\beta_u}{\beta}\mu_u + \frac{1+h}{1-h}\beta\mu_u = 0 \qquad \mu_{uv} - \frac{1}{\beta}\mu = 0$$

$$\mu_{vv} + \frac{\beta_v}{\beta}\mu_v + \frac{1-h}{1+h}\beta\mu_u = 0.$$

Se ne deduce:

$$N = h(\mu^2 - 2\beta\mu_u\mu_v), \qquad N_u = 2h\frac{1+h}{1-h}\beta^2\mu_v^2 = 2kA^2,$$

$$N_v = 2h\frac{1-h}{1+h}\beta^2\mu_u^2$$

e si ha:

$$\overline{\beta} = -\frac{h\beta\mu^2}{N}.$$

Poichè $\overline{\beta}$ soddisfa alla stessa equazione cui soddisfa β, anche la seconda falda focale è una superficie di Tzitzeica - Wilczynski. Questo caso particolare delle nostre trasformazioni è stato scoperto da Tzitzeica, che ha pure enunciato per esso il teorema di permutabilità.

§ 52. — Le trasformazioni di Ionas per congruenze W delle superficie R.

Sia S una superficie R, cioè sia $\beta_v = \gamma_u$. La teoria che svolgeremo si applica (Čech) anche al caso $\beta_v = l\gamma_u$ con $l = \text{cost.}$: equazione che, se $l \neq 0$, si riduce facilmente alla precedente, mentre, se $l = 0$, si può ridurre alla $\beta = 1$. Entrambe queste classi di superficie si presentano nella teoria delle deformazioni proiettive di una superficie. Supposto dunque $\beta_v = \gamma_u$, noi ci chiediamo quando avviene che anche la seconda falda focale è R, e precisamente quando è anche $\overline{\beta}_v = \overline{\gamma}_u$ ossia $(\beta + \overline{\beta})_v = (\gamma + \overline{\gamma})_u$, ossia:

$$\left(\frac{A}{B}\frac{N_v}{N}\right)_u = \left(\frac{B}{A}\frac{N_u}{N}\right)_v$$

che, in virtù della equazione 22 del § 42 relativa ad N, si può scrivere:

$$(1)\quad \frac{N_v}{N}\left(\frac{N_u}{N}-\frac{\partial \log(B^2-A^2)}{\partial u}\right)+\frac{N_u}{N}\left(\frac{N_v}{N}-\frac{\partial \log(B^2-A^2)}{\partial v}\right)=0$$

equazione a cui si soddisfa, se

$$(2)\qquad N=k(B^2-A^2) \quad \text{con} \quad k=\text{cost.}\neq 0.$$

[Resta posta la questione se è possibile soddisfarvi in altro modo compatibile con le formole della teoria delle congruenze W]. Da (2) segue:

$$(3)\qquad S=\frac{1}{2A}N_u=-k(B\beta+A_u)$$

$$T=-\frac{1}{2B}N_v=-k(A\gamma+B_v)$$

E le equazioni (6), (7) del § 44 diventano, supposte le coordinate *non* omogenee $(p_{ii}=0)$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu_{uu}-\theta_u\,\mu_u+\beta\mu_v-\pi_{11}\mu=-k(A_u+B\beta) \\ \mu_{uv}=(\beta\gamma+\theta_{uv})\mu \\ \mu_{vv}-\theta_v\,\mu_v+\gamma\,\mu_v-\pi_{22}\mu=-k(B_v+A\beta) \end{cases}$$

Le (4) insieme alle equazioni del § 44, considerate come equazioni nelle incognite A, B, λ, μ sono illimitatamente integrabili [ciò che dimostra che è lecito l'aver fatto l'ipotesi (2)]. Bisogna ora vedere se da tali equazioni segue la (2). Confrontando le (4) con le equaz. citate, si deduce che dalle nostre equazioni seguono le (3), cioè le equazioni ottenute derivando (2). *Basterà perciò che* (2) *sia soddisfatta nel punto iniziale perchè sia identicamente soddisfatta.*

Poichè, moltiplicando A, B, μ per uno stesso fattore, la congruenza non varia, e sono arbitrarii i valori iniziali di λ, μ, μ_u, μ_v, A, B legati soltanto da (2), segue che *per ogni valore di* k *vi sono* ∞^4 *congruenze* W *del tipo cercato, la cui seconda falda focale è ancora una superficie* R.

Siano k_1, k_2 due valori della costante k, ed A_i, B_i, ecc. $(i=1, 2)$ due sistemi di valori corrispondenti delle A, B, ecc. È:

$$\frac{\partial}{\partial u}(A_1 A_2 - B_1 B_2) = A_1\left(\frac{\partial A_2}{\partial u} + B_2 \beta\right) + A_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial u} + B_1 \beta\right) =$$

$$= -\frac{A_1}{2k_2 A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u} - \frac{A_2}{2k_1 A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} = -\frac{\Omega_u}{2k_2} - \frac{\omega_u}{2k_1}$$

cioè

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\Big[2k_1\Omega + 2k_2\omega + 4k_1 k_2 (A_1 A_2 - B_1 B_2)\Big] = 0 .$$

Da questa e dalla formola analoga per $\frac{\partial}{\partial v}$, si deduce:

$$(6) \qquad 2k_1 \Omega + 2k_2 \omega + 4k_1 k_2 (A_1 A_2 - B_1 B_2) = H = \text{cost.}$$

da considerarsi insieme alla già nota:

$$(7) \qquad \Omega + \omega = N_{12} .$$

Perciò, se $k_1 \neq k_2$, le Ω ed ω si trovano senza quadrature. Cioè: *Se* S_1 *ed* S_2 *sono due superficie* R *trasformate di una unica superficie* S *dello stesso tipo mediante congruenze* W, *si trovano, se* $k_1 \neq k_2$, *le* ∞^1 *superficie* S_{12} *del teorema di permutabilità senza quadrature.* Vediamo se tra di esse vi è un'altra superficie R trasformata di S_1 ed S_2 mediante congruenze di Ionas. Basterà vedere se per qualche valore di H la $N_1 = N_2 - \frac{\omega\Omega}{N_1}$ differisce per un fattore costante dalla:

$$B_1'^2 - A_1'^2 = B_2^2 - A_2^2 + \frac{\omega^2}{N_1^2}(B_1^2 - A_1^2) - 2\frac{\omega}{N_1}(B_1 B_2 - A_1 A_2) =$$

$$= \frac{N_2}{k_2} + \frac{\omega^2}{k_1 N_1} + 2\frac{\omega}{N_1}\left(\frac{H}{4k_1 k_2} - \frac{\Omega}{2k_2} - \frac{\omega}{2k_1}\right).$$

Ciò avviene solo per $H=0$. Dunque *per queste trasformazioni vale, se* $\mathrm{k}_1 \neq \mathrm{k}_2$, *il teorema di permutabilità* (Ionas).

Se $k_1 = k_2$, le superficie S_{12} si trovano (come avviene in generale, § 50) con quadrature. *Se la costante H* (a cui non si può più dare un valore arbitrario) *è nulla, tutte queste* ∞^1 *superficie* S_{12} *sono ancora superficie* R; *se invece* $H \neq 0$, *le congruenze che da* S_1 *od* S_2 *conducono ad una* S_{12} *non sono mai del tipo voluto, e il teorema di permutabilità è in tale caso falso.* (*)

§ 53. — Le trasformazioni di Ionas delle superficie di Ionas.

In certo qual senso reciproca della precedente è la trasformazione per le superficie di Ionas (§ 17 *B*), che lo Ionas stesso ha dato nei *Sitzungsber. der Berl. Mathem. Gesellschaft* (XIX Jahrgang, 1919). Queste superficie sono caratterizzate da questo, che i parametri u, v delle asintotiche si possono scegliere in guisa che $\beta_u = \gamma_v$, ossia che esista una funzione φ tale che

$$d\varphi = \gamma du + \beta dv.$$

Il sig. Ionas ha osservato che in tale caso $e^{\mp\varphi}(Adu \pm Bdv)$ è un differenziale esatto, che cioè il *sistema coniugato, armonico a quello delle sviluppabili di una qualsiasi congruenza* W *avente la data superficie di Ionas per falda focale, si può determinare con sole quadrature.* Le equazioni per A, B, S, T diventano nel caso attuale:

$$(1) \qquad S_v = T\varphi_v \qquad T_u = S\varphi_u .$$

$$(2) \qquad A_v = -B\varphi_u \qquad B_u = -A\varphi_v .$$

Si soddisfa alle seconde ponendo (in modo per così dire reciproco di quello definito dalle (3) del precedente §):

$$(3) \qquad A = k(S_u - T\varphi_u) \qquad B = k(T_v - S\varphi_v) \qquad (k = \text{cost.})$$

(*) Per qualche ulteriore proprietà di queste superficie cfr. *Ionas* «*Ueber die Konstruction der* W *Kongruenzen*» (Jahresber. d. D. Math. Ver., tomo 29, (1920) pag. 64).

Dalla $N_u = 2AS$ e analoga per N_v si trae

$$N = k(S^2 - T^2) + h \qquad (h = \text{cost.}) \tag{4}$$

donde

$$\beta + \bar{\beta} = 2 \frac{S(S\varphi_v - T_v)}{(S^2 - T^2) + \text{cost.}} \quad \text{e analoga per } \gamma + \bar{\gamma}.$$

Anche la seconda falda focale sarà una superficie di Ionas, cioè

$$(\beta + \bar{\beta})dv + (\gamma + \bar{\gamma})du$$

sarà un differenziale esatto $d(\varphi + \bar{\varphi})$ soltanto se $h = 0$. In tal caso infatti

$$\varphi_v + \bar{\varphi}_v = \beta + \bar{\beta} = 2\varphi_v + 2 \frac{T^2\varphi_v - 2ST_v}{S^2 - T^2} =$$

$$= 2\varphi_v + 2 \frac{TS_v - ST_v}{S^2 - T^2} = \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{T + S}{T - S}$$

che insieme all'analoga per $\gamma + \bar{\gamma}$ dà:

$$\bar{\varphi} - \varphi = \log \frac{T + S}{T - S} \qquad \text{(ove non ha importanza una costante additiva).} \tag{5}$$

Per trovare dunque le trasformazioni di Ionas basterà scrivere le (1), (3), pensate come equazioni che dànno le derivate prime delle S, T pensate come nuove incognite, le (1) e le (2) del § 44 destinate a darci le derivate prime di A, B, le (3) e le (4) del § 44 destinate a dare le derivate prime di λ e le derivate seconde di μ. La (4) *ove sia posto* h $= 0$ è una condizione relativa ai valori iniziali. *Per ogni valore di* k *esistono* ∞^6 *congruenze che trasformano la data superficie di Ionas in altre superficie di Ionas.*

Siano ora due congruenze di Ionas aventi la stessa prima falda focale, e siano k_i, A_i, B_i ecc. ($i = 1, 2$) i valori delle k, A, B... per le due congruenze. Sarà

$$\frac{\partial}{\partial v}(S_1 S_2 - T_1 T_2) = S_1 T_2 \varphi_2 + S_2 T_1 \varphi_v - T_2 T_{1v} - T_1 T_{2v} =$$

$$= -\frac{B_1}{k_1}T_2 - \frac{B_2}{k_2}T_1 = \frac{\Omega_v}{2k_1} + \frac{\omega_v}{2k_2}.$$

Da questa e dalla analoga in $\frac{\partial}{\partial u}$ si deduce:

$$(6) \qquad S_1 S_2 - T_1 T_2 = \frac{\Omega}{2k_1} + \frac{\omega}{2k_2} + H \quad (H = \text{cost.}).$$

Perciò, per la $\omega + \Omega = N_{12}$, si trae: *Se* $k_1 \neq k_2$ *le* ∞^1 *superficie* S_{12} *del teorema di permutabilità generale si deducono senza quadrature.*

Vediamo se tra esse vi è ancora una superficie di Ionas, o più precisamente se tra le congruenze che portano S_1 od S_2 in una delle S_{12} ve n'è ancora una dello stesso tipo delle precedenti. I corrispondenti valori delle N, S, T sono:

$$(7) \quad N_1' = N_2 - \frac{\omega\Omega}{N_1}, \quad S_1' = -S_2 + \Omega\frac{S_1}{N_1}, \quad T_1' = T_2 - \Omega\frac{T_1}{N_1}$$

donde:

$$(8) \quad S_1'^2 - T_1'^2 = \frac{N_2}{k_2} + \frac{\Omega_2}{N_1^2}\frac{N_1}{k_1} - 2\frac{\Omega}{N_1}\left(\frac{\Omega}{2k_1} + \frac{\omega}{2k_2} + C\right)$$

che, a meno di un fattore costante, coincide con N_1' soltanto se $C = 0$.

I teoremi di permutabilità, enunciati al precedente §, valgono dunque inalterati anche per le attuali trasformazioni.

Tra le altre osserv. dello Ionas, per cui rinviamo il lettore alla Mem. originale, è specialmente notevole la seguente. Le equazioni $S_v = T\beta$, $T_u = S\gamma$ sorgono dal problema di determinare i sistemi coniugati ad invarianti uguali; poichè le nostre superficie sono caratterizzate dall'averne due armonici tra loro ($du^2 \pm dv^2 = 0$), ad essi corrispondono due soluzioni delle nostre equazioni, che si riconoscono facilmente essere le:

$$S = T = e^{\varphi} \qquad S = -T = e^{-\varphi}.$$

Le corrispondenti congruenze W si determinano con quadrature; e la loro seconda falda focale è ancora una superficie di Ionas. Lo Ionas ha anche studiato la composizione delle trasformazioni così definite con le precedenti.

§ 54. — Il teorema di Fubini per le trasformazioni delle superficie R.

Per una congruenza K di Ionas è:

(1) $$N = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp_{22}) = k(B^2 - A^2).$$

Ora, conservati i valori di θ, β, γ (soddisfacenti alla $\beta_v = \gamma_u$), ma, sostituiti alle p_{ii} le $p'_{ii} = p_{ii} + \frac{1}{4} k$ $(i = 1, 2)$ si definisce una superficie S' proiettivamente applicabile su S, perchè, per la $\beta_v = \gamma_u$, continuano a essere soddisfatte le condizioni d'integrabilità della teoria delle superficie. Deformando S in S', la congruenza K va in una congruenza K' avente S' per prima falda focale, che corrisponde agli stessi valori di A, B, μ, λ, ma per cui N ha il valore

(2) $$N' = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap'_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp'_{22}).$$

Ricordando i valori di p'_{ii} e di N, se ne deduce che $N' = 0$, cosicchè K' ha una *retta* per seconda falda focale; e viceversa se K' è una congruenza avente S' ed una retta per falde focali, la precedente congruenza K è di Ionas. Quindi: *Tutte le congruenze* K *di Ionas aventi per falda focale una superficie* S *del tipo* R *si ottengono costruendo le congruenze* K′ *aventi per falde focali una superficie* S′ *applicabile proiettivamente su* S *ed una retta qualunque* r. *Applicando* S′ *su* S, *la* K′ *diventa una congruenza* K *di Ionas; le* ∞^4 *congruenze corrispondenti ad una stessa* S′ *sono le* ∞^4 *congruenze corrispondenti ad uno stesso valore della costante* k. Anzi da questo teorema risulta senza calcoli evidente che è lecito porre $N = k(B^2 - A^2)$.

Conosciuta una S′ *applicabile su* S, *con sole derivazioni si calcolano* ∞^4 *congruenze di Ionas, di cui* S *ed un'altra superficie* $\overline{\mathrm{S}}$ *del tipo* R *sono falde focali e altre* ∞^4 *congruenze dello stesso tipo per cui* S′ *ed un'altra superficie* $\overline{\mathrm{S}}'$ *del tipo* R *sono falde focali.*

Con le stesse notazioni una congruenza di Ionas avente S per prima falda focale, alla quale corrisponda la costante k_1 diventa, quando S si deforma in S', una congruenza a cui corrisponde la costante $k_1 - k$.

Una osservazione sulla teoria delle congruenze W.

Sia $\varphi(u, v) = \text{cost.}$ l' equaz. delle linee $B du - A dv = 0$ inviluppate su S dalle sviluppabili di una congruenza W. Moltiplicando le x, y, z, t per uno stesso fattore ρ (e quindi $a_{12} = e^{\theta}$ per ρ^2), il nuovo valore μ' di μ sarà $\mu - 2A \frac{\rho_u}{\rho} - 2B \frac{\rho_v}{\rho}$, che potremo in infiniti modi rendere nullo con opportuna scelta della ρ.

Se a'_{12} è il corrispondente valore di a_{12}, sarà:

$$(A a'_{12})_u + (B a'_{12})_v = 0.$$

Perciò $a'_{12}(B du - A dv)$ sarà un differenziale esatto; e quindi

$$A = \frac{G(\varphi)\varphi_v}{a'_{12}} \qquad B = -\frac{G(\varphi)\varphi_u}{a'_{12}}$$

con $G(\varphi)$ funzione della φ, variabile al variare della ρ. Scrivendo $\int G(\varphi) d\varphi$ al posto di φ, si potrebbe rendere $G(\varphi) = 1$. *Le equazioni cui soddisfano* A, B diventano:

$$\varphi_{uu} = \theta'_u \varphi_u + \beta \varphi_v, \qquad \varphi_{vv} = \theta'_v \varphi_v + \gamma \varphi_u,$$

che differiscono da quelle cui soddisfano le x, *perchè manca il termine* p_{11} x.

D' ora in poi sopprimeremo l' apice in a'_{12}, θ', $\mu' = 0$. Il problema di determinare le congruenze W di data falda focale S equivale pertanto al problema di normare le coordinate di un punto di S in modo che anche queste equazioni ammettano una soluzione.

Se la congruenza è di Ionas, si può dai risultati precedenti dedurre che le coordinate dei punti di S si possono normare in guisa che non solo sia soddisfatta la precedente condizione, ma che in più $p_{11} = p_{22} = \text{cost.}$

Capitolo VI.

INVARIANTI DELL'ELEMENTO LINEARE PROIETTIVO (*)

§ 55. — Alcune considerazioni preliminari.

Dopo aver considerato, al Capitolo IV, il caso particolare di superficie rigate, ritorniamo ora alle ricerche generali. Al Cap. II abbiamo visto che, nella geometria proiettivo-differenziale di superficie non sviluppabili, ha importanza fondamentale la coppia di forme differenziali

$$(1) \qquad \begin{aligned} F_2 &= \Sigma a_{rs}\, du_r du_s\,, \\ F_3 &= \Sigma a_{rst}\, du_r du_s du_t \end{aligned}$$

legate dalle relazioni di coniugio

$$(2) \quad A_{11} a_{111} + 2A_{12} a_{112} + A_{22} a_{122} = A_{11} a_{112} + 2A_{12} a_{122} + A_{22} a_{222} = 0\,,$$

e determinate soltanto a meno di un fattore comune arbitrario. Ricordiamo del resto che (Cap. II, § 15 D) supposto $J \neq 0$, dove

$$(3) \qquad J = \frac{1}{A^2} \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\,,$$

(*) I risultati di questo Capitolo sono stati esposti, per la prima volta, da Čech nella Memoria *«Étude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface»*,. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, 1924, n. 36.

possiamo togliere ogni indeterminazione sostituendo alle F_2, F_3 le forme *normali* φ_2, φ_3 loro proporzionali per cui $J = -1$. Appare opportuno, e ne vedremo delle applicazioni importanti ai Capitoli seguenti, interrompere i nostri studî geometrici per dedurre parecchie formole utili relative a tali coppie di forme. *I lettori che desiderino arrivare al più presto alle applicazioni, possono omettere nella prima lettura i* §§ 59, 60, 61, 62, *accontentandosi di leggerne solo la definizione di* Φ, Ψ, Ψ', H, K, Θ, Θ' *al principio dei* §§ 59 *e* 60. Avvertiamo pure che il lettore frettoloso può accontentarsi di verificare le formole dei §§ 56-58 in coordinate asintotiche il che si fa immediatamente, omettendo le dimostrazioni generali da noi messe in carattere piccolo. Però lo studio delle dimostrazioni del testo appare utile per penetrare nello studio dei metodi usati ai due Capitoli seguenti.

Prima di tutto, spieghiamo il procedimento *d'elevazione degli indici* di cui faremo uso frequente. Sia per fissare le idee, come al Cap. II § 9, b_{rst} un sistema covariante simmetrico a tre indici. Porremo

$$b^i_{st} = \sum_r A_{ir} b_{rst},$$

$$b^{ik}_t = \sum_s A_{ks} b^i_{st} = \sum_{rs} A_{ir} A_{ks} b_{rst},$$

$$b^{ikl} = \sum_t A_{lt} b^{ik}_t = \sum_{rst} A_{ir} A_{ks} A_{lt} b_{rst}.$$

Il sistema b^{ik}_t p. es. si dice controvariante negli indici i e k e covariante nell'indice t. Ciò vuol dire che, introducendo nuove variabili indipendenti $\overline{u}, \overline{v}$, esso si trasforma come il prodotto $\beta_t du_i du_k$, le β_t essendo covarianti. Osserviamo che, anche se il sistema covariante b_{rst} non fosse simmetrico, si può *elevare* un indice qualunque; soltanto occorre tener presente l'ordine degli indici. Si pone allora p. es.

$$b^{ik}_{--t} = \sum_{rs} A_{ir} A_{ks} b_{rst},$$

$$b_{r}{}^{ik}_{--} = \sum_{st} A_{is} A_{kt} b_{rst}.$$

In virtù delle identità

(4) $\sum_i A_{ir} a_{is} = \varepsilon_s^r$ ove $\varepsilon_s^r = 0$, se $r \gtrless s$, $\varepsilon_s^r = 1$ se $r = s$; $\sum_{ik} A_{ik} a_{ik} = 2$

si ritorna semplicemente da uno qualunque dei sistemi b_{st}^i, b_t^{ik}, b^{ikl} a b_{rst} *(abbassamento degli indici)*. Si trova cioè tosto

$$b_{rst} = \sum_i a_{ir} b_{st}^i = \sum_{ik} a_{ir} a_{ks} b_t^{ik} = \sum_{ikl} a_{ir} a_{ks} a_{lt} b^{ikl},$$

ed anche

$$b_{st}^i = \sum_k a_{ks} b_t^{ik} \quad \text{ecc.}$$

Porremo anche frequentemente

$$A_{rs} = a^{rs};$$

e ciò non è che un caso particolare della notazione generale ora spiegata; infatti si riconosce subito che

$$a^{ik} = \sum_{rs} a^{ir} a^{ks} a_{rs}.$$

Avvertiamo ancora che ometteremo al solito d'indicare, sotto il segno Σ, gli indici rispetto a cui si somma, *tali indici essendo semplicemente sempre quelli che compaiono due volte,* come indice superiore e come indice inferiore (*).

§ 56. — I differenziali coniugati.

Il sistema covariante a_{rs} si è visto al Cap. II § 9 aver l'importante proprietà che il suo sistema derivato covariante è identicamente nullo. Vi è un altro sistema covariante che gode la medesima proprietà. Posto infatti

(1) $\vartheta_{11} = 0$, $\vartheta_{12} = \sqrt{|A|}$, $\vartheta_{21} = -\sqrt{|A|}$, $\vartheta_{22} = 0$,

---

(*) L'indice di un *differenziale* si deve riguardare come un indice *superiore*.

è facile vedere che le ϑ_{rs} formano un sistema impropriamente covariante (cioè covariante per cambiamenti di variabili a Iacobiano positivo, cambiante di segno per quelle a Iacobiano negativo). Di più

$$\vartheta_{kst} = \frac{\partial \vartheta_{ks}}{\partial u_t} - \sum_q \binom{kt}{q} \vartheta_{qs} - \sum_q \binom{st}{q} \vartheta_{kq}$$

si vede subito identicamente nullo, in virtù della formola

$$\frac{\partial \log \sqrt{|A|}}{\partial u_i} = \binom{1i}{1} + \binom{2i}{2}.$$

Mentre il sistema a_{rs} è simmetrico, il sistema ϑ_{rs} è *pseudosimmetrico*, cioè $\vartheta_{sr} = -\vartheta_{rs}$. Ciò bisogna tener presente nei nostri calcoli.

Qual'è il sistema controvariante ϑ^{ik}? Essendo $A = -\varepsilon|A|$, si calcola subito

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \vartheta^{11} = 0, \quad \vartheta^{12} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}, \quad \vartheta^{21} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}, \quad \vartheta^{22} = 0;$$

anche il sistema ϑ^{rs} è evidentemente pseudosimmetrico.

Notiamo le identità analoghe alle (4) del § 55

$$(2) \qquad \begin{aligned} \sum \vartheta^{ki} \vartheta_{si} = -\sum \vartheta^{ik} \vartheta_{si} = \sum \vartheta^{ik} \vartheta_{is} &= 0 \quad \text{se} \quad k \gtrless s, \\ &= -\varepsilon \quad \text{se} \quad k = s, \\ \sum \vartheta^{ks} \vartheta_{ks} &= -2\varepsilon. \end{aligned}$$

Il sistema covariante ϑ_{rs} si può generalizzare al caso di un numero qualunque n di variabili indipendenti; ma nel caso attuale di $n = 2$ esso ci conduce ad un concetto peculiare per tale caso, cioè al concetto di *differenziali coniugati* che ci riesce opportuno per semplificare diversi calcoli. I differenziali du_i formando un sistema controvariante, lo stesso vale delle espressioni

$$(3) \qquad Du_i = \sum \vartheta^{ik} a_{ks} du_s.$$

Si ha anche

$$(3)_{\text{bis}} \qquad Du_i = \sum a^{ik} \vartheta_{ks} du_s;$$

infatti

$$(4) \qquad \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} = \Sigma\, a^{ik} \vartheta_{ks}$$

essendo

$$\Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} = \Sigma\, \vartheta_{pq}\, a^{ip} a^{kq} a_{ks} = \Sigma\, \vartheta_{ps}\, a^{ip}.$$

Scrivendo per disteso, abbiamo

$$(3)_{\text{ter}} \qquad \begin{aligned} Du &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(a_{12}\,du + a_{22}\,dv), \\ Dv &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(a_{11}\,du + a_{12}\,dv). \end{aligned}$$

Si vede subito che, se $F_2 = 0$ definisce le asintotiche di una superficie, la direzione corrispondente a Du_i è coniugata a quella corrispondente a du_i; perciò appunto chiamiamo i Du_i i *differenziali coniugati*. Da ciò si prevede che si può, a meno di un fattore, scambiare d e D nelle (3); precisamente si trova osservando le (2)

$$\Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} Du_s = \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} a^{sp} \vartheta_{pq}\, du_q = \Sigma\, \vartheta^{ik} \vartheta_{kq}\, du_q = \varepsilon du_i$$

sicchè

$$(3)_{\text{quater}} \qquad du_i = \varepsilon \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ks} Du_s = \varepsilon \Sigma\, a^{ik} \vartheta_{ks} Du_s .$$

Dal significato geometrico dei differenziali coniugati risulta subito senza calcolo che la forma F_2 si moltiplica soltanto per un fattore finito, se vi sostituiamo i Du_i al posto dei du_i, e lo stesso si vede valere di una forma differenziale quadratica qualunque *coniugata* ad F_2. Precisamente valgono le

$$(5) \qquad \Sigma\, a_{ks} Du_k Du_s = -\varepsilon F_2 ,$$

$$(6) \qquad \Sigma\, b_{ks} Du_k Du_s = \varepsilon \Sigma\, b_{ks}\, du_k\, du_s , \quad \text{se} \quad \Sigma\, A_{ks} b_{ks} = 0 .$$

Cominciamo con la dimostrazione della (6). Noi sappiamo che

$$\Sigma b_{ks}\, Du_k\, Du_s = \alpha \Sigma\, b_{ks}\, du_k\, du_s$$

e vogliamo determinare il fattore α. Sostituendo qui

$$du_k + \lambda Du_k$$

a du_k e *quindi* [come risulta dal confronto di (3) e $(3)_{\text{quater}}$]

$$Du_k + \varepsilon\lambda\, du_k$$

a Du_k e confrontando i coefficienti di λ, risulta

$$\Sigma b_{ks}\, du_k\, Du_s = \varepsilon\alpha \Sigma b_{ks}\, Du_k\, du_s$$

sicchè, essendo $b_{ks} = b_{sk}$, $\varepsilon\alpha = 1$, *c. d. d.* (*) Per dimostrare la (5) si noti che

$$F_2 = -\varepsilon\sqrt{|A|}\,(du\,Dv - dv\,Du) \tag{5_{bis}}$$

ossia

$$F_2 = -\varepsilon \Sigma \vartheta_{ik}\, du_i\, Du_k \tag{5_{ter}}$$

come risulta subito p. es. dalle $(3)_{\text{ter}}$. Ora, sostituendo Du_i a du_i e *quindi* εdu_i a Du_i, la $(5)_{\text{bis}}$ mostra che F_2 si moltiplica per $-\varepsilon$, il che appunto è affermato dalla (5).

Introduciamo ancora una notazione, che ci sarà comoda qualche volta. Se φ è una funzione qualunque di u, v, si scrive:

$$d\varphi = \varphi_1 du + \varphi_2 dv;$$

e noi scriveremo analogamente qualche volta

$$D\varphi = \varphi_1 Du + \varphi_2 Dv. \tag{7}$$

§ 57. — La forma differenziale F_3'.

A) Definizione di F_3'.

Noi porremo [cfr. le $(3)_{\text{ter}}$ del § 56]

$$F_3' = \Sigma a_{kst}\, du_k\, du_s\, Du_t = \tag{1}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} a_{11}du + a_{12}dv & a_{111}du^2 + 2a_{112}du dv + a_{122}dv^2 \\ a_{12}du + a_{22}dv & a_{112}du^2 + 2a_{122}du dv + a_{222}dv^2 \end{vmatrix}$$

(*) Si noti che il ragionamento *non* si applica se $b_{ks} = a_{ks}$, essendo identicamente $\Sigma a_{ks}\, du_k\, Du_s = 0$.

e indicheremo con b_{kst} il sistema *simmetrico* dei coefficienti della forma *impropriamente intrinseca* F_3'. La forma F_3' è, come la F_3, *coniugata* ad F_2, cioè valgono le

(2) $$\Sigma A_{ks} b_{kst} = \Sigma a^{ks} b_{kst} = 0 .$$

Le b_{kst} sono date dalle

(3) $$b_{kst} = \Sigma \vartheta_{lt} a^l_{ks} ,$$

ed inversamente valgono le

(3) bis $$a_{kst} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{lt} b^l_{ks} .$$

Di più si hanno formole simili

(3) ter $$b^l_{ks} = \Sigma \vartheta^{il} a_{ksi} ,$$

(3) quater $$a^l_{ks} = \varepsilon \Sigma \vartheta^{il} b_{ksi} .$$

Accanto alla (1) possiamo scrivere anche

(1) bis $$F_3 = \varepsilon \Sigma a_{kst}\, du_k Du_s Du_t ,$$

(1) ter $$F_3' = \varepsilon \Sigma a_{kst}\, Du_k Du_s Du_t .$$

La (1) ter mostra che *l'equazione* $F_3' = 0$ *definisce le tangenti di Segre*. Tutte le formole precedenti si verificano subito in coordinate asintotiche, ma noi le dimostreremo mediante calcoli diretti.

Essendo [cfr. le (3) bis del § 56]

$$\Sigma a_{ksp}\, du_k\, du_s\, Du_p = \Sigma a_{ksp}\, a^{pl} \vartheta_{lt}\, du_t\, du_k\, du_s = \Sigma \vartheta_{lt}\, a^l_{ks}\, du_k\, du_s\, du_t ,$$

per dimostrare le (3) basta provare che, se si definiscono le b_{kst} dalle (3), esse formano un sistema *simmetrico*. Ora è evidentemente $b_{kst} = b_{skt}$, sicchè basta provare che $b_{kst} = b_{kts}$, ossia che $b_{k12} - b_{k21} = 0$, oppure che

$$\Sigma \vartheta^{st} b_{kst} = 0 .$$

Ora [cfr. le (2) del § 56]

$$\Sigma \vartheta^{st} b_{kst} = \Sigma \vartheta^{st} \vartheta_{lt}\, a^l_{ks} = \Sigma \vartheta^{st} \vartheta_{lt}\, a^{lr}\, a_{ksr} = - \varepsilon \Sigma a^{sr}\, a_{ksr} = 0 .$$

Da (3) si deduce poi [cfr. le (4) del § 56 e le $\vartheta_{ks} = -\vartheta_{sk}$]

$$b^t_{ks} = \Sigma a^{ti} \vartheta_{pi} a^p_{ks} = \Sigma \vartheta^{it} a_{pi} a^p_{ks} = \Sigma \vartheta^{it} a_{ksi},$$

cioè le $(3)_{\text{ter}}$. E lascio al lettore il facile esercizio di provare anche le $(3)_{\text{bis}}$, $(3)_{\text{quater}}$ e (2). Per dimostrare le $(1)_{\text{bis}}$ e $(1)_{\text{ter}}$ basta osservare che è per le relazioni di coniugio e per la (6) del § 56

$$\Sigma a_{kst} Du_k Du_s = \varepsilon \Sigma a_{kst} du_k du_s .$$

B) Alcune identità notevoli.

Noi sappiamo (Cap. II § 12) che la forma F_2 è proporzionale all'*Hessiano* della forma F_3; la seconda espressione (1) di F'_3 prova pertanto che la forma F'_3 è proporzionale al *covariante cubico* di F_3. Esiste dunque una relazione lineare ed omogenea fra $F_3^2, F_3'^2, F_2^3$, e precisamente

$$F_3^2 - \varepsilon F_3'^2 + \frac{1}{2} J F_2^3 = 0. \tag{4}$$

In particolare, usando le forme normali $\varphi_3 = -JF_3$, $\varphi'_3 = -JF'_3$, $\varphi_2 = -JF_2$, essa diventa

$$\varphi_3^2 - \varepsilon \varphi_3'^2 - \frac{1}{2} \varphi_2^3 = 0. \tag{4$_{\text{bis}}$}$$

La teoria dei covarianti di una forma cubica binaria conduce anche ad altre formole importanti. Infatti le forme F_2 e F'_3 essendo proporzionali a forme covarianti di F_3, evidentemente anche le forme

$$\Sigma a^{ik}_r a_{iks} du_r du_s , \quad \Sigma b^{ik}_r b_{iks} du_r du_s , \quad \Sigma a^{ik}_r b_{iks} du_r du_s$$

sono proporzionali a forme covarianti di F_3. Ora, come è noto, l'unica forma covariante di secondo ordine di una forma cubica binaria è il suo Hessiano, sicchè le forme sopra scritte sono nulle oppure sono proporzionali a F_2. Più precisamente, noi dimostreremo le formole importanti

$$\Sigma a^{ik}_r a_{iks} = -J a_{rs} , \tag{5}$$

$$\Sigma b^{ik}_r b_{iks} = \varepsilon J a_{rs} , \tag{5$_{\text{bis}}$}$$

$$(5)_{\text{ter}} \qquad \Sigma a_r^{ik} b_{iks} = -J\vartheta_{rs}\,.$$

Per provare le (5), occorre dimostrare anzitutto le formole

$$(6) \qquad \Sigma a^{ikl} a_{ikl} = -2J\,,$$

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \Sigma b^{ikl} b_{ikl} = 2\varepsilon J\,,$$

$$(6)_{\text{ter}} \qquad \Sigma a^{ikl} b_{ikl} = \Sigma a_{ikl} b^{ikl} = 0\,.$$

Dalla (3) del § 55 segue subito

$$J = -\frac{\varepsilon}{2}\Sigma \frac{a^{ik}}{\sqrt{|A|}}(a_{i11}a_{k22} - 2a_{i12}a_{k12} + a_{i22}a_{k11}) =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\Sigma \vartheta^{rp}\vartheta^{sq} a^{ik} a_{irs} a_{kpq} = -\frac{\varepsilon}{2}\Sigma \vartheta^{rp}\vartheta^{sq} a_{irs} a_{pq}^{i}$$

o facendo uso di $(3)_{\text{ter}}$

$$J = -\frac{\varepsilon}{2}\Sigma \vartheta^{sq} b_{is}^{p} a_{pq}^{i}\,.$$

Da questo si passa subito a (6) e $(6)_{\text{bis}}$: a (6) facendo uso della $(3)_{\text{quater}}$, a $(6)_{\text{bis}}$ facendo uso della $(3)_{\text{ter}}$. In quanto alla $(6)_{\text{ter}}$, da (3) si ha

$$\Sigma a^{ikl} b_{ikl} = \Sigma \vartheta_{ri} a^{ikl} a_{kl}^{r}\,,$$

e il secondo membro, cambiando di segno se si scambiano gli indici i e r, svanisce identicamente.

Ciò premesso, osserviamo che i sistemi covarianti

$$\Sigma a_r^{ik} a_{iks}\,,\quad \Sigma b_r^{ik} b_{iks}\,,\quad \Sigma a_r^{ik} b_{iks} + J\vartheta_{rs}$$

sono simmetrici (*). Pertanto, ricordando l' osservazione fatta sull' Hessiano di una forma cubica binaria, risulta che si possono trovare α, β e γ tali che sia

$$\Sigma a_r^{ik} a_{iks} = \alpha\,.\,a_{rs}\,,$$

$$\Sigma b_r^{ik} b_{iks} = \beta\,.\,a_{rs}\,,$$

$$\Sigma a_r^{ik} b_{iks} + J\vartheta_{rs} = \gamma\,.\,a_{rs}\,.$$

(*) Ciò è evidente per i primi due, ma vale anche per il terzo. Infatti [cfr. $(3)_{\text{quater}}$ e (6) del § 57 e (2) del § 56]

$$(\Sigma a_1^{ik} b_{ik2} + J\vartheta_{12}) - (\Sigma a_2^{ik} b_{ik1} + J\vartheta_{21}) =$$

$$= -\varepsilon\sqrt{|A|}\,\Sigma \vartheta^{rs}(\Sigma a_r^{ik} b_{iks} + J\vartheta_{rs}) = -\varepsilon\sqrt{|A|}\,(2\varepsilon J - 2\varepsilon J) = 0\,.$$

Ora moltiplicando le precedenti per a^{rs} e sommando, si trova

$$2\alpha = \Sigma a^{iks} a_{iks} ,$$

$$2\beta = \Sigma b^{iks} b_{iks} ,$$

$$2\gamma = \Sigma a^{iks} b_{iks} ,$$

e basta osservare le (6) per arrivare alle (5).

Passiamo alla dimostrazione di (4). Dalle (1) e (1)$_{\text{bis}}$ si deduce

$$\begin{aligned} \varepsilon F_3^2 - F_3'^2 &= \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \,.\, \Sigma a_{rst}\, du_r\, Du_s\, Du_t - \\ &\quad - \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, Du_l \,.\, \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, Du_t \\ &= \Sigma a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t\, (du_l\, Du_s - du_s\, Du_l) \\ &= - \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t \,.\, (du\, Dv - dv\, Du) \end{aligned}$$

e per la (5)$_{\text{bis}}$ del § 56

$$\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 = F_2 \Sigma \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_k\, du_r\, Du_t$$

e, scambiando gli indici i ed r, k e t, l e s, essendo $\vartheta^{sl} = - \vartheta^{ls}$

$$\begin{aligned} \varepsilon F_3^2 - F_3'^2 &= \frac{1}{2} F_2 \Sigma \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\, (du_k\, Du_t - du_t\, Du_k) \\ &= - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{|A|}\, F_2 \Sigma \vartheta^{ls}\, \vartheta^{kt}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r\, (du\, Dv - dv\, Du). \end{aligned}$$

Applicando nuovamente la (5)$_{\text{bis}}$ del § 56 si deduce

$$\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 = \frac{1}{2} F_2^2 \Sigma \vartheta^{kt}\, \vartheta^{ls}\, a_{ikl}\, a_{rst}\, du_i\, du_r ,$$

ed osservando la (3)$_{\text{ter}}$

$$= \frac{1}{2} F_2^2 \Sigma \vartheta^{ls}\, b_{il}^{t}\, a_{rst}\, du_i\, du_r ,$$

indi per la (3)$_{\text{quater}}$

$$= \frac{\varepsilon}{2} F_2^2 \Sigma a_i^{st}\, a_{rst}\, du_i\, du_r ,$$

e finalmente per le (5)

$$\varepsilon F_3^2 - F_3'^2 = - \frac{\varepsilon}{2} J F_2^2 \Sigma a_{ir}\, du_i\, du_r = - \frac{\varepsilon}{2} J F_2^3 , \text{ c. d. d.}$$

§ 58. — La forma differenziale $\Sigma\psi_i du_i$.

A) Definizione delle ψ_i.

Dimostreremo in questo § che il sistema covariante a_{rsti} derivato del sistema covariante a_{rst} può sostituirsi con un sistema covariante ψ_i ad un sol indice. Tale fatto è importantissimo, perchè, come vedremo anche nei futuri Capitoli, ciò permette di dare ai calcoli di geometria proiettivo-differenziale delle superficie grande semplicità ed eleganza. Però le formole che andiamo a dimostrare non hanno senso se $J=0$. *Supponiamo quindi in tutto il § attuale* $J \neq 0$, sicchè le nostre formole non si applicano a superficie rigate. Osserviamo dapprima che le forme F_3 e F'_3 sono linearmente indipendenti (*); se ne deduce che ogni forma cubica coniugata ad F_2 è combinazione lineare di F_3 e F'_3. Ora tali sono le forme $\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t$ $(i=1,2)$; infatti, derivando covariantemente le $\Sigma a^{rs} a_{rst}=0$ si trova $\Sigma a^{rs} a_{rsti}=0$. Ne segue tosto che si possono trovare due sistemi covarianti α_i e β_i ad un sol indice tali che sia

$$(\alpha)\qquad a_{rsti} = \alpha_i a_{rst} + \beta_i b_{rst}\,.$$

Ora è facile vedere che $\alpha_i = \frac{1}{2}\frac{J_i}{J}$ (**); noi porremo

---

(*) Infatti, se fosse $b_{rst} = \alpha a_{rst}$, sarebbe

$$\Sigma b^{rst} b_{rst} = \alpha \Sigma b^{rst} a_{rst}\,, \quad \text{ossia} \quad J=0$$

per le (6)$_{\text{bis}}$ e (6)$_{\text{ter}}$ del § 57.

(**) Infatti, derivando covariantemente la (6) del § 57, si deduce

$$J_i = -\frac{1}{2}\Sigma(a^{hr} a^{ps} a^{qt} a_{hpq} a_{rst})_i =$$

$$= -\frac{1}{2}\Sigma a^{hr} a^{ps} a^{qt} (a_{hpqi} a_{rst} + a_{hpq} a_{rsti}) =$$

$$= -\Sigma a^{hr} a^{ps} a^{qt} a_{hpq} a_{rsti} = -\Sigma a^{rst} a_{rsti}\,.$$

Moltiplicando la (α) con a^{rst} e sommando, si ottiene pertanto, osservando anche le (6) e (6)$_{\text{bis}}$ del § 57, $-J_i = -2J\alpha_i$, *c. d. d.*

$$\beta_i = \varepsilon \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k \text{ (*)},$$

sicchè

$$(1) \qquad a_{rsti} = \frac{1}{2} \frac{J_i}{J} a_{rst} + \varepsilon \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k . b_{rst} .$$

Accanto alla (1), vale la formola analoga

$$(1)_{\text{bis}} \qquad b_{rsti} = \frac{1}{2} \frac{J_i}{J} b_{rst} + \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k . a_{rst} .$$

Essa si deduce subito dalla precedente, derivando covariantemente la (3) del § 57, e osservando che le derivate covarianti di ϑ_{il} sono nulle.

La forma differenziale $\Sigma \psi_i du_i$ è evidentemente *intrinseca;* ma essa non è invariante. È invece intrinseca ed invariante la forma

$$(2) \qquad \Sigma \psi_i du_i + \frac{3}{2} \frac{dJ}{J}$$

ma è inutile confermarlo con calcolo, perchè ci arriveremo in modo indiretto al Cap. IX § 76 dove vedremo anche il significato geometrico delle direzioni definite dall'annullarsi di tale forma.

B) Relazioni con le $p_{rs} - \Pi_{rs}$.

Il sistema covariante a_{rsti} appare nella formola (13) Cap. II, § 14 *B*). Usando i differenziali coniugati essa si scrive

$$P - \Pi = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \Sigma (a_{ik12} - a_{ik21}) du_i Du_k$$

ossia

$$(3) \qquad P - \Pi = - \varepsilon \Sigma \vartheta^{rs} a_{ikrs} du_i Du_k$$

(*) La ragione perchè prendiamo le ψ_i e non le β_i come quantità fondamentali, sta nel fatto che le ψ_i dipendono *razionalmente* dai coefficienti di F_2 e F_3 e dalle loro derivate, come si verifica facilmente.

Sostituendovi a Du_k i valori (3), si trova tenendo conto successivamente delle $(3)_{\text{ter}}$ e $(3)_{\text{quater}}$ del § 57

$$P - \Pi = -\varepsilon \Sigma \vartheta^{rs} \vartheta^{hp} a_{ihrs} a_{pq} du_i du_q =$$

$$= -\varepsilon \Sigma \vartheta^{rs} b_{ir\,\underline{\ }s}^{\ \ p} a_{pq} du_i du_q = -\Sigma a_{pq} a_{i\,\underline{\ }s}^{\ ps} du_i du_q =$$

$$= -\Sigma a_{iq\,\underline{\ }s}^{\ \ s} du_i du_q = \Sigma (p_{iq} - \pi_{iq}) du_i du_q ,$$

e ciò può scriversi

$(3)_{\text{bis}}$ $$p_{ik} - \pi_{ik} = -\Sigma a_{ik\,\underline{\ }r}^{\ \ r} \quad (*).$$

Se $J \neq 0$, possiamo usare la formola (1) che dà

$$\Sigma a_{ik\,\underline{\ }r}^{\ \ r} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{J_r}{J} a_{ik}^r + \varepsilon \Sigma \psi^t \vartheta_{rt} b_{ik}^r$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma \frac{J_r}{J} a_{ik}^r + \Sigma \psi^t a_{ikt} \quad [\text{cfr. § 57, } (3)_{\text{bis}}]$$

sicchè, se $J \neq 0$,

$(3)_{\text{ter}}$ $$p_{ik} - \pi_{ik} = -\Sigma \left(\frac{1}{2} \frac{J^r}{J} + \psi^r \right) a_{ikr} .$$

§ 59. — Gli invarianti del primo ordine dell'elemento lineare proiettivo.

A) Definizione.

In tutto il resto del Capitolo faremo uso di coordinate normali ($J = -1$) (**).

(*) Si ricordi che

$$\Sigma a_{ik\,\underline{\ }r}^{\ \ r} = \Sigma A_{rs} a_{iksr} .$$

(**) Le formole che andremo a dedurre si generalizzano senza difficoltà al caso di J qualunque, ma ciò ha poco interesse.

Porremo

$$
\begin{aligned}
&\Phi = \Sigma a^{ik} \psi_i \psi_k = \Sigma a_{ik} \psi^i \psi^k = \Sigma \psi_i \psi^i, \\
(1) \qquad &\Psi = \Sigma a^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l = \Sigma a_{ikl} \psi^i \psi^k \psi^l, \\
&\Psi' = \Sigma b^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l = \Sigma b_{ikl} \psi^i \psi^k \psi^l.
\end{aligned}
$$

Le quantità Φ, Ψ, Ψ' hanno evidentemente significato intrinseco ed invariante (*). Essi sono del resto gl'invarianti più semplici dell'elemento lineare proiettivo; vale infatti il teorema che ci accontentiamo d'enunciare, che ogni invariante (assoluto) di $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ che contiene soltanto derivate prime dei coefficienti di φ_2 e φ_3 è funzione razionale di Φ, Ψ e Ψ'. Essi sono legati dall'identità

$$
(2) \qquad \Psi^2 - \varepsilon \Psi'^2 = \frac{1}{2} \Phi^3 \ (^{**}).
$$

B) Alcune identità nel caso $\Phi \neq 0$.

Le forme differenziali lineari

$$
\begin{gathered}
\Sigma \psi_i du_i, \quad \Sigma \psi_i Du_i = \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r du_i, \\
\Sigma a_{rsi} \psi^r \psi^s du_i, \ \Sigma a_{rsi} \psi^r \psi^s Du_i = \Sigma b_{rsi} \psi^r \psi^s du_i
\end{gathered}
$$

sono intrinseche (le due forme a destra impropriamente intrinseche) ed invarianti. Se $\Phi \gtrless 0$, le forme $\Sigma \psi_i du_i$, $\Sigma \psi_i Du_i$ sono linearmente indipendenti e viceversa (***); in tal caso pertanto le altre due sono combinazioni lineari di esse; precisamente valgono le

---

(*) Si tenga presente che esse s'intendono calcolate in coordinate normali e che Ψ' è soltanto impropriamente intrinseco.

(**) Ciò si vede subito, sostituendo ψ^i a du_i nell'identità (4)$_{\text{bis}}$ del § 57.

(***) Infatti

$$
\begin{vmatrix} \psi_1 & \Sigma \vartheta_{r1} \psi^r \\ \psi_2 & \Sigma \vartheta_{r2} \psi_r \end{vmatrix} = -\varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ik} \vartheta_{rk} \psi_i \psi^r = \sqrt{|A|}\, \Sigma \psi_r \psi^r = \sqrt{|A|}\, \Phi
$$

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i &= \frac{\Psi}{\Phi} \Sigma \psi_i du_i + \varepsilon \frac{\Psi'}{\Phi} \Sigma \psi_i Du_i , \\
\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s Du_i &= \frac{\Psi'}{\Phi} \Sigma \psi_i du_i + \frac{\Psi}{\Phi} \Sigma \psi_i Du_i .
\end{aligned}
$$

Infatti, noi sappiamo che si possono determinare α e β in modo che sia

$$\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i = \alpha \Sigma \psi_i du_i + \beta \Sigma \psi_i Du_i .$$

Sostituendovi Du_i al posto di du_i e quindi εdu_i al posto di Du_i si ottiene

$$\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s Du_i = \varepsilon \beta \Sigma \psi_i du_i + \alpha \Sigma \psi_i Du_i .$$

Nelle due equazioni poniamo ψ^i al posto di du_i e quindi $\Sigma \vartheta_{ir} \psi^r$ al posto di Du_i. Si ottiene, tenendo conto delle (1) § 59 e delle (3) § 57,

$$\Psi = \alpha \Phi \quad , \quad \varepsilon \Psi' = \beta \Phi ,$$

da cui si hanno le (3).

$C)$ Altre identità.

Dimostreremo subito che i quattro sistemi controvarianti a due indici

$$(4) \qquad \vartheta^{ik} , \quad a^{ik} , \quad \Sigma a^{ikr} \psi_r , \quad \Sigma b^{ikr} \psi_r$$

sono linearmente indipendenti se $\Phi \gtrless 0$. Ne segue che, sotto l'ipotesi $\Phi \gtrless 0$, ogni sistema controvariante a due indici è combinazione lineare dei sistemi (4). Ciò vale in particolare per $\psi^i du_k$, $\Sigma a^{rsi} \psi_r \psi_s du_k$, $\Sigma b^{rsi} \psi_r \psi_s du_k$. Precisamente proveremo che

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\psi^i du_k = &\left(\frac{1}{2} a^{ik} + \frac{\Psi}{\Phi^2} \Sigma a^{ikr} \psi_r - \varepsilon \frac{\Psi'}{\Phi^2} \Sigma b^{ikr} \psi_r \right) \Sigma \psi_i du_i + \\
&+ \varepsilon \left(- \frac{1}{2} \vartheta^{ik} + \frac{\Psi'}{\Phi^2} \Sigma a^{ikr} \psi_r - \frac{\Psi}{\Phi^2} \Sigma b^{ikr} \psi_r \right) \Sigma \psi_i Du_i
\end{aligned}
$$

$$
(5)_{\text{bis}} \quad \begin{aligned}\Sigma a^{rsi}\psi_r\psi_s du_k = &\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}\vartheta^{ik}+\frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}a^{ik}+\frac{1}{2}\Sigma a^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i du_i + \\ &+\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}\vartheta^{ik}+\frac{1}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}a^{ik}-\frac{1}{2}\Sigma b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i Du_i\,,\end{aligned}
$$

$$
(5)_{\text{ter}} \quad \begin{aligned}\Sigma b^{rsi}\psi_r\psi_s du_k = &\left(-\frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}\vartheta^{ik}+\frac{1}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}a^{ik}+\frac{1}{2}\Sigma b^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i du_i + \\ &+\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\Psi'}{\Phi}\vartheta^{ik}+\frac{1}{2}\frac{\Psi}{\Phi}a^{ik}-\frac{1}{2}\Sigma a^{ikr}\psi_r\right)\Sigma\psi_i Du_i\,.\end{aligned}
$$

Dimostriamo dapprima che i sistemi controvarianti (4) sono linearmente indipendenti. Se

$$c_0\vartheta^{ik}+c_1a^{ik}+c_2\Sigma a^{ikr}\psi_r+c_3\Sigma b^{ikr}\psi_r=0,$$

scambiando i con k e sottraendo si ricava $c_0=0$.

Moltiplicando con a_{ik} e sommando risulta anche $c_1=0$ per le solite relazioni di coniugio. Infine moltiplicando con $a^s_{ik}\psi_s$ oppure con $b^s_{ik}\psi_s$ e tenendo conto delle identità (5) del § 57 si ottiene

$$c_2\Phi=0\quad,\quad c_3\Phi=0\,.$$

Quindi $c_0=c_1=c_2=c_3=0$, *c. d. d.* Pertanto si può porre

$$\psi^i du_k=\alpha_0\vartheta^{ik}+\alpha_1a^{ik}+\alpha_2\Sigma a^{ikr}\psi_r+\alpha_3\Sigma b^{ikr}\psi_r\,,$$

$$\Sigma a^{rsi}\psi_r\psi_s du_k=\beta_0\vartheta^{ik}+\beta_1a^{ik}+\beta_2\Sigma a^{ikr}\psi_r+\beta_3\Sigma b^{ikr}\psi_r\,,$$

$$\Sigma b^{rsi}\psi_r\psi_s du_k=\gamma_0\vartheta^{ik}+\gamma_1a^{ik}+\gamma_2\Sigma a^{ikr}\psi_r+\gamma_3\Sigma b^{ikr}\psi_r\,.$$

Per determinare i coefficienti, moltiplichiamo le precedenti equazioni per ϑ_{ik}, a_{ik}, $\Sigma a^l_{ik}\psi_l$, $\Sigma b^l_{ik}\psi_l$ e sommiamo rispetto a i e k. Moltiplicando per ϑ_{ik}, osservando che $\vartheta_{ik}+\vartheta_{ki}=0$ e tenendo conto delle (3) e $(3)_{\text{bis}}$ del § 57 si trova

$$\Sigma\psi_i Du_i=-2\varepsilon\alpha_0\,,\ \Sigma b_{rsi}\psi^r\psi^s du_i=-2\varepsilon\beta_0\,,\ \Sigma a_{rsi}\psi^r\psi^s du_i=-2\gamma_0\,.$$

Moltiplicando per a_{ik}, si trova per le relazioni di coniugio

$$\Sigma\psi_i du_i=2\alpha_1\,,\ \Sigma a_{rsi}\psi^r\psi^s du_i=2\beta_1\,,\ \Sigma b_{rsi}\psi^r\psi^s du_i=2\gamma_1\,.$$

Moltiplicando per $\Sigma a^l_{ik}\psi_l$ e tenendo conto delle (5), $(5)_{\text{bis}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ del § 57 dove nel caso attuale $J=-1$, si trova

$$\Sigma a_{rsi}\psi^r\psi^s du_i=\alpha_2\Phi\,,$$

$$\Sigma a^{rsi} a^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l \, du_k = \beta_2 \Phi ,$$

$$\Sigma b^{rsi} a^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l \, du_k = \gamma_2 \Phi .$$

Similmente si trova moltiplicando per $\Sigma b^l_{ik} \psi_l$

$$\Sigma b_{rsi} \psi^r \psi^s \, du_i = - \varepsilon \alpha_3 \Phi ,$$

$$\Sigma a^{rsi} b^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l \, du_k = - \varepsilon \beta_3 \Phi ,$$

$$\Sigma b^{rsi} b^l_{ik} \psi_r \psi_s \psi_l \, du_k = - \varepsilon \gamma_3 \Phi .$$

Le espressioni così trovate di β_2, β_3, γ_2, γ_3 si possono semplificare. Infatti, esse si possono scrivere evidentemente

$$\Sigma a_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l \, du_k = \beta_2 \Phi ,$$

$$\Sigma a_{irs} b^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l \, du_k = - \varepsilon \beta_3 \Phi ,$$

$$\Sigma b_{irs} a^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l \, du_k = \gamma_2 \Phi ,$$

$$\Sigma b_{irs} b^i_{kl} \psi^r \psi^s \psi^l \, du_k = - \varepsilon \gamma_3 \Phi .$$

D'altra parte, sostituendo nelle (3) (*) $\Sigma a^i_{kl} \psi^l \, du_k$ al posto di du'_i, si trova per le (3) stesse, osservando anche l'identità (2)

$$\beta_2 \Phi = \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma a^i_{kl} \psi_i \psi^l \, du_k + \varepsilon \Psi' \Sigma \vartheta_{ri} a^i_{kl} \psi^r \psi^l \, du_k)$$

$$= \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i - \varepsilon \Psi' \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \Phi \Sigma \psi_i \, du_i ,$$

$$\gamma_2 \Phi = \frac{1}{\Phi} (\Psi' \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i - \Psi \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i) =$$

$$= - \frac{1}{2} \Phi \Sigma \psi_i \, Du_i .$$

Similmente, sostituendo nelle (3) $\Sigma b^i_{kl} \psi^l \, du_k$ al posto di du_i, si trova

$$- \varepsilon \beta_3 \Phi = \frac{1}{\Phi} (\Psi \Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i - \Psi' \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s \, du_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \Phi \Sigma \psi_i \, Du_i ,$$

(*) Si pensi scritto $\Sigma \vartheta_{ri} \psi^r \, du_i$ al posto di $\Sigma \psi_i \, Du_i$.

$$-\varepsilon\gamma_3\Phi = \frac{1}{\Phi}(\Psi'\Sigma b_{irs}\psi^r\psi^s du_i - \varepsilon\Psi\Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s du_i) =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\Phi\Sigma\psi_i du_i \,.$$

Sostituendo i valori trovati di $\alpha_0, \ldots \gamma_3$ e facendo uso delle (3) si ottengono finalmente le formole che volevamo dimostrare.

D) Il caso $\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$.

Le formole (3) e (5) non hanno senso se $\Phi = 0$. Se non soltanto $\Phi=0$, ma anche $\Psi=0$ (*), i primi membri di esse svaniscono identicamente. Supponiamo pertanto che sia $\Phi=0$, ma $\Psi \gtrless 0$ (**).

Si dimostrano facilmente le formole

(6) $$\Sigma\vartheta_{ri}\psi^i = \omega\psi_r\,, \quad \Psi' = \omega\Psi\,, \quad \omega^2 = 1\,,$$
$$\text{se } \Phi = 0\,.$$

Infatti, essendo $\Phi = \psi_1\psi^1 + \psi_2\psi^2 = 0$, esiste una quantità ω tale che

$$\sqrt{|A|}\,\psi^2 = \omega\psi_1\,, \quad \sqrt{|A|}\,\psi^1 = -\omega\psi_2\,,$$

ossia $\Sigma\vartheta_{ri}\psi^i = \omega\psi_r$. Se ne deduce

$$\Psi' = \Sigma b_{ikl}\psi^i\psi^k\psi^l = \Sigma\vartheta_{ri}a^r_{kl}\psi^i\psi^k\psi^l = \omega\Sigma a^r_{kl}\psi_r\psi^k\psi^l = \omega\Psi\,.$$

D' altra parte la (2) si riduce a $\Psi'^2 - \varepsilon\Psi^2 = 0$, sicchè $\varepsilon = 1$, $\omega^2 = 1$, *c. d. d.*

Nel caso ora considerato, le forme

$$\Sigma\psi_i du_i\,, \quad \Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s du_i$$

sono linearmente indipendenti (***), e le formole (3) vanno sostituite

---

(*) E quindi, come si vede subito, $\psi_1 = \psi_2 = 0$.

(**) Tale caso si può presentare nel campo reale soltanto se $\varepsilon = 1$.

(***) Infatti $\begin{vmatrix} \Sigma a_{1rs}\psi^r\psi^s & \psi_1 \\ \Sigma a_{2rs}\psi^r\psi^s & \psi_2 \end{vmatrix} = \sqrt{|A|}\,\Sigma\vartheta^{ik}\psi_i a_{krs}\psi^r\psi^s$

$$= -\sqrt{|A|}\,\Psi' = -\omega\sqrt{|A|}\,\Psi \gtrless 0.$$

con le

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\Sigma \psi_i Du_i = -\omega \Sigma \psi_i du_i, \\ &\Sigma b_{irs} \psi^r \psi^s du_i = \omega \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i, \text{ se } \Phi = 0, \end{aligned}$$

che si dimostrano subito osservando la prima delle (6).

Continuando a supporre $\Phi = 0$, $\Psi \gtrless 0$, dimostriamo subito che i sistemi contravarianti a due indici

$$\vartheta^{ik}, \quad a^{ik}, \quad \Sigma a^{ikr} \psi_r, \quad \psi^i \psi^k$$

sono linearmente indipendenti, sicchè ogni sistema contravariante a due indici ne è combinazione lineare.

In particolare valgono le formole

$$(8) \qquad \psi^i du_k = \left(\frac{\omega}{2} \vartheta^{ik} + \frac{1}{2} a^{ik}\right) \Sigma \psi_i du_i + \frac{\psi^i \psi^k}{\Psi} \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i,$$

$$(8)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \Sigma a^{irs} \psi_r \psi_s du_i &= \Sigma a^{ikr} \psi_r . \Sigma \psi_i du_i + \\ &+ \left(-\frac{\omega}{2} \vartheta^{ik} + \frac{1}{2} a^{ik}\right) \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i, \end{aligned}$$

che sostituiscono le (5), $(5)_{\text{bis}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ (*) nel caso attualmente considerato.

Per dimostrare l'indipendenza dei quattro sistemi contravarianti sopra enumerati supponiamo che valga un'identità della forma

$$c_0 \vartheta^{ik} + c_1 a^{ik} + c_2 \Sigma a^{ikr} \psi_r + c_3 \psi^i \psi^k = 0,$$

e dimostriamo che è $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Scambiando i con k e sottraendo, risulta $c_0 = 0$. Moltiplicando per a_{ik} e sommando si ottiene

$$2 c_1 + c_3 \Phi = 2 c_1 = 0.$$

Moltiplicando per $\psi_i \psi_k$ e sommando si ha

$$c_2 \Psi + c_3 \Phi^2 = c_2 \Psi = 0,$$

sicchè $c_2 = 0$ e quindi anche $c_3 = 0$, c. d. d.

(*) È evidentemente $\Sigma b^{irs} \psi_r \psi_s du_i = \omega \Sigma a^{irs} \psi_r \psi_s du_i$.

Possiamo pertanto porre

$$\psi^i\, du_k = \alpha_0\, \vartheta^{ik} + \alpha_1\, a^{ik} + \alpha_2\, \Sigma\, a^{ikr}\psi_r + \alpha_3\, \psi^i\, \psi^k\,,$$

$$\Sigma\, a^{irs}\psi_r\,\psi_s\, du_k = \beta_0\, \vartheta^{ik} + \beta_1\, a^{ik} + \beta_2\, \Sigma\, a^{ikr}\psi_r + \beta_3\, \psi^i\, \psi^k\,.$$

Moltiplicando per ϑ_{ik} e sommando si trova subito (si tenga presente che $\varepsilon = 1$)

$$\alpha_0 = \frac{\omega}{2}\, \Sigma\, \psi_i\, du_i\,, \quad \beta_0 = -\,\frac{\omega}{2}\, \Sigma\, a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i\,.$$

Moltiplicando per a_{ik} e sommando, si ottiene pure subito (essendo $\Sigma a_{ik}\psi^i\,\psi^k = \Phi = 0$)

$$\Sigma\, \psi_i\, du_i = 2\,\alpha_1\,, \quad \Sigma\, a_{irs}\psi^r\,\psi^s\, du_i = 2\,\beta_1\,.$$

Moltiplicando per $\psi_i\,\psi_k$ e sommando si ottiene, osservando che $\Sigma\psi_i\,\psi^i = \Phi = 0$,

$$\alpha_2\, \Psi = 0\,, \quad \Psi\, \Sigma\, \psi_i\, du_i = \Psi\, \beta_2\,.$$

Infine moltiplicando per $\Sigma\, a_{ikt}\psi^t$ e sommando si ha, osservando che $\alpha_2 = 0$,

$$\Sigma\, a_{irs}\psi^r\,\psi^s\, du_i = \alpha_3\, \Psi\,,$$

$$\Sigma\, a^{irs}\, a_{ikt}\, \psi_r\, \psi_s\, \psi^t\, du_k = \beta_2\, \Sigma\, a^{ikr}\, a_{ikt}\, \psi_r\, \psi^t + \beta_3\, \Psi\,.$$

Ora la (5) del § 57 dimostra che

$$\Sigma\, a^{ikr}\, a_{ikt}\psi_r\,\psi^t = \Sigma\, a_r^{ik}\, a_{ikt}\, \psi^r\, \psi^t = \Sigma\, a_{rt}\, \psi^r\, \psi^t = \Phi = 0\,,$$

sicchè risulterà $\beta_3 = 0$ se ci riesce di provare che

$$\Sigma\, a_{rs}^{i}\, a_{pqi}\, \psi^r\, \psi^s\, \psi^p\, du_q = 0\,,$$

e le formole (8) e $(8)_{\text{bis}}$ saranno dimostrate.

Ora ciò segue immediatamente dalla formola generale

$$\Sigma\, a_{rs}^{i}\, a_{pqi}\, \psi^r\, \psi^s\, \psi^p\, du_q = -\,\frac{1}{2}\, \Phi\, \Sigma\, \psi_i\, du_i \tag{9}$$

e dalla nostra ipotesi $\Phi = 0$. La formola (9) è stata dimostrata a pag. 311, sotto l' ipotesi $\Phi \gtrless 0$, ma essa evidentemente non può cessare d' esser valida se $\Phi = 0$.

§ 60. — Invarianti del secondo ordine dell' elemento lineare proiettivo.

A) Definizione.

Oltre gli invarianti Φ, Ψ e Ψ' studiati al § precedente, ci sarà utile considerare quattro ulteriori invarianti che dipendono anche dalle derivate seconde dei coefficienti dell' elemento lineare proiettivo. Essi sono (le ψ_{rs} sono naturalmente le derivate covarianti di ψ_r)

$$K = -\frac{1}{3}\Sigma a^{rs}\psi_{rs} = -\frac{1}{3\sqrt{|A|}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{|A|}\,\psi^1) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{|A|}\,\psi^2)\right] (*),$$

$$(1) \qquad H = \Sigma\vartheta^{rs}\psi_{rs} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial u} - \frac{\partial\psi_1}{\partial v}\right),$$

$$\Theta = \Sigma a^{rst}\psi_{rs}\psi_t \quad , \quad \Theta' = \Sigma b^{rst}\psi_{rs}\psi_t .$$

Osserviamo che H e Θ' sono soltanto *impropriamente* intrinseche. *La quantità* K *non è che la curvatura della forma* φ_2; ciò si vede facilmente calcolandola in coordinate asintotiche (**). La $H = 0$ *è la condizione che caratterizza una superficie isotermo-asintotica.*

B) Il caso $\Phi \neq 0$.

Supponiamo ora $\Phi \gtrless 0$. Allora ogni forma lineare in du, dv

---

(*) L' identità $\Sigma a^{rs}\psi_{rs} = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{|A|}\,\psi^1) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{|A|}\,\psi^2)\right]$ si dimostra nel calcolo assoluto al solito supponendo che $\Sigma\psi_i\,du_i$ sia un differenziale esatto; ma la dimostrazione (v. p. es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, 3ª ed., p. 85) vale in generale.

(**) Ci torneremo al Cap. IX.

si può esprimere come combinazione lineare di $\Sigma\psi_i\, du_i$ e $\Sigma\psi_i\, Du_i$ (*). Ciò vale in particolare per i differenziali $d\Phi$, $d\Psi$, $d\Psi'$. Precisamente si hanno le formole

$$(2)\qquad \begin{aligned} d\Phi &= \left(-3K + 2\,\frac{\Psi\Theta - \varepsilon\Psi'\Theta'}{\Phi^2}\right)\Sigma\psi_i\, du_i + \\ &+ \varepsilon\left(-H + 2\,\frac{\Psi'\Theta - \Psi\Theta'}{\Phi^2}\right)\Sigma\psi_i\, Du_i\,, \end{aligned}$$

$$(2)_{\text{bis}}\qquad \begin{aligned} d\Psi &= \left(-\frac{3\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi' H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi K}{\Phi} + \frac{3}{2}\,\Theta\right)\Sigma\psi_i\, du_i + \\ &+ \varepsilon\left(-\Psi' - \frac{3}{2}\,\frac{\Psi H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi' K}{\Phi} - \frac{3}{2}\,\Theta'\right)\Sigma\psi_i\, Du_i\,, \end{aligned}$$

$$(2)_{\text{ter}}\qquad \begin{aligned} d\Psi' &= \left(-\frac{3}{2}\,\frac{\Psi H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi' K}{\Phi} + \frac{3}{2}\,\Theta'\right)\Sigma\psi_i\, du_i + \\ &+ \left(-\Psi - \frac{3\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi' H}{\Phi} - \frac{9}{2}\,\frac{\Psi K}{\Phi} - \frac{3}{2}\,\Theta\right)\Sigma\psi_i\, Du_i\,. \end{aligned}$$

Le identità dedotte al § precedente forniscono una facile dimostrazione delle formole precedenti.

Infatti

$$d\Phi = d\Sigma a^{ir}\psi_i\psi_r = 2\Sigma a^{ir}\psi_{ik}\psi_r\, du_k = 2\Sigma\psi_{ik}\psi^i\, du_k\,.$$

Sostituendovi i valori (5) del § 59 per $\psi^i\, du_k$ ed osservando le (1) si ricava subito la formola (2). Similmente

$$d\Psi = d\Sigma a^{rst}\psi_r\psi_s\psi_t = \Sigma a^{rst}{}_{\underline{\ }k}\,\psi_r\psi_s\psi_t\, du_k + 3\Sigma a^{rst}\psi_r\psi_s\psi_{tk}\, du_k\,,$$

$$d\Psi' = d\Sigma b^{rst}\psi_r\psi_s\psi_t = \Sigma b^{rst}{}_{\underline{\ }k}\,\psi_r\psi_s\psi_t\, du_k + 3\Sigma b^{rst}\psi_r\psi_s\psi_{tk}\, du_k\,.$$

Ora dalle (1) e $(1)_{\text{bis}}$ del § 58 si ha, essendo $J = -1$,

$$a^{rst}{}_{\underline{\ }k} = \varepsilon\Sigma\vartheta_{kt}\psi^t\,.\,b^{rst}\,,$$

$$b^{rst}{}_{\underline{\ }k} = \Sigma\vartheta_{kt}\psi^t\,.\,a^{rst}\,,$$

(*) Cfr. § 59, pag. 308.

cosicchè

$$d\Psi = \varepsilon\Sigma\vartheta_{kt}\,\psi^t\,du_k\,.\,\Sigma b^{rst}\psi_r\,\psi_s\,\psi_t + 3\Sigma a^{rst}\psi_r\,\psi_s\,\psi_{th}\,du_h =$$

$$= -\varepsilon\Psi'\Sigma\psi_i\,Du_i + 3\,\Sigma\,a^{rsi}\psi_r\,\psi_s\,\psi_{ih}\,du_h\,,$$

$$d\Psi' = -\Psi\,\Sigma\,\psi_i\,Du_i + 3\,\Sigma\,b^{rsi}\psi_r\,\psi_s\,\psi_{ih}\,du_h\,.$$

Sostituendovi a $\Sigma a^{rsi}\psi_r\,\psi_s\,du_h$ e $\Sigma b^{rsi}\psi_r\,\psi_s\,du_h$ i valori (5)$_{\text{bis}}$ e (5)$_{\text{ter}}$ del § 59, ed osservando le (1) si ottengono le formole (2)$_{\text{bis}}$ e (2)$_{\text{ter}}$.

C) Il caso $\Phi = 0$.

Se $\Phi = \Psi = 0$, è naturalmente $d\Phi = d\Psi = d\Psi' = 0$. Se $\Phi = 0$, ma $\Psi \gtrless 0$, è $\Psi' = \omega\Psi$, $(\omega = \pm 1)$, come sappiamo dal § 59 (pag. 312); e si dimostra precisamente nello stesso modo che vale anche la prima delle

$$(3)\qquad \begin{aligned} \Theta' &= \omega\Theta\,,\\ H &= 3\,\omega K\,;\quad \text{se } \Phi = 0\,, \end{aligned}$$

la seconda identità sarà dimostrata fra poco. La formola (2)$_{\text{bis}}$ va sostituita con la

$$(4)\qquad d\Psi = (\Psi + 3\Theta)\,\Sigma\,\psi_i\,du_i - 9K\Sigma a_{irs}\,\psi^r\,\psi^s du_i$$

$$(\text{se } \Phi = 0).$$

Per dimostrare la seconda delle (3) osserviamo che, nelle nostre ipotesi,

$$0 = d\Phi = 2\,\Sigma\,a^{ir}\,\psi_{ih}\,\psi_r\,du_h = 2\,\Sigma\,\psi_{ih}\,\psi^i\,du_h\,.$$

Sostituendovi il valore di $\psi^i\,du_h$ dato nella (8) del § 59, risulta

$$(\omega H - 3K)\,\Sigma\psi_i\,du_i + \frac{2\,\Sigma\,\psi^i\,\psi^h\,\psi_{ih}}{\Psi}\,\Sigma\,a_{irs}\psi^r\,\psi^s\,du_i = 0.$$

Ora le forme differenziali $\Sigma\psi_i\,du_i$ e $\Sigma a_{irs}\psi^r\,\psi^s\,du_i$ sono linearmente indipendenti (*). Vale dunque la seconda delle (3) ed anche la $\Sigma\psi^i\,\psi^h\,\psi_{ih} = 0$ (**).

(*) Cfr. § 59, pag. 312.

(**) Se $\Phi \gtrless 0$, è $\Sigma\psi^i\,\psi^h\,\psi_{ih} = -\dfrac{3}{2}\,\Phi K + \dfrac{\Psi\Theta - \varepsilon\Psi'\Theta'}{\Phi}$. Infatti, so-

E similmente si dimostra la (4). Infatti, è, come a pag. 317, essendo qui $\varepsilon = 1$, $\Psi' = \omega\Psi$,

$$d\Psi = -\,\omega\Psi\Sigma\psi_i\, Du_i + 3\Sigma a^{rsi}\psi_r\,\psi_s\,\psi_{ik}\, du_k\,.$$

Sostituendovi il valore di $\Sigma a^{rsi}\psi_r\,\psi_s\, du_k$ dato nella $(8)_{\text{bis}}$ del § 59, ed osservando la (1) del § 60 e la prima delle (7) del § 59 si trova la formola cercata (4).

D) Il caso delle Φ e Ψ costanti.

Come prima applicazione delle formole del presente § dimostreremo che: *Se* Φ *e* Ψ *sono costanti, è*

$$(5)\qquad \begin{gathered} \mathrm{H} = 0\,,\quad \mathrm{K} = -\frac{1}{9}\Phi\,, \\ \Theta = -\frac{1}{3}\Psi\,,\quad \Theta' = -\frac{1}{3}\Psi'. \end{gathered}$$

Viceversa se valgono le (5), Φ *e* Ψ *sono costanti* (*).

Infatti, se $\Phi = \Psi = 0$, è $\psi_1 = \psi_2 = 0$, e quindi per le (1) anche $H = K = \Theta = \Theta' = 0$. Se $\Phi = 0$, $\Psi =$ costante $\gtrless 0$, la (4) dà, le forme $\Sigma\psi_i\, du_i$ e $\Sigma a_{irs}\,\psi^r\,\psi^s$ essendo indipendenti,

$$\Theta = -\frac{1}{3}\Psi\,,\quad K = 0\,,$$

e basta ricordare le (3) e la $\Psi' = \omega\Psi$ per vedere l'esattezza delle (5). Se infine $d\Phi = d\Psi = 0$, ma $\Phi \gtrless 0$, le forme $\Sigma\psi_i\, du_i$ e $\Sigma\psi_i\, Du_i$ essendo indipendenti, le (5) si deducono tosto dalle (2) e $(2)_{\text{bis}}$. E in modo perfettamente analogo si dimostra la proposizione inversa.

---

stituendo ψ^k a du_k e quindi zero a $\Sigma\psi_i\, Du_i = \Sigma\vartheta_{ri}\,\psi^r\, du_i$ nella formola (5) del § 59, si trova

$$\psi^i\,\psi^k = \frac{1}{2}\Phi\, a^{ik} + \frac{\Psi}{\Phi}\Sigma a^{ikr}\psi_r - \varepsilon\frac{\Psi'}{\Phi}\Sigma b^{ikr}\psi_r\,.$$

Moltiplicando per ψ_{ik} e osservando le (1) si giunge subito alla formola che si voleva dedurre.

(*) Vedremo più tardi che le corrispondenti superficie sono quelle che ammettono ∞^2 deformazioni proiettive in sè.

§ 61. — Il primo problema dell'applicabilità proiettiva.

A) Preliminari.

Il problema che ora ci accingiamo a risolvere, partendo dalle ricerche dei §§ precedenti, si enuncia: *Dati due elementi lineari proiettivi, riconoscere se è possibile trasformare l'uno nell'altro cambiando opportunamente le variabili indipendenti e, nel caso affermativo, determinare tutte quelle trasformazioni.*

Nel caso che gli elementi lineari dati appartengano effettivamente a due superficie date, tal problema è equivalente all'altro di riconoscere se le due superficie sono proiettivamente applicabili e, nel caso affermativo, di determinare tutte le corrispondenze che realizzano l'applicabilità (*). Noi possiamo senz'altro escludere il caso $J=0$ esaurientemente trattato al Cap. IV § 40, e far uso di forme *normali*. Riteniamo le nostre solite notazioni per il primo elemento lineare $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$, e per l'altro $\frac{\bar{\varphi}_3}{\bar{\varphi}_2}$ faremo uso di notazioni analoghe dotate di un soprassegno. Il nostro problema è stato risoluto, per la prima volta, dal Cartan, nella Memoria *Sur la déformation projective des surfaces*, Annales de l'École Normale, (3) 37, 1920, pagg. 259-356 (cfr. pagg. 307-311). Il metodo di Cartan suppone risoluta l'equazione cubica $\varphi_3=0$. Noi non faremo uso di nessuna irrazionalità oltre la solita $\sqrt{|A|}$.

B) Condizioni necessarie.

Supponiamo dapprima che esistano due invarianti (proprî o improprî) P e Q del primo elemento lineare proiettivo (**) le quali

---

(*) Ciò è stato dimostrato al Cap. II, § 20 *A)*. Il problema si può chiamare il *primo problema dell'applicabilità proiettiva*, analogamente alla locuzione usata dal Bianchi nel caso metrico.

(**) Cioè quantità intrinseche o impropriamente intrinseche, che dipendono soltanto dai coefficienti di φ_2 e φ_3 e dalle loro derivate.

siano funzioni *indipendenti* di u, v cioè tali che $\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial v} \end{vmatrix} \gtrless 0$.

Allora anche $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ devono essere funzioni indipendenti di $\overline{u}$, $\overline{v}$.

Poniamo $\eta_1 = 1$ oppure $\eta_1 = -1$ secondo che P è invariante proprio o improprio, e similmente $\eta_2 = 1$ oppure $\eta_2 = -1$ secondo il comportamento di Q. La trasformazione cercata, se esiste, è evidentemente tale che sono soddisfatte le

$$\overline{P} = \alpha_1 P \quad , \quad \overline{Q} = \alpha_2 Q \,, \tag{1}$$

dove $\alpha_i = 1$ se $\eta_i = 1$, e $\alpha_i = \pm 1$ se $\eta_i = -1$. Un primo passo nella risoluzione del nostro problema sarà pertanto di esaminare se le (1) si possono risolvere rispetto a $\overline{u}$, $\overline{v}$. Se così non è, il problema è subito risolto negativamente. Invece, nel caso affermativo, affinchè un sistema di soluzioni possa fornirci la trasformazione cercata, è evidentemente necessario che, se $\eta_i = -1$, il segno α_i sia quello dello Iacobiano di $\overline{u}$, $\overline{v}$ rispetto a u, v. Per brevità diciamo *soluzioni proprie* di (1) quelle che soddisfano a questa condizione relativa ai segni (*).

C) Condizioni sufficienti.

Scelti gli invarianti P e Q comunque, purchè funzioni indipendenti di u e v, l'esistenza di una soluzione propria delle (1) è soltanto una condizione *necessaria* per la trasformabilità di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$.

Per trovare condizioni *sufficienti*, osserviamo dapprima che si possono, con semplici derivazioni, dedurre da due invarianti qualunque P e Q, degli invarianti nuovi. Infatti, posto

$$\begin{aligned} \Delta(P,Q) &= \Sigma a^{ik} P_i Q_k \,, & \Delta(P,P) &= \Delta(P) \\ \mathrm{E}(P,Q) &= \Sigma a^{ikl} P_i P_k Q_l \,, & \mathrm{E}(P,P) &= \mathrm{E}(P) \,, \end{aligned} \tag{2}$$

(*) Se $\eta_1 = \eta_2 = 1$, (e quindi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) *ogni* soluzione di (1) è propria. Le soluzioni che non sono proprie non hanno per noi nessun interesse.

sono invarianti nuovi le espressioni (*)

$$\begin{gathered}\Delta(P),\quad \Delta(P,Q),\quad \Delta(Q),\\ \mathrm{E}(P),\quad \mathrm{E}(P,Q),\quad \mathrm{E}(Q,P),\quad \mathrm{E}(Q).\end{gathered} \tag{3}$$

Ora possiamo enunciare il teorema: *Se* P *e* Q *sono due invarianti di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *che siano funzioni indipendenti di* u *e* v, *condizioni necessarie e sufficienti affinchè* $\varphi_3 : \varphi_2$ *sia trasformabile in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ sono

1° *che esista qualche soluzione propria* (**)

$$\overline{\mathrm{u}} = \mathrm{U}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \quad \overline{\mathrm{v}} = \mathrm{V}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \tag{4}$$

delle (1);

2° *che le equazioni*

$$\begin{gathered}\overline{\Delta}(\overline{\mathrm{P}}) = \Delta(\mathrm{P}), \quad \overline{\Delta}(\overline{\mathrm{P}}, \overline{\mathrm{Q}}) = \alpha_1\alpha_2\Delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\\ \overline{\Delta}(\overline{\mathrm{Q}}) = \Delta(\mathrm{Q}), \quad \overline{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{P}}) = \alpha_1 \mathrm{E}(\mathrm{P}),\\ \overline{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{P}}, \overline{\mathrm{Q}}) = \alpha_2 \mathrm{E}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}), \quad \overline{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{Q}}, \overline{\mathrm{P}}) = \alpha_1 \mathrm{E}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}).\\ \overline{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{Q}}) = \alpha_2 \mathrm{E}(\mathrm{Q}) \quad (^{***}).\end{gathered} \tag{4 bis}$$

siano conseguenza delle (4). Le trasformazioni di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$

(*) Esse son legate dalle identità facilmente dimostrabili:

$$\Delta(Q)\,\mathrm{E}(P) - 2\Delta(P,Q)\,\mathrm{E}(P,Q) + \Delta(P)\,\mathrm{E}(Q,P) = 0,$$
$$\Delta(Q)\,\mathrm{E}(P,Q) - 2\Delta(P,Q)\,\mathrm{E}(Q,P) + \Delta(P)\,\mathrm{E}(Q) = 0,$$
$$\begin{vmatrix}\mathrm{E}(P), & \mathrm{E}(P,Q), & \mathrm{E}(Q,P)\\ \mathrm{E}(P,Q), & \mathrm{E}(Q,P), & \mathrm{E}(Q)\\ \Delta(P), & \Delta(P,Q), & \Delta(Q)\end{vmatrix} + \left[\Delta(P)\Delta(Q) - \Delta(P,Q)^2\right]^2 = 0.$$

Se p. es. P è invariante proprio, Q improprio, $\Delta(P)$, $\Delta(Q)$, $\mathrm{E}(P)$, $\mathrm{E}(Q,P)$ sono invarianti proprî e gli altri improprî.

(**) Cfr. pag. 320.

(***) dove i segni α_i son quelli che compaiono nelle (1). Tra le equazioni (4) bis, quattro soltanto sono indipendenti. Cfr. la penultima nota a piè di pag.

sono tutte e sole quelle soluzioni proprie di (1) che si trovano nelle condizioni dell'enunciato.

Per dimostrare il teorema basta evidentemente provare che, scelte P e Q a nuove variabili indipendenti (*), i coefficienti delle forme trasformate di φ_2 e φ_3 sono funzioni razionali delle quantità (3), a coefficienti numerici. Ma, dato il significato intrinseco di P e Q e delle espressioni (3), basta provare che i coefficienti delle φ_2 e φ_3 stesse sono funzioni razionali delle sole

$$\Delta(u)\,,\quad \Delta(u\,,v)\quad \text{ecc.}$$

Ora

$$\Delta(u)=a^{11}\,,\quad \Delta(u\,,v)=a^{12}\,,\quad \Delta(v)=a^{22}\,,$$

$$\mathrm{E}(u)=a^{111}\,,\ \mathrm{E}(u\,,v)=a^{112}\,,\ \mathrm{E}(v\,,u)a^{122}\,,\ \mathrm{E}(v)=a^{222}\,,$$

ed a_{ik} e a_{ikl} sono evidentemente funzioni razionali, a coefficienti numerici, delle a^{ik} e a^{ikl}.

Per poter applicare il teorema ora dimostrato in tutti i casi in cui esso è applicabile, occorre saper decidere se un dato elemento lineare $\varphi_3:\varphi_2$ possiede due invarianti che siano funzioni indipendenti di u e v. A ciò risponde il teorema che noi dimostreremo al § seguente: *dato comunque un elemento lineare proiettivo* $\varphi_3:\varphi_2$, *o vi sono due funzioni indipendenti fra le espressioni*

$$(5)\qquad \Phi\,,\ \Psi\,,\ \Psi'\,,\ \mathrm{H}\,,\ \mathrm{K}\,,\ \Theta\,,\ \Theta'$$

definite ai §§ 59 *e* 60, *oppure non è possibile trovare due invarianti di* $\varphi_3:\varphi_2$ *che siano funzioni indipendenti di* u *e* v.

D) **Nuova forma delle condizioni sufficienti.**

In particolare, il criterio precedente è applicabile se Φ e Ψ sono funzioni indipendenti di u e v. Ma in tal caso possiamo enunciare un criterio più semplice: *Se* Φ *e* Ψ *sono funzioni indipen-*

(*) Ciò è possibile, essendo per ipotesi P e Q funzioni indipendenti di u e v.

denti di u *e* v, *condizioni necessarie e sufficienti affinchè* $\varphi_3 : \varphi_2$ *sia trasformabile in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ *sono :*

1° *che esista qualche soluzione*

$$\overline{\mathrm{u}} = \mathrm{U}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \quad \overline{\mathrm{v}} = \mathrm{V}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \tag{6}$$

delle equazioni $\overline{\Phi} = \Phi$, $\overline{\Psi} = \Psi$;

2° *che, essendo* α *il segno dello Iacobiano*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{u}}, & \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{v}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{u}}, & \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix},$$

le equazioni

$$\overline{\Psi}' = \alpha \Psi', \quad \overline{\mathrm{H}} = \alpha \mathrm{H}, \quad \overline{\mathrm{K}} = \mathrm{K}, \quad \overline{\Theta} = \Theta, \quad \overline{\Theta}' = \alpha \Theta'$$

siano conseguenza delle (6). Le trasformazioni di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ sono tutte e sole quelle che soddisfano alle condizioni dell'enunciato.

Per dimostrare il teorema, osserviamo dapprima che, se si possono (*), partendo da un'espressione intrinseca P qualsiasi, definire due altre espressioni intrinseche P_{I} e P_{II} (**) dalla

$$dP = P_{\mathrm{I}} \Sigma \psi_i \, du_i + P_{\mathrm{II}} \Sigma \psi_i \, Du_i, \tag{7}$$

ed è

$$P_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\Phi} \Sigma \psi^i P_i, \quad P_{\mathrm{II}} = -\frac{\mathrm{s}}{\Phi} \Sigma \vartheta^{ri} \psi_r P_i \ (^{***}). \tag{7 bis}$$

Q essendo un'altra espressione intrinseca, poniamo analogamente

$$dQ = Q_{\mathrm{I}} \Sigma \psi_i \, du_i + Q_{\mathrm{II}} \Sigma \psi_i \, Du_i .$$

(*) Se $\Phi \gtrless 0$; in particolare dunque se Φ e Ψ sono funzioni indipendenti di u e v.

(**) Se P è propriamente intrinseco, P_{I} è pr. intr. e P_{II} è impr. intr.; se P è impr. intr., P_{I} è impr. intr. e P_{II} è pr. intr.

(***) Ciò segue dalla definizione stessa di Φ.

Segue

$$\begin{aligned}\Delta(P\,,\,Q) &= \Sigma\, a^{ik} P_i\, Q_k = \\ &= \Sigma\, a^{ik}(P_{\rm I}\,\psi_i + P_{\rm II}\,\Sigma\,\vartheta_{ri}\,\psi^r)(Q_{\rm I}\,\psi_k + Q_{\rm II}\,\Sigma\,\vartheta_{sk}\,\psi^k) = \\ &= P_{\rm I}\, Q_{\rm I}\,\Sigma\, a^{ik}\,\psi_i\,\psi_k + (P_{\rm I}\, Q_{\rm II} + P_{\rm II}\, Q_{\rm I})\,\Sigma\,\vartheta_{ri}\,\psi^r\,\psi^i + \\ &+ P_{\rm II}\, Q_{\rm II}\,\Sigma\,\vartheta_{ri}\,\vartheta_{sk}\, a^{ik}\,\psi^r\,\psi^s\,.\end{aligned}$$

Ora

$$\Sigma\, a^{ik}\,\psi_i\,\psi_k = \Phi\,,\quad \Sigma\,\vartheta_{ri}\,\psi^r\,\psi^i = -\,\Sigma\,\vartheta_{ir}\,\psi^r\,\psi^i = 0\,,$$

$$\Sigma\,\vartheta_{ri}\,\vartheta_{sk}\, a^{ik}\,\psi^r\,\psi^s = \Sigma\,\vartheta^{pq}\, a_{pr}\, a_{qi}\, a^{ik}\,\vartheta_{sk}\,\psi^r\,\psi^s =$$

$$= \Sigma\,\vartheta^{pk}\,\vartheta_{sk}\, a_{pr}\,\psi^r\,\psi^s = -\,\varepsilon\,\Sigma\, a_{pr}\,\psi^p\,\psi^r = -\,\varepsilon\,\Phi\,,$$

cosicchè

$$\Delta(P\,,\,Q) = \Phi\,(P_{\rm I}\, Q_{\rm I} - \varepsilon\, P_{\rm II}\, Q_{\rm II})\,, \tag{8}$$

e in particolare

$$\Delta(P) = \Phi\,(P_{\rm I}^2 - \varepsilon\, P_{\rm II}^2)\,. \tag{8 bis}$$

Similmente

$$\mathrm{E}(P\,,\,Q) = \Sigma\, a^{ikl} P_i\, P_k\, Q_l =$$

$$\begin{aligned}&= \Sigma\, a^{ikl}(P_{\rm I}\,\psi_i + P_{\rm II}\,\Sigma\,\vartheta_{ri}\,\psi^r)(P_{\rm I}\,\psi_k + P_{\rm II}\,\Sigma\,\vartheta_{sk}\,\psi^s)(Q_{\rm I}\,\psi_l + Q_{\rm II}\,\Sigma\,\vartheta_{tl}\,\psi^t) = \\ &= P_{\rm I}^2\, Q_{\rm I}\,\Sigma\, a^{ikl}\,\psi_i\,\psi_k\,\psi_l + \\ &+ P_{\rm I}\,(2\,P_{\rm II}\, Q_{\rm I} + 2\,P_{\rm I}\, Q_{\rm II})\,\Sigma\, a^{ikl}\,\vartheta_{ri}\,\psi^r\,\psi_k\,\psi_l + \\ &+ P_{\rm II}(P_{\rm II}\, Q_{\rm I} + 2P_{\rm I}\, Q_{\rm II})\,\Sigma\, a^{ikl}\,\vartheta_{ri}\,\vartheta_{sk}\,\psi^r\,\psi^s\,\psi_l + \\ &+ P_{\rm II}^2\, Q_{\rm II}\,\Sigma\, a^{ikl}\,\vartheta_{ri}\,\vartheta_{sk}\,\vartheta_{tl}\,\psi^r\,\psi^s\,\psi^t\,,\end{aligned}$$

onde, ricordando la definizione di Ψ e Ψ' e le formole (3) e (3) bis del § 57,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(P,\,Q) &= \Psi\,(P_{\rm I}^2\, Q_{\rm I} + 2\,\varepsilon\, P_{\rm I}\, P_{\rm II}\, Q_{\rm II} + \varepsilon\, P_{\rm II}^2\, Q_{\rm I}) - \\ &- \Psi'\,(P_{\rm I}^2\, Q_{\rm II} + 2\,P_{\rm I}\, P_{\rm II}\, Q_{\rm I} + \varepsilon\, P_{\rm II}^2\, Q_{\rm II})\,,\end{aligned} \tag{9}$$

in particolare

$$\mathrm{E}(P) = \Psi\, P_{\rm I}\,(P_{\rm I}^2 + 3\,\varepsilon\, P_{\rm II}^2) - \Psi'\, P_{\rm II}\,(3\,P_{\rm I}^2 + \varepsilon\, P_{\rm II}^2) \tag{9 bis}$$

Ora possiamo tosto dimostrare il teorema di pag. 323. Infatti, per il teorema di pag. 321, basta provare che le $\Delta(\Phi)$, $\Delta(\Phi\,,\,\Psi)$, $\Delta(\Psi)$, $\mathrm{E}(\Phi)$, $\mathrm{E}(\Phi\,,\,\Psi)$, $\mathrm{E}(\Psi\,,\,\Phi)$, $\mathrm{E}(\Psi)$ si possono esprimere razionalmente mediante Φ, Ψ, Ψ', H, K, Θ, Θ'. Ora le (7) e (8) mostrano che quelle quantità sono funzioni razionali di Φ, Ψ, Ψ', Φ_{I}, Φ_{II}, Ψ_{I}, Ψ_{II} (*); d' altra parte, le formole (2) e (2) $_{bis}$ del § 60 esprimono Φ_{I}, Φ_{II}, Ψ_{I}, Ψ_{II} mediante Φ, Ψ, Ψ', H, K, Θ, Θ'.

§ 62. — Continuazione. Elementi lineari proiettivi con un gruppo continuo di trasformazioni in sè.

A) Alcune formole preliminari.

Prima di procedere alla risoluzione del nostro problema anche nel caso in cui le sette espressioni

(1) $$\Phi\,,\ \Psi\,,\ \Psi',\ H\,,\ K\,,\ \Theta\,,\ \Theta'$$

sono funzioni di una di esse, occorre premettere qualche formola sulle forme differenziali lineari

$$\Sigma \psi_i\, du_i\,,\quad \Sigma \psi_i\, Du_i\,,\quad \Sigma a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i\,.$$

Siano $$\Sigma \alpha_i\, du_i \quad , \quad \Sigma \beta_i\, du_i$$

due forme differenziali lineari nelle variabili u e v, e d, δ siano due simboli diversi di differenziali; poniamo col Cartan

(2) $$[\Sigma \alpha_i\, du_i\,,\ \Sigma \beta_i\, du_i] = \begin{vmatrix} \Sigma \alpha_i\, du_i & \Sigma \beta_i\, du_i \\ \Sigma \alpha_i\, \delta u_i & \Sigma \beta_i\, du_i \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki}\, \alpha_i\, \beta_k\, [du\,,\, dv].$$

Valgono le formole (**)

(*) E di ε; ma ε è funzione razionale di Φ, Ψ, Ψ', per l' identità (2) del § 59.

(**) Infatti, per la (1), la (2) del § 56 e la (3) $_{ter}$ del § 57,

$$[\Sigma \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma \psi_i\, Du_i\,] = [\Sigma \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma \vartheta_{ri} \psi^r\, du_i\,] =$$

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki}\, \vartheta_{rk}\, \psi_i\, \psi^r\, [du\,,\, dv] = \sqrt{|A|}\, \Sigma \psi_i\, \psi^i\, [du\,,\, dv],$$

$$[\Sigma \psi_i\, du_i\,,\ \Sigma a_{irs}\, \psi^r\, \psi^s\, du_i\,] = \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma \vartheta^{ki}\, a_{krs}\, \psi_i\, \psi^r\, \psi^s\, [du\,,\, dv] =$$

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\, \Sigma b^i_{rs}\, \psi_i\, \psi^r\, \psi^s\, [du\,,\, dv].$$

$$(2)_{\text{bis}} \qquad [\Sigma\psi_i\, du_i\,,\ \Sigma\psi_i\, Du_i] = \sqrt{|A|}\,\Phi\,[du\,,\,dv]\,,$$

$$(2)_{\text{ter}} \qquad [\Sigma\psi_i\, du_i\,,\ \Sigma a_{irs}\,\psi^r\,\psi^s\, du_i] = \varepsilon\sqrt{|A|}\,\Psi'\,[du\,,\,dv]\,.$$

Covariante bilineare della forma differenziale lineare $\Sigma\alpha_i\, du_i$ si dice (*) l'espressione a due sistemi di differenziali

$$(3) \qquad (\Sigma\alpha_i\, du_i)' = \delta\Sigma\alpha_i\, du_i - d\Sigma\alpha_i\,\delta u_i =$$

$$= \varepsilon\sqrt{|A|}\,\Sigma\vartheta^{hl}\,\alpha_{ik}\,[du,\,dv]\,,$$

le α_{ik} essendo derivate covarianti rispetto a (una qualsiasi forma differenziale quadratica, poniamo rispetto a φ_2). È ovvio che $(\Sigma\alpha_i\, du_i)' = 0$ allora ed allora soltanto se $\Sigma\alpha_i\, du_i$ è un differenziale esatto.

Dimostriamo che: 1° se $\Phi \gtrless 0$,

$$(4) \qquad (\Sigma\psi_i\, du_i)' = -\varepsilon\frac{H}{\Phi}\,[\Sigma\psi_i\, du_i,\ \Sigma\psi_i\, Du_i]\,,$$

$$(4)_{\text{bis}} \qquad (\Sigma\psi_i\, Du_i)' = 3\varepsilon\frac{K}{\Phi}\,[\Sigma\psi_i\, du_i\,,\ \Sigma\psi_i\, Du_i]\,.$$

2° se $\Phi = 0$; $\Psi' \gtrless 0$

$$(5) \qquad (\Sigma\psi_i\, du_i)' = -\frac{H}{\Psi'}\,[\Sigma\psi_i\, du_i\,,\ \Sigma a_{irs}\,\psi^r\,\psi^s\, du_i]\,,$$

$$(5)_{\text{bis}} \quad (\Sigma a_{irs}\,\psi^r\,\psi^s\, du_i)' = -\left(1 + 2\frac{\Theta'}{\Psi'}\right)[\Sigma\psi_i\, du_i\,,\,\Sigma a_{irs}\,\psi^r\,\psi^s\, du_i]\,.$$

Infatti, da (3) si deduce

$$(\Sigma\psi_i\, du_i)' = \varepsilon\sqrt{|A|}\,\Sigma\vartheta^{hl}\,\psi_{ik}\,[du\,,\,dv] =$$

$$= -\varepsilon\sqrt{|A|}\,H\,[du\,,\,dv]\,,$$

(*) Cfr. p. es. GOURSAT *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 17.

$$(\Sigma \psi_i Du_i)' = (\Sigma \vartheta_{ri} \psi^r du_i)' = \varepsilon \sqrt{|A|} \Sigma \vartheta^{ki} \vartheta_{ri} a^{rs} \psi_{sk} [du, dv] =$$

$$= -\sqrt{|A|} \Sigma a^{rs} \psi_{rs} [du, dv] = 3\sqrt{|A|} K [du, dv],$$

e basta ricordare la (2) $_{\text{bis}}$ per dedurne le (4) e (4) $_{\text{bis}}$, e la (2) $_{\text{ter}}$ per dedurre la (5). Similmente si deduce da (3)

$$(\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i)' = \varepsilon \sqrt{|A|} \Sigma \vartheta^{ki} a_{irsk} \psi^r \psi^s [du, dv] +$$

$$+ 2\varepsilon \sqrt{|A|} \Sigma \vartheta^{ki} a_i^{rs} \psi_r \psi_{sk} [du, dv]$$

cosicchè, ricordando la (3) $_{\text{ter}}$ del § 57 e la (1) del § 58

$$(\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s du_i)' = -\varepsilon \sqrt{|A|} \Psi' + 2\Theta') [du, dv].$$

Osservando la (2) $_{\text{ter}}$ si ricava la (5) $_{\text{bis}}$.

B) Un lemma.

Se $\Sigma \alpha_i du_i$ *e* $\Sigma \beta_i du_i$ *sono due forme differenziali lineari linearmente indipendenti nelle variabili* u, v, *e* λ *è una funzione qualunque di* u, v *ma non costante, e se nelle equazioni*

$$(\Sigma \alpha_i du_i)' = A [\Sigma \alpha_i du_i, \Sigma \beta_i du_i],$$

$$(\Sigma \beta_i du_i)' = B [\Sigma \alpha_i du_i, \Sigma \beta_i du_i],$$

$$d\lambda = C \Sigma \alpha_i du_i + D \Sigma \beta_i du_i$$

le A, B, C, D *sono funzioni della sola* λ, *si può con quadrature determinare un fattore integrante per* $\Sigma \alpha_i du_i$ *e per* $\Sigma \beta_i du_i$, *più generalmente per* $\Lambda_1 \Sigma \alpha_i du_i + \Lambda_2 \Sigma \beta_i du_i$, Λ_1 *e* Λ_2 *essendo funzioni qualunque della sola* λ; tal fattore integrante *è funzione della sola* λ.

Basta provare l'esistenza di un fattore integrante per $\Sigma \alpha_i du_i$ (*). Ora da (3) si ricava, se ρ è funzione di λ,

---

(*) Se p. es. $\Lambda_1 \gtrless 0$, le condizioni dell' enunciato restano soddisfatte se introduciamo la forma $\Lambda_1 \Sigma \alpha_i du_i + \Lambda_2 \Sigma \beta_i du_i$ al posto di $\Sigma \alpha_i du_i$.

$$(\rho\Sigma\alpha_i\,du_i)' = \rho(\Sigma\alpha_i\,du_i)' + [\Sigma\alpha_i\,du_i\,,\,d\rho] =$$

$$= \left(\rho A + D\frac{d\rho}{d\lambda}\right)[\Sigma\alpha_i\,du_i\,,\,\Sigma\beta_i\,du_i].$$

Se $D \neq 0$, è pertanto

$$e^{-\int\frac{A}{D}d\lambda}\,\Sigma\alpha_i\,du_i$$

un differenziale esatto; se invece $D = 0$,

$$C\Sigma\alpha_i\,du_i = d\lambda$$

è pure un differenziale esatto.

C) Il teorema fondamentale.

Se tutte le quantità (1) *sono funzioni di una sola variabile* $\lambda = \lambda(\mathrm{u}\,,\,\mathrm{v})$, *e non è simultaneamente* $\Phi = \mathrm{cost.}$, $\Psi = \mathrm{cost.}$, *condizione necessaria e sufficiente per la trasformabilità di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ *è, che*

$$\overline{\Phi}\,,\;\overline{\Psi}\,,\;\overline{\Psi}',\;\overline{H}\,,\;\overline{K}\,,\;\overline{\Theta}\,,\;\overline{\Theta}'$$

siano le stesse funzioni di una sola variabile $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\overline{\mathrm{u}}\,,\,\overline{\mathrm{v}})$ *come le* (1) *di* λ. *La trasformazione di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ *può farsi in* ∞^1 *modi che si trovano con quadrature.*

È evidente che le condizioni dell'enunciato sono necessarie. Per dimostrare che son sufficienti, e per trovare effettivamente le trasformazioni di $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$, distinguiamo due casi.

1° caso: $\Phi \gtrless 0$. Posto

$$\Sigma\alpha_i\,du_i = \Sigma\psi_i\,du_i\,,\;\Sigma\beta_i\,du_i = \Sigma\psi_i\,Du_i\,,$$

$$\lambda = \Phi \quad \text{o se} \quad \Phi = \mathrm{cost.},\; \lambda = \Psi$$

le condizioni del *lemma* son soddisfatte, in virtù delle (4) e (4)$_{\text{bis}}$ e della (2) del § 60. Il lemma ci dice pertanto che possiamo con quadrature determinare due funzioni di $u\,,\,v$, siano U e V, tali che

$$dU = \rho\Sigma\psi_i\,du_i \quad , \quad dV = \sigma\Sigma\psi_i\,Du_i\,,$$

ρ e σ essendo funzioni di λ. Analogamente si vede che possiamo con quadrature determinare due funzioni di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, siano $\bar{U}$ e $\bar{V}$, tali che

$$d\bar{U} = \bar{\rho}\Sigma\bar{\psi}_i d\bar{u}_i \quad , \quad d\bar{V} = \bar{\sigma}\Sigma\bar{\psi}_i D\bar{u}_i\ ;$$

inoltre $\bar{\rho}$ e $\bar{\sigma}$ sono le stesse funzioni di $\bar{\lambda}$ come ρ e σ di λ. Per fissare le idee, supponiamo $D \gtrless 0$ (*).

La trasformazione cercata non può essere contenuta che fra le (**)

$$\text{(6)} \qquad \bar{\lambda} = \lambda \quad , \quad \bar{U} = U + a\,, \quad a \text{ costante arbitraria.}$$

E, comunque si scelga a, la trasformazione scritta porta $\varphi_3 : \varphi_2$ in $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2$. Per vederlo, introduciamo λ e $U + a$ al posto di u e v (e $\bar{\lambda}$ e $\bar{U}$ al posto di $\bar{u}$ e $\bar{v}$) come nuove variabili indipendenti. È (cfr. la (7) del § 61)

$$\lambda_{\rm I} = C\ ,\ \lambda_{\rm II} = D\ ,\ (U+a)_{\rm I} = \rho\ ,\ (U+a)_{\rm II} = 0\,,$$

$$\bar{\lambda}_{\rm I} = \bar{C}\,,\ \bar{\lambda}_{\rm II} = \bar{D}\,,\ \bar{U}_{\rm I} = \bar{\rho}\,,\ \bar{U}_{\rm II} = 0\,;$$

inoltre Φ, Ψ, Ψ', C, D sono funzioni della sola λ, e $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$, $\bar{\Psi}'$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ sono *le stesse* funzioni di $\bar{\lambda}$. Le equazioni (8) e (9) del § 61 mostrano quindi immediatamente che, introdotte le nuove variabili sopra nominate, sarà $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2 = \varphi_3 : \varphi_2$ in virtù delle (6), *c. d. d.*

2° caso: $\Phi = 0$. Scegliendo

$$\Sigma\alpha_i\, du_i = \Sigma\psi_i\, du_i\ ,\quad \Sigma\beta_i\, du_i = \Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s\, du_i\ ,\quad \lambda = \Psi\,,$$

le ipotesi del *lemma* sono soddisfatte per le (5) e (5)$_{\rm bis}$ e per la (4) del § 60. Il lemma dice che si possono con quadrature determinare U e V in modo che sia

$$dU = \rho\Sigma\psi_i\, du_i \quad , \quad dV = \sigma\Sigma a_{irs}\psi^r\psi^s\, du_i\,,$$

ρ e σ essendo funzioni della sola λ. E si continua come sopra, cosicchè possiamo lasciare al lettore il resto della dimostrazione (***).

(*) Se $D = 0$, è $C \gtrless 0$ (altrimenti λ sarebbe costante, contro l'ipotesi), e si procede analogamente.

(**) Si osservi che λ e U sono funzioni indipendenti di u, v, essendo $\rho D \gtrless 0$.

(***) Il lettore vedrà facilmente che il lemma si può usare a determinare con quadrature le linee asintotiche, le linee di Darboux o di Segre, le linee integrali di $\Sigma\psi_i\, du_i = 0$, ecc.

Corollario: *Se le* (1) *sono funzioni di una sola variabile, ma* Φ *e* Ψ *non sono simultaneamente costanti, l'elemento lineare proiettivo ammette un gruppo continuo di deformazioni proiettive in sè.* Basta prendere, nel teorema che precede, $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ identico a $\varphi_3 : \varphi_2$. Da ciò risulta che non possono esistere due invarianti funzioni indipendenti di u, v, come abbiamo già annunciato a pag. 322.

Resta il caso in cui Φ e Ψ sono costanti. Allora vale il seguente teorema semplicissimo:

Se Φ *e* Ψ *sono costanti, condizioni necessarie e sufficienti per la trasformabilità di* $\varphi_3 : \varphi_2$ *in* $\overline{\varphi}_3 : \overline{\varphi}_2$ *sono*

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon \quad , \quad \overline{\Phi} = \Phi \quad , \quad \overline{\Psi} = \Psi \, .$$

La trasformazione può farsi in ∞^2 *modi che si trovano con quadrature.*

È evidente che le condizioni dette sono necessarie; per dimostrare che sono sufficienti, distinguiamo tre casi.

1° caso: $\Phi \gtrless 0$. Le (4) e (4)$_{\text{bis}}$ si scrivono, ricordando il teorema del § 60 *D*,

$$(\Sigma \psi_i \, du_i)' = 0 \, , \quad (\Sigma \psi_i \, Du_i)' = - \frac{\varepsilon}{3} [\Sigma \psi_i \, du_i \, \Sigma \psi_i \, Du_i] .$$

La prima dice che

$$\Sigma \psi_i \, du_i = - 3 \varepsilon \frac{dU}{U}$$

è un differenziale esatto; e dalla seconda si ottiene tosto

$$(U \Sigma \psi_i \, Du_i)' = 0 \, ,$$

cosicchè anche

$$U \Sigma \psi_i \, Du_i = dV$$

è un differenziale esatto. Introdotte U e V a nuove variabili indipendenti (*), si trova senza difficoltà, ricorrendo alle formole (8) e (9) del § 61

$$\varphi_2 = \frac{1}{9 \, U^2 \, \Phi} (dU^2 - 9 \varepsilon dV^2) \, ,$$

(*) Si vede subito che esse sono funzioni indipendenti di u e v.

$$\varphi_3 = \frac{\varepsilon}{27\, U^3\, \Phi^3} (\Psi\, dU^3 + 3\,\Psi'\, dU^2\, dV +$$

$$+ 9\,\Psi\, dU\, dV^2 + 27\,\Psi'\, dV^3).$$

Introducendo in modo analogo nuove variabili indipendenti al posto di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, si vede subito che ponendo

$$\overline{U} = U \;,\; \overline{V} = \pm V \;(^*)$$

$\varphi_3 : \varphi_2$ si trasforma in $\bar{\varphi}_3 : \bar{\varphi}_2$. Ora U e V non sono determinate che a meno di sostituzioni della forma

$$aU \quad , \quad aV + b \;,$$

con a, b costanti $\left(a \gtrless 0\right)$ cosicchè risulta provato tutto ciò che si è enunciato.

2° caso: $\Phi = 0$, $\Psi \gtrless 0$. Osservando di nuovo le (5) del § 60 D, le (5) e $(5)_{bis}$ dànno

$$(\Sigma \psi_i\, du_i)' = 0, \quad (\Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s\, du_i)' = -\frac{1}{3}\, [\Sigma \psi_i\, du_i \;,\; \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s\, du_i\,].$$

Si può quindi porre

$$\Sigma \psi_i\, du_i = -\, 3\, \frac{dU}{U} \;,\quad U \Sigma a_{irs} \psi^r \psi^s\, du_i = dV.$$

Introducendo U e V come nuove variabili indipendenti, il che il lettore faccia come esercizio, si giunge facilmente alla dimostrazione dell' enunciato.

3° caso: $\Phi = \Psi = 0$, ossia $\psi_1 = \psi_2 = 0$, quindi in particolare $K = 0$. La curvatura di φ_2 essendo nulla, si possono, come ben si sa, introdurre con quadrature nuove variabili indipendenti in modo che i nuovi coefficienti di φ_2 siano costanti.

La (1) del § 58 mostra che anche i nuovi coefficienti di φ_3 sono costanti. Ed è un facile teorema d'algebra che due coppie di tali forme si possono trasformare l' una nell' altra mediante una sostituzione lineare a coefficienti costanti in du, dv, a cui corrispondono ∞^2 trasformazioni in u, v.

Corollario: *Se Φ e Ψ sono costanti, l' elemento lineare proiettivo $\varphi_3 : \varphi_2$ ammette ∞^2 trasformazioni in sè.*

(*) $\pm$ secondo che $\overline{\Psi}' = \Psi'$ oppure $\overline{\Psi}' = -\,\Psi'$.

Quadro di formole per coordinate asintotiche.

$$a_{11} = a_{22} = a_{112} = a_{122} = 0 \,, \quad \omega = \operatorname{sgn} a_{12} \,,$$

$$a_{111} = a_{12}\beta \quad , \quad a_{222} = a_{12}\gamma \,.$$

$$F_2 = 2\,a_{12}\,du\,dv \quad , \quad F_3 = a_{12}\,(\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

$$J = -\frac{\beta\gamma}{a_{12}}.$$

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 0 \quad , \quad \vartheta_{12} = -\vartheta_{21} = |a_{12}| \,,$$

$$\vartheta^{11} = \vartheta^{22} = 0 \quad , \quad \vartheta^{12} = -\vartheta^{21} = -\frac{1}{|a_{12}|}.$$

$$Du = -\omega\,du \quad , \quad Dv = \omega\,dv \,,$$

$$D\varphi = -\omega\,\varphi_1\,du + \omega\,\varphi_2\,dv \,.$$

$$b_{112} = b_{122} = 0 \,,$$

$$b_{111} = -\omega\,a_{12}\beta \quad , \quad b_{222} = \omega\,a_{12}\gamma \,,$$

$$F'_3 = \omega\,a_{12}\,(-\beta du^3 + \gamma dv^3) \,.$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log(\gamma\,a_{12}^3 : \beta)}{\partial u} \quad , \quad \psi_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log(\beta\,a_{12}^3 : \gamma)}{\partial v} \,.$$

In coordinate normali:

$$a_{12} = \beta\gamma \quad , \quad a_{111} = \beta^2\gamma \quad , \quad a_{222} = \beta\gamma^2 \,,$$

$$\omega = \operatorname{sgn}\beta\gamma \quad , \quad b_{111} = -\omega\beta^2\gamma \quad , \quad b_{222} = \omega\beta\gamma^2.$$

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv \quad , \quad \varphi_3 = \beta\gamma\,(\beta du + \gamma dv) \,,$$

$$\varphi'_3 = \omega\beta\gamma\,(-\beta du + \gamma dv).$$

$$\psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \quad , \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}.$$

$$\Phi = \frac{2}{\beta\gamma} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v},$$

$$\Psi = \frac{1}{\beta^2\gamma}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right)^3 + \frac{1}{\beta\gamma^2}\left(\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right)^3,$$

$$\Psi' = \frac{\omega}{\beta^2\gamma}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right)^3 - \frac{\omega}{\beta\gamma^2}\left(\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right)^3.$$

$$K = -\frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v},$$

$$H = \frac{1}{|\beta\gamma|} \frac{\partial^2 \log (\beta : \gamma)}{\partial u\, \partial v},$$

$$\begin{aligned}\Theta = {} & \frac{1}{\beta^2\gamma} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) \\ & + \frac{1}{\beta\gamma^2} \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log \beta^2\gamma}{\partial v^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta' = {} & \frac{\omega}{\beta^2\gamma} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) \\ & - \frac{\omega}{\beta\gamma^2} \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log \beta^2\gamma}{\partial v^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right).\end{aligned}$$

Capitolo VII.

CONDIZIONI D'INTEGRABILITÀ E SUPERFICIE PROIETTIVAMENTE APPLICABILI

---

§ 63. — Condizioni d'integrabilità delle equazioni fondamentali.

A) Equazioni preliminari.

Al Cap. II § 14 *A)* e *C)* abbiamo visto che, fissato comunque il fattore arbitrario delle coordinate omogenee x del punto mobile di una superficie S non sviluppabile, valgono le *equazioni fondamentali*

$$x_{rs} = \Sigma a^i_{rs} x_i + \breve{a}_{rs} X + p_{rs} x, \tag{1}$$

$$X_i = l_i x + \Sigma m^r_i x_r, \tag{1 bis}$$

e le formole duali

$$\xi_{rs} = -\Sigma a^i_{rs} \xi_i + a_{rs} \Xi + \pi_{rs} \xi, \tag{2}$$

$$\Xi_i = \lambda_i \xi + \Sigma \mu^r_i \xi_r. \tag{2 bis}$$

Di più, abbiamo trovato al Cap. II § 14 *B)* e *C)* e § 16 *C)* alcune relazioni fra i coefficienti, e precisamente le

$$
(3)\quad
\begin{cases}
\Sigma a^{rs} a_{rsi} = 0 , \\
\Sigma a^{rs} p_{rs} = \Sigma a^{rs} \pi_{rs} = 0 , \\
p_{rs} = p_{sr} ,\ \pi_{rs} = \pi_{sr} ,\ m_{rs} = m_{sr} ,\ \mu_{rs} = \mu_{sr} , \\
m_{rs} = \pi_{rs} - (K + J)\, a_{rs} ,\ \mu_{rs} = p_{rs} - (K + J)\, a_{rs} , \\
l_i + \lambda_i + K_i + J_i = 0 , \\
\pi_{rs} - p_{rs} = \Sigma a_{rs\overset{i}{-}i} \ (*).
\end{cases}
$$

Queste equazioni esprimono, in particolare, i coefficienti delle (2) e $(2)_{\text{bis}}$ mediante quelli di (1) e $(1)_{\text{bis}}$: basta adunque occuparci delle (1) e $(1)_{\text{bis}}$. Già al luogo citato abbiamo osservato che, derivando covariantemente le (1), possiamo ottenere i valori dei coefficienti di $(1)_{\text{bis}}$ espressi mediante le a_{rs}, a_{rst}, p_{rs}: ora faremo questo calcolo. Del resto i valori delle m_{rs} si trovano già dalle (3), cosicchè soltanto le espressioni di l_i saranno nuove. Deriviamo adunque covariantemente le (1). Si ottiene, tenendo conto delle (1) stesse,

$$
x_{rst} = \Sigma x^i \left[a_{rsit} + \sum_k a^k_{rs} a_{ikt} + p_{rs} a_{it} + a_{rs} m_{ti}\right] +
$$
$$
+ a_{rst} X + \left(\sum_i a^i_{rs} p_{it} + a_{rs} l_t + p_{rst}\right) x .
$$

Se ne deduce, ricordando che $\vartheta^{st} + \vartheta^{ts} = 0$,

$$
\Sigma \vartheta^{st} x_{rst} = \Sigma x^i \left[\Sigma \vartheta^{st} a_{rsit} + \Sigma \vartheta^{st} a^k_{rs} a_{ikt} +\right.
$$
$$
\left. + \Sigma \vartheta^{st} a_{it} p_{rs} + \Sigma \vartheta^{st} a_{rs} m_{ti}\right] +
$$
$$
+ \left(\Sigma \vartheta^{st} a^i_{rs} p_{it} + \Sigma \vartheta^{st} a_{rs} l_t + \Sigma \vartheta^{st} p_{rst}\right) x .
$$

Ma dal Cap. VI, § 57, $(3)_{\text{ter}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ si ha

$$
\Sigma \vartheta^{st} a^i_{rs} p_{it} = \Sigma b^{it}_r p_{it} ,\ \Sigma \vartheta^{st} a^k_{rs} a_{ikt} = \Sigma b^{it}_r a_{ikt} = J \vartheta_{rk} ,
$$

(*) Cfr. Cap. VI, § 58, (3). Si ricordi che $\Sigma a_{rs\overset{i}{-}i} = \Sigma A_{ik} a_{rski}$.

e dal Cap. II § 1 E)

$$x_{112} - x_{121} = -(12\,,\,12)\,x^2 = -KAx^2,$$

$$x_{212} - x_{221} = (12\,,\,12)\,x^1 = KAx^1,$$

ossia

$$\Sigma\,\vartheta^{st}\,x_{rst} = K\,\Sigma\,\vartheta_{ir}\,x^i. \tag{4}$$

Dunque

$$\Sigma\,x^h\,[\Sigma\,\vartheta^{st}\,a_{rsit} + (K+J)\,\vartheta_{ri} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,(a_{it}\,p_{rs} + a_{rs}\,m_{ti})] +$$

$$+ (\Sigma\,b_r^{it}\,p_{it} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,a_{rs}\,l_t + \Sigma\,\vartheta^{st}\,p_{rst})\,x = 0\,.$$

I punti x, x^1, x^2 essendo linearmente indipendenti, seguono le relazioni

$$\Sigma\,\vartheta^{st}\,a_{rsit} + (K+J)\,\vartheta_{ri} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,(a_{ti}\,p_{rs} + a_{rs}\,m_{ti}) = 0\,, \tag{5}$$

$$\Sigma\,b_r^{it}\,p_{it} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,(a_{rs}\,l_t + p_{rst}) = 0\,. \tag{6}$$

B) Trasformazione delle (5).

Le equazioni ora dedotte si possono trasformare. Cominciamo con le (5): noi non ne dedurremo niente di nuovo, ma ritroveremo soltanto una parte delle (3), e precisamente le

$$m_{rs} = m_{sr}\,,\ \Sigma\,a^{rs}\,\pi_{rs} = 0\,,\ \pi_{rs} - p_{rs} = \Sigma\,a_{rs}{}_{-l}^{\,i}\,.$$

Moltiplicando la (5) per a_{ir} e sommando rispetto a i ed r, si ottiene, osservando che $\Sigma\,a^{ir}\,\vartheta_{ri} = \Sigma\,a^{ir}\,a_{rsit} = 0$,

$$\Sigma\,\vartheta^{st}\,a^{ir}\,a_{ti}\,p_{rs} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,a^{ir}\,a_{rs}\,m_{ti} = 0\,,$$

ossia

$$\Sigma\,\vartheta^{st}\,p_{ts} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,m_{ts} = 0.$$

Essendo $p_{12} = p_{21}$, risulta confermato che $m_{12} = m_{21}$. Moltiplicando invece la (5) per ϑ^{ir} ed osservando che $\Sigma\,\vartheta^{ir}\,a_{rsit} = 0$, si ottiene

$$2\,\varepsilon(K+J) + \Sigma\,\vartheta^{ir}\,\vartheta^{st}\,a_{ti}\,p_{rs} + \Sigma\,\vartheta^{ir}\,\vartheta^{st}\,a_{rs}\,m_{ti} = 0\,,$$

oppure, scambiando nel terzo termine i con r ed s con t,

$$2\varepsilon(K+J)+\Sigma\vartheta^{ir}\vartheta^{st}a_{ti}(p_{rs}+m_{rs})=0.$$

Ora dal Cap. VI, § 56, (2) e (4) si deduce

$$\Sigma\vartheta^{ir}\vartheta^{st}a_{ti}=\Sigma\vartheta^{ir}\vartheta_{hi}a^{hs}=\varepsilon a^{rs},$$

cosicchè risulta

$$2(K+J)=-\Sigma a^{rs}(p_{rs}+m_{rs})=-\Sigma a^{rs}m_{rs}.$$

Posto adunque

$$m_{rs}=\pi_{rs}-(K+J)a_{rs} \text{ (*)}$$

risulta confermato che $\Sigma a^{rs}\pi_{rs}=0$.

Introducendo le π_{rs} al posto delle m_{rs} nelle (5), si ottiene, osservando che $\Sigma\vartheta^{st}a_{rs}a_{ti}=\vartheta_{ri}$,

$$\Sigma\vartheta^{st}a_{rsit}+\Sigma\vartheta^{st}a_{ti}p_{rs}+\Sigma\vartheta^{st}a_{rs}\pi_{ti}=0.$$

Dimostriamo che quest'equazione equivale all'ultima delle (3). A tale scopo moltiplichiamola per $du_i\,Du_r$. Ricordando le (3) e $(3)_{\text{quater}}$ del Cap. VI § 56 risulta

$$\Sigma\vartheta^{st}a_{rsit}\,du_i\,Du_r+\Sigma p_{rs}\,Du_r\,Du_s-\varepsilon\Sigma\pi_{ti}\,du_t\,du_i\,.$$

E basta, per giungere al risultato voluto, osservare che

$$\Sigma p_{rs}\,Du_r\,Du_s=\varepsilon\Sigma p_{rs}\,du_r\,du_s \text{ (**)}.$$

C) Calcolo delle l_i.

Invece dalla (6), come abbiamo enunciato, possiamo trarre il valore delle l_i. Moltiplicandola per $a^{rh}\vartheta_{h\lambda}$ e sommando rispetto a h e r si deduce

$$\Sigma\vartheta_{hk}b^{hit}p_{ti}+\Sigma\vartheta^{st}\vartheta_{sk}l_t+\Sigma\vartheta^{st}\vartheta_{hk}a^{rh}p_{rst}=0,$$

donde la formola cercata

$$l_i=\Sigma a_i^{rs}p_{rs}-\varepsilon\Sigma\vartheta_{ik}\vartheta^{st}a^{kr}p_{rst}\,. \tag{7}$$

(*) Sappiamo che le π_{rs} così definite son quelle che compaiono nelle (2).

(**) Cfr. Cap. VI, § 56, (6), e § 58, (3) e $(3)_{\text{bis}}$.

Essendo $a_i^{rs} = \Sigma \vartheta^{hr} b_{ih}^s = \varepsilon \Sigma \vartheta^{hr} \vartheta^{ks} a_{ihk}$, possiamo scriverla anche

$$l_1 = -\frac{1}{A}[a_{111} p_{22} - 2a_{112} p_{12} + a_{122} p_{11} + \\ + a_{12}(p_{112} - p_{121}) - a_{11}(p_{122} - p_{221})],$$

(7) bis

$$l_2 = -\frac{1}{A}[a_{112} p_{22} - 2a_{122} p_{12} + a_{222} p_{11} + \\ + a_{22}(p_{112} - p_{121}) - a_{12}(p_{122} - p_{221})].$$

Naturalmente, il calcolo correlativo conduce alle

(7) ter $$\lambda_i = -\Sigma a_i^{rs} \pi_{rs} - \varepsilon \Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a^{kr} \pi_{rst}.$$

Il confronto di (7) e (7) ter conduce alla formola

(8) $$l_i - \lambda_i = \Sigma a_i^{rs}(p_{rs} + \pi_{rs}) - \Sigma a_{i-rs}^{rs} \ (*).$$

come ora dimostreremo.

Sottraendo la (7) ter dalla (7) otteniamo dapprima

$$l_i - \lambda_i = \Sigma a_i^{rs}(p_{rs} + \pi_{rs}) - \varepsilon \Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a^{kr}(p_{rst} - \pi_{rst})$$

sicchè bisogna provare soltanto che

$$\Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a^{kr}(p_{rst} - \pi_{rst}) = \varepsilon \Sigma a_{i-rs}^{rs}.$$

Ora, derivando covariantemente l'ultima delle (3), otteniamo

$$p_{rst} - \pi_{rst} = -\Sigma a_{rs-pt}^{p} = -\Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a_{s-pt}^{kp}$$

cosicchè

$$\Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a^{kr}(p_{rst} - \pi_{rst}) = -\Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a^{kr} a_{rs-pt}^{p}.$$

(*) Si ricordi che $\Sigma a_{i-rs}^{rs} = \Sigma A_{rh} A_{sk} a_{ihkrs}$.

Ora dalle $(3)_{\text{ter}}$ e $(3)_{\text{bis}}$ del Cap. VI § 57 si deduce

$$-\Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a^{kp}_{s-pt} = -\Sigma \vartheta_{ik} b^{tkp}_{\ -pt} = \varepsilon \Sigma a^{pt}_{t-pt}, .$$

sicchè

$$\Sigma \vartheta_{ik} \vartheta^{st} a^{kr} (p_{rst} - \pi_{rst}) = \varepsilon \Sigma a^{pt}_{t-pt},$$

che è la formola che si voleva dimostrare.

§ 64. — Continuazione.

A) Condizioni d'integrabilità delle $(1)_{\text{bis}}$.

Al § 63 abbiamo richiamato le equazioni fondamentali (1) e $(1)_{\text{bis}}$ e le relazioni (3) fra i coefficienti di esse a cui abbiamo aggiunto le formole (7) e (8) che dànno le l_i, deducendole dalle condizioni d'integrabilità delle (1). Per completare lo studio, dovremo ancora soltanto aggiungere le equazioni che si traggono dalle $(1)_{\text{bis}}$. A questo studio qui ci rivolgiamo scrivendo che $X_{ik} = X_{ki}$, ossia $\Sigma \vartheta^{ik} X_{ik} = 0$. Derivando covariantemente le (2) si trova tenendo conto delle (1)

$$X_{ik} = l_{ik} x + l_i x_k + \Sigma m_{irk} x^r +$$
$$+ \Sigma m_i^r (\Sigma a_{rks} x^s + a_{rk} X + p_{rk} x)$$

ossia

$$X_{ik} = \Sigma x^r (l_i a_{rk} + m_{irk} + \Sigma a^s_{rk} m_{is}) +$$
$$+ (l_{ik} + \Sigma m_i^r p_{rk}) x + m_{ik} X.$$

Se ne deduce

$$\Sigma \vartheta^{ik} X_{ik} = \Sigma x^r (\Sigma \vartheta^{ik} a_{rk} l_i + \Sigma \vartheta^{ik} m_{irk} - \Sigma b_r^{is} m_{is}) +$$
$$+ (\Sigma \vartheta^{ik} l_{ik} + \Sigma \vartheta^{ik} m_i^r p_{rk}) x.$$

Deve essere $\Sigma \vartheta^{ik} X_{ik} = 0$. Le relazioni che ci rimangono da scrivere sono pertanto

$$(1) \qquad \Sigma \vartheta^{ik} a_{rk} l_i + \Sigma \vartheta^{ik} m_{irk} - \Sigma b_r^{is} m_{is} = 0 \,,$$

$$(2) \qquad \Sigma \vartheta^{ik} l_{ik} + \Sigma \vartheta^{ik} a^{rs} m_{ir} p_{ks} = 0 \,.$$

B) **Studio delle (1).**

Dimostriamo che la (1) non dà niente di nuovo, ma soltanto permette di ritrovare la penultima delle (3) del § 63.

Dalle (6) del § 63 si deduce

$$\Sigma \vartheta^{ik} a_{rk} l_i = \Sigma b_r^{is} p_{is} + \Sigma \vartheta^{ik} p_{rik} \,.$$

Sostituendo nella (1), si ottiene

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \Sigma \vartheta^{ik} (p_{rik} + m_{rik}) + \Sigma b_r^{ik} (p_{ik} - m_{ik}) = 0.$$

Dalla

$$m_{ri} = \pi_{ri} - (K + J)\, a_{ri}$$

si deduce

$$m_{rik} = \pi_{rik} - (K_k + J_k)\, a_{ri} \,,$$

cosicchè la $(1)_{\text{bis}}$ diventa, ricordando che $\Sigma b_r^{ik} a_{ik} = 0$,

$$(1)_{\text{ter}} \qquad \Sigma \vartheta^{ik} (p_{rik} + \pi_{rik}) - \Sigma \vartheta^{ik} a_{ri} (K_k + J_k) + \Sigma b_r^{ik} (p_{ik} - \pi_{ik}) = 0 \,.$$

Moltiplicando per $a^{rs} \vartheta_{st}$ e sommando rispetto ad s, si deduce

$$\Sigma \vartheta^{ik} \vartheta_{st} a^{rs} (p_{rik} + \pi_{rik}) - \Sigma \vartheta^{ik} \vartheta_{it} (K_k + J_k) + \varepsilon \Sigma a_t^{ik} (p_{ik} - \pi_{ik}) = 0 \,,$$

ossia

$$(1)_{\text{quater}} \qquad K_t + J_t = - \varepsilon \Sigma \vartheta^{ik} \vartheta_{st} a^{rs} (p_{rik} + \pi_{rik}) - \Sigma a_t^{ik} (p_{ik} - \pi_{ik}) .$$

Ora dalle (7) e $(7)_{\text{ter}}$ si deduce

$$l_t + \lambda_t = \Sigma a_t^{ik} (p_{ik} - \pi_{ik}) + \varepsilon \Sigma \vartheta_{tk} \vartheta^{st} a^{ir} (p_{rst} + \pi_{rst}) .$$

Eseguendo nell'ultimo termine la sostituzione $\begin{pmatrix} i & k & r & s & t \\ s & t & r & i & k \end{pmatrix}$ e confrontando con $(1)_{\text{ter}}$ si ritrova la penultima delle (3) del § 63, come abbiamo enunciato.

C) Studio della (2).

Resta infine la (2); noi dimostreremo che essa equivale alla

$$(3)\qquad \Sigma b^{rst}(p_{rst}+\pi_{rst})+2\,\Sigma b^{rst}_{-t}(p_{rs}+\pi_{rs})=\Sigma b^{rst}_{-rst}\,.$$

Sostituendo nella (2) π_{ir} al posto di m_{ir}, essa diventa (*)

$$(2)_{\text{bis}}\qquad \Sigma\vartheta^{ik}\,l_{ik}+\Sigma\vartheta^{ik}\,a^{rs}\,p_{ks}\,\pi_{ir}=0 \;(^{**})\,.$$

Per la penultima delle (3) del § 63 $\Sigma(l_i+\lambda_i)\,du_i=-dK-dJ$ è un differenziale esatto, cosicchè

$$\Sigma\vartheta^{ik}\,l_{ik}=-\Sigma\vartheta^{ik}\,\lambda_{ik}=\frac{1}{2}\,\Sigma\vartheta^{ik}(l_{ik}-\lambda_{ik})$$

e la $(2)_{\text{bis}}$ può scriversi

$$(2)_{\text{ter}}\qquad \Sigma\vartheta^{ik}(l_{ik}-\lambda_{ik})=-\Sigma\vartheta^{ik}\,a^{rs}(p_{ir}+\pi_{ir})(p_{ks}-\pi_{ks})\,.$$

Ora dall'ultima delle (3) del § 63 si deduce

$$\Sigma\vartheta^{ik}\,a^{rs}(p_{ks}-\pi_{ks})=-\Sigma\vartheta^{ik}\,a^{rs}\,a_{ks-p}^{\;p}=-\Sigma\vartheta^{ik}\,a_{k-p}^{rp}\,.$$

e ricordando la formola $(3)_{\text{ter}}$ del Cap. VI § 57,

$$\Sigma(p_{ks}-\pi_{ks})\,\vartheta^{ik}\,a^{rs}=\Sigma b^{irs}_{-s}\,,$$

e sostituendo nella $(2)_{\text{ter}}$

$$(2)_{\text{quater}}\qquad \Sigma\vartheta^{ik}(l_{ik}-\lambda_{ik})=-\Sigma b^{irs}_{-s}(p_{ir}+\pi_{ir})\,.$$

Derivando covariantemente la (8) del § 63 si deduce

$$l_{ik}-\lambda_{ik}=\Sigma a_{i-k}^{rs}(p_{rs}+\pi_{rs})+\Sigma a_i^{rs}(p_{rsk}+\pi_{rsk})-\Sigma a_{i-rsk}^{rs}$$

(*) Si osservi che $\Sigma\vartheta^{ik}\,a^{rs}\,a_{ir}\,p_{ks}=\Sigma\vartheta^{ik}\,p_{ik}=0$.

(**) Ciò si potrebbe scrivere anche

$$l_{12}-l_{21}=\frac{1}{A}\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{22}\\ \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{22}\\ a_{11} & a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

cosicchè

$$\Sigma \vartheta^{ik} (l_{ik} - \lambda_{ik}) = \Sigma b^{rsk}_{\underline{\ \ }h} (p_{rs} + \pi_{rs}) + \Sigma b^{rsk} (p_{rsk} + \pi_{rsk}) - \Sigma b^{rsk}_{\underline{\ \ }rsk}$$

onde, confrontando con $(2)_{\text{quater}}$, si deduce la formola cercata (3).

D) **Esame delle condizioni d'integrabilità.**

Abbiamo già trovato *tutte* le condizioni d'integrabilità delle equazioni fondamentali; esse sono le (3), (7) e $(7)_{\text{ter}}$ del § 63 e la (3) del § 64. Fra queste equazioni, ve ne sono *sei* che contengono l_1, l_2, λ_1, λ_2: la penultima delle (3), la (7) e la $(7)_{\text{ter}}$ (con $i = 1, 2$).

Noi possiamo *definire* le l_i e λ_i mediante quattro di esse o quattro combinazioni di esse, p. es. mediante la penultima riga delle (3) del § 63 e le (8) del § 63 ed otteniamo pertanto ancora due equazioni che non contengono più nè l_i nè λ_i. Esse sono evidentemente le $(1)_{\text{ter}}$ che possiamo mettere sotto la forma più semplice

$$(4) \qquad \Sigma \vartheta^{ik} (p_{rik} + \pi_{rik}) = \Sigma \vartheta^{ik} a_{ri} (K_k + J_k) + \Sigma b_r^{ik} a_{ik\underline{\ }s}^{\ s} \ (^*).$$

Osserviamo ancora che nelle (3) e (4) compaiono i coefficienti

$$q_{rs} = p_{rs} + \pi_{rs}$$

della forma

$$\Sigma (p_{rs} + \pi_{rs}) \, du_r \, du_s = P + \Pi$$

già considerata al Cap. II § 14 *B)*.

(*) Infatti, dall'ultima delle (3) del § 63 si deduce

$$\Sigma b_r^{ik} (p_{ik} - \pi_{ik}) = - \Sigma b_r^{ik} a_{ik-s}$$

onde sostituendo nella $(1)_{\text{ter}}$ si ricava la (4).

E) **Teorema riassuntivo.**

Prima di procedere, sarà opportuno enunciare un teorema che riassume i risultati finora ottenuti:

Una superficie S *non sviluppabile, ed il fattore arbitrariamente prescritto delle coordinate omogenee dei punti di essa sono individuati, a meno di una sostituzione lineare unimodulare, a coefficienti costanti, conoscendo le tre forme differenziali intrinseche*

$$F_2 = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s\,, \quad F_3 = \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,,$$

$$\Sigma q_{rs}\, du_r\, du_s\,,$$

legate dalle identità (condizioni d'integrabilità) necessarie e sufficienti:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &\Sigma a^{rs} a_{rst} = 0\,, \\ &\Sigma a^{rs} q_{rs} = 0\,, \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &\Sigma \vartheta^{ik} q_{rik} = \Sigma \vartheta^{ik} a_{ri} (K_k + J_k) - \Sigma b_r^{ik} a_{ik\overset{s}{-}s}\,, \\ &\Sigma b^{rst} q_{rst} + 2 \Sigma b^{rst}_{-t}\, q_{rs} = \Sigma b^{rst}_{-rst}\,. \end{aligned}$$

Le coordinate omogenee x *dei punti di* S *si calcolano integrando il primo gruppo di equazioni fondamentali*

$$x_{rs} = \Sigma a_{rs}^i x_i + p_{rs} x + a_{rs} X\,,$$

$$X_i = l_i x + \Sigma m_i^r x_r\,,$$

sotto la condizione iniziale $(x\, x_1\, x_2\, X) = \sqrt{|A|}$.

Posto $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}} (x\, x_1\, x_2)$, *le* ξ *(coordinate dei piani tangenti di* S*), si ottengono integrando il secondo gruppo di equazioni fondamentali* (*)

(*) Naturalmente, integrato il primo gruppo (p. es.) lo è anche il secondo.

$$\xi_{rs} = -\Sigma \mathrm{a}_{rs}^{i} \xi_i + \pi_{rs} \xi + \mathrm{a}_{rs} \Xi ,$$

$$\Xi_i = \lambda_i \xi + \Sigma \mu_i^r \xi_r ,$$

sotto la condizione iniziale $(\xi \xi_1 \xi_2 \Xi) = \varepsilon \sqrt{|\mathrm{A}|}$.

I coefficienti delle equazioni fondamentali si calcolano dalle formole

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} & \mathrm{p}_{rs} + \pi_{rs} = \mathrm{q}_{rs} \quad , \quad \mathrm{p}_{rs} - \pi_{rs} = -\Sigma \mathrm{a}_{rs-i} \\ & \mathrm{m}_{rs} = \pi_{rs} - (\mathrm{K} + \mathrm{J}) \mathrm{a}_{rs} , \\ & \mu_{rs} = \mathrm{p}_{rs} - (\mathrm{K} + \mathrm{J}) \mathrm{a}_{rs} \\ & \mathrm{l}_i + \lambda_i = -(\mathrm{K}_i + \mathrm{J}_i) \\ & \mathrm{l}_i - \lambda_i = \Sigma \mathrm{a}_i^{rs} \mathrm{q}_{rs} - \Sigma \mathrm{a}_{i-rs}^{rs} . \end{aligned}$$

Il lettore confronti le formole trovate con quelle del Cap. II, § 16 *D)* relative al caso particolare di linee coordinate asintotiche.

§ 65. — Trasformazione delle equazioni trovate per superficie non rigate. Caso di coordinate normali.

A) Il caso $J \neq 0$.

Supponendo $J \neq 0$, escludendo cioè il caso di superficie rigate, possiamo mettere le equazioni trovate sotto un'altra forma. Essendo $\Sigma a^{rs} q_{rs} = 0$ possiamo porre allora

$$\text{(1)} \qquad q_{rs} = \Sigma \tau_i a_{rs}^i = \Sigma \tau^i a_{rsi}$$

introducendo così, al posto della forma quadratica $\Sigma q_{rs} du_r du_s$ la forma lineare

$$\text{(2)} \qquad T = \Sigma \tau_i du_i .$$

Ricordando la formola (1) del Cap. VI § 58, otteniamo, derivando covariantemente la (1):

$$(1)_{\text{bis}} \qquad q_{rst} = \Sigma \tau_{it}\, a^{i}_{rs} + \frac{1}{2}\,\frac{J_t}{J}\,\Sigma a^{i}_{rs}\,\tau_i +$$

$$+ \varepsilon \Sigma \vartheta_{tq}\,\psi^{q}\,.\,\Sigma b^{i}_{rs}\,\tau_i\,.$$

Dal Cap. VI, § 57 $(3)_{\text{bis}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ e § 58 (1), si deduce

$$\Sigma b^{ik}_{r}\, a_{ik\underline{\ \ }s}^{\ \ \ \ s} = \frac{1}{2}\,\Sigma b^{ik}_{r}\, a^{s}_{ik}\,\frac{J_s}{J} + \varepsilon \Sigma b^{ik}_{r}\, b^{s}_{ik}\,\vartheta_{st}\,\psi^{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\Sigma b^{ik}_{r}\, a_{iks}\,\frac{J^{s}}{J} + \Sigma b^{ik}_{r}\, a_{ikt}\,\psi^{t} = \Sigma \vartheta_{rs}\left(\frac{1}{2}\,J^{s} + J\psi^{s}\right).$$

Dalle (1) e $(1)_{\text{bis}}$ e dal Cap. VI § 57 (3) e $(5)_{\text{ter}}$ e § 58 $(1)_{\text{bis}}$ si deduce

$$\Sigma b^{rst}_{\underline{\ \ \ }t}\, q_{rs} = \frac{1}{2}\,\Sigma b^{rst}\,\frac{J_t}{J}\,q_{rs} + \Sigma \vartheta_{tq}\, a^{rst}\,\psi^{q}\, q_{rs} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\Sigma b^{rst}\, a^{i}_{rs}\,\tau_i\,\frac{J_t}{J} + \Sigma b^{rst}\,\psi_t\, a^{i}_{rs}\,\tau_i = \Sigma \vartheta^{ti}\,\tau_i\left(\frac{1}{2}\,J_t + J\psi_t\right),$$

$$\Sigma \vartheta^{ik}\, q_{rik} = \Sigma \vartheta^{ik}\, a^{t}_{ri}\,\tau_{tk} + \frac{1}{2}\,\Sigma \vartheta^{ik}\, a^{t}_{ri}\,\frac{J_k}{J}\,\tau_t + \varepsilon \Sigma \vartheta^{ik}\,\vartheta_{kq}\,\psi^{q}\, b^{t}_{ri}\,\tau_t =$$

$$= \Sigma b^{ik}_{r}\,\tau_{ik} + \frac{1}{2}\,\Sigma b^{ik}_{r}\,\frac{J_i}{J}\,\tau_k + \Sigma b^{ik}_{r}\,\psi_i\,\tau_k\,,$$

$$\Sigma b^{rst}\, q_{rst} = \Sigma b^{rst}\, a^{i}_{rs}\,\tau_{it} + \frac{1}{2}\,\Sigma a^{i}_{rs} b^{rst}\,\frac{J_t}{J}\,\tau_i + \Sigma a^{rst}\, b^{i}_{rs}\,\psi_t\,\tau_i =$$

$$= J\Sigma \vartheta^{ti}\,(\tau_{it} + \psi_i\,\tau_t) + \frac{1}{2}\,\Sigma \vartheta^{ti}\, J_t\,\tau_i\,.$$

Di più (*)

$$
\begin{aligned}
\Sigma\, b^{\underline{rst}}{}_{rst} = \Sigma \Big[& \frac{1}{2}\frac{J_{rst}}{J} + \psi_{rst} + 3\left(\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_t}{J} + \psi_t\right) + \\
(3) \qquad & + \left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_t}{J} + \psi_t\right)\Big] b^{rst}.
\end{aligned}
$$

Sostituendo nelle (II) del § 64, si trovano le equazioni equivalenti

$$\Sigma\, b_i^{rs}\left[\tau_{rs} + \left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\tau_r\right] =$$

$$= \Sigma\, \vartheta^{rk} a_{ri}(K_h + J_h) + J\Sigma\, \vartheta_{ir}\left(\frac{1}{2}\frac{J^r}{J} + \psi^r\right),$$

$$J\Sigma\, \vartheta^{rs}\left[\tau_{rs} + \left(\frac{3}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\tau_r\right] = -\Sigma\, b^{\underline{rst}}{}_{rst},$$

dove si può sostituire a $\Sigma\, b^{\underline{rst}}{}_{rst}$ il valore (3).

(*) Infatti, dalla (1)$_{\text{bis}}$ del Cap. VI § 58 si deduce successivamente

$$\Sigma\, b^{\underline{rst}}{}_r = \frac{1}{2}\Sigma\, b^{rst}\frac{J_r}{J} + \Sigma\, \vartheta_{ri}\psi^i a^{rst} = \Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)b^{rst},$$

$$\Sigma\, b^{\underline{rst}}{}_{rs} = \Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)b^{\underline{rst}}{}_s + \Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs}\right)b^{rst} =$$

$$= \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs} + \left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\right]b^{rst},$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma\, b^{\underline{rst}}{}_{rst} = {} & \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs} + \left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\right]b^{\underline{rst}}{}_t + \\
& + \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{J_{rst}}{J} + \psi_{rst} + 2\left(\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_t}{J} + \psi_t\right)\right]b^{rst},
\end{aligned}
$$

onde la formola del testo.

B) **Nuovo enunciato per le coordinate normali.**

Le equazioni precedenti si semplificano e diventano particolarmente utili usando le forme normali ($J = -1$). Per comodità del lettore diamo qui un enunciato completo:

Una superficie non rigata S *determina tre forme differenziali intrinseche ed invarianti*

$$\varphi_2 = \Sigma a_{rs} du_r du_s ,$$

$$\varphi_3 = \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t ,$$

$$T = \Sigma \tau_i du_i ,$$

legate dalle identità

$$\Sigma a^{rs} a_{rst} = 0 \quad (t = 1, 2)$$

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{A^2} \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -1 ,$$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \Sigma a_i^{rs} (\tau_{rs} + \psi_s \tau_r) = \psi_i - K_i , \quad (i = 1, 2) \\ \Sigma \vartheta^{rs} (\tau_{rs} + \psi_s \tau_r) = \Sigma b^{rst} (\psi_{rst} + 3 \psi_{rs} \psi_t + \psi_r \psi_s \psi_t) , \end{cases}$$

dove K *è la curvatura di* φ_2 *e le* ψ *son definite dalle*

$$a_{rstl} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{lk} \psi^k . b_{rst} ,$$

dove le ϑ *sono definite dalle* $(1)_{\text{bis}}$ *a pag.* 298, § 56.

Viceversa, date le tre forme differenziali φ_2, φ_3, T, *soddisfacenti alle* (A) *e* (B), *esiste la superficie* S *corrispondente ed è completamente determinata a meno di collineazioni* (*). *Le coordinate normali* x *dei punti di* S *si ottengono integrando il sistema*

(*) Ad una superficie correlativa alla *S* corrispondono le forme φ_2, $-\varphi_3$, $-T$.

$$(\mathrm{C_1})\qquad \begin{aligned} \mathrm{x}_{rs} &= \Sigma\, \mathrm{a}_{rs}^{i}\, \mathrm{x}_i + \mathrm{a}_{rs}\, \mathrm{X} + \mathrm{p}_{rs}\, \mathrm{x}\,, \\ \mathrm{X}_i &= \mathrm{l}_i\, \mathrm{x} + \Sigma\, \mathrm{m}_i^r\, \mathrm{x}_r \end{aligned}$$

sotto la condizione iniziale $(\mathrm{x}\mathrm{x}_1\,\mathrm{x}_2\,\mathrm{X}) = \sqrt{|\mathrm{A}|}$; *le coordinate normali* ξ *dei piani tangenti di* S *si ottengono integrando il sistema analogo*

$$(\mathrm{C_2})\qquad \begin{aligned} \xi_{rs} &= -\Sigma\, \mathrm{a}_{rs}^{i}\, \mathrm{x}_i + \mathrm{a}_{rs}\, \Xi + \pi_{rs}\, \xi\,, \\ \Xi_i &= \lambda_i\, \xi + \Sigma\, \mu_i^r\, \xi_r\,, \end{aligned}$$

sotto la condizione iniziale $(\xi\,\xi_1\,\xi_2\,\Xi) = \varepsilon\sqrt{|\mathrm{A}|}$. *Del resto le* x *e le* ξ *sono legate dalle*

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{A}|}}(\mathrm{x}\,\mathrm{x}_1\,\mathrm{x}_2) \quad , \quad \mathrm{x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\mathrm{A}|}}(\xi\,\xi_1\,\xi_2).$$

I coefficienti delle $(\mathrm{C_1})$ *e* $(\mathrm{C_2})$ *si determinano dalle equazioni*

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{aligned} \mathrm{p}_{rs} + \pi_{rs} &= \Sigma\, \mathrm{a}_{rsi}\, \tau^i\,, \\ \mathrm{p}_{rs} - \pi_{rs} &= \Sigma\, \mathrm{a}_{rsi}\, \psi^i\,, \\ \mathrm{m}_{rs} &= \pi_{rs} + (1-\mathrm{K})\, \mathrm{a}_{rs}\,, \\ \mu_{rs} &= \mathrm{p}_{rs} + (1-\mathrm{K})\, \mathrm{a}_{rs}\,, \\ \mathrm{l}_i + \lambda_i &= -\mathrm{K}_i\,, \\ \mathrm{l}_i - \lambda_i &= \tau_i - \Sigma\, \mathrm{a}_i^{rs}\,(\psi_{rs} + \psi_r\,\psi_s)\ (^*). \end{aligned}$$

(*) $a_{i-r}^{rs} = \varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{rp}\,\psi^p\,b_i^{rs}$ [Cap. VI, § 58, (1)]

$= \Sigma\, a_{ip}^{s}\,\psi^p = \Sigma\, a_i^{ps}\,\psi_p$ [Cap. VI, § 57 (3) bis],

onde

$$a_{i-rs}^{rs} = \Sigma\, a_i^{ps}\,\psi_{ps} + \Sigma\, a_{i-s}^{ps}\,\psi_p\,,$$

e per la stessa equazione precedente (che si può scrivere $\Sigma\, a_{i-s}^{ps} = \Sigma\, a_i^{pq}\,\psi_q$)

$$a_{i-rs}^{rs} = \Sigma\, a_i^{ps}\,(\psi_{ps} + \psi_p\,\psi_s).$$

Inoltre $\Sigma\, a_i^{rs}\, q_{rs} = \Sigma\, a_i^{rs}\, a_{trs}\,\tau^t = \Sigma\, a_{it}\,\tau^t = \tau_i$ [Cap. VI, § 57, (5)].
Indi si deduce subito la formola del testo dall' ultima delle (III) a pag. 345.

§ 66. — Nuova trasformazione delle equazioni trovate per il caso di coordinate normali.

A) Introduzione della funzione ausiliaria σ.

Le relazioni fra le forme φ_2, φ_3 e T si scompongono in due gruppi: il gruppo (A) dice soltanto che φ_3 è coniugata a φ_2, e che φ_2 e φ_3 son forme *normali;* il *secondo* gruppo (B), relativo alle τ_i, si può porre in una forma assai elegante con l'introduzione di una nuova incognita ausiliaria σ col metodo che ora andiamo a spiegare. Per brevità, poniamo

$$B = \Sigma b^{rst}_{\_rst} = \Sigma b^{rst}(\psi_{rst} + 3\psi_{rs}\psi_t + \psi_r\psi_s\psi_t). \tag{1}$$

Essendo $J = -1 \gtrless 0$, ogni sistema covariante a due indici è combinazione lineare di

$$a_{rs}\,,\ \vartheta_{rs}\,,\ \Sigma \nu_k\, a^k_{rs}$$

dove ν_k è un sistema covariante ad un indice.

Quindi possiamo porre

$$\tau_{rs} + \psi_s \tau_r = \sigma a_{rs} + \alpha\vartheta_{rs} + \Sigma \nu_k\, a^k_{rs}\,.$$

In apparenza introduciamo, oltre σ, tre altre incognite α, ν_1, ν_2, ma esse si determinano subito. Infatti moltiplicando la precedente con a^{rs}_i oppure con ϑ^{rs} si trova rispettivamente, per le (B) del § 65,

$$\psi_i - K_i = \Sigma \nu_k\, a^{rs}_i\, a^k_{rs} = \Sigma \nu_k\, a^{kp}\, a^{rs}_i\, a_{rsp}$$

$$= \Sigma \nu_k\, a^{kp}\, a_{ip} = \nu_i \quad (*)\,,$$

$$B = \alpha \Sigma \vartheta^{rs}\,\vartheta_{rs} = -2\varepsilon\alpha \quad (**).$$

(*) Cfr. Cap. VI, § 57, (5).
(**) Cfr. Cap. VI, § 56, (2).

Quindi: *L'incognita ausiliaria* σ, *di cui faremo uso, è quella definita da*

$$(2) \qquad \tau_{rs} + \psi_s \tau_r = -\frac{\varepsilon}{2} B \vartheta_{rs} + \Sigma a^i_{rs} (\psi_i - K_i) + \sigma a_{rs}$$

dove B è definita dalla (1). E queste equazioni (2) possono sostituire le (B) da cui siamo partiti. In altre parole, *date le forme* φ_2, φ_3 [*soddisfacenti alle* (A)] *e la forma* T, *affinchè esista una superficie corrispondente è necessario e sufficiente che valgano le* (2) *con qualche valore di* σ.

B) Studio delle (2).

Cerchiamo le *condizioni d'integrabilità di queste equazioni* (2) *quando come incognite si assumano le* τ_r.

Derivando covariantemente le (2), si deduce tenendo conto delle (2) stesse (*)

$$\tau_{rst} + (\psi_{st} - \psi_s \psi_t) \tau_r - \sigma_t a_{rs} + \sigma \psi_s a_{rt} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} B \psi_s \vartheta_{rt} - \frac{\varepsilon}{2} B_t \vartheta_{rs} + \Sigma a^i_{rs} (\psi_{it} - K_{it}) -$$

$$- \psi_s \Sigma a^i_{rt} (\psi_i - K_i) + \varepsilon \Sigma \vartheta_{tq} \psi^q . \Sigma b^i_{rs} (\psi_i - K_i).$$

Moltiplicando con ϑ^{st} si trova (**)

$$\Sigma \vartheta^{st} \tau_{rst} + H \tau_r - \Sigma \vartheta^{st} a_{rs} \sigma_t + \sigma \Sigma \vartheta^{st} a_{rt} \psi_s =$$

$$= -\frac{1}{2} B \psi_r - \frac{1}{2} B_r + \Sigma b^{it}_r (\psi_{it} - K_{it}) + 2 \Sigma b^{is}_r \psi_s (\psi_i - K_i).$$

Ora le identità (4) del § 63 valgono qualunque sia il sistema covariante x_i, (anche se x_i non sono *derivate*, come ivi si suppo-

---

(*) Si ricordi la (1) del Cap. VI § 58, (in cui $J = -1$).

(**) Cfr. Cap. VI, § 56, (2), § 57, (3)$_{ter}$, § 60 (1).

neva) (*); dunque

$$\Sigma \vartheta^{st} \tau_{rst} = K \Sigma \vartheta_{ir} \tau^i$$

e la precedente può scriversi

$$\Sigma (\vartheta_{tr} K + a_{tr} H) \tau^t - \Sigma \vartheta^{st} a_{rs} (\sigma_t + \sigma \psi_t) =$$

$$= -\frac{1}{2} (B_r + B \psi_r) + \Sigma b_r^{st} (\psi_{st} + 2 \psi_s \psi_t - K_{st} - 2 \psi_s K_t) = 0.$$

Moltiplicando per $\Sigma a^{rk} \vartheta_{ki} = \Sigma \vartheta^{rk} a_{ki}$ (**) e sommando rispetto a r, si ottiene

$$\sigma_i + \sigma \psi_i + \Sigma (\varepsilon \vartheta_{ki} H + a_{ki} K) \tau^k = \tag{3}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \Sigma \vartheta^{rk} a_{ik} (B_r + B \psi_r) + \Sigma a_i^{st} (\psi_{st} + 2 \psi_s \psi_t - K_{st} - 2 \psi_s K_t).$$

Le cercate condizioni d' integrabilità hanno condotto alle equazioni (3) *nelle* σ_1. *Dobbiamo ora scrivere la condizione di integrabilità di queste. Troviamo la*

$$3 H \sigma + \Sigma (a^{rs} H_s + \vartheta^{rs} K_s) \tau_r = \tag{4}$$

$$= -\frac{1}{2} \Sigma a^{rs} (B_{rs} + 2 \psi_r B_s) + \frac{1}{2} B (K + 2 - \Phi) +$$

$$+ 3 \Theta' + 3 \Psi' - \Sigma b^{rst} (K_{rst} + 4 K_{rs} \psi_t +$$

$$+ 2 K_r \psi_{st} + 4 K_r \psi_s \psi_t) \text{ (***)}.$$

(*) Infatti esse si dimostrano nello stesso modo nel caso generale; del resto, ne è facilissima la verifica in coordinate asintotiche.

(**) Per l' uguaglianza delle due espressioni, cfr. Cap. VI, § 56, (4).

(***) Derivando covariantemente le (3) si deduce tenendo conto delle (2) e (3)

$$\sigma_{ir} + \sigma (\psi_{ir} - \psi_i \psi_r + K a_{ir} - \varepsilon H \vartheta_{ir}) + \Sigma (a_{ki} K_r + \varepsilon \vartheta_{ki} H_r) \tau^k -$$

$$- \Sigma [\varepsilon H (\vartheta_{kr} \psi_i + \vartheta_{ki} \psi_r + K (a_{kr} \psi_i + a_{ki} \psi_r)] \tau^k =$$

§ 67. — Deformazione proiettiva.

A) Il problema fondamentale.

Ora ci rivolgeremo al problema importante:

Dato un elemento lineare proiettivo $\frac{F_3}{F_2}$, *riconoscere se esiste qualche superficie corrispondente e, nel caso affermativo, determinarle tutte.* Date le ricerche del Cap. IV § 40, possiamo omettere il caso $J = 0$; sappiamo che in tal caso esistono sempre delle superficie *(rigate)* corrispondenti (dipendenti da una funzione arbitraria che è la j di *l. c.*) Possiamo quindi supporre $J = -1$ sicchè il problema si enuncia: *date le forme* φ_2 *e* φ_3 *soddisfacenti alle* (A) *del* § 65 B, *riconoscere se le equazioni* (B) del § 65 *nelle incognite* τ_1, τ_2 *ammettono qualche soluzione e, nel caso affermativo, determinarne tutte le soluzioni.* Ora noi abbiamo visto, al § 66 A, che le equazioni (B) sono equivalenti alle (2) del § 66 che contengono oltre τ_1 e τ_2 l'incognita ausiliaria σ. Noi abbiamo calcolato le condizioni d'integrabilità delle (2), che sono le (3) del § 66.

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \Sigma \vartheta^{sh} a_{ih} (B_{rs} + B_r \psi_s + B \psi_{sr}) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \psi_i \Sigma \vartheta^{sh} a_{rh} (B_s + B \psi_s) + \frac{\varepsilon}{2} B (K \vartheta_{ir} - H a_{ir}) +$$

$$+ \Sigma a_i^{st} (\psi_{str} + 4 \psi_s \psi_{tr} - K_{str} - 2 \psi_{sr} K_t - 2 \psi_s K_{tr}) -$$

$$- \psi_i \Sigma a_r^{st} (\psi_{st} + 2 \psi_s \psi_t - K_{st} - 2 \psi_s K_t) +$$

$$+ \varepsilon \Sigma \vartheta_{rq} \psi^q \Sigma b_i^{st} (\psi_{st} + 2 \psi_s \psi_t - K_{st} - 2 \psi_s K_t) -$$

$$- K \Sigma a_{ir}^s (\psi_s - K_s) - \varepsilon H \Sigma b_{ir}^s (\psi_s - K_s).$$

Dobbiamo scrivere che $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, ossia che $\Sigma \vartheta^{ir} \sigma_{ir} = 0$. Moltiplicando pertanto la precedente con ϑ^{ir} e sommando rispetto ad i e r, si ottiene la formola (4) del testo, se si ricordano le formole Cap. VI, § 56 (2) e (4), § 57 (3) $_{\text{ter}}$ e (3) $_{\text{quater}}$, § 59 (1) e § 60 (1), e la formola (1) del § presente.

Notiamo che le (2) e (3) insieme esprimono tutte le derivate di τ_1, τ_2 e σ come polinomi lineari (non omogenei) delle τ_1, τ_2 e σ stesse. Come condizione d' integrabilità delle (3) abbiamo trovato la (4) del § 66, che ha la forma

$$(\alpha) \qquad \lambda\sigma + \lambda_1\tau_1 + \lambda_2\tau_2 = \mu ,$$

λ, λ_1, λ_2 e μ essendo funzioni note. E noi non continueremo il calcolo effettivo giacchè le formole si complicano troppo; ma è facile continuarlo in ogni caso particolare. Derivando la (4) e tenendo conto delle (2) e (3), si ottengono evidentemente due ulteriori relazioni della stessa forma (α); da ciascuna di esse si derivano nello stesso modo due ulteriori relazioni della stessa forma, e così di seguito. È quindi chiaro che cinque casi sono possibili:

1° le relazioni della forma (α) che si trovano nel modo ora descritto sono *contradditorie*. È questo il caso generale (*), se si scelgono a caso le forme φ_2 e φ_3; *non esiste nessuna superficie di elemento lineare proiettivo* $\dfrac{\varphi_3}{\varphi_2}$;

2° dalle relazioni della forma (α) si trovano valori ben determinati di τ_1, τ_2 (e quindi anche di σ). *Esiste* (a meno di collineazioni) *una sola superficie di elemento lineare proiettivo* $\dfrac{\varphi_3}{\varphi_2}$, *proiettivamente indeformabile. La terza forma fondamentale si calcola dall' elemento lineare proiettivo mediante sole operazioni razionali e derivazioni;*

3° le relazioni della forma (α) si riducono a due linearmente indipendenti sicchè esse si possono ridurre alla forma

$$\tau_2 = a\tau_1 + b\,, \quad \sigma = c\tau_1 + d \ (**).$$

dove a, b, c, d son funzioni conosciute.

(*) Infatti, l' elemento lineare proiettivo dipende essenzialmente da *due* funzioni arbitrarie di u e v, p. es. dalle solite β e γ, mentre una *superficie* dipende solo da *una* funzione arbitraria di due argomenti.

(**) Se le relazioni della forma (α) dessero un valore determinato per τ_1, basta sostituire τ_2 a τ_1; se poi dessero valori determinati per τ_1 e τ_2, anche il valore di σ sarebbe determinato.

Sostituendo nelle (2) e (3) si ricavano due sole relazioni della forma

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial u} = m_1 \tau_1 + n_1 \quad , \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial v} = m_2 \tau_1 + n_2 \, ,$$

dove m_1, m_2, n_1, n_2 hanno valori conosciuti.

Tali equazioni formano evidentemente un sistema completamente integrabile, e τ_1 se ne ricava mediante quadrature. *Le superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ *dipendono essenzialmente* (riguardando come identiche due superficie collineari) *da un parametro. La terza forma fondamentale si calcola dall' elemento lineare proiettivo con quadrature.* La terza forma è del tipo

$$\Sigma \tau_i \, du_i = \Sigma \tau_i^0 \, du_i + c \Sigma \chi_i \, du_i$$

con c costante arbitraria;

4° la relazione (4) del § 66 non è soddisfatta identicamente, ma tutte le ulteriori relazioni della forma (α) son conseguenza algebrica di essa. *Le superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ *dipendono essenzialmente da due costanti arbitrarie.* La terza forma è

$$\Sigma \tau_i du_i = \Sigma \tau_i^0 \, du_i + c_1 \Sigma \chi_i^1 \, du_i + c_2 \Sigma \chi_i^2 \, du_i \, ,$$

con due costanti arbitrarie c_1 e c_2;

5° la relazione (4) del § 66 è identicamente soddisfatta. Le (2) e (3) del § 66 formano un sistema completamente integrabile. *Le superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ *dipendono essenzialmente da tre costanti arbitrarie.* La terza forma è

$$\Sigma \tau_i du_i = \Sigma \tau_i^0 \, du_i + c_1 \Sigma \chi_i^1 \, du_i + c_2 \Sigma \chi_i^2 \, du_i + c_3 \Sigma \chi_i^3 \, du_i$$

con tre costanti arbitrarie. Determineremo al § 69 tutte le superficie di questa classe.

Notiamo che dall'analisi fatta risulta:

Se una superficie è proiettivamente deformabile, essa fa parte di *una famiglia continua di superficie che dipende da uno, due, o tre parametri* (*), *tutte proiettivamente applicabili fra di loro.*

B) **Il sistema coniugato di deformazione proiettiva.**

Sia $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ l'elemento lineare proiettivo di due superficie S, $\overline{S}$ applicabili ma non omografiche (**) e siano $\Sigma \tau_i du_i$, $\Sigma \overline{\tau}_i du_i$ le terze forme fondamentali di esse. Poniamo

$$\tau_i - \overline{\tau}_i = \chi_i .$$

Il Cartan, nella Memoria già citata al Cap. VI § 61, ha trovato il significato geometrico delle linee definite dall'equazione differenziale

$$(1) \qquad \Sigma b^i_{rs} \chi_i \, du_r du_s = 0 .$$

Esse formano evidentemente un sistema coniugato (che si può ridurre ad un sistema d'asintotiche contato due volte) che Cartan dice il *sistema coniugato di deformazione proiettiva* (***). L'equazione (1) si può scrivere anche (cfr. la (1) del § 65)

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \Sigma (q_{rs} - \overline{q}_{rs}) \, du_r \, Du_s = 0$$

Per ogni sistema di valori (u, v) i piani osculatori delle curve corrispondenti di S e $\overline{S}$ nei due punti (u, v) formano due stelle omografiche. Possiamo quindi (in ∞^3 modi) sostituire a $\overline{S}$ una superficie $S'(u, v)$ ad essa collineare (variabile al variare di u, v)

(*) riguardando come identiche due superficie collineari.

(**) Più precisamente, la corrispondenza fra S e $\overline{S}$ che si ottiene facendo corrispondersi i punti che appartengono a valori uguali di u e v, non sia proiettiva. S e $\overline{S}$ possono invece essere omografiche in virtù di un' altra corrispondenza puntuale fra di esse, anzi identiche.

(***) Se una superficie ammette ∞^1 deformate proiettive, essa possiede un solo sistema coniugato di deformazione proiettiva. Essa ne può possedere invece ∞^1 o ∞^2 se è proiettivamente deformabile in ∞^2 o in ∞^3 modi.

tale che nel punto (u, v) una curva qualsiasi di S e la curva corrispondente di $S'(u, v)$ abbiano lo stesso piano osculatore (e la stessa tangente).

Si fissi comunque per ogni valore di (u, v) una tale superficie $S'(u, v)$. Siano $P_1, P_2, P_3 \ldots$ punti fissi nello spazio, e $P'_1(u, v)$, $P'_2(u, v)$, $P'_3(u, v) \ldots$ quelli che vi corrispondono nell'omografia che porta $\overline{S}$ in $S'(u, v)$. Si fissi ad arbitrio una relazione $f(u, v) = 0$ e sia C la curva corrispondente di S. Posto $f(u, v) = 0$, anche i punti $P'_1(u, v)$, $P'_2(u, v) \ldots$ descrivono delle curve, e per ogni valore fisso di (u, v) le tangenti a tutte queste curve incontrano una tangente ben determinata (data la relazione $f(u, v) = 0$) t di S in (u, v). Allora ed allora soltanto che C soddisfa alla (1), t è la tangente a C. Lascio al lettore la facile dimostrazione (*).

C) Superficie R e R_0.

Se $\Sigma a^{rs} \chi_r \chi_s \gtrless 0$, ossia se si tratta proprio di un sistema coniugato, la superficie dicesi *superficie* R e le due congruenze delle tangenti alle curve del sistema coniugato di deformazione proiettiva diconsi *congruenze* R. Le superficie e congruenze R furono studiate per la prima volta, da un punto di vista del tutto diverso, dallo Tzitzéica nel 1911, ed importanti risultati su di esse son stati trovati, oltre che da Tzitzéica, da Demoulin e da Ionas. Di questo si è già parlato al Cap. V § 52 e § 54.

Se $a^{rs} \chi_r \chi_s = 0$ sicchè il sistema coniugato di deformazione proiettiva si riduce ad un sistema di asintotiche contato due volte la superficie si dirà *superficie* R_0.

Il Cartan ha dimostrato che *le superficie* R *dipendono da sei funzioni arbitrarie di un argomento.* Ci limitiamo ad enunciare questo risultato (**). *Le superficie* R_0 *dipendono da cinque funzioni arbi-*

(*) L'enunciato del Cartan è formalmente diverso. Egli dà pure un'altra proprietà cinematica del sistema coniugato di deformazione proiettiva (v. l. c. pagg. 278-279).

(**) Mem. cit., pagg. 280 e 290-292.

trarie di un argomento. Questo risultato, dovuto pure al Cartan (*) sarà dimostrato tosto in modo molto semplice.

D) **Deformazione proiettiva di una superficie data.**

Al principio di questo § abbiamo supposto che sia dato un elemento lineare proiettivo $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ senza sapere a priori se esiste qualche superficie corrispondente. Ora supponiamo invece che *sia data una superficie* (non rigata) e che si voglia *riconoscere se essa è proiettivamente deformabile e, in caso affermativo, determinarne tutte le deformate proiettive.* In altre parole, ora supponiamo nota una soluzione particolare (τ_1, τ_2, σ) delle (2) del § 66 e vogliamo ricercare le eventuali ulteriori soluzioni $(\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\sigma})$. Posto

$$\tau_i - \overline{\tau}_i = \chi_i \quad , \quad \sigma - \overline{\sigma} = \varkappa \,,$$

possiamo introdurre χ_i e $\varkappa$ come nuove incognite. Alle (2) del § 66 corrispondono evidentemente le equazioni omogenee

$$(\dot{2}) \qquad \chi_{rs} + \psi_s \chi_r = a_{rs} \varkappa .$$

Come condizioni d' integrabilità delle $(\dot{2})$ otteniamo, come si vede ormai senza calcolo dalle (3) del § 66,

$$(\dot{3}) \qquad \varkappa_i + \varkappa \chi_i + \Sigma (\varepsilon \vartheta_{ki} H + a_{ki} K) \chi^k = 0 \,,$$

e condizione d'integrabilità di queste è (cfr. (4) del § 66)

$$(\dot{4}) \qquad 3 H \varkappa + \Sigma (a^{rs} H_s + \vartheta^{rs} K_s) \chi_r = 0 \,.$$

Una superficie è proiettivamente deformabile allora ed allora soltanto che le $(\dot{2})$ *ammettono qualche soluzione, oltre la soluzione evidente* $\chi_1 = \chi_2 = \varkappa = 0$.

(*) Mem. cit. pagg. 294-5.

Ogni soluzione delle (2) soddisfa pure alle (3) e (4). Derivando la (4) e tenendo conto delle (2) e (3) si arriva a due ulteriori relazioni lin. om. fra χ_1, χ_2 e $\varkappa$ ecc. La superficie è indeformabile se così si arriva a tre relazioni lin. indipendenti, ecc. Ci limiteremo a trattare il caso particolare di superficie R_0.

Per una superficie R_0, oltre alle (2), deve essere soddisfatta anche la

$$\Sigma a^{rs} \chi_r \chi_s = \Sigma \chi_r \chi^r = 0 . \tag{5}$$

Derivandola covariantemente si deduce

$$\Sigma \chi_{rs} \chi^r = 0 .$$

Moltiplicando (2) per χ^r risulta pertanto $\chi_1 \varkappa = \chi_2 \varkappa = 0$ ossia $\varkappa = 0$. Ora dalla (5) segue (*) che

$$\Sigma \vartheta_{ki} \chi^k = \omega \Sigma a_{ki} \chi^k , \quad \omega = \pm 1$$

sicchè la (3) dà $(H + \omega K) \chi_i = 0$ ossia

$$H + \omega K = 0 , \quad \omega = \pm 1 . \tag{6}$$

Una superficie è R_0 *allora ed allora soltanto che è soddisfatta la* (6) (**).

Infatti noi abbiamo appunto dimostrato che per ogni superficie R_0 vale la (6). Viceversa, se è soddisfatta la (6), la superficie è R_0 ossia le (2) ammettono una soluzione con $\Sigma a^{rs} \chi_r \chi_s = 0$. Infatti tutte le condizioni d'integrabilità delle

$$\chi^r + \omega \Sigma \vartheta^{rs} \chi_s = 0 \quad , \quad \chi_{rs} + \psi_s \chi_r = 0 \tag{7}$$

son soddisfatte, se vale la (6); lascio la facile dimostrazione al lettore.

(*) Basta sostituire ψ_i con χ_i nel ragionamento che ci condusse alla prima delle formole (6) del Cap. VI § 59.

(**) Invece il fatto che una superficie sia R non può esprimersi coll' annullare un invariante dell' elemento lineare proiettivo.

Da questo risultato si deduce subito che le superficie R_0 si ottengono integrando un'equazione alle derivate parziali del quinto ordine. Infatti se $z = f(x, y)$ è l'equazione di una superficie in coordinate non omogenee, l'espressione dell'invariante $H + \omega K$ contiene derivate di f fino al quinto ordine.

§ 68. Teoremi varii sulle superficie R e R_0.

A) Elemento lineare riferito alle asintotiche.

L'elemento lineare proiettivo di una superficie R o R_0 si può mettere sotto una forma notevole. A tale scopo osserviamo che dalle (B) del § 65 *B* seguono le relazioni equivalenti alle (2) del § 67

$$\Sigma a_i^{rs}(\chi_{rs} + \psi_s \chi_r) = 0 \quad , \quad \Sigma \vartheta^{rs}(\chi_{rs} + \psi_s \chi_r) = 0 .$$

Scegliendo le asintotiche come linee coordinate, esse diventano

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial u} + \frac{\gamma_u}{\gamma} \chi_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial v} + \frac{\beta_v}{\beta} \chi_2 = 0 ,$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial v} + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} \chi_1 = \frac{\partial \chi_2}{\partial u} + \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} \chi_2 = 0 ,$$

oppure

$$\frac{\partial}{\partial u}(\gamma\chi_1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}(\beta\chi_2) = 0 ,$$

(1)

$$\beta \frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma^2\chi_2) = \gamma \frac{\partial}{\partial v}(\beta^2\gamma\chi_1) = 0.$$

Le prime due dànno

$$\beta\chi_2 = U \quad , \quad \gamma\chi_1 = V$$

con U funzione della sola u e V funzione della sola v, sicchè l' equazione del sistema coniugato di deformazione proiettiva è

$$\Sigma b^i_{rs} \chi_i \, du_r \, du_s = -\omega (U du^2 - V dv^2) = 0.$$

La forma quadratica qui scritta essendo (impropriamente) intrinseca, si può, scegliendo convenientemente il parametro u, supporre $U^2 = 1$, a meno che sia $U = 0$ (*); e similmente, scegliendo v in modo opportuno, si può rendere $V^2 = 1$.

Se la superficie è R_0 possiamo quindi supporre (**), scegliendo convenientemente il parametro v, che sia $U = 0$, $V = \pm 1$ oppure

$$\chi_2 = 0 \quad , \quad \chi_1 = \pm \frac{1}{\gamma}.$$

Sostituendo nella terza delle (1) si deduce $\beta_v = 0$, e cambiando anche il parametro u si arriva ad avere

(2) $$\beta = 1.$$

Scegliendo opportunamente i parametri u, v *delle asintotiche* (***) *di una superficie* R_0 *l' elemento lineare proiettivo assume la forma canonica*

(2) bis $$\varphi_2 = 2\gamma \, \mathrm{du} \, \mathrm{dv} \quad , \quad \varphi_3 = \gamma \mathrm{du}^3 + \gamma^2 \mathrm{dv}^3$$

in cui $\beta = 1$. *Viceversa, se* $\beta = 1$, *la superficie è* R_0 (****).

Notiamo che si poteva dedurre questo risultato più rapidamente scrivendo la (6) del § 67 in coordinate asintotiche.

(*) Si noti che $UV \gtrless 0$ per una superficie R e $UV = 0$ per una superficie R_0.

(**) scambiando eventualmente u con v.

(***) Il sistema coniugato di deformazione proiettivo si riduce alle asintotiche $v =$ costante.

(****) Infatti le (1) sono allora soddisfatte ponendo

$$\chi_1 = \frac{1}{\gamma}, \quad \chi_2 = 0.$$

Se invece la superficie è R, possiamo scegliere i parametri delle asintotiche in modo che sia

$$U^2 = V^2 = 1\,, \quad \text{ossia} \quad \chi_1 = \pm\frac{1}{\gamma} \quad , \quad \chi_2 = \pm\frac{1}{\beta}\,;$$

anzi, ricordando che le χ_i non sono definite che a meno d'un fattor costante, possiamo supporre:

$$\chi_1 = \frac{1}{\gamma} \quad , \quad \chi_2 = \alpha\frac{1}{\beta} \quad , \quad \alpha^2 = 1.$$

La terza delle (1) dà poi la condizione di Demoulin

$$\gamma_u = \alpha\beta_v \quad , \quad \alpha^2 = 1 \tag{3}$$

sicchè $\beta du + \alpha\gamma dv = \alpha df$ è un differenziale esatto.

Viceversa se valgono le (3), la superficie è R, le (1) essendo soddisfatte ponendo $\chi_1 = \dfrac{1}{\gamma}$, $\chi_2 = \alpha\dfrac{1}{\beta}$.

Vale pertanto il teorema: *Scegliendo opportunamente i parametri* u, v *delle asintotiche di una superficie* R, *l'elemento lineare proiettivo assume la forma canonica*

$$(3)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \varphi_2 &= 2\,\alpha\, f_u f_v\, du\, dv \\ \varphi_3 &= f_u f_v (\alpha f_u du^3 + f_v dv^3) \end{aligned} \qquad \alpha = \pm 1$$

in cui $\gamma_u = \pm\beta_v$. *Viceversa se* $\gamma_u = \pm\beta_v$ *la superficie è* R (*).

B) Un teorema per le superficie R_0 o R.

Se si conoscono le equazioni in termini finiti delle asintotiche di una superficie R_0, *la riduzione dell'elemento lineare proiettivo alla forma canonica* $(2)_{\text{bis}}$ *si effettua con quadrature.* Ciò segue senz'altro

---

(*) È $\alpha = 1$ ($\alpha = -1$) se il sistema coniugato di deformazione proiettiva è reale (immaginario).

dal procedimento che ci ha servito a stabilire la forma canonica. Ma vale ancora il teorema: *Data comunque una superficie* R_0 *bastano due quadrature ad ottenere l'equazione in termini finiti di quel sistema di asintotiche cui si riduce il sistema coniugato di deformazione proiettiva, anzi addirittura il parametro* v *delle forme canoniche* $(2)_{\text{bis}}$.
Infatti, è in coordinate canoniche

$$\pm \Sigma b^i_{rs} \chi_i \, du_r \, du_s = dv^2$$

cosicchè, determinate le χ_i con quadratura dalle (7) del § 67,

$$v = \int \sqrt{|\Sigma b^i_{rs} \chi_i du_r du_s|} \ (*).$$

Data comunque una superficie R *la riduzione dell'elemento lineare proiettivo alla forma canonica* $(3)_{\text{bis}}$ *e quindi anche la determinazione delle equazioni in termini finiti delle asintotiche e del sistema coniugato di deformazione proiettiva non richiede che quadrature.* Infatti da ciò che si è detto al § 67 *A* risulta subito che le χ_i si possono avere dalle (2) del § 67 con quadrature.

D'altra parte, in parametri canonici è

$$\Sigma a^i_{rs} \chi_i du_r du_s + \omega \Sigma b^i_{rs} \chi_i du_r du_s = 2\, \alpha\, du^2 ,$$

$$\Sigma a^i_{rs} \chi_i du_r du_s - \omega \Sigma b^i_{rs} \chi_i du_r du_s = 2\, dv^2 ,$$

e le espressioni a sinistra essendo note, si hanno anche u e v con quadrature.

(*) Come esercizio, il lettore deduca direttamente in coordinate curvilinee generali che $\sqrt{|\Sigma b^i_{rs} \chi_i \, du_r \, du_s|}$ è un differenziale esatto, se $H + \omega K = 0$, facendo uso delle (7) del § 67.

§ 69. — Le superficie proiettivamente deformabili in ∞^3 modi (*).

A) Preliminari.

Abbiamo visto al § 67 che una superficie S *non rigata* si può deformare proiettivamente *al più* in ∞^3 modi. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò avvenga è che sia soddisfatta identicamente la (4) del § 67; il che richiede

$$H = 0 \quad , \quad K = \text{costante}. \tag{1}$$

Le superficie cui è dedicato il § attuale son quindi le ***superficie isotermo-asintotiche per cui la forma normale φ_2 ha curvatura costante.*** Ma se è dato soltanto un elemento lineare proiettivo $\varphi_3 : \varphi_2$ soddisfacente alle (1), affinchè esista una (e quindi ∞^3) superficie corrispondente, deve essere identicamente soddisfatta la (4) del § 66 (**) cioè deve essere ancora

$$-\frac{1}{2}\Sigma a^{rs}(B_{rs} + 2\psi_r B_s) + \frac{1}{2} B(K + 2 - \Phi) + 3\Theta' + 3\Psi' = 0.$$

dove B è definita dalla (1) del § 66.

Ora conseguenza delle (1) è l'identità (***)

$$\Sigma a^{rs}(B_{rs} + 2\psi_r B_s) + B\Phi + 3K(\Theta' + \Psi') = 0\,, \tag{2}$$

sicchè la precedente si riduce a

$$K + 2)(B + 3\Theta' + 3\Psi') = 0\,. \tag{3}$$

(*) I risultati di questo §, tranne l'osservazione che le superficie con $H = K + 2 = 0$ son quelle con asintotiche di complessi lineari son dovute al Cartan, Mem. cit., pagg. 301-307.

(**) Cfr. § 67 *A*.

(***) Ci possiamo accontentare di verificare la (2) in coordinate particolari.

Nel determinare le superficie corrispondenti, occorre trattare separatamente i casi $K=0$ e $K \neq 0$. Cominceremo col primo.

B) Il caso $K=0$.

Se $K=0$ possiamo scegliere, come ben si sa, i parametri u, v delle asintotiche in modo che sia

$$\varphi_2 = 2\,du\,dv \quad , \quad \beta\gamma = 1 \quad , \quad \omega = 1 .$$

L'equazione $H=0$ dà

$$\frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \log \beta^2}{\partial u\, \partial v} = 0$$

sicchè si può porre

$$(4) \qquad \beta = \sqrt{\frac{V}{U}} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{U}{V}}$$

con U funzione della sola u e V funzione della sola v, i due radicali avendo lo stesso segno (positivo o negativo). Bisogna ora verificare la (2) e vedere quali condizioni impone la (3). Ora si calcola facilmente, dal quadro di formole che chiude il Cap. VI (*)

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{U'}{U} \,, \quad \psi_2 = \frac{1}{2}\frac{V'}{V} \,, \quad \Phi = \frac{1}{2}\frac{U'V'}{UV} \,,$$

$$\Psi' = \sqrt{\frac{U}{V}} \cdot \frac{1}{8}\frac{U'^3}{U^3} - \sqrt{\frac{V}{U}} \cdot \frac{V'^3}{V^3} \,,$$

$$\psi_{11} = \frac{1}{2}\frac{U''}{U} - \frac{1}{2}\frac{U'^2}{U^2} \quad , \quad \psi_{22} = \frac{1}{2}\frac{V''}{V} - \frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2} \,,$$

(*) Le derivate di U e V sono indicate con apici.

$$\Theta' = \sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{4}\frac{U'U''}{U^2} - \frac{1}{4}\frac{U'^3}{U^3}\right) -$$

$$-\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{4}\frac{V'V''}{V^2} - \frac{1}{4}\frac{V'^3}{V^3}\right),$$

$$\psi_{111} = \frac{1}{2}\frac{U'''}{U} - \frac{3}{2}\frac{U'U''}{U^2} + \frac{U'^3}{U^3},$$

$$\psi_{222} = \frac{1}{2}\frac{V'''}{V} - \frac{3}{2}\frac{V'V''}{V^2} + \frac{V'^3}{V^3},$$

$$B = \sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'''}{U} - \frac{3}{4}\frac{U'U''}{U^2} + \frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^3}\right) -$$

$$-\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'''}{V} - \frac{3}{4}\frac{V'V''}{V^2} + \frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right),$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U''''}{U} - \frac{U'U'''}{U^2} - \frac{3}{4}\frac{U''^2}{U^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{4}\frac{U'^2U''}{U^3} - \frac{15}{16}\frac{U'^4}{U^4}\right) -$$

$$-\frac{U'}{U}\sqrt{\frac{V}{U}}\left(-\frac{1}{4}\frac{V'''}{V} + \frac{3}{8}\frac{V'V''}{V^2} - \frac{3}{16}\frac{V'^3}{V^3}\right),$$

$$B_2 = -\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V''''}{V} - \frac{V'V'''}{V^2} - \frac{3}{4}\frac{V''^2}{V^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{4}\frac{V'^2V''}{V^3} - \frac{15}{16}\frac{V'^4}{V^4}\right) +$$

$$+\frac{V'}{V}\sqrt{\frac{U}{V}}\left(-\frac{1}{4}\frac{U'''}{U} + \frac{3}{8}\frac{U'U''}{U^2} - \frac{3}{16}\frac{U'^3}{U^3}\right),$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{V'}{V}\sqrt{\frac{U}{V}}\left(-\frac{1}{4}\frac{U''''}{U} + \frac{1}{2}\frac{U'U'''}{U^2} + \right.$$

$$+\frac{3}{8}\frac{U''^2}{U^2}-\frac{9}{8}\frac{U'^2U''}{U^3}+\frac{15}{32}\frac{U'^4}{U^4}\Bigg)-$$

$$-\frac{U'}{U}\sqrt{\frac{V}{U}}\left(-\frac{1}{4}\frac{V''''}{V}+\frac{1}{2}\frac{V'V'''}{V^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\frac{V''^2}{V^2}-\frac{9}{8}\frac{V'^2V''}{V^3}+\frac{15}{32}\frac{V'^4}{V^4}\right).$$

Sostituendo nella formola (2) ne risulta confermata l'esattezza per il caso particolare $H=K=0$ studiato. La (3) equivale alla:

$$B+3\Theta'+3\Psi'=0\,;$$

e, sostituendovi i valori ora calcolati, essa diventa:

$$\sqrt{\frac{U}{V}}\cdot\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\sqrt{\frac{V}{U}}\cdot\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}=0$$

o semplicemente

$$U'''=V'''=a=\text{costante},$$

cosicchè

$$(5)\qquad \begin{aligned} U&=au^3+b_1u^2+c_1u+d_1\,,\\ V&=av^3+b_2v^2+c_2v+d_2\,,\end{aligned}$$

dove a, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 son costanti qualunque, purchè non sia identicamente nè $U=0$, nè $V=0$.

C) **Continuazione. Formole finali relative al caso $K=0$.**

Per trovare le superficie corrispondenti dobbiamo ancora calcolare le τ_i dalle equazioni (B) del § 65. Vedremo che esse si possono integrare effettivamente in ∞^3 modi, come sappiamo a priori. Le citate equazioni (B) sono in coordinate asintotiche

$$\frac{\partial}{\partial u}(\gamma\tau_1)=\beta\gamma\left(\psi_2-\frac{\partial K}{\partial v}\right),$$

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial v}(\beta\tau_2)=\beta\gamma\left(\psi_1-\frac{\partial K}{\partial u}\right),$$

$$\beta\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma^2\tau_2)-\gamma\frac{\partial}{\partial v}(\beta^2\gamma\tau_1)=\omega\beta^3\gamma^3 B.$$

Sostituendo i valori di β, γ, ψ_1, ψ_2, K, esse diventano

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_1\right)=\frac{1}{2}\frac{V'}{V},\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_2\right)=\frac{1}{2}\frac{U'}{U},$$

$$\sqrt{\frac{V}{U}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right)-\sqrt{\frac{U}{V}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right)=B.$$

Le prime due dànno subito (essendo U_1 funzione della sola u e V_1 funzione della sola v)

$$(7)\qquad \begin{aligned}\tau_1&=\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V}u+V_1\right),\\ \tau_2&=\sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U}v+U_1\right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right)=\frac{1}{2}\frac{U''}{U}v+\frac{(UU_1)'}{V},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right)=\frac{1}{2}\frac{V''}{V}u+\frac{(VV_1)'}{U},$$

sicchè la terza diventa, sostituendo anche il valore di B

e moltiplicando con $\sqrt{UV}$,

$$\frac{1}{2}V''u+(VV_1)'-\frac{1}{2}U''v-(UU_1)'+\frac{1}{2}U'''-$$

$$-\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U}+\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^2}-\frac{1}{2}V'''+\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^2}=0.$$

Ora dalle (5) vediamo che

$$\frac{1}{2}V''u-\frac{1}{2}U''v=b_2u-b_1v,$$

cosicchè la precedente diventa

$$(UU_1)'-\frac{1}{2}U'''+\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^2}-b_2u=$$

$$=(VV_1)'-\frac{1}{2}V'''+\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^2}-b_1v=e,$$

con e costante, da cui integrando,

$$UU_1=\frac{1}{2}U''-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U}+\frac{1}{2}b_2u^2+eu+f_1,$$

$$VV_1=\frac{1}{2}V''-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V}+\frac{1}{2}b_1v^2+ev+f_2,$$

con due nuove costanti f_1 e f_2. Sostituendo in (7) si trova

$$\tau_1=\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V}u+\frac{1}{2}\frac{V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2}+\frac{\frac{1}{2}b_1v^2+ev+f_2}{V}\right),$$

(7) bis

$$\tau_2=\sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U}v+\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{\frac{1}{2}b_2u^2+eu+f_1}{U}\right)$$

dove U e V sono i polinomi (5). Le formole (D) del § 65 B determinano subito tutti i coefficienti delle equazioni fondamentali.

D) Il caso $K = \text{cost.} \neq 0$.

Studieremo in modo simile il caso $K \neq 0$. La forma φ_2 essendo di curvatura costante K, si può porre, com'è noto, nella forma

$$\varphi_2 = \frac{4}{K(u-v)^2}\, du dv,$$

cosicchè

$$\beta\gamma = \frac{2}{K}\frac{1}{(u-v)^2} \quad , \quad \omega = sgn\, K. \tag{8}$$

La condizione $H = 0$ ossia $\dfrac{\partial^2 \log(\beta:\gamma)}{\partial u\, \partial v} = 0$ diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{K(u-v)^2 \beta^2}{2} = 0$$

cosicchè possiamo porre

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{V}{U}} \quad , \quad \gamma = \omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{U}{V}}, \tag{9}$$

dove U è funzione della sola u, V è funzione della sola v, e i due radicali hanno lo stesso segno.

Resta a verificare la (2) e vedere quali condizioni impone la (3). Dalle formole alla fine del Cap. VI si calcola facilmente

$$\theta_u = -\frac{2}{u-v} \quad , \quad \theta_v = \frac{2}{u-v}, \quad \text{dove} \quad \theta = \log|a_{12}| = \log|\beta\gamma|$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{U'}{U} - \frac{3}{u-v} \quad , \quad \psi_2 = \frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \frac{3}{u-v},$$

$$\Phi = \frac{K}{4}(u-v)^2 \frac{U'V'}{UV} + \frac{3K}{2}(u-v)\left(\frac{U'}{U} - \frac{V'}{V}\right) - 9K,$$

$$\psi_{11}=\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{1}{2}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{1}{u-v}\frac{U'}{U}-\frac{3}{(u-v)^2}\,,$$

$$\psi_{22}=\frac{1}{2}\frac{V''}{V}-\frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2}-\frac{1}{u-v}\frac{V'}{V}-\frac{3}{(u-v)^2}\,,$$

$$\Psi'=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{1}{8}\frac{U'^3}{U^3}(u-v)^3-\frac{9}{4}\frac{U'^2}{U^2}(u-v)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{27}{2}\frac{U'}{U}(u-v)-27\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{1}{8}\frac{V'^3}{V^3}(u-v)^3+\frac{9}{4}\frac{V'^2}{V^2}(u-v)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{27}{2}\frac{V'}{V}(u-v)+27\right]\,,$$

$$\Theta'=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\left(\frac{1}{4}\frac{U'U''}{U^2}-\frac{1}{4}\frac{U'^3}{U^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{3}{2}\frac{U''}{U}+2\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)^2-\frac{9}{2}\frac{U'}{U}(u-v)+9\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(\frac{1}{4}\frac{V'V''}{V^2}-\frac{1}{4}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\frac{V''}{V}-2\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)^2-\frac{9}{2}\frac{V'}{V}(u-v)-9\right]\,,$$

$$\psi_{111}=\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\frac{3}{2}\frac{U'U''}{U^2}+\frac{U'^3}{U^3}+\frac{1}{u-v}\left(3\frac{U''}{U}-3\frac{U'^2}{U^2}\right)+$$

$$+\frac{3}{(u-v)^2}\frac{U'}{U}-\frac{6}{(u-v)^3}\,,$$

$$\psi_{222}=\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{3}{2}\frac{V'V''}{V^2}+\frac{V'^3}{V^3}-\frac{1}{u-v}\left(3\frac{V''}{V}-3\frac{V'^2}{V^2}\right)+$$

$$+\frac{3}{(u-v)^2}\frac{V'}{V}+\frac{6}{(u-v)^3},$$

$$B=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U^2}+\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{3}{2}\frac{U''}{U}+\frac{3}{4}\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)^2+3\frac{U'}{U}(u-v)-6\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V^2}+\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\frac{V''}{V}-\frac{3}{4}\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)^2+3\frac{V'}{V}(u-v)+6\right],$$

$$B_1=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U''''}{U}-\frac{U'U'''}{U^2}-\frac{3}{4}\frac{U''^2}{U^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{4}\frac{U'^2U''}{U^3}-\frac{15}{16}\frac{U'^4}{U^4}\right)(u-v)^3-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{9}{4}\frac{V'V''}{V^2}+\frac{9}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^2\right.$$

$$\left.+\left(3\frac{V''}{V}-\frac{3}{2}\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)+3\frac{V'}{V}\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\frac{U'}{U}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(-\frac{1}{4}\frac{V'''}{V}+\frac{3}{8}\frac{V'V''}{V^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{3}{16}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^3+$$

$$\left.+\left(-\frac{3}{4}\frac{V''}{V}+\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)^2-\frac{3}{2}\frac{V'}{V}(u-v)-3\right],$$

$$B_2=-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V''''}{V}-\frac{V'V'''}{V^2}-\frac{3}{4}\frac{V''^2}{V^2}+\right.$$

$$+\frac{9}{4}\frac{V'^2 V''}{V^3}-\frac{15}{16}\frac{V'^4}{V^4}\Big)(u-v)^3+$$

$$+\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\Big[\Big(-\frac{3}{2}\frac{U'''}{U}+\frac{9}{4}\frac{U'U''}{U^2}-\frac{9}{8}\frac{U'^3}{U^3}\Big)(u-v)^2$$

$$+\left(3\frac{U''}{U}-\frac{3}{2}\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)-3\frac{U'}{U}\Big]+$$

$$+\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\frac{V'}{V}\sqrt{\frac{U}{V}}\Big[\Big(-\frac{1}{4}\frac{U'''}{U}+\frac{3}{8}\frac{U'U''}{U^2}-$$

$$-\frac{3}{16}\frac{U'^3}{U^3}\Big)(u-v)^3+$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)^2-\frac{3}{2}\frac{U'}{U}(u-v)+3\Big],$$

$$B_{12}=B_{21}=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{V'}{V}(u-v)+6\right)\sqrt{\frac{U}{V}}\Big(-\frac{1}{4}\frac{U''''}{U}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{U'U'''}{U^2}+\frac{3}{8}\frac{U''^2}{U^2}-\frac{9}{8}\frac{U'^2U''}{U^3}+\frac{15}{32}\frac{U'^4}{U^4}\Big)(u-v)^2-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{U'}{U}(u-v)-6\right)\sqrt{\frac{V}{U}}\Big(-\frac{1}{4}\frac{V''''}{V}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{V'V'''}{V^2}+\frac{3}{8}\frac{V''^2}{V^2}-\frac{9}{8}\frac{V'^2V''}{V^3}+\frac{15}{32}\frac{V'^4}{V^4}\Big)(u-v)^2.$$

Dalle formole ora scritte si verifica facilmente che la (2) vale anche nel caso ora studiato. Resta studiare la (3); se $K+2=0$, essa è un'identità e comunque si scelgano U e V, le (6) son compatibili ed esistono le superficie corrispondenti. Noi sappiamo dal Cap. II § 18 *B)* che si tratta in questo caso di *superficie le cui asintotiche appartengono a complessi lineari;* esse furono oggetto di uno studio più approfondito al Cap. V §§ 47 e 49 dove si sono determinate anche le loro equazioni in termini finiti. Se invece $K+2 \neq 0$ la (3) impone nuove condizioni. Sostituendovi i valori di B, Θ', Ψ', calcolati poco fa, e moltiplicando con $\sqrt{UV}$, essa diventa

$$(10) \qquad \frac{1}{2} U'''(u-v)^3 - 6U''(u-v)^2 + 30U'(u-v) - 60U =$$

$$= \omega \left[\frac{1}{2} V'''(u-v)^3 + 6V''(u-v)^2 + 30V'(u-v) + 60V \right].$$

Operandovi con $\frac{\partial^6}{\partial u^3 \partial v^3}$ si ottiene

$$\frac{d^6 U}{du^6} = -\omega \frac{d^6 V}{dv^6} = \text{costante}$$

sicchè U e V son polinomi di sesto grado al più.

Di più posto $u=v$, la (10) si riduce a $U=-\omega V$, sicchè è necessariamente

$$(11) \qquad \begin{aligned} U &= au^6 + bu^5 + cu^4 + du^3 + eu^2 + fu + g, \\ -\omega V &= av^6 + bv^5 + cv^4 + dv^3 + ev^2 + fv + g. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (10) si vede che le costanti a, b, c, d, e, f, g possono essere qualunque, purchè non sia identicamente $U=0$.

$E)$ **Le formole finali nel caso $K = \text{cost.} \neq 0$.**

Per determinare le nostre superficie resta ancora di calcolare le τ_i sostituendo i valori di β, γ nelle (B) del § 65 B, ossia nelle (6) del § presente. Sostituendo per ora i valori di $\beta, \gamma, \psi_1, \psi_2$, esse diventano, K essendo costante,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{U}{V}}\,\tau_1\right] = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{(u-v)^2}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \frac{3}{u-v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{V}{U}}\,\tau_2\right] = \omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{(u-v)^2}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U} - \frac{3}{u-v}\right),$$

$$\sqrt{\frac{V}{U}}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right]-\sqrt{\frac{U}{V}}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right]=$$
$$=\omega\frac{2}{K}\frac{1}{(u-v)^5}B.$$

Le prime due dànno

$$(12)\qquad \begin{aligned}\tau_1&=-\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{1}{2}\frac{V'}{V}+\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}+V_1(u-v)\right],\\ \tau_2&=\omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{1}{2}\frac{U'}{U}-\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}-U_1(u-v)\right],\end{aligned}$$

dove U_1 è funzione della sola u e V_1 funzione della sola v, sicchè

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right]=\omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{U}{V}\left[-\frac{(UU_1)'}{U}\frac{1}{(u-v)^2}+\right.$$
$$\left.+\left(2U_1+\frac{1}{2}\frac{U''}{U}\right)\frac{1}{(u-v)^3}-3\frac{U'}{U}\frac{1}{(u-v)^4}+6\frac{1}{(u-v)^5}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right]=\sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{V}{U}\left[-\frac{(VV_1)'}{V}\frac{1}{(u-v)^2}+\right.$$
$$\left.+\left(-2V_1-\frac{1}{2}\frac{V''}{V}\right)\frac{1}{(u-v)^3}-3\frac{V'}{V}\frac{1}{(u-v)^4}-6\frac{1}{(u-v)^5}\right]$$

e la terza equazione diventa, sostituendo anche il valore di B scritto a § 69 D e moltiplicando con $\omega\sqrt{\frac{|K|}{2}}\sqrt{UV}(u-v)^5$

$$\left[(UU_1)'+\frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U}+\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^2}\right)\right](u-v)^3+$$
$$+\left[-2UU_1-\frac{1}{2}U''+\frac{K}{2}\left(-\frac{3}{2}U''+\frac{3}{4}\frac{U'^2}{U^2}\right)\right](u-v)^2+$$

$$+\frac{K+2}{2}\cdot 3U'(u-v)-3(K+2)U=$$

(13)

$$=\omega\left\{\left[(VV_1)'+\frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V}+\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right)\right](u-v)^3-\right.$$

$$-\left[-2VV_1-\frac{1}{2}V''+\frac{K}{2}\left(-\frac{3}{2}V''+\frac{3}{4}\frac{V'^2}{V^2}\right)\right](u-v)^2+$$

$$\left.+\frac{K+2}{2}\cdot 3V'(u-v)+3(K+2)V\right\}.$$

Se $K+2=0$, quest' equazione diventa, dividendola per $(u-v)^2$

$$\left[(UU_1)'-\frac{1}{2}U'''+\frac{3}{8}\left(\frac{U'^2}{U}\right)'\right](u-v)-$$

$$-2UU_1+U''-\frac{3}{4}\frac{U'^2}{U}=$$

$$=\omega\left\{\left[(VV_1)'-\frac{1}{2}V'''+\frac{3}{8}\left(\frac{V'^2}{V}\right)'\right](u-v)+\right.$$

$$\left.+2VV_1-V''+\frac{3}{4}\frac{V'^2}{V}\right\}.$$

Se ne deduce facilmente:

$$UU_1=\frac{1}{2}U''-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U}+Au^2+Bu+C,$$

(14)

$$VV_1=\frac{1}{2}V''-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V}-\omega(Av^2+Bv+C).$$

I valori di τ_1, τ_2 sono quindi dati, nel caso di $K+2=0$, dalle (12) e (14).

Sia invece $K+2\neq 0$ sicchè valgono le (11). Poniamo

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
&UU_1 + \frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}U'' - \frac{3}{8}\frac{U'^2}{U}\right) = U_2\,, \\
&VV_1 + \frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}V'' - \frac{3}{8}\frac{V'^2}{V}\right) = V_2\,.
\end{aligned}
$$

La (13) diventa

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
&U_2'(u-v)^3 + \left(-2U_2 - \frac{K+2}{4}U''\right)(u-v)^2 + \\
&\quad + 3\frac{K+2}{2}U'(u-v) - 3(K+2)U = \\
&= \omega\left[V_2'(u-v)^3 + \left(2V_2 + \frac{K+2}{4}V''\right)(u-v)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 3\frac{K+2}{2}V'(u-v) + 3(K+2)V\right].
\end{aligned}
$$

Operandovi con $\frac{\partial^6}{\partial u^3 \partial v^3}$ si ricava, ricordando le (11),

$$U_2'''' = -\,\omega V_2''''$$

sicchè U_2 e V_2 son polinomi di quarto grado al più.

Sostituendo nella (16) si deduce tenendo conto delle (11):

$$
(17) \qquad
\begin{aligned}
U_2 &= \left(\frac{3}{4}au + \frac{b}{2}\right)(K+2)u^3 + Au^2 + Bu + C\,, \\
-\,\omega V_2 &= \left(\frac{3}{4}av + \frac{b}{2}\right)(K+2)v^3 + Av^2 + Bv + C\,.
\end{aligned}
$$

Le (12), (15) e (17) determinano le τ_i e le (D) del § 65 B dànno i coefficienti delle equazioni fondamentali.

F) **Teorema riassuntivo e osservazioni varie.**

Le superficie con $H = K + 2 = 0$ dipendono, come abbiamo visto, da due funzioni arbitrarie di un argomento. Per altri valori di K, le superficie che abbiamo determinate non dipendono che da costanti arbitrarie. Dato il valore della costante K (sia per fissare le idee $K \neq 0$), l'elemento lineare proiettivo contiene, secondo le (9) e (11), sette costanti arbitrarie. Ma tre sole di queste costanti sono essenziali. Infatti, i parametri di u, v sono stati fissati in principio del § 69 D soltanto a meno di sostituzioni della forma

$$\bar{u} = \frac{a_1 u + a_2}{a_3 u + a_4}, \quad \bar{v} = \frac{a_1 v + a_2}{a_3 v + a_4}$$

con a_1, a_2, a_3, a_4 costanti arbitrarie. Quest'osservazione permette di ridurre il numero delle costanti di tre unità. Di più, le (9) mostrano che, moltiplicando le U e V per una stessa costante, l'elemento lin. proiettivo non cambia, cosicchè infine non restano che tre costanti essenziali. Come esercizio, il lettore provi che lo stesso vale anche se $K = 0$. Quindi:

Le superficie con ∞^3 deformate proiettive sono le superficie isotermo-asintotiche per cui la forma φ_2 ha curvatura K *costante. Se* $\mathrm{K} = -2$, *esse dipendono da due funzioni arbitrarie di un argomento e sono caratterizzate geometricamente dal fatto che tutte le loro asintotiche appartengono a complessi lineari. Per ogni valore di* K *diverso da* -2 *non esistono che ∞^3 classi di ∞^3 superficie, le superficie di ciascuna classe essendo proiettivamente applicabili fra di loro.*

Data comunque una superficie del tipo studiato al § presente si possono con quadrature ottenere le quantità u, v, U, V *della precedente discussione, e quindi anche determinare le equazioni in termini finiti delle asintotiche, delle curve di Darboux e di Segre.* Supponiamo in primo luogo $K \gtrless 0$.

Essendo $H = 0$, $\Sigma\psi_i du_i$ è un differenziale esatto. Precisamente è (cfr. § 69 D)

$$\Sigma\psi_i du_i = \left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U} - \frac{3}{u-v}\right)du + \left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \frac{3}{u-v}\right)dv,$$

sicchè una prima quadratura determina

$$\frac{\sqrt{UV}}{(u-v)^3} = e^{\int \Sigma \psi_i \, du_i} .$$

Poi [§ 69 *D*, (9)]

$$\varphi_3 = \omega \left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(u-v)^3} \left(\sqrt{\frac{V}{U}}\, du^3 + \omega \sqrt{\frac{U}{V}}\, dv^3\right)$$

$$\varphi_3' = \left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(u-v)^3} \left(-\sqrt{\frac{V}{U}}\, du^3 + \omega \sqrt{\frac{U}{V}}\, dv^3\right)$$

sicchè due ulteriori quadrature dànno

$$\bar{u} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{U}} = \frac{\omega}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{|K|}{2}} \int e^{-\frac{1}{3}\int \Sigma \psi_i \, du_i} \sqrt[3]{\varphi_3 - \omega \varphi_3'} ,$$

$$\bar{v} = \int \frac{dv}{\sqrt[3]{V}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{|K|}{2}} \int e^{-\frac{1}{3}\int \Sigma \psi_i \, du_i} \sqrt[3]{\varphi_3 + \omega \varphi_3'} .$$

Notiamo che ciò basta per ottenere le equazioni in termini finiti delle asintotiche ($d\bar{u} = 0$, $d\bar{v} = 0$), delle curve di Darboux ($d\bar{u}^3 + \omega d\bar{v}^3 = 0$) e delle curve di Segre ($d\bar{u}^3 - \omega d\bar{v}^3 = 0$). Per determinare u e v, occorrono ulteriori quadrature. Sia $(\varphi_3)_0$ ciò che si ottiene da φ_3 dando a $\bar{v}$ un valore fisso scelto a piacere; le $\left[\frac{\sqrt{UV}}{(u-v)^3}\right]_0$, v_0 e V_0 abbiano significato analogo; sarà:

$$(\varphi_3)_0 = \omega \left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{(u-v)^3}{\sqrt{UV}}\right]_0 \frac{V_0}{(u-v_0)^6}\, du^3 .$$

Poichè $\frac{\sqrt{UV}}{(u-v)^3}$ è noto, un'ulteriore quadratura determina $\int \frac{du}{\sqrt{|u-v_0|}}$ e quindi u. Analogamente si ottiene v. Finalmente

$$U=\frac{du^3}{d\bar{u}^3} \quad , \quad V=\frac{dv^3}{d\bar{v}^3}.$$

Le cose si presentano più semplicemente se $K=0$. È (cfr. § 69 B)

$$\Sigma\psi_i du_i = \frac{1}{2}\frac{U'}{U}du + \frac{1}{2}\frac{V'}{V}dv,$$

$$\Sigma\psi_i Du_i = -\frac{1}{2}\frac{U'}{U}du + \frac{1}{2}\frac{V'}{V}dv,$$

cosicchè

$$\sqrt{UV} = e^{\int \Sigma\psi_i du_i} \quad , \quad \sqrt{\frac{V}{U}} = e^{\int \Sigma\psi_i Du_i} \quad ;$$

il che determina U e V. Poi

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{V}{U}}\, du^3 + \sqrt{\frac{U}{V}}\, dv^3,$$

$$\varphi_3' = -\sqrt{\frac{V}{U}}\, du^3 + \sqrt{\frac{U}{V}}\, dv^3,$$

cosicchè

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int e^{\frac{1}{3}\int \Sigma\psi_i Du_i} \sqrt[3]{\varphi_3 - \varphi_3'},$$

$$v = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int e^{-\frac{1}{3}\int \Sigma\psi_i Du_i} \sqrt[3]{\varphi_3 + \varphi_3'}.$$

Le equazioni in termini finiti delle curve di Darboux e Segre sono qui

$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{U}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt[3]{V}} = \text{costante}.$$

In ciò che precede si è implicitamente ammesso che le asintotiche delle nostre superficie siano reali. Ma è agevole vedere che le formole trovate dànno, usando convenientemente l' immaginario, anche tutte le superficie con $H=0$, $K=\text{cost.}$ a linee asintotiche immaginarie. Se $K=0$, per arrivare ad una superficie reale, basta far assumere ai parametri u e v valori complessi coniugati, nella (5) prendere a reale, e b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 complessi coniugati, e nella $(7)_{\text{bis}}$ prendere e reale, f_1, f_2 complessi coniugati. Se $K+$ $+2=0$, basta dare a u e v, U e V valori complessi coniugati. Se $K<0$, $K+2 \gtrless 0$, i parametri u e v devono assumere valori complessi coniugati, le costanti in (11) e quelle in (17) devono essere reali. Finalmente se $K>0$, occorre far assumere valori complessi coniugati a u e $-\frac{1}{v}$. La costante d in (11) deve essere reale, a e $-g$, b e f, c e $-e$ complesse coniugate. Nelle (17) B deve essere reale, A e $-C$ complessi coniugati.

$G)$ Quadro finale delle forme fondamentali delle superficie con $H=0$, $K=cost.$

1° $K=0$.

$$\varphi_2 = 2\,du\,dv,$$

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3 + \sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3,$$

$$\mathrm{T} = \Sigma \tau_i du_i = \sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V}u + \frac{1}{2}\frac{V''}{V} - \frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2} + \right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2}b_1v^2+ev+f_2}{V}\Big)du+$$

$$+\sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U}v+\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{\frac{1}{2}b_2u^2+eu+f_1}{U}\right)dv,$$

dove

$$U=au^3+b_1u^2+c_1u+d_1,$$

$$V=av^3+b_2v^2+c_2v+d_2.$$

2° $K=-2$ (*superficie con tutte le asintotiche di complessi lineari*).

$$\varphi_2=-\frac{2\,du\,dv}{(u-v)^2},$$

$$\varphi_3=\frac{1}{(u-v)^3}\left(-\sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3+\sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3\right),$$

$$\mathrm{T}=\Sigma\tau_i du_i=-\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}+\frac{1}{2}\frac{V'}{V}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\frac{V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2}+\frac{Av^2+Bv+C}{V}\right)(u-v)\right]du+$$

$$+\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}-\frac{1}{2}\frac{U'}{U}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{Au^2+Bu+C}{U}\right)(u-v)\right]dv,$$

dove

A, B, C sono costanti,

U è funzione arbitraria di u,

V è funzione arbitraria di v.

3° $K(K+2) \neq 0$.

$$\varphi_2 = \frac{4\,du\,dv}{K\,(u-v)^2},$$

$$\varphi_3 = \omega\left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(u-v)^3}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3 + \omega\sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3\right),$$

$$\mathrm{T} = \Sigma\tau_i\,du_i = -\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v} + \frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \right.$$

$$+\left(-\frac{K}{4}\frac{V''}{V} + \frac{3K}{16}\frac{V'^2}{V^2} - \right.$$

$$\left. \left. -\,\omega\,\frac{\left(\frac{3}{4}av + \frac{b}{2}\right)(K+2)v^3 + Av^2 + Bv + C}{V}\right)(u-v)\right]du -$$

$$-\,\omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v} - \frac{1}{2}\frac{U'}{U} + \right.$$

$$+\left(-\frac{K}{4}\frac{U''}{U} + \frac{3K}{16}\frac{U'^2}{U^2} + \right.$$

$$\left. \left. +\,\frac{\left(\frac{3}{4}av + \frac{b}{2}\right)(K+2)u^3 + Au^2 + Bu + C}{U}\right)(u-v)\right]dv,$$

dove

$$U = au^6 + bu^5 + cu^4 + du^3 + eu^2 + fu + g,$$

$$-\,\omega V = av^6 + bv^5 + cv^4 + dv^3 + ev^2 + fv + g,$$

$$\omega = sgn\,K.$$

§ 70. — Nuovo metodo per lo studio dei problemi precedenti.

A) Principio del metodo. (F)

Lo studio dei problemi precedenti in coordinate asintotiche porta allo studio del sistema (cfr. le (14) e (15) del Cap. II, § 16 *D*)

$$L_v = -(2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma)\,, \tag{1}$$

$$M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) \tag{2}$$

$$\beta_{vvv} + \beta M_v + 2M\beta_v = \gamma_{uuu} + \gamma L_u + 2L\gamma_u\,. \tag{3}$$

Se la superficie non è rigata (caso già studiato al Cap. IV, § 40) potremmo introdurre una nuova incognita ausiliaria R, indicando con $\beta\gamma R$ i due membri della (3). Allora dalle (1), (2), (3) si potranno dedurre L_v, M_u, L_u, M_v come funzioni lineari di L, M, R. Dalle condizioni d'integrabilità $L_{uv} = L_{vu}$, $M_{uv} = M_{vu}$, troviamo delle equazioni lineari in R_u, R_v, di cui si debbono cercare le nuove condizioni di integrabilità. Questo metodo inizialmente concepito dal Fubini è di complicazione non inferiore al precedente, ed ha lo svantaggio di fare i calcoli in coordinate particolari, senza vedere chiaramente i fatti invariantivi, che invece sono posti in evidenza dal metodo precedente dovuto al Čech.

Esso diventa però semplice in qualche ricerca particolare, p. es. nella ricerca dei tipi, cui appartengono due superficie tra loro applicabili. A ciò dedichiamo il resto di questo Capitolo.

La forma lineare delle (1), (2), (3) dimostra che le sue soluzioni sono del tipo

$$L + \Sigma h_i P_i \quad , \quad M + \Sigma h_i Q_i$$

ove L, M sia una soluzione particolare, P_i, Q_i (*) sono soluzioni

(*) qui gli indici non indicano per nulla sistemi covarianti.

particolari del sistema *omogeneo*

$$(4) \qquad P_v = Q_u = 0 \quad , \quad \beta Q_v + 2Q\beta_v = \gamma P_u + 2P\gamma_u .$$

E perciò:

Se una superficie è deformabile, è deformabile in infiniti modi, al massimo in ∞^3 modi (se restano arbitrarî i valori iniziali di L, M, R).

Quando mai le (4) sono risolubili? Cominciamo ad osservare che, se L, M ed L', M' sono due sistemi di soluzioni di (1), (2), (3), allora (Cap. II, § 16 D)

$$(L - L')du^2 + (M - M')dv^2$$

ha carattere intrinseco. Tali saranno perciò le forme

$$(5) \qquad P_i du^2 + Q_i dv^2$$

Per le (4) sarà P_i funzione della sola u, Q_i della sola v. Se la superficie è deformabile, ed esiste almeno una forma (5) non nulla, potremo cambiare i parametri delle u, v (e scambiare, eventualmente, le u, v) in guisa che la (5) considerata sia del tipo

$$dv^2 \qquad \text{oppure} \qquad du^2 + dv^2$$

cioè $\qquad P = 0 \; , \; Q = 1 \qquad$ oppure $\qquad P = Q = 1 .$

Nel primo caso possiamo ancora scegliere arbitrariamente il parametro u. Nel primo caso è, come si vede dalle (4): $\beta_v = 0$, cioè β funzione della sola u. Cambiando il parametro u, potrò rendere $\beta = 1$.

Nel secondo caso è $\beta_v = \gamma_u$. Siamo nel caso di una superficie R. Quindi:

Una superficie deformabile non rigata o è una superficie R *di Tzitzéica, oppure si può per essa rendere* $\beta = 1$. *Ogni superficie di questi tipi è almeno deformabile in* ∞^1 *modi.* Vediamo quando essa è deformabile in ∞^3 modi.

$B)$ Le superficie con $\beta = 1$ deformabili in ∞^3 modi.

Le (4) diventano

$$P_v = Q_u = 0 \quad , \quad Q_v = \gamma P_u + 2P\gamma_u .$$

Poichè P ne risulta funzione di u, Q di v, indicheremo P con la lettera U e Q con V, cosicchè avremo l'equazione

$$V' = \gamma U' + 2U\gamma_u . \tag{6}$$

Dobbiamo cercare quando, oltre alla soluzione $U=0$, $V=1$, ve ne sono altre due U_1 e V_1 ed U_2, V_2 *indipendenti linearmente.* Posto $U=U_i$ e $V=V_i$ in (6) per $i=1, 2$, troviamo due equazioni lineari, che, risolute rispetto a γ ed a γ_u, danno

$$\gamma = \frac{V_1' U_2 - U_1 V_2'}{U_1' U_2 - U_1 U_2'} \quad , \quad 2\gamma_u = \frac{U_1' V_2' - V_1' U_2'}{U_1' U_2 - U_1 U_2'} .$$

Derivando la prima e confrontando con la seconda, si deduce

$$\gamma_u = -2\gamma_u - \gamma \frac{d}{du} \log(U_1' U_2 - U_1 U_2')$$

donde

$$\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \, \partial v} = 0 .$$

E perciò $\gamma = U_3' V_3$, ove U_3 è funzione di u, V_3 di v. La (6) diventa

$$V' = U_3' V_3 U' + 2UU_3'' V_3 ,$$

cioè

$$U_3' U' + 2UU_3'' = h \qquad (h = \text{cost.}) ,$$

da cui si deduce appunto

$$U = \frac{hU_3 + k}{U_3'^2} \qquad (h \, , \, k \text{ costanti}).$$

Se una superficie con $\beta = 1$ *è deformabile in* ∞^3 *modi, allora* γ *è prodotto di una funzione della* u *per una funzione della* v *e si ha* K $= 0$.

Dovremo ora studiare le (3) in questo caso: cosa facile, ma qui inutile dopo i risultati del precedente §.

C) Superficie con $\beta = 1$, $K \neq 0$, deformabili al più in ∞^2 modi.

La (6) possegga ora *una sola* soluzione U, V (a meno di un fattore costante) con $U \neq 0$. Derivando rispetto ad u, troviamo

$$\gamma U'' + 3\gamma_u U' + 2U\gamma_{uuu} = 0.$$

Essendo $U \neq 0$, questa equazione in γ possederà due soluzioni indipendenti U_1', U_2' funzioni della sola u. E sarà

$$\gamma = U_1' V_1 + U_2' V_2 \tag{7}$$

ove le V_i sono funzioni della sola v. Nell'ipotesi $K \neq 0$, sia le U_1' ed U_2' che le V_1, V_2 saranno linearmente indipendenti. Dato γ, e scrittolo sotto la forma precedente, la U dovrà soddisfare alle

$$U_i' U'' + 3U_i'' U' + 2U_i''' U = 0,$$

cioè

$$U_i' U' + 2U_i'' U = h_i \quad , \quad (h_i \text{ costanti})$$

ossia

$$U_i'^2 U = h_i U_i + k_i \qquad (h_i,\ k_i \text{ costanti}). \tag{8}$$

Le due funzioni U_i sono dunque legate dalla

$$\frac{U_1'^2}{h_1 U_1 + k_1} = \frac{U_2'^2}{h_2 U_2 + k_2}. \tag{9}$$

Le superficie con $\beta = 1$, $K \neq 0$ *deformabili in* ∞^2 *modi sono, se esistono, quelle per cui* γ *ha il valore* (7), *dove le* U_1, U_2 *sono legate dalle* (9) (in cui, si noti, se $h_i \neq 0$, si può supporre, mutando $U_i + \frac{k_i}{h_i}$ in U_i, che $k_i = 0$).

Per il resto del calcolo assai facile, e che lasciamo al lettore, si devono discutere le (1), (2), (3).

D) Le superficie *R* deformabili in ∞^3 modi.

Le superficie R *deformabili in* ∞^2 *modi sono, se esistono, quelle per cui esiste una soluzione* (diversa da $U = V = \text{cost.}$) delle (4) cioè *della*

$$\beta V' + 2\beta_v V = \gamma U' + 2\gamma_u U. \tag{10}$$

Noi qui ci accontentiamo di studiare quelle deformabili in ∞^3 modi, cioè quelle per cui la (10) ammette due nuove soluzioni U_i, V_i $(i = 1, 2)$, che con la $U = V = 1$ formino un sistema di tre soluzioni indipendenti. Ponendo in (10) $U = U_i$ e $V = V_i$ si hanno due equazioni lineari in β, γ e $\beta_v = \gamma_u$. Risolvendole si trova il valore di $\frac{\beta_v}{\beta}$; da cui integrando si ha:

$$\beta^2 [U_2'(V_1 - U_1) - U_1'(V_2 - U_2)] = U_3^3, \tag{11}$$

ove U_3 è una funzione della u. Così analogamente, risolvendo rispetto a $\frac{\gamma_u}{\gamma}$, integrando, indicando con V_3 una funzione della v, si trova:

$$\gamma^2 [V_2'(V_1 - U_1) - V_1'(V_2 - U_2)] = V_3^3. \tag{11$_{\text{bis}}$}$$

Ma, dividendo l'un per l'altro i valori trovati di $\frac{\beta_v}{\beta}$ e $\frac{\gamma_u}{\gamma}$ (e ricordando che $\beta_v = \gamma_u$) si trova che

$$\frac{\beta}{U_2'(V_1 - U_1) - U_1'(V_2 - U_2)} = \tag{11$_{\text{ter}}$}$$

$$= \frac{\gamma}{V_2'(V_1 - U_1) - V_1'(V_2 - U_2)}.$$

Dividendo membro a membro le (11) e (11)$_{\text{bis}}$ e ricordando (11)$_{\text{ter}}$, si trova che

$$\beta : \gamma = U_3 : V_3,$$

cioè che *la superficie è isotermo-asintotica.*

La ricerca è p. es. ridotta allo studio della equazione non semplice

$$U_3 : V_3 = U_2'(V_1 - U_1) - U_1'(V_2 - U_2) :$$

$$: V_2'(V_1 - U_1) - V_1'(V_2 - U_2).$$

È inutile proseguire il calcolo, fatto per via più completa nelle pagine precedenti.

INDICE

NB. Per chi voglia riunire tutta l' opera in un solo volume, le pagine del presente indice sono state predisposte in modo da potere essere tolte quando sarà stato pubblicato anche il tomo II; il quale, dopo liberato del frontespizio, risulterà una pura continuazione del I per la numerazione dei capitoli e delle pagine, e conterrà alla fine l' indice completo di tutta l' opera.

Prefazione . . . . pag. v

INTRODUZIONE.

§ 1. — *Coordinate, versi, orientazioni* . . . . . . pag. 1
(Coordinate di punto, piano e retta. I simboli S, Σ. Orientazioni di una retta. Orientazione di un fascio. Alcune identità di matrici).
§ 2. — *Collineazioni* . . . . » 8
(Preliminari. Collineazioni nello spazio rigato).
§ 3. — *Contatto di curve e superficie* . . . . . . » 11
(Contatto di curve. Contatto di superficie. Contatto di superficie in corrispondenza biunivoca).
§ 4. — *Osservazioni varie* . . . . » 16
(Curve razionali di terzo grado. Varietà di terzo grado. La retta principale del Togliatti. Una ulteriore generalizzazione. La divisione covariante).

CAP. I. — LA TEORIA DELLE CURVE.

§ 5. — *La teoria delle curve in geometria euclidea* . . . pag. 23
(Gli invarianti fondamentali. Equazioni intrinseche di una curva. Nuova deduzione degli invarianti fondamentali).
§ 6. — *Geometria proiettivo-differenziale delle curve* . . » 26
(Preliminari analitici. Applicazione della teoria delle curve. Le curve come luogo ed inviluppo. Le equazioni differenziali fondamentali. Le curve di un complesso lineare. Significato del segno di $\omega = \pm 1$. Le collineazioni a modulo qualsiasi. Coordinate normali).
§ 7. — *Gli elementi geometrici fondamentali* . . . . » 37
(Sistema nullo osculatore. Il tetraedro principale. Altri elementi geometrici. Una osservazione).
§ 8. — *Le curve piane* . . . . » 45
(Una osservazione).

Cap. II. — I FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE.

§ 9. — *Formole di calcolo assoluto* . . . . pag. 49
(Differenziali controvarianti. Alcune definizioni. Le geodetiche. Derivate covarianti. Una generalizzazione. I simboli a quattro indici e alcuni parametri differenziali. Relazioni di apolarità).

§ 10. — *Riassunto di alcuni teoremi metrici* . . . . » 56
(Triedri diretti e inversi. Le forme fondamentali di Gauss di una superficie. Raggi e linee di curvatura. Elemento lineare dell'immagine sferica. Superficie applicabili).

§ 11. — *Prime considerazioni di geom. proiettiva* . . . » 61
(Le direzioni asintotiche. Le direzioni di Darboux).

§ 12. — *Le forme differenziali fondamentali* . . . . » 64
(Primo metodo. Nuovo metodo per definire le F_2, F_3. Le forme F_2, F_3 nella geometria metrica. Una osservazione).

§ 13. — *Prime applicazioni* . . . . » 73
(Superficie correlative. Significato geometrico del fattore di proporzionalità delle ξ).

§ 14. — *Le equazioni differenziali fondamentali e la terza forma differenziale* . . . . » 78
(Formole fondamentali. La forma P — II. Altre equazioni fondamentali. Il teorema fondamentale).

§ 15. — *Varii sistemi di coordinate* x, ξ . . . . . . » 83
(Un primo sistema di coordinate. Coordinate non omogenee. Superficie rigate. Coordinate normali. Rette normali. Metrica normale).

§ 16. — *Il caso di linee coordinate asintotiche* . . . . » 89
(Le forme F_2, F_3, P, II, Q. Flecnodi. Osservazioni varie. Condizioni di integrabilità. Calcolo di $(x\, dx\, d^2x\, d'x)$. Il cono di Segre. Confronto con le formole della Geom. metrica).

§ 17. — *Applicazione agli invarianti di un sistema coniugato* » 102
(Calcolo di tali invarianti. Sistemi coniugati ad invarianti uguali. Un'altra applicazione).

§ 18. — *Nuovi studii in coordinate asintotiche* u, v . . . » 109
(Coordinate non omogenee e di Lelieuvre. Asintotiche appartenenti a complessi lineari. Superficie di cui tutte le asintotiche appartengono a complessi lineari).

§ 19. — *Le rette tangenti* . . . . » 117

§ 20. — *Applicabilità proiettiva* . . . . » 118
(Il teorema fondamentale. Una proprietà caratteristica di due superficie proiettivamente applicabili. Un'altra proprietà caratteristica delle superficie proiettivamente applicabili).

Cap. III. — GLI ELEMENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI.

§ 21. — *La quadrica di Lie* . . . . pag. 125
(Sua definizione. Interpretazioni geometriche della forma φ_2

e dell' elemento lineare $\varphi_3 : \varphi_2$. Fascio delle quadriche di Darboux. La quadrica di Lie come iperboloide osculatore).
§ 22. — *La corrispondenza di Segre* . . . . pag. 132
§ 23. — *Geodetiche, e analoghi sistemi di curve* . . . » 133
(Primi teoremi. Terne apolari. Le coppie apolari e la conica di Wilczynski. Interpretazione non euclidea della metrica proiettiva. Curve di un fascio; l' asse della superficie).
§ 24. — *Le pangeodetiche. Il fascio canonico* . . . . » 141
§ 25. — *Congruenze di rette* . . . . » 144
(Sviluppabili e fuochi. Le direttrici di Wilczynski. Congruenze K coniugate e K' armoniche ad S, tra cui si corrispondono le sviluppabili. Le superficie a curvatura —2. Le congruenze a sviluppabili indeterminate).
§ 26. — *Lo spigolo* (edge) *di Green* . . . . . » 153
§ 27. — *Il fascio canonico* . . . . » 155
§ 28. — *Le superficie per cui una retta canonica passa per un punto fisso, e superficie duali* . . . . . . » 160
(Caso delle normali proiettive. Formole generali. Il caso $1 + k = 0$ (per l' asse). Il caso $k = 0$ delle direttrici. Le superficie di Tzitzeica-Wilczynski).
§ 29. — *Le superficie di Čech a linee di Darboux piane* . . » 170
§ 30. — *Breve riassunto di altre ricerche* . . . . . » 177

Cap. IV. — SUPERFICIE RIGATE.

§ 31. — *Applicazione delle formole generali del Capitolo II al caso particolare di una superficie rigata* . . . . pag. 181
§ 32. — *Deduzione diretta dei risultati precedenti e prime applicazioni* . . . . » 187
(Nuova deduzione delle (11). Applicazione alla quadrica di Lie).
§ 33. — *Orientazione delle generatrici; espressioni intrinseche. Formole relative al cambiamento di variabili* . . . » 193
§ 34. — *Linee asintotiche, la forma bilineare intrinseca* . . » 198
(Linee asintotiche. La forma bilineare fondamentale. Congruenza flecnodale).
§ 35. — *Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a due curve flecnodali distinte* . . » 206
(Coordinate normali. Invarianti fondamentali d' una rigata a linee flecnodali distinte. Alcune applicazioni geometriche).
§ 36. — *Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a curve flecnodali coincidenti* . . » 216
(Determinazione di queste rigate per mezzo di invarianti. Alcune interpretazioni geometriche).
§ 37. — *Il complesso lineare osculatore* . . . . . . » 222
§ 38. — *Ulteriore studio di superficie rigate a curve flecnodali distinte, prive di retta direttrice* . . . . . » 226

§ 39. — *La trasformazione flecnodale* . . . . . . pag. 231
§ 40. — *L'applicabilità proiettiva di superficie rigate* . . » 238

CAP. V. — CONGRUENZE, CONGRUENZE *W* E TRASFORMAZIONI PER CONGRUENZE *W*.

§ 41. — *Congruenze di assegnata prima falda focale* . . pag. 243
(Formole fondamentali. Nuova interpretazione delle formole precedenti).
§ 42. — *Formole fondamentali della teoria delle congruenze* W » 250
§ 43. — *Le congruenze* W *con* N = *cost.* . . . . . . » 253
§ 44. — *Confronto coi risultati classici della geometria metrica* » 255
§ 45. *L'equazione delle congruenze* W *in coordinate di retta* » 260
§ 46. — *Le congruenze di Wilczynski* . . . . . . » 263
§ 47. — *Congruenze* W *di cui una falda focale* S *è quadrica*. » 266
(Primi teoremi. Interpretazione nella geometria non euclidea. Inversione dei teoremi dati in *A*).
§ 48. — *Congruenze* W *con le due falde rigate* (non quadriche) » 276
§ 49. — *Superficie trasformate delle rigate con congruenze* W . » 278
§ 50. — *Composizione di Bianchi di due congruenze* W . . » 280
§ 51. — *Le trasformazioni* W *di Fubini delle superficie isotermo-asintotiche* . . . . » 283
§ 52. — *Le trasformazioni di Ionas per congruenze* W *delle superficie* R . . . . » 287
§ 53. — *Le trasformazioni di Ionas delle superficie di Ionas* . » 290
§ 54. — *Il teorema di Fubini per le trasformazioni delle superficie* R . . . . » 293
(Una osservazione sulla teoria delle congruenze *W*)

CAP. VI. — INVARIANTI DELL'ELEMENTO LINEARE PROIETTIVO.

§ 55. — *Alcune considerazioni preliminari* . . . . pag. 295
§ 56. — *I differenziali coniugati* . . . . » 297
§ 57. — *La forma differenziale* F_3' . . . . » 300
(Definizione di F_3'. Alcune identità notevoli).
§ 58. — *La forma differenziale* $\Sigma\psi_i\, du_i$ . . . . . . » 305
(Definizione delle ψ_i. Relazioni con le $p_{rs} - \Pi_{rs}$).
§ 59. — *Gli invarianti del primo ordine dell'elemento lineare proiettivo* . . . . » 307
(Definizione. Alcune identità nel caso $\Phi \neq 0$. Altre identità. Il caso $\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$).
§ 60. — *Invarianti del secondo ordine dell'elemento lineare proiettivo* . . . . » 315
(Definizione. Il caso $\Phi \neq 0$. Il caso $\Phi = 0$. Il caso delle Φ e Ψ costanti).

§ 61. — *Il primo problema dell' applicabilità proiettiva* . . pag. 319
(Preliminari. Condizioni necessarie. Condizioni sufficienti. Nuova forma delle condizioni sufficienti).
§ 62. — *Continuazione. Elementi lineari proiettivi con un gruppo continuo di trasformazioni in sè* . . . . . . » 325
(Alcune formole preliminari Un lemma. Il teorema fondamentale).

CAP. VII. — CONDIZIONI D' INTEGRABILITÀ E SUPERFICIE PROIETTIVAMENTE APPLICABILI.

§ 63. — *Condizioni d' integrabilità delle equazioni fondamentali* pag. 335
(Equazioni preliminari. Trasformazione delle (5). Calcolo delle l_i).
§ 64. — *Continuazione* . . . . » 340
(Condizioni d' integrabilità delle $(1)_{bis}$. Studio delle (1). Studio della (2). Esame delle condizioni d' integrabilità. Teorema riassuntivo).
§ 65. — *Trasformazione delle equazioni trovate per superficie non rigate. Caso di coordinate normali* . . . . » 345
(Il caso $J \neq 0$. Nuovo enunciato per le coordinate normali).
§ 66. — *Nuova trasformazione delle equazioni trovate per il caso di coordinate normali* . . . . . . » 350
(Introduzione della funzione ausiliaria σ. Studio delle (2)).
§ 67. — *Deformazione proiettiva* . . . . » 353
(Il problema fondamentale. Il sistema coniugato di deformazione proiettiva. Superficie R e R_0. Deformazione proiettiva di una superficie data).
§ 68. — *Teoremi varii sulle superficie* R *e* R_0 . . . . . » 360
(Elemento lineare riferito alle asintotiche. Un teorema per le superficie R_0 o R).
§ 69. — *Le superficie proiettivamente deformabili in* ∞^3 *modi* » 364
(Preliminari. Il caso $K = 0$. Continuazione. Formole finali relative al caso $K = 0$. Il caso $K = \text{cost.} \neq 0$. Le formole finali nel caso $K = \text{cost.} \neq 0$. Teorema riassuntivo e osservazioni varie. Quadro finale delle forme fondamentali delle superficie con $H = 0$, $K = \text{cost.}$)
§ 70. — *Nuovo metodo per lo studio dei problemi precedenti* . » 384
(Principio del metodo. Le superficie con $\beta = 1$ deformabili in ∞^3 modi. Superficie con $\beta = 1$, $K \neq 0$, deformabili al più in ∞^2 modi. Le superficie R deformabili in ∞^3 modi).