

Zur wellenoptischen Berechnung der Punktbildverwaschungsfunktion bei Berücksichtigung von Anisotropie und Polarisation

DIETER RICHTER

Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht“, Potsdam, DDR.

Die Berechnung der Punktbildverwaschungsfunktion erfolgt für die Abbildung durch optische Systeme aus isotropen Medien über das Luneburg-Integral. In dieser Arbeit wird dieses Verfahren auf anisotrope Medien mit Absorption erweitert. Für die verallgemeinerte Luneburg-Formel wird das Integrationselement gedeutet und für praktische Rechnungen in guter Näherung angegeben.

1. Einleitung

Für die Erfassung der Güte der optischen Abbildung ist die Kenntnis der Intensitätsverteilung im Bild eines Objektpunktes gelegentlich wichtig. Durch die zunehmende Bedeutung von Anisotropie und Absorption der Medien auf die optische Abbildung ist die theoretische und praktische Erweiterung der Methoden der "Punktbild"-Berechnung notwendig.

Die bekannten wellenoptischen Methoden zur Berechnung des Punktbildes [1] basieren sämtlich auf der Näherungsvorstellung von DEBYE [2], für die wesentlich ist, daß die Wellenlänge des optischen Bereichs des verwendeten Lichtes sehr klein gegen die geometrischen Abmessungen des Bildraumes ist. Weiterhin wird fast immer unpolarisiertes Licht und ein optisches System mit homogenen, isotropen Medien vorausgesetzt. Da bei der Berechnung des Punktbildes für Systeme mit anisotropen Medien auf die Polarisation nicht verzichtet werden kann, erheben sich die bekannten Schwierigkeiten der vektoriellen Formulierung und Anwendung der Kirchhoffschen Formel [1], [3], [4]. Die von FOCKE [5] angegebene Herleitung des Picht-Integrals und seine Benutzung in der Luneburg-Form [6] bietet die Möglichkeit einer Verallgemeinerung auf anisotrope homogene Medien. Da das Debye-Modell davon ausgeht, daß der Lichtdurchgang durch das optische System geometrisch-optisch erfaßt werden kann und die so erhaltene Lichterregung in der Austrittspupille als asymptotischer "Randwert" für die wellenoptische Rechnung im Bildraum in der Nähe des Bildpunktes benutzt wird, sind 2 Probleme zu lösen. Es ist die Strahldurchrechnung eines beliebigen Strahls durch anisotrope Medien bei gleichzeitiger Berechnung des Polarisationsvektors und der Amplitude zu

formulieren. Zum anderen ist die Picht- bzw. Luneburg-Formel auf einen möglicherweise anisotropen Bildraum zu erweitern.

Das Interesse an den genannten Problemen erwächst aus den steigenden Forderungen an optische Systeme, die anisotrope Medien enthalten bzw. deren isotrope Medien durch äußere Effekte anisotrop wurden (z.B. Spannungsdoppelbrechung).

2. Lichtausbreitung in anisotropen Medien

Entsprechend den geometrisch-optischen Vorstellungen zur optischen Abbildung [1], [9] und den Gesetzen der Ausbreitung ebener Wellen durch anisotrope Medien [7], [8], [10], [11] hat man sich vorzustellen, daß sich das Licht längs raumfester Lichtstrahlen in der Art ebener Wellen ausbreitet. Dabei ist besonders zu beachten (siehe auch Figur 1):

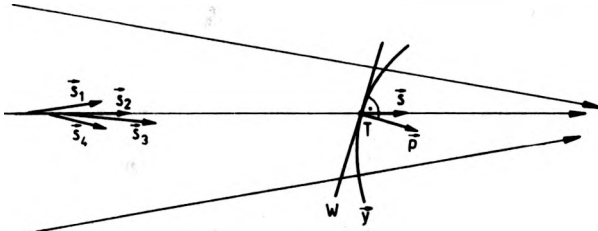


Fig. 1. Zur Geometrie der Strahlenbündel in anisotropen Medien. $\vec{p} = (p, q, m) = n\vec{w}$, $|\vec{w}| = 1$ charakterisiert den Ortsvektor der Wellenvektorfläche. \vec{y} ist der Ortsvektor der geometrisch-optischen Wellenfläche. $\vec{r} = \frac{1}{s}\vec{s}$ ist der Ortsvektor der Strahlvektorfläche, s bzw. n sind der Strahlen- bzw. Wellenindex $|\vec{s}| = 1$

a) Das Strahlen-Wellenfeld ist entsprechend der Aufspaltung beim Übergang in ein anisotropes Medium von der Vielfachheit 2^k , wobei k die Zahl der Übergänge ist.

b) Der von der ebenen Welle W zurückgelegte optische Weg ist auf dem Strahl von gleicher Länge wie auf der Wellennormale. So kann man auf den Strahlenbündeln die geometrisch-optischen Wellenflächen \vec{y} konstanter Phase konstruieren. Die Normalen dieser Flächen haben die Richtung der Wellenvektoren \vec{p} der ebenen Wellen. Die Wellenfläche korrespondiert zur Orthogonalfläche (nach Malus) bei isotropen Medien.

c) Der Strahlvektor \vec{p} und der Strahlvektor \vec{r} sind nicht parallel. Es gilt

$$\vec{p}\vec{r} = 1. \quad (1)$$

Die mathematische Beschreibung setzt ebene Wellen für die elektromagnetischen Felder und einen nichthermiteschen Tensor 2. Stufe für die dielektrische Materialgleichung voraus, um auch Dämpfung bzw. Absorption zu erfassen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = A\vec{e}\exp\{i[\omega t - k(\vec{r}\vec{p})]\}, \quad (2)$$

analog für \vec{D} , \vec{H}

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{p}, \tau) E_j. \quad (3)$$

Hier ist \vec{e} der normierte Polarisationsvektor, A kennzeichnet die Amplitudendurchlässigkeit, ω ist die Kreisfrequenz und $k = \omega/c$, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. τ erfaßt die Ursachen für induzierte Anisotropien, wobei die Abhängigkeit von \vec{p} die räumliche Dispersion charakterisiert. Im allgemeinen wird ε_{ij} komplex sein. Bei Absorption ist auch \vec{p} komplex. Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt mit (2, und (3)

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{e} &= \mu_0 c \vec{h}, & \vec{h} \vec{p} &= 0, \\ \vec{p} \times \vec{h} &= -\varepsilon_0 c \vec{d}, & \vec{d} \vec{p} &= 0, & d_i &= \varepsilon_{ij} e_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Für \vec{e} folgt aus (4) die Gleichung

$$(\vec{p}^2 \underline{1} - \vec{p} \vec{p} - \varepsilon) \vec{e} = 0, \quad (4.1)$$

deren verschwindende Determinante, als Dispersionsgleichung bekannt, die Lösbarkeit von (4.1) garantiert. Diese Gleichung (die Gleichung der Wellenvektorfläche) lautet:

$$\vec{p}^2 (\vec{p} \varepsilon \vec{p}) + \vec{p} (\varepsilon^2 - \langle \varepsilon \rangle \varepsilon) \vec{p} + |\varepsilon| = 0. \quad (5)$$

Hierbei ist $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ und $|\varepsilon|$ ist die Determinante des ε -Tensors. Aus (4.1) läßt sich mittels Projektionsmatrix der Polarisationsvektor \vec{e} bestimmen. Aus den Stetigkeitsbedingungen der Maxwell-Gleichungen [10] läßt sich Reflexion und Brechung verfolgen. Dabei ergibt sich, daß das Brechungsgesetz für die ebenen Wellen nur einen neuen Koeffizienten x für den Normaleneinheitsvektor \vec{n} erhält

$$\vec{p}' = \vec{p} + x \vec{n}, \quad (6)$$

x ergibt sich aus (5) als Lösung einer Gleichung 4. Grades. Bei Absorption ist x komplex und die Bestimmungsgleichung aus (5) zerfällt in 2 gekoppelte reelle Gleichungen 4. Grades. Zur Berechnung der skalaren Amplituden A sind die bekannten Stetigkeitsbedingungen für die Feldamplitude oder bei Medien mit räumlicher Dispersion verallgemeinerte Bedingungen [10], [12] anzusetzen.

Für die rechnerische Strahlverfolgung durch Systeme mit anisotropen Medien ist noch der recht verwickelte Zusammenhang

$$\vec{t} = \vec{t}(\vec{p}) \quad (7)$$

notwendig, da die räumliche Fixierung des Lichtverlaufs über die Strahlen erfolgen muß. Gl. (7) folgt nach [3], [7] aus der Tatsache, daß die Strahlrichtung die stationäre Richtung benachbarter ebener Wellen ist. Eine Auflösung von (7) nach \vec{p} ist allgemein nicht analytisch möglich. Danach ergibt sich ein Zyklus der Strahldurchrechnung (für 1 Fläche) nach Figur 2 womit der Lichtverlauf basierend auf der Vorstellung ebener Wellen und zugehöriger Strahlen bestimmt werden kann.

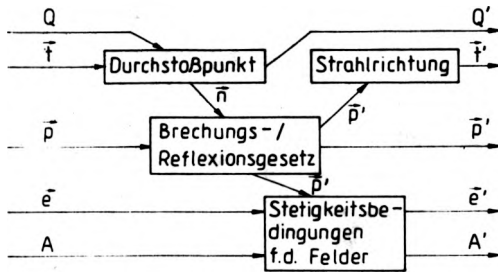


Fig. 2. Schema der Strahldurchrechnung (1 Zyklus)

3. Das Modell der wellenoptischen Feldberechnung

Gemäß der allgemein üblichen Vorschrift zur Intensitätsberechnung

$$I(r) \sim \vec{E} \vec{E}^* \quad (8)$$

bei monochromatischem Licht, ist der elektrische Feldvektor \vec{E} zu bestimmen. Da bei lichtoptischen Systemen für die Fresnelzahl N und den Abstand R des Aufpunktes im Bildraum vom optischen System, das den Radius a für die Austrittspupille besitzt und mit Licht der Wellenlänge λ durchstrahlt wird, gilt

$$\lambda \ll R, \quad N = \frac{a^2}{\lambda R} \gg 1, \quad (9)$$

ist die Debye'sche Näherungsvoraussetzung, daß in der Austrittspupille das Lichtfeld geometrisch-optisch genähert werden kann, gut erfüllt. Die Ungleichungen (9) garantieren, daß in der Austrittspupille die geometrisch-optische Näherung eine Fernfeldnäherung ist und die Einflüsse des Randes des „Lichtgebietes“ vernachlässigt werden können.

Setzt man nun \vec{E} als Linearkombination eines räumlichen Spektrums ebener Wellen an, so gilt unter Beachtung der Vielzahl der Moden σ (Vielfachheit des elektromagnetischen Feldes)

$$\vec{E}(r) = e^{i\omega t} \sum_{\sigma} \iint_{\Omega_{\sigma}} \vec{A}_{\sigma}(u, v) \exp\{-ik r p_{\sigma}(u, v)\} du dv = e^{i\omega t} \sum_{\sigma} \vec{E}_{\sigma}. \quad (10)$$

Unter Mode soll hier ein Bündel ebener Wellen verstanden werden, das durch Reflexion oder Brechung aus einem anderen einheitlich abgespalten wurde und wie sich später zeigt, eine einheitliche geometrisch-optische Kennwellenfläche besitzt.

Hier sind nach Focke \vec{A}_{σ} als auch der Integrationsbereich Ω_{σ} aus der geometrisch-optischen Näherung $\vec{E}_{\text{go}}^{(\sigma)}$ in der Austrittspupille zu bestimmen. u, v sind Ordnungsparameter für die ebenen Wellen. Nach der obigen Vorstellung muß für

$$r = \vec{y}_{\sigma} - R_{\sigma} \vec{a}, \quad R_{\sigma} \rightarrow \infty, \quad \vec{a}, \vec{y}_{\sigma} \text{ fest}, \quad (11)$$

$$\vec{E}_{\sigma} \rightarrow \vec{E}_{\text{go}}^{(\sigma)} \quad \text{für jede Mode } \sigma$$

gelten. \vec{a} ist ein Einheitsvektor, in dessen rückwärtiger Verlängerung die Austrittspupille erreicht wird, $\vec{y}_\sigma(u, v)$ ist der Ortsvektor der Kennwellenfläche der Mode σ , die in unmittelbarer Nähe des Bildgebietes gedacht wird. Im weiteren wird eine isolierte Mode betrachtet. Die geometrisch-optische Näherung \vec{E}_{go} muß für $\lambda \rightarrow 0$ eine Lösung der Maxwellgleichungen sein und in der Austrittspupille den Charakter einer Fernfeldnäherung besitzen. Bei der Näherung der Maxwellgleichungen wird für die Felder

$$\vec{E} = \vec{e} \exp \{i[\omega t - k\psi]\}, \quad \text{und analog } \vec{D}, \vec{H} \quad (12)$$

gesetzt. Dabei sind jetzt \vec{e} und ψ Ortsfunktionen, die innerhalb einer Wellenlänge wenig veränderlich sind. Sind die Änderungen der Feldamplituden $\vec{e}, \vec{d}, \vec{h}$ innerhalb einer Wellenlänge klein gegen die Amplituden selbst, so folgen aus den Maxwellgleichungen mit (12) die Gleichungen (4), wobei

$$\vec{p} = \nabla\psi \quad (13)$$

zu setzen wäre. Man kann also die geometrisch-optische Näherung (12) aus der Durchrechnung des optischen Systems mit (4.1) und (5) bestimmen, wobei noch die Ortsabhängigkeit in (12) für die Amplitude im Sinne der Fernfeldnäherung offen ist. Damit gilt der Ansatz

$$\vec{E}_{\text{go}} = F(R) \vec{e} \exp \{i[\omega t - \vec{p}(\vec{r} - \vec{y})]\}. \quad (14)$$

Der Amplitudenfaktor $F(R)$ soll aus dem zeitlich gemittelten Poyntingsatz der Elektrodynamik bestimmt werden. \vec{e} ist hier ein normierter Vektor

$$\langle \text{Re} \vec{E} \text{Re} \dot{\vec{D}} \rangle + \langle \text{Re} \vec{H} \text{Re} \dot{\vec{B}} \rangle + \nabla \langle \text{Re} \vec{E} \times \text{Re} \vec{H} \rangle = 0. \quad (15)$$

Aus dem 1. Term folgt

$$\langle \text{Re} \vec{E} \text{Re} \dot{\vec{D}} \rangle = \frac{i\omega\epsilon_0}{4} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) E_i^* E_j. \quad (15a)$$

Der 2. Term wird Null und der 3. Term ∇S mit $S = S\vec{t}$ ergibt mit $\vec{H} = \epsilon_0 C(\vec{p} \times \vec{D})/\vec{p}^2$ aus (4)

$$S\vec{t} = \frac{\epsilon_0 C}{4} \vec{p}(\vec{E}^* \vec{D})/\vec{p}^2 + \vec{p}^*(\vec{E} \vec{D}^*)/\vec{p}^{*2} - \vec{D}(\vec{p} \vec{E}^*)/\vec{p}^2 - \vec{D}^*(\vec{p}^* \vec{E})/\vec{p}^{*2}. \quad (16)$$

Da $\text{Re } \vec{p} = 1$ ist, folgt nach Multiplikation von (16) mit \vec{p} im nichtabsorbierenden Medium

$$S = \frac{\epsilon_0 C}{4} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}^*) E_i^* E_j. \quad (16a)$$

Im absorbierenden Medium wird (16) noch mit \vec{p}^* multipliziert und beide Gleichungen werden subtrahiert, so daß gilt

$$S = \frac{\epsilon_0 C}{4t(\vec{p} - \vec{p}^*)} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) E_i^* E_j. \quad (16b)$$

Im nichtabsorbierenden Medium folgt aus (16a)

$$\nabla(S\dot{t}) = \frac{\varepsilon_0 C}{4} (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}^*) [(\vec{t}\nabla) E_i^* E_j + E_i^* E_j \nabla\vec{t}], \quad (17a)$$

bzw. im absorbierenden Medium aus (16b)

$$\nabla(S\dot{t}) = \frac{\varepsilon_0 C}{4} \frac{\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}^*}{t(\vec{p} - \vec{p}^*)} [(\vec{t}\nabla) E_i^* E_j + E_i^* E_j \nabla\vec{t}]. \quad (17b)$$

Für den jeweils 1. Term in der eckigen Klammer folgt mit (14)

$$(\vec{t}\nabla) E_i^* E_j = \begin{cases} \frac{2F'(R)}{F(R)} (\dot{a}t) E_i^* E_j, & (18a) \\ [-ikt(\vec{p} - \vec{p}^*) + \frac{2F'(R)}{F(R)} (\dot{a}t)] E_i^* E_j. & (18b) \end{cases}$$

Hier ergab sich \dot{a} gemäß (11) aus ∇R . Somit folgt aus (15), (15a), (17a)–(18b)

$$\left[\nabla\vec{t} + (\dot{a}t) \frac{2F'(R)}{F(R)} \right] S = 0. \quad (19)$$

Um F aus (19) zu bestimmen, ist \dot{a} festzulegen und $\nabla\vec{t}$ zu bestimmen. Aus Figur 3 ist $\nabla\vec{t}$ gemäß

$$\nabla\vec{t} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \varphi \vec{t} d\vec{f} \quad (20)$$

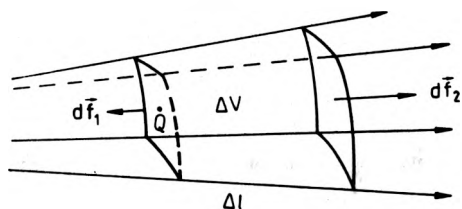


Fig. 3. Zur Berechnung von $\nabla\vec{t}$. Die Mantelflächen des kleinen Pyramidenstumpfes werden durch Strahlen gebildet, die Deckflächen liegen senkrecht zu den Strahlen

zu berechnen, wobei nach der angenommenen Geometrie folgt, daß Grund- und Deckfläche das gleiche Raumwinkelelement bilden, das im Quotienten (20) herausfällt. Elementare Rechnungen und Grenzübergang $\Delta l \rightarrow 0$ liefern

$$\nabla\vec{t} = -\frac{1}{s} (K_1 + K_2), \quad (21)$$

wobei s der Strahlenindex und K_i die Hauptkrümmungen der Orthogonalfläche zum Strahlenbündel am Ort, an dem $\nabla\vec{t}$ gebildet wird, sind. Ist l die Entfernung auf dem Strahl von der Wellenfläche \vec{y} im Bildgebiet bis zum Punkt Q , so wird

$$K_i \approx 1/l$$

wegen des großen Abstands l , und es gilt endlich

$$\nabla t = 2/sl. \quad (22)$$

Aus (19) folgt für $\vec{a} = \vec{s}$ und $l = R$

$$F(R) = A/R. \quad (23)$$

4. Verallgemeinerte Formeln von Picht und Luneburg

Das Integral (10) muß nun gemäß (11) für große R ausgewertet werden. Dabei wird auch $kR \rightarrow \infty$ und das Integral kann mit der Methode der stationären Phase [13] ausgewertet werden. Da für $kR \rightarrow \infty$ geometrisch optische Verhältnisse vorliegen und dort der Raum durch Strahlen einer Mode einfach überdeckt wird, ist nur der Fall der isolierten kritischen Punkte 1. Art bedeutungsvoll.

Kritische Punkte 2. oder 3. Art entfallen, da die Randeefekte im geometrisch optischen Strahlenbündel vernachlässigt werden. $kR \rightarrow \infty$ führt auf die ausschließliche Berücksichtigung des 1. Gliedes der Reihenentwicklung. Nach Focke ergibt die Methode der stationären Phase für unseren Fall:

$$\iint g(x, y) e^{ipf(x, y)} dx dy = - \sum_{(x_0, y_0)} \frac{2\pi i \sigma}{\sqrt{|b|} p} g(x_0, y_0) \times e^{ipf(x_0, y_0)} + O(p^{-2}), \quad (24)$$

$$\sigma = \begin{cases} -\text{sign}(b_{11}), & b > 0 \\ i, & b < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_{ij} = \partial_{ij} f(x_0, y_0), & i, j = 1, 2; \\ b = b_{11} b_{22} - b_{12}^2; \end{cases}$$

(x_0, y_0) ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems $\partial_1 f = \partial_2 f = 0$. Dabei ist $\partial_1 = \partial/\partial x$, der Differentiationsoperator nach x bzw. $\partial_2 = \partial/\partial y$.

Hier ist der Fall $b = 0$, wie sich später zeigt, ausgeklammert worden, da allgemein vorausgesetzt wird, daß beide Kaustiken des Strahlenbündels im Bildgebiet im Endlichen liegen. Aus (24) folgt für (10) bezüglich des kritischen Punktes mit $\vec{r} = \vec{y} - R\vec{a}$ und $f = \vec{a}\vec{p}$, $p = kR$

$$\begin{aligned} \partial_1 f = \vec{a}\vec{p}_u &= 0, \\ \partial_2 f = \vec{a}\vec{p}_v &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bedeuten, daß für den kritischen Punkt (u_0, v_0) die zugehörige Tangentialebene der Wellenvektorfläche senkrecht zu \vec{a} liegt. Das bedeutet, daß (10) nur dann einen Beitrag liefert, wenn längs des Strahls $R \rightarrow \infty$ erreicht wird, für den $\vec{a} = \vec{s}$ ist. Damit liefert die Differentialgeometrie [14] für b_{ij} die Deutung als Koeffizienten der 2. Grundform der Wellenvektorfläche:

$$b_{ij} = \vec{s}\partial_{ij}\vec{p}. \quad (25)$$

Aus (11) wird jetzt durch (24) mit Vergleich zu (14) und (23) für jede einzelne Mode σ , wobei A die geometrisch optische Amplitude auf der Fläche \vec{y} ist:

$$\frac{A\vec{e}}{R} \exp \{i[\omega t + kR(\vec{p}\vec{s})]\} = \frac{-2\pi i \sigma}{kR\sqrt{|b|}} \vec{A} e^{-ik\vec{y}\vec{p}} \times \exp \{i[\omega t + kR(\vec{p}\vec{s})]\}.$$

Dieser Vergleich mit der geometrisch optischen Lösung liefert \vec{A} für die einzelnen Moden und die Festlegung des Bereiches Ω auf das geometrisch-optische Strahlenbündel, wobei \vec{e} außerhalb desselben verschwindet. Damit folgt sofort die Verallgemeinerung der Picht-Formel [15]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{ik}{2\pi} e^{i\omega t} \sum_v \iint_{(\Omega_v)} A_v \vec{e}_v \exp \{ -ik(\vec{r} - \vec{r}_v) \vec{p}_v \} d\Omega_v, \quad (26)$$

$$d\Omega_v = (\sigma \sqrt{|b|} du dv)_v.$$

Um von der Willkür der Lage der Kennwellenflächen \vec{y}_v wegzukommen, verschiebt man diese, gemessen am zurückgelegten optischen Weg, so weit nach rückwärts längs der Strahlenbündel bis der Objektpunkt erreicht wäre. So ergibt sich die Luneburg-Form von (26) mit W als dem gemischten Eikonale für den betrachteten Objektpunkt und bezogen auf den bildseitigen Nullpunkt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{ik}{2\pi} e^{i\omega t} \sum_v \iint_{(\Omega_v)} A_v \vec{e}_v e^{-ikW_v} \exp \{ i[-k\vec{r} \vec{p}_v] \} d\Omega_v. \quad (27)$$

Abschließend ist folgende Feststellung für den Fall absorbierender Medien wichtig. In (24) muß f reell sein, so daß ein möglicher Imaginärteil von \vec{p} in den Vektor \vec{e} gesteckt werden muß, um ihn am Ende wieder in die Phase der ebenen Welle zu ziehen. Damit ist in (26) und (27) \vec{p} komplex, wobei b und σ gemäß (25) und (24) aus $\text{Re } \vec{p}$ zu bestimmen sind. In (27) ist bei Absorption überdies A_v die Amplitude im Fußpunkt des Koordinatennullpunktes bezüglich der Richtung $\text{Im } \vec{p}$.

5. Sonderfälle und Anwendungen

Für die Parameter u, v hat es sich bewährt, die lateralen Koordinaten von $\vec{p} = (p, q, m)$ zu wählen und den Bezugsstrahl des Strahlenbündels zu 3. Koordinatenachse werden zu lassen. Der Nullpunkt sollte so liegen, daß $|\vec{r}|$ klein ist. So ergibt sich wie bekannt [15] im isotropen nichtabsorbierenden Bildraum nach (24)–(26)

$$d\Omega_v = \frac{dp_v dq_v}{m_v}, \quad (28)$$

wobei die Moden aus den anisotropen Medien im optischen System herrühren. Voraussetzung für (28) ist gemäß (25) und (26) die Dispersionsgleichung

$$\vec{p}^2 = n^2.$$

Um $d\Omega$ für die einzelnen Moden in einem absorbierenden, anisotropen Bildraum zu berechnen, ist die komplexe Dispersionsgleichung zugrunde zu legen

$$\hat{p}^2 (\hat{p} \hat{\varepsilon} \hat{p}) + \hat{p} (\hat{\varepsilon}^2 - \langle \hat{\varepsilon} \rangle \hat{\varepsilon}) \hat{p} + |\hat{\varepsilon}| = 0. \quad (29)$$

Hier bedeuten $\hat{p} = \vec{p} - i\vec{q}$ den komplexen Wellenvektor, $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_s + \hat{\varepsilon}_a$ den allgemein Dielektrizitätstensor, zerlegt in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil, \wedge

das Zeichen für eine komplexe Größe, $\langle \varepsilon \rangle$ ist die Spur des Tensors, die Symbole $\bar{a} \varepsilon \bar{b}$ sind quadratische Formen des Tensors ε und $|\varepsilon|$ ist die Determinante von ε . $\hat{\varepsilon}_s = \varepsilon + i\varepsilon_1$ charakterisiert die Anisotropie mit linearer Polarisation der Moden hinsichtlich Brechung, Polarisation und Dämpfung. Dem Tensor $\hat{\varepsilon}_A$ läßt sich eindeutig der Gyrationvektor $\hat{g} = \bar{g}_1 + i\bar{g}$ zuordnen. Durch \bar{g} wird sowohl die räumliche Dispersion als auch der Faraday-Effekt erfaßt, durch \bar{g}_1 kann ein zusätzlicher Dämpfungseinfluß beschrieben werden. Damit folgt aus (29)

$$\hat{F} = \hat{p}^2 (\hat{p} \hat{\varepsilon}_s \hat{p}) + \hat{p} (\hat{\varepsilon}_s^2 - \langle \hat{\varepsilon}_s \rangle \hat{\varepsilon}_s) \hat{p} - \hat{p}^2 \hat{g}^2 + (\hat{p} \hat{g})^2 + (\hat{g} \hat{\varepsilon}_s \hat{g}) + |\hat{\varepsilon}_s| = 0. \quad (29a)$$

Zerlegt man die Dispersionsgleichung in Real- und Imaginärteil $\hat{F} = F + iG$, so ergeben sich die folgenden Eigenschaften bezüglich der Absorption

$$F = F_0(\bar{p}) + \sum_{i=1}^3 q_i A_i(\bar{q}, \bar{p}, \varepsilon_1, \bar{g}_1) + C(\bar{p}, \varepsilon_1, \bar{g}, \bar{g}_1), \quad (30)$$

$$G = \sum_{i=1}^3 q_i G_i(\bar{p}, \bar{q}, \varepsilon_1, \bar{g}_1) + B(\bar{p}, \varepsilon_1, \bar{g}, \bar{g}_1).$$

Beachtet man, daß für optische Medien auf 10 cm noch ein Intensitätsabfall von 10% geduldet wird, so erhält man für die Absorptionskonstante $|\bar{q}| \approx 10^{-7}$. Damit kann (30) verschärft werden durch

$$|A_i|, |B|, |C| \ll 1. \quad (30a)$$

F_0 bedeutet die Dispersionsgleichung für den absorptionsfreien Fall. Aus (25) folgt nun nach längerer aber elementarer Rechnung

$$\sqrt{|b|} = \frac{s_3}{w_3} \frac{1}{m} + R; \quad b_{11} < 0, \quad b > 0. \quad (31)$$

Hier bedeuten s_3 bzw. w_3 die z-Komponenten des Strahl- bzw. Welleneinheitsvektor (\bar{s} bzw. \bar{w}). Für R gilt die wichtige Aussage $|R| \ll 1$ gilt, wenn vorausgesetzt werden kann:

- das Medium ist ein optisches Medium,
- bezüglich des Winkels σ zwischen Strahl- und Wellenrichtung kann der Einfluß des Gyrationvektors \bar{g} gegen den Einfluß von ε unbeachtet bleiben,
- für $\sin \sigma$ gilt

$$|\sin \sigma| \lesssim \text{Max} \left(\frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_j|}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right) \approx 0,1.$$

Diese Aussagen sind für die bekannten optischen Medien erfüllt, so daß gilt

$$d\Omega_v = \left(\frac{s_3}{w_3} \frac{dp dq}{m} \right)_v. \quad (32)$$

Es wird nun noch eine differentialgeometrische Deutung von $|d\Omega|$ gegeben. Sei K die Gaußsche Krümmung der Wellenvektorfläche im \bar{p} -Raum und df_p das

Flächenelement der Wellenvektorfläche, df_s bzw. df_w die Raumwinkelelemente der Strahlvektoren \vec{s} bzw. der Welleneinheitsvektoren \vec{w} , so gilt nach (26)

$$|d\Omega| = \sqrt{|K|} df_p = \frac{1}{\sqrt{|K|}} df_s = \frac{1}{\sqrt{|K|} \cos \sigma} df_w. \quad (33)$$

Im 1. Gleichheitszeichen wurde $b = Kg$ benutzt, im 2. Gleichheitszeichen die Eigenschaften des sphärischen Bildes und im 3. Gleichheitszeichen die Beziehung $df_w = df_s \cos \sigma$ in einem engen Strahlenbündel. Im isotropen Medium ergibt sich aus (33) mit $|K| = 1$ die bekannte Aussage [15]

$$|d\Omega| = df_w. \quad (34)$$

Die Darstellungen (27) und (32) ergeben den Ausgangspunkt für die Berechnung des Punktbildes bei Berücksichtigung des Einflusses von Bildfehlern, Polarisation, Anisotropie und Absorption. Dazu ist Voraussetzung, die Möglichkeit gemäß (4) und (5) eine geometrisch-optische Durchrechnung des optischen Systems vorzunehmen, die im Bildraum A , \vec{e} , W , \vec{s} in Abhängigkeit von \vec{p} liefern muß. Hierbei wird A den Einfluß von Reflexion und Brechung auf die Amplitude der ebenen Wellen erfassen, \vec{e} ist der normierte Vektor, der die Polarisation des \vec{E} -Feldes bestimmt. W , das gemischte Eikonale, wird praktisch als Wellenaberration benutzt werden und den Einfluß der geometrisch-optischen Abbildungsfehler erfassen. Der auffälligste Effekt der Anisotropie auf das Punktbild wird die Interferenzwirkung gemäß (27) sein, die im allgemeinen auf eine Zerklüftung des Intensitätsgebirges führt. Zu beachten wäre, daß bei bestimmten Überlegungen (27) durch eine analoge Formel mit \vec{H} und \vec{h} ergänzt werden müßte, um den vollständigen Einfluß der Energiegrößen zu erfassen.

Für praktische Rechnungen kann es günstig sein (27) in ein einziges Fourierintegral

$$\vec{E} = \frac{ik}{2\pi} e^{i\omega t} \iint_{(\Omega)} \sum_v \vec{P}_v \exp \{ -ik(xp + yq) \} dp dq \quad (35)$$

umzuformen.

Literature

- [1] BORN M., WOLF E., *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York 1959.
- [2] DEBYE P., *Ann. Phys.* **30** (1909), 755.
- [3] SOMMERFELD A., *Optik*, Leipzig 1964.
- [4] BARAKAT R., *The Intensity Distribution and Total Illumination of Aberration-Free Diffraction Images*, [in] Wolf E., *Progress in Optics*, Vol. I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1961.
- [5] FOCKE J., *Optica Acta* **3** (1956), 110.
- [6] LUNEBURG R. K., *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press, Berkeley 1966.
- [7] SZIVESSY G., *Kristallogoptik*. [in] *Handbuch der Physik*, Bd 20, Berlin 1928.
- [8] RAMACHANDRAN G. N., RAMASESHAN S., *Crystal Optics*, [in] *Handbuch der Physik (Flüge)*, Bd 25/1, Springer 1961.

- [9] FEDER D. P., J. Opt. Soc. Am. **58** (1968), 1494.
- [10] RICHTER D., *Zur Wellenausbreitung durch optische Systeme mit Kristallmedien*, 25. Int. Wiss. Kolloquium, 1980 Ilmenau.
- [11] RICHTER D., *Zur Lichtausbreitung durch optische Systeme mit anisotropen Medien*, Beiträge zur Optik und Quantenelektronik 1981. Physikalische Gesellschaft der DDR.
- [12] WÜNSCHE A., Ann. Physik **7** (1980), 121–142.
- [13] FOCKE J., *Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase*, Akademie-Verlag, Berlin 1954.
- [14] KREYSZIG E., *Differentialgeometrie*, Geest und Portig K. G., Leipzig 1968.
- [15] RICHT J., *Optische Abbildung*, Vieweg, Braunschweig 1931.

*Received February 14, 1986
in revised form April 15, 1986*

Вычисления точечной функции размыва, при учете анизотропии и поляризации, на основе волнового процесса

Точечная функция размыва определяется обычно для случая отображения оптическими системами, составленными из изотропных сред, при использовании интеграла Лüneбурга. В настоящей работе этот метод расширен и на анизотропную среду с абсорбцией. Определен смысл элемента интегрирования для обобщенной формулы Лüneбурга, а также доказано ее совпадение приближения для вычислений.