

Na prawach rękopisu

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Politechniki Wrocławskiej

**Ocena losowej nośności posadowienia  
bezpośredniego metodą kinematyczną**

**Raport serii PRE nr 4/2018**

**Praca doktorska**

Mgr inż. Marcin Chwała

Słowa kluczowe:  
nośność podłoża,  
pole losowe,  
posadowienie bezpośrednie,  
skala fluktuacji.

Promotor: Dr hab. inż. Wojciech Puła

Wrocław, maj 2018

Autor: Mgr inż. Marcin Chwała

Politechnika Wroclawska

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

Katedra Geotechniki, Hydrotechniki, Budownictwa Podziemnego i Wodnego

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

e-mail: marcin.chwala@pwr.edu.pl

Raport został złożony w Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w maju 2018 r.

Lista odbiorców:

Recenzenci	2 egz.
Promotor	1 egz.
Autor	1 egz.
CWiINT PW <sub>r</sub>	1 egz.
Archiwum W-2	2 egz.

---

Razem 7 egz.

# Spis treści

Spis treści.....	1
Uwagi wstępne.....	4
Wykaz symboli .....	5
<b>1. Wstęp.....</b>	<b>6</b>
1.1. Wprowadzenie.....	6
1.2. Motywacja i cele pracy.....	9
1.3. Zakres rozprawy .....	13
<b>2. Dwuwymiarowe deterministyczne modele nośności podłoża .....</b>	<b>17</b>
2.1. Górne i dolne oszacowanie nośności w ramach teorii nośności granicznej .....	17
2.2. Mechanizm Prandtla.....	20
2.3. Mechanizm wieloblokowy .....	23
2.4. Analiza graniczna za pomocą elementów skończonych.....	26
2.5. Wybrane rezultaty dotyczące oceny nośności podłoża .....	27
2.6. Porównanie rezultatów dostępnych w literaturze .....	31
2.7. Wyznaczanie nośności podłoża zgodnie z Eurokodem 7 .....	34
<b>3. Trójwymiarowe deterministyczne modele nośności podłoża.....</b>	<b>37</b>
3.1. Wstęp.....	37
3.2. Mechanizm wieloblokowy .....	39
3.2.1. Wstępny opis mechanizmu .....	39
3.2.2. Geometria drugiego bloku .....	45
3.3. Wyprowadzenie wyrażenia na nośność podłoża .....	47
3.3.1. Pola powierzchni poślizgu.....	47
3.3.2. Nośność podłoża.....	51
3.4. Porównanie rezultatów dostępnych w literaturze .....	55
<b>4. Opis probabilistyczny parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego.....</b>	<b>57</b>
4.1. Wprowadzenie.....	57
4.2. Podstawy teorii pól losowych.....	59
<b>5. Metodyka wyznaczania nośności podłoża o cechach przestrzennie zmiennych .....</b>	<b>65</b>
<b>6. Adaptacja mechanizmów zniszczenia do oceny losowej nośności podłoża.....</b>	<b>70</b>
6.1. Założenia wstępne .....	70
6.2. Ocena losowej nośności podłoża na podstawie mechanizmu Prandtla .....	72
6.2.1. Wprowadzenie .....	72

6.2.2.	Dostosowanie deterministycznego mechanizmu Prandtla na potrzeby oceny losowej nośności podłoża .....	73
6.2.3.	Uśrednienia lokalne dla mechanizmu Prandtla .....	75
6.3.	Uśrednienia lokalne dla wieloblokowego mechanizmu dwuwymiarowego .....	83
6.3.1.	Dostosowanie deterministycznego mechanizmu wieloblokowego na potrzeby oceny losowej nośności podłoża .....	83
6.3.2.	Procedura optymalizacyjna oparta na metodzie wyżarzania .....	86
6.3.3.	Uśrednienia lokalne dla mechanizmu wieloblokowego .....	98
6.3.4.	Generowanie wartości parametrów podłoża w oparciu o macierz kowariancji - algorytm .....	104
6.4.	Uśrednienia lokalne dla wieloblokowego mechanizmu trójwymiarowego .....	109
6.4.1.	Dostosowanie mechanizmu trójwymiarowego na potrzeby oceny losowej nośności podłoża .....	109
6.4.2.	Procedura optymalizacyjna oparta na metodzie wyżarzania .....	112
6.4.3.	Uśrednienia lokalne dla trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia .....	121
7.	<b>Szacowanie prawdopodobieństwa awarii na podstawie rozkładów nośności</b> .....	141
8.	<b>Analizy numeryczne</b> .....	143
8.1.	Informacje wstępne .....	143
8.2.	Mechanizm Prandtla .....	145
8.3.	Mechanizm 6-blokowy .....	146
8.4.	Mechanizm trójwymiarowy .....	148
8.5.	Dyskusja braku iteracji przy wyznaczaniu macierzy kowariancji .....	149
8.6.	Porównanie rezultatów otrzymanych za pomocą opracowanej metodyki z wynikami opisanymi w literaturze .....	154
9.	<b>Rezultaty</b> .....	160
10.	<b>Analiza otrzymanych rezultatów</b> .....	162
10.1.	Ława fundamentowa .....	162
10.1.1.	Wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża .....	162
10.1.2.	Mediany i ekstrema wartości nośności podłoża .....	168
10.1.3.	Założenie stałej macierzy kowariancji .....	172
10.1.4.	Wpływ ciężaru objętościowego .....	179
10.2.	Kwadratowa stopa fundamentowa .....	181
10.2.1.	Wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża .....	181
10.2.2.	Mediany i ekstremalne wartości nośności podłoża .....	183
10.3.	Odniesienie rezultatów do istniejących rozwiązań .....	186
11.	<b>Wskaźniki niezawodności</b> .....	188
12.	<b>Studium przypadku</b> .....	196
13.	<b>Podsumowanie i wnioski</b> .....	199
13.1.	Perspektywy dalszych badań .....	205
	Załącznik A .....	207
	Załącznik B .....	209
	Załącznik C .....	213
	Załącznik D .....	217

---

Załącznik E .....	220
Załącznik F .....	224
Załącznik G .....	227
Załącznik H.....	235
Załącznik I .....	238
Załącznik J.....	242
J.1. Mechanizm Prandtla - rezultaty .....	242
J.2. Mechanizm 6-blokowy - rezultaty .....	253
J.2.1. Mechanizm symetryczny .....	254
J.2.2. Mechanizm niesymetryczny .....	264
J.3. Mechanizm trójwymiarowy - rezultaty .....	275
Załącznik K.....	281
Bibliografia.....	303

## Uwagi wstępne

Stosunkowo spora objętość rozprawy jest rezultatem rozpatrzenia kilku mechanizmów zniszczenia podłoża oraz rozdzieleniem opisów poszczególnych zagadnień tak, aby możliwe było dokładne prześledzenie funkcjonowania zaproponowanej metodyki. Z tego powodu osobno traktuje się zagadnienia związane z mechanizmem Prandtla, z mechanizmem wieloblokowym oraz mechanizmem trójwymiarowym. Dodatkowo, przedstawiony materiał został zaprezentowany w kolejnych etapach tak, aby oddzielić elementy deterministyczne od wprowadzonych modyfikacji dedykowanych analizom probabilistycznym. W Rozdziale 9 przedstawiono wyłącznie wyniki analiz numerycznych, natomiast ich interpretacja znajduje się w kolejnych rozdziałach. Praca własna autora została przedstawiona w różnych częściach rozprawy i każdorazowo jest sygnalizowana. W przeważającej części autorskie są zagadnienia przedstawione w rozdziałach 3.3, 5 oraz w najobszerniejszym rozdziale 6; należą do nich także rezultaty numeryczne oraz wnioski końcowe. W związku z planowanym tłumaczeniem rozprawy na język angielski przyjęto kropkę (.) jako separator dziesiętny.

*Obliczenia wykonano przy użyciu zasobów udostępnionych przez Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe (<http://wcss.pl>), grant obliczeniowy Nr 456.*

## Wykaz symboli

Najważniejsze symbole stosowane w rozprawie:

$\varphi$	kąt tarcia wewnętrznego
$c$	spójność gruntu
$b$	szerokość fundamentu
$p$	nośność podłoża
$N_c, N_q, N_\gamma$	współczynniki nośności podłoża
$n$	liczba sztywnych bloków w mechanizmie zniszczenia
$N$	liczba symulacji Monte Carlo
$g_i$	siły ciężkości
$q$	obciążenie obok fundamentu
$\beta_i$	kąty opisujące geometrię mechanizmu zniszczenia
$\gamma$	ciężar objętościowy gruntu
$c_u$	wytrzymałość gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu
$L$	długość fundamentu
$R()$	funkcja kowariancji
$E\{\}$	wartość oczekiwana
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	skale fluktuacji
$\text{Var}()$	wariancja
$P_a$	prawdopodobieństwo akceptacji (w metodzie wyżarzania)
$T_{cur}$	tzw. aktualna temperatura (parametr w metodzie wyżarzania)
$T_{min}$	tzw. temperatura minimalna (parametr w metodzie wyżarzania)
$z$	liczba symulacji (parametr w metodzie wyżarzania)
$\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_m$	uśrednione wartości kąta tarcia wewnętrznego
$\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m$	uśrednione wartości spójności
$\text{Cov}()$	kowariancja
$\text{Boole}()$	funkcja indykatorowa
$[C_X]$	macierz kowariancji
$P_f$	prawdopodobieństwo awarii
$p_{exp}$	nośność podłoża dla wartości oczekiwanych parametrów podłoża
$F$	globalny współczynnik bezpieczeństwa
$\beta$	wskaźnik niezawodności

# 1. Wstęp

## 1.1. Wprowadzenie

Budownictwo jest gałęzią ludzkiej działalności, która w sposób szczególny wpływa na życie każdego z nas. Współczesne wysoko rozwinięte społeczeństwa są niezwykle silnie związane z otaczającą je infrastrukturą drogową, mieszkaniową, melioracyjną czy hydrotechniczną. Zdecydowanie największą część swojego życia spędzamy otoczeni obiektami inżynieryjnymi oraz korzystamy z usprawnień i ułatwień, które dostarcza nam infrastruktura budowlana. W tym miejscu należy podkreślić najważniejsze zadanie, jakie spoczywa na naukowcach i inżynierach, którzy przyczyniają się do tworzenia infrastruktury. Mianowicie, poza usprawnianiem codziennego życia, najistotniejszym wymogiem wobec tworzonej infrastruktury jest zapewnienie jej bezpiecznego użytkowania i wystarczającej odporności na wszelkie obciążenia mogące wystąpić w czasie jej eksploatacji. Losowy charakter obciążeń i oddziaływań na konstrukcję ma bezpośrednie przełożenie na poziom jej bezpieczeństwa. Do najbardziej intuicyjnych obciążeń losowych, które mogą powodować poważne uszkodzenia i awarie konstrukcji, można zaliczyć zjawiska naturalne, takie jak: silne wiatry, powodzie, pożary czy też trzęsienia ziemi; są to jednakże wyjątkowe zdarzenia (Woo, 1999), które mogą - jednak nie muszą - pojawić się w okresie użytkowania konstrukcji. Można natomiast wymienić wiele innych, bardziej powszechnych, zjawisk oddziałujących na konstrukcję i mających duży wpływ na ich bezpieczeństwo; należą do nich m.in.: obciążenia zmienne pochodzące od działalności człowieka, imperfekcje geometryczne, uszkodzenia, błędy projektowe czy też zmienność parametrów wytrzymałościowych cechująca materiały



konstrukcyjne, i wiele innych. We współczesnej praktyce inżynierskiej uwzględnia się większość ze zidentyfikowanych i rozpoznanych obciążeń i niepewności, stosując odpowiednie wartości współczynników bezpieczeństwa, które odpowiednio zwiększają lub zmniejszają wartość obciążeń czy też parametrów materiałowych (np. Eurokod 1, 1991).

Niniejsza rozprawa doktorska podejmuje tematykę przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego oraz jej wpływu na nośność posadowienia bezpośredniego (ława i stopa fundamentowa). Przestrzenna zmienność właściwości gruntu, jako materiału naturalnego, charakteryzuje się wyraźnie większą zmiennością w porównaniu z innymi, szeroko stosowanymi materiałami konstrukcyjnymi wytworzonymi przez człowieka, takimi jak beton, stal czy też aluminium (Clifton, 1969; Cherubini, 1997; Ferenc, 2013). Co więcej, znaczące wartości współczynników zmienności dotyczą także homogenicznych warstw gruntowych. Jest to o tyle ważne, że w przypadku posadowienia bezpośredniego, zasięg pionowy obszaru gruntu współpracującego z konstrukcją budowlaną jest relatywnie mały i w wielu przypadkach praktycznych rozważenie pojedynczej warstwy (zalegającej bezpośrednio pod fundamentem) jest wystarczające. Okazuje się, że przestrzenna zmienność parametrów podłoża gruntowego ma istotny wpływ na bezpieczeństwo fundamentów. Przestrzenna zmienność charakteryzująca parametry wytrzymałościowe podłoża gruntowego wynika ze skomplikowanych interakcji pomiędzy geologią, topografią i klimatem (Ferreira i in., 2015) oraz objawia się w naturalnych procesach deponowania i konsolidacji. Silny wpływ na przestrzenną zmienność mogą mieć także czynniki antropogeniczne, np. zwiększenie podatności gruntu na procesy erozyjne (Paz-Gonzalez i in., 2000; Wang i Shao, 2013).

Jednymi z pierwszych badaczy, którzy zwrócili się ku zastosowaniu metod probabilistycznych w geotechnice byli m.in.: Levi (1958), Lazard (1961), Langejan (1965) oraz Casagrande (1965). Po raz pierwszy probabilistyczny opis parametrów gruntowych został zaproponowany przez Lumba (1966, 1970). Fundamenty bezpośrednie były po raz pierwszy analizowane z wykorzystaniem metod probabilistycznych w pracach Biernatowskiego (1966a, 1966b) oraz Wu i Krafta (1967). Swoją wkład w rozwój metod probabilistycznych wniósł także McAnally (1983). W niniejszej rozprawie korzysta się z podejścia zaproponowanego przez Vanmarcke'a (1977a, 1977b, 1984), polegającego na opisie parametrów podłoża gruntowego za pomocą pól losowych oraz wprowadzeniu tzw. lokalnego uśredniania tychże parametrów

w zdefiniowanych obszarach. Prace Vanmarcke'a wywarły znaczący wpływ na rozwój i udoskonalenie opisu przestrzennej zmienności parametrów podłoża gruntowego i są obecnie stosowane przez wielu badaczy. Oryginalna propozycja zastosowania teorii uśrednień lokalnych Vanmarcke'a została zaproponowana przez Pułę (2004, 2007), który w swoich pracach wprowadził lokalne uśrednienia wzdłuż linii poślizgu wynikających z mechanizmu zniszczenia Prandtla (1920). Podejście zaproponowane przez Pułę zostało rozszerzone i wzbogacone o nowe elementy w późniejszej pracy (Puła i Chwała, 2015). Wspomniane wyżej publikacje są przykładami połączenia metody kinematycznej wynikającej z teorii nośności granicznej oraz metody uśrednień lokalnych Vanmarcke'a. Ważnym osiągnięciem w wykorzystaniu pól losowych w geotechnice jest opracowana przez Fentona i Griffithsa w latach 90. ubiegłego wieku losowa metoda elementów skończonych (*Random Finite Element Method*, RFEM), będąca połączeniem teorii pól losowych z metodą elementów skończonych. Po raz pierwszy Fenton i Griffiths zastosowali ją przy analizie szeregu zagadnień geotechnicznych (1993a, 1993b, 1996, 1997, 2004). RFEM znalazła również zastosowanie w analizie posadowienia bezpośredniego dla warunków bez odpływu (Griffiths i Fenton, 2001) oraz podłoża spoistego z niezerową wartością kąta tarcia wewnętrznego (Fenton i Griffiths, 2003, 2004). Metoda RFEM została rozszerzona o możliwość uwzględnienia ciężaru objętościowego gruntu oraz zagłębienia fundamentu przez Pieczyńską w jej rozprawie doktorskiej (2012) oraz w pracy (Pieczyńska-Kozłowska i in., 2015). Metoda RFEM jest nadal rozwijana przez wielu badaczy z całego świata, nie tylko przy zagadnieniach posadowień fundamentowych, ale także stateczności skarp i w kontekście wykorzystania warunkowych pól losowych (np. Yang i in., 2017).

Geotechnika była jedną z pierwszych dyscyplin budownictwa, w których rozpoczęto stosowanie metod probabilistycznych; jednakże reprezentacja probabilistyki w oficjalnych normatywach i metodach projektowania jest znacząco mniejsza niż w pozostałych gałęziach budownictwa. W wielu przypadkach zaistniałą sytuację tłumaczy się brakiem wystarczających informacji i adekwatnego rozpoznania geotechnicznego. Jednakże w ostatnich dekadach, m.in. poprzez popularyzację sondowań statycznych (np. CPT, CPTU), odnotowano znaczny wzrost jakości rozpoznania podłoża gruntowego (także z uwagi na ciągłość pionową rozpoznania), co w połączeniu z teorią pól losowych może dostarczać relatywnie dobrych informacji na temat przestrzennej zmienności parametrów podłoża gruntowego. Istotność podejścia zorientowanego na szacowanie poziomu niezawodności konstrukcji jest podkreślona w niedawno opublikowanej normie

ISO 2394 (2015). W związku z coraz lepszymi i powszechniejszymi narzędziami do przeprowadzania badań *in situ* oraz rozwojem technik numerycznych i modeli teoretycznych, wykorzystanie metod probabilistycznych w geotechnice w ostatnich latach stawało się coraz bardziej powszechne. W analizach probabilistycznych szczególne znaczenie mają modele deterministyczne, które wraz z rozwojem metod probabilistycznych i wysiłkiem wielu badaczy, prowadzą do coraz bardziej poprawnego i dokładnego szacowania poziomu niezawodności konstrukcji budowlanych. Skutkuje to lepszymi normami, wytycznymi do projektowania, a co za tym idzie - większym bezpieczeństwem otaczających nas konstrukcji.

Poprzez niniejszą rozprawę autor chciałby wnieść swój drobny wkład w rozwój metod probabilistycznych i ich szersze wykorzystanie w geotechnice.

## 1.2. Motywacja i cele pracy

W niniejszej rozprawie autor podejmuje tematykę wyznaczania nośności podłoża w oparciu o podejście kinematyczne teorii nośności granicznej, umożliwiające uwzględnienie przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego oraz ciężaru objętościowego gruntu. Główne cele rozprawy zostały przedstawione i opisane poniżej:

- 1) Opracowanie metodyki służącej ocenie losowej nośności posadowienia bezpośredniego w ramach metody kinematycznej (oszacowanie górne) z uwzględnieniem: ciężaru własnego gruntu, zagłębienia fundamentu, spójności i tarcia w gruncie oraz przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego.** Kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia są szeroko stosowane w deterministycznej analizie nośności posadowienia bezpośredniego, jednakże w przypadku analiz probabilistycznych poziom ich zastosowania jest bardzo niski. Potencjał zawarty w kinematycznych mechanizmach zniszczenia tkwi w teorii plastyczności i jej twierdzeniach o dolnym i górnym oszacowaniu wartości nośności. Ich zastosowanie daje górne oszacowanie nośności, które w wielu przypadkach jest wystarczająco bliskie oszacowaniu dolnemu. W związku z wykorzystaniem twierdzenia o ocenie górnej wartości nośności, rezultaty otrzymane za pomocą kinematycznych mechanizmów zniszczenia mogą

pełnić rolę referencyjną dla innych metod. Co więcej, relatywna prostota podejścia opartego na mechanizmach zniszczenia pozwala w sposób efektywny szacować wartości nośności, co w przypadku zagadnień probabilistycznych odgrywa kluczową rolę (duża liczba symulacji); jest to ważne nie tylko dla celów naukowych, ale także z uwagi na możliwość zastosowań w praktyce projektowej. Zaproponowana w rozprawie metodyka łączy ze sobą mechanizmy zniszczenia podłoża gruntowego, procedurę optymalizacyjną (pozwalającą na znalezienie geometrii mechanizmu zniszczenia, dającej najniższą nośność podłoża) oraz elementy teorii pól losowych. Przedstawiona metodyka pozwala na efektywną analizę zagadnień dotąd nierozwiązanych w ramach rozważań probabilistycznych. Istotną zaletą prezentowanego podejścia jest udowodniona prawdziwość twierdzenia o oszacowaniu górnym nośności i precyzyjna definicja tejże nośności (w przeciwieństwie do np. metody elementów skończonych). Wszystkie przeprowadzone analizy dotyczą materiału Coulomba-Mohra. Opracowana metodyka charakteryzuje się możliwie ogólnym charakterem, tak aby było możliwe jej zastosowanie do różnego rodzaju klas problemów. Opis metodyki zawarto w rozdziale 5.

- 2) **Rozważenie niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia podłoża dla płaskiego stanu odkształcenia oraz analiza wpływu założenia o niesymetryczności na ocenę losowej nośności podłoża.** Uwzględnienie wszystkich elementów wymienionych w punkcie 1) jest podstawą do tego, aby móc dokonywać analizy posadowień bezpośrednich (i nie tylko) dla możliwie zbliżonych warunków do tych występujących w praktyce inżynierskiej. Pomimo ponad 15-letniej historii zastosowań metody RFEM do analiz nośności gruntu, dopiero niedawno, w pracach Pieczyńskiej-Kozłowskiej, uwzględniono ciężar podłoża gruntowego (Pieczyńska, 2012 oraz Pieczyńska-Kozłowska i in., 2015). W dalszej części rozprawy wykazano, że wpływ założenia o nieważkości gruntu jest niezwykle istotny z uwagi na nośność podłoża, jeśli rozpatrujemy je za pomocą kinematycznych mechanizmów zniszczenia. W przypadku zastosowania kinematycznych mechanizmów zniszczenia, tak jak ma to miejsce w niniejszej rozprawie, powszechnym jest zakładanie symetrii mechanizmu. Wynika to bezpośrednio z deterministycznego charakteru tychże mechanizmów. Jednakże, gdy

---

uwzględnia się przestrzenną zmienność parametrów podłoża, wydaje się właściwe uwzględnienie całej objętości gruntu, który bierze udział w zniszczeniu podłoża. Powyższe rozważania są motywacją dla autora do przeprowadzenia analizy mechanizmu niesymetrycznego. Aby umożliwić osiągnięcie tego celu, mechanizm zniszczenia dla przypadku symetrycznego został rozszerzony do mechanizmu niesymetrycznego oraz zaadaptowany do analiz probabilistycznych. Metodyka będąca przedmiotem rozprawy posłużyła jako punkt wyjścia do opracowania algorytmu numerycznego, pozwalającego na analizę niesymetrycznych mechanizmów zniszczenia. Algorytm i jego implementację przedstawiono w rozdziałach 5 i 6.

- 3) **W związku ze słabo rozpoznanymi zagadnieniami związanymi z oceną losowej nośności fundamentów w przypadku analiz trójwymiarowych, autor za kolejny cel przyjął ocenę możliwości przeprowadzenia takowych analiz w oparciu o metodykę zaproponowaną w niniejszej rozprawie, zakładając trójwymiarowy mechanizm zniszczenia dla stopy fundamentowej zaproponowany przez Michałowskiego (2001).** Założenie, że mechanizm zniszczenia podłoża jest płaski, jak ma to miejsce dla mechanizmu Prandtla czy też mechanizmu wieloblokowego, jest dobrym przybliżeniem rzeczywistych warunków pracy dla relatywnie długich fundamentów. Jednakże, fundamenty bezpośrednie w wielu przypadkach nie spełniają tego założenia, a co więcej, bardzo często w praktyce mamy do czynienia z kwadratowymi stopami fundamentowymi. Dla stóp kwadratowych przyjęcie wprost założenia o płaskim stanie odkształcenia prowadzi do znaczącego niedoszacowania nośności. Tematyka losowej nośności fundamentów bezpośrednich z uwzględnieniem przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego dotychczas została podjęta przez nielicznych badaczy (np. Simoes i in., 2014; Kawa, 2015; Kawa i in., 2016) i nie była analizowana w literaturze w odniesieniu do kinematycznych mechanizmów zniszczenia. Zaistniała sytuacja wynika ze złożoności analiz oraz czasu potrzebnego na wykonanie obliczeń numerycznych, który znacznie wzrasta, gdy przechodzi się do zagadnień trójwymiarowych. W związku z koniecznością uwzględnienia przestrzennej zmienności gruntu, mechanizm deterministyczny zaproponowany przez Michałowskiego został zmodyfikowany w sposób

umożliwiający takie podejście. Z powodu trudności przy budowie kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia dla przypadku trójwymiarowego, zastosowany mechanizm nie daje tak dobrych oszacowań, jak mechanizm wieloblokowy dla przypadku dwuwymiarowego, jednakże jest jednym z najlepszych mechanizmów trójwymiarowych opisanych w literaturze. Zagadnienia dotyczące analiz w przypadku trójwymiarowym przedstawiono w rozdziałach 3.3 i 6.4.

- 4) Analiza wpływu pionowych i poziomych skal fluktuacji (opisujących korelację pola losowego charakteryzującego dany parametr podłoża gruntowego) na ocenę losowej nośności podłoża dla wszystkich rozpatrywanych mechanizmów zniszczenia.** W rozprawie przyjęto za cel przeanalizowanie wpływu założenia o izotropowym polu losowym (dla którego pionowa skala fluktuacji jest równa poziomej:  $\theta_v = \theta_h$ ) na ocenę losowej nośności gruntu; analogiczne rozważania zostały przeprowadzone również dla przypadków anizotropowych ( $\theta_v \neq \theta_h$ ). Powyższe analizy są istotne z uwagi na praktyczne zastosowanie elementów teorii pól losowych i możliwość wyznaczania takich charakterystyk, jak np. skale fluktuacji. W związku z pionowym charakterem sondowań gruntu, wartości pionowych skal fluktuacji są znacznie lepiej rozpoznane niż w przypadku ich poziomych odpowiedników. Analizy numeryczne pozwalają ocenić wpływ wartości skal fluktuacji na losową nośność podłoża. Rezultaty analiz omówiono w rozdziale 10.
- 5) Niniejsza rozprawa poza powyższymi celami głównymi przedstawionymi w punktach 1) - 4) obejmuje także inne cele, które zestawiono poniżej:**
- Rozpoznanie wpływu założenia o stałej macierzy kowariancji w ramach opracowanej metodyki.
  - Analiza przydatności wybranych geometrii mechanizmów zniszczenia do zastosowania przy ocenie losowej nośności podłoża.
  - Zbadanie wpływu doboru obszaru uśredniania na ocenę losowej nośności w przypadku mechanizmu Prandtla.
  - Ocena możliwości zastosowania charakterystyk innych niż wartość średnia i odchylenie standardowe do interpretacji otrzymanych rezultatów.
  - Ocena wpływu ciężaru podłoża gruntowego przy założeniu warunków bez odpływu ( $c_u$ ).

- f) Zbadanie możliwości dopasowania lognormalnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa do otrzymanych rozkładów nośności.

Ponadto w pracy poruszono szereg innych zagadnień związanych z dokładnością otrzymanych rezultatów, optymalizacją algorytmu oraz jego implementacją numeryczną.

### 1.3. Zakres rozprawy

#### Rozdział 1. Wstęp

W rozdziale nakreślono cele rozprawy oraz przedstawiono zarys tematyki będącej jej przedmiotem. Ponadto omówiono zawartość rozprawy.

#### Rozdział 2. Dwuwymiarowe deterministyczne modele nośności podłoża

W rozdziale podano sformułowanie dolnego i górnego oszacowania nośności w ramach teorii nośności granicznej, następnie przedstawiono wybrane modele deterministyczne szacowania nośności podłoża przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia. Rozdział zawiera rezultaty otrzymane między innymi w następujących pracach: Prandtl (1920), Terzaghi (1943), Meyerhof (1963), Brinch Hansen (1970), Vesic (1973), Sloan (1988, 1989), Bolton i Lau (1993), Michałowski (1997), Frydman i Burd (1997), Zhu i in. (2001), Kumar (2003), Salgado (2004), Hjiat i in. (2005), Martin (2005) oraz Lyamin i in. (2007).

#### Rozdział 3. Trójwymiarowe deterministyczne modele nośności podłoża

Przedstawiono wybrane rezultaty dla zagadnienia trójwymiarowej nośności podłoża. Omówiono trójwymiarowy mechanizm zniszczenia zaproponowany przez Michałowskiego (2001). Rozdział zawiera rezultaty otrzymane między innymi w następujących pracach: Shield i Drucker (1953), Izbicki i Mróz (1976), Michałowski (2001), Salgado (2004), Zhu i Michałowski (2005), Lyamin i in. (2007), Vincente da Silva i Antao (2008) oraz Yu i in. (2016).

## Rozdział 4. Opis probabilistyczny parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego

W rozdziale przedstawiono rys historyczny opisu probabilistycznego parametrów podłoża gruntowego. Omówiono podstawy teorii pól losowych. Podano informacje o teorii uśrednień lokalnych Vanmarcka (1977a), którą zastosowano w rozprawie.

## Rozdział 5. Metodyka wyznaczania nośności podłoża o cechach przestrzennie zmiennych

Omówiono zarys zaproponowanej metodyki z przedstawieniem kolejności wykonywanych działań. Wprowadzono podstawy metody optymalizacyjnej, tj. metody wyżarzania (*simulated annealing*) (Kirkpatrick i in., 1983; Kirkpatrick, 1984).

## Rozdział 6. Adaptacja mechanizmów zniszczenia do oceny losowej nośności podłoża

W rozdziale przedstawiono adaptację zastosowanych mechanizmów zniszczenia gruntu do wyznaczania losowej nośności podłoża zgodnie z proponowaną metodyką. Zaadaptowano mechanizm Prandtla, symetryczny mechanizm wieloblokowy, niesymetryczny mechanizm wieloblokowy oraz trójwymiarowy mechanizm zniszczenia podłoża. Ponadto wyprowadzono wzory na postacię współczynników macierzy kowariancji dla wszystkich rozpatrywanych mechanizmów zniszczenia podłoża.

## Rozdział 7. Szacowanie prawdopodobieństwa awarii na podstawie rozkładów nośności

Omówiono metodykę, zgodnie z którą szacowane były wartości wskaźników niezawodności w celu analizy porównawczej otrzymanych wyników.



## Rozdział 8. Analizy numeryczne

W rozdziale zestawiono informacje o przeprowadzonych analizach numerycznych, podano wartości skal fluktuacji i inne parametry opisujące rozpatrywane zagadnienia. Zestawiono liczbę symulacji  $N$  dla wszystkich przeprowadzonych analiz. Podjęto także próbę oceny wpływu jednokrotnej iteracji macierzy kowariancji na otrzymane charakterystyki rozkładów nośności.

## Rozdział 9. Rezultaty

Przedstawiono sposób opisu otrzymanych rezultatów w formie histogramów nośności oraz tabelarycznych zestawień wartości średnich, odchyłeń standardowych i innych parametrów opisujących charakter otrzymanego rozkładu nośności.

## Rozdział 10. Analiza otrzymanych rezultatów

W rozdziale omówiono i zinterpretowano otrzymane rezultaty oraz porównano podejścia obliczeniowe, dla których przeprowadzono analizy numeryczne. Wyniki przedstawiono na rysunkach i w tabelach.

## Rozdział 11. Wskaźniki niezawodności

W rozdziale przedstawiono tok postępowania przy wyznaczaniu wskaźników niezawodności na podstawie histogramów nośności podłoża.

## Rozdział 12. Studium przypadku

Podano zastosowanie zaproponowanej metodyki do prostej analizy niezawodnościowej ławy fundamentowej. Zadano rzeczywiste cechy podłoża gruntowego otrzymane na podstawie sondowania CPT. Przedstawiono tok postępowania przy doborze odpowiedniej szerokości fundamentu na zadany wskaźnik niezawodności.

## Rozdział 13. Podsumowanie i wnioski

Zestawiono wszystkie wnioski płynące z przeprowadzonych analiz oraz zaproponowano sposoby i możliwości ich zastosowania w praktyce inżynierskiej. Odniesiono się do celów przedstawionych na początku rozprawy.

## 2. Dwuwymiarowe deterministyczne modele nośności podłoża

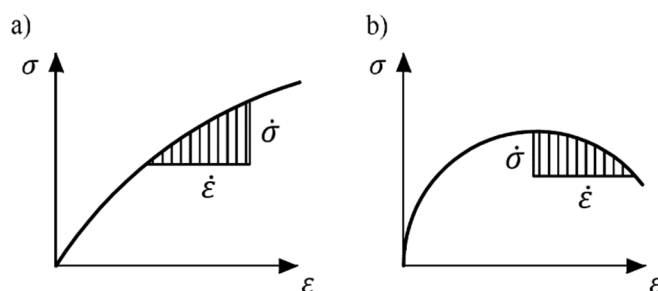
### 2.1. Górne i dolne oszacowanie nośności w ramach teorii nośności granicznej

W analizie stanów granicznych rozważa się materiały idealnie plastyczne; są to materiały, w których pod wpływem stałego naprężenia zachodzi proces plastycznego płynięcia. Przyjęty model teoretyczny idealizuje rzeczywistość, jednakże przybliża on rzeczywiste zachowanie gruntów na tyle dobrze, że jest używany w wielu zastosowaniach naukowych i inżynierskich. We wcześniejszych pracach przyjmowano, że relację naprężenie-odkształcenie dla wielu rzeczywistych gruntów można uznać za liniową dla małych wartości odkształceń, następnie po osiągnięciu wartości maksymalnej przez naprężenia ich wartość stabilizuje się, zachowując się podobnie jak materiał idealnie plastyczny (Izbicki i Mróz, 1976). Z uwagi na zastosowanie modelu materiału idealnie plastycznego, nieodzowne jest sformułowanie warunku stanu granicznego, po spełnieniu którego rozpoczyna się proces plastycznego płynięcia. Warunek stanu granicznego określa punkt, dla którego w materiale zachowującym się elastycznie, rozpoczyna się proces plastycznego płynięcia (Pietruszczak, 2015). Warunek stanu granicznego można przedstawić w ogólnej postaci, jak w równaniu (2.1).

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.1)$$

Zgodnie z (2.1) wartość naprężenia nie może przyjąć wartości poza obszarem ograniczonym przez warunek stanu granicznego, jednakże możliwe jest przemieszczanie

się wektora naprężeń po powierzchni stanu granicznego. Twierdzenia teorii nośności granicznej mogą być udowodnione dla tzw. materiałów stabilnych w sensie Druckera (Drucker i Prager, 1952). Charakteryzują się one taką zależnością naprężenie-odkształcenie, dla której jednoznacznie można wyznaczyć wartość naprężenia na podstawie odkształcenia i odwrotnie. Przykłady materiału stabilnego w sensie Druckera i materiału niestabilnego zilustrowano na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1. Przykład materiału a) stabilnego, b) niestabilnego w sensie Druckera.

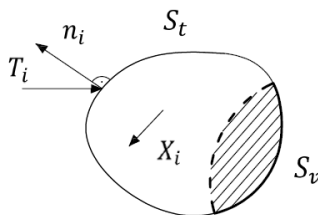
Dla materiału spełniającego postulat stabilności Druckera prawdziwa jest nierówność (2.2).

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (2.2)$$

Nierówność (2.2) pokazuje, że iloczyn skalarny  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$  i  $\dot{\epsilon}_{ij}$  pozostaje dodatni dla każdego stanu naprężenia  $\sigma_{ij}^*$ . Powyższy fakt oznacza, że wszystkie stany naprężenia  $\sigma_{ij}^*$  znajdują się po tej samej stronie względem płaszczyzny stycznej  $\pi_t$  do powierzchni stanu granicznego (patrz rysunek 2.2). Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne, mianowicie: jeśli nierówność (2.2) jest spełniona dla wszystkich punktów, oznacza to wypukłość obszaru ograniczonego powierzchnią stanu granicznego. Wyprowadzenie nierówności (2.2) można znaleźć m.in. w książce Izbickiego i Mroza (1976) lub w książkach Chena (Chen, 1975; Chen i Liu, 1990). Poza wypukłością obszaru, w którym spełniony jest warunek stanu granicznego dla materiałów stabilnych w sensie Druckera, z postulatu Druckera wynika także stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia (ang. *associative flow rule* lub *normality rule*). Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia determinuje kierunek wektora prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{ij}$  jako prostopadły do powierzchni stanu granicznego i o zwrocie wektora skierowanym na zewnątrz. W ogólności prawo stowarzyszonego płynięcia można wyrazić za pomocą równości (2.3).



Twierdzenie ogranicza wartość obciążenia granicznego od dołu. Pole naprężeń  $\sigma_{ij}^E$  nazywa się statycznie dopuszczalnym polem naprężeń.



Rysunek 2.3. Warunki brzegowe dla naprężenia i prędkości.

Twierdzenie o ocenie górnej nośności granicznej: jeśli założymy kinematycznie dopuszczalny mechanizm plastycznego płynięcia opisany przez prędkość odkształceń plastycznych  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  i pole prędkości  $\dot{u}_{ij}^p$ , spełniające warunek  $\dot{u}_{ij}^p = 0$  na obszarze tzw. przemieszczeniowych warunków brzegowych  $S_v$ , wtedy dla obciążeń  $T_i$  oraz  $X_i$ , zachodzi nierówność (2.6).

$$\int_{S_v} T_i \dot{u}_{ij}^p dA + \int_V X_i \dot{u}_{ij}^p dV = \int_V \sigma_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \quad (2.6)$$

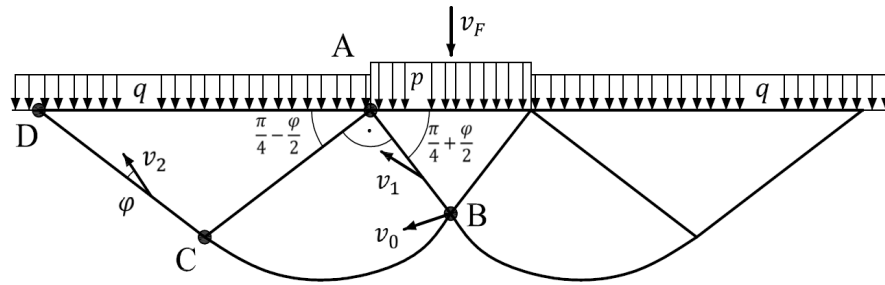
Gdzie lewa strona nierówności (2.6) wyraża moc sił zewnętrznych, natomiast strona prawa określa całkowitą moc dyssypacji energii.

Twierdzenia o górnym i dolnym oszacowaniu nośności granicznej pozwalają ograniczyć jej wartość od dołu oraz od góry. Dla niektórych zastosowań w geotechnice możliwe jest znalezienie statycznie dopuszczalnego pola naprężeń oraz kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu plastycznego płynięcia, które prowadzą do takiego samego oszacowania nośności. Taki przypadek ma miejsce przy założeniu nieważkiego gruntu, dla którego mechanizm zniszczenia Prandtla daje dokładne rozwiązanie.

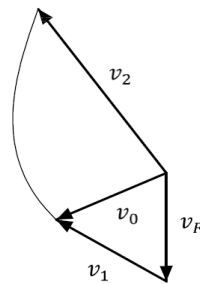
## 2.2. Mechanizm Prandtla

Geometrię mechanizmu zniszczenia Prandtla przedstawia rysunek 2.4; odpowiadający jej hodograf prędkości, definiujący prędkości między gruntem w ruchu a gruntem w

spoczynku oraz definiujący wartości prędkości pomiędzy blokami gruntu, przedstawiony jest na rysunku 2.5.



Rysunek 2.4. Geometria mechanizmu Prandtla.



Rysunek 2.5. Hodograf prędkości odpowiadający mechanizmowi Prandtla z rysunku 2.4.

Zgodnie z rysunkiem 2.4, bezpośrednio pod fundamentem tworzy się sztywny trójkątny blok gruntu (jego krawędź stanowi odcinek AB) poruszający się pionowo w dół z prędkością  $v_F$ . Blok ACD jest także bryłą sztywną, jego prędkość względem gruntu znajdującego się w spoczynku wynosi  $v_2$  i jest nachylona względem linii CD pod kątem równym kątowi tarcia wewnętrznego  $\varphi$ . Obszar ABC jest strefą ścinania (deformacji objętościowej) ograniczoną spiralą logarytmiczną BC. Linia ABCD jest linią nieciągłości prędkości. Mechanizm jest symetryczny względem prostej pionowej przechodzącej przez środek fundamentu. W oparciu o twierdzenie o górnym oszacowaniu nośności i poprzez porównanie całkowitej dyssypacji z pracą wykonywaną przez siły zewnętrzne oraz zakładając, że obciążenie obok fundamentu na poziomie jego podstawy jest równe zero ( $q = 0$ ), można wyprowadzić wyrażenie na oszacowanie górne nośności (2.7).

$$p = c \operatorname{ctg} \varphi \left( \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) - 1 \right) \quad (2.7)$$

Równanie (2.7) jest wyprowadzone przy założeniu nieważkości gruntu. Jeśli dodatkowo założymy, że grunt jest idealnie spoisty ( $\varphi = 0$ ) i przejdziemy do granicy ( $\varphi$  dąży do 0), równanie (2.7) przyjmie następującą postać:

$$p = 2c(1 + \pi) \approx 5.14c \quad (2.8)$$

Mechanizm Prandtla można uznać za odpowiadający rzeczywistości dla szorstkiej podstawy fundamentu; jeśli założymy, że podstawa jest idealnie gładka, wtedy właściwe staje się wykorzystanie mechanizmu Hilla (Hill, 1950). Obydwa mechanizmy dają w rezultacie takie samo oszacowanie nośności.

Aby rozważyć wpływ ciężaru objętościowego gruntu, należy uwzględnić siły ciężkości pochodzące od gruntu będącego w ruchu podczas procesu plastycznego płynięcia. W kontekście nośności podłoża szeroko stosuje się postać wyrażenia na nośność gruntu jak w równaniu (2.9); jego forma po raz pierwszy została zaproponowana przez Terzagiego (1943), jednakże jest powszechnie przyjęta i stosuje się ją w różnych podejściach obliczeniowych (nie tylko dla mechanizmu Prandtla).

$$p = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma \quad (2.9)$$

Prawa strona równania (2.9) składa się z trzech składników. Pierwszy z nich odpowiada za spójność gruntu, drugi za obciążenie obok fundamentu w poziomie jego posadowienia, a ostatni dotyczy ciężaru objętościowego gruntu. Współczynniki  $N_c$ ,  $N_q$  i  $N_\gamma$  są współczynnikami nośności odpowiednio dla: spójności, obciążenia obok fundamentu oraz ciężaru objętościowego. Dla mechanizmu Prandtla po uwzględnieniu ciężaru własnego gruntu współczynniki nośności z równania (2.9) można przedstawić jak w równaniach (2.10), (2.11) i (2.12) (Izbicki i Mróz, 1976).

$$N_c = \operatorname{ctg} \varphi \left( \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) - 1 \right) \quad (2.10)$$

$$N_q = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) \quad (2.11)$$

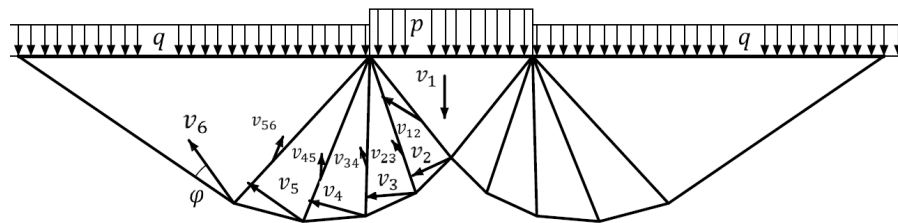
$$N_\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \exp \left( \frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi \right) - 1 \right) + \frac{1}{8(1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \left[ \left( 3 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right) \exp \left( \frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi \right) + \left( 3 \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right] \quad (2.12)$$



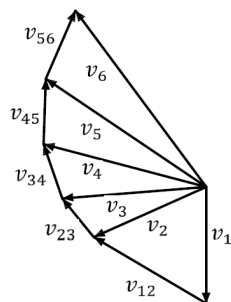
Współczynnik  $N_\gamma$  jest przedmiotem szerokiej dyskusji w środowisku naukowców i inżynierów w ostatnich dekadach. Należy zwrócić uwagę na fakt, że mechanizm Prandtla jest optymalną geometrią zniszczenia (daje najniższe oszacowanie górne, które zarazem jest równe oszacowaniu dolnemu) w przypadku nieważkiego gruntu; z tego wynika, że wartość współczynnika  $N_\gamma$  wyrażona równaniem (2.12) nie jest wartością optymalną. Istnieje wiele innych oszacowań teoretycznych oraz eksperymentalnych, które zajmują się ustaleniem wartości  $N_\gamma$  (patrz Rozdział 2.5).

### 2.3. Mechanizm wieloblokowy

Mechanizm przedstawiony w niniejszym rozdziale został zaproponowany przez Michałowskiego (1997); mechanizm wieloblokowy składa się ze sztywnych trójkątnych bloków przemieszczających się wzajemnie i pozwala na uwzględnienie ciężaru objętościowego gruntu. Umożliwia także znalezienie wyraźnie niższych oszacowań górnych wartości współczynnika nośności  $N_\gamma$  w porównaniu do mechanizmu Prandtla. Geometria zniszczenia dla mechanizmu wieloblokowego jest przedstawiona na rysunku 2.6; mechanizm podobnie jak w przypadku mechanizmu Prandtla składa się z trójkątnego sztywnego bloku, znajdującego się bezpośrednio pod fundamentem, który to blok przemieszcza się z prędkością  $v_1$ . Mechanizm składa się wyłącznie ze sztywnych bloków, zatem strefa ścinania (deformacji ciągłej) występująca w mechanizmie Prandtla jest zastąpiona sztywnymi blokami, a deformacje wynikają wyłącznie z nieciągłości prędkości pomiędzy poszczególnymi blokami. Na rysunku 2.7 przedstawiono przykładowy hodograf prędkości dla mechanizmu składającego się z 6 bloków (jako liczbę bloków rozumie się liczbę bloków po jednej stronie mechanizmu).

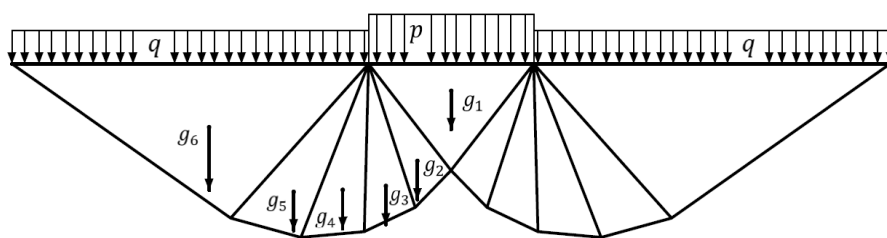


Rysunek 2.6. Przykładowa geometria wieloblokowego mechanizmu zniszczenia (mechanizm symetryczny).



Rysunek 2.7. Przykładowy hodograf prędkości dla wieloblokowego mechanizmu zniszczenia z rys. 2.6.

Jak podano wcześniej, na rysunkach 2.6, 2.7 oraz 2.8 przedstawiono mechanizm sześcioblokowy ( $n = 6$ ), gdzie  $n$  oznacza liczbę bloków z jednej strony mechanizmu. Zgodnie z tak przyjętą konwencją oznaczania mechanizmu wieloblokowego, na podstawie  $n$  można obliczyć całkowitą liczbę sztywnych bloków tworzących mechanizm jako  $n_{\text{tot}} = 2n - 1$ . Aby umożliwić wyznaczenie nośności w przypadku mechanizmu wieloblokowego niezbędne jest: określenie geometrii zniszczenia, wyznaczenie prędkości sztywnych bloków na podstawie hodografu prędkości, określenie wartości sił ciężkości dla każdego bloku  $g_i$  (rysunek 2.8), wyznaczenie mocy dyssypacji na każdej linii poślizgu oraz zdefiniowanie wartości obciążenia obok fundamentu w poziomie jego posadowienia  $q$ . Dodatkowo, niezbędna jest informacja o wartości parametrów wytrzymałościowych gruntu: kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$  i spójności  $c$ .



Rysunek 2.8. Siły grawitacyjne dla 6-blokowego symetrycznego mechanizmu zniszczenia.

W przypadku symetrycznego mechanizmu  $n$ -blokowego geometria zniszczenia jest jednoznacznie zdefiniowana przez  $n - 1$  kątów  $\beta_i$ , gdzie:  $i = 1, \dots, n - 1$  ( $n$ -ty kąt otrzymuje się poprzez odjęcie sumy pozostałych od kąta półpełnego, tj.  $\beta_n = 180^\circ - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$ ) oraz  $n$  długości linii poślizgu  $l_j$ , gdzie:  $j = 1, \dots, n$  (patrz rysunek 2.9). W związku z symetrią mechanizmu zniszczenia, jedna strona mechanizmu wystarcza do wyznaczenia nośności. Aby zapewnić kinematyczną dopuszczalność mechanizmu zniszczenia, wektory prędkości muszą być nachylone pod kątem równym wartości kąta

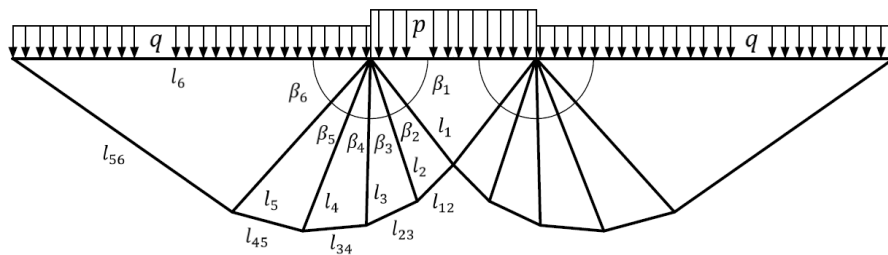
tarcia wewnętrznego  $\varphi$  w stosunku do linii poślizgu. Wartości prędkości oblicza się wprost z zależności geometrycznych z hodografu prędkości. W przypadku gruntu spoistego należy uwzględnić energię dyssypacji wzdłuż wszystkich linii poślizgu. W celu obliczenia wartości dyssypacji na określonej linii poślizgu należy pomnożyć długość tej linii przez wartość spójności oraz przez współliniową (z daną linią poślizgu) wartość prędkości (wartość prędkości pomnożona przez cosinus kąta tarcia wewnętrznego). Moc sił ciężkości wyznacza się poprzez pomnożenie masy sztywnego bloku przez przyspieszenie grawitacyjne oraz przez pionową składową wektora prędkości danego bloku gruntu. Opierając się na powyższych uwagach, każdy z trzech składników przedstawionych w równaniu (2.9) można przedstawić zgodnie z równaniami (2.13), (2.14) i (2.15).

$$cN_c = 2c \left( \sum_{i=1}^{n-1} l_i \cos \varphi v_{ii+1} + \sum_{i=1}^{n-1} l_{ii+1} \cos \varphi v_{i+1} \right) \quad (2.13)$$

$$qN_q = 2ql_n v_n \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{2} \gamma b N_\gamma = g_1 v_{1l} + 2 \sum_{i=2}^n g_i v_{il} \quad (2.15)$$

Gdzie  $v_{il}$  oznacza pionową składową wektora prędkości. Na rysunku 2.9 przedstawiono przyjętą konwencję oznaczeń dla mechanizmu wieloblokowego, która pozostaje w mocy także dla różnej liczby sztywnych bloków.



Rysunek 2.9. Konwencja oznaczeń kątów i długości dla mechanizmu wieloblokowego.

W przypadku mechanizmu Prandtla geometria zniszczenia jest jednoznacznie zdefiniowana poprzez wartość kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$ ; jednakże, dla mechanizmu wieloblokowego nie ma prostej zależności, względem której można wyznaczyć optymalny kształt geometrii zniszczenia. W związku z tym, aby otrzymać możliwie

niskie oszacowanie wartości nośności należy geometrię mechanizmu zniszczenia poddać optymalizacji. Celem jest znalezienie takiej geometrii, dla której suma trzech składników wyrażonych w równaniach (2.13), (2.14) i (2.15) będzie najmniejsza. Przy takim postawieniu problemu formuła z równania (2.9) staje się funkcją celu w procedurze optymalizacyjnej. Michałowski (1997) pokazał, że użycie procedury minimalizującej każdy ze składników równania (2.9) prowadzi do nieco niższych oszacowań wartości współczynnika  $N_\gamma$  niż w przypadku poszukiwania minimum sumy tych składników. Jednakże, dla potrzeb niniejszej rozprawy, w związku z koniecznością posiadania jednego mechanizmu zniszczenia (takiego samego dla wszystkich współczynników nośności) przedmiotem zainteresowania jest znalezienie minimum wartości sumy wszystkich trzech składników w równaniu (2.9). W związku z możliwością zmiany liczby bloków oraz jej wpływem na poziom oszacowania nośności, istotne jest odpowiednie dobranie takiej liczby bloków, aby zapewnić kompromis pomiędzy dokładnością a czasem potrzebnym na wykonanie obliczeń. Tematykę tę porusza się w rozdziale 6.

## 2.4. Analiza graniczna za pomocą elementów skończonych

Analiza graniczna za pomocą elementów skończonych (ang. *Finite Element Limit Analysis*, FELA) jest metodą numeryczną, w której korzysta się z górnego i dolnego oszacowania nośności granicznej. Podstawowe publikacje w tej tematyce to: sformułowanie dolnej oceny nośności granicznej przy użyciu elementów skończonych i programowania liniowego (Sloan, 1988) oraz analogiczna praca dotycząca oszacowania górnego (Sloan, 1989). Obydwie prace dotyczą problemu dwuwymiarowego przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia. Dla przypadku oszacowania dolnego wyznaczane jest statycznie dopuszczalne pole naprężeń, które jest modelowane przy użyciu 3-węzłowych elementów trójkątnych (Sloan, 1988). Statycznie dopuszczalne nieciągłości naprężeń mogą się pojawiać na krawędziach elementów trójkątnych. Wartość obciążenia jest maksymalizowana tak długo, dopóki statycznie dopuszczalne pole naprężeń nie przekracza warunku stanu granicznego z dokładnością do zaokrąglenia podczas procedury optymalizacji. Wskutek takiego podejścia otrzymana wartość obciążenia jest oszacowaniem dolnym nośności granicznej. Procedura dla oszacowania górnego obciążenia granicznego wykorzystuje także 3-węzłowe trójkątne elementy

skończone, dla których poszukiwane są wartości prędkości w węzłach. Dopóki pole prędkości spełnia wszystkie warunki zgodnie z twierdzeniem o oszacowaniu górnym nośności granicznej, odpowiadająca mu wartość nośności jest oszacowaniem górnym (Sloan, 1989). Prace Sloana w późniejszych latach zostały rozszerzone: Lyamin i Sloan (2002a) przedstawili rozszerzenie algorytmu dla dolnego oszacowania nośności dla programowania nieliniowego. Pozwoliło to znajdować wartości nośności ograniczające prawdziwą wartość od dołu dla jednego, dwóch i trzech wymiarów w sposób efektywniejszy niż dla algorytmu opartego o programowanie liniowe. Analogiczna procedura została stworzona dla oszacowania górnego (Lyamin i Sloan, 2002b). Opracowana metoda została zastosowana w obliczeniach nośności dla przypadku dwu- i trójwymiarowego fundamentu posadowionego na gruncie idealnie spoistym (Salgado i in., 2004) oraz na piasku (Lyamin i in., 2007). Obydwie prace przedstawiają wartości współczynników nośności, kształtu i zagłębienia fundamentu. W pracy (Lyamin i in., 2007) zaproponowano jako rezultat przeprowadzonych analiz nową formułę na wyznaczenie nośności podłoża. Szczegółowa dyskusja na temat współczynnika  $N_{\gamma}$  jest zawarta m.in. w pracy (Hjiaj, i in., 2005), natomiast wpływ różnych kształtów fundamentu przedstawia praca (Yamamoto i in., 2009). Część rezultatów otrzymana poprzez powyższą metodę jest przytoczona w Rozdziale 2.6 i porównana z innymi rozwiązaniami. Metoda analizy granicznej za pomocą elementów skończonych pozwala wyznaczać dobre (tj. bliskie) oszacowania dolne i górne dla nośności granicznej.

## 2.5. Wybrane rezultaty dotyczące oceny nośności podłoża

Jednym z pierwszych rozwiązań dotyczących nośności podłoża dla fundamentu powierzchniowego (lub o niewielkim zagłębieniu, które nie przekracza szerokości fundamentu) jest rozwiązanie zaproponowane przez Terzagiego (1943); opiera się ono na metodzie równowagi granicznej. Postać wyrażenia określającego nośność podana przez Terzagiego jest przedstawiona w równaniu (2.9). Terzaghi w swoich analizach zastosował mechanizm Prandtla, natomiast geometria mechanizmu zniszczenia była nieco inna niż ta przedstawiona w rozdziale 2.2. Metodę równowagi granicznej wykorzystał także Meyerhof (1951), który przedstawił rozwiązania dla fundamentów powierzchniowych i zagłębionych. Meyerhof wykazał, że użycie klasycznego mechanizmu Prandtla do wyznaczania nośności przy dużych zagłębieniach fundamentu

proceeds to a significant estimation of the bearing capacity. In his later work Meyerhof (1963) proposed the following formula for the bearing capacity coefficient  $N_\gamma$ :

$$N_\gamma = (N_q - 1) \operatorname{tg}(1.4\varphi) \quad (2.16)$$

Where  $N_q$  is the bearing capacity coefficient for stress  $q$  resulting from the classical Prandtl mechanism.

An alternative approach to the analysis of bearing capacity of the soil is the method of characteristics (method of slip lines). It is based on the Coulomb failure criterion and equilibrium equations; in the result one obtains a system of differential equations (Izbicki and Mróz, 1976). The mentioned system of differential equations together with the boundary conditions can be used for the analysis of stresses in the soil below a horizontal foundation. This method was introduced to geotechnical engineering by Hilla (1950) and Sokołowski (1958); however, in those times the practical application of this method encountered many problems related to the solution of these differential equations, so its use was strongly limited. The solution consists in the construction of two families of slip lines, along which the stresses are constant and known on the basis of the boundary conditions. In this way the defined slip lines are called characteristics, from which the name of the method comes. The solution of the method of characteristics for a heavy soil was first proposed by Lundgren and Mortensen (1953); in their analyses they assumed no load on the foundation and obtained only the bearing capacity coefficient  $N_\gamma$  for  $\varphi = 30^\circ$ , which was  $N_\gamma = 14.8$ . The same failure mechanism for a circular foundation was used later by Larkin (1968). The method of Lundgren and Mortensen was applied by Brinch Hansen and Christiansen (1969) in studies on the bearing capacity coefficient  $N_\gamma$ . An approximate expression for the bearing capacity coefficient  $N_\gamma$  based on the obtained results was proposed by Brinch Hansen (1970) in the following form:

$$N_\gamma = 1.5(N_q - 1) \operatorname{tg} \varphi \quad (2.17)$$

Sokołowski (1958) obtained an approximate solution for the bearing capacity of a heavy soil; the bearing capacity coefficient  $N_\gamma$  obtained by Sokołowski is still used

praktyce inżynierskiej. Inne wyrażenie na wartość  $N_\gamma$  w oparciu o metodę charakterystyk zostało zaproponowane przez Vesica (1970):

$$N_\gamma = 2.0(N_q - 1) \operatorname{tg} \varphi \quad (2.18)$$

Booker (1969) otrzymał wartości górnego oszacowania wartości współczynnika  $N_\gamma$  i przedstawił wyniki na diagramach. Przybliżenie tych wyników funkcjami (dla szorstkiej i gładkiej podstawy fundamentu) zostało podane przez Poulosa i in. (2001) w postaci następujących wyrażień:

$$\text{szorstka: } N_\gamma = 0.1045 \exp(9.6\varphi) \quad (2.19)$$

$$\text{gładka: } N_\gamma = 0.0663 \exp(9.3\varphi) \quad (2.20)$$

Metoda charakterystyk była również stosowana do fundamentów kołowych przez Boltona i Lau (1991), przy założeniu mechanizmów Hilla i Prandtla. Dokładne wartości nośności na podstawie metody charakterystyk zostały wyznaczone przez Martina (2005), który zaproponował następujące wyrażenie na wartość współczynnika  $N_\gamma$ :

$$N_\gamma = (N_q - 1) \operatorname{tg}(1.32\varphi) \quad (2.21)$$

Zmiany wartości  $N_\gamma$  wraz ze zmianami kąta tarcia  $\delta$  pomiędzy fundamentem a gruntem zostały przedstawione w pracy Kumara (2009). Kumar pokazał, że potrzeba uwzględnienia kąta  $\delta$  wynika z jego dużego wpływu na wartość współczynnika  $N_\gamma$ , natomiast wartości  $N_c$  oraz  $N_q$  pozostają praktycznie niezależne od wartości  $\delta$ .

Kolejnym podejściem obliczeniowym jest oszacowanie górnej nośności, które zostało przedstawione dokładniej w poprzednich rozdziałach. Oszacowanie górne jest bezpośrednio związane ze stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia, ponieważ tylko dla stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia można udowodnić twierdzenia o ocenie górnej i dolnej obciążenia granicznego. Jednakże, metoda obliczeń dla niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia została zasugerowana przez Dreshera i Detornay'a (1993). Mechanizm wieloblokowy dla szorstkiej podstawy fundamentu zaproponowany przez Michałowskiego (1997) został omówiony w rozdziale 2.3. Michałowski dla gładkiej podstawy fundamentu zaproponował mechanizm wieloblokowy typu Hilla. Podobny mechanizm zaproponował Soubra (1998) i

zastosował go do analiz statycznych i sejsmicznych nośności podłoża. Wang i in. (2001) zasugerowali użycie mechanizmu składającego się z czworokątów oraz pokazali, że porównanie wielkości mechanizmów zniszczenia przy uwzględnieniu ciężaru gruntu i przy założeniu gruntu nieważkiego prowadzi do mniejszych mechanizmów zniszczenia w przypadku gruntów ważkich. Analogiczne obserwacje są przedstawione w rozdziale 6. Zhu (2000) zaproponował rozwiązanie opierające się na równoważności analizy stanów granicznych i równowagi granicznej, otrzymując także wartości współczynnika  $N_\gamma$ . Jak podano w poprzednim rozdziale, analiza graniczna za pomocą elementów skończonych pozwala znajdować ograniczenia górne i dolne wartości nośności. Przy zastosowaniu tej metody Hjiąj i in. (2005) wyznaczyli wartości współczynnika  $N_\gamma$ , licząc wartość średnią z oszacowania górnego i dolnego; do uzyskanych wyników aproksymowali następującą postać funkcji:

$$N_\gamma = \exp\left(\frac{1}{6}(\pi + 3\pi^2 \operatorname{tg} \varphi)\right) (\operatorname{tg}(\varphi))^{\frac{2}{5}\pi} \quad (2.22)$$

Przybliżone wartości współczynników nośności mogą być wyznaczane także przy zastosowaniu metody elementów skończonych. Jedną z pierwszych ocen wartości współczynnika  $N_\gamma$  została opublikowana przez Griffithsa (1982) i dotyczyła gruntu niespoistego z uwzględnieniem ciężaru własnego oraz  $q = 0$ . W późniejszej pracy Frydmana i Burda (1997) wpływ wartości kąta tarcia wewnętrznego na wartość nośności był wyznaczany na podstawie metody różnic skończonych i metody elementów skończonych. Rozwiązania otrzymane poprzez metodę elementów skończonych nie mogą być rozpatrywane jako dolne lub górne oszacowania nośności; górne oszacowanie wymaga spełnienia prawa płynięcia w każdym punkcie rozważanego ciała (więcej informacji na ten temat można znaleźć m.in. w pracy Hjiąj i in. (2005)).

Twierdzenie o oszacowaniu górnym nośności zostało wykorzystane w metodzie optymalizacji układu nieciągłości (*discontinuity layout optimization*, DLO), która została zaproponowana przez Smitha i Gilberta (2007) dla przypadku dwuwymiarowego oraz Hawhsbee i in. (2013) w przypadku trójwymiarowym. Metoda opiera się na poszukiwaniu najlepszej konfiguracji potencjalnych linii poślizgu, którą znajduje się w drodze optymalizacji dla ustalonej siatki punktów węzłowych. Metoda ta została zastosowana w komercyjnym programie LimitState GEO (2016), pozwalającym na rozpatrywanie różnych zagadnień geotechnicznych (posadowienie, stateczność zboczy).



W związku z użyciem w programie metody DLO, a tym samym otrzymaniu górnych oszacowań nośności (zgodnie z teorią nośności granicznej), program znalazł zastosowanie w procesie walidacji rezultatów, np. w pracy Gourveneca i Mana (2011). Metoda DLO znajduje coraz szersze zastosowanie w ostatnich latach, w szczególności dotyczy to skomplikowanych geometrii oraz posadowienia fundamentów w pobliżu zboczy, np. Leshchinsky (2015), Zhou i in. (2018).

## 2.6. Porównanie rezultatów dostępnych w literaturze

Wybrane rezultaty spośród przytoczonych w poprzednich rozdziałach zostały zestawione w tabelach 2.1a oraz 2.1b. Porównano jedynie wartości współczynnika  $N_\gamma$ , ponieważ w większości spośród wymienionych wyżej prac ich autorzy zakładali wartości  $N_c$  oraz  $N_q$  jako równe tym, które zostały wyznaczone w oparciu o mechanizm Prandtla. Jednakże, w niektórych przypadkach, podane w tabelach 2.1a i 2.1b wartości  $N_\gamma$  nie zostały otrzymane dla tego samego mechanizmu zniszczenia, co wartości  $N_c$  oraz  $N_q$ . Takie podejście, jak wskazuje Michałowski (1997), nie jest poprawne, jednakże akceptowalne do celów praktycznych. W celach porównawczych w każdej z zamieszczonych poniżej tabel podano wartości dla  $N_c$ ,  $N_q$  oraz  $N_\gamma$  dla mechanizmu Prandtla.

Tabela 2.1a. Porównanie wartości współczynnika  $N_\gamma$  dla szorstkiej podstawy fundamentu. W przypadku klasycznego mechanizmu Prandtla podano wartości wszystkich współczynników nośności.

Kąt tarcia wewnętrznego $\varphi$ (°)	Klasyczny mechanizm Prandtla (1920)			Terzaghi (1943)	Mayerhof (1963)	Brinch Hansen (1970)	Vesic (1970)
	$N_c$	$N_q$	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$
0	5.14	1	0	0	0	0	0
5	6.49	1.57	0.5	0.5	0.07	0.07	0.1
10	8.34	2.47	1.45	1.2	0.37	0.39	0.52
15	10.98	3.94	3.28	2.5	1.13	1.18	1.58
20	14.83	6.4	6.9	5.0	2.87	2.95	3.93
25	20.72	10.66	14.33	9.7	6.77	6.76	9.01
30	30.14	18.4	30.38	19.7	15.67	15.07	20.09
35	46.12	33.3	67.74	42.4	37.15	33.92	45.23
40	75.31	64.2	163.5	100.4	93.69	79.54	106.05
45	133.87	134.87	442.75	297.5	262.74	200.81	267.75

Pięć ostatnich kolumn w tabeli 2.1b dotyczy rezultatów otrzymanych dla oszacowań górnych. Należy zwrócić uwagę, że wartość współczynnika  $N_\gamma$  otrzymana dla mechanizmu Prandtla jest największa spośród wszystkich przytoczonych. Część z prezentowanych rezultatów na wartość współczynnika  $N_\gamma$  była wyznaczana przy założeniach, które pozwalały zminimalizować jego wartość, np. założenie zerowej spójności czy też braku obciążenia obok fundamentu w poziomie jego posadowienia. Wskutek tego, jak wspomniano wcześniej, mechanizmy zniszczenia otrzymane z uwagi na  $N_\gamma$  nie odpowiadają tym, z których wynikają wartości współczynników  $N_c$  oraz  $N_q$ . Jeśli rozważa się ciężar objętościowy podłoża gruntowego, wartości współczynników nośności  $N_c$ ,  $N_q$  i  $N_\gamma$  są zależne nie tylko od wartości kąta tarcia wewnętrznego, ale również od wartości spójności, naprężenia obok fundamentu, ciężaru objętościowego i rozmiaru fundamentu. Zostało to pokazane na przykład w pracy Michałowskiego (1997), gdzie wykazano zależność współczynników nośności od bezwymiarowych współczynników  $c/\gamma b$  oraz  $q/\gamma b$ , gdzie  $b$  jest szerokością fundamentu. Michałowski w swojej pracy (1997) rozważał dwa sposoby optymalizacji mechanizmu zniszczenia. Jak zaznaczono wcześniej, jednym z nich było znalezienie minimum funkcji wyrażonej równaniem (2.9), w drugim minimalizował wartości każdego ze współczynników nośności, otrzymując tym samym inne geometrie dla  $N_c$  i  $N_q$  oraz  $N_\gamma$ .

Tabela 2.1b. Porównanie wartości współczynnika  $N_\gamma$  dla szorstkiej podstawy fundamentu (kontynuacja tabeli 2.1a).

Kąt tarcia wewnętrznego $\varphi$ (°)	Poulos i in. (2001)	Martin (2005)	Michałowski (1997)	Soubra (1999)	Wang i in. (2001)	Chen (1975)	Hjiaj i in. (2005)
	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$	$N_\gamma$
0	0.10	0.00	0	0	-	-	0
5	0.24	0.07	0.18	0.25	-	-	0.12
10	0.56	0.35	0.7	0.85	-	-	0.46
15	1.29	1.06	1.94	2.1	-	2.7	1.24
20	2.98	2.68	4.47	4.67	6.56	5.87	2.96
25	6.89	6.27	9.76	10.06	12.26	12.4	6.74
30	15.93	14.40	21.39	21.88	24.21	26.7	15.24
35	36.81	33.68	48.68	49.62	50.94	60.2	35.65
40	85.07	83.26	118.83	120.96	122.95	147	88.39
45	196.62	226.37	322.85	328.88	331.22	401	240.88

Na potrzeby niniejszej rozprawy poszukiwane było minimum sumy trzech składników we wzorze na nośność (2.9). Pomimo znaczących różnic w wartościach  $N_\gamma$  raportowanych przez różnych badaczy, wpływ wartości  $N_\gamma$  na wartość nośności może być znacznie mniejszy niż wzajemne różnice w otrzymanych wartościach tego współczynnika. Co więcej, wpływ współczynnika  $N_\gamma$  rośnie wraz ze wzrostem wartości kąta tarcia wewnętrznego. Zgodnie z oczekiwaniami różnice pomiędzy wartościami współczynnika  $N_\gamma$  mają największe przełożenie na różnice w wartościach nośności dla gruntów niespoistych przy fundamencie posadowionym na powierzchni terenu. Powyższy efekt jest zilustrowany w tabeli 2.2, gdzie obliczono przykładowe wartości nośności w przypadku gruntu spoistego w zależności od wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz przy niewielkim zagłębieniu fundamentu. Obliczenia przeprowadzono dla mechanizmu Prandtla, rozwiązania zaproponowanego przez Martina (2005) oraz oszacowania górnego uzyskanego przez Michałowskiego (1997). Ostatnia kolumna w tabeli 2.2 przedstawia procentową różnicę otrzymanych nośności podłoża pomiędzy rozwiązaniem Martina a Michałowskiego. Na podstawie tabeli 2.2 widać, że różnice pomiędzy dwoma podejściami, pomimo wyraźnie niższego oszacowania wartości  $N_\gamma$  otrzymanego przez Martina (różnice dla obydwu podejść w wartości  $N_\gamma$  oscylują w okolicy 50%), nie są znaczące.

Tabela 2.2. Porównanie nośności dla różnych podejść w wyznaczaniu wartości współczynnika  $N_\gamma$ . Obliczenia przeprowadzono dla spójności  $c = 20$  kPa, obciążenia obok fundamentu  $q = 10$  kPa oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m. Kolumna (4) prezentuje procentowe różnice w nośności dla rezultatów otrzymanych przez Martina (2005) oraz Michałowskiego (1997).

Kąt tarcia wewnętrznego $\varphi$ (°)	(1)	(2)	(3)	(4)
	Klasyczny mechanizm Prandtla (1920)	Martin (2005)	Michałowski (1997)	$[(3)/(2)-1]*100\%$
	$p$ [kN/m]	$p$ [kN/m]	$p$ [kN/m]	[%]
0	112.8	112.8	112.8	0.0
5	150.2	146.1	147.2	0.7
10	205.4	194.9	198.3	1.7
15	290.1	269.0	277.4	3.1
20	426.3	386.2	403.2	4.4
25	657.1	580.6	613.8	5.7
30	1075.4	923.6	990.0	7.2
35	1899.0	1575.4	1717.9	9.0

Oczywiście wraz ze wzrostem spójności gruntu oraz jego zagłębieniem wpływ współczynnika  $N_\gamma$  staje się coraz mniejszy. Z powyższej analizy wynika istotne stwierdzenie mówiące o tym, że wartość  $N_\gamma$  ma istotny wpływ na nośność przy dużych wartościach kąta tarcia wewnętrznego. Natomiast, poprzez założenie spójności gruntu oraz zagłębienia fundamentu, wpływ współczynnika  $N_\gamma$  na nośność podłoża zostaje ograniczony (co pokazano na przykładzie w tabeli 2.2).

Obecnie stosowana formuła na wyrażenie nośności podłoża uwzględnia wiele możliwych czynników mających na nią wpływ. Równanie (2.23) jest uogólnieniem równania (2.9) i odpowiada warunkom z odpływem wody.

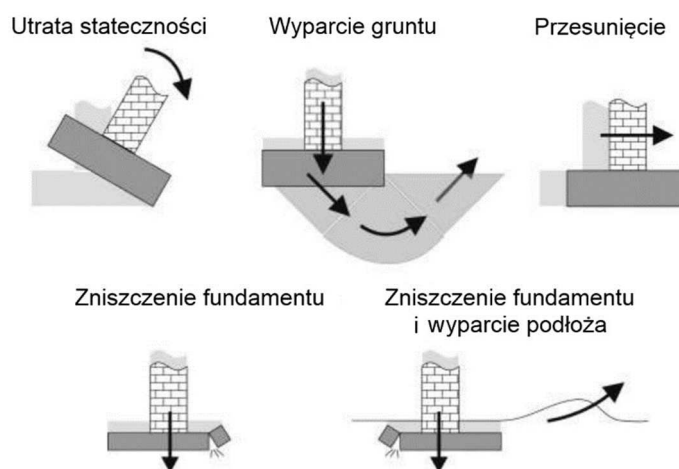
$$p = s_c d_c i_c b_c c N_c + s_q d_q i_q b_q q N_q + s_\gamma d_\gamma i_\gamma b_\gamma \frac{1}{2} \gamma b N_\gamma \quad (2.23)$$

Gdzie  $s_c$ ,  $s_q$  i  $s_\gamma$  to współczynniki kształtu fundamentu;  $d_c$ ,  $d_q$  i  $d_\gamma$  są współczynnikami zagłębienia fundamentu;  $i_c$ ,  $i_q$  i  $i_\gamma$  uwzględniają nachylenie obciążenia;  $b_c$ ,  $b_q$  i  $b_\gamma$  uwzględniają nachylenie podstawy fundamentu. Wyrażenia opisujące poszczególne współczynniki były wyznaczone w sposób teoretyczny lub eksperymentalny. W niniejszej rozprawie przedmiotem zainteresowania są fundamenty obciążone siłą pionową, dlatego też wartości  $i_c$ ,  $i_q$  i  $i_\gamma$  są równe jedności. Co więcej, podstawa fundamentu nie jest nachylona względem kierunku poziomego, więc współczynniki  $b_c$ ,  $b_q$  i  $b_\gamma$  nie są rozpatrywane. W przypadku analiz dwuwymiarowych, poprzez założenie o nieskończenie długiej ławie fundamentowej, nie rozważa się także współczynników  $s_c$ ,  $s_q$  i  $s_\gamma$ . Współczynniki zagłębienia są natomiast uwzględnione bezpośrednio w postaci wyrażenia na wartość nośności, które otrzymuje się przy założeniu mechanizmu wieloblokowego.

## 2.7. Wyznaczanie nośności podłoża zgodnie z Eurokodem 7

Obecnie obowiązującym w Polsce normatywem związanym z zagadnieniami geotechnicznymi (w tym nośnością podłoża) jest Eurokod 7 (PN-EN 1997-1 2008). W Eurokodemie 7 wyróżnia się podstawowe stany graniczne nośności i użyteczności dla fundamentów powierzchniowych. Zgodnie z wytycznymi Eurokodu 7 te dwa rodzaje stanów granicznych muszą zostać rozważone tak, aby znaleźć stan krytyczny decydujący

o wielkości fundamentu. Na rysunku 2.10 przedstawiono schematycznie wybrane stany graniczne.



Rysunek 2.10. Schematyczne przedstawienie wybranych stanów granicznych (za Bond i Harris, 2008)

Projektowanie w oparciu o stany graniczne, zgodnie z Eurokodem 7, wymaga zastosowania częściowych współczynników do obciążeń (lub efektów obciążeń) ( $E_d$ ) oraz częściowych współczynników do parametrów geotechnicznych (lub nośności) ( $R_d$ ) i sprawdzenia warunku:

$$E_d \leq R_d \quad (2.24)$$

Eurokod 7 definiuje trzy podejścia obliczeniowe, dla których ustala się wartości współczynników częściowych do obciążeń i parametrów gruntowych. Wszystkie wartości można znaleźć w normie PN-EN 1997-1 (2008) lub w EC 7: *Geotechnical Design Worked Examples* (2013). Obecnie w Polsce obowiązuje podejście obliczeniowe DA-2\*, w którym obliczenia nośności podłoża wykonuje się wyłącznie na wartościach charakterystycznych parametrów wytrzymałościowych gruntu i stosuje się globalny współczynnik bezpieczeństwa dla nośności. Dla warunków z odpływem wody sugeruje się użycie równania (2.23); jednakże, lewą stronę równania (2.23) zastępuje się  $R/A'$ , gdzie  $A'$  jest efektywnym polem powierzchni fundamentu. Dla warunków bez odpływu proponuje się użycie równania (2.25).

$$\frac{R}{A'} = (2 + \pi)c_u s_c i_c + q \quad (2.25)$$

Eurokod 7 sugeruje zastosowanie równania (2.10) oraz (2.11) jako wyrażen na wartości współczynników  $N_c$  oraz  $N_q$ , natomiast dla współczynnika  $N_\gamma$  proponuje wykorzystanie równania (2.18).

## 3. Trójwymiarowe deterministyczne modele nośności podłoża

### 3.1. Wstęp

Twierdzenia o górnym i dolnym oszacowaniu nośności granicznej w ramach teorii plastyczności znajdują szerokie zastosowanie w analizie dwuwymiarowej (przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia); szczególnie częste jest zastosowanie mechanizmu Prandtla. Jednakże, korzystanie z oszacowania górnego w zagadnieniach trójwymiarowych stwarza problemy związane z trudnością znalezienia relatywnie dobrego mechanizmu zniszczenia. W tym miejscu warto przypomnieć, że taki mechanizm musi spełniać warunki kinematycznej dopuszczalności; ich spełnienie narzuca duże ograniczenia dla kształtu geometrii mechanizmu, co skutkuje względnie wysokimi oszacowaniami nośności podłoża. Pierwsza propozycja zastosowania mechanizmu trójwymiarowego została zaproponowana przez Shielda i Druckera (1953). W monografii Izbickiego i Mroza (1976) przedstawiono prosty mechanizm zniszczenia dla gruntu idealnie spoiściego, jednakże otrzymane wartości oszacowania górnego są relatywnie wysokie. Jakościowo podobny mechanizm zniszczenia, dotyczący przypadku gruntu niespoiściego, został zaproponowany przez Michałowskiego (1985). W pracy Leca i Dormieux (1990) przedstawiono możliwość zastosowania powierzchni stożkowych w analizie stateczności ściany frontowej płytko zlokalizowanych tuneli o przekroju kołowym. Powierzchnie stożkowe zostały zaadaptowane do zagadnień nośności podłoża przez Michałowskiego (2001) w postaci ciągłego mechanizmu zniszczenia i mechanizmu

wieloblokowego. Zastosowanie powierzchni stożkowych zwiększyło znacznie złożoność mechanizmu zniszczenia, jednak pozwoliło na otrzymanie bardziej realistycznych oszacowań nośności, także dla gruntów niespoistych.

Metoda analizy granicznej korzystająca z elementów skończonych (FELA), zgodnie z rozdziałem 2.4, pozwala na wyznaczenie bliskich oszacowań dolnych i górnych. To samo zachodzi w przypadku trójwymiarowym, jednakże znaczny wzrost złożoności problemu wymagał od badaczy, korzystających z tej metody, założenia symetrii w celu ograniczenia liczby elementów w zadaniu (redukcja rozmiaru zagadnienia optymalizacyjnego). W przypadku metody FELA otrzymana dokładność zależy od gęstości siatki elementów skończonych; przeprowadzenie analizy na podobnym poziomie dokładności jak w przypadku zagadnienia dwuwymiarowego wymaga znacznie większego czasu obliczeń. Metoda FELA została zastosowana do rozwiązania zagadnienia trójwymiarowej nośności dla gruntu idealnie spoistego (Salgado i in., 2004) oraz dla piasku (Lyamin i in., 2007).

W praktyce inżynierskiej, w celu wyznaczenia nośności dla przypadku trójwymiarowego, korzysta się wprost z równania (2.23); trzeba natomiast wyznaczyć odpowiednie wartości współczynników kształtu  $s_c$ ,  $s_q$  i  $s_\gamma$ . W literaturze można znaleźć wiele propozycji na określenie ich wartości. Najczęściej wykorzystywane są te, które zostały zaproponowane przez Meyerhofa (1963), Brinch Hansena (1970) i Vesica (1973). Lyamin i in. (2007) przedstawili wartości współczynników  $s_q$  i  $s_\gamma$  w oparciu o metodę FELA dla piasku. Majidi i in. (2011) omówili trójwymiarową analizę nośności prostokątnego fundamentu za pomocą metody elementów dyskretnych (2011). Wspomniana wcześniej metoda DLO została opracowana dla przypadku trójwymiarowego i podłoża spoistego (Hawhsbee i in., 2013).

Wybrane rezultaty spośród wspomnianych w niniejszym rozdziale są zestawione w rozdziale 3.4. Na potrzeby rozprawy autor zdecydował się zastosować wieloblokowy mechanizm zniszczenia podłoża zawierający powierzchnie stożkowe zaproponowany przez Michałowskiego (2001). Szczegóły dotyczące wybranego mechanizmu są przedstawione w kolejnym rozdziale, natomiast jego adaptacja do probabilistycznej analizy nośności jest przedmiotem rozdziału 6.

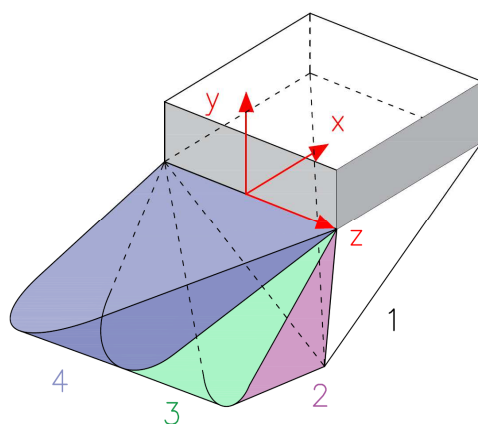


## 3.2. Mechanizm wieloblokowy

### 3.2.1. Wstępny opis mechanizmu

W niniejszym rozdziale przedstawiono deterministyczny trójwymiarowy mechanizm zniszczenia dla stopy kwadratowej. Mechanizm został zaproponowany przez Michałowskiego (2001). Michałowski w swojej pracy podał podstawy teoretyczne sposobu wyznaczenia nośności podłoża z pominięciem skomplikowanych obliczeń energii dyssypacji na każdej z powierzchni poślizgu, zastępując je całkowaniem po obrysie mechanizmu zniszczenia na powierzchni terenu (celem było wyznaczenie zmian w objętości podczas plastycznego płynięcia). Technika wskazana przez Michałowskiego pozwala znacząco zredukować czas obliczeń potrzebny do wyznaczenia nośności podłoża. Jednakże, zaproponowana technika może być wykorzystana wyłącznie w przypadku homogenicznej warstwy gruntu. Jest to powód, dla którego autor niniejszej rozprawy nie może zastosować powyższego sposobu, w związku z czym nieodzowne jest wyprowadzenie wzorów na energię dyssypacji na wszystkich powierzchniach poślizgu. Wyznaczanie nośności i adaptacja mechanizmu trójwymiarowego na potrzeby niniejszej rozprawy jest przedstawiona odpowiednio w rozdziałach 3 i 6.

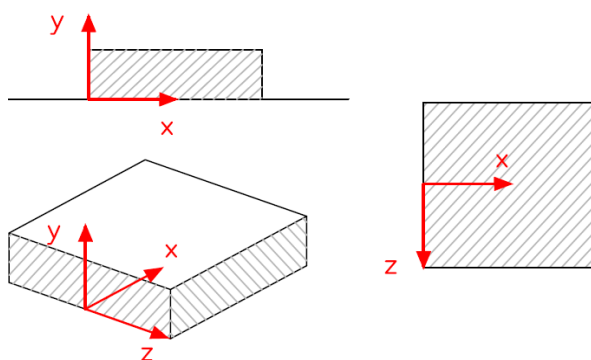
Rozważany mechanizm zniszczenia jest mechanizmem o skomplikowanej budowie; składa się ze sztywnych brył ograniczonych powierzchniami nieciągłości prędkości (powierzchniami poślizgu). W mechanizmie występują trzy główne rodzaje powierzchni: trójkąt, trapez wraz z fragmentem elipsy oraz fragment powierzchni stożkowej. Aby zbudować trójwymiarowy mechanizm zniszczenia należy skorzystać z zasad trójwymiarowej geometrii analitycznej. W ramach niniejszej pracy rozważany jest mechanizm z czterema płaszczyznami symetrii – każda z czterech stron mechanizmu jest identyczna. Ogólny zarys geometrii zniszczenia podłoża jest pokazany na rysunku 3.1. Przedstawiony tam przykład jest mechanizmem 4-blokowym (do liczby bloków, podobnie jak w przypadku płaskim, wlicza się blok znajdujący się bezpośrednio pod fundamentem). W związku z symetrią, na rysunku 3.1 przedstawiono tylko jedno z ramion mechanizmu.



Rysunek 3.1. Przykładowa geometria zniszczenia dla 4-blokowego trójwymiarowego mechanizmu.

Szczegółowy opis zawarto w tekście.

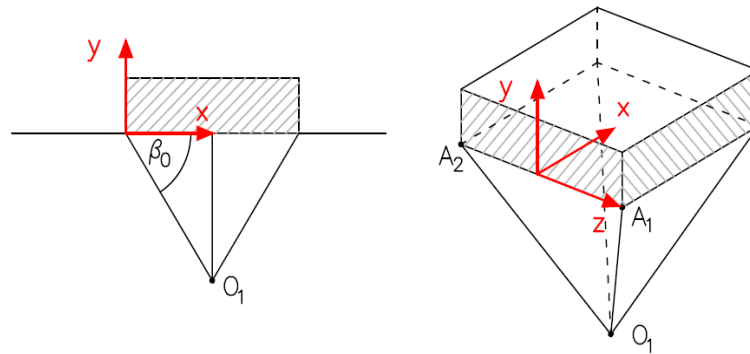
Sztywny blok gruntu oznaczony przez „1” jest ostrosłupem, którego podstawą jest podstawa fundamentu. Wszystkie trójkąty tworzące ściany boczne ostrosłupa są przystające w związku z założeniem symetrii mechanizmu zniszczenia. Geometrie bloków „2”, „3” oraz „4” są znacznie bardziej skomplikowane. W związku z ich złożoną naturą niezbędna jest szczegółowa prezentacja sposobu, w jaki zbudowany jest mechanizm zniszczenia. W tym celu w pierwszej kolejności przedstawiono widok fundamentu (stopa kwadratowa) w określonych płaszczyznach oraz w aksonometrii (patrz rysunek 3.2). Układ współrzędnych zaznaczony kolorem czerwonym jest przyjętym przez autora globalnym układem odniesienia dla mechanizmu trójwymiarowego i będzie się pojawiał na większości prezentowanych rysunków.



Rysunek 3.2. Widok na fundament w płaszczyźnie  $xy$  oraz  $xz$ , oraz rzut aksonometryczny.

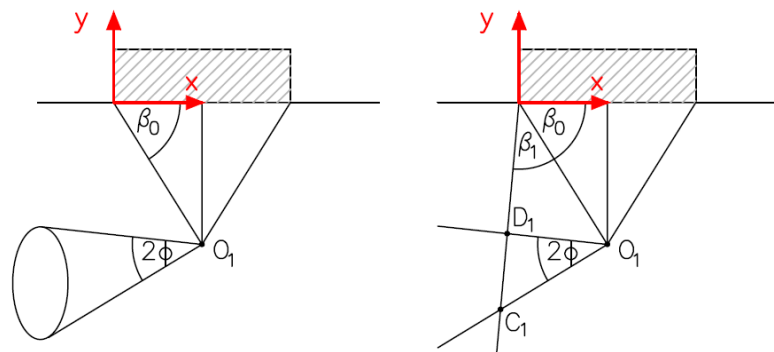
Na rysunku 3.3 pokazano ostrosłup znajdujący się bezpośrednio pod fundamentem. Trójkąt  $A_1A_2O_1$  jest powierzchnią nieciągłości prędkości pomiędzy blokiem „1” i „2”.

Rozmiar ostrosłupa pod podstawą fundamentu jest uzależniony od wartości kąta  $\beta_0$ . Z prostych zależności trygonometrycznych można wyznaczyć współrzędne punktu  $O_1$ .



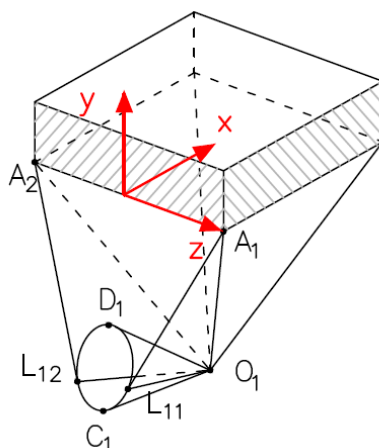
Rysunek 3.3. Ostrosłup poniżej podstawy fundamentu w przekroju płaszczyzną  $xy$  oraz w widoku aksonometrycznym.

Wierzchołek ostrosłupa  $O_1$  jest zarazem wierzchołkiem stożka ograniczającego kolejny blok „2”. Kąt rozwarcia stożka wynosi  $2\varphi$  i jego wartość wynika z warunku kinematycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia. Ustawienie stożka jest zdeterminowane przez kąt  $\alpha$  (patrz rozdział 3.2.2). Po określeniu położenia stożka znajduje się jego przecięcie wraz z płaszczyzną określoną przez kąt  $\beta_1$  (patrz rysunek 3.4). Jeśli przetniemy stożek płaszczyzną, otrzymamy w rezultacie jedną z krzywych stożkowych: okrąg, elipsę, parabolę lub hiperbolę. W niniejszej rozprawie przedmiotem rozważań będą jedynie przypadki dające elipsy (lub w szczególnym przypadku okręgi). W związku z powyższym, przecięcie stożka z płaszczyzną  $A_1A_2C_1$  z rysunku 3.4 jest elipsą (w szczególnym przypadku, gdy oś symetrii stożka jest prostopadła do płaszczyzny  $A_1A_2C_1$ , przecięcie  $C_1D_1$  będzie okręgiem).



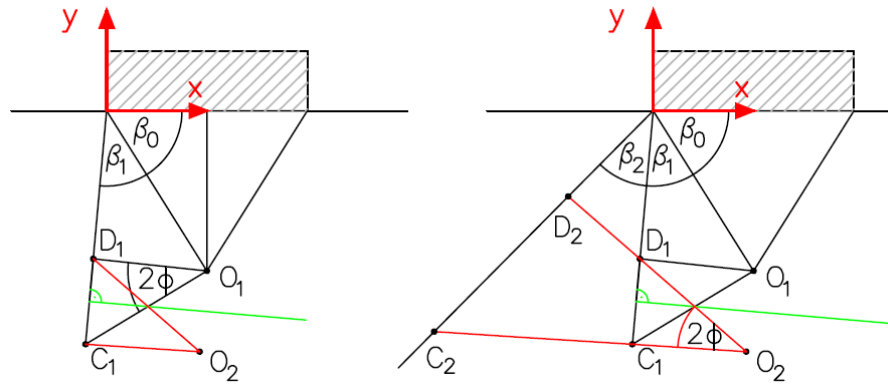
Rysunek 3.4. Lokalizacja pierwszej powierzchni stożkowej i jej przecięcie z płaszczyzną zdeterminowaną przez kąt  $\beta_1$ .

Na rysunku 3.5 przedstawiono elipsę  $C_1D_1$  w widoku aksonometrycznym. Dodatkowo, na rysunku 3.5 pokazano linie styczności ( $O_1L_{11}$  i  $O_1L_{12}$ ) pomiędzy powierzchnią stożkową a płaszczyznami wyznaczonymi przez punkty  $A_1O_1L_{11}$  oraz  $A_1O_1L_{12}$ . Aby wyznaczyć położenie tej linii, należy rozwiązać nieliniowe równanie przedstawione w rozdziale 3.1.2.



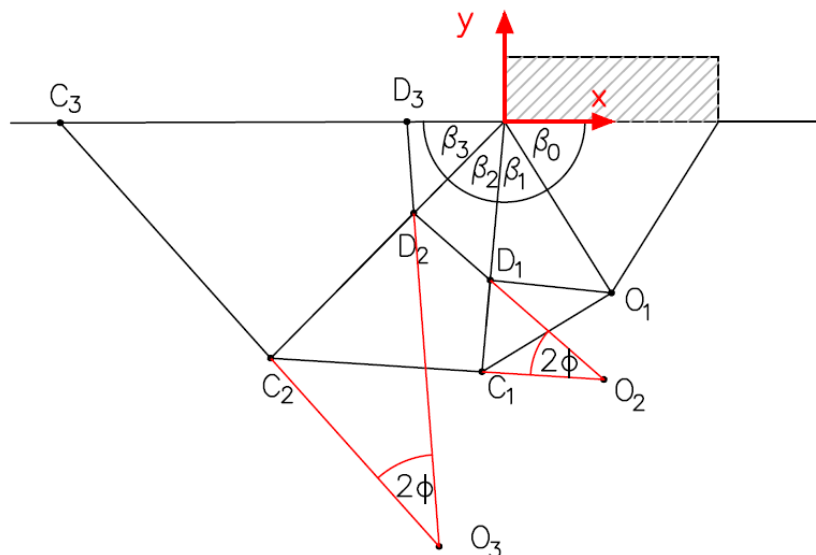
Rysunek 3.5. Elipsa  $C_1D_1$  jako rezultat przecięcia powierzchni  $A_2A_1C_1$  z powierzchnią stożkową. Punkty  $L_{11}$  i  $L_{12}$  wynikają z przecięcia się linii styczności  $O_1L_{11}$  i  $O_1L_{12}$  z elipsą  $C_1D_1$ .

W celu określenia geometrii kolejnego sztywnego bloku, należy ustalić położenie następnej powierzchni stożkowej, której wierzchołek oznaczymy przez  $O_2$ . W związku z koniecznością zapewnienia kinematycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia i zapewnienia koincydencji geometrii dwóch sąsiadujących bloków, położenie kolejnej powierzchni stożkowej jest zdefiniowane jednoznacznie. Geometria przekroju  $C_1D_1$  musi być taka sama dla bloku „3”, jak dla bloku „2”. Aby spełnić ten wymóg, kąty  $\angle D_1O_1C_1$  oraz  $\angle D_1O_2C_1$  muszą być równe (patrz rysunek 3.6). Położenie wierzchołka kolejnej powierzchni stożkowej  $O_2$  może być wyznaczone jako odbicie lustrzane położenia  $O_1$  względem prostej prostopadłej do powierzchni wyznaczonej przez kąt  $\beta_1$  i przechodzącej przez geometryczny środek elipsy  $C_1D_1$ . Sytuację prezentuje rysunek 3.6. Gdy pozycja nowej powierzchni stożkowej jest już ustalona, należy wyznaczyć jej przecięcie z płaszczyzną zdefiniowaną przez kąt  $\beta_2$ . W przypadku bloku „3”, część stożka znajdująca się poza obszarem wyznaczonym przez płaszczyzny określone przez kąty  $\beta_1$  i  $\beta_2$  jest odrzucana, jedynie część pomiędzy elipsami  $C_1D_1$  i  $C_2D_2$  brana jest do dalszych analiz.

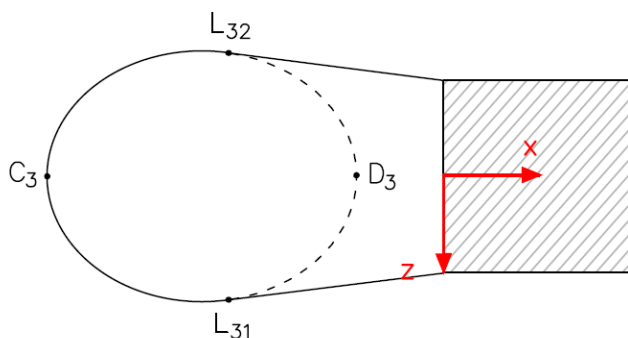


Rysunek 3.6. Wyznaczenie trzeciego sztywnego bloku, oznaczonego jako „3”. Zgodnie z koniecznością spełnienia warunku kinematycznej dopuszczalności, kąt  $\angle D_1 O_1 C_1$  jest równy kątowi  $\angle D_1 O_2 C_1$ . Z kolei kąt  $\beta_2$  określa rozmiar sztywnego bloku. Przecięcie  $C_2 D_2$  jest elipsą.

W sposób analogiczny wyznacza się geometrię czwartego bloku „4”. Ostateczny wynik przedstawia rysunek 3.7. Elipsa  $C_3 D_3$  znajduje się na powierzchni terenu i wspólnie z liniami stycznymi do niej, tworzy kształt mechanizmu zniszczenia na powierzchni terenu. Rozmiar mechanizmu zniszczenia zależy od wartości kąta tarcia wewnętrznego. Dla większych wartości otrzymuje się większy rozmiar mechanizmu zniszczenia. Przykładowe kształty geometrii zniszczenia na powierzchni terenu przedstawia rysunek 3.8.

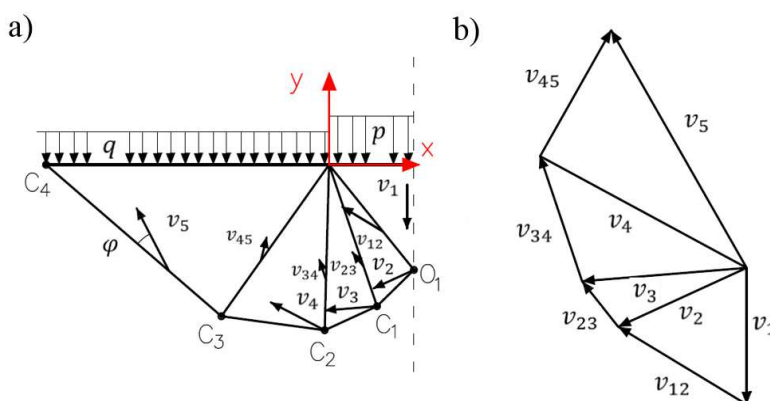


Rysunek 3.7. Wyznaczenie czwartego bloku (analogicznie do sytuacji przedstawionej na rysunku 3.6). Przecięcie powierzchni stożkowej z powierzchnią terenu  $C_3 D_3$  jest elipsą.



Rysunek 3.8. Rozmiar geometrii zniszczenia na powierzchni terenu zależy silnie od wartości kąta tarcia wewnętrznego. Z powodu założenia symetrii jedynie jedna z czterech części mechanizmu zniszczenia jest zawarta na rysunku. Grunt znajdujący się poza zaznaczonym obszarem pozostaje w spoczynku.

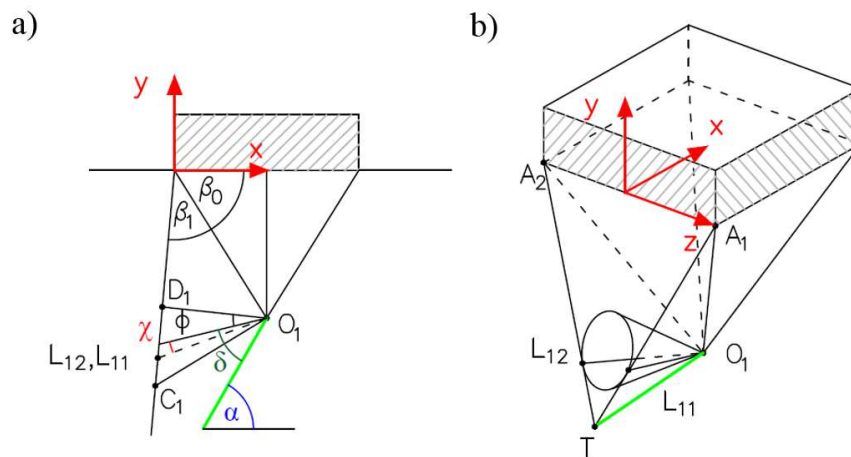
Zapewnienie kinematycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia wymaga, aby wektory nieciągłości prędkości były nachylone do powierzchni poślizgu pod kątem równym wartości kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$ . Pomimo trójwymiarowej geometrii zniszczenia, wektory prędkości są zlokalizowane w jednej płaszczyźnie (otrzymuje się to poprzez zadanie rozwartości powierzchni stożkowych jako  $2\varphi$ ). Wskutek tego, otrzymany hodograf prędkości dla przypadku trójwymiarowej geometrii zniszczenia wygląda analogicznie jak dla zagadnienia dwuwymiarowego (patrz rysunek 3.9). Jak zasygnalizowano wcześniej, na potrzeby niniejszej rozprawy niezbędne jest umożliwienie wyznaczania dyssypacji energii na wszystkich powierzchniach poślizgu (podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym), natomiast formuła na nośność wyznaczaną w powyższy sposób podana jest w rozdziale 6.



Rysunek 3.9. a) Przykładowy przekrój przez trójwymiarowy mechanizm zniszczenia oraz b) hodograf prędkości dla 5-blokowego mechanizmu zniszczenia. Wektory nieciągłości prędkości znajdują się na jednej płaszczyźnie, jednakże geometria zniszczenia jest trójwymiarowa.

### 3.2.2. Geometria drugiego bloku

Konstrukcja pierwszego sztywnego bloku oznaczonego przez „1” (patrz rysunek 3.3) jest oczywista i nie wymaga szerszego komentarza, w przeciwieństwie do ustawienia pierwszej powierzchni stożkowej. Jak wspomniano w poprzednim rozdziale, pozycja pierwszej powierzchni stożkowej jest zdeterminowana przez wartość kąta  $\alpha$  (patrz rysunek 3.10). Kąt  $\alpha$  jest nachyleniem prostej będącej przecięciem płaszczyzn  $A_1O_1T$  i  $A_2O_1T$  (oznaczonych kolorem zielonym na rysunku 3.10) względem prostej poziomej.



Rysunek 3.10. Definicja kątów:  $\alpha$ ,  $\delta$  i  $\chi$ ; a) przekrój w płaszczyźnie x-y, b) widok w aksonometrii.

W oparciu o wartość kąta  $\alpha$ , pierwsza powierzchnia stożkowa zostaje ustawiona w taki sposób, aby była styczna do powierzchni  $A_1O_1T$  oraz  $A_2O_1T$ . W związku z tym otrzymuje się różne usytuowanie powierzchni stożkowej dla różnych wartości kąta  $\alpha$ . Odcinek  $L_{11}O_1$  jest linią styczności pomiędzy płaszczyzną  $A_1O_1T$  oraz powierzchnią stożkową (powyższe zachodzi także w przypadku powierzchni  $A_2O_1T$  i odcinka  $L_{12}O_1$ ). Kąt  $\alpha$  jest jednym z parametrów, który ma wpływ na kształt geometrii zniszczenia, dlatego też będzie jednym z elementów względem których prowadzona będzie optymalizacja. Dla znanej wartości kąta  $\alpha$ , można wyznaczyć wartość kąta  $\rho$  pomiędzy płaszczyznami  $A_1O_1T$  i  $A_2O_1T$  (patrz załącznik C). Opierając się na wartości  $\rho$ , można wyznaczyć wartości kątów  $\kappa$  i  $\delta$  poprzez rozwiązanie następującego równania:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \kappa} \quad (3.1)$$

Gdzie kąt  $\kappa$  jest rozwiązaniem następującego równania nieliniowego (3.2).

$$\operatorname{tg} \kappa = \operatorname{tg} \rho \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \kappa} \right) \quad (3.2)$$

Aby znaleźć pozycje punktów  $L_{11}$  i  $L_{12}$ , należy wyznaczyć wartość kąta  $\chi$ . Wyprowadzenie wzoru na kąt  $\chi$  jest przedstawione w załączniku C, a w tym miejscu przytacza się jego rezultat, mianowicie:

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \varphi \sin \kappa \quad (3.3)$$

Wyznaczenie geometrii drugiego sztywnego bloku wymaga obliczenia współrzędnych następujących punktów:  $O_1$ ,  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $C_1$  oraz  $D_1$ . Co więcej, parametry określające kształt elipsy, takie jak wielka półoś, mała półoś oraz mimośród są również niezbędne. Mimośród elipsy  $e$  można wyznaczyć ze wzoru (3.4).

$$e = \frac{\cos \mu}{\cos \varphi} \quad (3.4)$$

Gdzie  $\mu$  jest kątem pomiędzy osią stożka a przecinającą go płaszczyzną. Zerowy mimośród otrzymuje się dla kąta  $\mu = 90^\circ$ , wtedy cosinus we wzorze (3.4) jest równy zeru i w rezultacie otrzymuje się okrąg. Wielka półoś elipsy  $a_e$  może być wyznaczona wprost jako połowa długości odcinka pomiędzy punktami  $C_1$  i  $D_1$ . Dla znanych  $e$  i  $a_e$  małą półoś elipsy wyznacza się wprost z równania (3.5).

$$b_e = a_e \sqrt{1 - e^2} \quad (3.5)$$

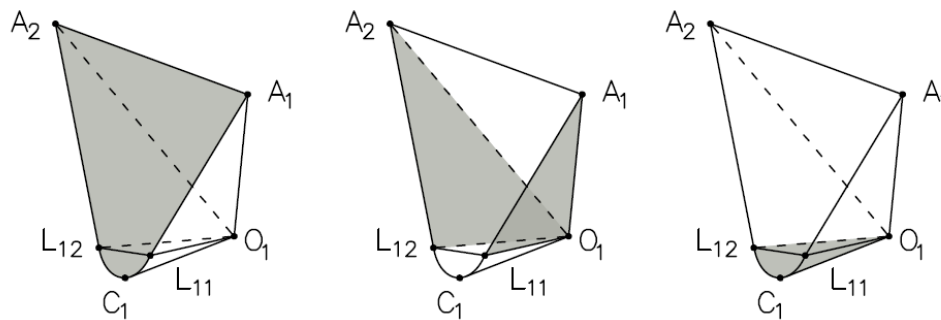
Znalezienie usytuowania pierwszej powierzchni stożkowej wymaga sporego zaangażowania obliczeniowego, jednak położenie kolejnych powierzchni stożkowych wyznacza się wprost z warunku na kinematyczną dopuszczalność mechanizmu zniszczenia (patrz rysunek 3.6). Kolejne punkty (np.  $C_2$ ,  $D_2$ ) są przecięciem projekcji punktów poprzedzających (np.  $C_1$ ,  $D_1$ ) poprowadzonych z nowego środka powierzchni stożkowej (np.  $O_2$ ) oraz powierzchni zdeterminowanej przez właściwą wartość kąta  $\beta$  (np.  $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ ). W niniejszym rozdziale przedstawiono jako przykład mechanizm 4-blokowy i 5-blokowy, natomiast liczba bloków nie jest ograniczona - limituje ją jednak rosnący czas obliczeń zwiększający się wraz z liczbą bloków.



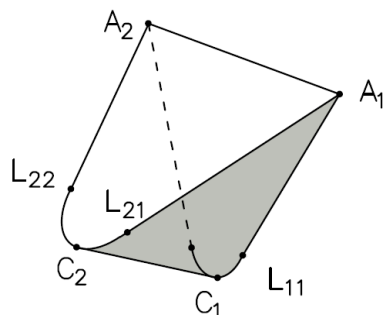
### 3.3. Wyprowadzenie wyrażenia na nośność podłoża

#### 3.3.1. Pola powierzchni poślizgu

Zgodnie z rozdziałem 3.2.1, w związku ze specyficznymi wymogami podejścia prezentowanego w niniejszej rozprawie w zakresie wyrażenia na nośność podłoża, dyssypacje energii muszą być obliczone indywidualnie na każdej powierzchni poślizgu. W niniejszym podrozdziale przedstawiono krok po kroku, w jaki sposób wyprowadzono wyrażenie na nośność podłoża. Rozważana jest geometria zniszczenia przedstawiona w rozdziale 3.2.1 oraz 3.2.2. Dla znanej geometrii zniszczenia możliwe jest wyznaczenie nośności podłoża (oczywiście w przypadku geometrii wybranej w sposób „losowy” nie będzie to optymalna wartość nośności podłoża). Na podstawie geometrii zniszczenia muszą zostać wyznaczone nie tylko pola powierzchni poślizgu i objętości bloków, ale także hodograf prędkości. Na początku rozważymy pola powierzchni poślizgu. Jako przykład, na rysunku 3.11 przedstawiono drugi blok w rozważanym mechanizmie. Kolejne bloki mają podobną geometrię, jednak z dwóch stron ogranicza je trapez z fragmentem elipsy (por. z rysunkiem 3.12).



Rysunek 3.11. Geometria drugiego bloku w mechanizmie zniszczenia. Figura  $A_2A_1L_{12}C_1L_{11}$  jest trapezem z fragmentem elipsy,  $A_2O_1L_{12}$  i  $A_1O_1L_{11}$  są trójkątami,  $O_1L_{11}C_1L_{12}$  jest fragmentem powierzchni stożkowej. Trójkąt  $A_2A_1O_1$  jest jednym z trójkątów tworzących ostrosłup bezpośrednio pod podstawą fundamentu.



Rysunek 3.12. Geometria trzeciego bloku w mechanizmie zniszczenia; każdy kolejny blok cechuje się analogiczną geometrią.

W związku z trójwymiarowym charakterem mechanizmu zniszczenia, niezbędne jest zastosowanie geometrii analitycznej w trzech wymiarach. Podczas procesu wyznaczania pól powierzchni znane są wszystkie współrzędne punktów charakterystycznych. W tej sytuacji, pole trójkąta można wyznaczyć zgodnie z równaniem (3.6).

$$S = \frac{|\mathbf{AB} \times \mathbf{BC}|}{2} = \frac{|\mathbf{AB}||\mathbf{BC}| \sin \theta}{2} \quad (3.6)$$

Gdzie symbol „ $\times$ ” oznacza iloczyn wektorowy, natomiast  $\theta$  jest kątem pomiędzy wektorami  $\mathbf{AB}=(x_1, y_1, z_1)$  i  $\mathbf{BC}=(x_2, y_2, z_2)$ , będącymi ramionami trójkąta. Iloczyn wektorowy w  $\mathbb{R}^3$  można zapisać jak w równaniu (3.7).

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2} \quad (3.7)$$

Zastosowanie równania (3.7) jest wygodne do obliczania powierzchni trójkątów zorientowanych w przestrzeni trójwymiarowej; wykorzystano je także przy obliczeniach pól trapezu (poprzez podział na dwa trójkąty).

Obliczenie pola fragmentu elipsy wymaga przeprowadzenia relatywnie prostego całkowania. Przyjęta konwencja oznaczeń przedstawiona jest na rysunku 3.13. Układ współrzędnych oznaczony kolorem niebieskim jest układem lokalnym. Jako przykład wybrano elipsę pomiędzy blokiem „2” i „3” (patrz rysunek 3.10). Dolna granica

całkowania  $g$  w całce oznaczonej (3.8) może przyjmować zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości, w zależności od lokalizacji punktów  $L_{11}$  i  $L_{12}$ .

$$S_e = 2 \int_g^{a_e} \sqrt{b_e^2 - \left(\frac{b_e x}{a_e}\right)^2} dx \quad (3.8)$$

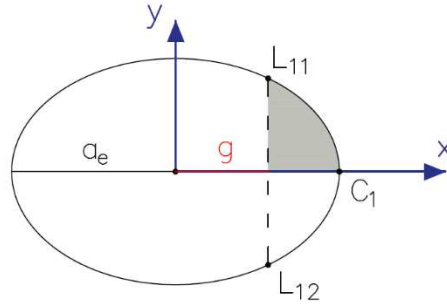


Fig. 3.13. Konwencja oznaczeń przyjęta w równaniu (3.8).

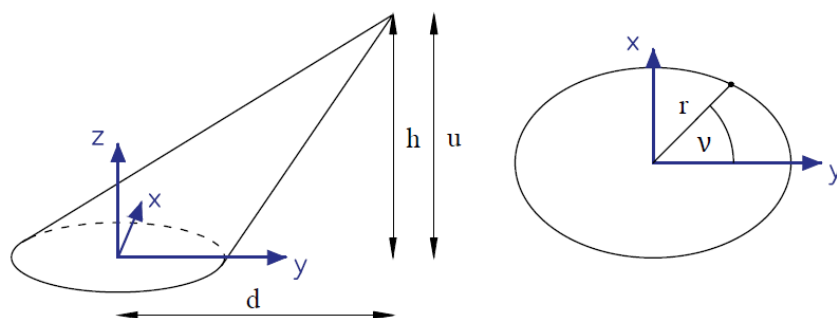
Sytuacja staje się znacznie bardziej złożona w przypadku powierzchni stożkowych. Dzieje się tak z powodu nachylenia podstawy stożka do jego osi (jest to skutek przecięcia płaszczyzną wyznaczoną przez kąt  $\beta$ ), w rezultacie czego podstawa stożka jest elipsą. Jednocześnie tylko część powierzchni stożkowej bierze udział w mechanizmie zniszczenia (patrz rysunek 3.10). Aby umożliwić wyznaczanie pól powierzchni stożkowych, jak w rozważanym przypadku, należy dokonać odpowiedniej parametryzacji tejże powierzchni. Przyjętą parametryzację przedstawia rysunek 3.14. Kąt  $v$ , parametr  $u$  oraz  $r$  są wystarczające do odpowiedniego sparametryzowania powierzchni stożkowej. Odległość  $r$  pomiędzy punktem znajdującym się na elipsie a jej środkiem można wyznaczyć z równania (3.9).

$$r(v) = \frac{a_e b_e}{\sqrt{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2}} \quad (3.9)$$

Gdzie  $a_e$  oraz  $b_e$  są odpowiednio wielką półosią elipsy oraz małą półosią elipsy. Współrzędne kartezjańskie punktów zlokalizowanych na powierzchni elipsy wyznacza się z (3.10) (współrzędne lokalne).

$$\begin{aligned} x &= r \cos v \\ y &= r \sin v \\ z &= hu \end{aligned} \quad (3.10)$$

Gdzie  $h$  jest wysokością stożka i  $u \in [0,1]$ .



Rysunek 3.14. Parametryzacja powierzchni stożkowej. Przedstawiony układ współrzędnych jest układem lokalnym.

Podstawiając równanie (3.9) do (3.10) oraz uwzględniając współczynnik proporcjonalności  $1 - u$  do wartości  $a_e$  oraz  $b_e$ , otrzymuje się współrzędną  $x$  (patrz równanie (3.11)). Współczynnik  $1 - u$  jest odpowiedzialny za dostosowanie wartości  $a_e$  oraz  $b_e$  do aktualnej wartości parametru  $u$ . Co więcej, poprzez dodanie poziomego przesunięcia wartości współrzędnych na kierunku  $y$ , związanego z nachyleniem podstawy stożka do jego osi, wartość współrzędnej  $y$  wyznacza się z równania (3.11). W związku z powyższym parametryczna reprezentacja powierzchni stożkowej w lokalnym układzie współrzędnych kartezjańskich zadana jest następująco:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{(1-u)^2 a_e b_e}{\sqrt{(1-u)^2 a^2 (\sin v)^2 + (1-u)^2 b^2 (\cos v)^2}} \cos v \\
 y &= du + \frac{(1-u)^2 a_e b_e}{\sqrt{(1-u)^2 a^2 (\sin v)^2 + (1-u)^2 b^2 (\cos v)^2}} \sin v \\
 z &= hu
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dysponując parametryzacją powierzchni stożkowej, pole jej powierzchni można wyznaczyć poprzez zastosowanie pierwszej formy fundamentalnej, znanej z geometrii różniczkowej (Reinhardt i Soeder, 2006). Dla przejrzystości prezentowanych treści w równaniu (3.12) przedstawia się rezultat wyprowadzenia, które zostało przedstawione w załączniku D. Na jego podstawie otrzymuje się następujące wyrażenie (3.12) na pole fragmentu powierzchni stożkowej. Wzór (3.12) został zastosowany w algorytmie numerycznym opracowanym na potrzeby niniejszej rozprawy.

$$S = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} -a_e b_e (u - 1) \times \sqrt{\frac{b_e^4 (a_e^2 + h^2) \cos^2 v + a_e^3 \sin v \left( a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2} \right)}{(a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2)^3}} dudv \quad (3.12)$$

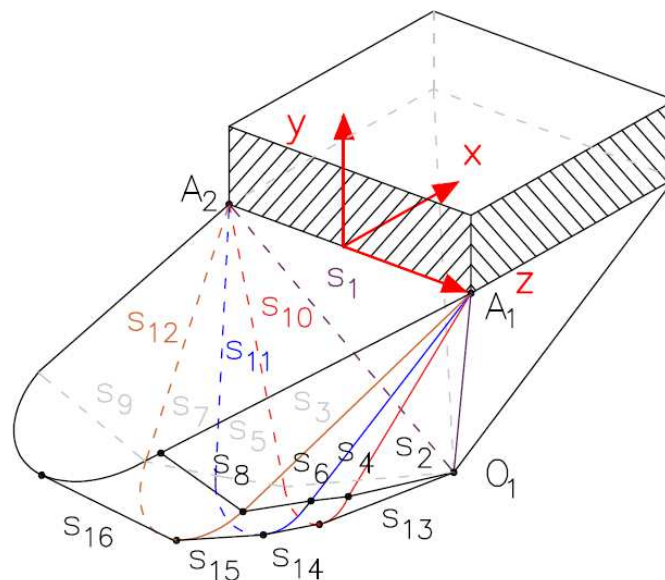
Geometria pierwszej powierzchni stożkowej jest przedstawiona na rysunku 3.11. Aby otrzymać pole powierzchni w oparciu o równanie (3.12), konieczne jest zdefiniowanie granic całkowania; szczególna uwaga musi być skoncentrowana na wartościach  $v_1$  and  $v_2$ , które wycinają fragment powierzchni stożkowej (zgodnie z pozycjami punktów  $L_{11}$  i  $L_{12}$ ).

### 3.3.2. Nośność podłoża

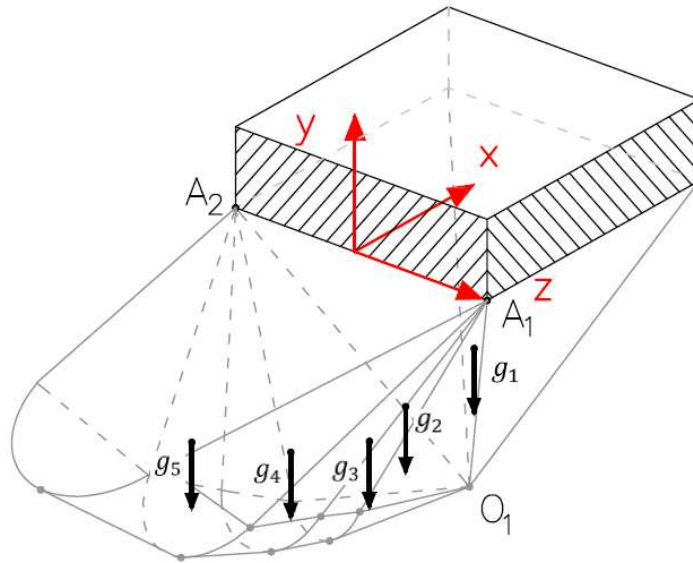
W przypadku mechanizmu złożonego z  $n$  sztywnych bloków otrzymuje się  $4n - 4$  linii poślizgu (dla każdej z czterech części mechanizmu). Gdy  $n = 4$ , otrzymuje się 12 powierzchni poślizgu. Na potrzeby dalszych rozważań oznaczymy każdą z powierzchni poślizgu przez  $s_i$  dla  $i = 1, \dots, 4n - 4$ . Przyjmuje się następujące przypisanie oznaczeń  $s_i$  do powierzchni poślizgu:  $s_1$  oznacza trójkąt  $A_2A_1O_1$ ;  $s_2, \dots, s_{2n-1}$  oznaczają trójkąty boczne (np. dla  $n = 5$  jest 8 trójkątów bocznych:  $A_1L_{11}O_1, A_2L_{12}O_1, A_1L_{21}L_{11}, A_2L_{22}L_{12}, A_1L_{31}L_{21}, A_2L_{32}L_{22}, A_1L_{41}L_{31}, A_2L_{42}L_{32}$ , patrz rysunek 3.14). Powierzchnie  $s_{2n}, \dots, s_{3n-3}$  są trapezem połączonym z fragmentem elipsy, natomiast powierzchniom stożkowym przypisuje się następujące oznaczenia:  $s_{3n-2}, \dots, s_{4n-4}$ . Na rysunku 3.15 przedstawiono przyjętą konwencję oznaczeń dla mechanizmu składającego się z  $n = 5$  bloków. Trapez z fragmentem elipsy znajdujący się na powierzchni gruntu nie jest powierzchnią poślizgu, natomiast pole jego powierzchni jest niezbędne przy ocenie wpływu obciążenia obok fundamentu; aby zachować spójność oznaczeń powierzchnia ta została oznaczona przez  $s_{4n-3}$ .

Analogicznie jak w przypadku dwuwymiarowym, tak i dla trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia podłoża w celu wyznaczenia jego nośności niezbędne jest: ustalenie geometrii zniszczenia, wyznaczenie hodografu prędkości, określenie sił ciężkości  $g_i$  (rysunek 3.16), obliczenie dyssypacji energii na każdej powierzchni poślizgu, wyznaczenie obciążenia w poziomie fundamentu  $q$  (rysunek 3.17) oraz

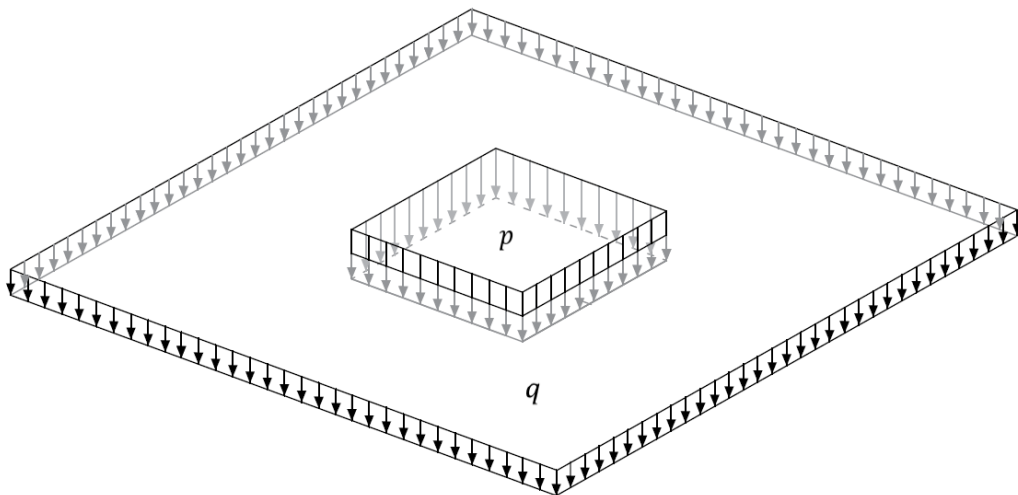
zdefiniowanie wartości parametrów wytrzymałościowych gruntu (kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$  oraz spójności  $c$ ). Dla mechanizmu składającego się z  $n$  bloków (co oznacza  $n$  bloków na jednym z ramion z uwzględnieniem bloku znajdującego się bezpośrednio pod podstawą fundamentu), geometria zniszczenia jest jednoznacznie wyznaczona przez  $n-1$  wartości kątów  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  oraz kąt  $\alpha$  odpowiedzialny za nachylenie pierwszej powierzchni stożkowej. Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym, wartość ostatniego kąta otrzymuje się poprzez odjęcie sumy kątów  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  od  $180^\circ$ . Aby zapewnić kinematyczną dopuszczalność, wektory nieciągłości prędkości są nachylone pod kątem równym kątowi tarcia wewnętrznego  $\varphi$ , w związku z czym wartości poszczególnych prędkości wyznacza się z hodografu prędkości identycznie jak dla mechanizmu dwuwymiarowego. Moc sił ciężkości dla danego bloku wyznacza się mnożąc masę bloku, przyspieszenie grawitacyjne oraz pionową składową wektora prędkości. Dla gruntu spoistego wyznacza się energię dyssypacji mnożąc odpowiednio: pole powierzchni, spójność i rzut wektora prędkości na tę powierzchnię (wartość prędkości pomnożoną przez cosinus kąta tarcia wewnętrznego). Kąt rozwarcia stożka równy  $2\varphi$  gwarantuje stałe nachylenie wektora prędkości w stosunku do powierzchni poślizgu. Postać wyrażenia na nośność podłoża w przypadku trójwymiarowym może być także przedstawiona w postaci sumy trzech składników, jak w równaniu (2.9).



Rysunek 3.15. Konwencja oznaczeń dla powierzchni poślizgu, przykład dla  $n = 5$ . Powierzchnia  $s_1$  oznacza  $A_2A_1O_1$ ;  $s_2, \dots, s_9$  są powierzchniami trójkątów bocznych;  $s_{10}, \dots, s_{12}$  są powierzchniami trapezu i fragmentu elipsy oraz  $s_{13}, \dots, s_{16}$  oznaczają powierzchnie stożkowe.



Rysunek 3.16. Siły grawitacyjne dla  $n = 5$ .



Rysunek 3.17. Obciążenie przekazywane ze stopy fundamentowej  $p$  oraz obciążenie obok fundamentu w poziomie jego posadowienia  $q$  (wynikające z zagłębienia fundamentu).

Opierając się na powyższych informacjach, nośność podłoża dla mechanizmu trójwymiarowego rozważanego w niniejszej rozprawie można wyznaczyć zgodnie z równaniem (3.13).

$$cN_c = 4c \left( \cos \varphi v_{12} s_1 + \cos \varphi \sum_{i=1}^{n-2} v_{(i+1)(i+2)} s_{2n-1+i} + \cos \varphi \sum_{i=1}^{n-1} v_{i+1} (s_{2i} + s_{2i+1} + s_{3n-3+i}) \right) \quad (3.13)$$

$$qN_q = 4q s_{4n-3} v_n$$

$$\frac{1}{2} \gamma b N_\gamma = g_1 v_{1|} + 4 \sum_{i=2}^n g_i v_{i|}$$

Aby otrzymać wartość nośności dla określonej liczby bloków, należy odpowiednią wartość  $n$  podstawić do powyższego równania. Poniżej, w równaniu (3.14), przedstawiono wyrażenie na nośność w przypadku  $n = 5$ ; postać równania (3.14) jest taka sama jak równania (2.9).

$$p_{n=5} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2} \gamma b N_\gamma = \quad (3.14)$$

$$= 4c \left( \cos \varphi v_{12} s_1 + \cos \varphi \sum_{i=1}^3 v_{(i+1)(i+2)} s_{9+i} + \cos \varphi \sum_{i=1}^4 v_{i+1} (s_{2i} + s_{2i+1} + s_{12+i}) \right) +$$

$$+ 4q s_{17} v_{5|} + g_1 v_{1|} + 4 \sum_{i=2}^5 g_i v_{i|}$$

Powyższe wyrażenia pozwalają otrzymać wartości nośności podłoża dla zadanej geometrii zniszczenia, jednakże w celu otrzymania optymalnej geometrii dla zadanych parametrów podłoża gruntowego należy zoptymalizować zadanie wyznaczając taką



geometrię, dla której nośność określona w równaniach (3.13) lub (3.14) osiągnie wartość minimalną. Procedura optymalizacyjna zaproponowana w niniejszej rozprawie jest przedstawiona w rozdziale 6.4.2.

### 3.4. Porównanie rezultatów dostępnych w literaturze

W tabeli 3.1 przedstawiono oszacowania wartości współczynnika nośności  $N_c$  przy założeniu gruntu idealnie spoistego, raportowane przez różnych badaczy. Na podstawie tabeli 3.1 widać, że uwzględnienie skończonych wymiarów fundamentu daje w rezultacie większe wartości współczynnika  $N_c$  w porównaniu do zagadnienia płaskiego, gdzie  $N_c \approx 5.14$ . Co więcej, wartości  $N_c$  otrzymane w przypadku podłoża idealnie spoistego są względnie bliskie w przypadku różnych mechanizmów zniszczenia.

Tabela 3.1. Przegląd wartości współczynnika  $N_c$  dla podłoża idealnie spoistego. Stosunek  $b/L$  wyraża proporcje rozmiarów fundamentu. Symbol (-) oznacza brak wartości w publikacji źródłowej.

$b/L$	Shield i Drucker (1953)	Izbicki i Mróz (1976)	Michałowski (2001)	Salgado i in. (2004)	Vincente da Silva i Antao (2008)	Yu i in. (2016) (M1)
1.00	5.71	6.9	6.561	6.221	6.051	6.678
0.50	5.475	6.9	6.060	6.022	5.821	6.504
0.33	5.3578	6.9	5.638	5.886	-	6.386
0.20	5.2600	6.9	5.489	5.776	-	6.281

W tabeli 3.2 zestawiono wartości współczynnika  $N_\gamma$  dla trójwymiarowego mechanizmu zaproponowanego przez Michałowskiego (2001) oraz wartości otrzymane przez Lyamina i in. (2007). Dla porównania przeliczono także wartości  $N_\gamma$  wynikające z rezultatów otrzymanych przez Meyerhofa. Tabela 3.2 wskazuje na relatywnie wysokie wartości współczynnika  $N_\gamma$  uzyskane dla mechanizmu zaproponowanego przez Michałowskiego. Przedstawione dane dotyczą wartości kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi = 25^\circ$ .

Tabela 3.2. Porównanie wartości współczynnika  $N_\gamma$  dla górnych oszacowań nośności podłoża niespoistego ( $\varphi = 25^\circ$ ) oraz przedstawionych w pracy Meyerhofa. Symbol (-) oznacza brak wartości w publikacji źródłowej.

L/b	Michałowski (2001)	Lyamin i in. (2007)	Meyerhof (1963) ( $N_\gamma$ dla płaskiego przypadku zgodnie z równaniem (2.18))
1.00	20.399	9.05	13.29
1.20	-	13.6	12.85
1.50	17.863	-	12.41
2.00	17.073	12.47	11.98
3.00	15.873	11.74	11.54
4.00	-	11.30	11.32
5.00	14.788	-	11.19
10.0	14.094	-	10.92

## 4. Opis probabilistyczny parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego

### 4.1. Wprowadzenie

Naturalne procesy kształtujące grunty skutkują znaczącymi wartościami współczynników zmienności parametrów wytrzymałościowych; obserwuje się to również w przypadku warstw gruntu, które uznawane są za jednorodne z punktu widzenia projektowania geotechnicznego. Zmienność przestrzenna parametrów gruntowych jest niezwykle istotnym aspektem, który ma zasadniczy wpływ na poziom bezpieczeństwa fundamentów bezpośrednich. Zastosowanie metod probabilistycznych wychodzi naprzeciw powyższym trudnościom, związanym z oceną bezpieczeństwa fundamentów bezpośrednich. Oczywiście jest, że zastosowanie metod probabilistycznych nie oznacza, że grunt zachowuje się w sposób losowy czy też zmienny; natomiast poprzez metody probabilistyczne opisuje się poziom niewiedzy o rzeczywistych parametrach podłoża. Brak pełnej informacji o podłożu wynika z technicznych możliwości wykonania badań geotechnicznych jedynie w punktowych obszarach. W związku z relatywnie skomplikowanymi zmianami przestrzennymi parametrów gruntu, opis matematyczny konieczny do ich uwzględnienia w sposób możliwie dokładny, także jest złożony. Jednym z najprostszych sposobów opisu parametrów podłoża jest przypisanie każdemu z nich pojedynczej zmiennej losowej; owa zmienna musi się charakteryzować

odpowiednim rozkładem gęstości prawdopodobieństwa. Podstawowa praca w tej tematyce została opublikowana przez Lumba (1965). Lumb zweryfikował hipotezami statystycznymi wiele rozkładów prawdopodobieństwa dla różnych parametrów gruntu. W kolejnych pracach Lumb i inni badacze badali rozkłady prawdopodobieństwa dla cech różnych gruntów, podając też oszacowania współczynników zmienności dla wybranych parametrów gruntów; do najważniejszych prac w tej dziedzinie zaliczają się: Lumb (1970), Schultze (1975), Corotis i in. (1975) czy Biernatowski (1982). Kulhawy i in. (1991) zaproponowali zróżnicowanie współczynników zmienności w zależności od wartości średniej. Szeroki przegląd charakterystyk probabilistycznych gruntów został podany w monografii Puły (2004). Badania terenowe wskazują, że lognormalne rozkłady prawdopodobieństwa w dobry sposób przybliżają rozkład wartości parametrów wytrzymałościowych, np.: Rackwitz (2000), Cherubini (2000), Ditlevsen i in. (2000). Parametry opisujące właściwości gruntu przyjmują dodatnie wartości; z tego względu zastosowanie rozkładów normalnych jest limitowane wyłącznie do przypadków z małymi wartościami wariancji. Używa się także rozkładów beta, ponieważ rozciągają się na ograniczonych odcinkach. Puła (1987) zasugerował wykorzystanie rozkładów wielokątnych, które są wygodne podczas symulowania metodami odwracania dystrybuanty.

Fundamenty bezpośrednio na ogół współpracują z relatywnie dużymi objętościami gruntu. Jest to istotne przy doborze odpowiedniego narzędzia do opisu parametrów geotechnicznych. W związku z dużą objętością gruntu biorącego udział w zniszczeniu, prowadzenie analiz dla współczynników zmienności wyznaczonych dla danych parametrów bezpośrednio z badań laboratoryjnych (małe próbki) lub polowych (np. sondowania CPT) i zastosowanie tych współczynników w probabilistycznej analizie nośności skutkuje bardzo konserwatywnym oszacowaniem prawdopodobieństw awarii. Jest to bezpośrednim rezultatem mobilizacji dużej objętości gruntu, w którym wartości parametrów „uśredniają się” i rozkład nośności podłoża jest wyraźnie węższy niż w poprzednim przypadku. Nośność jest wynikiem wartości średniej parametrów wytrzymałościowych w danym obszarze. Opis tego zjawiska przy pomocy pojedynczej zmiennej losowej jest oczywiście niemożliwy; potrzeba bardziej złożonego opisu, który pozwoli uśredniać wartości parametrów wytrzymałościowych podłoża w określonym obszarze. Obszar ten powinien odpowiadać objętości gruntu zaangażowanej w mechanizmie zniszczenia. Wydaje się naturalnym zastosować teorię pól losowych. Takie podejście jest znacznie lepsze, gdy mamy do czynienia z relatywnie dużymi obszarami

(w stosunku do charakteru zmian parametrów gruntu). Zalety wykorzystywania pól losowych do opisu parametrów wytrzymałościowych zostały wskazane przez wielu autorów, m.in.: Fenton i Griffiths (2008), Rackwitz (2000), Puła i Zaskórski (2015) oraz w normatywach, np. ISO 2394 (2015). Teoria pól losowych po raz pierwszy została użyta w szacowaniu ilości surowców; podstawowe prace w tej dziedzinie należą do Krigego (1951 i 1962), który zajmował się złożami złota w RPA. W Polsce pionierem tego podejścia w zastosowaniu do złóż cynku na Górnym Śląsku był Zubrzycki (1957). Na polu geotechniki pierwszy znaczący wkład w zastosowanie pól losowych wnieśli m.in.: Lumb (1974 i 1975), Alonso i Krizek (1975) oraz Alonso (1976). Niezwykle ważnym osiągnięciem z punktu widzenia geotechniki było zaproponowanie lokalnych uśrednień przez Vanmarcke'a (1977a, 1977b i 1983). Uśrednienia lokalne odzwierciedlają sytuację, kiedy awaria konstrukcji pojawia się w określonym regionie gruntu i jest wynikiem współpracy z większym obszarem gruntu, a nie punktowym. Szerokie zastosowanie w geotechnice znalazła metoda LAS (*local averaged subdivision*), dedykowana generowaniu pól losowych i zaproponowana przez Fentona (1990) oraz Fentona i Vanmarcke'a (1990). Znaczący wkład w rozwój zastosowań pól losowych w geotechnice został dokonany przez polskich badaczy, np.: Wilde (1977 i 1981), Brząkała (1981), Przewłócki (1998 i 2006).

## 4.2. Podstawy teorii pól losowych

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, F, P)$  (tzw. trójka probabilistyczna), gdzie  $\Omega$  jest zbiorem zdarzeń elementarnych,  $F$  ( $\sigma$ -ciało) jest zbiorem podzbiorów  $\Omega$  (tzw. przestrzeń zdarzeń losowych) oraz  $P$  będące miarą probabilistyczną, taką że  $P: F \rightarrow [0,1]$  (Krysicki i in., 1999). Miara probabilistyczna dla całej przestrzeni jest równa jedności:  $P(\Omega) = 1$ . Polem losowym nazwiemy zbiór zmiennych losowych  $\{X_t = X(t, \omega)\}$ , gdzie  $t \in T$ ,  $\omega \in \Omega$  oraz  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  jest  $n$ -wymiarową przestrzenią Euklidesową. Przy ustalonej wartości  $t$  otrzymuje się pojedynczą zmienną losową  $X_t$ . W zastosowaniach geotechnicznych stosuje się dwu- oraz trójwymiarowe pola losowe ( $n = 2$  lub  $n = 3$ , odpowiednio). W zastosowaniach innych dyscyplin (np. ekonomii) używa się pól jednowymiarowych, dla których  $t$  oznacza czas; takie pola nazywane są procesami stochastycznymi. Za pomocą pola losowego można opisać parametr gruntu  $X$  stosując równanie (4.1).

$$X(t) = E\{X(t)\} + \sigma_X(t)U(t) \quad (4.1)$$

Gdzie  $t = (x, y)$  lub  $t = (x, y, z)$  dla odpowiednio pól dwuwymiarowych i trójwymiarowych.  $E\{\}$  jest wartością oczekiwaną,  $\sigma_X$  jest odchyleniem standardowym oraz  $U$  jest polem losowym o zerowej wartości średniej oraz jednostkowej wariancji. Pole normalne lub lognormalne  $U$  można jednoznacznie zdefiniować poprzez funkcję kowariancji (4.2).

$$R(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = E\{U(x_1, y_1, z_1)U(x_2, y_2, z_2)\} \quad (4.2)$$

W geotechnice bardzo często korzysta się z pól stacjonarnych. Pole uważamy za stacjonarne w szerszym sensie, jeżeli jego wartość oczekiwana jest stała (nie zależy od położenia punktu), zaś funkcja kowariancji jest translacyjnie niezmiennicza. Oznacza to, że postać funkcji kowariancji zależy jedynie od różnic we współrzędnych punktów, a nie od wartości tychże współrzędnych. Dla przypadku trójwymiarowego powyższą własność zapisuje się jak w równaniu (4.3).

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= R(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \\ &= R\{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\} = R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

W ten sposób funkcja kowariancji  $R$  pola stacjonarnego w szerszym sensie zależy jedynie od trzech zmiennych (a nie od sześciu współrzędnych, jak w ogólnym przypadku). Specjalną klasą pól losowych stacjonarnych są pola izotropowe, dla których funkcja kowariancji zależy wyłącznie od jednej wartości, tj. odległości pomiędzy dwoma punktami. Postać funkcji kowariancji dla pól izotropowych przedstawia równanie (4.4).

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = R(\|\Delta x, \Delta y, \Delta z\|) = R(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}) \quad (4.4)$$

Wówczas funkcja kowariancji zależy jedynie od jednej zmiennej (od normy wektora położenia). Na podstawie twierdzenia Bochnera (Bochner, 1959), funkcja może być funkcją kowariancji stacjonarnego pola losowego, jeśli jest funkcją dodatnio określoną. Tematyka funkcji kowariancji jest szeroko dyskutowana w pracy Rackwitz (2000). Równania (4.5) oraz (4.6) są przykładami często stosowanych funkcji kowariancji (zapisane w przypadku dwuwymiarowym).

$$R(\Delta x, \Delta y) = \sigma^2 \exp(-(a_1 |\Delta x| + a_2 |\Delta y|)) \quad (4.5)$$

$$R(\Delta x, \Delta y) = \sigma^2 \exp\left\{-\left[\left(\frac{\Delta x}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\omega_2}\right)^2\right]\right\} \quad (4.6)$$

Szybkość zmienności pola losowego zadana jest przez promień korelacji lub skalę fluktuacji (Vanmarcke, 1977a). Skala fluktuacji opisuje, jak szybkie są zmiany przestrzenne wartości pola losowego. Dla dużych wartości skali fluktuacji, wartości pola losowego są dobrze skorelowane; dla małych - słabo. Z tego powodu skala fluktuacji jest interpretowana jako długość, dla której wartości pola losowego są dobrze skorelowane. Matematyczna definicja powyższego, podana przez Vanmarcke'a, przedstawiona jest w równaniu (4.7).

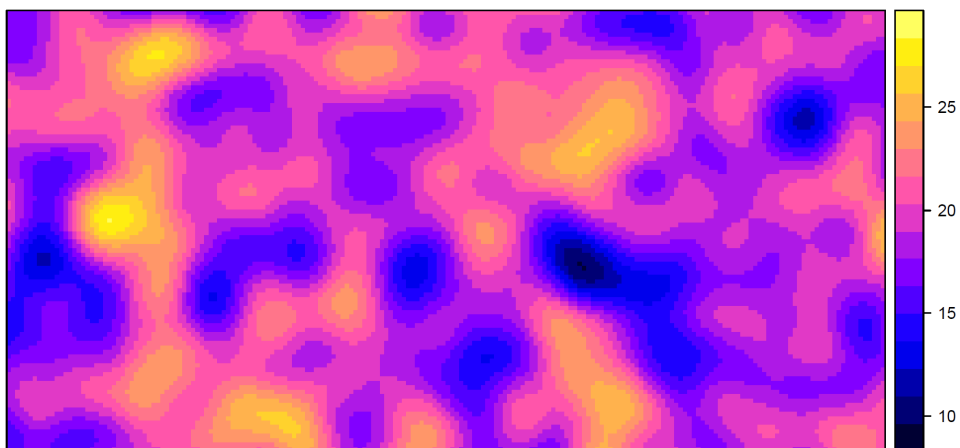
$$\theta = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} R(\Delta x) d\Delta x = 2 \int_0^{\infty} \rho(\Delta x) d\Delta x \quad (4.7)$$

Gdzie  $\rho(\Delta x)$  jest funkcją korelacji wyrażoną równaniem (4.8)

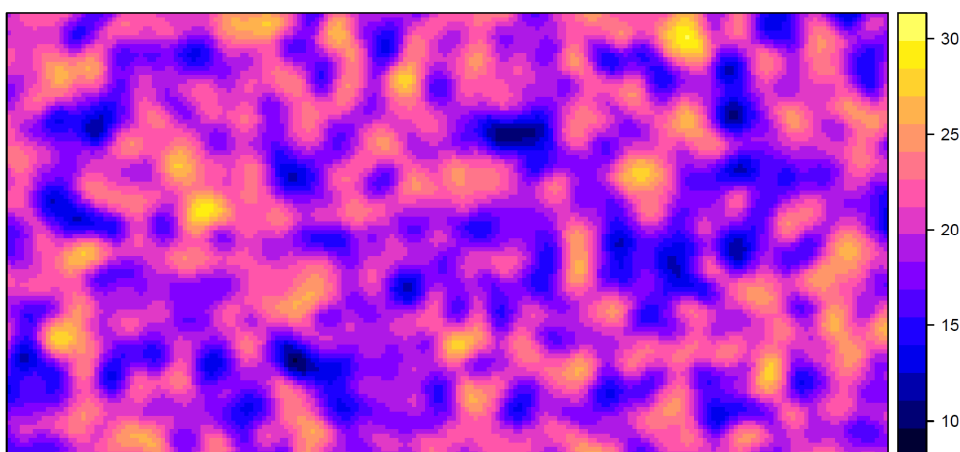
$$\rho(\Delta x) = \frac{R(\Delta x)}{\sigma^2} \quad (4.8)$$

Można wykazać (np. Puła, 2004), że w przypadku funkcji kowariancji wyrażonej równaniem (4.6) skala fluktuacji na kierunku współrzędnej  $x$  wyraża się następująco:  $\theta_x = \omega_1 \sqrt{\pi}$ .

Aby zilustrować powyższe zależności, w oparciu o pakiet *Random Fields* w środowisku programowania R (Gelfang i in., 2010; Stein, 1999), wygenerowano trzy przykładowe realizacje pól losowych. Na rysunku 4.1 przedstawiono realizację pola izotropowego z gaussowską funkcją kowariancji (patrz równanie (4.6)). Dla celów porównawczych przyjęto, że pole z rysunku 4.1 ma w dwóch kierunkach jednostkowe skale fluktuacji  $\theta_x = \theta_y = 1$ , gdzie  $\theta_x$  jest poziomą skalą fluktuacji, a  $\theta_y$  pionową skalą fluktuacji. Następnie, poprzez zmniejszenie wartości skal fluktuacji, wygenerowano pole ponownie dla  $\theta_x = \theta_y = 0.5$ ; rezultat przedstawiono na rysunku 4.2.



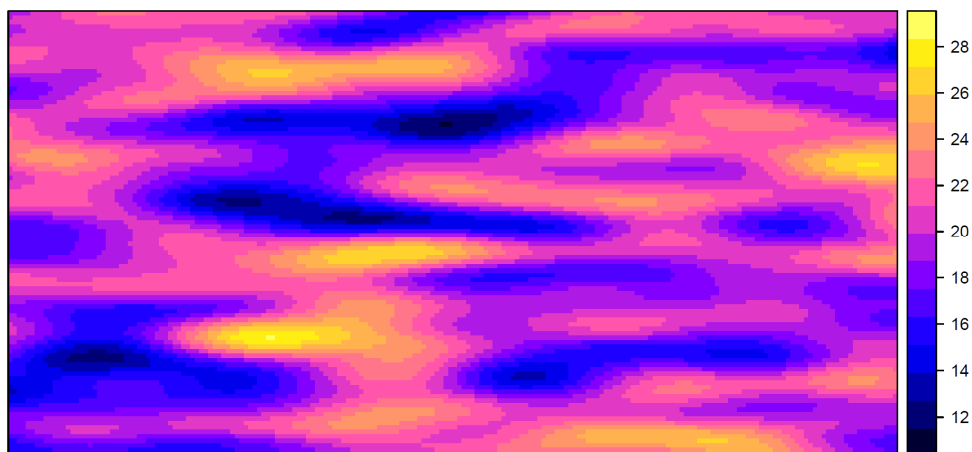
Rysunek 4.1. Przykład realizacji izotropowego pola losowego dla gaussowskiej funkcji kowariancji.



Rysunek 4.2. Przykład realizacji izotropowego pola losowego dla gaussowskiej funkcji kowariancji.  
Skale fluktuacji są dwukrotnie mniejsze niż dla pola z rysunku 4.1.

Na rysunkach 4.1 oraz 4.2 przedstawiono realizacje pól izotropowych (skale poziome równe skalom pionowym). Generalnie, rzeczywiste grunty wykazują większe wartości skal poziomych (większa korelacja w kierunku poziomym). Wynika to z procesu formowania się gruntu. Z tego względu na rysunku 4.3 pokazano realizację dla przypadku, gdy skala pozioma została zwiększona pięciokrotnie, tj.  $\theta_x = 0.5, \theta_y = 2.5$ .





Rysunek 4.3. Przykład realizacji anizotropowego pola losowego dla gaussowskiej funkcji kowariancji. Pozioma skala fluktuacji jest pięciokrotnie większa niż ta z rysunku 4.2.

W niniejszej rozprawie autor, w oparciu o podejście zaproponowane przez Vanmarcke'a, stosuje procedurę lokalnych uśrednień. W przyjętym podejściu nie ma potrzeby bezpośredniego generowania pola losowego; w rezultacie dyskretyzacji (poprzez całkowanie po liniach lub powierzchniach poślizgu) otrzymuje się pojedyncze zmienne losowe. Uśrednienia lokalne zaproponowane przez Vanmarcke'a (1977a) wprowadzają tzw. pole o ruchomej średniej (Box i Jenkins, 1983), zdefiniowane w następujący sposób:

(4.9)

$$X_V = \frac{1}{|V|} \iiint_V X(x, y, z) dx dy dz$$

Gdzie  $X$  oznacza rozważany parametr (w dalszej części rozprawy będzie to kąt tarcia wewnętrznego  $\varphi$  lub spójność  $c$ ),  $V$  jest obszarem uśrednienia, natomiast  $|V|$  oznacza jego miarę. Obszar  $V$  może być w zależności od charakteru rozpatrywanego mechanizmu zniszczenia: odcinkiem, krzywą na płaszczyźnie, powierzchnią lub objętością. Zakładając stacjonarność pola  $X$ , nowe pole  $X_V$  zachowuje tę samą wartość średnią. Jednakże, jego wariancja podlega zmianom w zależności od wyboru obszaru  $V$ . Wariancja nowego pola  $X_V$  jest dana następującym wyrażeniem (Griffiths, 2008):

(4.10)

$$\text{Var}(X_V) = \sigma_V^2 = \gamma(V) \sigma_X^2$$

Gdzie  $\gamma(V)$  jest tzw. funkcją wariancji lub funkcją redukcji wariancji, z uwagi na fakt, że  $\gamma(V)$  przyjmuje wartości mniejsze od jedności. Funkcja wariancji określa zmianę

wariancji punktowej  $\sigma_X^2$  po zastosowaniu procedury uśrednienia przestrzennego. Po zastosowaniu równania (4.9) do określonego obszaru otrzymuje się pojedynczą zmienną losową. Kowariancja pomiędzy dwiema zmiennymi losowymi otrzymanymi w taki sposób może być wyznaczona zgodnie z następującym równaniem (Wentzel, 1980; Puła, 2004; Puła, 2007):

$$\text{Cov}(X_{V_1}, X_{V_2}) = \frac{1}{|V_1||V_2|} \int_{V_1} \int_{V_2} R(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) dV_1(x_1, y_1, z_1) dV_2(x_2, y_2, z_2) \quad (4.11)$$

W szczególnym przypadku gdy  $V_1 = V_2$ , równanie (4.11) staje się wyrażeniem na wariancję  $\text{Var}(X_V)$ . Powyższe równanie jest punktem początkowym dla wyprowadzeń wyrażień na wariancje i kowariancje przeprowadzonych w niniejszej rozprawie. Szczegółowy opis tej procedury przedstawiony jest w kolejnych rozdziałach, gdzie zaprezentowaną wyżej teorię stosuje się do rozważanych mechanizmów zniszczenia podłoża gruntowego.

## 5. Metodyka wyznaczania nośności podłoża o cechach przestrzennie zmiennych

Aby realizacja celów postawionych na początku niniejszej rozprawy była możliwa, niezbędne jest zaproponowanie metodyki, która umożliwi połączenie mechanizmów zniszczenia podłoża z procedurą optymalizacyjną oraz elementami teorii pól losowych. Opracowana metodyka poprzez użycie kinematycznych mechanizmów zniszczenia prowadzi do oceny górnej nośności podłoża. Uwzględnia się opis parametrów wytrzymałościowych gruntu za pomocą pól losowych. Poprzez aplikację teorii uśrednień lokalnych Vanmarcke'a, dyskretyzuje się wartości pola losowego do zmiennych losowych odpowiadających poszczególnym liniom lub powierzchniom poślizgu, które wynikają z mechanizmu zniszczenia. Proponowana metodyka ma charakter uniwersalny i może być zastosowana do szerszej klasy problemów geotechnicznych, a w szczególności tam, gdzie korzysta się z mechanizmów zniszczenia (zgodnie z twierdzeniem o ocenie górnej obciążenia granicznego), a więc np. do zagadnień stateczności skarp. Jednakże, aplikacja metodyki do określonego zagadnienia nie odbywa się wprost i wymaga wcześniejszych prac teoretycznych (np. wyprowadzenia wyrażeń całkowitych określających wartości współczynników macierzy kowariancji). W pierwszej kolejności dla zdefiniowanego zagadnienia należy wybrać mechanizm zniszczenia. W niniejszej rozprawie w przypadku ławy fundamentowej (płaski stan odkształcenia) rozważono mechanizm Prandtla, mechanizm wieloblokowy symetryczny i mechanizm wieloblokowy niesymetryczny oraz w przypadku stopy fundamentowej - mechanizm trójwymiarowy. Wyżej wspomniane mechanizmy przed zastosowaniem muszą zostać zmodyfikowane tak, aby umożliwić wyznaczenie nośności podłoża dla różnych wartości parametrów wytrzymałościowych na poszczególnych liniach lub

powierzchniach poślizgu (pierwotnie mechanizmy te były stosowane wyłącznie w analizach deterministycznych). Modyfikacje, które przeprowadzono na potrzeby rozprawy, są nieodzownym elementem pozwalającym na zastosowanie opracowanej metodyki. Przedstawiono je w rozdziale 6. W przypadku mechanizmu Prandtla geometria zniszczenia zdeterminowana jest wyłącznie przez wartość kąta tarcia wewnętrznego. Z tego powodu dla mechanizmu Prandtla założono, że geometria zniszczenia zależy od pojedynczej wartości kąta tarcia wewnętrznego (szczegóły w rozdziale 6.1). Inna sytuacja ma miejsce dla mechanizmu wieloblokowego, gdzie poprzez modyfikację kątów i długości linii poślizgu można zoptymalizować geometrię zniszczenia przy założeniu różnych wartości parametrów wytrzymałościowych na poszczególnych liniach poślizgu (po uwzględnieniu ciężaru objętościowego na kształt geometrii ma wpływ nie tylko wartość kąta tarcia wewnętrznego). Adaptację mechanizmu wieloblokowego przedstawiono w rozdziale 6.2. W przypadku mechanizmu trójwymiarowego geometria jest optymalizowana podobnie jak dla mechanizmu wieloblokowego dwuwymiarowego, z tą różnicą, że geometria trójwymiarowa wskutek ograniczeń związanych z kinematyczną dopuszczalnością ma mniej stopni swobody, tj. parametrów, względem których wartości można modyfikować. Opis adaptacji mechanizmu trójwymiarowego do potrzeb rozprawy przedstawiono w rozdziale 6.3. Zgodnie z powyższymi informacjami, mechanizm dwuwymiarowy wieloblokowy oraz mechanizm trójwymiarowy wymagają zastosowania procedury optymalizacyjnej; taka procedura została zaproponowana przez autora i omówiona w rozdziale 6. Metodyka opiera się m.in. na teorii lokalnych uśrednień Vanmarcke'a. Naturalnym wyborem obszarów, względem których dokonuje się uśrednień parametrów wytrzymałościowych podłoża, jak zasygnalizowano wcześniej, są linie lub powierzchnie poślizgu w danym mechanizmie zniszczenia. Takie podejście po raz pierwszy zostało wykorzystane przez Pułę (2004, 2007) dla mechanizmu Prandtla. Wyprowadzenie wzorów na współczynniki macierzy kowariancji (dla zmiennych losowych otrzymanych w drodze uśredniania) jest stosunkowo proste dla mechanizmu dwuwymiarowego i skomplikowane w przypadku trójwymiarowym. Na podstawie macierzy kowariancji na każdej linii poślizgu wyznacza się nowe wartości parametrów wytrzymałościowych (po uśrednieniu); w tym celu do każdego zagadnienia dostosowuje się algorytm zaproponowany w pracy Puły i Chwały (2015). Dla nowo otrzymanych wartości parametrów, poprzez procedurę optymalizacyjną, wyznacza się optymalną geometrię i odpowiadającą jej nośność podłoża. Jako podsumowanie, poniżej przedstawiono pięć głównych kroków proponowanej metodyki oceny nośności podłoża.

**Krok 1.** Wygenerowanie niezależnych wartości parametrów wytrzymałościowych gruntu dla każdej z linii/powierzchni poślizgu w mechanizmie zniszczenia (na podstawie wstępnych charakterystyk probabilistycznych).

**Krok 2.** Optymalizacja mechanizmu zniszczenia dla parametrów wytrzymałościowych z Kroku 1.

**Krok 3.** Wyznaczenie macierzy kowariancji dla geometrii zniszczenia z Kroku 2 i obliczenie nowych (uśrednionych) wartości parametrów wytrzymałościowych na podstawie parametrów z Kroku 1 oraz macierzy kowariancji.

**Krok 4.** Optymalizacja mechanizmu zniszczenia dla parametrów wytrzymałościowych z Kroku 3. Wyznaczenie nośności podłoża.

**Krok 5.** Powtórzenie Kroków 1, 2, 3 i 4  $N$  razy.  $N$  jest liczbą symulacji Monte Carlo dla danego zagadnienia.

Wstępne charakterystyki probabilistyczne (Krok 1) otrzymuje się bezpośrednio na podstawie badań laboratoryjnych lub polowych i dotyczą one „punktowego” zachowania się danego parametru podłoża. W rozprawie za pomocą pól losowych opisuje się wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności; są to parametry mające największy wpływ na nośność podłoża. Wartości wygenerowane w Kroku 1 są względem siebie niezależne, a ich liczba jest równa liczbie linii poślizgu  $m$  w rozważanym mechanizmie; oznaczmy je następująco:  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  oraz  $c_1, \dots, c_m$ ,  $m$  zależy od liczby bloków.

Dwuwymiarowy wieloblokowy mechanizm zniszczenia oraz mechanizm trójwymiarowy wymagają efektywnej procedury optymalizacyjnej w celu znajdowania optymalnych geometrii zniszczenia. W związku z relatywnie dużą liczbą parametrów, względem których będzie przebiegać optymalizacja, powyższe zagadnienia należy zaliczyć do grupy zagadnień wieloparametrowych. Rozmiar zadania zależy od liczby bloków i zwiększa się wraz z jej wzrostem (analogiczna zależność zachodzi w przypadku linii lub powierzchni poślizgu). W związku z powyższym, niezbędna jest efektywna

metoda optymalizacyjna pozwalająca możliwie dokładnie znajdować kształt geometrii, dla której otrzymuje się najniższe oszacowanie nośności. W rozprawie autor zdecydował zastosować metodę wyżarzania (*simulated annealing*) (Kirkpatrick i in., 1983; Kirkpatrick, 1984). Metoda wyżarzania jest metodą stochastycznej optymalizacji i jest dedykowana znajdowaniu przybliżonej wartości globalnego ekstremum danej funkcji. W ramach metody wyżarzania proces symulacyjny jest kontrolowany przez tzw. prawdopodobieństwo akceptacji gorszej wartości, które w ogólności spada w trakcie procesu symulacyjnego. Dopuszczenie tymczasowego przyjęcia gorszego rozwiązania pozwala ominąć lokalne ekstrema. W niniejszej rozprawie wykorzystano prawdopodobieństwo akceptacji gorszego rozwiązania dane równaniem (5.1).

$$P_a = \exp\left(\frac{p_c - p_{j+1}}{T_{cur}}\right) \quad (5.1)$$

Gdzie  $p_c$  jest aktualną wartością funkcji celu,  $p_{j+1}$  jest wartością funkcji celu w ostatniej symulacji. Parametr  $T_{cur}$  jest tzw. aktualną „temperaturą” i wpływa on na zmniejszanie prawdopodobieństwa  $P_a$  wraz z kolejnymi krokami procesu symulacyjnego. Podczas procesu symulacyjnego wartość  $T_{cur}$  jest redukowana przez parameter  $\alpha$ . Proces ten, z uwagi na historyczne konotacje, nazywa się procesem schładzania. Pod koniec procesu symulacyjnego wartości  $P_a$  są praktycznie równe zero, w związku z czym metoda sprowadza się do prostej metody gradientowej (wyłącznie lepsze rozwiązanie jest akceptowane). Niestety metody wyżarzania nie można zastosować wprost do danego zagadnienia, lecz należy ją wcześniej dostosować i wytestować. W związku z tym jej aplikacja wymaga opracowania unikalnej procedury. Taka procedura została zaproponowana przez autora niezależnie w przypadku dwuwymiarowego wieloblokowego mechanizmu zniszczenia oraz w przypadku mechanizmu trójwymiarowego rozważanego w niniejszej rozprawie. Zastosowanie metody wyżarzania wymaga także wcześniejszego ustalenia wartości parametrów kontrolujących proces symulacyjny (ich wartości powinny być dobrane indywidualnie do danego zagadnienia, jednak w literaturze można znaleźć pewne ogólne wytyczne pozwalające na wyznaczenie tych wartości, np. Cohn i Fielding (1999) lub Ben-Ameur (2004)). Ustalenie parametrów kontrolujących proces symulacyjny podano w rozdziałach 6.2 oraz 6.3.

W Kroku 3 w oparciu o wyprowadzone wyrażenia całkowe wyznacza się postać macierzy kowariancji. Nowe parametry gruntu (po uśrednieniu) wyznacza się poprzez dostosowany algorytm zaproponowany w pracy Puły i Chwały (2015). Postacie

algorytmu dostosowane do rozpatrywanych zagadnień przedstawiono w dalszych częściach rozprawy. Jako rezultat uśredniania otrzymuje się nowe wartości parametrów wytrzymałościowych  $(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_m)$  oraz  $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m)$ , gdzie  $m$  oznacza liczbę linii poślizgu dla określonego mechanizmu zniszczenia. Nowe parametry charakteryzują się zredukowanymi wartościami wariancji oraz są wzajemnie skorelowane, zgodnie z macierzą kowariancji.

Cztery pierwsze kroki są powtarzane  $N$  razy. Liczba powtórzeń całej procedury powinna zapewnić zakładaną dokładność (np. w oszacowaniu wartości średniej nośności podłoża). W ogólności, liczba  $N$  zależy od charakteru danego zagadnienia; dla różnych współczynników zmienności - aby zapewnić podobny poziom dokładności - należy przeprowadzić odpowiednią liczbę symulacji (liczba ta jest większa w przypadku większych współczynników zmienności). W związku z różnymi czasami obliczeń dla pojedynczych symulacji, liczba  $N$  musi być ustalona jako kompromis pomiędzy oczekiwaną dokładnością a czasem obliczeń. Zagadnienia teoretyczne związane z ustaleniem liczby  $N$  przedstawiono w rozdziale 7.

Podejście przedstawione w niniejszym rozdziale wymaga wyznaczenia postaci macierzy kowariancji indywidualnie dla każdej symulacji (macierz ta w dalszych częściach rozprawy zwana jest także indywidualną macierzą kowariancji). Jednakże efektywność zaproponowanej metodyki można znacznie zwiększyć poprzez jednorazowe wyznaczenie macierzy kowariancji dla danego zagadnienia (tzw. stała macierz kowariancji). Stałą macierz kowariancji wyznacza się na podstawie oczekiwanych wartości parametrów wytrzymałościowych podłoża i zadanych wartości skal fluktuacji – macierz jest wyznaczona jeden raz i nie zmienia się w trakcie symulacji. W rozdziałach 8, 9 i 10 przedstawiono wyniki analiz przeprowadzonych przy założeniu stałej macierzy kowariancji, przedstawiono tam też więcej szczegółów.

## 6. Adaptacja mechanizmów zniszczenia do oceny losowej nośności podłoża

### 6.1. Założenia wstępne

Geometria zniszczenia dla mechanizmu Prandtla wynika jednoznacznie z wartości kąta tarcia wewnętrznego (patrz rozdział 2.2). W związku z powyższym, zastosowanie metodyki zaproponowanej w rozdziale 5 jest znacznie uproszczone w przypadku mechanizmu Prandtla (Krok 2 i Krok 4 mogą być pominięte w związku z brakiem konieczności poszukiwania optymalnej geometrii). Parametry wytrzymałościowe, takie jak kąt tarcia wewnętrznego i spójność, zostały opisane za pomocą niezależnych pól losowych. Dla obu pól (tj. pola kąta tarcia wewnętrznego i pola spójności) założono lognormalne rozkłady prawdopodobieństwa (Fenton i Griffiths, 2008). Jako funkcję kowariancji przyjęto funkcję gaussowską (patrz równanie (4.6)). Poniżej raz jeszcze przytacza się jej postać:

$$R(\Delta x, \Delta z) = \sigma_x^2 \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\Delta x}{\omega_2} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z}{\omega_1} \right)^2 \right] \right\} \quad (6.1)$$

Gdzie  $\Delta x$  oraz  $\Delta z$  są różnicami w odległościach (odpowiednio wzdłuż osi  $x$  i  $z$ ). Dla przypadku izotropowego wartości parametrów  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są sobie równe, natomiast w celu rozważenia anizotropii należy zróżnicować ich wartości. Parametry  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są związane ze skalą fluktuacji w następujący sposób (np. Puła, 2004):



(6.2)

$$\omega_1 = \frac{\theta_v}{\sqrt{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{\theta_h}{\sqrt{\pi}}$$

Gdzie  $\theta_v$  oraz  $\theta_h$  oznaczają odpowiednio pionową i poziomą skalę fluktuacji. Procedura uśredniania wzdłuż linii poślizgu lub po powierzchniach poślizgu prowadzi do dyskretyzacji wartości pola losowego; oznaczając linię poślizgu przez  $l_i$ , po uśrednieniu otrzymuje się zmienną losową  $X_{l_i}$  odpowiadającą linii poślizgu  $l_i$ . Na podstawie równania (4.11) można wyznaczyć kowariancję pomiędzy dwiema zmiennymi losowymi  $X_{l_i}$  oraz  $X_{l_j}$  otrzymanymi dla różnych linii poślizgu  $l_i$  oraz  $l_j$ . Wyrażenia na wszystkie współczynniki macierzy kowariancji uzyskuje się poprzez zastosowanie wzoru (4.11). Po adaptacji do mechanizmu wieloblokowego otrzymuje się:

(6.3)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{l_i}, X_{l_j}) &= \frac{1}{|l_i||l_j|} \int_{l_i} \int_{l_j} R(x_1, z_1, x_2, z_2) dl_i dl_j = \\ &= \frac{1}{|l_i||l_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} R(x(t_i), z(t_i), x(t_j), z(t_j)) \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_i}\right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_j}\right]^2} dt_i dt_j \end{aligned}$$

W górnej części wyrażenia (6.3) całkowanie odbywa się po liniach poślizgu  $l_i$  oraz  $l_j$ . W przypadku wieloblokowego mechanizmu symetrycznego liczba linii poślizgu wynosi  $2n-2$ , natomiast w przypadku mechanizmu niesymetrycznego jest dwa razy większa, tj.  $2(2n-2)$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę bloków (zgodnie z wcześniej przyjętą konwencją). Każdą z linii poślizgu można sparametryzować zgodnie z równaniem (6.4). Po parametryzacji całkowanie po liniach poślizgu może być zastąpione całkami oznaczonymi (dolna część równania (6.3)).

(6.4)

$$l_i: \quad \begin{aligned} x &= x(t_i), & z &= z(t_i) \\ & \text{dla } t_i \in [a_i, b_i] \end{aligned}$$

Wybierając  $i = j$  w równaniu (6.3) otrzymuje się wyrażenie na wariancję.

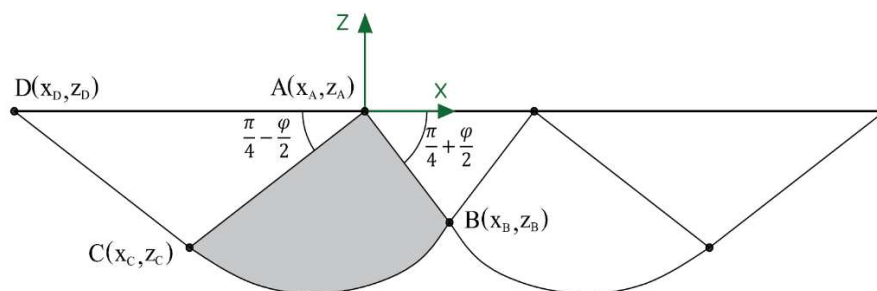
W kolejnych rozdziałach przedstawiono wyrażenia na nośność podłoża przy zróżnicowaniu wartości parametrów wytrzymałościowych dla mechanizmu Prandtla, dwuwymiarowego mechanizmu wieloblokowego oraz mechanizmu trójwymiarowego. Dodatkowo w przypadku dwuwymiarowego mechanizmu wieloblokowego oraz

mechanizmu trójwymiarowego przedstawiono procedurę optymalizacyjną opartą o metodę wyzarzania.

## 6.2. Ocena losowej nośności podłoża na podstawie mechanizmu Prandtla

### 6.2.1. Wprowadzenie

Mechanizm Prandtla w związku z jednoznacznie zdefiniowaną geometrią zniszczenia, zależną wyłącznie od wartości kąta tarcia wewnętrznego (geometria otrzymana przy założeniu nieważkiego gruntu), nie wymaga stosowania procedury optymalizacyjnej. Pierwsze podejście, w którym zastosowano uśrednienia lokalne dla mechanizmu Prandtla, zostało zaproponowane przez Pułę (2004 i 2007). Podejście to opierało się na uśrednieniach dokonywanych dla linii poślizgu AB, BC oraz CD (patrz rysunek 6.1). Puła w swoich pracach założył stałą wartość macierzy kowariancji, tzn. macierz kowariancji wyznaczono jeden raz dla wartości oczekiwanej kąta tarcia wewnętrznego i pozostawała stała dla wszystkich symulacji. Aby otrzymać wartość współczynnika  $N_\gamma$  zbliżoną do rozwiązania zaproponowanego przez Sokołowskiego (1958), Puła używał arbitralnie współczynnika redukującego otrzymywane wartości  $N_\gamma$ , który wynosił 0.5. W pracy Puły i Chwały (2015) powyższe założenie o stałości macierzy kowariancji zostało zastąpione wyznaczaniem aktualnej postaci macierzy kowariancji indywidualnej dla każdej symulacji. Co więcej, w pracy Puły i Chwały zbadano wpływ wzajemnej korelacji pomiędzy polami losowymi kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności. Pokazano, że w przypadku braku korelacji między  $\varphi$  i  $c$  otrzymuje się bardziej konserwatywne oszacowania współczynników niezawodności. Pomimo arbitralnie przyjętej wartości, o którą zredukowano wartość współczynnika  $N_\gamma$ , podejście zastosowane w pracach: Puła (2004), (2007), Puła i Chwała (2015) nie uwzględnia wpływu ciężaru własnego podłoża gruntowego na kształt geometrii zniszczenia. Z punktu widzenia lokalnych uśrednień wpływ ten powinien być uwzględniony. Poprzez zastosowanie zaproponowanej metodyki, autor przeprowadził nowe analizy przy niezmodyfikowanych wartościach  $N_\gamma$ , tak aby móc je porównać z pozostałymi rezultatami otrzymanymi w rozprawie.



Rysunek 6.1. Geometria mechanizmu Prandtla. Uśrednień dokonuje się wzdłuż linii poślizgu AB, BC oraz CD lub wzdłuż linii AB, CD oraz po obszarze ciągłej deformacji ABC.

Co więcej, w niniejszym rozdziale przedstawiono także sposób uśredniania parametrów podłoża po obszarze ABC. Obszar ABC jest obszarem ciągłej deformacji (deformacja objętościowa), co znaczy, że w mechanizmie zniszczenia bierze udział cały grunt znajdujący się w tym obszarze. Jest to silny argument za tym, aby zmodyfikować założenie przyjęte w pracy Puły i Chwały (2015) i rozszerzyć analizy o możliwość dokonywania uśrednień w obszarze ABC, a nie wyłącznie wzdłuż linii poślizgu BC. Autor rozprawy zaproponował adaptację procedury do uśrednień po obszarze ABC i przedstawił rezultaty w rozdziale 9 i 10.

### 6.2.2. Dostosowanie deterministycznego mechanizmu Prandtla na potrzeby oceny losowej nośności podłoża

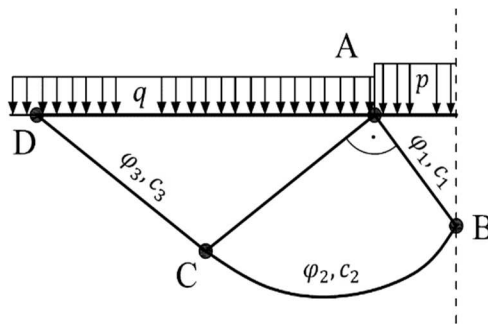
Wyrażenie na nośność podłoża w przypadku różnych wartości parametrów wytrzymałościowych na poszczególnych liniach poślizgu zostało zaproponowane przez Pułę (2004, 2007), a później zastosowane w pracy Puły i Chwały (2015). Równania (6.5) oraz (6.6) są pozbawione współczynnika redukującego wartość  $N_\gamma$  (patrz rozdział 6.2.1). Równania (6.5) oraz (6.6) wyprowadza się z równań (2.9) – (2.12) poprzez podstawienie różnych wartości spójności i kąta tarcia wewnętrznego odpowiadających poszczególnym liniom poślizgu.

$$p = \frac{bp'}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)} \quad (6.5)$$

Gdzie  $p'$  wyraża równanie (6.6).

$$\begin{aligned}
 p' = & c_1 \frac{\cos \varphi_1}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right)} + c_3 (\exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) - 1) \frac{1}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi_2} \\
 & + c_3 \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{\cos \varphi_3}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right)} + q \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3 \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right)} \\
 & + b \left( -\frac{1}{4} \gamma \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \right) + \frac{b \gamma}{2(1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi_2) 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right)} \times \\
 & \times \left( \left( 3 \tan \varphi_2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( 3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \right) \right) \\
 & + b \frac{\gamma \cos \varphi_3 \exp \left( \frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2 \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3 \right)}{8 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right)}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Pierwsze trzy składniki znajdujące się po prawej równania (6.6) związane są ze spójnością gruntu, czwarty składnik określa wpływ obciążenia obok fundamentu, natomiast pozostałe dotyczą ciężaru objętościowego podłoża. Parametry wytrzymałościowe gruntu  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  oraz  $c_3$  są przypisane poszczególnym liniom poślizgu zgodnie z rysunkiem 6.2.



Rysunek 6.2. Przypisanie parametrów wytrzymałościowych poszczególnym liniom poślizgu. W związku z symetrią przedstawiono wyłącznie lewą stronę mechanizmu.

Słabością zaproponowanego podejścia jest fakt, że mechanizm Prandtla powstały po aplikacji różnych wartości parametrów wytrzymałościowych do linii poślizgu nie spełnia warunków kinematycznej dopuszczalności. Jest on jednak traktowany jako przybliżenie i we wcześniejszych pracach wykazano możliwość jego zastosowania do analiz

niezawodnościowych. Powyższe jest kolejnym argumentem, który skłonił autora do poszukiwania mechanizmów, które po aplikacji różnych wartości parametrów wytrzymałościowych zachowają kinematyczną dopuszczalność, a tym samym będą zgodne z górnym oszacowaniem nośności podłoża (patrz rozdział 6.3).

### 6.2.3. Uśrednienia lokalne dla mechanizmu Prandtla

Wzory wyrażające wariancje i kowariancje otrzymane w wyniku zastosowania procedury uśrednień Vanmarcke'a (w przypadku mechanizmu Prandtla) wyprowadzono w pracach Puły (2004 i 2007). Puła udowodnił, że niektóre z nich mogą być wyrażone w prawie zamkniętej formie. Na potrzeby niniejszej rozprawy autor wyprowadził powyższe wyrażenia w taki sposób, aby ułatwić ich późniejszą implementację w algorytmie numerycznym (w postaci całkowitej reprezentacji). Dodatkowo, wyprowadzone zostały wyrażenia w przypadku uśrednień dokonywanych po obszarze ciągłej deformacji ABC. W pierwszej kolejności podano wzory na wariancje i kowariancje wzdłuż linii AB, BC oraz CD, a następnie wzdłuż linii AB, CD i obszaru ABC.

Korzystając z układu współrzędnych z rysunku 6.1, linia poślizgu AB może zostać sparametryzowana w następujący sposób (analogicznie jak dla mechanizmu wieloblokowego, patrz rozdział 6):

$$x(t) = (x_B - x_A)t \quad (6.7)$$

$$z(t) = (z_B - z_A)t$$

Gdzie  $t \in (0,1)$ . Dla powyższej parametryzacji, przy założeniu gaussowskiej funkcji kowariancji pola, wyrażenie na nową wariancję parametru  $X$  na linii AB (po uśrednieniu) przyjmuje postać jak w równaniu (6.8).

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{AB}) = \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp \left[ - \left( \frac{(x_B - x_A)(t_1 - t_2)}{\omega_2} \right)^2 \right] \\ \times \exp \left[ - \left( \frac{(z_B - z_A)(t_1 - t_2)}{\omega_1} \right)^2 \right] dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Gdzie  $\sigma_X^2$  jest wariancją punktową charakteryzującą uśredniane pole losowe (w rozprawie dotyczy kąta tarcia wewnętrznego lub spójności). Wariancję na linii CD wyprowadza się

analogicznie jak w równaniu (6.8), należy jedynie zmienić współrzędne punktów. Spirala logarytmiczna BC wymaga dodatkowego wyprowadzenia wyrażeń na wariancje i kowariancje. Parametryzacja linii BC przebiega następująco (współrzędne biegunowe):

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad (6.9)$$

$$z(r, \theta) = -r \sin \theta$$

Równanie spirali logarytmicznej nachylonej pod stałym kątem  $\varphi$  do promienia  $r$  można zapisać jak w równaniu (6.10) (np. Izbicki i Mróz, 1976):

$$r = r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) \quad (6.10)$$

Gdzie  $\theta \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ . Podstawiając współrzędne punktu B do równania (6.9) otrzymuje się wyrażenie na  $r_0$  (6.11).

$$r_0 = \frac{b}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi\right) \quad (6.11)$$

Długość spirali logarytmicznej BC można obliczyć z wyrażenia całkowego przedstawionego w równaniu (6.12).

$$\begin{aligned} |BC| &= \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}} \sqrt{(r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) (\cos \theta \operatorname{tg} \varphi - \sin \theta))^2 + (-r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) (\sin \theta \operatorname{tg} \varphi + \cos \theta))^2} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}} \sqrt{r_0^2 \exp^2(\theta \operatorname{tg} \varphi) (\operatorname{tg}^2 \varphi + 1)} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}} \frac{r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \varphi} d\theta = \\ &= \frac{b}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi} \left(\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) - 1\right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Stosując równania (6.3), (6.2), (6.9) oraz (6.10), otrzymuje się następujące wyrażenie na wariancję po uśrednieniu pola losowego wzdłuż spirali BC:

$$\text{Var}(X_{BC}) = \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma_X^2}{|BC||BC|} \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}} \exp\left(-\left(\frac{r_0 \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi) \cos \theta_2 - r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \cos \theta_1}{\omega_2}\right)^2\right) \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{-r_0 \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi) \sin \theta_2 + r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \sin \theta_1}{\omega_1}\right)^2\right) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta_1}\right)^2} \\ &\times \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta_2}\right)^2} d\theta_1 d\theta_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma_X^2}{|BC||BC|} \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}} \exp\left(-\left(\frac{r_0 \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi) \cos \theta_2 - r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \cos \theta_1}{\omega_2}\right)^2\right) \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{-r_0 \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi) \sin \theta_2 + r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \sin \theta_1}{\omega_1}\right)^2\right) \frac{r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi)}{\cos \varphi} \\ &\times \frac{r_0 \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi)}{\cos \varphi} d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned}$$

Analogicznie do równania (6.13) można przedstawić wyrażenie na kowariancję pomiędzy spiralą logarytmiczną BC a liniami poślizgu AB oraz CD. Wyprowadzone formuły przedstawiono w równaniach (6.14) oraz (6.15).

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) &= \frac{\sigma_X^2}{|AB||BC|} \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}} \exp\left(-\left(\frac{x_B t_1 - r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \cos \theta_1}{\omega_2}\right)^2\right) \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{z_B t_1 + r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \sin \theta_1}{\omega_1}\right)^2\right) \frac{r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi)}{\cos \varphi} \sqrt{[x_B - x_A]^2 + [z_B - z_A]^2} dt_1 d\theta_1 \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_{CD}, X_{BC}) &= \frac{\sigma_X^2}{|CD||BC|} \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}} \exp\left(-\left(\frac{(x_D - x_C)t_1 + x_C - r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \cos \theta_1}{\omega_2}\right)^2\right) \\
 &\times \exp\left(-\left(\frac{(z_D - z_C)t_1 + z_C + r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \sin \theta_1}{\omega_1}\right)^2\right) \frac{r_0 \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi)}{\cos \varphi} \\
 &\times \sqrt{[x_D - x_C]^2 + [z_D - z_C]^2} dt_1 d\theta_1
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

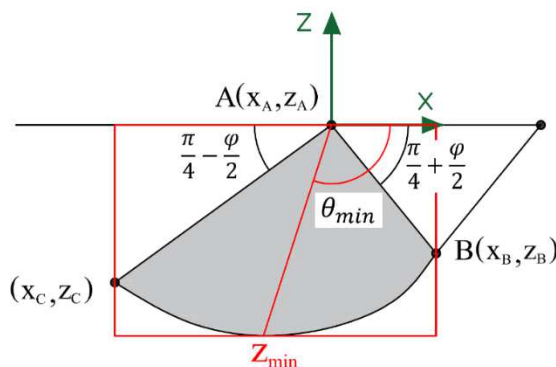
Kowariancja pomiędzy liniami poślizgu AB i CD wyrażona jest w analogiczny sposób jak w przypadku mechanizmu wieloblokowego (wyprowadzenie przedstawione w rozdziale 6) i zadana jest równaniem (6.16).

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_{CD}, X_{AB}) &= \frac{\sigma_X^2}{|CD||AB|} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\left(\frac{(x_D - x_C)t_1 + x_C - x_B t_2}{\omega_2}\right)^2\right) \\
 &\times \exp\left(-\left(\frac{(z_D - z_C)t_1 + z_C - x_B t_2}{\omega_1}\right)^2\right) \sqrt{[x_B - x_A]^2 + [z_B - z_A]^2} \\
 &\times \sqrt{[x_D - x_C]^2 + [z_D - z_C]^2} dt_1 d\theta_1
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Powyższe formuły obowiązują, gdy pole losowe uśrednia się wzdłuż spirali logarytmicznej BC. Jednak, jak wspomniano wcześniej, dla mechanizmu Prandtla cały obszar ABC bierze udział w dyssypacji energii (deformacja objętościowa); w związku z tym faktem, w ramach rozprawy przeprowadzono analizy, w których uśrednień pola losowego dokonywano po obszarze ABC. Wyprowadzenie wyrażeń na nowe wartości wariancji i kowariancji dla obszaru ABC wymaga pewnych prac przygotowawczych. Na rysunku 6.3 przedstawiono geometrię obszaru ABC. W związku z relatywnie skomplikowaną geometrią obszaru, zastosowano funkcję indykatorową, przyjmującą wartość 1 dla punktów znajdujących się wewnątrz określonego obszaru oraz 0 dla punktów znajdujących się poza tym obszarem. Funkcję indykatorową użyto także w późniejszych wyprowadzeniach związanych z trójwymiarowym mechanizmem zniszczenia. W związku z implementacją algorytmu w środowisku Mathematica użyto funkcji Boole(), która jest funkcją indykatorową zdefiniowaną w tym środowisku. Z tego powodu, w wyprowadzonych w dalszej części rozprawy równaniach, pojawia się zapis funkcji indykatorowej jako Boole(). Na początkowym etapie należy ustalić maksymalną



głębokość obszaru ABC. Można tego dokonać w prosty sposób na podstawie równania (6.7) poprzez przyrównanie do zera pochodnej po współrzędnej  $z$  (patrz równanie (6.17)).



Rysunek 6.3. Lokalizacja maksymalnej głębokości obszaru ABC.

$$\frac{d}{d\theta}(-r \sin \theta) = \frac{d}{d\theta}(-r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) \sin \theta) = 0 \Rightarrow \quad (6.17)$$

$$-r_0(\operatorname{tg} \varphi \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) \sin \theta + \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi)(\operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta = 0$$

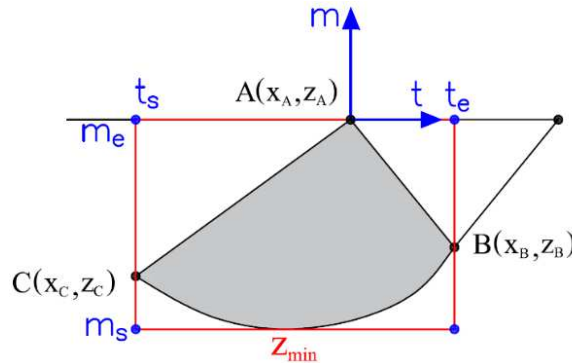
Rezultat obliczenia pochodnej pokazano w dolnej części równania (6.17); wskazuje on, że jedyną możliwością sprowadzenia równania do zera są wartości  $\cos \theta < 0$ . Przy założeniu, że  $\theta \in (90^\circ, 135^\circ + \frac{\varphi}{2})$ , można otrzymać równanie na wartość kąta  $\theta$ , dla którego osiągnięta jest maksymalna głębokość spirali BC (a tym samym obszaru ABC), patrz równanie (6.18).

$$\theta_{min} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}\right) + 180^\circ \quad (6.18)$$

Dodanie  $180^\circ$  w równaniu (6.18) jest konieczne, ponieważ przedział, w którym poszukuje się wartości  $\theta_{min}$ , jest zlokalizowany na drugim ramieniu funkcji tangens. Podstawiając równanie (6.18) do równania (6.9), otrzymuje się maksymalny pionowy zasięg mechanizmu Prandtla:

$$z_{min} = -r \sin \theta_{min} \quad (6.19)$$

Na rysunku 6.4 przedstawiono przyjęte granice całkowania. Postać funkcji wariancji dla obszaru ABC wyznacza się analogicznie jak dla linii poślizgu, natomiast z uwagi na fakt, że jest to powierzchnia, funkcja wariancji będzie wyrażona przez całkę czterokrotną.



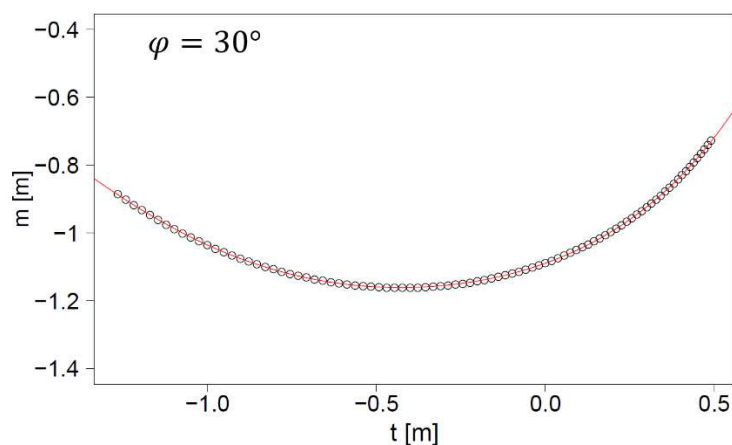
Rysunek 6.4. Prostokątny obszar całkowania dla obszaru ABC.

W równaniu (6.20) przedstawiono wyrażenie na funkcję wariancji dla obszaru ABC; zastosowana tam funkcja Boole() wycina obszar zaznaczony na szaro (rysunek 6.4) z obszaru prostokątnego zaznaczonego na czerwono. W funkcji Boole() zawarte są warunki ograniczające obszar ABC.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_{BC}) &= \frac{\sigma_X^2}{|ABC||ABC|} \int_{t_s}^{t_e} \int_{m_s}^{m_e} \int_{t_s}^{t_e} \int_{m_s}^{m_e} \exp\left(-\left(\frac{t_1 - t_2}{\omega_2}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{m_1 - m_2}{\omega_1}\right)^2\right) \\
 &\times \text{Boole} \left[ \left( m_1 < \frac{z_C}{x_C} t_1 \right) \wedge \left( m_1 < \frac{z_B}{x_B} t_1 \right) \wedge \left( m_1 > m_{BC}(t_1) \right) \wedge \left( m_2 < \frac{z_C}{x_C} t_2 \right) \right. \\
 &\quad \left. \wedge \left( m_2 < \frac{z_B}{x_B} t_2 \right) \wedge \left( m_2 > m_{BC}(t_2) \right) \right] dt_1 dm_1 dt_2 dm_2 = \\
 &= \frac{\sigma_X^2}{|ABC||ABC|} \int_{x_C}^{x_B} \int_{z_{min}}^0 \int_{x_C}^{x_B} \int_{z_{min}}^0 \exp\left(-\left(\frac{t_1 - t_2}{\omega_2}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{m_1 - m_2}{\omega_1}\right)^2\right) \\
 &\times \text{Boole} \left[ \left( m_1 < \frac{z_C}{x_C} t_1 \right) \wedge \left( m_1 < \frac{z_B}{x_B} t_1 \right) \wedge \left( m_1 > m_{BC}(t_1) \right) \wedge \left( m_2 < \frac{z_C}{x_C} t_2 \right) \right. \\
 &\quad \left. \wedge \left( m_2 < \frac{z_B}{x_B} t_2 \right) \wedge \left( m_2 > m_{BC}(t_2) \right) \right] dt_1 dm_1 dt_2 dm_2
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Należy zwrócić uwagę, że w równaniu (6.20) funkcja  $m_{BC}(t)$  jest rozwiązaniem równania nieliniowego (patrz równanie (6.9)), które determinuje głębokość spirali logarytmicznej dla danej wartości  $t$ . Równanie nieliniowe może zostać

zaimplementowane w procedurze numerycznego całkowania, jednakże skutkuje to bardzo długim czasem obliczeń, dlatego też autor zdecydował się wykorzystać aproksymację kształtu spirali logarytmicznej za pomocą wielomianów piątego rzędu. Na kształt spirali logarytmicznej wpływa wartość kąta tarcia wewnętrznego, w związku z czym dokonano 46 aproksymacji co  $1^\circ$ , tj.  $0^\circ, 1^\circ, \dots, 45^\circ$ . Czas obliczeń dla całkowania numerycznego równania (6.20) po zastosowaniu aproksymacji został zredukowany około 20-krotnie. Na rysunku 6.5 pokazano przykładową aproksymację dla kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi = 30^\circ$ . Wszystkie otrzymane wielomiany zestawiono w załączniku A. Wielomiany zostały dopasowane przy użyciu procedury `lm()` w środowisku programowania R (Wilkinson i Rogers, 1973; Chambers, 1992).



Rysunek 6.5. Aprosymacja kształtu spirali logarytmicznej BC. Czarne okręgi oznaczają dokładne rozwiązanie. Wszystkie wyrażenia wielomianowe zestawiono w załączniku A.

Podstawiając uzyskane aproksymacje do funkcji `Boole()`, otrzymuje się funkcje kowariancji pomiędzy obszarem ABC oraz liniami AB i CD (patrz równania (6.21) i (6.22)), należy jedynie zamienić  $m_{BC}(t_2)$  na właściwą postać wielomianu.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_{AB}, X_{ABC}) &= \int_{x_C}^{x_B} \int_{z_{min}}^0 \int_0^1 \exp\left(-\left(\frac{t_1 - x_B t_2}{\omega_2}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{m_1 - z_B t_2}{\omega_1}\right)^2\right) \\
 &\times \sqrt{[x_B - x_A]^2 + [z_B - z_A]^2} \text{Boole} \left[ \left( m_1 < \frac{z_C}{x_C} t_1 \right) \wedge \left( m_1 < \frac{z_B}{x_B} t_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. \wedge \left( m_1 > m_{BC}(t_1) \right) \right] dt_1 dm_1 dt_2
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X_{CD}, X_{ABC}) &= \int_{x_C}^{x_B} \int_{z_{\min}}^0 \int_0^1 \exp\left(-\left(\frac{t_1 - (x_D - x_C)t_2 + x_C}{\omega_2}\right)^2\right) \\
 &\times \exp\left(-\left(\frac{m_1 - (x_D - x_C)t_2 + x_C}{\omega_1}\right)^2\right) \sqrt{[x_D - x_C]^2 + [z_D - z_C]^2} \\
 &\times \text{Boole}\left[\left(m_1 < \frac{z_C}{x_C} t_1\right) \wedge \left(m_1 < \frac{z_B}{x_B} t_1\right) \wedge \left(m_1 > m_{BC}(t_1)\right)\right] dt_1 dm_1 dt_2
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Wariancje na liniach AB oraz CD i kowariancja pomiędzy AB i CD pozostają takie same, jak we wcześniejszym przypadku.

Korzystając z powyższych wyrażeń na funkcje wariancji i kowariancji w przypadku uśrednień wzdłuż linii poślizgu AB, BC i CD, otrzymuje się następującą macierz kowariancji (równanie (6.23)):

$$[C_X] = \begin{bmatrix} \text{Var}[X_{AB}] & \text{Cov}[X_{AB}, X_{BC}] & \text{Cov}[X_{AB}, X_{CD}] \\ \text{Cov}[X_{AB}, X_{BC}] & \text{Var}[X_{BC}] & \text{Cov}[X_{BC}, X_{CD}] \\ \text{Cov}[X_{AB}, X_{CD}] & \text{Cov}[X_{BC}, X_{CD}] & \text{Var}[X_{CD}] \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Macierz kowariancji  $[C_X]$  jest symetryczna i dodatnio określona. W przypadku uśredniania wzdłuż linii AB i CD oraz po obszarze ABC otrzymuje się następującą postać macierzy kowariancji (równanie (6.24)):

$$[C_X] = \begin{bmatrix} \text{Var}[X_{AB}] & \text{Cov}[X_{AB}, X_{ABC}] & \text{Cov}[X_{AB}, X_{CD}] \\ \text{Cov}[X_{AB}, X_{ABC}] & \text{Var}[X_{ABC}] & \text{Cov}[X_{ABC}, X_{CD}] \\ \text{Cov}[X_{AB}, X_{CD}] & \text{Cov}[X_{ABC}, X_{CD}] & \text{Var}[X_{CD}] \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

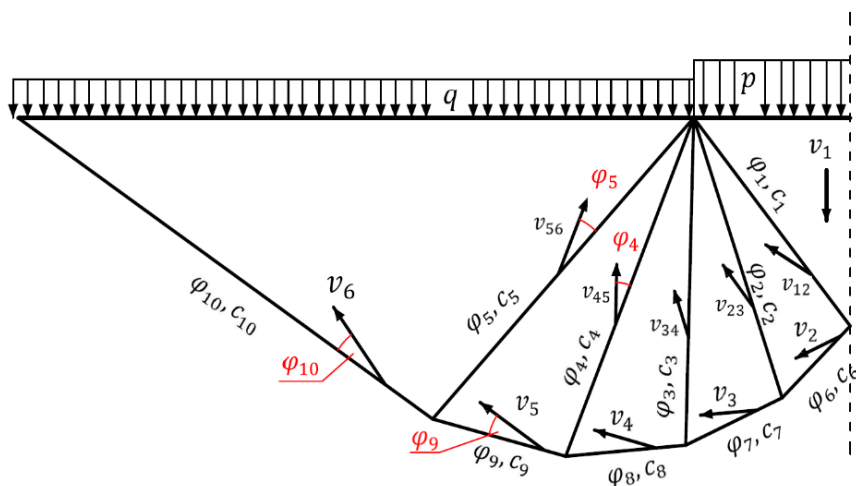
Powyższe macierze są punktem wyjścia przy generowaniu nowych wartości parametrów wytrzymałościowych. Algorytm, poprzez który można tego dokonać dla wzajemnie skorelowanych pól kąta tarcia wewnętrznego i spójności, został przedstawiony w pracy Puły i Chwały (2015). Jednakże, we wspomnianej pracy współczynniki macierzy kowariancji zostały aproksymowane wielomianami, a nie wyznaczone wprost; w związku z tą różnicą, w ramach niniejszej rozprawy algorytm dostosowano do rozpatrywanego zagadnienia i przedstawiono go w załączniku B. W związku z różnym charakterem rozpatrywanych zagadnień (tj. mechanizm wieloblokowy czy mechanizm trójwymiarowy) każdorazowo przedstawiono modyfikację i dostosowanie algorytmu z pracy Puły i Chwały (2015) do nowego zagadnienia. Rezultaty dla mechanizmu

dwuwymiarowego wieloblokowego przedstawiono w rozdziale 6, natomiast dla mechanizmu trójwymiarowego w załączniku E.

### 6.3. Uśrednienia lokalne dla wieloblokowego mechanizmu dwuwymiarowego

#### 6.3.1. Dostosowanie deterministycznego mechanizmu wieloblokowego na potrzeby oceny losowej nośności podłoża

Geometria zniszczenia oraz wyrażenie na nośność podłoża w przypadku dwuwymiarowego wieloblokowego mechanizmu zniszczenia zostały przedstawione w rozdziale 2.3. Jednakże, rozdział 2.3 odnosi się do oszacowania nośności podłoża w przypadku stałych wartości parametrów wytrzymałościowych (przypadek deterministyczny); w związku z podejściem proponowanym w niniejszej rozprawie (tj. takim, które pozwala uwzględnić przestrzenną zmienność parametrów wytrzymałościowych podłoża) zachodzi potrzeba adaptacji mechanizmu deterministycznego tak, aby możliwe było przypisanie różnych wartości parametrów wytrzymałościowych poszczególnym liniom poślizgu. Zaproponowana modyfikacja pozwala na spełnienie powyższego wymogu, co więcej - przy zachowaniu kinematycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia. Na rysunku 6.5 przedstawiono symetryczny mechanizm wieloblokowy, który na każdej linii poślizgu (nieciągłości prędkości) ma przypisaną inną wartość parametrów wytrzymałościowych. Rysunek 6.5 można porównać z rysunkiem 2.6, przedstawiającym sytuację przy stałych wartościach parametrów wytrzymałościowych podłoża. W związku z założoną na tym etapie symetrią na rysunku 6.5 przedstawiono wyłącznie lewą stronę mechanizmu. Wektory nieciągłości prędkości są nachylone pod kątem odpowiadającym indywidualnej wartości tarcia na danej linii poślizgu. Przykładowo,  $\varphi_5$  jest wartością kąta tarcia wewnętrznego właściwą dla linii poślizgu  $l_5$ , w związku z czym wektor nieciągłości prędkości jest nachylony względem tej linii pod kątem  $\varphi_5$ . W celu zwiększenia przejrzystości, na rysunku 6.5 zaznaczono jedynie kilka wartości nachylenia wektora nieciągłości prędkości do linii poślizgu; przypisano natomiast indywidualne wartości parametrów wytrzymałościowych dla każdej linii poślizgu.



Rysunek 6.5. 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia (lewa część). Każda linia poślizgu ma przypisaną indywidualną wartość kąta tarcia wewnętrznego i spójności. Szczegółowy opis w tekście.

Hodograf prędkości wyznacza się z zależności geometrycznych w sposób analogiczny do przedstawionego w rozdziale 2.3 przy stałych wartościach parametrów wytrzymałościowych podłoża. Procedura wyznaczania nośności granicznej jest podobna do tej z rozdziału 2.3, jednakże ostateczna postać wyrażenia jest inna. Różnica wynika z konieczności uwzględnienia różnych wartości kąta tarcia wewnętrznego i spójności na liniach poślizgu. W przypadku zagadnienia symetrycznego (jak na rysunku 6.5) wyrażenia na trzy składowe nośności mogą być przedstawione zgodnie z równaniami (6.25), (6.26) oraz (6.27).

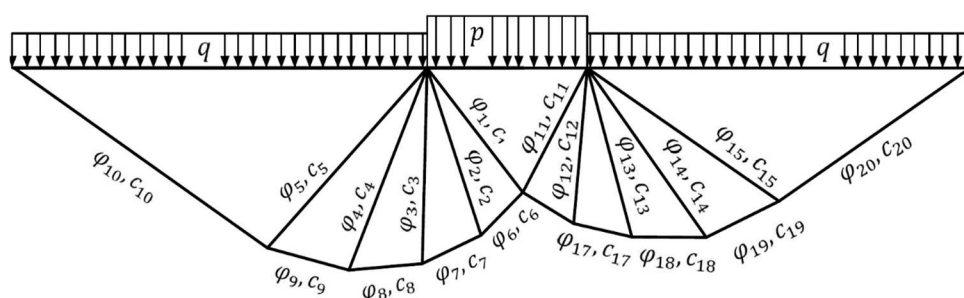
$$cN_c = 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_i l_i \cos \varphi_i v_{ii+1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+n-1} l_{ii+1} \cos \varphi_{i+n-1} v_{i+1} \right) \quad (6.25)$$

$$qN_q = 2ql_n v_n \quad (6.26)$$

$$\frac{1}{2} \gamma b N_\gamma = g_1 v_1 + 2 \sum_{i=2}^n g_i v_i \quad (6.27)$$

Uzmiennienie wartości  $c$  i  $\varphi$  na liniach poślizgu wymusza ich przeniesienie pod znak sumy z odpowiednim indeksem (nie mogą one znaleźć się na zewnątrz operatora sumowania; por. równanie (2.13)). Założenie o symetryczności mechanizmu zniszczenia ma swoje podłożę w podejściu deterministycznym, w którym optymalne są mechanizmy

symetryczne. Sytuacja ulega zmianie, gdy dopuszcza się przestrzenną zmienność parametrów podłoża w obrębie mechanizmu zniszczenia. Wtedy naturalnym wydaje się zastosowanie mechanizmu niesymetrycznego. Należy zwrócić uwagę, że mechanizmy symetryczne zawierają się w grupie mechanizmów niesymetrycznych, które są liczniejszą klasą mechanizmów. W przypadku mechanizmów niesymetrycznych geometria zniszczenia musi być rozważana jako całość, a tym samym przypisanie różnych wartości parametrów wytrzymałościowych powinno objąć także prawą stronę mechanizmu z rysunku 6.5. Przykładowa geometria zniszczenia i przypisanie odpowiednich wartości  $c$  i  $\varphi$  przedstawia rysunek 6.6.



Rysunek 6.6. 6-blokowy mechanizm niesymetryczny (łączna liczba rozważanych bloków to 11). Każda linia poślizgu ma przypisaną indywidualną wartość kąta tarcia wewnętrznego i spójności. Szczegółowy opis w tekście.

W przypadku mechanizmu niesymetrycznego z rysunku 6.6, wyrażenie na nośność podłoża wymaga modyfikacji równań (6.25), (6.26) oraz (6.27), tj. należy zastąpić mnożenie przez dwa sumowaniem po wszystkich liniach poślizgu. W rezultacie otrzymuje się wyrażenie na składniki nośności przy założeniu mechanizmu niesymetrycznego zadane równaniami (6.28), (6.29) oraz (6.30).

$$\begin{aligned}
 cN_c = & \sum_{i=1}^{n-1} c_i l_i \cos \varphi_i v_{ii+1} + \sum_{i=2n-2}^{3n-3} c_i l_i \cos \varphi_i v_{ii+1} \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+n-1} l_{ii+1} \cos \varphi_{i+n-1} v_{i+1} \\
 & + \sum_{i=2n-2}^{3n-3} c_{i+3n-2} l_{ii+1} \cos \varphi_{i+3n-3} v_{i+1}
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$qN_q = ql_n v_{n|} + ql_{2n-1} v_{2n-1|} \quad (6.29)$$

$$\frac{1}{2} \gamma b N_\gamma = \sum_{i=1}^{2n-1} g_i v_{i|} \quad (6.30)$$

Gdzie  $n$  oznacza liczbę bloków zgodnie z przyjętą konwencją jej oznaczania. W przypadku mechanizmów przedstawionych na rysunkach 6.5 i 6.6 liczba bloków  $n$  pozostaje taka sama i wynosi 6. Obydwa podejścia rozróżnia się, nazywając mechanizm symetrycznym lub niesymetrycznym. W dalszej części pracy pokazano, że liczba bloków przyjęta do wyznaczania nośności ma wpływ na uzyskiwane rezultaty; oczywiście większa liczba bloków oznacza większą dokładność, ale jednocześnie dłuższy czas obliczeń. Można natomiast zaobserwować, że te różnice są znaczące przy  $n < 4$  i bardzo ograniczone dla większej liczby bloków.

### 6.3.2. Procedura optymalizacyjna oparta na metodzie wyżarzania

Jak wspomniano w rozdziale 5, metoda wyżarzania (*simulated annealing*) została zastosowana jako podstawa do opracowania procedury optymalizacyjnej wymaganej do znalezienia optymalnej wartości nośności podłoża w przypadku mechanizmu wieloblokowego. Nośność podłoża wyraża się poprzez równania (2.9), (6.25), (6.26) i (6.27) w przypadku mechanizmu symetrycznego oraz równania (2.9), (6.28), (6.29) i (6.30) w przypadku mechanizmu niesymetrycznego. Użycie powyższych formuł pozwala na wyznaczanie wartości nośności przy określonej geometrii zniszczenia; gdy wykorzystuje się podejście zgodne z górnym oszacowaniem nośności, poszukuje się minimalnej wartości tego oszacowania. Z tego powodu niezbędne jest znalezienie takiej geometrii, która dla zadanych parametrów wytrzymałościowych będzie dawała najniższą możliwą do uzyskania wartość nośności. Metoda wyżarzania jest podejściem, w którym poszukuje się przybliżonych wartości globalnego ekstremum funkcji. W rozprawie jako funkcje celu bierze się wyrażenia określające nośność podłoża w przypadku mechanizmu symetrycznego lub niesymetrycznego. Metoda ta została w ostatnich latach z powodzeniem zastosowana do zagadnień geotechnicznych przez Sobótkę i in. (2013), Sobótkę i Pachnicza (2016) oraz w mikromechanice przez Łydźbę i Różańskiego (2016)



oraz Stefaniuka i in. (2016). Jak podano w rozdziale 5, metoda wyżarzania nie może być zastosowana wprost, natomiast opracowanie odpowiedniej procedury wymaga ustalenia wartości parametrów kontrolujących proces symulacji w sposób indywidualny dla danego problemu. Wartości tych parametrów otrzymuje się w drodze testów i kontroli otrzymywanych rezultatów. Co więcej, metoda wyżarzania wymaga opracowania unikalnej procedury, określającej w jaki sposób należy zmodyfikować aktualne wartości parametrów zadania, które będą zastosowane w kolejnej symulacji (tzw. sąsiadujący zbiór parametrów); w rozważanym przypadku tzw. sąsiadujący zbiór parametrów to geometria zniszczenia nieznacznie różniąca się od aktualnie rozważanej. Wybór tejże procedury ma także wpływ na szybkość zbieżności metody do oczekiwanego rozwiązania. W metodzie wyżarzania wyróżnia się cztery wartości parametrów kontrolujących proces symulacyjny: tzw. aktualna temperatura  $T_{cur}$ , parametr  $\alpha$ , liczba symulacji  $z$  oraz tzw. temperatura minimalna  $T_{min}$ . W pierwszej kolejności ustala się wartość początkową parametru  $T_{cur}$ ; dokonuje się tego tak, aby w początkowym stadium procesu symulacyjnego prawdopodobieństwo akceptacji gorszego wyniku  $P_a$  wynosiło około 0.5. W niniejszej rozprawie założenie wartości początkowej  $T_{cur} = 1.0$  spełnia to kryterium. Przyjęta postać  $P_a$  została przedstawiona w równaniu (5.1). Wartość parametru  $\alpha$  zawiera się w granicach (0,1). Jeśli jego wartość jest bliska jedności, wtedy wartość parametru  $T_{cur}$  jest powoli zmniejszana w trakcie procesu symulacyjnego; w odwrotnym przypadku jest to szybka redukcja wartości  $T_{cur}$ . Oczywiście, przyjęcie wartości parametru  $\alpha$  bliskiego jedności znacząco wydłuża czas obliczeń, ale jednocześnie zwiększa możliwości procesu symulacyjnego do „przechodzenia” przez lokalne ekstrema. Na potrzeby niniejszej rozprawy wykazano, że wartość  $\alpha = 0.5$  jest wystarczająca z uwagi na założoną dokładność (co pokazano na końcu niniejszego rozdziału). Kolejnym parametrem, którego wartość musi zostać ustalona, jest liczba symulacji  $z$ . Jest to liczba symulacji dla określonej wartości  $T_{cur}$ . Na podstawie analiz przeprowadzonych pod koniec tego rozdziału pokazano, że liczba  $z = 1000$  symulacji jest wystarczająca dla mechanizmu symetrycznego, a  $z = 2000$  dla niesymetrycznego. Podczas procesu symulacyjnego wartość parametru  $T_{cur}$  jest zmniejszana poprzez parametr  $\alpha$  aż do osiągnięcia założonej minimalnej jego wartości, tj.  $T_{min}$ . Pod koniec rozdziału wykazano, że wartość  $T_{min} = 10^{-8}$  jest satysfakcjonująca przy rozpatrywanych zagadnieniach. Poniżej przedstawiono kroki opracowanej procedury optymalizacyjnej przy założeniu wieloblokowego mechanizmu zniszczenia:

**Krok I.** Wybór początkowego zbioru parametrów będącego początkową geometrią zniszczenia (kąty  $\beta_{0i}$  i długości linii poślizgu  $l_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  dla mechanizmu symetrycznego; lub  $i = 1, \dots, 2n-2$  dla mechanizmu niesymetrycznego). Oznaczenie wybranego zbioru parametrów jako aktualnej geometrii zniszczenia  $\beta_{ci}$  oraz  $l_{ci}$ . W praktyce  $\beta_{0i}$  i  $l_{0i}$  powinny być wybrane tak, aby zapewniona była kinematyczna dopuszczalność mechanizmu niszczenia.

**Krok II.** Wyznaczenie wartości nośności dla parametrów z Kroku I (wyznaczenie wartości funkcji celu  $p_c$  z równań (2.9), (6.25), (6.26) i (6.27) w przypadku mechanizmu symetrycznego lub z równań (2.9), (6.28), (6.29) i (6.30) w przypadku niesymetrycznym).

**Krok III.** Przypisanie wartości parametrom  $z$ ,  $T_{min}$ ,  $T_{cur}$  oraz  $\alpha$ . Przejście do Kroku V.

**Krok IV.** Pętla 1: Dopóki  $T_{cur} > T_{min}$ , przejdź do Kroku V; w przeciwnym wypadku przejdź do Kroku X.

**Krok V.** Pętla 2: Powtórz Kroki VI, VII i VIII z razy.

**Krok VI.** Wygenerowanie tzw. sąsiadującego zbioru parametrów  $\beta_i$  oraz  $l_i$  poprzez niewielką modyfikację aktualnej geometrii zniszczenia  $\beta_{ci}$  oraz  $l_{ci}$  (wcześniejsze doświadczenia w używaniu metody wyżarzania wskazują, że wartości sąsiadujących zbiorów nie powinny znacznie się różnić między sobą). W oparciu o rysunek 2.9, otrzymujemy  $\sum \beta_i = 180^\circ$  - co znaczy, że dla sąsiadującego zbioru parametrów opisujących geometrię zniszczenia, ten warunek musi być także spełniony. Z tego powodu w zaproponowanej formule wybiera się losowo dwie wartości  $\beta^1$  oraz  $\beta^2$  z  $n$  wartości  $\beta_{ci}$ . Wybrane wartości modyfikuje się w sposób następujący:  $\beta_{mod}^1 = \beta^1 - s$  oraz  $\beta_{mod}^2 = \beta^2 + s$ , gdzie  $s$  jest liczbą losową wygenerowaną z rozkładu jednostajnego  $U[0.0^\circ, 0.05^\circ]$ . Wskutek tak zaproponowanej modyfikacji, suma kątów  $\beta$  pozostaje stała w czasie całego procesu symulacyjnego. Następnie modyfikuje się długości  $l_{ci}$ . Wybór tych, które będą podlegać zmianie, odbywa się w sposób losowy i jest uzależniony od spełnienia warunku  $U_i[0,1] > 0.5$ ; jeśli warunek ten jest spełniony dla danego  $i$ , otrzymuje się:  $l_{mod i} = l_{ci} + U_i[-0.01m, 0.01m]$ , w przeciwnym wypadku:  $l_{mod i} = l_{ci}$

dla  $i = 2, \dots, n$ . Dla  $i = 1$ , otrzymana długość jest zdeterminowana wartością pierwszego kąta  $\beta_1$  (mechanizm symetryczny) oraz kątów  $\beta_1$  i  $\beta_{n+1}$  (mechanizm niesymetryczny). Oznaczenie zmodyfikowanych wartości jako  $\beta_i$  oraz  $l_i$ .

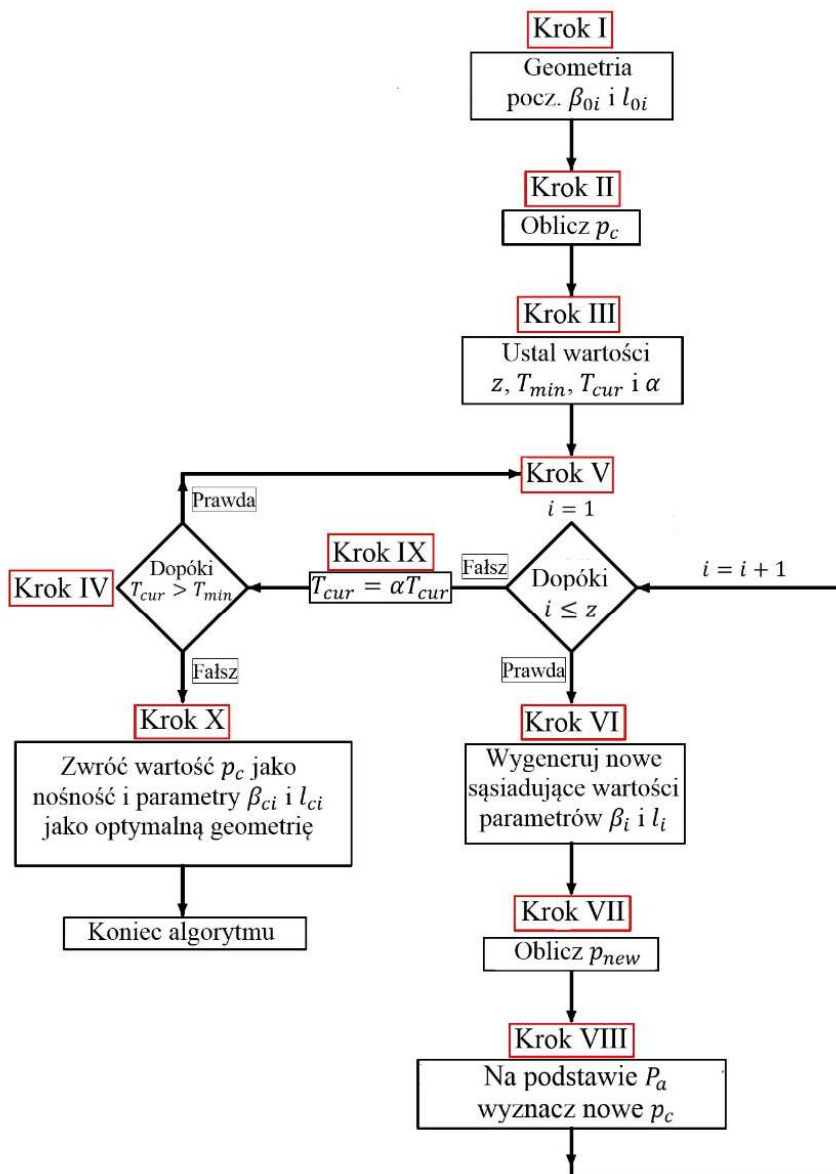
**Krok VII.** Wyznaczenie wartości funkcji celu  $p_{new}$  dla nowego zestawu parametrów definiujących geometrię zniszczenia  $\beta_i$  oraz  $l_i$ .

**Krok VIII.** Porównanie dwóch wartości funkcji celu  $p_c$  oraz  $p_{new}$ . Jeśli  $p_{new} < p_c$ , przypisz nową wartość  $p_c = p_{new}$ ; w przeciwnym wypadku, wygeneruj liczbę losową  $u$  z rozkładu jednostajnego  $U[0,1]$  i porównaj ją z wartością  $P_a$  (patrz równanie (5.1)). Jeśli  $P_a > u$ , przypisz wartość  $p_c = p_{new}$ ; w przeciwnym wypadku pozostaw wartość  $p_c$  bez zmian. Powyższa procedura zawsze przyjmuje lepszą wartość (mniejsza wartość  $p_{new}$ ), jednakże gorsze rozwiązanie (większa wartość  $p_{new}$ ) może zostać przyjęte, gdy spełniony będzie warunek  $P_a > u$ . Jeśli doszło do przyjęcia nowej wartości  $p_c$ , aktualizuje się także wartości parametrów opisujących geometrię zniszczenia ( $\beta_{ci}$  oraz  $l_{ci}$ ).

**Krok IX.** Po powtórzeniu Kroków VI, VII i VIII z razy, zredukuj wartość aktualnej temperatury w sposób następujący:  $T_{cur} = \alpha T_{cur}$ . Koniec Pętli 2. Przejdź do Kroku IV.

**Krok X.** Koniec Pętli 2. Zwróć aktualną wartość  $p_c$  jako wartość nośności podłoża oraz aktualną geometrię  $\beta_{ci}$  oraz  $l_{ci}$  jako optymalną geometrię zniszczenia. Koniec procedury.

W celu zwiększenia przejrzystości powyższego algorytmu optymalizacyjnego, został on przedstawiony na rysunku 6.7.

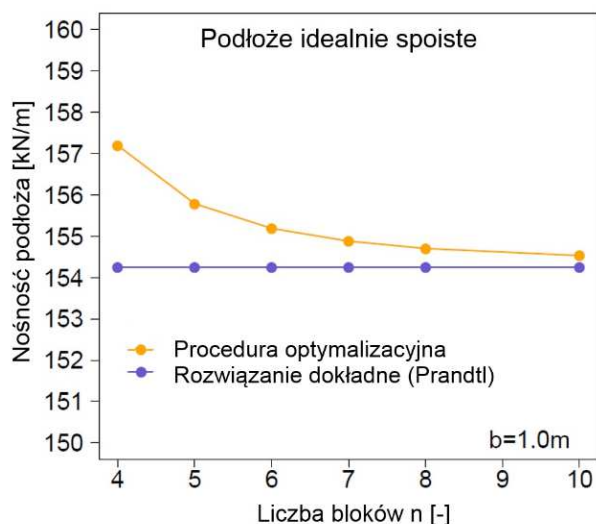


Rysunek 6.7. Procedura metody wyżarzania dla mechanizmu wieloblokowego. Szczegółowy opis w tekście.

Zastosowanie powyższej procedury opierającej się na metodzie wyżarzania nie gwarantuje tego, że nie istnieje lepsze rozwiązanie od znalezione przy jej wykorzystaniu; jest to metoda przybliżająca jego wartość. Jednakże w drodze analiz numerycznych i testowania procedury optymalizacyjnej można wykazać, że dla rozpatrywanego zagadnienia mechanizmu wieloblokowego otrzymane wartości nośności podłoża są wystarczająco dokładne. W dalszej części przedstawiono wybrane testy, jakie zostały przeprowadzone przy zastosowaniu zaproponowanej procedury optymalizacyjnej. Procedurę testowano przy założeniu zagadnień, dla których znane są

dokładne rozwiązania. Co więcej, zastosowano także klasyczną metodę Monte Carlo: poprzez zdefiniowanie poszczególnych parametrów opisujących geometrię zniszczenia za pomocą jednostajnych rozkładów prawdopodobieństwa, można wygenerować wiele geometrii zniszczenia i wyznaczyć dla nich wartości nośności podłoża. W ten sposób, wybierając najmniejsze wartości nośności podłoża można określić, w jakim zakresie parametrów się zawierają i poprzez ograniczenie początkowego zakresu zmian parametrów, można ponownie zastosować symulację Monte Carlo. Jeśli powyższą procedurę powtórzy się kilkakrotnie, za każdym razem zawężając zakresy zmian parametrów, w rezultacie otrzyma się minimalną wartość nośności. Wartości otrzymane dla przeprowadzonych testów okazały się bardzo bliskie tym, które zostały uzyskane w procedurze opartej o metodę wyżarzania. W związku z dużą liczbą parametrów, przeszukanie całej przestrzeni zdarzeń jest praktycznie niemożliwe (stąd też konieczność zawężania przedziałów w testach przeprowadzonych metodą Monte Carlo).

Istotnym elementem jest liczba bloków tworzących mechanizm zniszczenia. Dokładność oszacowania nośności rośnie wraz ze wzrostem tej liczby, a jednocześnie rośnie czas potrzebny na przeprowadzenie symulacji i znalezienie optymalnej geometrii. W związku z powyższym, niezbędne jest ustalenie kompromisu pomiędzy czasem obliczeń a oczekiwaną dokładnością. Przy powyższym zadaniu pomocne okazały się rozwiązania ściśle przedstawione w literaturze, dla których zarówno optymalna geometria, jak i nośność podłoża są znane. Dotyczą one mechanizmu zniszczenia Prandtla i dwóch sytuacji obliczeniowych, mianowicie: podłoża idealnie spoiściego oraz podłoża nieważkiego. Porównanie wyników otrzymanych w drodze optymalizacji mechanizmu wieloblokowego oraz znanych rozwiązań (Prandtl, 1920) przedstawiono na rysunkach 6.8 i 6.9. Jednocześnie sprawdzano podobieństwo w otrzymanych geometriach zniszczenia, które przedstawiono w tabelach 6.1 i 6.2. Można zaobserwować zbieżność nośności do rozwiązania dokładnego wraz ze wzrostem liczby bloków; podobne obserwacje można poczynić dla kształtu geometrii zniszczenia.

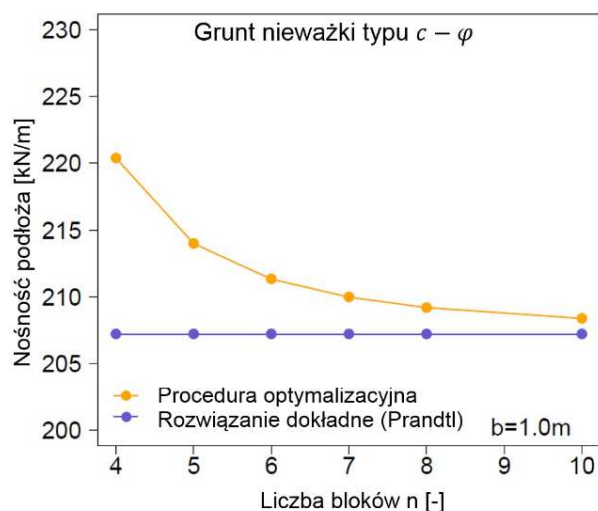


Rysunek 6.8. Porównanie dokładnego rozwiązania (mechanizm Prandtla) z mechanizmem wieloblokowym (po optymalizacji proponowanym algorytmem) w zależności od liczby bloków. Podłoże idealnie spoiście  $c = 30$  kPa, szerokość fundamentu 1.0 m. Uwaga: oś pionowa rozpoczyna się od 150 kPa.

Tab. 6.1. Porównanie geometrii zniszczenia otrzymanych dla mechanizmu wieloblokowego i mechanizmu Prandtla w przypadku podłoża idealnie spoiściego  $c=30$  kPa. Konwencja oznaczeń jak na rysunku 2.9.

Typ mechanizmu	Pierwszy kąt: $\beta_1$ [°]	Suma kątów środkowych: $\sum_{i=2}^{n-1} \beta_i$	Ostatni kąt: $\beta_n$ [°]
Wieloblokowy $n = 4$	47.5	68.0	64.5
Wieloblokowy $n = 5$	46.3	74.9	58.8
Wieloblokowy $n = 6$	45.8	78.5	55.7
Wieloblokowy $n = 7$	45.6	80.8	53.6
Wieloblokowy $n = 8$	45.5	82.2	52.3
Wieloblokowy $n = 10$	45.4	84.9	49.7
Prandtla	45	90	45

W celu ograniczenia czasu obliczeń (związanego nie tylko z procedurą optymalizacyjną, ale także koniecznością wyznaczenia macierzy kowariancji) do dalszych analiz wybrano mechanizm 6-blokowy. W stosunku do rozwiązania dokładnego różnice przy mechanizmie 6-blokowym wynoszą odpowiednio 0,6% i 1,9% dla gruntu idealnie spoiściego oraz gruntu nieważkiego. Przedstawione analizy są także sprawdzeniem poprawnego działania zaproponowanej procedury optymalizacyjnej (jako alternatywa do klasycznej metody Monte Carlo).



Rysunek 6.9. Porównanie dokładnego rozwiązania (mechanizm Prandtla) z mechanizmem wieloblokowym (po optymalizacji proponowanym algorytmem) w zależności od liczby bloków. Grunt nieważki  $\varphi = 25^\circ$ ,  $c = 10$  kPa, szerokość fundamentu 1.0 m.

Uwaga: oś pionowa rozpoczyna się od 200 kPa.

Tab. 6.2. Porównanie geometrii otrzymanych dla mechanizmu wieloblokowego i mechanizmu Prandtla w przypadku gruntu nieważkiego  $\varphi = 25^\circ$ ,  $c = 10$  kPa. Konwencja oznaczeń jak na rysunku 2.9.

Typ mechanizmu	Pierwszy kąt: $\beta_1$ [°]	Suma kątów środkowych: $\sum_{i=2}^{n-1} \beta_i$	Ostatni kąt: $\beta_n$ [°]
Wieloblokowy $n = 4$	60.2	67.7	52.1
Wieloblokowy $n = 5$	59.0	74.6	46.4
Wieloblokowy $n = 6$	58.4	78.4	43.2
Wieloblokowy $n = 7$	58.1	80.7	41.2
Wieloblokowy $n = 8$	58.0	82.2	39.8
Wieloblokowy $n = 10$	57.6	84.2	38.2
Prandtla	57.5	90	32.5

Analizy przedstawione na rysunkach 6.8 i 6.9 dotyczą podłoża nieważkiego. W celu sprawdzenia zaproponowanej procedury optymalizacyjnej przy uwzględnieniu ciężaru objętościowego gruntu otrzymane rezultaty odniesiono do tych uzyskanych przez Michałowskiego (1997). W tabeli 6.3 zestawiono wartości współczynnika nośności  $N_\gamma$  w zależności od wartości kąta tarcia wewnętrznego. Otrzymane rezultaty są w dużej zgodności z wynikami uzyskanymi przez Michałowskiego, a występujące różnice wynikają z przyjęcia mechanizmów 6- i 8-blokowych. W niniejszej rozprawie na potrzeby analiz probabilistycznych przyjęto mechanizm 6-blokowy.

Tabela 6.3. Wartości współczynnika  $N_y$  otrzymane przez zastosowanie opracowanej procedury optymalizacyjnej dla 6-blokowego i 8-blokowego mechanizmu zniszczenia w porównaniu z rezultatami otrzymanymi przez Michałowskiego (1997).

Kąt tarcia wewnętrznego, $\varphi$	Michałowski (1997)	6-blokowy mechanizm zniszczenia	8-blokowy mechanizm zniszczenia
0.0°	0.0	0.0	0.0
5.0°	0.181	0.185	0.184
10.0°	0.706	0.729	0.718
15.0°	1.938	2.01	1.97
20.0°	4.468	4.639	4.58
25.0°	9.765	10.18	9.99
30.0°	21.394	22.5	21.94
35.0°	48.681	51.8	50.2

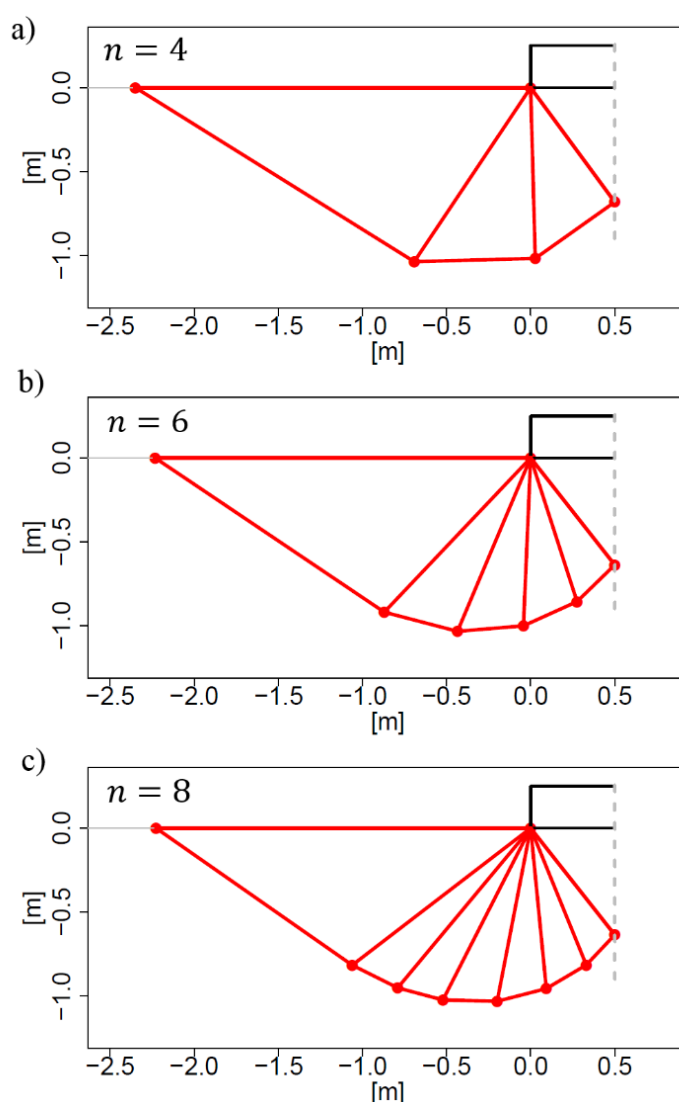
W celu zbadania czułości zaproponowanej procedury optymalizacyjnej na wybór wartości *seed* (wymaganej przy rozpoczęciu pracy generatora liczb pseudolosowych) oraz wyboru początkowej geometrii  $\beta_{0i}$  oraz  $l_{0i}$  (patrz Krok I i rysunek 6.7), należy poprzez testy określić wpływ obu tych czynników na uzyskiwane wartości nośności. W pierwszej kolejności zbadano wpływ wartości początkowej *seed*; w tym celu przeliczono 500 symulacji dla różnych wartości *seed*. Otrzymane rezultaty wskazują na praktyczny brak wpływu *seed* na otrzymywane wartości nośności. Otrzymane różnice w wartościach nośności zawierały się w przedziale  $< \pm 0.005\%$ , a różnice w wartościach parametrów opisujących optymalną geometrię zniszczenia wyniosły odpowiednio: dla kątów  $< \pm 0.1^\circ$  i dla długości linii poślizgu  $< \pm 0.01 m$ ; zatem otrzymany wpływ jest znikomy. Nieco większe różnice zachodziły dla różnych wartości parametrów opisujących początkową geometrię zniszczenia; w tym przypadku różnice wyniosły:  $< \pm 0.15\%$ ,  $< \pm 0.3^\circ$ ,  $< \pm 0.01 m$  dla odpowiednio wartości nośności, kątów i długości linii poślizgu.

We wszystkich powyższych analizach da się zaobserwować większe różnice i niepewności w przypadku parametrów opisujących geometrię zniszczenia niż w przypadku wartości nośności podłoża. Zaistniała sytuacja może być wytłumaczona kształtem funkcji celu (wyrażeniem na nośność podłoża). Funkcja ta jest względnie płaska w okolicy swojego minimum. Skutkuje to większymi rozbieżnościami w geometrii niż w wartościach nośności (np. przy zmianach wartości jednego z kątów w wachlarzu o wartość  $0.2^\circ$  praktycznie nie obserwuje się zmian w wartości nośności). Jest to korzystna informacja, ponieważ dzięki odpowiedniemu kształtowi funkcji celu metoda wyznaczania działa sprawnie i można ograniczyć liczbę symulacji w ramach procedury

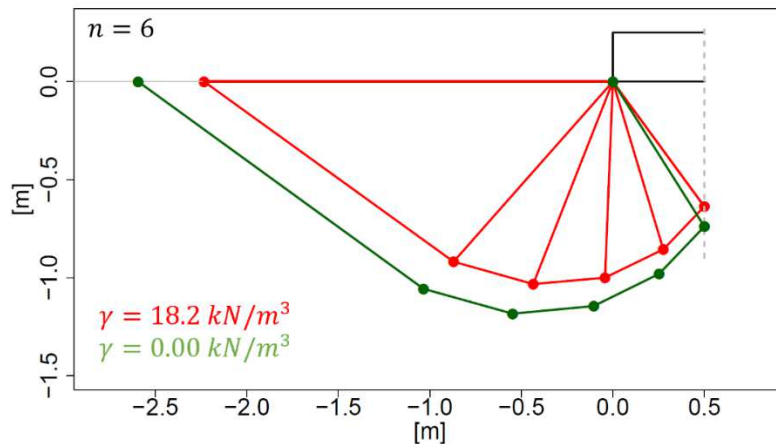


optymalizacyjnej. Gdyby funkcja celu miała ostre ekstrema, znalezienie jej globalnego minimum mogłoby stanowić trudności.

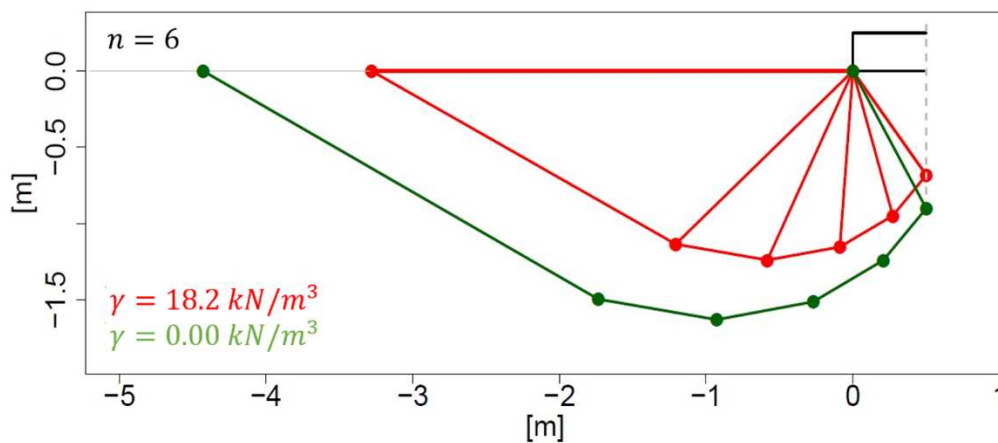
Na rysunku 6.10 przedstawiono optymalne geometrie mechanizmów zniszczenia dla  $n$  równego 4, 6 oraz 8 bloków. Optymalizacja geometrii została przeprowadzona przy założeniu wartości oczekiwanych parametrów podłoża gruntowego podanych w tabeli 8.1. Następnie, na rysunkach 6.11 oraz 6.12 przedstawiono wpływ założenia o nieważkim gruncie na kształt optymalnej geometrii; otrzymane rezultaty dotyczą wartości oczekiwanych z tabel 8.1 i 8.2. W przypadku podłoża z rysunku 6.12, w związku z większą wartością kąta tarcia wewnętrznego, otrzymane różnice w kształcie geometrii są znacznie większe.



Rysunek 6.10. Porównanie kształtu optymalnej geometrii zniszczenia podłoża dla mechanizmu: a) 4-blokowego, b) 6-blokowego oraz c) 8-blokowego.



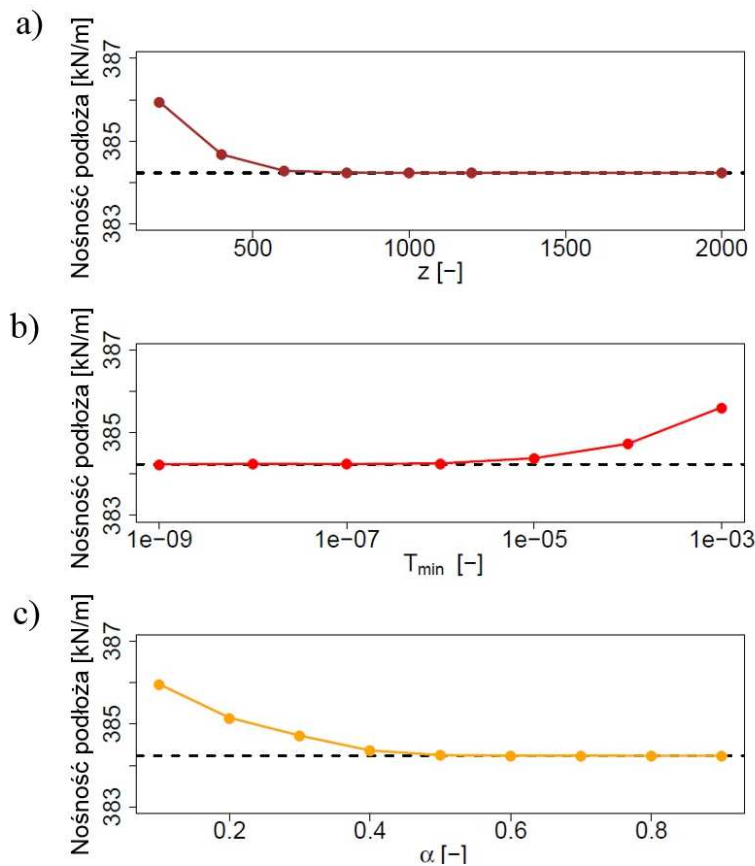
Rysunek 6.11. Różnice w optymalnych geometriach zniszczenia w przypadku podłoża nieważkiego ( $\gamma = 0 \text{ kN/m}^3$ ) oraz ważkiego ( $\gamma = 18.2 \text{ kN/m}^3$ ). Porównania dokonano przy założeniu wartości oczekiwanych parametrów podłoża z tabeli 8.1 ( $\varphi = 20^\circ$  i  $c = 20 \text{ kPa}$ ).



Rysunek 6.12. Różnice w optymalnych geometriach zniszczenia w przypadku podłoża nieważkiego ( $\gamma = 0 \text{ kN/m}^3$ ) oraz ważkiego ( $\gamma = 18.2 \text{ kN/m}^3$ ). Porównania dokonano przy założeniu wartości oczekiwanych parametrów podłoża z tabeli 8.2 ( $\varphi = 30^\circ$  i  $c = 5 \text{ kPa}$ ).

Najbardziej istotnymi z punktu widzenia dokładności są wartości parametrów kontrolujących proces symulacyjny. Na rysunku 6.13 przedstawiono czułość procedury optymalizacyjnej na dobór wartości tychże parametrów. Dla przypomnienia zestawmy raz jeszcze owe parametry:  $\alpha$  odpowiada za tempo redukcji parametru  $T_{cur}$ ,  $T_{min}$  jest minimalną wartością parametru  $T_{cur}$ , po osiągnięciu której kończy się proces symulacyjny oraz  $z$  jest liczbą symulacji dla danej wartości  $T_{cur}$ . Wszystkie symulacje przeprowadzono dla tych samych wartości początkowych *seed* i geometrii zniszczenia, aby wyeliminować ich wpływ. Obliczenia przeprowadzono dla gruntu jak w Tabeli 8.1,

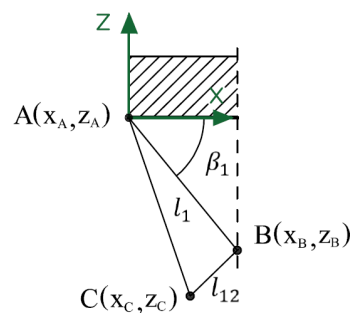
tn.  $\varphi = 20^\circ$ ,  $c = 20$  kPa i szerokości fundamentu 1.0 m. Na rysunku 6.13 kolorem brązowym zaznaczono wpływ wartości parametru  $z$ , którego wartość była zmieniana od 200 do 2000, a pozostałe parametry miały stałe wartości  $\alpha = 0.5$  i  $T_{min} = 10^{-8}$ . Na tej podstawie można zaobserwować, że powyżej  $z = 600$  praktycznie nie obserwuje się poprawy otrzymanego wyniku. Warto zwrócić uwagę, że pionowy zakres osi to tylko 4 kPa. Analogiczne wnioski płyną z drugiego wykresu, gdzie w przypadku  $T_{min}$  założono stałe wartości  $\alpha = 0.5$  i  $z = 1000$ . Ostatni wykres na rysunku 6.13 pokazuje wpływ wartości parametru  $\alpha$  przy stałych wartościach  $T_{min} = 10^{-8}$  and  $z = 1000$ . Ogólny wniosek, jaki można wysunąć na podstawie rysunku 6.9 to fakt, że dla szerokiego zakresu zmian parametrów kontrolujących proces symulacyjny otrzymywane rezultaty są praktycznie takie same. Na każdym z wykresów z rysunku 6.13 zaznaczono linię przerywaną, która oznacza wartość nośności podłoża równą 384.23 kN/m otrzymaną dla  $\alpha = 0.9$ ,  $T_{min} = 10^{-9}$  i  $z = 2000$ , a więc najwyższej dokładności, jaką można było otrzymać w przeprowadzonych testach. Opierając się na wynikach przedstawionych na rysunku 6.13, podobną lub wręcz taką samą dokładność można uzyskać przy znacznie krótszym czasie obliczeń. Na podstawie analogicznych testów przyjęto wartości parametrów kontrolujących proces symulacji dla zagadnień rozpatrywanych w niniejszej rozprawie. Podsumowując: w przypadku symetrycznego mechanizmu wieloblokowego przyjęto do dalszych analiz następujące wartości:  $\alpha = 0.5$ ,  $T_{min} = 10^{-8}$  i  $z = 1000$ ; natomiast dla mechanizmu niesymetrycznego odpowiednio:  $\alpha = 0.5$ ,  $T_{min} = 10^{-8}$  i  $z = 2000$ . Ustalone wartości zostały dobrane w sposób konserwatywny tak, aby zapewnić brak wpływu parametrów kontrolujących proces symulacyjny na dokładność otrzymanych rezultatów.



Rysunek 6.13. Nośność podłoża przy założeniu symetrycznego mechanizmu 6-blokowego w funkcji parametrów  $\alpha$ ,  $T_{min}$  oraz  $z$ . Szczegółowy opis w tekście. Szarą przerywaną linią oznaczono wartość nośności otrzymaną dla  $\alpha = 0.9$ ,  $T_{min} = 10^{-9}$  oraz  $z = 2000$ .

### 6.3.3. Uśrednienia lokalne dla mechanizmu wieloblokowego

W pierwszej kolejności wyprowadzono wyrażenia na kowariancję pomiędzy liniami  $l_1$  oraz  $l_{12}$  (patrz rysunek 2.9). Na potrzeby wyrażeń całkowych oznaczmy linie  $l_1$  oraz  $l_{12}$  jako AB oraz BC. Omówioną sytuację prezentuje rysunek 6.14.



Rysunek 6.14. Konwencja oznaczeń przyjęta do wyprowadzenia wyrażenia na kowariancję pomiędzy liniami AB i BC.

Podstawiając gaussowską funkcję kowariancji (równanie (6.1)) do równania (6.3) otrzymuje się następujące wyrażenie (6.31).

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{l_i}, X_{l_j}) &= \frac{\sigma_X^2}{|l_i||l_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} \exp\left(-\left(\frac{x(t_i) - x(t_j)}{\omega_2}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{z(t_i) - z(t_j)}{\omega_1}\right)^2\right) \\ &\quad \times \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_i}\right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_j}\right]^2} dt_i dt_j \end{aligned} \quad (6.31)$$

Parametryzując odcinki AB i BC oraz zakładając  $t \in (0,1)$ , współrzędne kartezjańskie punktów leżących na AB i BC mogą być obliczone z równań (6.32) i (6.33).

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_B - x_A)t \\ z(t) &= (z_B - z_A)t \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_B + (x_C - x_B)t \\ z(t) &= z_B + (z_C - z_B)t \end{aligned} \quad (6.33)$$

Podstawiając parametryzację do równania (6.31) i wyznaczając postacie pochodnych cząstkowych w równaniu (6.31), otrzymuje się następujące wyrażenie na kowariancję (6.34).

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) &= \frac{\sigma_X^2}{|AB||BC|} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\left(\frac{(x_B - x_A)t_1 - x_B - (x_C - x_B)t_2}{\omega_2}\right)^2\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\left(\frac{(z_B - z_A)t_1 - z_B - (z_C - z_B)t_2}{\omega_1}\right)^2\right) \\ &\quad \times \sqrt{[x_B - x_A]^2 + [z_B - z_A]^2} \sqrt{[x_C - x_B]^2 + [z_C - z_B]^2} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Podstawiając w równaniu (6.34)  $x_A = z_A = 0$  oraz skracając czynnik  $|AB||BC|$  otrzymuje się równanie (6.15) będące wyrażeniem na kowariancję pomiędzy liniami AB oraz BC.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) &= \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\left(\frac{x_B t_1 - x_B - (x_C - x_B)t_2}{\omega_2}\right)^2\right) \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{z_B t_1 - z_B - (z_C - z_B)t_2}{\omega_1}\right)^2\right) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Gdzie  $\sigma_X^2$  jest tzw. wariancją punktową uśrednianego pola losowego (tj. pola kąta tarcia wewnętrznego lub spójności). W przypadku mechanizmu symetrycznego 6-blokowego pozostałe kowariancje odpowiadające  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{BC})$  otrzymuje się w sposób analogiczny jak równanie (6.35). Są to:  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{CD})$ ,  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{DE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{FG})$ ; oraz:  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{BC})$ ,  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{CD})$ ,  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{DE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{FG})$ ; oraz:  $\text{Cov}(X_{AD}, X_{BC})$ ,  $\text{Cov}(X_{AD}, X_{CD})$ ,  $\text{Cov}(X_{AD}, X_{DE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AD}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{AD}, X_{FG})$ ; oraz:  $\text{Cov}(X_{AE}, X_{BC})$ ,  $\text{Cov}(X_{AE}, X_{CD})$ ,  $\text{Cov}(X_{AE}, X_{DE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AE}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{AE}, X_{FG})$ ; oraz:  $\text{Cov}(X_{AF}, X_{BC})$ ,  $\text{Cov}(X_{AF}, X_{CD})$ ,  $\text{Cov}(X_{AF}, X_{DE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AF}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{AF}, X_{FG})$ . Konwencja oznaczeń jest przedstawiona na rysunku 6.11; w przypadku symetrycznym bierzemy pod uwagę jedynie lewą część rysunku.

Podobnie jak wyżej, wyprowadza się pozostałe wyrażenia na kowariancje. Kowariancja pomiędzy liniami AB oraz AC dana jest wzorem (6.36).

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{AB}, X_{AC}) &= \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\left(\frac{(x_B - x_A)t_1 - (x_C - x_A)t_2}{\omega_2}\right)^2\right] \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{(z_B - z_A)t_1 - (z_C - z_A)t_2}{\omega_1}\right)^2\right] dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Przez analogię do równania (6.36) wyznacza się pozostałe kowariancje:  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{AD})$ ,  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{AE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AB}, X_{AF})$ ; oraz:  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{AD})$ ,  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{AE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AC}, X_{AF})$ ; oraz:  $\text{Cov}(X_{AD}, X_{AE})$ ,  $\text{Cov}(X_{AD}, X_{AF})$ ; oraz  $\text{Cov}(X_{AE}, X_{AF})$ , podstawiając odpowiednie współrzędne punktów do (6.36).

Kowariancja pomiędzy liniami BC i CD wyraża się następująco (6.37).

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{BC}, X_{CD}) = & \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp \left[ - \left( \frac{(x_C - x_B)t_1 - (x_D - x_C)t_2 + (x_B - x_C)}{\omega_2} \right)^2 \right] \\ & \times \exp \left[ - \left( \frac{(x_C - x_B)t_1 - (x_D - x_C)t_2 + (x_B - x_C)}{\omega_1} \right)^2 \right] dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Przez analogię do równania (6.37) wyznacza się pozostałe kowariancje:  $\text{Cov}(X_{BC}, X_{DE})$ ,  $\text{Cov}(X_{BC}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{BC}, X_{FG})$ ,  $\text{Cov}(X_{CD}, X_{DE})$ ,  $\text{Cov}(X_{CD}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{CD}, X_{FG})$ ,  $\text{Cov}(X_{DE}, X_{EF})$ ,  $\text{Cov}(X_{DE}, X_{FG})$  oraz  $\text{Cov}(X_{EF}, X_{FG})$ , podstawiając odpowiednie współrzędne punktów do (6.37).

Wariancję na linii AB wyznacza się z następującego wyrażenia (6.38).

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{AB}) = & \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp \left[ - \left( \frac{(x_B - x_A)(t_1 - t_2)}{\omega_2} \right)^2 \right] \\ & \times \exp \left[ - \left( \frac{(z_B - z_A)(t_1 - t_2)}{\omega_1} \right)^2 \right] dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Przez analogię do równania (6.38) wyznacza się pozostałe wariancje:  $\text{Var}(X_{AC})$ ,  $\text{Var}(X_{AD})$ ,  $\text{Var}(X_{AE})$ ,  $\text{Var}(X_{AF})$ ,  $\text{Var}(X_{BC})$ ,  $\text{Var}(X_{CD})$ ,  $\text{Var}(X_{DE})$ ,  $\text{Var}(X_{EF})$  oraz  $\text{Var}(X_{FG})$ , podstawiając odpowiednie wartości współrzędnych punktów do (6.38).

Każda wartość wariancji i kowariancji jest jednym ze współczynników macierzy kowariancji. W przypadku mechanizmu symetrycznego 6-blokowego macierz kowariancji ma wymiar 10 x 10 i postać zadaną w równaniach (6.39), (6.40), (6.41), (6.42) i (6.43). Na przekątnej macierzy znajduje się 10 wartości wariancji.

$$[C_x] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Gdzie:

$$[A] = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_{AB}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{AC}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{AD}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{AE}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{AF}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{AC}) & \text{Var}(X_{AC}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{AD}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{AE}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{AF}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{AD}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{AD}) & \text{Var}(X_{AD}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{AE}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{AF}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{AE}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{AE}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{AE}) & \text{Var}(X_{AE}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{AF}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{AF}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{AF}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{AF}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{AF}) & \text{Var}(X_{AF}) \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{AC}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{AD}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{AE}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{AF}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{FG}) \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{AB}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{BC}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{BC}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{CD}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{DE}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{EF}) \\ \text{Cov}(X_{AB}, X_{FG}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{FG}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{FG}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{FG}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{FG}) \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_{BC}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{CD}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{BC}, X_{CD}) & \text{Var}(X_{CD}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{BC}, X_{DE}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{DE}) & \text{Var}(X_{DE}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{BC}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{EF}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{EF}) & \text{Var}(X_{EF}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{FG}) \\ \text{Cov}(X_{BC}, X_{FG}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{FG}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{FG}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{FG}) & \text{Var}(X_{FG}) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Macierz kowariancji  $[C_X]$  jest symetryczna i dodatnio określona. Symetria i dodatnia określoność dotyczy także mechanizmu niesymetrycznego. Jednakże w związku z większą liczbą linii poślizgu rozmiar macierzy kowariancji jest dwukrotnie większy. Dla niesymetrycznego mechanizmu 6-blokowego całkowita liczba sztywnych bloków to 11, natomiast liczba linii poślizgu to 20, zatem rozmiar macierzy kowariancji to 20 x 20. Współczynniki macierzy kowariancji dla przypadku niesymetrycznego oblicza się dokładnie jak przedstawiono wyżej, z tą różnicą, że pojawiają się nowe kowariancje pomiędzy liniami znajdującymi się po dwóch stronach mechanizmu zniszczenia (patrz rysunek 6.15). Ich postać może być także wyznaczona poprzez odpowiednie podstawienie wartości współrzędnych do powyższych wyrażeń. W związku z większą odległością linii poślizgu pomiędzy lewą a prawą stroną mechanizmu, wartości kowariancji pomiędzy nimi będą miały generalnie mniejsze wartości. Postać macierzy kowariancji dla przypadku niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia dla  $n = 6$  prezentują równania (6.44), (6.45), (6.46), (6.47) oraz (6.48).



(6.44)

$$[C_X] = \begin{bmatrix} A & B & I & J \\ C & D & K & L \\ M & N & E & F \\ O & P & G & H \end{bmatrix}$$

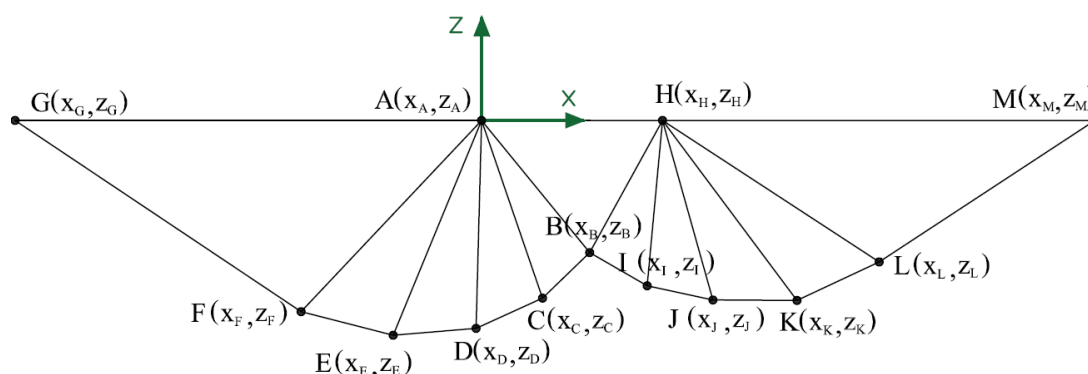
Gdzie macierze  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$ ,  $[D]$  są identyczne jak dla mechanizmu symetrycznego. Macierze  $[E]$ ,  $[F]$ ,  $[G]$ ,  $[H]$  mają analogiczną reprezentację jak macierze  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$ ,  $[D]$ , jednak odnoszą się do prawej strony mechanizmu zniszczenia. Macierze  $[I]$ ,  $[J]$ ,  $[K]$ ,  $[L]$  opisują kowariancje pomiędzy liniami znajdującymi się po dwóch stronach mechanizmu zniszczenia i w związku z symetrią macierzy kowariancji  $[C_X]$  macierze  $[M]$ ,  $[N]$ ,  $[O]$ ,  $[P]$  mogą być wyznaczone wprost z macierzy  $[I]$ ,  $[J]$ ,  $[K]$ ,  $[L]$ . Poniżej w równaniach (6.45), (6.46), (6.47) oraz (6.48) przedstawiono postacie macierzy  $[I]$ ,  $[J]$ ,  $[K]$  oraz  $[L]$ .

$$[I] = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{AB}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{AC}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{AD}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{AE}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{AF}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{HL}) \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{AB}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{AB}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{AC}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{AC}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{AD}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{AD}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{AE}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{AE}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{AF}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{AF}, X_{LM}) \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{BC}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{CD}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{DE}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{EF}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{HL}) \\ \text{Cov}(X_{FG}, X_{HB}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{HI}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{HJ}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{HK}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{HL}) \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{BC}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{BC}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{CD}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{CD}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{DE}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{DE}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{EF}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{EF}, X_{LM}) \\ \text{Cov}(X_{FG}, X_{BI}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{IJ}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{JK}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{KL}) & \text{Cov}(X_{FG}, X_{LM}) \end{bmatrix} \quad (6.48)$$



Rysunek 6.15. Konwencja oznaczeń linii poślizgu.

#### 6.3.4. Generowanie wartości parametrów podłoża w oparciu o macierz kowariancji - algorytm

Zgodnie z rozdziałem 5, opierając się na wygenerowanych niezależnie wartościach kąta tarcia wewnętrznego i spójności wprost z wyjściowych charakterystyk probabilistycznych dla rozpatrywanej warstwy gruntu, wyznacza się optymalną geometrię (poprzez procedurę optymalizacyjną). Na podstawie geometrii wyznacza się macierz kowariancji. Celem niniejszego rozdziału jest podanie algorytmu pozwalającego wyznaczyć nowe wartości parametrów wytrzymałościowych po procesie uśredniania. We wcześniejszej pracy autora (Puła i Chwała, 2015) zaproponowano taki algorytm dla mechanizmu Prandtla. Jednakże zastosowanie go do niniejszego zagadnienia wymaga jego dostosowania. Dostosowana postać algorytmu do zagadnienia mechanizmu wieloblokowego przedstawiona jest poniżej; na jej podstawie otrzymuje się wartości kąta tarcia wewnętrznego ( $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{2n-2}$ ) oraz spójności ( $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{2n-2}$ ) skorelowane wzajemnie macierzą kowariancji (której wyznaczeniu poświęcony był poprzedni rozdział).

Poniżej przedstawiono opracowany algorytm.

**Krok 1.** Punktem startowym są wyjściowe charakterystyki probabilistyczne (patrz tabele 8.1 i 8.2) dla stacjonarnych lognormalnych pól losowych opisujących kąt tarcia wewnętrznego  $\varphi$  oraz spójność  $c$ . Oznaczmy ich wartości oczekiwane i odchylenia standardowe przez  $\mu_X$  oraz  $\sigma_X$  (gdzie  $X$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ ).

**Krok 2.** Na podstawie równania (6.49) oraz (6.50) oraz  $\mu_X$  i  $\sigma_X$  wyznacza się wartość oczekiwaną  $\mu_Y$  i wariancję  $\sigma_Y^2$  dla podstawowego rozkładu lognormalnego  $Y$ .

$$\sigma_Y^2 = \ln \left( 1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \right) \quad (6.49)$$

$$\mu_Y = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \quad (6.50)$$

**Krok 3.** W oparciu o  $\sigma_Y$  i  $\mu_Y$  generuje się wektor normalny  $\mathbf{Y}_\varphi = (Y_{\varphi 1}, Y_{\varphi 2}, \dots, Y_{\varphi(2n-2)})$  oraz  $\mathbf{Y}_c = (Y_{c1}, Y_{c2}, \dots, Y_{c(2n-2)})$  dla symetrycznego mechanizmu zniszczenia, lub  $\mathbf{Y}_\varphi = (Y_{\varphi 1}, Y_{\varphi 2}, \dots, Y_{\varphi(4n-4)})$  oraz  $\mathbf{Y}_c = (Y_{c1}, Y_{c2}, \dots, Y_{c(4n-4)})$  dla mechanizmu niesymetrycznego, wykorzystując generator liczb pseudolosowych w taki sposób, że  $EY_{\varphi i} = \mu_{Y_\varphi}$ ,  $Var(Y_{\varphi i}) = \sigma_{Y_\varphi}^2$ ,  $EY_{ci} = \mu_{Y_c}$  oraz  $Var(Y_{ci}) = \sigma_{Y_c}^2$  dla  $i = 1, \dots, 2n-2$  (lub  $i = 1, \dots, 4n-4$ , dla mechanizmu niesymetrycznego), gdzie współrzędne wektorów  $\mathbf{Y}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Y}_c$  są stochastycznie niezależne.

**Krok 4.** Współrzędne wektorów  $\mathbf{Y}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Y}_c$  są przekształcane do rozkładu lognormalnego poprzez następującą transformację

$$X_{\varphi i} = \exp(Y_{\varphi i}) \quad (6.51)$$

$$X_{ci} = \exp(Y_{ci}) \quad (6.52)$$

Gdzie  $i = 1, \dots, 2n-2$  (lub  $i = 1, \dots, 4n-4$  dla mechanizmu niesymetrycznego). Współrzędne wektorów  $\mathbf{X}_\varphi$  oraz  $\mathbf{X}_c$  są początkowymi parametrami wytrzymałościowymi podłoża gruntowego z Kroku 1 z rozdziału 5.

**Krok 5.** W oparciu o algorytm przedstawiony w rozdziale 6.3.2 wyznacza się optymalną geometrię zniszczenia dla parametrów  $\mathbf{X}_\varphi$  oraz  $\mathbf{X}_c$ .

**Krok 6.** Zgodnie z rozdziałem 6.3.3 wyznacza się macierz kowariancji  $[C_X]$  (równanie (6.39) dla mechanizmu symetrycznego i (6.44) dla niesymetrycznego), gdzie  $X$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ .

**Krok 7.** Na podstawie macierzy kowariancji  $[C_X]$  wyznacza się macierz współczynników korelacji:

$$[r_X(i, j)] = \frac{[C_X(i, j)]}{\sqrt{[C_X(i, i)][C_X(j, j)]}} \quad (6.53)$$

Gdzie  $i = 1, \dots, 2n-2$  dla mechanizmu symetrycznego, lub  $i = 1, \dots, 4n-4$  dla mechanizmu niesymetrycznego.

**Krok 8.** Macierz  $[r_X]$  transformuje się do odpowiadającej jej macierzy  $[r_Y]$ , która odpowiada podstawowemu rozkładowi normalnemu względem  $X$ . Transformacja odbywa się zgodnie z równaniem (6.54) (patrz Fenton i Griffiths, 2008):

$$[r_Y(i, j)] = \frac{\ln(1 + [r_X(i, j)]v_{X_i}v_{X_j})}{\sqrt{\ln(1 + v_{X_i}^2) \ln(1 + v_{X_j}^2)}} \quad (6.54)$$

Gdzie:

$$v_{X_i} = \frac{\sqrt{[C_X(i, i)]}}{\mu_X} \quad (6.55)$$

**Krok 9.** Macierz korelacji  $[r_Y]$  przekształca się do macierzy kowariancji  $[C_Y]$ , odpowiadającej podstawowemu rozkładowi normalnemu względem  $X$ .

$$[C_Y(i, j)] = [r_Y(i, j)]\sqrt{\text{Var}(Y_i)\text{Var}(Y_j)} \quad (6.56)$$

Gdzie:

$$\text{Var}(Y_i) = \ln\left(1 + \frac{[C_X(i, i)]}{\mu_X^2}\right) \quad (6.57)$$

Gdzie  $i = 1, \dots, 2n-2$  dla mechanizmu symetrycznego lub  $i = 1, \dots, 4n-4$  dla mechanizmu niesymetrycznego.

**Krok 10.** Macierz kowariancji  $[C_Y]$  rozkłada się na dwie macierze zgodnie z dekompozycją Choleskiego (Horn i Johnson, 1985):

$$[C_Y] = [L][L]^T \quad (6.58)$$

Gdzie  $[L]$  jest macierzą dolnotrójkątną z rzeczywistymi dodatnimi wartościami na przekątnej. Jednoznaczność rozkładu Choleskiego wynika z faktu, że macierz  $[C_Y]$  jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona. Algorytm rozkładu Choleskiego można znaleźć np. w Horn i in. (1985).  $Y$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ , w związku z tym otrzymuje się dwie macierze dla  $\varphi$  ( $[L_\varphi]$ ) oraz dla  $c$  ( $[L_c]$ ).

**Krok 11.** Wektory otrzymane w Kroku 3, tj.  $Y_\varphi$  oraz  $Y_c$  poddaje się procedurze standaryzacji:

$$Y_{\varphi i}^* = \frac{Y_{\varphi i} - \mu_{Y_\varphi}}{\sigma_{Y_\varphi}}, \quad i = 1, \dots, 2n - 2 \quad (6.59)$$

$$Y_{c i}^* = \frac{Y_{c i} - \mu_{Y_c}}{\sigma_{Y_c}}, \quad i = 1, \dots, 2n - 2 \quad (6.60)$$

Gdzie w przypadku mechanizmu niesymetrycznego  $i = 1, \dots, 4n - 4$ .

Wektory  $Y_\varphi^*$  oraz  $Y_c^*$  mają niezależne współrzędne normalne o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji.

**Krok 12.** Stosuje się następujące twierdzenie (Fenton i Griffiths, 2008): jeśli  $[C]$  jest dodatnio określoną macierzą  $n \times n$ ,  $U$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem, którego współrzędne są niezależnymi gaussowskimi zmiennymi losowymi, a  $[L]$  jest macierzą dolnotrójkątną, taką że  $[L][L]^T = [C]$ , wtedy wektor losowy zdefiniowany jako  $Z = [L][U]$  jest gaussowskim wektorem, którego współrzędne są skorelowane macierzą  $[C]$ . Zgodnie z twierdzeniem wyznacza się nowe wektory  $Z_\varphi$  oraz  $Z_c$ .

$$Z_\varphi = [L_\varphi]Y_\varphi^* \quad (6.61)$$

$$\mathbf{Z}_c = [L_c] \mathbf{Y}_c^* \quad (6.62)$$

Gdzie  $[L_\varphi]$  oraz  $[L_c]$  otrzymano w Kroku 10. Wektory  $\mathbf{Z}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Z}_c$  mają zerowe wartości oczekiwane, natomiast ich współrzędne są skorelowane macierzami  $[C_{Y_\varphi}]$  oraz  $[C_{Y_c}]$ .

**Krok 13.** Wyznacza się wektory  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  poprzez dodanie wartości oczekiwanych  $\mathbf{Y}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Y}_c$  do współrzędnych wektorów  $\mathbf{Z}_\varphi$  and  $\mathbf{Z}_c$ .

$$P_{\varphi i} = Z_{\varphi i} + \mu_{Y_{\varphi i}} \quad (6.63)$$

$$P_{c i} = Z_{c i} + \mu_{Y_{c i}} \quad (6.64)$$

Gdzie  $i = 1, \dots, 2n-2$  dla mechanizmu symetrycznego lub  $i = 1, \dots, 4n-4$  dla mechanizmu niesymetrycznego.

Wektory  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  są wektorami o normalnych współrzędnych. Wartości oczekiwane współrzędnych wynoszą odpowiednio  $\mu_{Y_{\varphi i}}$  i  $\mu_{Y_{c i}}$ , a współrzędne są skorelowane macierzami kowariancji  $[C_{Y_\varphi}]$  oraz  $[C_{Y_c}]$ .

**Krok 14.** Współrzędne wektorów  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  są transformowane do rozkładu lognormalnego:

$$T_{\varphi i} = \exp(P_{\varphi i}), \quad i = 1, \dots, 2n - 2 \quad (6.65)$$

$$T_{c i} = \exp(P_{c i}), \quad i = 1, \dots, 2n - 2 \quad (6.66)$$

Gdzie  $i = 1, \dots, 2n-2$  dla mechanizmu symetrycznego lub  $i = 1, \dots, 4n-4$  dla mechanizmu niesymetrycznego.

**Krok 15.** Współrzędne wektorów  $T_{\varphi i}$  oraz  $T_{c i}$ , będące rezultatem procedury uśredniania, są stosowane w algorytmie opisanym w rozdziale 5 w sposób następujący:  $\bar{\varphi}_1 = T_{\varphi 1}, \dots, \bar{\varphi}_{2n-2} = T_{\varphi(2n-2)}$  oraz  $\bar{c}_1 = T_{c1}, \dots, \bar{c}_{2n-2} = T_{c(2n-2)}$  dla symetrycznego mechanizmu zniszczenia oraz  $\bar{\varphi}_1 = T_{\varphi 1}, \dots, \bar{\varphi}_{4n-4} = T_{\varphi(4n-4)}$  i  $\bar{c}_1 = T_{c1}, \dots, \bar{c}_{4n-4} = T_{c(4n-4)}$  dla niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia.

Rozkład Choleskiego (Krok 10) jest możliwy wyłącznie dla macierzy symetrycznych i dodatnio określonych. Teoretycznie otrzymywane macierze kowariancji są dodatnio określone, co wynika z faktu, że funkcja kowariancji pola losowego jest dodatnio

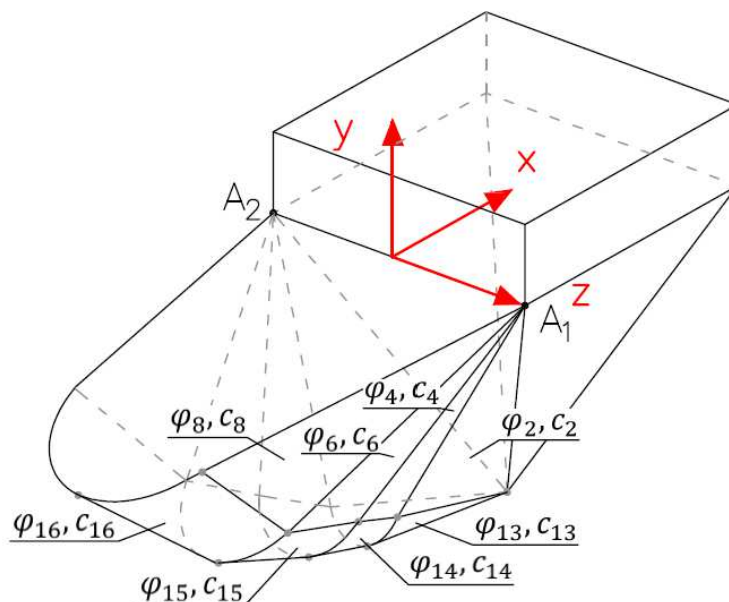
określona. Jednakże wskutek numerycznej natury prowadzonych obliczeń (skończona precyzja), w przypadku niektórych symulacji otrzymuje się macierze, które nie są dodatnio określone. W większości zidentyfikowanych przypadków ujemne wartości własne macierzy są bliskie zeru i przynajmniej 2 rzędy wielkości mniejsze od dodatnich wartości własnych (porównując wartości bezwzględne). Jako rozwiązanie tego problemu numerycznego autor proponuje procedurę, która nieznacznie modyfikuje macierze kowariancji tak, aby umożliwić przeprowadzenie rozkładu Choleskiego. Zaproponowaną procedurę przedstawiono w załączniku F.

## 6.4. Uśrednienia lokalne dla wieloblokowego mechanizmu trójwymiarowego

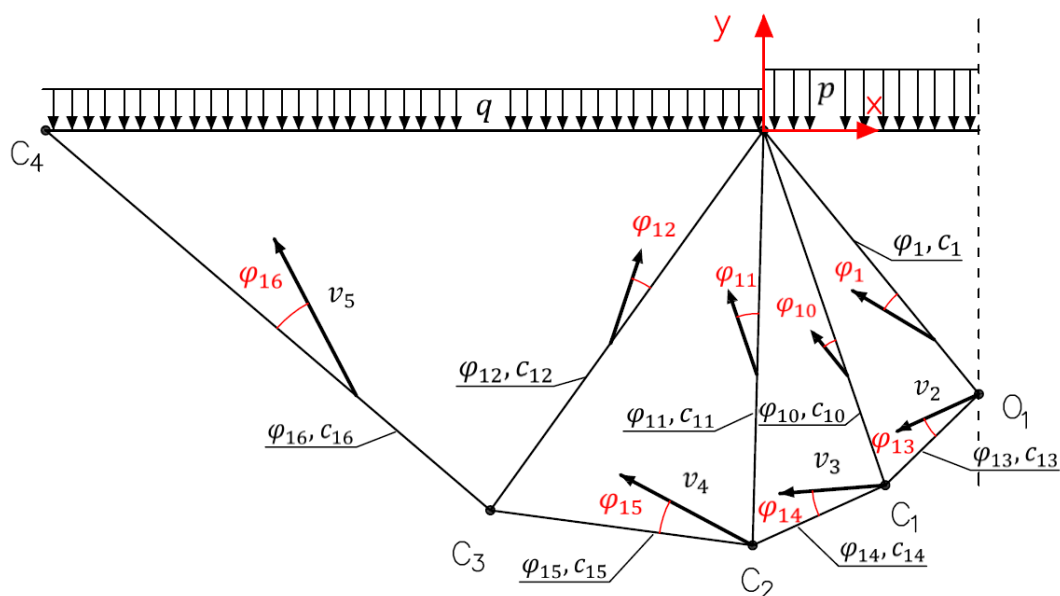
### 6.4.1. Dostosowanie mechanizmu trójwymiarowego na potrzeby oceny losowej nośności podłoża

Trójwymiarowa geometria zniszczenia gruntu pod stopą fundamentową, przyjęta w niniejszej rozprawie, została omówiona w rozdziale 3.3. Przedstawiono tam wyrażenie na nośność podłoża przy założeniu stałych wartości parametrów wytrzymałościowych. Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowych mechanizmów zniszczenia, chcąc uwzględnić przestrzenną zmienność parametrów wytrzymałościowych podłoża, należy zmodyfikować mechanizm zniszczenia w taki sposób, aby możliwe było przypisanie różnych wartości kąta tarcia wewnętrznego i spójności do poszczególnych powierzchni poślizgu. W związku z trójwymiarową geometrią zniszczenia oraz dwuwymiarowym polem prędkości, aby spełnić warunki kinematycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia, należy przyjąć te same wartości kąta tarcia wewnętrznego na powierzchni stożkowej i trójkątach bocznych (w obrębie jednego bloku). Jednakże w związku z relatywnie dużymi odległościami pomiędzy trójkątami bocznymi, autor zdecydował się przeprowadzić analizy numeryczne przy różnych wartościach parametrów wytrzymałościowych także w przypadku trójkątów bocznych, co narusza warunki kinematycznej dopuszczalności dla tak otrzymanego mechanizmu zniszczenia. Na rysunku 6.16 przedstawiono przyjętą konwencję oznaczeń parametrów wytrzymałościowych; należy zwrócić uwagę, że indeksy są przypisane w identyczny sposób, jak w przypadku oznaczeń powierzchni poślizgu z rysunku 3.14. Na rysunku

6.17 przedstawiono przekrój przez mechanizm zniszczenia pokazujący prędkości pomiędzy poszczególnymi blokami.



Rysunek 6.16. Przypisanie wartości parametrów wytrzymałościowych do powierzchni poślizgu. Przyjęto identyczne indeksy jak na rysunku 3.14. Aby zachować czytelność rysunku, przedstawiono jedynie wybrane parametry.



Rysunek 6.17. Przekrój w płaszczyźnie  $xy$  ( $z=0$ ) przez 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia. Każdej powierzchni poślizgu odpowiada indywidualna wartość parametrów wytrzymałościowych. Szczegółowy opis w tekście.

Na podstawie wyrażenia na nośność podłoża otrzymaną przy stałych wartościach parametrów wytrzymałościowych (równanie (3.13)) wyprowadzono wyrażenie (6.67) w przypadku zastosowania różnych wartości  $c$  i  $\varphi$  na powierzchniach poślizgu.



$$\begin{aligned}
 cN_c = 4 & \left( c_1 \cos \varphi_1 v_{12} s_1 + \sum_{i=1}^{n-2} c_{2n-1+i} \cos \varphi_{2n-1+i} v_{(i+1)(i+2)} s_{2n-1+i} \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} c_{3n-3+i} \cos \varphi_{3n-3+i} v_{i+1} s_{3n-3+i} \\
 & \left. + \sum_{i=1}^{n-1} c_{2i} \cos \varphi_{2i} v_{i+1} s_{2i} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{2i+1} \cos \varphi_{2i+1} v_{i+1} s_{2i+1} \right)
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

$$qN_q = 4q s_{4n-3} v_n$$

$$\frac{1}{2} \gamma b N_\gamma = g_1 v_{1|} + 4 \sum_{i=2}^n g_i v_{i|}$$

W celu otrzymania wyrażenia odpowiadającego określonej liczbie sztywnych bloków, należy w równaniu (6.67) podstawić właściwą wartość  $n$ . W przypadku  $n = 5$  otrzymuje się następujące wyrażenie na nośność (6.68), w którym trzy składniki z (6.68) są sumowane zgodnie z równaniem (2.9).

$$\begin{aligned}
 p_{n=5} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2} \gamma b N_\gamma = & \tag{6.68} \\
 = 4 & \left( c_1 \cos \varphi_1 v_{12} s_1 + \sum_{i=1}^3 c_{9+i} \cos \varphi_{9+i} v_{(i+1)(i+2)} s_{9+i} \right. \\
 & + \sum_{i=1}^4 c_{12+i} \cos \varphi_{12+i} v_{i+1} s_{12+i} + \sum_{i=1}^4 c_{2i} \cos \varphi_{2i} v_{i+1} s_{2i} \\
 & \left. + \sum_{i=1}^4 c_{2i+1} \cos \varphi_{2i+1} v_{i+1} s_{2i+1} \right) + 4q s_{17} v_{5|} + g_1 v_{1|} \\
 & + 4 \sum_{i=2}^5 g_i v_{i|}
 \end{aligned}$$

#### 6.4.2. Procedura optymalizacyjna oparta na metodzie wyżarzania

Podobnie jak w przypadku mechanizmu dwuwymiarowego, w celu optymalizacji geometrii trójwymiarowej proponuje się procedurę optymalizacyjną dedykowaną przypadkowi trójwymiarowemu, która jest oparta o metodę wyżarzania. Procedura w ogólności jest analogiczna do tej opracowanej dla mechanizmów płaskich, występują jednak zasadnicze różnice. Przede wszystkim, z uwagi na zredukowanie liczby symulacji zdecydowano się wyznaczyć kilka punktów startowych (w zależności od wartości kąta tarcia wewnętrznego). Ponadto, w przypadku 5-blokowego mechanizmu zniszczenia liczba parametrów, względem których optymalizuje się geometrię, jest mniejsza niż w przypadku 6-blokowego mechanizmu zniszczenia i wynosi 6. Ogólny opis podejścia właściwego dla metody wyżarzania przedstawiono w rozdziale 6.3.2, w związku z czym w niniejszym rozdziale przedstawiono wyłącznie postać opracowanego algorytmu. Podobnie jak poprzednio, parametrami kontrolującymi proces symulacyjny są: tzw. aktualna temperatura  $T_{cur}$ , parametr  $\alpha$ , liczba symulacji  $z$  oraz tzw. temperatura minimalna  $T_{min}$ . Liczba sztywnych bloków  $n$  w niniejszym rozdziale dotyczy mechanizmu trójwymiarowego i została zdefiniowana w poprzednim rozdziale.

**Krok I.** Wybór początkowego zbioru parametrów będącego początkową geometrią zniszczenia (kąty  $\beta_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  oraz kąt odpowiadający za nachylenie pierwszej powierzchni stożkowej  $\alpha_0$ ). Oznaczenie wybranego zbioru parametrów jako aktualnej geometrii zniszczenia:  $\beta_{ci}$  oraz  $\alpha_c$ . W praktyce  $\beta_{0i}$  i  $\alpha_c$  powinny być wybrane tak, aby zapewniona była kinematyczna dopuszczalność mechanizmu niszczenia. W związku z potrzebą ograniczenia czasu obliczeń, w drodze analiz dobrano pięć wartości punktów startowych (więcej informacji na ten temat zawarto na końcu niniejszego rozdziału).

**Krok II.** Wyznaczenie wartości nośności dla parametrów z Kroku I (wyznaczenie wartości funkcji celu  $p$  z równań (6.67). Oznaczenie  $p$  przez  $p_c$  (aktualna wartość funkcji celu).

**Krok III.** Przypisanie wartości parametrom  $z$ ,  $T_{min}$ ,  $T_{cur}$  oraz  $\alpha$ . Przejście do Kroku V.

**Krok IV.** Pętla 1: Dopóki  $T_{cur} > T_{min}$ , przejdź do Kroku V; w przeciwnym wypadku przejdź do Kroku X.

**Krok V.** Pętla 2: Powtórz Kroki VI, VII i VIII z razy.

**Krok VI.** Wygenerowanie tzw. sąsiadującego zbioru parametrów  $\beta_i$  oraz  $\alpha$  poprzez niewielką modyfikację aktualnej geometrii zniszczenia  $\beta_{ci}$  oraz  $\alpha_c$  (wcześniejsze doświadczenia w używaniu metody wyzarzania wskazują, że wartości sąsiadujących zbiorów nie powinny się znacznie różnić między sobą). W oparciu o rysunek 3.7 otrzymujemy  $\sum \beta_i = 180^\circ$  - co znaczy, że dla sąsiadującego zbioru parametrów opisujących geometrię zniszczenia, ten warunek musi być także spełniony. Z tego powodu w zaproponowanej formule wybiera się losowo dwie wartości  $\beta^1$  oraz  $\beta^2$  z  $n$  wartości  $\beta_{ci}$ . Wybrane wartości modyfikuje się w sposób następujący:  $\beta_{mod}^1 = \beta^1 - s$  oraz  $\beta_{mod}^2 = \beta^2 + s$ , gdzie  $s$  jest liczbą losową wygenerowaną z rozkładu jednostajnego  $U[0.0^\circ, 0.2^\circ]$ . Wskutek tak zaproponowanej modyfikacji, suma kątów  $\beta$  pozostaje stała w czasie całego procesu symulacyjnego. Następnie modyfikuje się wartość  $\alpha_c$ . To, czy wartość kąta będzie zmieniana, zależy od spełnienia warunku  $U[0,1] > 0.5$ ; jeśli jest spełniony, otrzymuje się  $\alpha_{mod} = \alpha_c + U[-0.2^\circ, 0.2^\circ]$ ; w przeciwnym wypadku  $\alpha_{mod} = \alpha_c$ . Oznaczenie zmodyfikowanych wartości przez  $\beta_i$  oraz  $\alpha$ .

**Krok VII.** Wyznaczenie wartości funkcji celu  $p_{new}$  dla nowego zestawu parametrów definiujących geometrię zniszczenia  $\beta_i$  oraz  $\alpha$ .

**Krok VIII.** Porównanie dwóch wartości funkcji celu  $p_c$  oraz  $p_{new}$ . Jeśli  $p_{new} < p_c$ , przypisz nową wartość  $p_c = p_{new}$ ; w przeciwnym wypadku, wygeneruj liczbę losową  $u$  z rozkładu jednostajnego  $U[0,1]$  i porównaj ją z wartością  $P_a$  (patrz równanie (5.1)). Jeśli  $P_a > u$ , przypisz wartość  $p_c = p_{new}$ ; w przeciwnym wypadku pozostaw wartość  $p_c$  bez zmian. Powyższa procedura zawsze przyjmuje lepszą wartość (mniejsza wartość  $p_{new}$ ), jednakże gorsze rozwiązanie (większa wartość  $p_{new}$ ) może zostać przyjęte, gdy spełniony będzie warunek  $P_a > u$ . Jeśli doszło do zmian, przypisuje się nowe parametry opisujące geometrię zniszczenia jako aktualną geometrię  $\beta_{ci}$  oraz  $\alpha_c$ .

**Krok IX.** Po powtórzeniu Kroków VI, VII i VIII z razy, zredukuj wartość aktualnej temperatury w sposób następujący:  $T_{cur} = \alpha T_{cur}$  (tutaj  $\alpha$  jest wartością parametru kontrolującego proces symulacyjny, a nie kątem decydującym o nachyleniu pierwszego

stożka; dla mechanizmu trójwymiarowego  $\alpha = 0.1$ ). Koniec Pętli 2. Przejdź do Kroku IV.

**Krok X.** Koniec Pętli 2. Zwróć wartość  $p_c$  jako wartość nośności podłoża oraz aktualną geometrię  $\beta_{ci}$  i  $\alpha_c$  jako optymalną geometrię zniszczenia. Koniec procedury.

W przypadku trójwymiarowej geometrii zniszczenia, w związku występującymi tam powierzchniami poślizgu (a nie liniami), wyrażenia całkowe na pola powierzchni oraz na współczynniki macierzy kowariancji będą miały postać całek podwójnych lub czterokrotnych (patrz rozdział 6). Powyższe prowadzi do znacznego zwiększenia czasu obliczeń, w związku z czym ograniczenie liczby symulacji jest istotnym elementem z punktu widzenia efektywności procedury. Aby móc zredukować ich liczbę, autor zdecydował się użyć kilku różnych punktów startowych. Na podstawie testów numerycznych ustalono pięć punktów startowych; zostały one zestawione w tabeli 6.4, gdzie podano wartości początkowe parametrów opisujących geometrię zniszczenia (kąty  $\beta_{0i}$  dla  $i = 1, \dots, n-1$  oraz kąt  $\alpha_0$ ). W sąsiedztwie punktów granicznych przeprowadzono obliczenia kontrolne w celu sprawdzenia, czy otrzymane wartości nośności podłoża i wartości parametrów opisujących geometrię zniszczenia są bliskie dla nieznacznie mniejszych i większych (od wartości granicznej) wartości kątów tarcia (np. dla wartości granicznej  $\varphi = 22^\circ$  rozpatrzono  $\varphi = 21.99^\circ$  i  $\varphi = 22.01^\circ$ ). Wyniki zestawiono w tabeli 6.5; otrzymane wartości nośności podłoża i geometrii zniszczenia są bardzo bliskie po dwóch stronach założonych przedziałów. Przykładowe wyniki przedstawione w tabeli 6.5 otrzymano przy założeniu  $b = 1.0$  m,  $c = 20$  kPa,  $\gamma = 0$  oraz  $q = 9.58$  kPa. Zgodność wartości nośności jest także zachowana przy  $\gamma \neq 0$ .

Tabela. 6.4. Punkty startowe z Kroku I w zależności od kąta tarcia wewnętrznego.

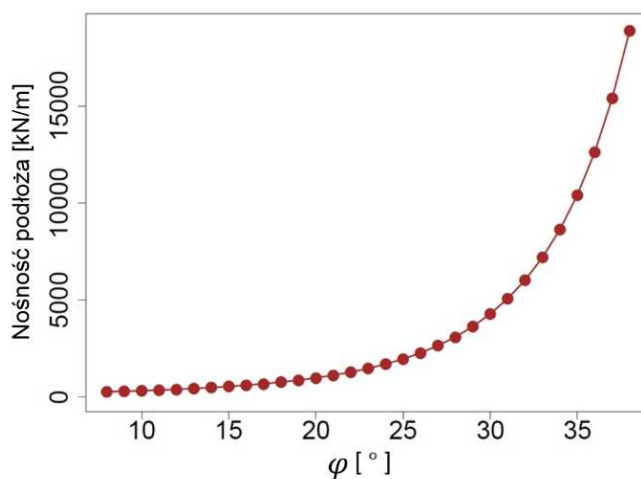
Kąt tarcia wewnętrznego	$\varphi \in (0, 22^\circ]$	$\varphi \in (22^\circ, 27^\circ]$	$\varphi \in (27^\circ, 32^\circ]$	$\varphi \in (32^\circ, 37^\circ]$	$\varphi > 37^\circ$
$\beta_0$ [°]	42°	45°	48°	53°	56°
$\beta_1$ [°]	43°	43°	43°	40°	38°
$\beta_2$ [°]	25°	25°	25°	25°	25°
$\beta_3$ [°]	25°	25°	25°	25°	25°
$\beta_4$ [°]	45°	42°	39°	37°	36°
$\alpha$ [°]	45°	65°	75°	75°	86°

Tabela. 6.5. Wartości nośności i geometrie zniszczenia otrzymane na granicach przedziałów kąta tarcia wewnętrznego podanych w tabeli 6.4.

	$\varphi = 21.99^\circ$	$\varphi = 22.01^\circ$	Różnica [%]	$\varphi = 26.99^\circ$	$\varphi = 27.01^\circ$	Różnica [%]
$\beta_0$ [°]	42.79	42.80	0.023	46.74	46.75	0.021
$\beta_1$ [°]	47.33	47.30	-0.063	44.60	44.60	0.0
$\beta_2$ [°]	23.91	23.94	0.13	24.19	24.23	0.17
$\beta_3$ [°]	23.92	23.93	0.042	24.22	24.21	-0.041
$\beta_4$ [°]	42.05	42.03	-0.048	40.24	40.21	-0.075
$\alpha$ [°]	51.04	51.11	0.14	61.58	61.64	0.097
$p$ [kPa]	1148.98	1151.94	0.26	2272.29	2278.86	0.29

	$\varphi = 31.99^\circ$	$\varphi = 32.01^\circ$	Różnica [%]	$\varphi = 36.99^\circ$	$\varphi = 37.01^\circ$	Różnica [%]
$\beta_0$ [°]	50.79	50.82	0.059	54.80	54.84	0.073
$\beta_1$ [°]	41.83	41.82	-0.023	39.15	39.21	0.015
$\beta_2$ [°]	24.42	24.44	0.082	24.65	24.58	-0.28
$\beta_3$ [°]	24.44	24.43	-0.041	24.60	24.56	-0.16
$\beta_4$ [°]	38.52	38.50	-0.052	36.79	36.81	0.054
$\alpha$ [°]	71.66	71.71	0.07	80.34	80.34	0.0
$p$ [kPa]	4883.21	4899.06	0.32	11550.60	11593.00	0.37

Jednym z podstawowych wymogów odnośnie procedury optymalizacyjnej jest ciągłość uzyskanych wartości nośności podłoża w zależności od kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$ . Na rysunku 6.18 przedstawiono nośności otrzymane po optymalizacji przy założeniu  $b = 1.0$  m,  $c = 20$  kPa,  $\gamma = 18.2$  oraz  $q = 9.58$  kPa w przypadku różnych wartości kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$ . Ciągłość otrzymanych rezultatów jest wyraźnie widoczna.

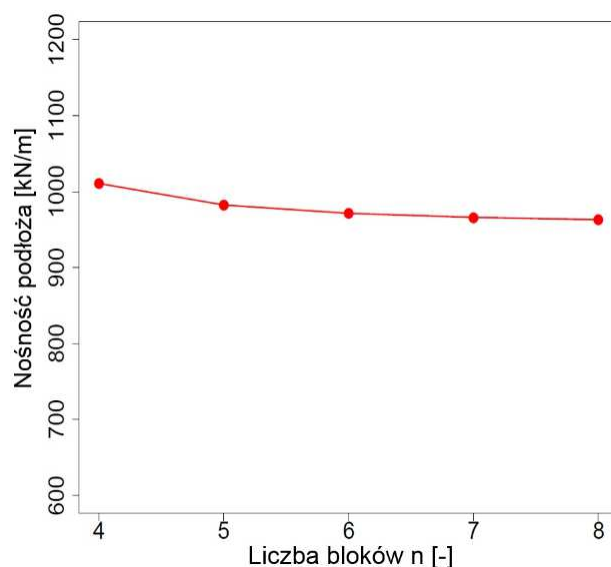


Rysunek 6.18. Nośność podłoża w funkcji kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$ ; rezultaty otrzymano w przypadku 5-blokowego mechanizmu trójwymiarowego przy założeniu  $b = 1.0$  m,  $c = 20$  kPa,  $\gamma = 18.2$  oraz  $q = 9.58$  kPa.

W analogii do testów przeprowadzonych przy założeniu mechanizmu wieloblokowego (patrz rozdział 6), przeprowadzono testy na czułość procedury optymalizacyjnej na

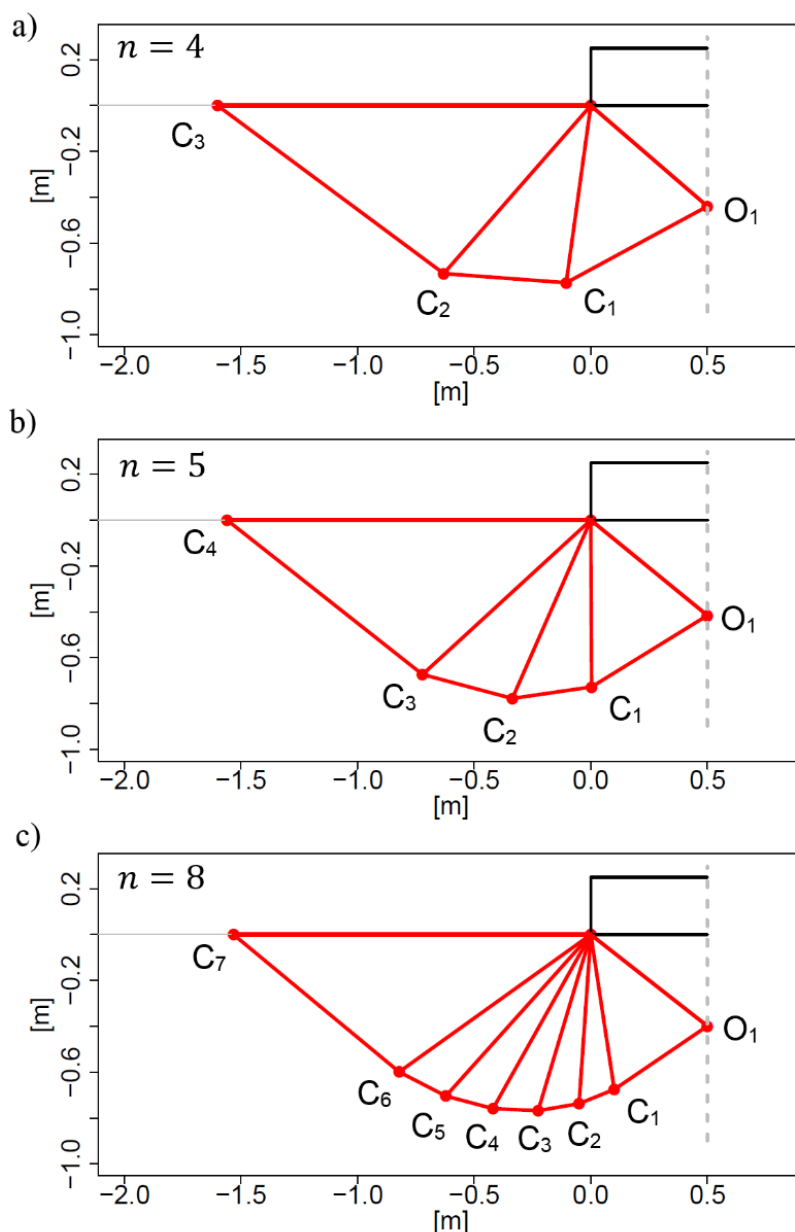
wartość *seed*, otrzymując podobne rezultaty, jak w przypadku mechanizmu wieloblokowego oraz konkluzję, że na wyniki otrzymane przez zastosowanie procedury optymalizacyjnej nie wpływa wartość *seed*.

Na rysunku 6.19 przedstawiono wartości nośności otrzymane w przypadku różnej liczby sztywnych bloków; podobnie jak dla mechanizmu dwuwymiarowego, otrzymana wartość nośności spada wraz ze wzrostem liczby sztywnych bloków tworzących mechanizm zniszczenia. Rezultaty przedstawione na rysunku 6.19 otrzymano dla  $b = 1.0$  m,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $c = 20$  kPa,  $\gamma = 18.2$  kN/m<sup>3</sup> oraz  $q = 9.58$  kPa. Otrzymana tendencja spadkowa staje się coraz słabsza w miarę zwiększania liczby bloków; do dalszych analiz autor przyjął mechanizm 5-blokowy, z uwagi na niewielką poprawę oszacowania nośności przy większej liczbie bloków (kosztem znacznego zwiększenia rozmiaru zadania). Jak przedstawiono na rysunku 6.19, mechanizm 5-blokowy daje niższe oszacowanie o 3% w stosunku do 4-blokowego, natomiast mechanizm 8-blokowy w stosunku do 5-blokowego obniża oszacowanie nośności o około 2%. Wybór mechanizmu 5-blokowego podyktowany był przede wszystkim czasem obliczeń potrzebnym na wyznaczenie macierzy kowariancji. Zaznaczmy, że w przypadku mechanizmu 5-blokowego macierz kowariancji ma wymiar 16 x 16 (256 współczynników), natomiast w przypadku 6-blokowego jest to odpowiednio 20 x 20 i 400 współczynników.



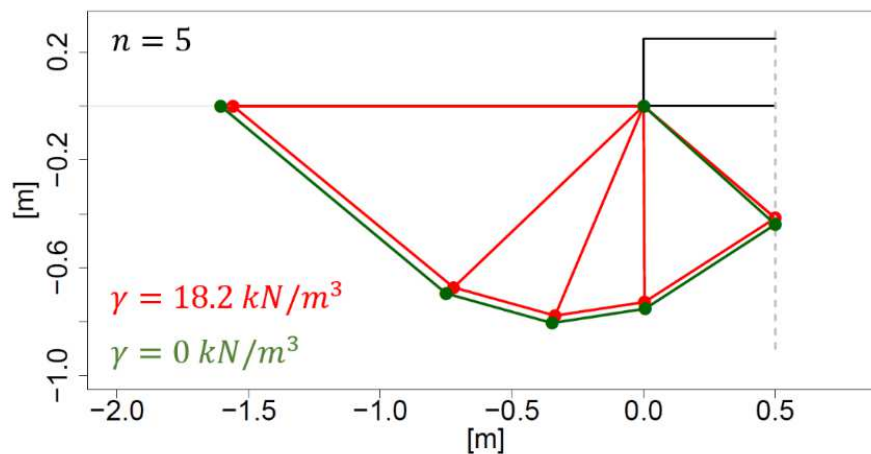
Rysunek 6.19. Nośność podłoża w przypadku trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia w zależności od liczby bloków. Uwaga: oś pionowa rozpoczyna się od 600 kN/m.

Optymalne geometrie mechanizmu 4-blokowego, 5-blokowego i 8-blokowego przedstawia rysunek 6.20, na którym można zaobserwować interesujące zjawisko, odróżniające mechanizm trójwymiarowy od dwuwymiarowego; mianowicie na podstawie rysunku 6.20 widać, że strefa ścinania poprzedzona jest dwoma sztywnymi blokami, w przeciwieństwie do mechanizmu dwuwymiarowego, gdzie rozpoczyna się bezpośrednio po pierwszym bloku. Przedstawione geometrie zniszczenia odpowiadają nośnościom z rysunku 6.19.



Rysunek 6.20. Porównanie kształtu optymalnej trójwymiarowej geometrii zniszczenia podłoża dla mechanizmu: a) 4-blokowego, b) 5-blokowego oraz c) 8-blokowego. Położenia punktów  $C_i$  można znaleźć na rysunkach 3.5 i 3.6 (w aksonometrii).

Na rysunku 6.21 przedstawiono różnice w optymalnych geometriach dla gruntu ważkiego i nieważkiego. Obliczenia wykonano dla mechanizmu 5-blokowego,  $b = 1.0$  m,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $c = 20$  kPa oraz  $q = 9.58$  kPa. Zgodnie z oczekiwaniami, w przypadku gruntu ważkiego otrzymano mniejszy rozmiar mechanizmu zniszczenia (zaznaczony kolorem czerwonym na rysunku 6.21); jednakże otrzymane różnice nie są duże w porównaniu z tymi dla mechanizmu dwuwymiarowego (por. z rysunkami 6.11 i 6.12). Mniejsze różnice w przypadku mechanizmu trójwymiarowego mogą wynikać z dwóch powodów: po pierwsze, na rysunku 6.21 przedstawiono przekrój przez mechanizm, w związku z czym otrzymane różnice w objętości gruntu są proporcjonalnie większe. Drugim powodem może być specyfika przyjętej geometrii mechanizmu trójwymiarowego, cechująca się większymi ograniczeniami z uwagi na warunek kinematycznej dopuszczalności. W związku z tym, że kształt mechanizmu jest mniej podatny (na możliwość optymalizacji), wpływ gruntu może nie być wystarczająco odzwierciedlony w geometrii zniszczenia. W związku z ustaleniem położenia powierzchni stożkowych geometria mechanizmu może być modyfikowana przez kąty  $\beta_i$ . Sytuacje przedstawione na rysunku 6.21 dotyczą wartości kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi = 20^\circ$ ; w przypadku większych wartości kąta tarcia wewnętrznego różnice w geometriach dla podłoża ważkiego i nieważkiego będą odpowiednio większe.

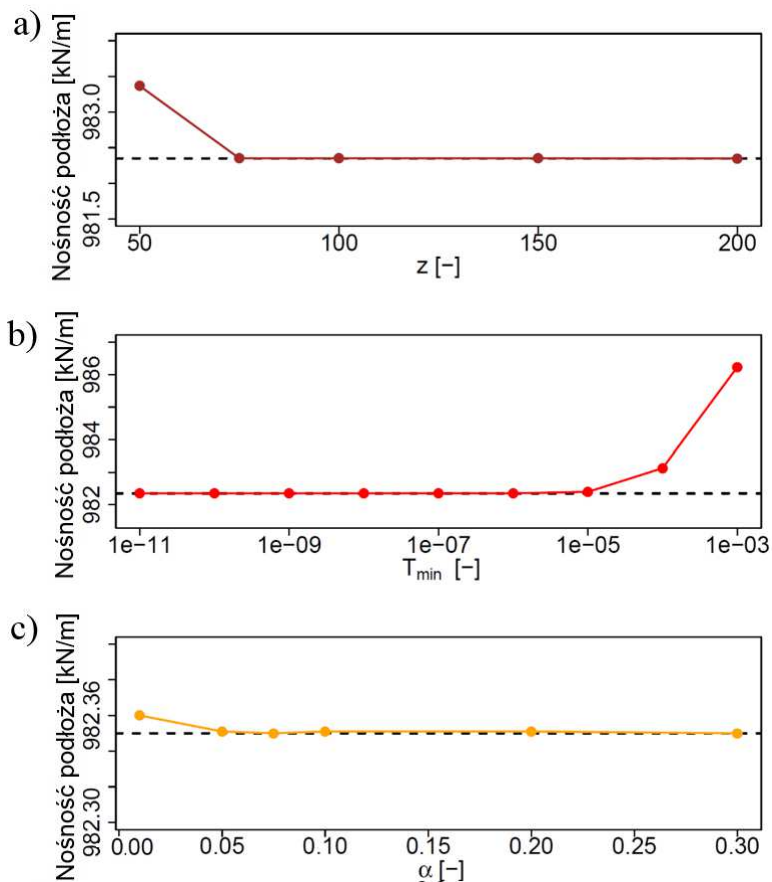


Rysunek 6.21. Różnice w optymalnych geometriach zniszczenia w przypadku podłoża nieważkiego ( $\gamma = 0$  kN/m<sup>3</sup>) oraz ważkiego ( $\gamma = 18.2$  kN/m<sup>3</sup>). Szczegóły w tekście.

Najbardziej istotnym elementem z punktu widzenia poprawnego funkcjonowania procedury optymalizacyjnej jest ustalenie wartości parametrów kontrolujących proces symulacyjny. Na rysunku 6.22, podobnie jak w przypadku mechanizmu dwuwymiarowego, przedstawiono testy czułości procedury optymalizacyjnej na wartości



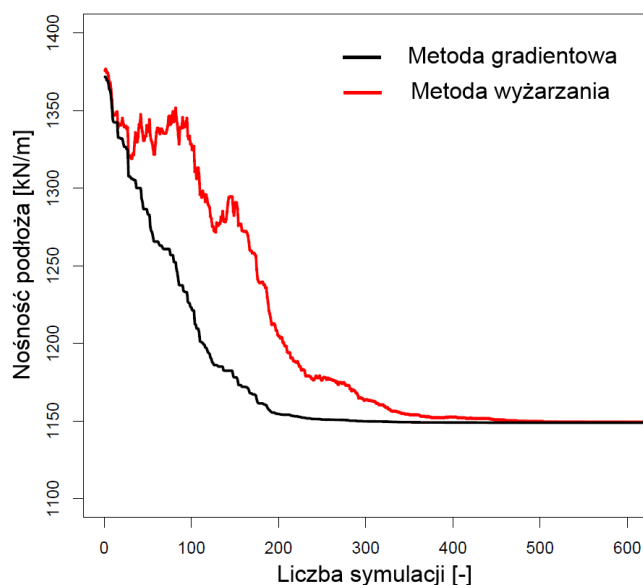
parametrów kontrolujących jej przebieg. Wszystkie testy zostały przeprowadzone przy założeniu tych samych parametrów początkowych i wartości *seed*, w związku z czym badano wpływ wyłącznie parametrów kontrolujących proces symulacyjny. Obliczenia przeprowadzono w przypadku parametrów podłoża gruntowego zawartych w rozdziale 8 w tabeli 8.1, tj. stopy kwadratowej o szerokości 1.0 m,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $c = 20$  kPa,  $\gamma = 18.2$  kN/m<sup>3</sup> oraz  $q = 9.58$  kPa. Wartość parametru  $z$  zmieniano od 50 do 200, przy stałych wartościach pozostałych parametrów tj.  $\alpha = 0.1$  oraz  $T_{min} = 10^{-8}$ . Powyżej  $z = 75$  otrzymane różnice są pomijalne. Należy zwrócić uwagę, że zakres wartości na osiach pionowych jest inny dla każdego wykresu, natomiast maksymalna szerokość to 5 kN/m. Analogicznych obserwacji można dokonać w przypadku pozostałych dwóch parametrów; wartość  $\alpha$  była zmieniana przy stałych wartościach  $T_{min} = 10^{-8}$  i  $z = 150$  oraz wpływ zmian  $T_{min}$  był badany przy stałych  $\alpha = 0.1$  oraz  $z = 150$ . Na podstawie wyników zestawionych na rysunku 6.22 można zaobserwować, że dla szerokiego zakresu wartości parametrów kontrolujących proces symulacyjny uzyskuje się takie same lub prawie takie same oszacowanie nośności podłoża. Pozwala to dobrać racjonalną ich wartość tak, aby ograniczyć czas potrzebny na obliczenia, jednocześnie nie zmniejszając dokładności. Linia przerywaną zaznaczono wartość nośności 982.35 kPa otrzymaną dla  $\alpha = 0.3$ ,  $T_{min} = 10^{-11}$  i  $z = 200$ , która była najwyższą dokładnością spośród rozpatrywanych w testach. Wartości parametrów  $\alpha$ ,  $T_{min}$  oraz  $z$  zostały dobrane w sposób konserwatywny, tak aby nie wpływały na osiąganą dokładność. Niższe wartości  $\alpha$  i  $z$  w stosunku do mechanizmu dwuwymiarowego są rezultatem znacznie mniejszej liczby parametrów, względem których prowadzi się optymalizacje oraz przyjęcia 5 punktów startowych.



Rysunek 6.22. Nośność podłoża dla trójwymiarowego 5-blokowego mechanizmu zniszczenia w zależności od parametrów  $\alpha$ ,  $T_{min}$  oraz  $z$ . Szczegółowy opis w tekście. Szarą przerywaną linią oznaczono wartość nośności otrzymaną dla  $\alpha = 0.3$ ,  $T_{min} = 10^{-11}$  i  $z = 200$ .

Przyjęcie niższych wartości  $\alpha$  i  $z$  w stosunku do mechanizmu dwuwymiarowego (znaczące ograniczenie liczby symulacji w ramach procedury optymalizacyjnej) było możliwe z uwagi na 6 parametrów, względem których prowadzono optymalizację oraz wybór 5 punktów startowych, tj. geometrii zniszczenia, od których rozpoczynał się proces optymalizacji stochastycznej. Ponadto, rozpatrywana funkcja opisująca nośność podłoża praktycznie nie ma lokalnych minimów (w zakresie rozpatrywanych wartości parametrów opisujących geometrię) i zastosowanie prostej metody gradientowej także daje satysfakcjonujące rezultaty. Jednakże, w niektórych przypadkach wartości nośności podłoża otrzymane w drodze optymalizacji geometrii zniszczenia za pomocą metody gradientowej (to znaczy przy założeniu zerowego prawdopodobieństwa akceptacji większej wartości nośności) dają wartości o kilka procent większe niż procedura oparta na metodzie wyżarzania. Dlatego też zdecydowano się na zastosowanie metody wyżarzania, która dla założonych parametrów kontrolujących proces symulacji jest podobna do metody gradientowej (poprzez bardzo szybką redukcję prawdopodobieństwa

akceptacji). Pomimo tego, pozwala na większą relaksację zagadnienia, co odbywa się kosztem wolniejszej zbieżności niż w metodzie gradientowej, natomiast w niektórych przypadkach pozwala znaleźć nieco niższe wartości nośności podłoża. Przykład realizacji metody gradientowej oraz metody wyżarzania przedstawiono na rysunku 6.23.

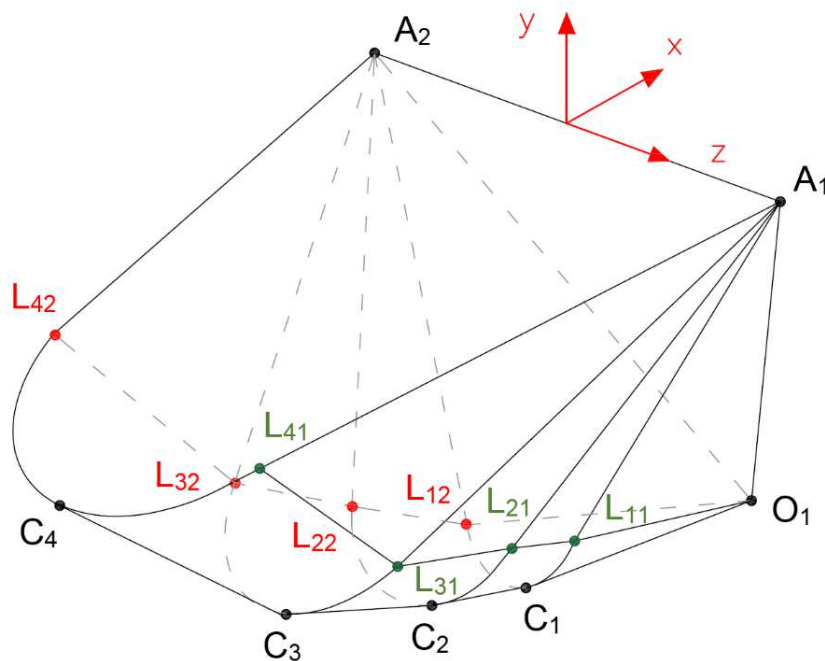


Rysunek 6.23. Porównanie pojedynczej realizacji procedury optymalizacyjnej dla metody gradientowej i metody wyżarzania. Założono podłoże jak w tabeli 6.5.

### 6.4.3. Uśrednienia lokalne dla trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia

W przypadku trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia uśrednienia lokalne będą dokonywane po powierzchniach poślizgu wynikających z mechanizmu zniszczenia. Wprowadza to dodatkowe komplikacje zarówno przy wyprowadzaniu postaci wzorów na współczynniki macierzy kowariancji, jak i wydłuża czas obliczeń. Współczynniki macierzy kowariancji były wyznaczone numerycznie w środowisku Mathematica poprzez zastosowanie funkcji dedykowanej całkowaniu numerycznemu `NIntegrate()`. W niniejszym rozdziale wyprowadzono wzory na postaci całkowe współczynników macierzy kowariancji w formie dogodnej do wyznaczania ich wartości w drodze całkowania numerycznego. Aby uprościć całkowanie lub w ogóle je umożliwić, w niektórych przypadkach wprowadzono lokalne układy współrzędnych i parametryzowano geometrie powierzchni poślizgu. Wszystkie informacje niezbędne przy

wyprowadzaniu postaci wariancji i kowariancji zostały przytoczone w dalszych częściach. Analogicznie, jak dla obszaru ABC w przypadku mechanizmu Prandtla, tak i tutaj wprowadza się funkcję Boole( ), która przyjmuje wartość 0 w przypadku punktów znajdujących się poza zdefiniowanym obszarem oraz 1 dla punktów znajdujących się w jego wnętrzu. Jak wskazano w rozdziale 6.4.2, do dalszych analiz został wybrany mechanizm 5-blokowy, w związku z czym wyprowadzono postacie współczynników macierzy kowariancji właściwe 5-blokowemu mechanizmowi zniszczenia. W przypadku 5 bloków macierz kowariancji ma wymiar  $16 \times 16$ , co daje 256 współczynników macierzy kowariancji. Uwzględniając symetrię, wyprowadzenia wymaga 136 postaci współczynników. Na rysunku 6.24 przedstawiono 5-blokowy mechanizm zniszczenia z oznaczonymi punktami charakterystycznymi, służącymi do nazewnictwa powierzchni poślizgu.



Rysunek 6.24. Powierzchnie poślizgu dla 5-blokowego mechanizmu zniszczenia. Mechanizm składa się z 16 powierzchni poślizgu, są to: trójkąt będący ścianą ostrosłupa znajdującego się bezpośrednio pod fundamentem  $A_1A_2O_1$ , osiem trójkątów bocznych:  $A_1L_{11}O_1$ ,  $A_2L_{12}O_1$ ,  $A_1L_{21}L_{11}$ ,  $A_2L_{22}L_{12}$ ,  $A_1L_{31}L_{21}$ ,  $A_2L_{32}L_{22}$ ,  $A_1L_{41}L_{31}$ ,  $A_2L_{42}L_{32}$ , trzy powierzchnie złożone z trapezu i fragmentu elipsy:  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$ ,  $A_1L_{21}C_2L_{22}A_2$ ,  $A_1L_{31}C_3L_{32}A_2$  oraz cztery powierzchnie stożkowe:  $O_1L_{11}C_1L_{12}$ ,  $L_{11}C_1L_{12}L_{21}C_2L_{22}$ ,  $L_{21}C_2L_{22}L_{31}C_3L_{32}$  i  $L_{31}C_3L_{32}L_{41}C_4L_{42}$ .

Jako funkcję kowariancji założono funkcję gaussowską; w związku z trójwymiarową geometrią zniszczenia funkcja kowariancji zależy od wartości skal fluktuacji w trzech

kierunkach. Dwa z nich dotyczą poziomej skali fluktuacji, trzeci odpowiada za pionową skalę fluktuacji. Postać przyjętej funkcji kowariancji podano w równaniu (6.69).

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sigma_x^2 \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\Delta x}{\omega_1} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\omega_2} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z}{\omega_3} \right)^2 \right] \right\} \quad (6.69)$$

Gdzie  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  oraz  $\Delta z$  są odległościami wzdłuż osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Dla przypadku izotropowego wartości parametrów  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$  mają taką samą wartość. W celu rozważenia anizotropii właściwości podłoża gruntowego konieczne jest zróżnicowanie wartości  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$ . Parametry  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$  są związane z wartościami skal fluktuacji jak w równaniu (6.70).

$$\omega_1 = \frac{\theta_x}{\sqrt{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{\theta_y}{\sqrt{\pi}}, \quad \omega_3 = \frac{\theta_z}{\sqrt{\pi}} \quad (6.70)$$

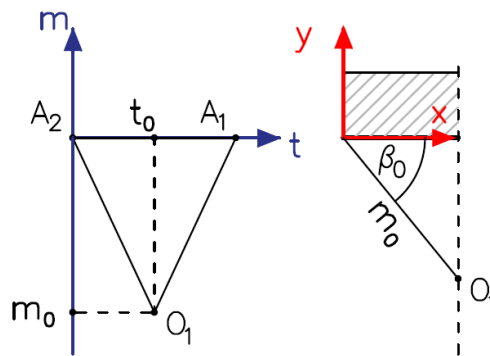
Gdzie  $\theta_x$  oraz  $\theta_z$  oznaczają poziome skale fluktuacji oraz  $\theta_y$  oznacza pionową skalę fluktuacji. Procedura uśredniania prowadzi do dyskretyzacji wartości pola losowego względem powierzchni uśredniania, w wyniku czego otrzymuje się wektor losowy o odpowiedniej liczbie składowych (składowe te są wzajemnie skorelowane). W rozprawie rozważano przypadki równych wartości poziomych skal fluktuacji tzn.  $\theta_x = \theta_z$ .

Poniżej podano wyprowadzone wzory na całkowite postacie współczynników macierzy kowariancji. Poprawność wszystkich wyprowadzonych wyrażeń została sprawdzona poprzez szereg testów. Najważniejszym elementem była obserwacja, że po usunięciu spod znaku całki funkcji wykładniczych (które pojawiają się pod całką z uwagi na założoną postać funkcji kowariancji (6.69)) oraz po usunięciu wariancji punktowej ( $\sigma_x^2$ ), wynik całkowania powinien być równy jedności. Oznacza to, że wynik całkowania (po usunięciu funkcji wykładniczych) powinien być równy kwadratowi pola powierzchni rozważanej powierzchni poślizgu (w przypadku wariancji) lub iloczynowi pól w przypadku dwóch różnych powierzchni poślizgu (dla kowariancji) (patrz np. równanie (6.73)). Powierzchnie poślizgu, które pojawiają się w rozprawie to trójkąt, trapez z fragmentem elipsy i powierzchnie stożkowe; dla wszystkich z nich można wyznaczyć pole powierzchni w alternatywny sposób, tj. z pominięciem całkowań zaprezentowanych poniżej. Następnie, poprzez przeprowadzenie wyżej opisanej procedury, można kontrolować poprawność zapisu całkowego (tj. sprawdzać, czy stosunek pól wyznaczonych całką i alternatywną metodą jest równy jedności).

## Wariancje

### Wariancja dla trójkąta $A_1A_2O_1$

Trójkąt  $A_1A_2O_1$  przedstawiono na rysunku 6.25; wprowadzono lokalny układ współrzędnych  $(t, m)$  (układ globalny na wszystkich rysunkach oznaczony jest kolorem czerwonym).



Rysunek 6.25. Parametryzacja trójkąta  $A_1A_2O_1$

Wartości współrzędnych  $t_0$  i  $m_0$  wyznacza się z równania (6.71)

$$t_0 = \frac{b}{2}, \quad m_0 = -\sqrt{x_{O_1}^2 + y_{O_1}^2} \quad (6.71)$$

Gdzie  $x_{O_1}$  i  $y_{O_1}$  są współrzędnymi globalnymi punktu  $O_1$ . Transformacja współrzędnych z lokalnego układu do globalnego wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} x &= m \cos \beta_0 \\ y &= -m \sin \beta_0 \\ z &= t - t_0 \end{aligned} \quad (6.72)$$

Podstawiając równanie (6.70) do równania (4.11) i dokonując stosownych uproszczeń, otrzymuje się nową wartość wariancji (po uśrednieniu pola losowego) dla własności  $X$  na powierzchni  $A_1A_2O_1$  (6.73). W związku ze zmianą współrzędnych, pod całką w równaniu (6.73) powinien znaleźć się jacobian przekształcenia; jednak transformacja współrzędnych odbywa się względem parametrów (gdyż funkcji trygonometrycznych w równaniu (6.72) nie wyznacza się w zależności od współrzędnych), dlatego też można wykazać, że przy transformacji zadanej równaniem (6.72), wartość jacobianu przekształcenia wynosi 1.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X_{A_1A_2O_1}] = \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1A_2O_1}| |P_{A_1A_2O_1}|} & \int_0^{2t_0} \int_0^0 \int_0^{2t_0} \int_0^0 \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \cos \beta_0 - m_2 \cos \beta_0}{\omega_1} \right)^2 \right] \\
 & \times \exp \left[ - \left( \frac{t_1 - t_2}{\omega_3} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \sin \beta_0 - m_2 \sin \beta_0}{\omega_2} \right)^2 \right] \\
 & \times \text{Boole} \left[ \left( 0 > m_1 > \frac{m_0}{t_0} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > -\frac{m_0}{t_0} t_1 + 2m_0 \right) \wedge \left( 0 > m_2 > \frac{m_0}{t_0} t_2 \right) \right. \\
 & \left. \wedge \left( 0 > m_2 > -\frac{m_0}{t_0} t_2 + 2m_0 \right) \right] dt_1 dm_1 dt_2 dm_2
 \end{aligned} \quad (6.73)$$

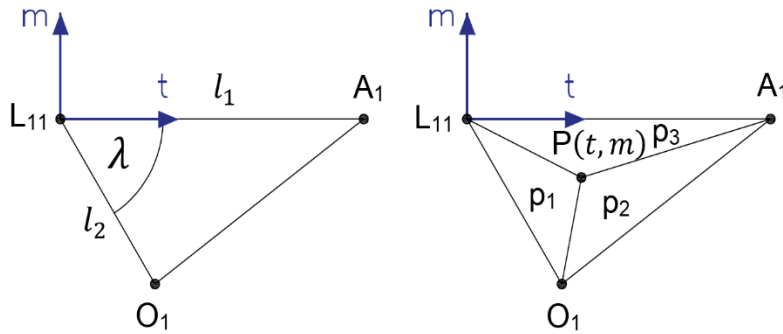
Wartości  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$  są parametrami zdefiniowanymi w (6.70). Nierówności wewnątrz funkcji Boole() są wynikiem ograniczeń definiujących powierzchnię trójkąta  $A_1A_2O_1$ ; zastosowanie funkcji Boole() jest konieczne z uwagi na prostokątny obszar całkowania w (6.73). Wartość całki czterokrotnej musi być przeskalowana o czynnik odpowiadający kwadratowi powierzchni trójkąta tj.  $|P_{A_1A_2O_1}|^2$ , którą można wyrazić przez  $|t_0 m_0|^2$ .

#### Wariancje dla trójkątów bocznych

Zgodnie z rysunkiem 6.24, dla 5-blokowego mechanizmu zniszczenia występuje 8 trójkątów znajdujących się na bokach mechanizmu. Są to powierzchnie:  $A_1L_{11}O_1$ ,  $A_2L_{12}O_1$ ,  $A_1L_{21}L_{11}$ ,  $A_2L_{22}L_{12}$ ,  $A_1L_{31}L_{21}$ ,  $A_2L_{32}L_{22}$ ,  $A_1L_{41}L_{31}$  oraz  $A_2L_{42}L_{32}$ . Dla każdej z nich należy wyznaczyć nową wartość wariancji, otrzymaną w drodze uśredniania pola losowego; jednak wszystkie z nich mają analogiczną postać, dlatego też przedstawiono wariancję dla trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$ . Długości boków trójkąta z rysunku 6.26 wyznacza się z (6.74).

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \sqrt{(x_{A_1} - x_{L_{11}})^2 + (y_{A_1} - y_{L_{11}})^2 + (z_{A_1} - z_{L_{11}})^2} \\
 l_2 &= \sqrt{(x_{O_1} - x_{L_{11}})^2 + (y_{O_1} - y_{L_{11}})^2 + (z_{O_1} - z_{L_{11}})^2}
 \end{aligned} \quad (6.74)$$

Gdzie  $x_{A_1}$ ,  $y_{A_1}$ ,  $z_{A_1}$  i  $x_{L_{11}}$ ,  $y_{L_{11}}$ ,  $z_{L_{11}}$  oraz  $x_{O_1}$ ,  $y_{O_1}$ ,  $z_{O_1}$  są globalnymi współrzędnymi odpowiednio dla punktów  $A_1$ ,  $L_{11}$  i  $O_1$ .


 Rysunek 6.26. Parametryzacja trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$ .

Lokalny układ współrzędnych  $(t, m)$  został zorientowany w płaszczyźnie trójkąta  $A_1L_{11}O_1$ , zatem lokalne współrzędne punktu  $O_1$  można wyrazić jak w (6.75).

$$t_{O_1} = l_2 \cos \lambda \quad (6.75)$$

$$m_{O_1} = -l_2 \sin \lambda$$

Aby obliczyć wartość wariancji, trzeba wyrazić wartości współrzędnych każdego punktu  $P(t, m)$  w globalnym układzie współrzędnych. Jeśli znane są globalne współrzędne punktów  $A_1$ ,  $L_{11}$  i  $O_1$ , można przeliczyć współrzędne lokalne punktu znajdującego się wewnątrz trójkąta (rysunek 6.26) na współrzędne globalne; w tym celu korzysta się z wartości pól  $p_1$ ,  $p_2$  oraz  $p_3$ :

$$p_1(t, m) = 0.5 |(t - t_{L_{11}})(m - m_{O_1}) - (t - t_{O_1})(m - m_{L_{11}})| \quad (6.76)$$

$$p_2(t, m) = 0.5 |(t - t_{A_1})(m - m_{O_1}) - (t - t_{O_1})(m - m_{A_1})|$$

$$p_3(t, m) = 0.5 |(t - t_{A_1})(m - m_{L_{11}}) - (t - t_{L_{11}})(m - m_{A_1})|$$

Opierając się na funkcjach (6.76), poprzez wykorzystanie średniej ważonej można wyznaczyć współrzędne punktu  $P$  w globalnym układzie odniesienia (6.77).

$$P_{x1} = \frac{p_1(t_1, m_1)x_{A_1} + p_2(t_1, m_1)x_{L_{11}} + p_3(t_1, m_1)x_{O_1}}{p_1(t_1, m_1) + p_2(t_1, m_1) + p_3(t_1, m_1)} \quad (6.77)$$

$$P_{y1} = \frac{p_1(t_1, m_1)y_{A_1} + p_2(t_1, m_1)y_{L_{11}} + p_3(t_1, m_1)y_{O_1}}{p_1(t_1, m_1) + p_2(t_1, m_1) + p_3(t_1, m_1)}$$



$$P_{z1} = \frac{p_1(t_1, m_1)z_{A_1} + p_2(t_1, m_1)z_{L_{11}} + p_3(t_1, m_1)z_{O_1}}{p_1(t_1, m_1) + p_2(t_1, m_1) + p_3(t_1, m_1)}$$

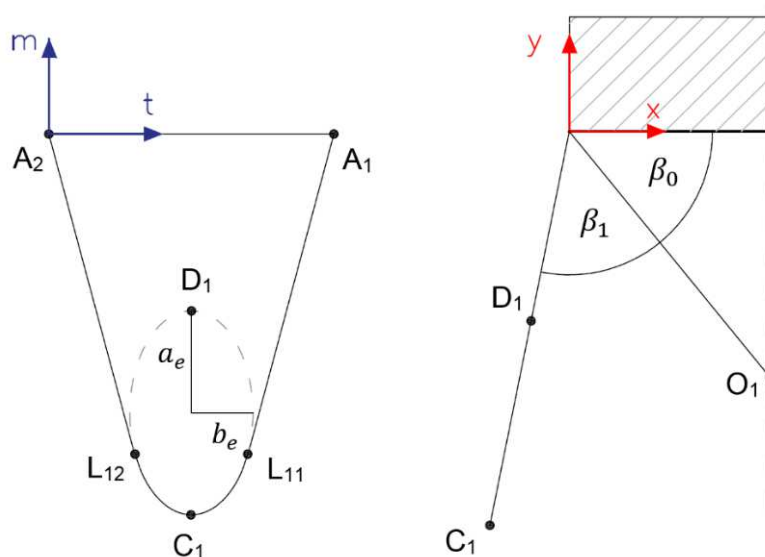
Ostatecznie otrzymuje się następującą postać funkcji wariancji (6.78):

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_{A_1L_{11}O_1}] &= \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1L_{11}O_1}|^2} \int_0^{t_{A_1}} \int_{m_{O_1}}^0 \int_0^{t_{A_1}} \int_{m_{O_1}}^0 \exp\left[-\left(\frac{P_{x1} - P_{x2}}{\omega_1}\right)^2\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\left(\frac{P_{z1} - P_{z2}}{\omega_3}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{P_{y1} - P_{y2}}{\omega_2}\right)^2\right] \\ &\quad \times \text{Boole}\left[\left(0 > m_1 > \frac{m_0}{t_0}t_1\right) \wedge \left(0 > m_1 > -\frac{m_0}{(t_{A_1} - t_0)}t_1 + \frac{m_0 t_{A_1}}{(t_{A_1} - t_0)}\right)\right] \\ &\quad \wedge \left(0 > m_2 > \frac{m_0}{t_0}t_2\right) \wedge \left(0 > m_2 > -\frac{m_0}{(t_{A_1} - t_0)}t_2 + \frac{m_0 t_{A_1}}{(t_{A_1} - t_0)}\right) dt_1 dm_1 dt_2 dm_2 \end{aligned} \quad (6.78)$$

Gdzie  $P_{x2}$ ,  $P_{y2}$  and  $P_{z2}$  są funkcjami z równania (6.77), ale odnoszącymi się do wartości współrzędnych  $t_2$  i  $m_2$ . W przypadku gdy kąt  $\lambda > 90^\circ$  procedura pozostaje taka sama, jednak zmieniają się warunki wewnątrz funkcji Boole(). W analogii do trójkąta  $A_1L_{11}O_1$  wyznacza się wyrażenia na wariancje dla pozostałych trójkątów:  $\text{Var}[X_{A_1L_{12}O_1}]$ ,  $\text{Var}[X_{A_1L_{21}L_{11}}]$ ,  $\text{Var}[X_{A_1L_{22}L_{12}}]$ ,  $\text{Var}[X_{A_1L_{31}L_{21}}]$ ,  $\text{Var}[X_{A_1L_{32}L_{22}}]$ ,  $\text{Var}[X_{A_1L_{41}L_{31}}]$  oraz  $\text{Var}[X_{A_1L_{42}L_{32}}]$ .

#### Wariancje dla trapezu i fragmentu elipsy

Rysunek 6.27 przedstawia lokalny układ współrzędnych dla trapezu i fragmentu elipsy. Lokalny układ współrzędnych jest analogiczny do przyjętego w przypadku trójkąta  $A_1A_2O_1$ , jednakże geometria powierzchni jest bardziej złożona. Sytuacja przedstawiona na rysunku 6.27 dotyczy przypadku, gdy mała półoś elipsy jest mniejsza niż  $b/2$ . Dla większych wartości kąta tarcia wewnętrzznego otrzymuje się większe wartości małej półosi elipsy niż  $b/2$ . W takiej sytuacji warunki wewnątrz funkcji Boole() ograniczające rozważaną powierzchnię poślizgu muszą zostać zmodyfikowane.


 Rysunek 6.27. Lokalny układ współrzędnych dla powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$ .

Współrzędne punktów charakterystycznych wyrażone w lokalnym układzie współrzędnych wyznacza się z (6.79).

$$\begin{aligned}
 m_{L_{11}} &= -\sqrt{x_{L_{11}}^2 + y_{L_{11}}^2}, & m_{L_{12}} &= m_{L_{11}} \\
 t_{L_{12}} &= \frac{b}{2} - z_{L_{11}}, & t_{L_{11}} &= \frac{b}{2} + z_{L_{11}} \\
 m_{C_1} &= -\sqrt{x_{C_1}^2 + y_{C_1}^2} \\
 t_{C_1} &= \frac{b}{2}
 \end{aligned} \tag{6.79}$$

Oraz współrzędne środka elipsy wyznacza się z:

$$\begin{aligned}
 m_{e_0} &= m_{C_1} + a_e \\
 t_{e_0} &= \frac{b}{2}
 \end{aligned} \tag{6.80}$$

Transformacja współrzędnych z lokalnego układu współrzędnych do globalnego odbywa się zgodnie z (6.81). Podobnie jak przy transformacji zadanej równaniem (6.72), wewnątrz funkcji trygonometrycznych znajdują się wyłącznie wartości parametrów, zatem jacobian przekształcenia wynosi 1.

$$x = m \cos(\beta_0 + \beta_1) \quad (6.81)$$

$$y = -m \sin(\beta_0 + \beta_1)$$

$$z = t - \frac{b}{2}$$

Dla pozostałych powierzchni poślizgu (będących trapezem i fragmentem elipsy) suma kątów podstawiona w funkcjach sinus i cosinus w równaniu (6.81) musi odpowiadać położeniu danej powierzchni.

Obszar ograniczony przez elipsę można zdefiniować następująco:

$$\frac{(t - t_{e_0})^2}{b_e^2} + \frac{(m - m_{e_0})^2}{a_e^2} < 1 \quad (6.82)$$

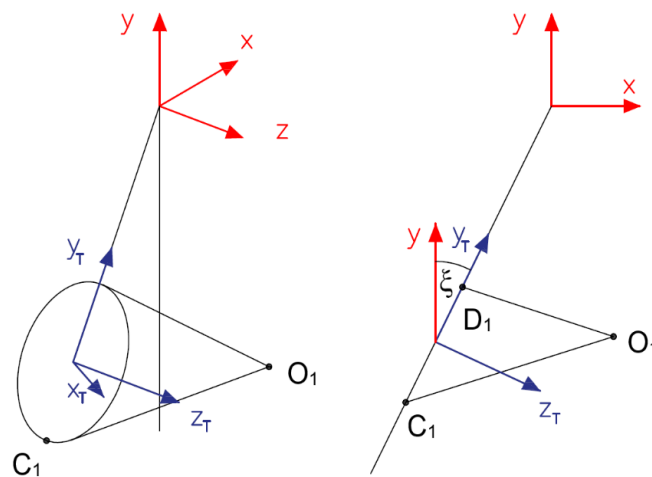
Stosując powyższe wyrażenia i podstawiając do równania (4.11), otrzymuje się postać wariancji dla powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}] &= \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}|^2} \int_0^b \int_{m_{C_1}}^0 \int_0^b \int_{m_{C_1}}^0 \exp \left[ - \left( \frac{t_1 - t_2}{\omega_3} \right)^2 \right] \\ &\times \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \cos(\beta_0 + \beta_1) - m_2 \cos(\beta_0 + \beta_1)}{\omega_1} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{-m_1 \sin(\beta_0 + \beta_1) + m_2 \sin(\beta_0 + \beta_1)}{\omega_2} \right)^2 \right] \\ &\times \text{Boole} \left[ \left( \left( 0 > m_1 > \frac{m_{L_{12}}}{t_{L_{12}}} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > -\frac{m_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} t_1 + \frac{bm_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} \right) \right) \right. \\ &\wedge \left( 0 > m_1 > m_{L_{12}} \right) \vee \left( \left( \frac{(t_1 - t_{e_0})^2}{b_e^2} + \frac{(m_1 - m_{e_0})^2}{a_e^2} < 1 \right) \wedge (m_{L_{12}} > m_1 > m_{C_1}) \right) \\ &\vee \left( \left( 0 > m_2 > \frac{m_{L_{12}}}{t_{L_{12}}} t_2 \right) \wedge \left( 0 > m_2 > -\frac{m_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} t_2 + \frac{bm_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} \right) \right) \\ &\wedge \left( 0 > m_2 > m_{L_{12}} \right) \vee \left( \left( \frac{(t_2 - t_{e_0})^2}{b_e^2} + \frac{(m_2 - m_{e_0})^2}{a_e^2} < 1 \right) \right. \\ &\left. \wedge (m_{L_{12}} > m_2 > m_{C_1}) \right] dt_1 dm_1 dt_2 dm_2 \end{aligned} \quad (6.83)$$

Przez analogię do powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$  wyznacza się pozostałe wyrażenia na wariancje:  $\text{Var}[X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}]$  oraz  $\text{Var}[X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}]$ .

### Wariancje dla powierzchni stożkowych

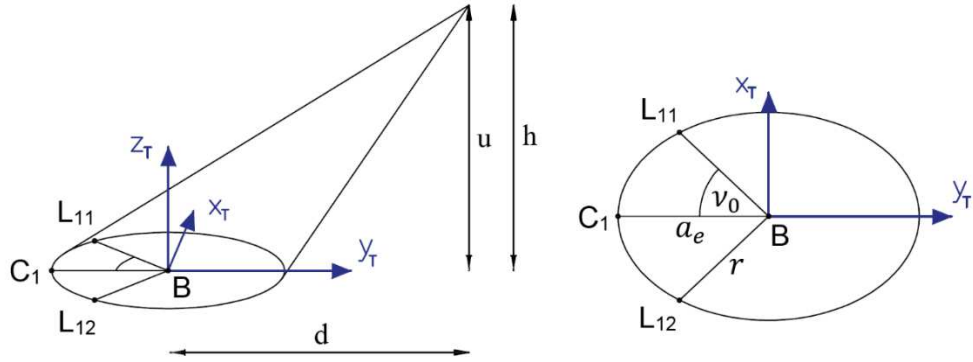
Reprezentacja parametryczna powierzchni stożkowej została przedstawiona w równaniu (3.11). Dla powierzchni stożkowych przejście z lokalnego układu współrzędnych do globalnego jest bardziej złożone niż we wcześniejszych przypadkach. Zastosowanie lokalnego układu współrzędnych jest wystarczające dla obliczeń wariancji, natomiast kowariancje wymagają wyrażenia współrzędnych punktów w globalnym układzie współrzędnych (o wartościach kowariancji decydują odległości pomiędzy dwoma powierzchniami). Na rysunku 6.28 pokazano wzajemne usytuowanie globalnego  $(x, y, z)$  i lokalnego układu współrzędnych  $(x_T, y_T, z_T)$ . Opierając się na rysunku 6.28, transformacje między współrzędnymi wyrażonymi w dwóch układach odniesienia można wyrazić przez równanie (6.84).



Rysunek 6.28. Lokalny układ współrzędnych dla powierzchni stożkowej. Po prawej stronie przedstawiono przekrój w płaszczyźnie  $xy$ .

$$\begin{aligned} x &= z_T \cos \xi + y_T \sin \xi \\ y &= -z_T \sin \xi + y_T \cos \xi \\ z &= x_T \end{aligned} \tag{6.84}$$

Parametryzacja powierzchni stożkowej w odniesieniu do lokalnego układu współrzędnych została przedstawiona na rysunku 6.29.



Rysunek 6.29. Lokalny układ współrzędnych dla pierwszej powierzchni stożkowej. Kąt  $v_0$  jest kątem pomiędzy odcinkami  $BC_1$  i  $BL_{11}$ , gdzie B jest środkiem elipsy.

Postać funkcji wariancji dla pierwszej powierzchni stożkowej wyraża równanie (6.85).

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X_{O_1 L_{11} C_1 L_{12}}] &= \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{O_1 L_{11} C_1 L_{12}}|^2} \\
 &\times \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}-v_0}^{-\frac{\pi}{2}+v_0} \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}-v_0}^{-\frac{\pi}{2}+v_0} \exp \left[ - \left( \frac{x_T(u_1, v_1) - x_T(u_2, v_2)}{\omega_3} \right)^2 \right] \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{(z_T(u_1, v_1) \cos \xi + y_T(u_1, v_1) \sin \xi) - (z_T(u_2, v_2) \cos \xi + y_T(u_2, v_2) \sin \xi)}{\omega_1} \right)^2 \right] \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{(-z_T(u_1, v_1) \sin \xi + y_T(u_1, v_1) \cos \xi) - (-z_T(u_2, v_2) \sin \xi + y_T(u_2, v_2) \cos \xi)}{\omega_2} \right)^2 \right] \\
 &\times \left( -a_e b_e (u_1 - 1) \sqrt{\frac{b_e^4 (a_e^2 + h^2) \cos^2 v_1 + a_e^3 \sin v_1 (a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v_1 - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v_1)^2 + b_e^2 (\cos v_1)^2})}{(a_e^2 (\sin v_1)^2 + b_e^2 (\cos v_1)^2)^3}} \right) \\
 &\times \left( -a_e b_e (u_2 - 1) \sqrt{\frac{b_e^4 (a_e^2 + h^2) \cos^2 v_2 + a_e^3 \sin v_2 (a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v_2 - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2})}{(a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2)^3}} \right) \\
 &\times du_1 dv_1 du_2 dv_2
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Gdzie  $x(u_1, v_1)$ ,  $y(u_1, v_1)$  oraz  $z(u_1, v_1)$  są podane w równaniach (6.86) oraz  $x(u_2, v_2)$ ,  $y(u_2, v_2)$ ,  $z(u_2, v_2)$  są wyznaczone w analogii do (6.86).

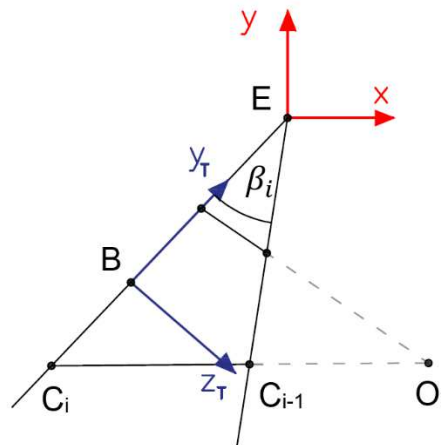
(6.86)

$$X(u_1, v_1) = \left\{ \begin{array}{l} x_T(u_1, v_1) = \frac{(1 - u_1)^2 a_e b_e}{\sqrt{(1 - u_1)^2 a_e^2 (\sin v_1)^2 + (1 - u_1)^2 b_e^2 (\cos v_1)^2}} \cos v_1 \\ y_T(u_1, v_1) = du_1 + \frac{(1 - u_1)^2 a_e b_e}{\sqrt{(1 - u_1)^2 a_e^2 (\sin v_1)^2 + (1 - u_1)^2 b_e^2 (\cos v_1)^2}} \sin v_1 \\ z_T(u_1, v_1) = hu_1 \end{array} \right.$$

Dla pozostałych powierzchni poślizgu postaci równań wyrażających wariancje są analogiczne do (6.85) z jednym dodatkowym elementem, mianowicie funkcją Boole(), której zadaniem jest wycięcie fragmentu powierzchni stożkowej znajdującego się pomiędzy odpowiednimi dla danego bloku wartościami kątów  $\beta$ . Dla przykładu, w przypadku trzeciego bloku odpowiednie kąty to  $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$  oraz  $\beta_0 + \beta_1$ . W równaniu (6.87) przedstawiono postać funkcji Boole().

$$\begin{aligned} & \text{Boole}[(u_1 \leq -\tan \beta_i y_T(u_1, v_1) + |EB| \tan \beta_i) \\ & \quad \wedge (u_2 \leq -\tan \beta_i y_T(u_2, v_2) + |EB| \tan \beta_i)] \end{aligned} \quad (6.87)$$

Gdzie długość  $|EB|$  zdefiniowana jest na rysunku 6.30.



Rysunek 6.30. Definicja długości  $|EB|$ .

Na podstawie powyższych informacji w sposób analogiczny otrzymuje się wartości wariancji dla pozostałych powierzchni stożkowych:  $\text{Var}[X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  $\text{Var}[X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Var}[X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ .

## Kowariancje

Wyrażenia na postacie kowariancji pomiędzy poszczególnymi powierzchniami poślizgu otrzymuje się poprzez zastosowanie rezultatów otrzymanych dla wariancji, które przedstawiono powyżej. W przypadku kowariancji niezbędne jest wyrażenie wszystkich współrzędnych w globalnym układzie odniesienia. W założonym mechanizmie zniszczenia występują cztery rodzaje powierzchni poślizgu, mianowicie: trójkąt początkowy, trójkąty boczne, trapezy z fragmentem elipsy oraz powierzchnie stożkowe. W związku z tym mamy sześć głównych typów kowariancji: kowariancje dla trójkąta początkowego i trójkątów bocznych, kowariancje dla trójkąta początkowego i trapezów z fragmentem elipsy, kowariancje dla trójkąta początkowego i powierzchni stożkowych, kowariancje dla trójkątów bocznych i trapezów z fragmentem elipsy, kowariancje dla trójkątów bocznych i powierzchni stożkowych oraz kowariancje dla trapezów z fragmentem elipsy z powierzchniami stożkowymi. Przykłady dla każdego typu przedstawiono poniżej.

### Kowariancja dla trójkąta $A_1A_2O_1$ oraz trójkąta bocznego $A_1L_{11}O_1$

Wyrażenie na kowariancję dla trójkąta  $A_1A_2O_1$  oraz trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$  przedstawia równanie (6.88).

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{11}O_1}] = \tag{6.88} \\
 & = \sigma_x^2 \frac{1}{|P_{A_1A_2O_1}| |P_{A_1L_{11}O_1}|} \int_0^{2t_0} \int_0^0 \int_0^{t_{A_1}} \int_0^0 \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \cos \beta_0 - P_{x2}}{\omega_1} \right)^2 \right] \\
 & \quad \times \exp \left[ - \left( \frac{t_1 - P_{z2}}{\omega_3} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \sin \beta_0 - P_{y2}}{\omega_2} \right)^2 \right] \\
 & \quad \times \text{Boole}_1 \left[ \left( 0 > m_1 > \frac{m_0}{t_0} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > - \frac{m_0}{t_0} t_1 + 2m_0 \right) \right] \\
 & \quad \times \text{Boole}_2 \left[ \left( 0 > m_2 > \frac{m_{O_1}}{t_{O_1}} t_2 \right) \wedge \left( 0 > m_2 > - \frac{m_{O_1}}{(t_{A_1} - t_{O_1})} t_2 + \frac{m_{O_1} t_{A_1}}{(t_{A_1} - t_{O_1})} \right) \right] dt_1 dm_1 dt_2 dm_2
 \end{aligned}$$

Gdzie  $P_{x2}$ ,  $P_{y2}$  oraz  $P_{z2}$  są zdefiniowane w równaniu (6.77). W celu rozróżnienia zmiennych, którym odpowiada funkcja Boole(), zastosowano indeks dolny; dla przykładu funkcja  $\text{Boole}_1()$  odpowiada zmiennym  $m_1$  i  $t_1$  i wszystkie parametry wewnątrz niej dotyczą trójkąta  $A_1A_2O_1$ . Analogicznie zapisuje się pozostałe kowariancje:

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{12}O_1}], \quad \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{21}L_{11}}], \quad \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{22}L_{12}}] \\ & , \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{31}L_{21}}], \quad \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{32}L_{22}}], \quad \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{41}L_{31}}] \quad \text{oraz} \\ & \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{42}L_{32}}]. \end{aligned}$$

Kowariancja dla trójkąta  $A_1A_2O_1$  oraz powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$

Wyrażenie na kowariancję dla trójkąta  $A_1A_2O_1$  oraz trapezu z fragmentem elipsy  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$  przedstawia równanie (6.89).

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}] = \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1A_2O_1}| |P_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}|} \int_0^{2t_0} \int_{m_0}^0 \int_0^b \int_{m_{C_1}}^0 \\ & \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \cos \beta_0 - m_2 \cos(\beta_0 + \beta_1)}{\omega_1} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \sin \beta_0 - m_2 \sin(\beta_0 + \beta_1)}{\omega_2} \right)^2 \right] \\ & \times \exp \left[ - \left( \frac{t_1 - t_2}{\omega_3} \right)^2 \right] \times \text{Boole}_1 \left[ \left( 0 > m_1 > \frac{m_0}{t_0} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > -\frac{m_0}{t_0} t_1 + 2m_0 \right) \right] \\ & \times \text{Boole}_2 \left[ \left( \left( 0 > m_2 > \frac{m_{L_{12}}}{t_{L_{12}}} t_2 \right) \wedge \left( 0 > m_2 > -\frac{m_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} t_2 + \frac{bm_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} \right) \wedge \left( 0 > m_2 > m_{L_{12}} \right) \right) \right. \\ & \left. \times \left( \left( \frac{(t_2 - t_{e_0})^2}{b_e^2} + \frac{(m_2 - m_{e_0})^2}{a_e^2} < 1 \right) \wedge (m_{L_{12}} > m_2 > m_{C_1}) \right) \right] dt_1 dm_1 dt_2 dm_2 \end{aligned} \quad (6.89)$$

Gdzie  $m_2$ ,  $t_2$  and  $\text{Boole}_2()$  dotyczą powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$ . Analogicznie zapisuje się pozostałe kowariancje:  $\text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}]$ .

Kowariancja dla trójkąta  $A_1A_2O_1$  oraz powierzchni stożkowej  $O_1L_{11}C_1L_{12}$

Wyrażenie na kowariancję dla trójkąta  $A_1A_2O_1$  oraz powierzchni stożkowej  $O_1L_{11}C_1L_{12}$  przedstawia równanie (6.90).



$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}] &= \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1A_2O_1}| |P_{O_1L_{11}C_1L_{12}}|} \int_0^{2t_0} \int_{m_0}^0 \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}-v_0}^{-\frac{\pi}{2}+v_0} \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \cos \beta_0 - (z_T(u_2, v_2) \cos \xi + y_T(u_2, v_2) \sin \xi)}{\omega_1} \right)^2 \right] \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \sin \beta_0 - (-z_T(u_2, v_2) \sin \xi + y_T(u_2, v_2) \cos \xi)}{\omega_2} \right)^2 \right] \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{t_1 - x_T(u_2, v_2)}{\omega_3} \right)^2 \right] \times \text{Boole}_1 \left[ \left( 0 > m_1 > \frac{m_0}{t_0} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > -\frac{m_0}{t_0} t_1 + 2m_0 \right) \right] \\
 &\times \left( -a_e b_e (u_2 - 1) \sqrt{\frac{b_e^4 (a_e^2 + h^2) \cos^2 v_2 + a_e^3 \sin v_2 (a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v_2 - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2})}{(a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2)^3}} \right) \\
 &dt_1 dm_1 du_2 dv_2
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

Dla drugiej, trzeciej i czwartej powierzchni stożkowej należy dodać funkcję Boole() (jak wskazano przy opisie wariancji). Analogicznie zapisuje się pozostałe kowariancje:  $\text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1A_2O_1}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ .

#### Kowariancja dla trójkąta bocznego $A_1L_{11}O_1$ oraz powierzchni $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$

Wyrażenie na kowariancję dla trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$  oraz powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$  przedstawia równanie (6.91).

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[X_{A_1L_{11}O_1}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}] &= \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1L_{11}O_1}| |P_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}|} \int_0^{2t_0} \int_{m_0}^0 \int_0^b \int_0^{m_{C_1}} \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{P_{x1} - m_2 \cos(\beta_0 + \beta_1)}{\omega_1} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{P_{y1} - m_2 \sin(\beta_0 + \beta_1)}{\omega_2} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{P_{x1} - t_2}{\omega_3} \right)^2 \right] \\
 &\times \text{Boole}_1 \left[ \left( 0 > m_1 > \frac{m_{O_1}}{t_{O_1}} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > -\frac{m_{O_1}}{(t_{A_1} - t_{O_1})} t_1 + \frac{m_{O_1} t_{A_1}}{(t_{A_1} - t_{O_1})} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

$$\times \text{Boole}_2 \left[ \left( \left( 0 > m_2 > \frac{m_{L_{12}}}{t_{L_{12}}} t_2 \right) \wedge \left( 0 > m_2 > -\frac{m_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} t_2 + \frac{bm_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} \right) \wedge (0 > m_2 > m_{L_{12}}) \right) \right. \\ \left. \vee \left( \left( \frac{(t_2 - t_{e_0})^2}{b_e^2} + \frac{(m_2 - m_{e_0})^2}{a_e^2} < 1 \right) \wedge (m_{L_{12}} > m_2 > m_{C_1}) \right) \right] dt_1 dm_1 dt_2 dm_2$$

Analogicznie zapisuje się pozostałe kowariancje:

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{11}O_1}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}] \text{ oraz } \text{Cov}[X_{A_1L_{11}O_1}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}];$$

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{12}O_1$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{12}O_1}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{12}O_1}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{12}O_1}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}];$$

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{21}L_{11}$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{21}L_{11}}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{21}L_{11}}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{21}L_{11}}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}];$$

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{22}L_{12}$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{22}L_{12}}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{22}L_{12}}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{22}L_{12}}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}];$$

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{31}L_{21}$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{31}L_{21}}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{31}L_{21}}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{31}L_{21}}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}];$$

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{32}L_{22}$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{32}L_{22}}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{32}L_{22}}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{32}L_{22}}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}];$$

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{41}L_{31}$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{41}L_{31}}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{41}L_{31}}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{41}L_{31}}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}];$$

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{42}L_{32}$ :

$$\text{Cov}[X_{A_1L_{42}L_{32}}, X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{42}L_{32}}, X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}], \text{Cov}[X_{A_1L_{42}L_{32}}, X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}].$$

Kowariancja dla trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$  oraz powierzchni stożkowej  $O_1L_{11}C_1L_{12}$   
 Wyrażenie na kowariancję dla trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$  oraz powierzchni stożkowej  
 $O_1L_{11}C_1L_{12}$  przedstawia równanie (6.92).

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[X_{A_1L_{11}O_1}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}] &= \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1L_{11}O_1}| |P_{O_1L_{11}C_1L_{12}}|} \int_0^{2t_0} \int_{m_0}^0 \int_0^b \int_{m_{C_1}}^0 \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{P_{x1} - (z_T(u_2, v_2) \cos \xi + y_T(u_2, v_2) \sin \xi)}{\omega_1} \right)^2 \right] \\
 &\times \exp \left[ - \left( \frac{P_{y1} - (-z_T(u_2, v_2) \sin \xi + y_T(u_2, v_2) \cos \xi)}{\omega_2} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{P_{x1} - x_T(u_2, v_2)}{\omega_3} \right)^2 \right] \\
 &\times \text{Boole}_1 \left[ \left( 0 > m_1 > \frac{m_{O_1}}{t_{O_1}} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > - \frac{m_{O_1}}{(t_{A_1} - t_{O_1})} t_1 + \frac{m_{O_1} t_{A_1}}{(t_{A_1} - t_{O_1})} \right) \right] \\
 &\times \left( -a_e b_e (u_2 - 1) \sqrt{\frac{b_e^4 (a_e^2 + h^2) \cos^2 v_2 + a_e^3 \sin v_2 (a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v_2 - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2})}{(a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2)^3}} \right) \\
 &\times dt_1 dm_1 du_2 dv_2
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

Dla drugiej, trzeciej i czwartej powierzchni stożkowej należy dodać funkcję Boole() (jak wskazano przy opisie wariacji). Analogicznie zapisuje się pozostałe kowariancje:

dla trójkąta bocznego  $A_1L_{11}O_1$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{11}O_1}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{11}O_1}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{11}O_1}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla trójkąta  
 bocznego  $A_1L_{12}O_1$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{12}O_1}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{12}O_1}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{12}O_1}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{12}O_1}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla trójkąta  
 bocznego  $A_1L_{21}L_{11}$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}L_{11}}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}L_{11}}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}L_{11}}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}L_{11}}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla trójkąta  
 bocznego  $A_1L_{22}L_{12}$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{22}L_{12}}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{22}L_{12}}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{22}L_{12}}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{22}L_{12}}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla trójkąta  
 bocznego  $A_1L_{31}L_{21}$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{31}L_{21}}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{31}L_{21}}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{31}L_{21}}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{31}L_{21}}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla trójkąta  
 bocznego  $A_1L_{32}L_{22}$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{32}L_{22}}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{32}L_{22}}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,

$\text{Cov}[X_{A_1L_{32}L_{22}}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{32}L_{22}}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla trójkąta bocznego  $A_1L_{41}L_{31}$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{41}L_{31}}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{41}L_{31}}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{41}L_{31}}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{41}L_{31}}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla trójkąta bocznego  $A_1L_{42}L_{32}$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{42}L_{32}}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{42}L_{32}}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{42}L_{32}}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{42}L_{32}}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ .

Kowariancja dla powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$  oraz powierzchni stożkowej  $O_1L_{11}C_1L_{12}$   
Wyrażenie na kowariancję dla powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$  oraz powierzchni stożkowej  $O_1L_{11}C_1L_{12}$  przedstawia równanie (6.93).

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}] &= \sigma_X^2 \frac{1}{|P_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}| |P_{O_1L_{11}C_1L_{12}}|} \int_0^{2t_0} \int_{m_0}^0 \int_0^b \int_0^0 & (6.93) \\ &\times \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \cos(\beta_0 + \beta_1) - (z_T(u_2, v_2) \cos \xi + y_T(u_2, v_2) \sin \xi)}{\omega_1} \right)^2 \right] \\ &\times \exp \left[ - \left( \frac{m_1 \sin(\beta_0 + \beta_1) - (-z_T(u_2, v_2) \sin \xi + y_T(u_2, v_2) \cos \xi)}{\omega_2} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{t_1 - x_T(u_2, v_2)}{\omega_3} \right)^2 \right] \\ &\times \left( -a_e b_e (u_2 - 1) \sqrt{\frac{b_e^4 (a_e^2 + h^2) \cos^2 v_2 + a_e^3 \sin v_2 (a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v_2 - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2})}{(a_e^2 (\sin v_2)^2 + b_e^2 (\cos v_2)^2)^3}} \right) \\ &\times \text{Boole}_1 \left[ \left( \left( 0 > m_1 > \frac{m_{L_{12}}}{t_{L_{12}}} t_1 \right) \wedge \left( 0 > m_1 > -\frac{m_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} t_1 + \frac{b m_{L_{11}}}{(b - t_{L_{11}})} \right) \wedge \left( 0 > m_1 > m_{L_{12}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \vee \left( \left( \frac{(t_1 - t_{e_0})^2}{b_e^2} + \frac{(m_1 - m_{e_0})^2}{a_e^2} < 1 \right) \wedge (m_{L_{12}} > m_1 > m_{C_1}) \right) \right] dt_1 dm_1 du_2 dv_2 \end{aligned}$$

Dla drugiej, trzeciej i czwartej powierzchni stożkowej należy dodać funkcję Boole() (jak wskazano przy opisie wariancji). Analogicznie zapisuje się pozostałe kowariancje:

dla powierzchni  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  $\text{Cov}[X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla  
powierzchni poślizgu  $A_1L_{21}C_2L_{22}A_2$ :  $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$ ,  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}]$ ,  $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}]$  oraz  
 $\text{Cov}[X_{A_1L_{21}C_2L_{22}A_2}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]$ ; dla powierzchni poślizgu  $A_1L_{31}C_3L_{32}A_2$ :

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}], & \text{Cov}[X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}, X_{L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2}], \\ & \text{Cov}[X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}, X_{L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3}] \text{ oraz } \text{Cov}[X_{A_1L_{31}C_3L_{32}A_2}, X_{L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4}]. \end{aligned}$$

Wszystkie wyprowadzone wyrażenia na wartości wariancji i kowariancji są współczynnikami macierzy kowariancji  $[C_X]$ . W celu przedstawienia postaci macierzy kowariancji przyjęta została nowa konwencja oznaczeń, skracająca zapis podany powyżej. Oznaczmy: trójkąt  $A_1A_2O_1$  przez  $t$ ; trójkąty boczne  $A_1L_{11}O_1$  oraz  $A_1L_{12}O_1$  odpowiednio przez  $t_{11}$  oraz  $t_{12}$ . W sposób analogiczny oznaczmy pozostałe trójkąty boczne:  $A_1L_{21}L_{11}$ ,  $A_1L_{22}L_{12}$ ,  $A_1L_{31}L_{21}$ ,  $A_1L_{32}L_{22}$ ,  $A_1L_{41}L_{31}$ ,  $A_1L_{42}L_{32}$  przez:  $t_{21}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{31}$ ,  $t_{32}$ ,  $t_{41}$ ,  $t_{42}$ . Powierzchnie poślizgu:  $A_1L_{11}C_1L_{12}A_2$ ,  $A_1L_{21}C_2L_{22}A_2$ ,  $A_1L_{31}C_3L_{32}A_2$  przez odpowiednio:  $t_{e1}$ ,  $t_{e2}$ ,  $t_{e3}$  oraz powierzchnie stożkowe:  $O_1L_{11}C_1L_{12}$ ,  $L_{11}L_{12}C_1L_{21}L_{22}C_2$ ,  $L_{21}L_{22}C_2L_{31}L_{32}C_3$ ,  $L_{31}L_{32}C_3L_{41}L_{42}C_4$  przez:  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ . Co więcej, aby skrócić zapis, przyjmijmy następujące oznaczenia dla wariancji oraz kowariancji:  $\text{Var}[X_{A_1A_2O_1}]$  zostanie oznaczona przez  $V[A_1A_2O_1]$  i  $\text{Cov}[X_{A_1L_{11}C_1L_{12}A_2}, X_{O_1L_{11}C_1L_{12}}]$  przez  $C[A_1L_{11}C_1L_{12}A_2, O_1L_{11}C_1L_{12}]$ . Dla tak sformułowanej konwencji oznaczeń reprezentacja macierzy kowariancji jest przedstawiona w równaniach (6.94), (6.95), (6.96), (6.97) i (6.98).

$$[C_X] = \begin{bmatrix} P & S \\ T & R \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} V[t] & C[t, t_{11}] & C[t, t_{12}] & C[t, t_{21}] & C[t, t_{22}] & C[t, t_{31}] & C[t, t_{32}] & C[t, t_{41}] \\ C[t, t_{11}] & V[t_{11}] & C[t_{11}, t_{12}] & C[t_{11}, t_{21}] & C[t_{11}, t_{22}] & C[t_{11}, t_{31}] & C[t_{11}, t_{32}] & C[t_{11}, t_{41}] \\ C[t, t_{12}] & C[t_{11}, t_{12}] & V[t_{12}] & C[t_{12}, t_{21}] & C[t_{12}, t_{22}] & C[t_{12}, t_{31}] & C[t_{12}, t_{32}] & C[t_{12}, t_{41}] \\ C[t, t_{21}] & C[t_{11}, t_{21}] & C[t_{12}, t_{21}] & V[t_{21}] & C[t_{21}, t_{22}] & C[t_{21}, t_{31}] & C[t_{21}, t_{32}] & C[t_{21}, t_{41}] \\ C[t, t_{22}] & C[t_{11}, t_{22}] & C[t_{12}, t_{22}] & C[t_{21}, t_{22}] & V[t_{22}] & C[t_{22}, t_{31}] & C[t_{22}, t_{32}] & C[t_{22}, t_{41}] \\ C[t, t_{31}] & C[t_{11}, t_{31}] & C[t_{12}, t_{31}] & C[t_{21}, t_{31}] & C[t_{22}, t_{31}] & V[t_{31}] & C[t_{31}, t_{32}] & C[t_{31}, t_{41}] \\ C[t, t_{32}] & C[t_{11}, t_{32}] & C[t_{12}, t_{32}] & C[t_{21}, t_{32}] & C[t_{22}, t_{32}] & C[t_{31}, t_{32}] & V[t_{32}] & C[t_{32}, t_{41}] \\ C[t, t_{41}] & C[t_{11}, t_{41}] & C[t_{12}, t_{41}] & C[t_{21}, t_{41}] & C[t_{22}, t_{41}] & C[t_{31}, t_{41}] & C[t_{32}, t_{41}] & V[t_{41}] \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} V[t_{42}] & C[t_{42}, te_1] & C[t_{42}, te_2] & C[t_{42}, te_3] & C[t_{42}, c_1] & C[t_{42}, c_2] & C[t_{42}, c_3] & C[t_{42}, c_4] \\ C[t_{42}, te_1] & V[te_1] & C[te_1, te_2] & C[te_1, te_3] & C[te_1, c_1] & C[te_1, c_2] & C[te_1, c_3] & C[te_1, c_4] \\ C[t_{42}, te_2] & C[te_1, te_2] & V[te_2] & C[te_2, te_3] & C[te_2, c_1] & C[te_2, c_2] & C[te_2, c_3] & C[te_2, c_4] \\ C[t_{42}, te_3] & C[te_1, te_3] & C[te_2, te_3] & V[te_3] & C[te_3, c_1] & C[te_3, c_2] & C[te_3, c_3] & C[te_3, c_4] \\ C[t_{42}, c_1] & C[te_1, c_1] & C[te_2, c_1] & C[te_3, c_1] & V[c_1] & C[c_1, c_2] & C[c_1, c_3] & C[c_1, c_4] \\ C[t_{42}, c_2] & C[te_1, c_2] & C[te_2, c_2] & C[te_3, c_2] & C[c_1, c_2] & V[c_2] & C[c_2, c_3] & C[c_2, c_4] \\ C[t_{42}, c_3] & C[te_1, c_3] & C[te_2, c_3] & C[te_3, c_3] & C[c_1, c_3] & C[c_2, c_3] & V[c_3] & C[c_3, c_4] \\ C[t_{42}, c_4] & C[te_1, c_4] & C[te_2, c_4] & C[te_3, c_4] & C[c_1, c_4] & C[c_2, c_4] & C[c_3, c_4] & V[c_4] \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} C[t, t_{42}] & C[t, te_1] & C[t, te_2] & C[t, te_3] & C[t, c_1] & C[t, c_2] & C[t, c_3] & C[t, c_4] \\ C[t_{11}, t_{42}] & C[t_{11}, te_1] & C[t_{11}, te_2] & C[t_{11}, te_3] & C[t_{11}, c_1] & C[t_{11}, c_2] & C[t_{11}, c_3] & C[t_{11}, c_4] \\ C[t_{12}, t_{42}] & C[t_{12}, te_1] & C[t_{12}, te_2] & C[t_{12}, te_3] & C[t_{12}, c_1] & C[t_{12}, c_2] & C[t_{12}, c_3] & C[t_{12}, c_4] \\ C[t_{21}, t_{42}] & C[t_{21}, te_1] & C[t_{21}, te_2] & C[t_{21}, te_3] & C[t_{21}, c_1] & C[t_{21}, c_2] & C[t_{21}, c_3] & C[t_{21}, c_4] \\ C[t_{22}, t_{42}] & C[t_{22}, te_1] & C[t_{22}, te_2] & C[t_{22}, te_3] & C[t_{22}, c_1] & C[t_{22}, c_2] & C[t_{22}, c_3] & C[t_{22}, c_4] \\ C[t_{31}, t_{42}] & C[t_{31}, te_1] & C[t_{31}, te_2] & C[t_{31}, te_3] & C[t_{31}, c_1] & C[t_{31}, c_2] & C[t_{31}, c_3] & C[t_{31}, c_4] \\ C[t_{32}, t_{42}] & C[t_{32}, te_1] & C[t_{32}, te_2] & C[t_{32}, te_3] & C[t_{32}, c_1] & C[t_{32}, c_2] & C[t_{32}, c_3] & C[t_{32}, c_4] \\ C[t_{41}, t_{42}] & C[t_{41}, te_1] & C[t_{41}, te_2] & C[t_{41}, te_3] & C[t_{41}, c_1] & C[t_{41}, c_2] & C[t_{41}, c_3] & C[t_{41}, c_4] \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} C[t, t_{42}] & C[t_{11}, t_{42}] & C[t_{12}, t_{42}] & C[t_{21}, t_{42}] & C[t_{22}, t_{42}] & C[t_{31}, t_{42}] & C[t_{32}, t_{42}] & C[t_{41}, t_{42}] \\ C[t, te_1] & C[t_{11}, te_1] & C[t_{12}, te_1] & C[t_{21}, te_1] & C[t_{22}, te_1] & C[t_{31}, te_1] & C[t_{32}, te_1] & C[t_{41}, te_1] \\ C[t, te_2] & C[t_{11}, te_2] & C[t_{12}, te_2] & C[t_{21}, te_2] & C[t_{22}, te_2] & C[t_{31}, te_2] & C[t_{32}, te_2] & C[t_{41}, te_2] \\ C[t, te_3] & C[t_{11}, te_3] & C[t_{12}, te_3] & C[t_{21}, te_3] & C[t_{22}, te_3] & C[t_{31}, te_3] & C[t_{32}, te_3] & C[t_{41}, te_3] \\ C[t, c_1] & C[t_{11}, c_1] & C[t_{12}, c_1] & C[t_{21}, c_1] & C[t_{22}, c_1] & C[t_{31}, c_1] & C[t_{32}, c_1] & C[t_{41}, c_1] \\ C[t, c_2] & C[t_{11}, c_2] & C[t_{12}, c_2] & C[t_{21}, c_2] & C[t_{22}, c_2] & C[t_{31}, c_2] & C[t_{32}, c_2] & C[t_{41}, c_2] \\ C[t, c_3] & C[t_{11}, c_3] & C[t_{12}, c_3] & C[t_{21}, c_3] & C[t_{22}, c_3] & C[t_{31}, c_3] & C[t_{32}, c_3] & C[t_{41}, c_3] \\ C[t, c_4] & C[t_{11}, c_4] & C[t_{12}, c_4] & C[t_{21}, c_4] & C[t_{22}, c_4] & C[t_{31}, c_4] & C[t_{32}, c_4] & C[t_{41}, c_4] \end{bmatrix} \quad (6.98)$$

Na przekątnej macierzy  $[C_X]$  znajduje się 16 wartości wariancji. Macierz jest symetryczna i dodatnio określona. Wszystkie wyrażenia na współczynniki macierzy  $[C_X]$  dotyczą przypadku mechanizmu 5-blokowego. Na podstawie  $[C_X]$  wyznacza się wartości parametrów wytrzymałościowych gruntu po uśrednieniu pola losowego. Służy temu algorytm przedstawiony wcześniej dla mechanizmu Prandtla i mechanizmu wieloblokowego. Algorytm ten został zmodyfikowany tak, aby mógł zostać zastosowany do zagadnienia rozpatrywanego w niniejszym rozdziale. Dostosowany algorytm przedstawiono w załączniku E.

## 7. Szacowanie prawdopodobieństwa awarii na podstawie rozkładów nośności

W rozdziałach 5 i 6 przedstawiono sposób wyznaczania losowej nośności podłoża dla mechanizmu Prandtla, dwuwymiarowego mechanizmu wieloblokowego oraz mechanizmu trójwymiarowego dla stopy kwadratowej. Aby uzyskać rozkład nośności podłoża (histogram) oraz określić wpływ przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych na ten rozkład, przeprowadzono symulacje Monte Carlo w celu otrzymania wielu wartości nośności dla rozpatrywanych zagadnień. W związku z koniecznością przeprowadzenia analiz dla wielu przypadków oraz relatywnie długim czasem obliczeń dla pojedynczej symulacji, liczba symulacji  $N$  musi być kompromisem pomiędzy dokładnością a możliwościami prowadzenia obliczeń. Z uwagi na niskie poziomy prawdopodobieństwa awarii rozważane w budownictwie, wymagane jest przeprowadzenie liczby symulacji liczonej w milionach (w celu oszacowania tego prawdopodobieństwa z racjonalną dokładnością). W celu skrócenia czasu potrzebnego na obliczenia sugeruje się znaczne zredukowanie tej liczby poprzez dopasowanie do otrzymanych histogramów nośności podłoża odpowiedniego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, przy pomocy którego możliwe będzie szacowanie prawdopodobieństwa awarii (histogramy nośności otrzymuje się na podstawie znacznie mniejszej liczby symulacji). Tematem wymagającym dyskusji jest także to, czy otrzymane oszacowania nośności mogą być podstawą do wyznaczania prawdopodobieństwa awarii; tematyka ta jest dyskutowana w rozdziale 10. Na podstawie aproksymowanych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa można także przeprowadzać analizy porównawcze pomiędzy różnymi zagadnieniami rozpatrywanymi

w rozprawie. Inną możliwością jest zastosowanie bardziej zaawansowanych metod, takich jak np. *subset simulation* (np. Phoon, 2008). Niemniej jednak, w ramach niniejszej rozprawy przyjęto aproksymowanie rozkładów gęstości prawdopodobieństwa na podstawie otrzymanych histogramów. Liczbę symulacji  $N$  dobierano w taki sposób, aby utrzymać przedział ufności dla wartości średniej w określonych dla każdego zagadnienia granicach. W związku z tym w przypadku większych współczynników zmienności należało przeprowadzić większą liczbę symulacji. Liczba symulacji w prezentowanych zagadnieniach wahała się od  $N = 400$  do  $N = 8000$ . W dalszej części pokazano, że do aproksymacji otrzymanych rezultatów odpowiednie okazały się rozkłady lognormalne. Opierając się na otrzymanych gęstościach prawdopodobieństwa dla nośności (zmienna losowa  $p_{fit}$ ), prawdopodobieństwo awarii ( $P_f$ ) można zdefiniować jak w równaniu (7.1).

$$P_f = P\left\{p_{fit} < \frac{p_{exp}}{F}\right\} \quad (7.1)$$

Gdzie  $p_{exp}$  jest wartością nośności obliczoną w sposób deterministyczny dla oczekiwanych wartości parametrów wytrzymałościowych rozpatrywanego podłoża gruntowego. Współczynnik  $F$  jest globalnym współczynnikiem bezpieczeństwa. Przy powyższej definicji prawdopodobieństwa awarii wskaźnik niezawodności wyznacza się ze znanej formuły (7.2).

$$\beta = -\Phi^{-1}[P_f] \quad (7.2)$$

Gdzie  $\Phi^{-1}$  jest funkcją odwrotną do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego. W celu dopasowania kształtu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa wykorzystano procedurę *fitdistr* dostępną w środowisku programowania R, która stosuje metodę Nelder-Mead (Venables and Ripley, 2002). Poprawność dopasowania do rezultatów była testowana hipotezą statystyczną Kołmogorowa-Smirnowa; otrzymane rezultaty są dyskutowane w rozdziale 8.



## 8. Analizy numeryczne

### 8.1. Informacje wstępne

Analizy numeryczne przeprowadzono dla trzech procedur opisanych w rozdziale 6 w odniesieniu do ławy fundamentowej (mechanizm Prandtla oraz mechanizm wieloblokowy), a także kwadratowej stopy fundamentowej (trójwymiarowy mechanizm zniszczenia). W zdecydowanej większości rozważanych przypadków analizy przeprowadzono dla dwóch rodzajów podłoża gruntowego: gruntu spoistego i niespoistego z niewielką wartością spójności (w dalszych częściach będzie on nazywany gruntem niespoistym). Przyjęte charakterystyki probabilistyczne przedstawiono w tabeli 8.1 dla gruntu spoistego i w tabeli 8.2 dla gruntu niespoistego.

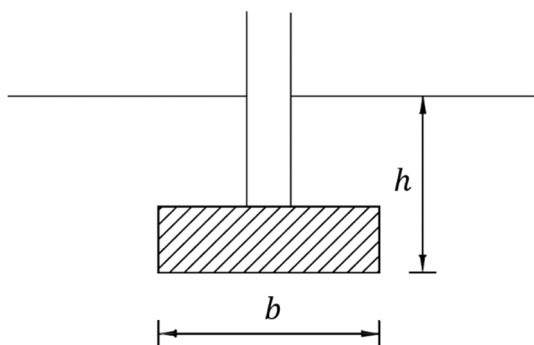
Tabela. 8.1. Parametry dla podłoża spoistego. Naprężenie obok fundamentu w poziomie jego posadowienia wynika z zagłębienia fundamentu.

Parametr	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Ciężar objętościowy, $\gamma$	18.2 kN/m <sup>3</sup>	1.092 kN/m <sup>3</sup>	0.06	Zmienna losowa o rozkładzie normalnym
Kąt tarcia wewnętrzny, $\varphi$	20.0°	3.0°	0.15	Pole losowe lognormalne
Spójność, $c$	20.0 kPa	4.0 kPa	0.20	Pole losowe lognormalne
Obciążenie obok fundamentu, $q$	14.4 kPa	-	-	Wartość deterministyczna

Tab. 8.2. Parametry dla podłoża niespoistego. Naprężenie obok fundamentu w poziomie jego posadowienia wynika z zagłębienia fundamentu.

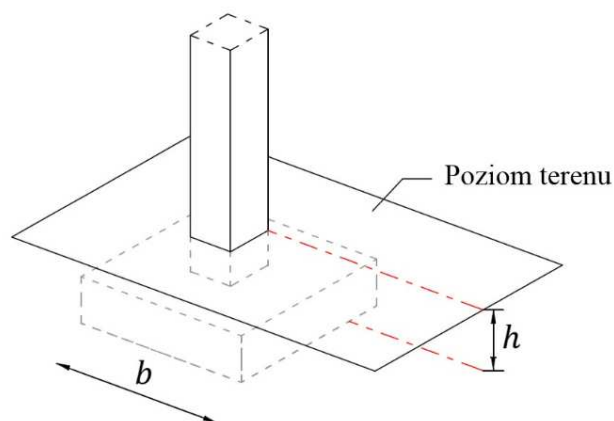
Parametr	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Ciężar objętościowy, $\gamma$	18.2 kN/m <sup>3</sup>	1.092 kN/m <sup>3</sup>	0.06	Zmienna losowa o rozkładzie normalnym
Kąt tarcia wewnętrzznego, $\varphi$	30.0°	4.5°	0.15	Pole losowe lognormalne
Spójność, $c$	5.0 kPa	1.0 kPa	0.20	Pole losowe lognormalne
Obciążenie obok fundamentu, $q$	14.4 kPa	-	-	Wartość deterministyczna

Na rysunku 8.1 przedstawiono rozpatrywaną geometrię ławy fundamentowej. Głębokość posadowienia fundamentu  $h$  została przyjęta jako równa 0.8 m. Założono dwie szerokości  $b = 1.0$  m oraz  $b = 2.0$  m. W analizach nie uwzględniono ciężaru własnego fundamentu.



Rysunek 8.1. Geometria ławy fundamentowej.

Na rysunku 8.2 przedstawiono widok w aksonometrii dla stopy fundamentowej.



Rysunek 8.2. Geometria kwadratowej stopy fundamentowej.

Dla stopy fundamentowej w obliczeniach numerycznych założono zagłębienie fundamentu równe 0.5 m, dla którego przyjęta wartość obciążenia obok fundamentu w poziomie jego posadowienia wynosi 9.58 kPa. Dla mechanizmu trójwymiarowego założono szerokość stopy fundamentowej wynoszącą  $b = 1.0$  m.

W przeprowadzonych analizach badano wpływ skal fluktuacji na ocenę losowej nośności podłoża. Rozważono izotropowe i anizotropowe pola losowe dla kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności. Parametry wyjściowe dla pól losowych są podane w tabelach 8.1 i 8.2. Przy ustalonej wartości pionowej skali fluktuacji przeprowadzono analizy w przypadku czterech poziomych skal fluktuacji, począwszy od przypadku izotropowego aż do sytuacji, gdy pozioma skala fluktuacji jest 30 razy większa od pionowej. W związku z naturalnymi procesami towarzyszącymi powstawaniu gruntów, wartości poziomych skal fluktuacji przyjmuje się jako większe niż skal pionowych (Cherubini, 1997). Wartości pionowych skal fluktuacji zostały wybrane zgodnie z proponowanymi przez Pieczyńską-Kozłowską i in. (2017) dla gruntów z obszaru Emilia-Romania w północnych Włoszech, mianowicie:  $\theta_v = 0.25$  m, 0.50 m oraz 0.75 m. Rezultaty otrzymane w tej pracy były także podstawą do obliczeń przeprowadzonych na potrzeby studium przypadku (rozdział 11). W kolejnych podrozdziałach zestawiono wszystkie analizy, które zostały wykonane w ramach niniejszej rozprawy.

## 8.2. Mechanizm Prandtla

Analizy numeryczne (przy założeniu mechanizmu Prandtla) przeprowadzono dla dwóch sposobów wyznaczania uśrednionych wartości parametrów wytrzymałościowych podłoża, tj. dla uśredniania wzdłuż spirali logarytmicznej BC lub po obszarze deformacji objętościowej ABC (patrz rozdział 6, rysunek 6.1). Obydwa podejścia zastosowano w analizach przeprowadzonych dla dwóch rodzajów podłoża gruntowego oraz przy założeniu szerokości ławy fundamentowej  $b = 1.0$  m. Rozpatrzono następujące wartości pionowych skal fluktuacji:  $\theta_v = 0.25$  m, 0.50 m oraz 0.75 m; dla każdej z nich przyjęto cztery różne wartości poziomej skali fluktuacji:  $\theta_h = \theta_v$ ,  $\theta_h = 5\theta_v$ ,  $\theta_h = 10\theta_v$  i  $\theta_h = 30\theta_v$ . Zagadnienie  $\theta_h = \theta_v$  określone jest mianem izotropowego. Informacje na temat wszystkich przeanalizowanych przypadków i liczby symulacji  $N$  podano w tabeli 8.3.

Tabela. 8.3. Liczba symulacji dla analiz przeprowadzonych w przypadku mechanizmu Prandtla.

$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m			
		Uśrednianie wzdłuż spirali BC (rys. 6.1)		Uśrednianie po obszarze ABC (rys. 6.1)	
		Spoisty (tab. 8.1)	Niespoisty (tab. 8.2)	Spoisty (tab. 8.1)	Niespoisty (tab. 8.2)
0.25	0.25	$N = 2000$	$N = 1000$	$N = 2000$	$N = 1000$
	1.25	$N = 2000$	$N = 1000$	$N = 2000$	$N = 1000$
	2.50	$N = 4000$	$N = 2000$	$N = 4000$	$N = 2000$
	7.50	$N = 4000$	$N = 2000$	$N = 4000$	$N = 2000$
0.5	0.50	$N = 3000$	$N = 1500$	$N = 3000$	$N = 1500$
	2.50	$N = 4000$	$N = 2000$	$N = 4000$	$N = 2000$
	5.00	$N = 6000$	$N = 3000$	$N = 6000$	$N = 3000$
	15.00	$N = 6000$	$N = 3000$	$N = 6000$	$N = 3000$
0.75	0.75	$N = 4000$	$N = 2000$	$N = 4000$	$N = 2000$
	3.75	$N = 6000$	$N = 3000$	$N = 6000$	$N = 3000$
	7.50	$N = 8000$	$N = 4000$	$N = 8000$	$N = 4000$
	22.50	$N = 8000$	$N = 4000$	$N = 8000$	$N = 4000$

### 8.3. Mechanizm 6-blokowy

Analizy numeryczne przy założeniu mechanizmu 6-blokowego przeprowadzono dla przypadku symetrycznego i niesymetrycznego (opis w rozdziale 6). Na podstawie testów dokładności procedury optymalizacyjnej opisanych w rozdziale 6 założono mechanizm 6-blokowy (11-blokowy w przypadku mechanizmu niesymetrycznego). Obliczenia przeprowadzono dla dwóch rodzajów podłoża gruntowego oraz dwóch szerokości fundamentu:  $b = 1.0$  m oraz  $b = 2.0$  m. Dla każdego z wyżej wymienionych przypadków rozpatrzono trzy wartości pionowej skali fluktuacji, tj.  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m oraz  $0.75$  m; w przypadku każdej z nich rozważono cztery wartości poziomej skali fluktuacji:  $\theta_h = \theta_v$ ,  $\theta_h = 5\theta_v$ ,  $\theta_h = 10\theta_v$  i  $\theta_h = 30\theta_v$ . Informacje na temat wszystkich przeprowadzonych analiz i liczby symulacji  $N$  podano w tabelach 8.4 i 8.5. Liczbę symulacji dobrano w taki sposób, aby przy poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  przedziały ufności dla średniej mieściły się w granicach 1.0% dla gruntu spoistego oraz 1.5% dla gruntu niespoistego. Przedziały ufności dla wszystkich rozpatrzonych przypadków podano w załączniku H.

Tabela. 8.4. Liczba symulacji  $N$  przeprowadzonych przy założeniu mechanizmu symetrycznego.

$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Symetryczny mechanizm 6-blokowy			
		Spoisty (tab. 8.1)		Niespoisty (tab. 8.2)	
		$b = 1.0$ m	$b = 2.0$ m	$b = 1.0$ m	$b = 2.0$ m
0.25	0.25	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	1.25	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	2.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	7.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
0.5	0.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	2.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1350$	$N = 1000$
	5.00	$N = 1100$	$N = 1000$	$N = 1750$	$N = 1000$
	15.00	$N = 1200$	$N = 1000$	$N = 2000$	$N = 1150$
0.75	0.75	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1050$	$N = 1000$
	3.75	$N = 1300$	$N = 1000$	$N = 2500$	$N = 1100$
	7.50	$N = 1500$	$N = 1000$	$N = 2600$	$N = 1500$
	22.50	$N = 1800$	$N = 1000$	$N = 3000$	$N = 1700$

Tabela. 8.5. Liczba symulacji  $N$  przeprowadzonych przy założeniu mechanizmu niesymetrycznego.

$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Niesymetryczny mechanizm 6-blokowy (11 bloków)			
		Spoisty (tab. 8.1)		Niespoisty (tab. 8.2)	
		$b = 1.0$ m	$b = 2.0$ m	$b = 1.0$ m	$b = 2.0$ m
0.25	0.25	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	1.25	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	2.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	7.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
0.5	0.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	2.50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	5.00	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1500$	$N = 1000$
	15.00	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1750$	$N = 1000$
0.75	0.75	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1050$	$N = 1000$
	3.75	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1900$	$N = 1100$
	7.50	$N = 1350$	$N = 1000$	$N = 2500$	$N = 1050$
	22.50	$N = 1500$	$N = 1000$	$N = 2900$	$N = 1500$

W tabeli 8.6 zestawiono informacje na temat przeprowadzonych analiz dla mechanizmu symetrycznego 6-blokowego przy stałej wartości macierzy kowariancji. Stałe macierze kowariancji wyznaczono dla wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych podłoża. Postacie macierzy kowariancji zestawiono w załączniku G.

Tabela. 8.7. Liczba symulacji  $N$  przeprowadzonych przy założeniu mechanizmu symetrycznego dla stałej macierzy kowariancji.

$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	6-blokowy mechanizm symetryczny	
		Stała macierz kowariancji	
		Podłoże spoiste (Tab. 8.1)	
		$b = 1.0$ m	
0.25	0.25	$N = 1000$	
	1.25	$N = 1000$	
	2.50	$N = 1000$	
	7.50	$N = 1000$	
0.5	0.50	$N = 1000$	
	2.50	$N = 1000$	
	5.00	$N = 1100$	
	15.00	$N = 1200$	
0.75	0.75	$N = 1000$	
	3.75	$N = 1300$	
	7.50	$N = 1500$	
	22.50	$N = 1800$	

## 8.4. Mechanizm trójwymiarowy

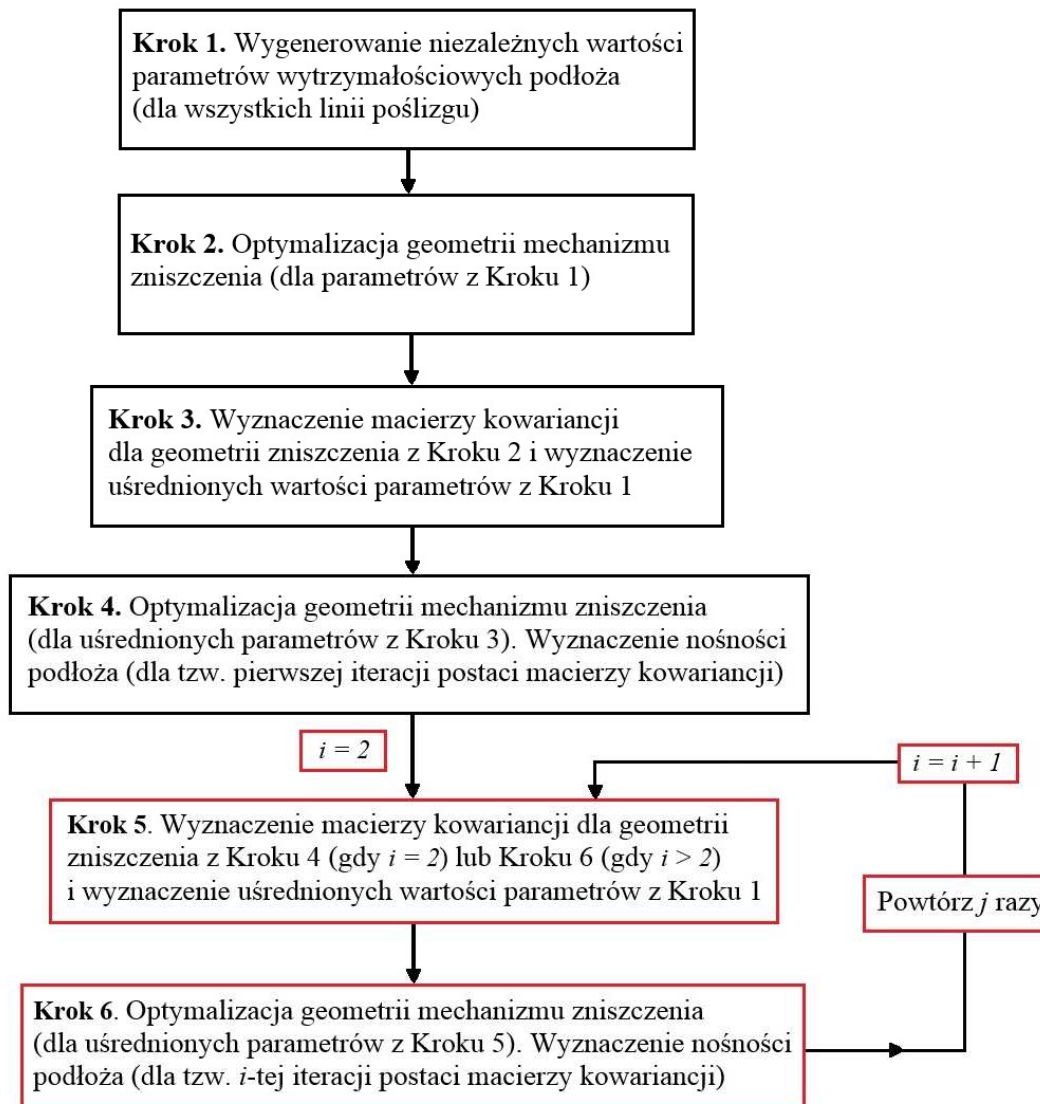
Analizy numeryczne przy założeniu trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia podłoża przeprowadzono dla kwadratowej stopy fundamentowej. Podobnie jak w przypadku zagadnienia płaskiego, zbadano wpływ założenia stałej wartości macierzy kowariancji na ocenę losowej nośności podłoża. Zgodnie z opisem z rozdziału 6, w przypadku stałej macierzy kowariancji postać macierzy została wyznaczona dla geometrii zniszczenia ustalonej w sposób deterministyczny (przy założeniu wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych gruntu), mianowicie:  $\varphi = 20^\circ$ ,  $c = 20$  kPa oraz  $\gamma = 18.2$  kN/m<sup>3</sup> (rozważono grunt spoisty). Postacie macierzy kowariancji przyjęte do obliczeń podano w załączniku G. Analizy przeprowadzono dla mechanizmu 5-blokowego (zgodnie z rozdziałem 6) oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m. Rozpatrzono trzy wartości pionowej skali fluktuacji, tj.  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m oraz  $0.75$  m; dla każdej z nich przyjęto cztery wartości poziomej skali fluktuacji:  $\theta_h = \theta_v$ ,  $\theta_h = 5\theta_v$ ,  $\theta_h = 10\theta_v$  i  $\theta_h = 30\theta_v$ . Informacje na temat wszystkich przeprowadzonych analiz i liczby symulacji  $N$  podano w tabeli 8.8. Przedziały ufności dla wartości średniej nośności podłoża w rozpatrywanych zagadnieniach zostały zestawione w załączniku H.

Tabela. 8.8. Liczba symulacji  $N$  przeprowadzonych przy założeniu mechanizmu trójwymiarowego.

$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m	
		Stała macierz kowariancji (dla wartości oczekiwanych parametrów gruntu)	Indywidualna macierz kowariancji (wyznaczana dla każdej symulacji)
		Spoisty (tab. 8.1)	Spoisty (tab. 8.1)
0.25	0.25	$N = 400$	$N = 400$
	1.25	$N = 600$	$N = 600$
	2.50	$N = 700$	$N = 700$
	7.50	$N = 850$	$N = 850$
0.5	0.50	$N = 500$	$N = 500$
	2.50	$N = 1000$	$N = 1000$
	5.00	$N = 1000$	$N = 1000$
0.75	15.00	$N = 1000$	$N = 1000$
	0.75	$N = 800$	$N = 800$
	3.75	$N = 1200$	$N = 1200$
	7.50	$N = 1500$	$N = 1500$
	22.50	$N = 1500$	$N = 1500$

## 8.5. Dyskusja braku iteracji przy wyznaczaniu macierzy kowariancji

Kwestie dotyczące dokładności i efektywności algorytmu rozwijanego w ramach niniejszej rozprawy zostały poruszone we wcześniejszych rozdziałach. Przed przedstawieniem wyników analiz i omówieniem otrzymanych rezultatów należy rozważyć dodatkowe zagadnienie wpływające na dokładność obliczeń. Mianowicie, w rozdziale 5 domyślnie założono brak iteracyjnego wyznaczania postaci macierzy kowariancji; otrzymywano ją dla geometrii zniszczenia ustalonej na podstawie wyjściowych charakterystyk probabilistycznych podłoża (Krok 1 i 2, rozdział 5). Założenie braku iteracji może mieć wpływ na uzyskiwane wyniki; aby ocenić wielkość tego wpływu na otrzymane wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża, zaproponowano modyfikację metodyki przedstawionej w rozdziale 5 umożliwiającą iteracyjne wyznaczenie postaci macierzy kowariancji. Na rysunku 8.3 w czarnych ramkach przedstawiono poszczególne kroki zgodne z metodyką przedstawioną w rozdziale 5, natomiast w czerwonych ramkach ujęto dodatkowe kroki, które pozwalają na iteracyjne wyznaczenie postaci macierzy kowariancji.

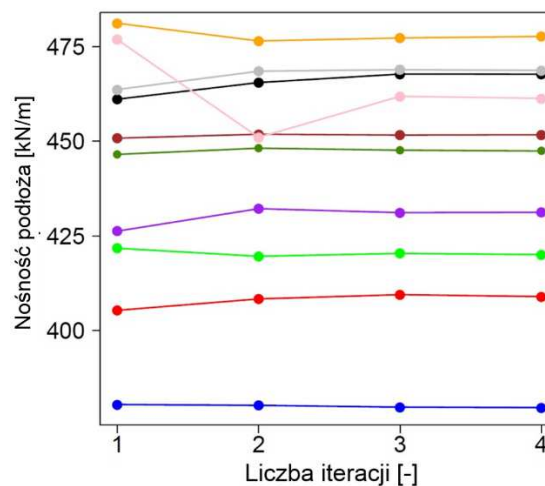


Rysunek 8.3. Metodyka pozwalająca na iteracyjne wyznaczenie macierzy kowariancji. Szczegółowy opis w tekście.

Na podstawie metodyki z rysunku 8.3 przeprowadzono dodatkowe analizy, polegające na iteracyjnym wyznaczeniu postaci macierzy kowariancji. Procedura rozpoczyna się identycznie jak algorytm opisany w rozdziale 5 z tą różnicą, że macierz kowariancji była aktualizowana cztery razy (liczba powtórzeń  $j = 3$ ), a nie jeden raz, jak przyjęto w rozdziale 5. Po ustaleniu pierwszej postaci macierzy kowariancji, uśrednieniu parametrów podłoża (Krok 3), a następnie wyznaczeniu optymalnej geometrii zniszczenia i odpowiadającej jej nośności podłoża (Krok 4), macierz kowariancji wyznacza się ponownie, tym razem dla nowej geometrii (Krok 5). W ten sposób otrzymuje się drugą macierz kowariancji, na podstawie której wyznacza się nowe



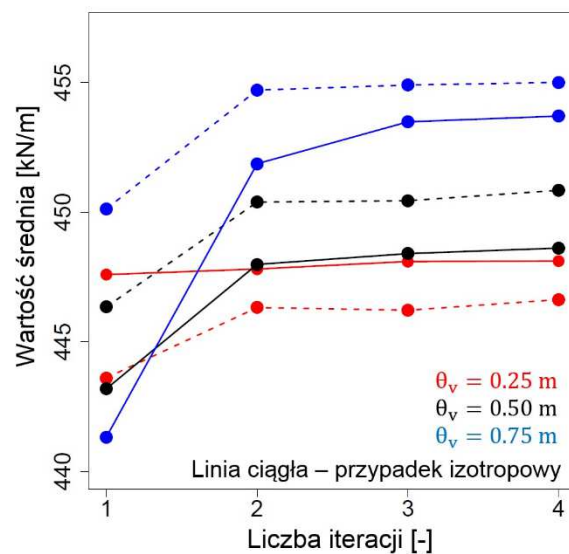
wartości parametrów podłoża. Następnie wyznacza się optymalną geometrię zniszczenia i odpowiadającą jej nośność podłoża (Krok 6). Kroki 5 i 6 powtarzano trzy razy. W rezultacie otrzymuje się cztery wartości nośności podłoża dla tego samego przypadku (identyczne parametry wyjściowe z Kroku 1). Całą procedurę zawartą na rysunku 8.3 powtarza się  $N$  razy. Poniżej przedstawiono wyniki dla przeprowadzonych analiz; otrzymano je dla przypadku podłoża spoiściego,  $b = 1.0$  m i przy założeniu następujących wartości skal fluktuacji:  $\theta_v = 0.25$  m oraz  $\theta_h = 0.25$  m;  $\theta_v = 0.25$  m oraz  $\theta_h = 7.50$  m;  $\theta_v = 0.50$  m oraz  $\theta_h = 0.50$  m;  $\theta_v = 0.50$  m oraz  $\theta_h = 15.00$  m;  $\theta_v = 0.75$  m oraz  $\theta_h = 0.75$  m;  $\theta_v = 0.75$  m oraz  $\theta_h = 22.50$  m.



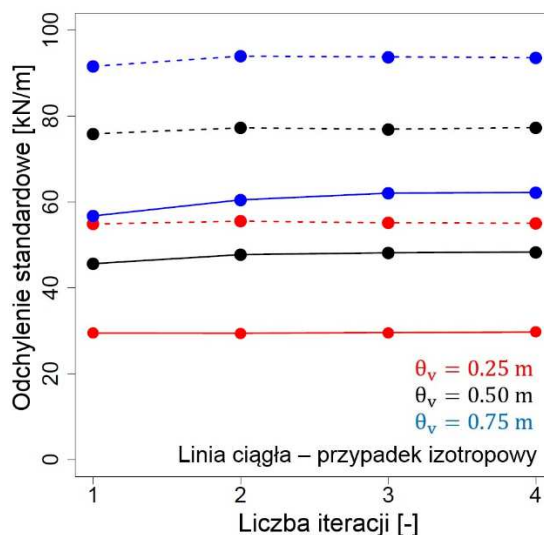
Rysunek 8.4. Wybrane 10 realizacji spośród 1000 przeprowadzonych dla symetrycznego mechanizmu 6-blokowego; podłoże spoiście,  $b = 1.0$  m; na osi poziomej zaznaczono numer iteracji, dla którego wyznaczona jest odpowiadająca nośność podłoża. Uwaga: oś pionowa rozpoczyna się od 375 kN/m.

Na rysunku 8.4 przedstawiono 10 wybranych wartości nośności otrzymanych w kolejnych krokach iteracyjnych (przykład dotyczy  $\theta_v = 0.50$  m oraz  $\theta_h = 15.00$  m). Na podstawie rysunku można zaobserwować, że nośność podłoża dla pojedynczych realizacji nie zmienia się w szerokim zakresie, a różnice między trzecią a czwartą iteracją praktycznie nie występują. W związku z tym, z punktu widzenia otrzymania pojedynczej wartości nośności wykonanie trzeciej iteracji jest wystarczające, aby zachodziła stabilizacja pojedynczych wartości średnich. Rysunek 8.5 prezentuje zachowanie się wartości średnich nośności podłoża (dla każdego zagadnienia przeprowadzono  $N = 1000$  symulacji). W przypadku wartości średnich nośności obserwuje się ich wzrost między pierwszą a drugą iteracją postaci macierzy kowariancji i stabilizację dla trzeciej i czwartej iteracji. Wzrost między pierwszą a drugą iteracją wynosi przeciętnie ok. 1%. Niemniej

jednak, dla przypadku izotropowego ( $\theta_v = 0.25$  m oraz  $\theta_h = 0.25$  m) otrzymane wartości średnie są praktycznie takie same. Na kolejnym rysunku (rys. 8.6) przedstawiono zachowanie się wartości odchyłeń standardowych nośności podłoża; w ogólności wartości te rosną dla kolejnych iteracji. W przypadku pionowych skal fluktuacji wynoszących 0.25 m odchylenia standardowe nośności podłoża pozostają na takim samym poziomie, a większe różnice obserwuje się przy założeniu  $\theta_v = 0.50$  m i  $\theta_v = 0.75$  m (maksymalnie 3%, z jednym wyjątkiem, którym jest przypadek izotropowy dla  $\theta_v = 0.75$  m, gdzie różnica między pierwszą a czwartą iteracją wynosi ok. 8%).



Rysunek 8.5. Wartości średnie nośności podłoża dla kolejnych iteracji postaci macierzy kowariancji. Linia przerywaną zaznaczono przypadek anizotropowy ( $\theta_h = 30\theta_v$ ), linią ciągłą przypadek izotropowy ( $\theta_h = \theta_v$ ). Opis w tekście. Uwaga: oś pionowa rozpoczyna się od 440 kN/m.



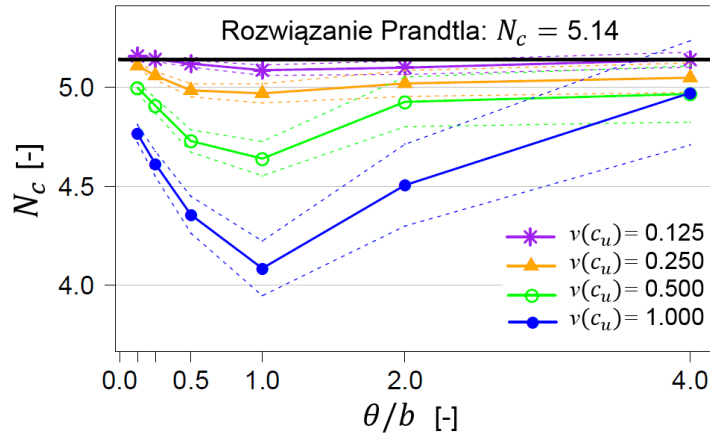
Rysunek 8.6. Odchylenia standardowe nośności podłoża dla kolejnych iteracji postaci macierzy kowariancji. Linia przerywaną zaznaczono przypadek anizotropowy ( $\theta_h = 30\theta_v$ ), linią ciągłą przypadek izotropowy ( $\theta_h = \theta_v$ ). Opis w tekście.

Analogiczne obliczenia jak przedstawione na rysunkach 8.5 i 8.6 przeprowadzono przy założeniu podłoża idealnie spoistego. Otrzymane w ten sposób rezultaty wskazują na bardzo podobne zachowanie się wartości średnich i odchyłeń standardowych nośności (dla kolejnych iteracji) jak w przypadku podłoża typu  $c - \varphi$ . Co więcej, podobnie jak we wcześniejszych analizach, największe różnice zaobserwowano w przypadku izotropowym ( $\theta_h = \theta_v = 0.75$  m). Powyższe analizy są próbą oceny wpływu założenia jednokrotnej lub wielokrotnej iteracji macierzy kowariancji na wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża otrzymane poprzez zastosowanie metodyki zaproponowanej w rozprawie. Na podstawie przeprowadzonych analiz pokazano, że wykonanie obliczeń w oparciu o jednokrotne wyznaczenie postaci macierzy kowariancji prowadzi do zmniejszenia wartości średnich o ok. 1% oraz zmniejszenia wartości odchyłeń standardowych średnio o ok. 2% (względem kolejnych iteracji). W jednym przypadku (tj. podłoże izotropowe  $\theta_h = \theta_v = 0.75$  m) zaobserwowano większe różnice. Na podstawie powyższych analiz można stwierdzić, że przyjęcie dwukrotnej iteracji postaci macierzy kowariancji niweluje większą część wspomnianych wyżej wpływów. Pomimo tego, w związku z ograniczonym wpływem omawianego zagadnienia na otrzymane wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża, wszystkie obliczenia zaprezentowane w dalszej części rozprawy oparto na jednokrotnym wyznaczeniu postaci macierzy kowariancji. Decyzję tę uzasadnia się znacznie większym wpływem niepewności w wyznaczaniu wartości skal fluktuacji (na ocenę losowej

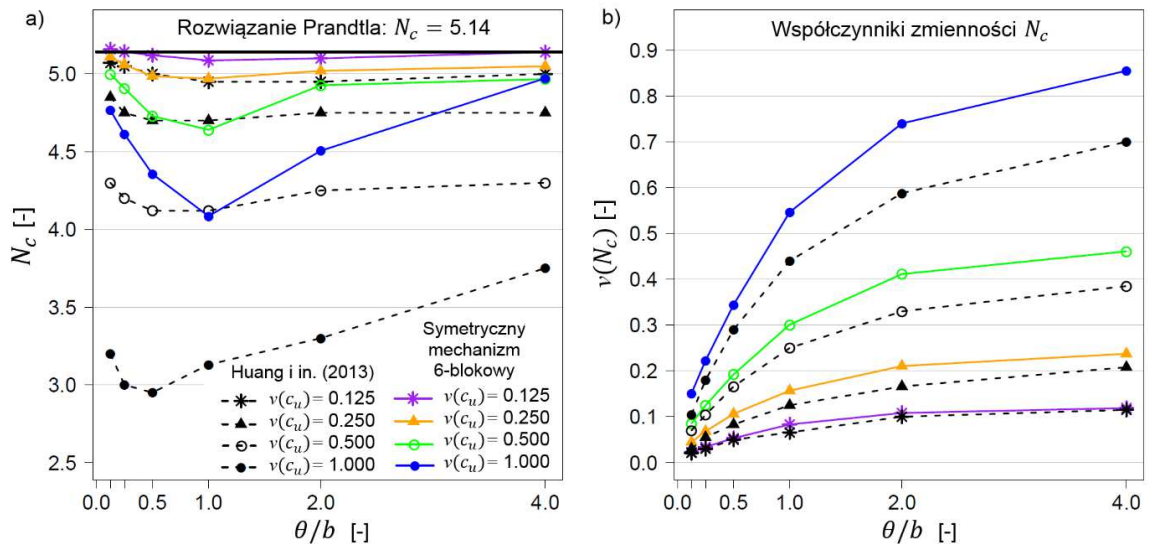
nośności podłoża) w porównaniu z wpływem ilości iteracji przy wyznaczaniu macierzy kowariancji. Niemniej jednak rezultaty powyższych analiz wskazują, że poprzez wykonanie podwójnej iteracji postaci macierzy kowariancji, efekt wpływu omawianego zagadnienia może zostać praktycznie wyeliminowany.

## 8.6. Porównanie rezultatów otrzymanych za pomocą opracowanej metodyki z wynikami opisanymi w literaturze

Zagadnienie losowej nośności podłoża typu  $c-\varphi$  z uwzględnieniem ciężaru objętościowego i przy założeniu anizotropii przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych nie zostało do tej pory opisane w literaturze w kontekście oceny górnej nośności podłoża. Z tego względu autor nie ma możliwości bezpośredniego odniesienia rezultatów analiz (zaproponowanych we wcześniejszych podrozdziałach) do rezultatów otrzymanych przez innych badaczy. Opublikowane rezultaty, mogące służyć porównaniu, dotyczą przypadku warunków bez odpływu ( $\varphi = 0$ ) i założenia izotropii przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych gruntu; otrzymano je w ramach metody RFLA (Huang i in., 2013). W celu porównania rezultatów otrzymanych w ramach zaproponowanej w rozprawie metodyki oceny losowej nośności podłoża z wynikami uzyskanymi dla metody RFLA, przeprowadzono analogiczne analizy jak Huang i in. (2013). Analizy wykonano przy założeniu liczby symulacji  $N = 1000$  dla każdego rozpatrywanego zagadnienia. Założono wartość średnią wytrzymałości na ścinanie  $c_u = 100$  kPa oraz cztery wartości współczynnika zmienności  $c_u$ , tj.  $v(c_u)$  równe 0.125, 0.25, 0.5 i 1.0; w przypadku każdej wartości  $v(c_u)$  przeanalizowano sześć różnych wartości skal fluktuacji, tj.  $\theta/b$  równe 0.125, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0 oraz 4.0. Rezultaty analiz przy założeniu symetrycznego mechanizmu zniszczenia zestawiono na rysunkach 8.6 i 8.7. Wartości średnie współczynnika nośności  $N_c$  wraz z przedziałami ufności wartości średniej  $N_c$  (linie przerywane) podano na rysunku 8.6. Porównanie z rezultatami uzyskanymi za pomocą metody RFLA jest przedmiotem rysunku 8.7.

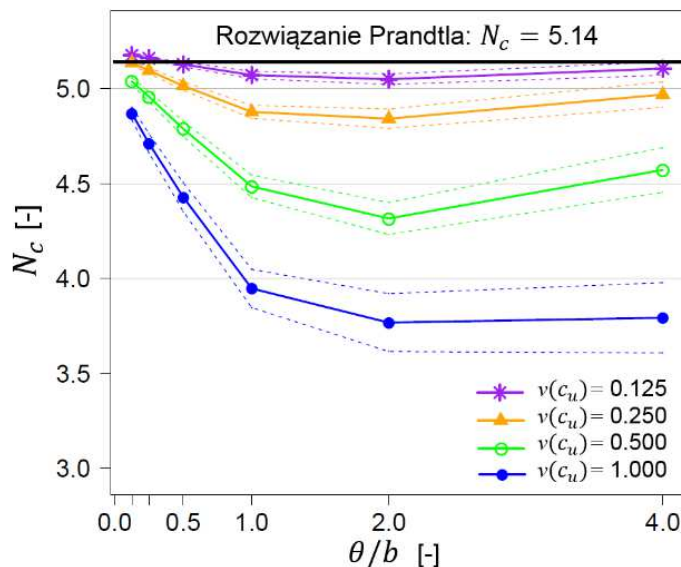


Rysunek 8.6. Wartości średnie współczynnika nośności  $N_c$  w zależności od skali fluktuacji (linie przerywane oznaczają przedziały ufności wartości średniej) oraz różnych wartości współczynników zmienności  $c_u$ .

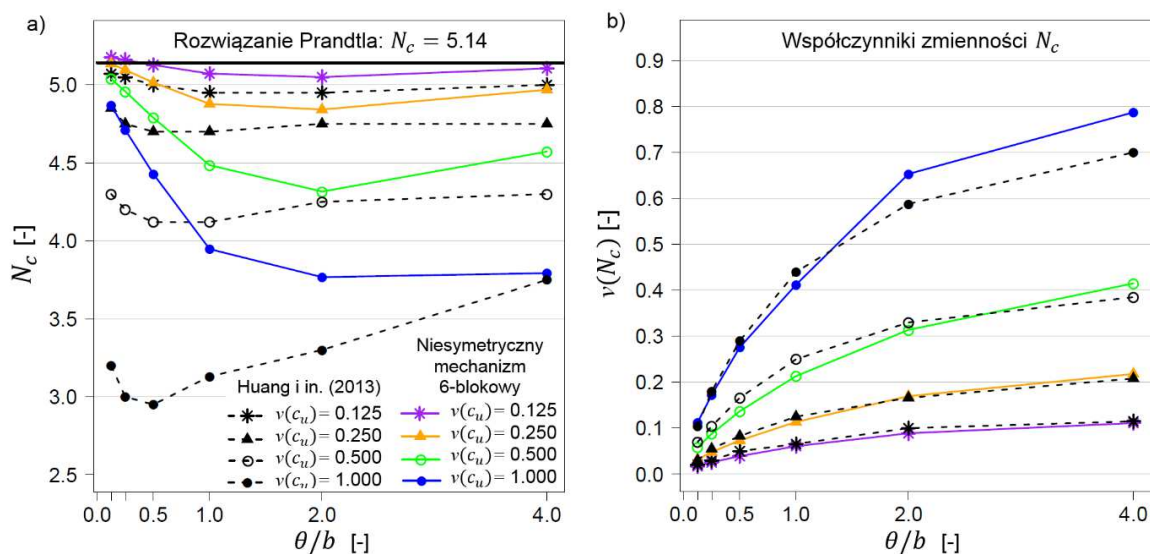


Rysunek 8.7. Porównanie rezultatów. Kolorem oznaczono rezultaty otrzymane za pomocą opracowanej metodyki przy założeniu symetrycznego mechanizmu 6-blokowego, na czarno oznaczono rezultaty otrzymane przez Huang i in. (2013); a) przedstawia wartości średnie współczynnika  $N_c$  w zależności od skali fluktuacji, b) przedstawia współczynniki zmienności  $N_c$  w zależności od skali fluktuacji.

Na rysunkach 8.8 i 8.9 przedstawiono analogiczne rezultaty otrzymane przy założeniu niesymetrycznego 6-blokowego mechanizmu zniszczenia (otrzymane rezultaty z uwagi na czytelność rysunków wyjątkowo przedstawiono linią ciągłą – w pozostałych miejscach w rozprawie wyniki przy założeniu mechanizmu niesymetrycznego prezentowano za pomocą linii przerywanych).



Rysunek 8.8. Wartości średnie współczynnika nośności  $N_c$  otrzymane przy założeniu niesymetrycznego mechanizmu 6-blokowego w zależności od skali fluktuacji (linie przerywane oznaczają przedziały ufności wartości średniej) oraz różnych wartości współczynników zmienności  $c_u$ .



Rysunek 8.9. Porównanie rezultatów. Kolorem oznaczono rezultaty otrzymane za pomocą opracowanej metodyki przy założeniu niesymetrycznego mechanizmu 6-blokowego, na czarno oznaczono rezultaty otrzymane przez Huang i in. (2013); a) przedstawia wartości średnie współczynnika  $N_c$  w zależności od skali fluktuacji, b) przedstawia współczynniki zmienności  $N_c$  w zależności od skali fluktuacji.

W ogólności zaprezentowane rezultaty wykazują zgodność z wynikami otrzymanymi w ramach podejścia zgodnego z metodą RFLA (Huang i in., 2013). W przypadku 6-blokowego mechanizmu symetrycznego otrzymane wartości średnie współczynnika  $N_c$  są relatywnie bliskie przy współczynniku zmienności  $c_u$  poniżej 0.25 i wyraźnie wyższe dla jego większych wartości. Zaistniałą sytuację można tłumaczyć większymi

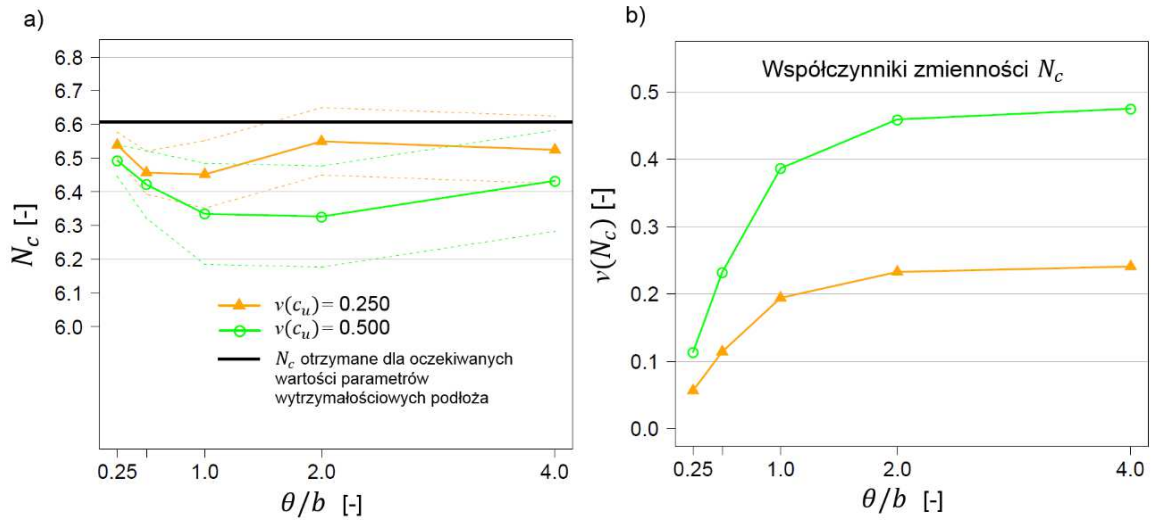
wartościami współczynnika zmienności  $N_c$  (rysunek 8.7b), co skutkowało (w związku z lognormalnym rozkładem opisującym  $c_u$ ) większą liczbą realizacji dających duże wartości  $c_u$ , a to mogło przełożyć się na wartości średnie  $N_c$ . Należy pamiętać, że obydwa podejścia pomimo tego, że wykorzystują ocenę górną nośności podłoża, są zupełnie różne. Ponadto, na rysunku 8.6 przedstawiono wyznaczone przedziały ufności dla otrzymanych wartości średnich  $N_c$ , które wnoszą dodatkowe, istotne niepewności przy większych wartościach współczynników zmienności  $c_u$ . Rezultaty przy założeniu niesymetrycznego 6-blokowego mechanizmu zniszczenia są wyraźnie bliższe tym, które zostały otrzymane w ramach metody RFLA, różnią się natomiast miejscem występowania minimum (rysunek 8.9a). Zastosowanie mechanizmu niesymetrycznego daje w rezultacie minimum przy  $\theta/b = 2.0$  i wyraźnie wyższe wartości średnie  $N_c$  przy relatywnie małych wartościach skali fluktuacji. W kontekście wartości współczynników zmienności obydwa podejścia wykazują praktycznie idealną zgodność. Obserwując zachowanie się wartości średnich na rysunkach 8.7a i 8.9a można zauważyć, że w przypadku mechanizmu symetrycznego otrzymano minimum przy  $\theta/b = 1.0$ , a dla niesymetrycznego przy  $\theta/b = 2.0$ . Powyższa obserwacja może wskazywać na wpływ rozmiaru mechanizmu zniszczenia na lokalizację wystąpienia efektu najgorszego przypadku.

Metodyka oceny losowej nośności podłoża zaproponowana w niniejszej rozprawie opiera się na kinematycznych mechanizmach zniszczenia. Korzyścią takiego podejścia jest zwiększenie efektywności przeprowadzanych analiz i umożliwienie rozwiązania nieopisanych dotąd w literaturze zagadnień. Z drugiej strony, założenie symetrycznej czy niesymetrycznej geometrii mechanizmu zniszczenia jest pewnym ograniczeniem nałożonym na możliwe do uzyskania kształty geometrii zniszczenia. Dla przykładu, w skrajnym przypadku, gdy z jednej strony fundamentu wystąpi grunt o niższych parametrach wytrzymałościowych, w gruncie może wytworzyć się mechanizm zniszczenia wyłącznie po jednej stronie fundamentu; oczywiście, taki przypadek nie może zostać uwzględniony przy założeniu mechanizmu zniszczenia rozpościerającego się na dwie strony fundamentu (jak w niniejszej rozprawie). Jednakże, przedstawiona powyżej sytuacja praktycznie nie występuje w warunkach rzeczywistych (w obrębie jednej warstwy gruntowej), dlatego też zastosowanie kinematycznych mechanizmów zniszczenia z możliwością dostosowania geometrii zniszczenia (procedura optymalizacyjna) do różnych wartości parametrów wytrzymałościowych w dobry sposób odzwierciedla wpływ przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych.

Pomimo tego, w ramach przyszłych analiz autor zamierza dokładniej zbadać, jak duży jest wpływ opisanego wyżej założenia (mechanizmu zniszczenia rozchodzącego się na dwie strony fundamentu). Założenie to może być także przyczyną zaobserwowanych różnic w wartościach średnich  $N_c$  przy mniejszych wartościach skali fluktuacji (między wynikami otrzymanymi przez zastosowanie proponowanej metodyki i tymi otrzymanymi w ramach metody RFLA (Huang i in., 2013); patrz rysunek 8.9a). Metodykę zaproponowaną w rozprawie można rozszerzyć o możliwość uwzględnienia jednostronnego mechanizmu zniszczenia, jednak nie jest to przedmiotem niniejszej rozprawy.

Analogiczne analizy przeprowadzono także dla trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia. Jednakże, z uwagi na brak rozwiązań opisanych w literaturze, nie ma możliwości porównania rezultatów otrzymanych za pomocą przedstawionej metodyki. Na rysunku 8.10 przedstawiono otrzymane wartości średnie  $N_c$  oraz współczynniki zmienności  $\nu(N_c)$  dla kwadratowej stopy fundamentowej. Rozważono dwie wartości współczynnika zmienności wytrzymałości na ścinanie w warunkach bez odpływu:  $\nu(c_u) = 0.25$  i  $0.5$ ; w przypadku każdej wartości  $\nu(c_u)$  przeanalizowano pięć różnych wartości skal fluktuacji, tj.  $\theta/b$  równe  $0.25$ ,  $0.5$ ,  $1.0$ ,  $2.0$  oraz  $4.0$ . Otrzymane rezultaty wskazują na podobne zachowanie się wartości średnich  $N_c$ , jak w przypadku dwuwymiarowym – przyjmują one niższe wartości niż dla przypadku deterministycznego. Na rysunku 8.10b można zaobserwować szybszą stabilizację wartości współczynników zmienności  $N_c$  niż w przypadku mechanizmu dwuwymiarowego. Najprawdopodobniej jest to efekt uwzględnienia przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych w trzecim kierunku (który jest ignorowany w analizach dwuwymiarowych). Zaobserwowana sytuacja jest jednym z argumentów wskazujących na istotę analiz trójwymiarowych.



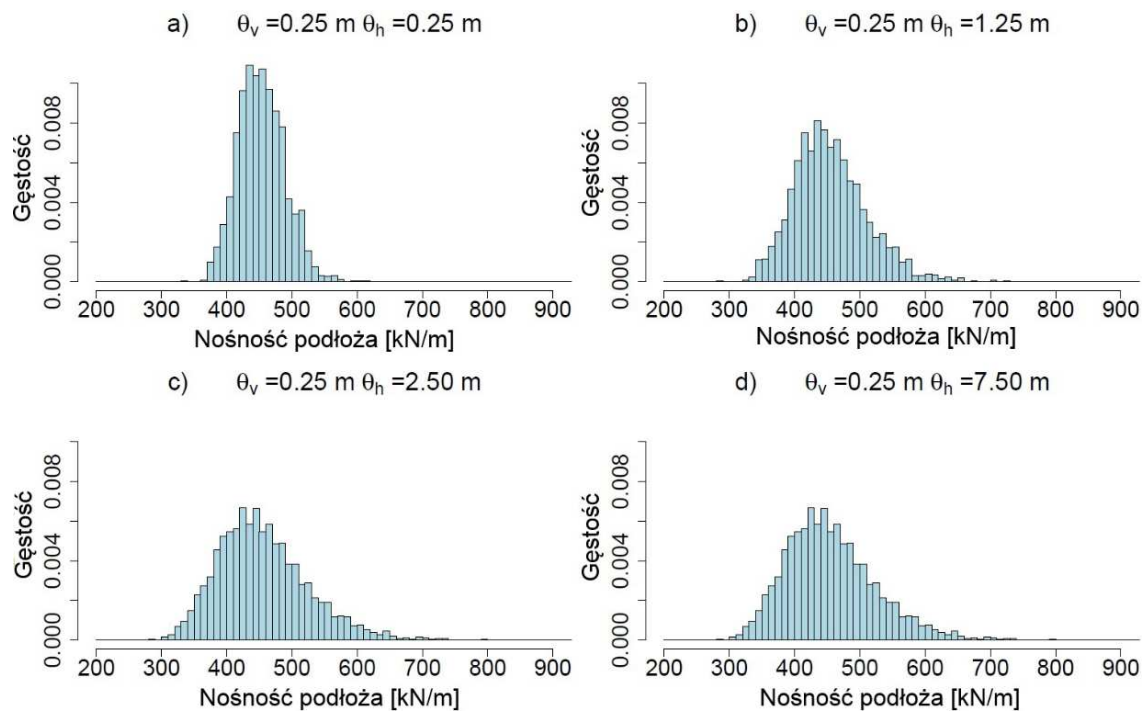


Rysunek 8.10. Rezultaty otrzymane dla kwadratowej stopy fundamentowej,  $b = 1.0$  m, a) przedstawia wartości średnie współczynnika  $N_c$  w zależności od skali fluktuacji, b) przedstawia współczynniki zmienności  $N_c$  w zależności od skali fluktuacji.

## 9. Rezultaty

W niniejszym rozdziale przedstawiono sposób prezentacji otrzymanych rezultatów dla analiz numerycznych opisanych w rozdziale 8. Z uwagi na zachowanie przejrzystości rozprawy wszystkie wyniki zostały zamieszczone w załączniku J, natomiast ich analiza i interpretacja jest przedmiotem rozdziału 10. W załączniku J wyniki zostały zgrupowane w trzech częściach, które odpowiadają mechanizmowi zniszczenia Prandtla, mechanizmowi 6-blokowemu oraz mechanizmowi trójwymiarowemu. Wszystkie wyniki szczegółowo opisane w załączniku J (gdzie przedstawiono histogramy nośności podłoża dla każdego rozpatzonego przypadku oraz odpowiadające im charakterystyki probabilistyczne) zostały przedstawione w opracowanej i przejrzystej formie w rozdziale 10. W związku z tym załącznik J należy traktować jako przedstawienie wszystkich wyjściowych danych, na podstawie których opracowano rozdział 10. Jako przykład sposobu, w jaki zostały przedstawione dane w załączniku J, na rysunku 9.1 pokazano histogramy nośności podłoża przy założeniu uśredniania parametrów wytrzymałościowych gruntu wzdłuż spirali logarytmicznej BC. Wyniki dotyczą podłoża spoistego (Tabela 8.1) oraz pionowej skali fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m (dla 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunku).

W analogii do rysunku 9.1 w załączniku J przedstawiono również histogramy nośności podłoża dla wszystkich rozpatrzonych przypadków. Dodatkowo, w tabelach i na wykresach przedstawiono odpowiadające im charakterystyki probabilistyczne takie jak: wartości średnie, odchylenia standardowe, współczynniki zmienności, mediany oraz maksymalne i minimalne wartości nośności podłoża otrzymane w symulacjach Monte Carlo.



Rysunek 9.1. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt spoisty, uśrednianie wzdłuż spirali BC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

## 10. Analiza otrzymanych rezultatów

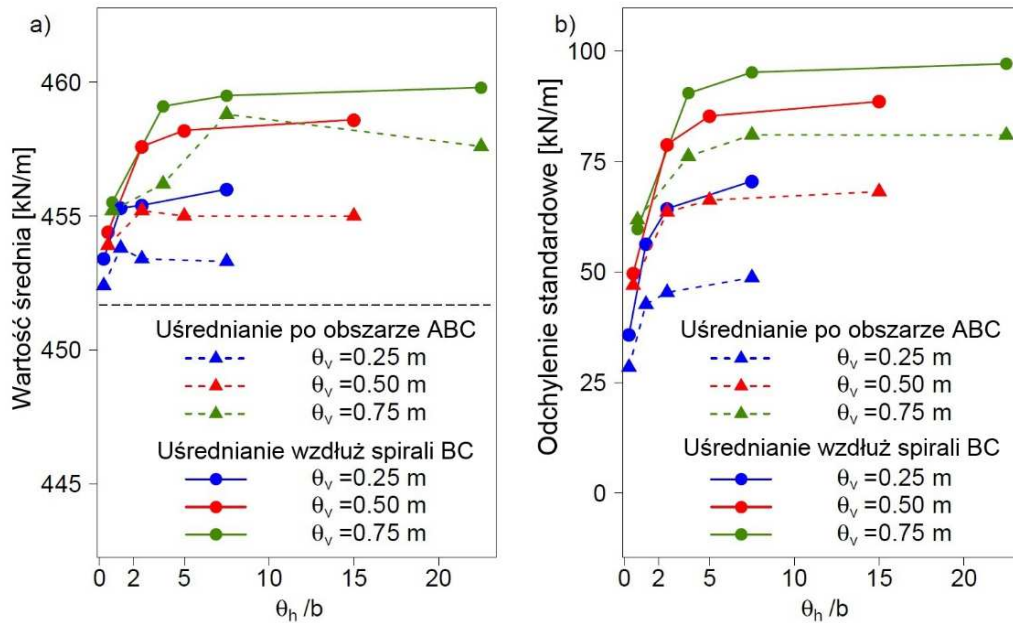
### 10.1. Ława fundamentowa

#### 10.1.1. Wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża

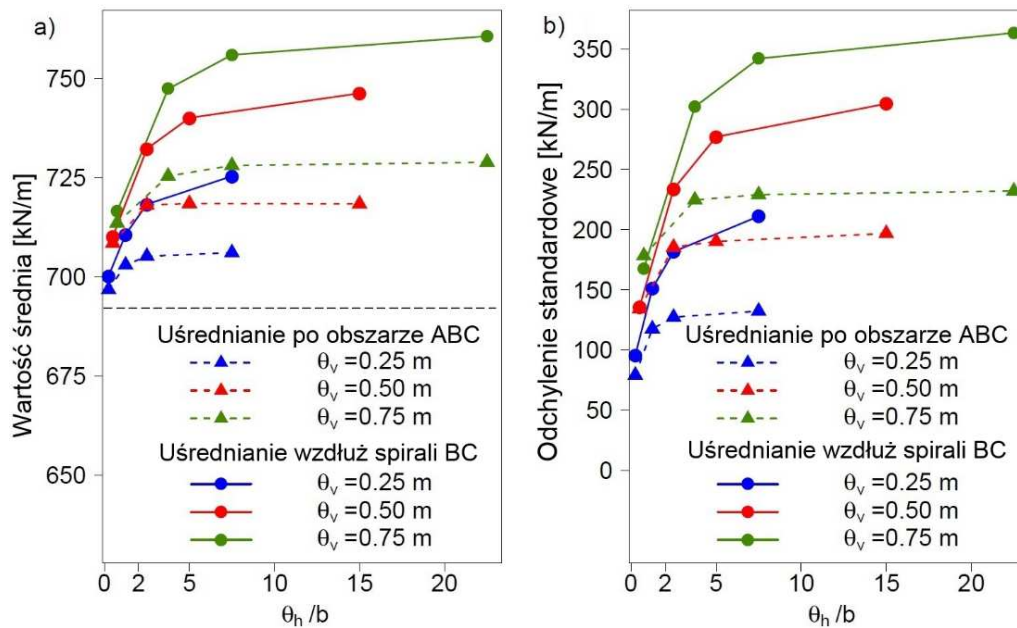
Rezultaty otrzymane w ramach przeprowadzonych analiz w oparciu o metodykę opracowaną w rozprawie w zastosowaniu do ławy fundamentowej (płaski stan odkształcenia) zostały przedstawione w załączniku J.1 oraz J.2. Załącznik J.1 dotyczy analiz przeprowadzonych przy rozważeniu mechanizmu Prandtla, natomiast załącznik J.2 dotyczy 6-blokowego mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego. W celu porównania otrzymanych rezultatów, zestawiono je na rysunkach przedstawiających wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża dla rozpatrywanych zagadnień.

#### Mechanizm Prandtla

Na rysunku 10.1 pokazano wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla. Na rysunku zawarto rezultaty dla dwóch procedur uśredniających parametry wytrzymałościowe podłoża gruntowego, mianowicie: przy uśrednianiu wzdłuż spirali logarytmicznej BC i przy uśrednianiu po obszarze deformacji objętościowej ABC (patrz rozdział 6.2.3).



Rysunek 10.1. Porównanie rezultatów przy uśrednianiu po obszarze ABC oraz wzdłuż spirali BC przy założeniu mechanizmu Prandtla,  $b = 1.0$  m, podłoże spójne, a) wartości średnie nośności podłoża, b) odchylenia standardowe nośności podłoża.



Rysunek 10.2. Porównanie rezultatów przy uśrednianiu po obszarze ABC oraz wzdłuż spirali BC przy założeniu mechanizmu Prandtla,  $b = 1.0$  m, podłoże niespójne, a) wartości średnie nośności podłoża, b) odchylenia standardowe nośności podłoża.

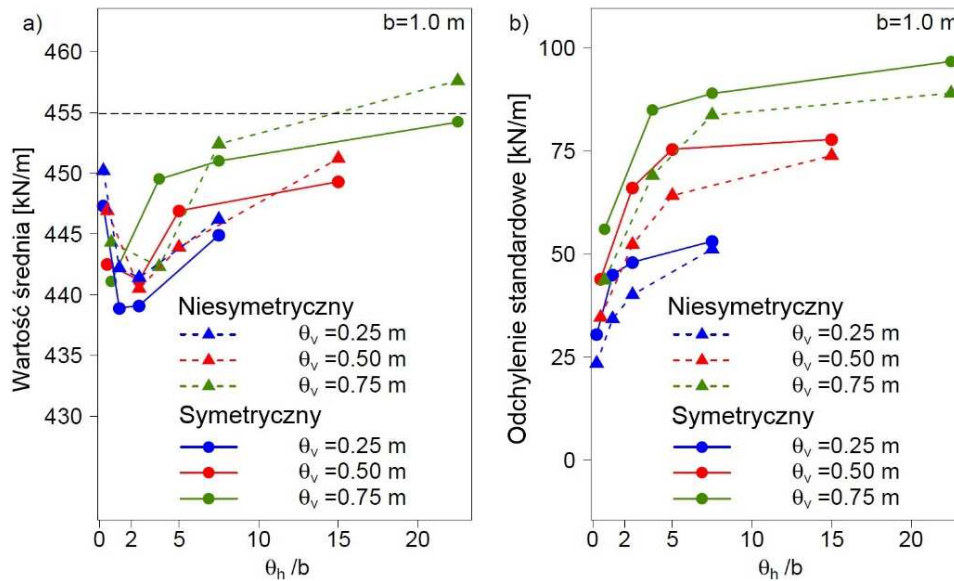
Na rysunku 10.2 przedstawiono analogiczne informacje jak na rysunku 10.1, uzyskane przy założeniu podłoża niespójnego. Na obu rysunkach linią przerywaną oznaczono wyniki otrzymane przy uśrednianiu po obszarze ABC. W przypadku obu typów podłoża

gruntowego obserwuje się podobne tendencje w wartościach średnich i odchyleniach standardowych nośności podłoża (w związku ze stosunkowo niewielkimi zmianami wartości średnich nośności, obserwuje się bardzo zbliżone zachowanie współczynników zmienności nośności podłoża w odniesieniu do odchyłeń standardowych – z tego względu nie przedstawiono ich na wykresach, natomiast są one podane w tabelach w załączniku J). W ogólności, zgodnie z rysunkami 10.1a i 10.2a obserwuje się wzrost wartości średniej nośności wraz ze wzrostem stosunku poziomej skali fluktuacji do szerokości fundamentu  $\theta_h/b$ . Wzrost ten jest szybki przy wartościach  $\theta_h/b < 5$ , wyraźnie zwalnia w przedziale  $\theta_h/b \in (5, 10)$  i stabilizuje się przy wartościach  $\theta_h/b > 10$ . Przedziały ufności wartości średnich nośności zestawiono w załączniku H. Wartości odchyłeń standardowych nośności (rys. 10.1b i 10.2b) zachowują się podobnie jak wartości średnie, stabilizując się dla  $\theta_h/b > 10$ . Obydwa sposoby uśredniania parametrów podłoża prowadzą do znacznych różnic w wartościach odchyłeń standardowych nośności; uśrednianie po obszarze ABC daje w rezultacie mniejsze wartości odchyłeń standardowych i szybszą ich stabilizację ( $\theta_h/b > 5$ ). Różnice w wartościach odchyłeń standardowych rosną wraz ze wzrostem stosunku  $\theta_h/b$  i przyjmują większe wartości w przypadku podłoża niespoistego. Przy założeniu izotropii ( $\theta_h = \theta_v$ ) różnice w odchyleniach standardowych nośności są niewielkie. W przypadku wartości średnich nośności podłoża różnice pomiędzy obydwoma podejściami także występują, natomiast są znacznie mniejsze niż dla odchyłeń standardowych nośności podłoża (zakres osi pionowej na rysunkach 10.1a i 10.2a to odpowiednio ok. 20 kN/m i 120 kN/m).

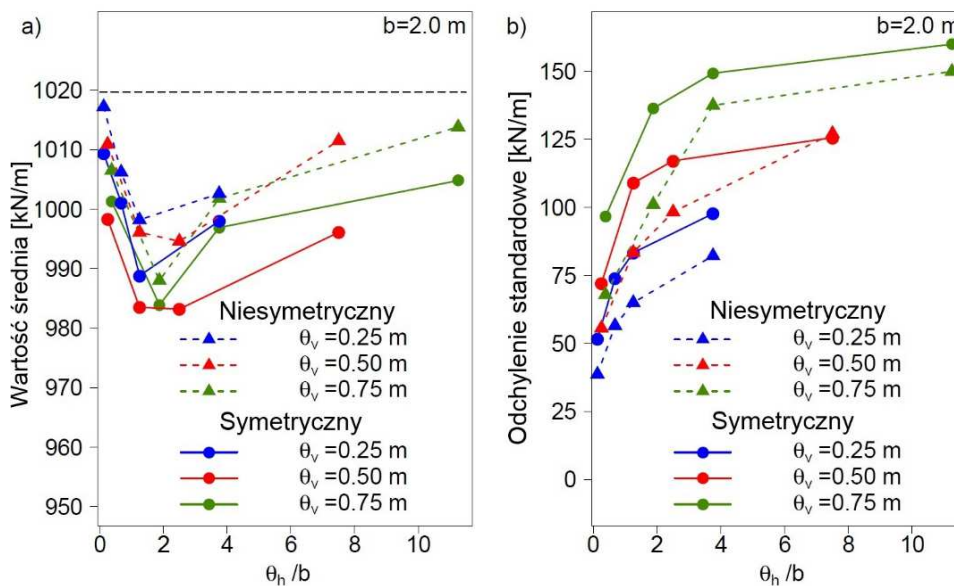
#### Mechanizm 6-blokowy symetryczny i niesymetryczny

Na rysunkach 10.3, 10.4, 10.5 i 10.6 zestawiono otrzymane wartości średnie oraz odchylenia standardowe nośności podłoża dla symetrycznego oraz niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia. Rezultaty dotyczą kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia, których geometria była optymalizowana także z uwagi na wartość ciężaru objętościowego gruntu. Rysunki 10.3b i 10.5b wyraźnie wskazują na podobieństwo z mechanizmem Prandtla (rys. 10.1b i 10.2b) w otrzymanych tendencjach dla odchylenia standardowego nośności podłoża. Obserwuje się wyraźny wzrost wartości odchyłeń standardowych nośności przy małych wartościach stosunku  $\theta_h/b (< 5)$ , który zwalnia wraz z rosnącą wartością poziomej skali fluktuacji i stabilizuje się dla  $\theta_h/b > 10$ . Stabilizacja jest mniej wyraźna niż dla mechanizmu Prandtla. Zasadnicza różnica jest widoczna w wartościach średnich nośności podłoża, które osiągają minimum w okolicach

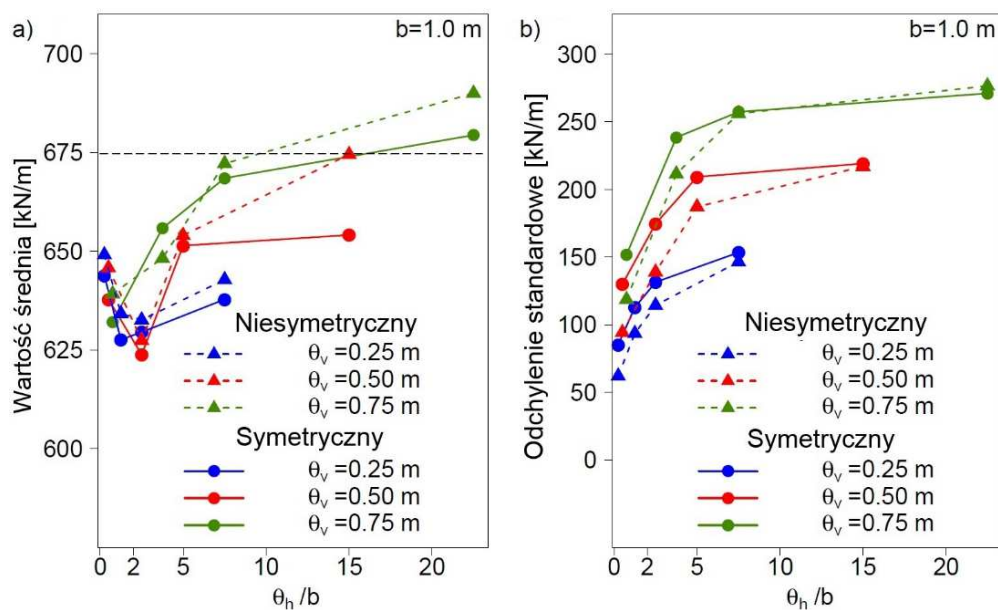
$\theta_h/b = 2.0$ . Co więcej, miejsce wystąpienia minimum na wykresie wartości średnich nośności jest takie samo dla dwóch rozpatrywanych szerokości fundamentu, tj.  $b = 1.0$  m oraz  $b = 2.0$  m. Podobne zachowanie zostało zidentyfikowane w ramach losowej metody elementów skończonych (RFEM) i nazwane efektem najgorszego przypadku (*worst case*; Griffiths i Fenton, 2001), tj. korelacją, przy której wartości średnie nośności osiągają wartość minimalną lub odchylenia standardowe nośności osiągają wartość maksymalną.



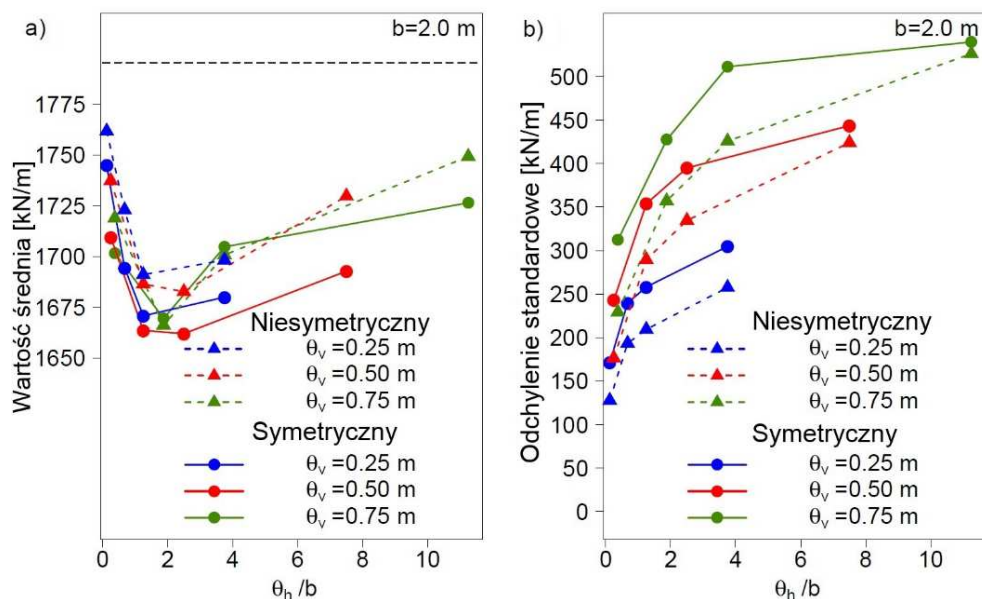
Rysunek 10.3. Porównanie rezultatów otrzymanych przy rozpatrzeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego,  $b = 1.0$  m, podłoże spoisne, a) wartości średnie nośności podłoża, b) odchylenia standardowe nośności podłoża.



Rysunek 10.4. Porównanie rezultatów otrzymanych przy rozpatrzeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego,  $b = 2.0$  m, podłoże spoisne, a) wartości średnie nośności podłoża, b) odchylenia standardowe nośności podłoża.



Rysunek 10.5. Porównanie rezultatów otrzymanych przy rozpatrzeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego,  $b = 1.0$  m, podłoże niespoiste, a) wartości średnie nośności podłoża, b) odchylenia standardowe nośności podłoża.



Rysunek 10.6. Porównanie rezultatów otrzymanych przy rozpatrzeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego,  $b = 2.0$  m, podłoże niespoiste, a) wartości średnie nośności podłoża, b) odchylenia standardowe nośności podłoża.

W rozważonych przypadkach dotyczących mechanizmu 6-blokowego efekt najgorszego przypadku jest widoczny wyłącznie dla wartości średnich nośności podłoża. Niemniej jednak, jego wystąpienie jest sporym zaskoczeniem i nie było oczekiwane przez autora - z uwagi na całkowicie inny charakter przeprowadzonych analiz, tj. zastosowanie



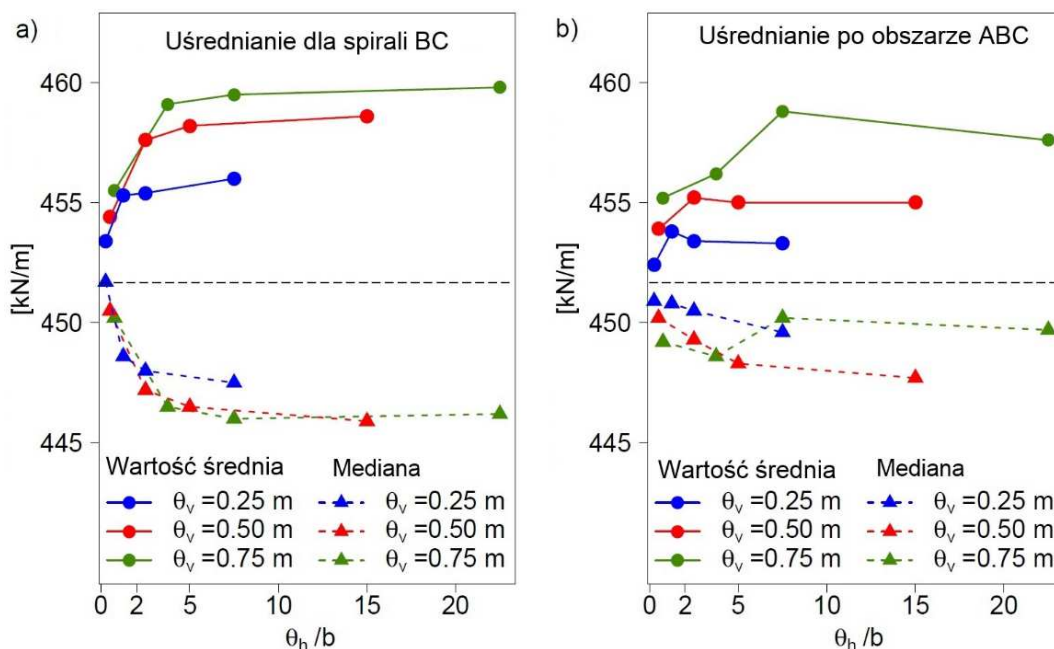
mechanizmów kinematycznie dopuszczalnych w stosunku do metody elementów skończonych (w przypadku RFEM) oraz dyskretyzację wartości pola losowego względem linii poślizgu w stosunku do generowania pola losowego metodą LAS (*local averaged subdivision*). Zaobserwowanie efektu najgorszego przypadku wskazuje, że jego źródło powinno leżeć u podstaw związanych z przyjętą strukturą korelacyjną. Z drugiej strony, efekt ten nie jest obserwowany w przypadku mechanizmu Prandla; może to być związane z brakiem optymalizacji z uwagi na ciężar objętościowy gruntu lub ze względu na mniejszą ilość stopni swobody w dostosowaniu geometrii zniszczenia Prandla do warunków gruntowych. Efekt najgorszego przypadku dla wartości średnich nośności ( $N_c$ ) zaobserwowano także w ramach analiz przedstawionych w rozdziale 8.6, które dotyczyły warunków bez odplywu i izotropii w przestrzennej zmienności parametru  $c_u$ . Analizy przedstawione w rozdziale 8.6 zostały wykonane w celu umożliwienia porównania rezultatów otrzymanych poprzez zastosowanie opracowanej metodyki z wynikami uzyskanymi metodą RFLA (Huang i in., 2013). Zgodnie z rozdziałem 8.6, w przypadku symetrycznego mechanizmu 6-blokowego otrzymano najniższe wartości średnie  $N_c$  przy  $\theta/b = 1.0$  oraz dla niesymetrycznego mechanizmu 6-blokowego przy  $\theta/b = 2.0$ .

W oparciu o rysunki 10.3a, 10.4a, 10.5a oraz 10.6a można zaobserwować, że wartości średnie nośności dla obu typów mechanizmów (symetrycznego i niesymetrycznego) są bardzo bliskie; jednakże patrząc całościowo na wszystkie wykresy, wartości średnie nośności otrzymane dla mechanizmu niesymetrycznego są nieznacznie większe. Z uwagi na dokładność oszacowania wartości średnich (załącznik H), na podstawie tak subtelnych różnic nie można wysnuć jednoznacznego wniosku. Poza wyraźnie widocznym efektem najgorszego przypadku, tym co odróżnia wartości średnie nośności podłoża uzyskane w oparciu o mechanizm 6-blokowy (w stosunku do mechanizmu Prandla) jest to, że prawie wszystkie znajdują się poniżej nośności obliczonej dla wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych gruntu (linie przerywane na rysunkach 10.1a, 10.2a, 10.3a, 10.4a, 10.5a i 10.6a). Przy założeniu podłoża spoistego, szerokości ławy fundamentowej  $b = 1.0$  m oraz mechanizmu Prandla otrzymano wartość 451.7 kN/m, natomiast dla mechanizmu 6-blokowego 454.9 kN/m. Dość zaskakująca, o 0.7% niższa ocena nośności w przypadku mechanizmu Prandla, wynika ze stosunkowo małej wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz przyjęcia mechanizmu 6-blokowego, co skutkuje zawyżeniem nośności o ok. 2%. Sytuacja wygląda odmiennie przy założeniu podłoża niespoistego, gdzie wartość nośności otrzymana dla mechanizmu Prandla wynosi 691.1 kN/m, natomiast dla mechanizmu 6-blokowego 674.7 kN/m; zatem pomimo zawyżenia

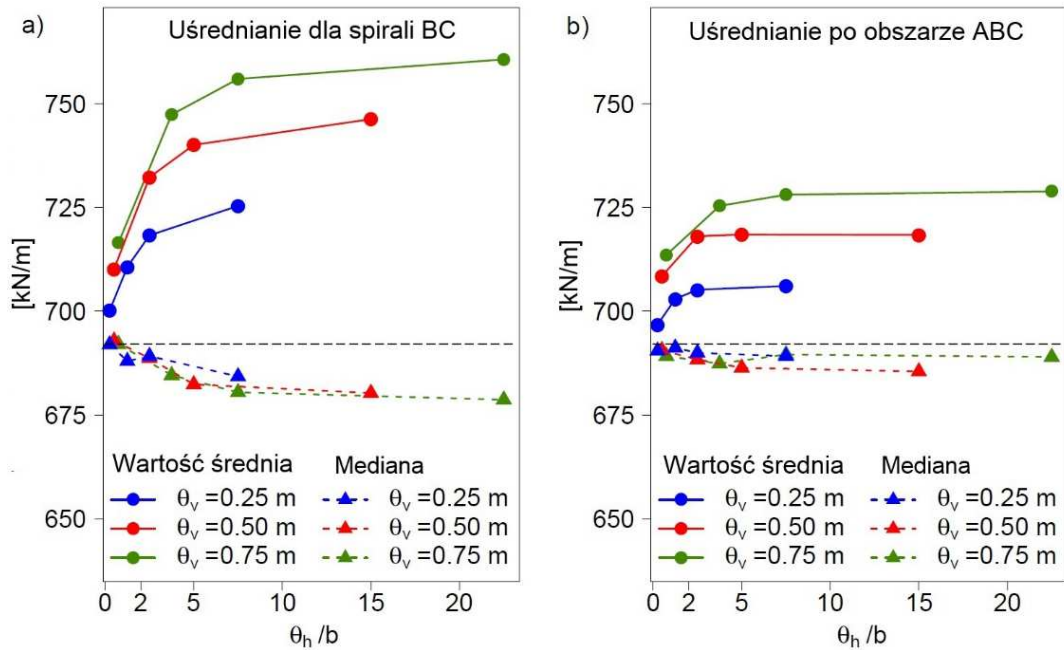
nośności przez mechanizm 6-blokowy, otrzymuje się wartość niższą o 2.5%. Otrzymane wartości średnie nośności podłoża przy ocenie losowej nośności są wyraźnie niższe dla dwóch rozpatrywanych przypadków podłoża gruntowego przy założeniu 6-blokowego mechanizmu zniszczenia (w porównaniu z mechanizmem Prandtla).

### 10.1.2. Mediany i ekstrema wartości nośności podłoża

Na podstawie rysunków przedstawionych w załączniku J można zaobserwować, że w szczególności przy dużych poziomych wartościach skali fluktuacji, otrzymuje się niesymetryczne rozkłady nośności podłoża (histogramy). Kształt otrzymanych histogramów w pewnym stopniu wynika z przyjęcia lognormalnych charakterystyk dla pól losowych, za pomocą których opisano parametry wytrzymałościowe podłoża. Jedynie w przypadku podłoża idealnie spoiściego można udowodnić powyższą zależność, natomiast gdy rozpatruje się podłoże typu  $c-\varphi$ , powyższa zależność nie może być udowodniona matematycznie. Niemniej jednak, kształt histogramów z rozdziału 9 (i załącznika J) wskazuje, że mogą one być opisane rozkładem lognormalnym. W rozdziale 7 przedstawiono procedurę dopasowania teoretycznych lognormalnych rozkładów prawdopodobieństwa do otrzymanych rozkładów nośności podłoża.



Rysunek 10.7. Porównanie otrzymanych wartości średnich oraz median nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla,  $b = 1.0$  m; podłoże spoiście, a) uśredniania wzdłuż spirali BC, b) uśredniania po obszarze ABC.

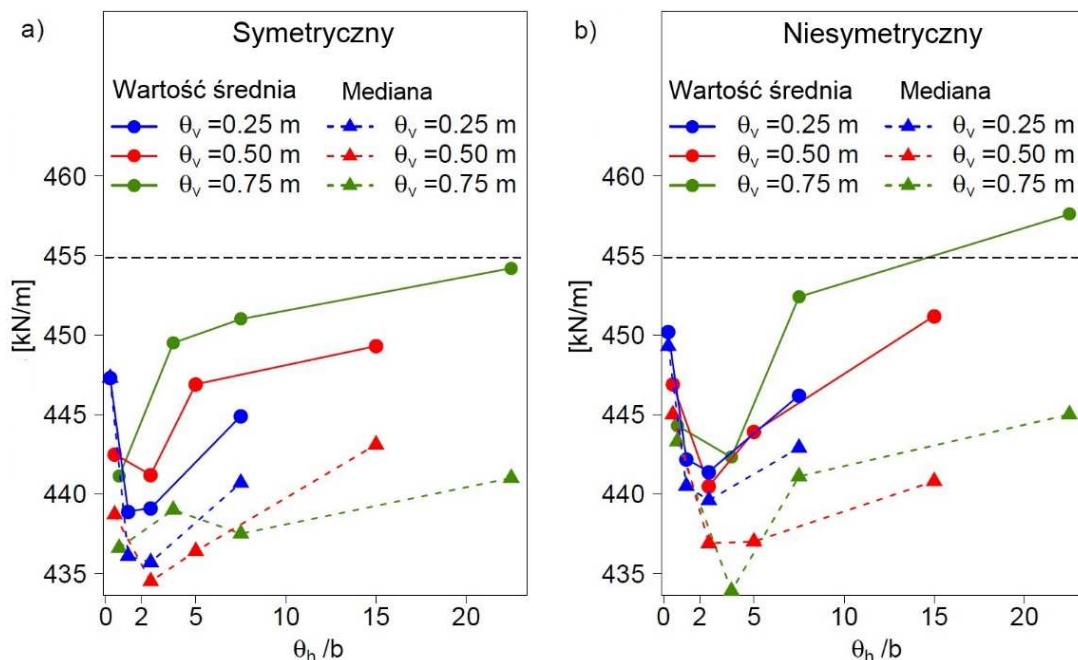


Rysunek 10.8. Porównanie otrzymanych wartości średnich oraz median nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla,  $b = 1.0$  m; podłożo niespoiste, a) uśredniania wzdłuż spirali BC, b) uśredniania po obszarze ABC.

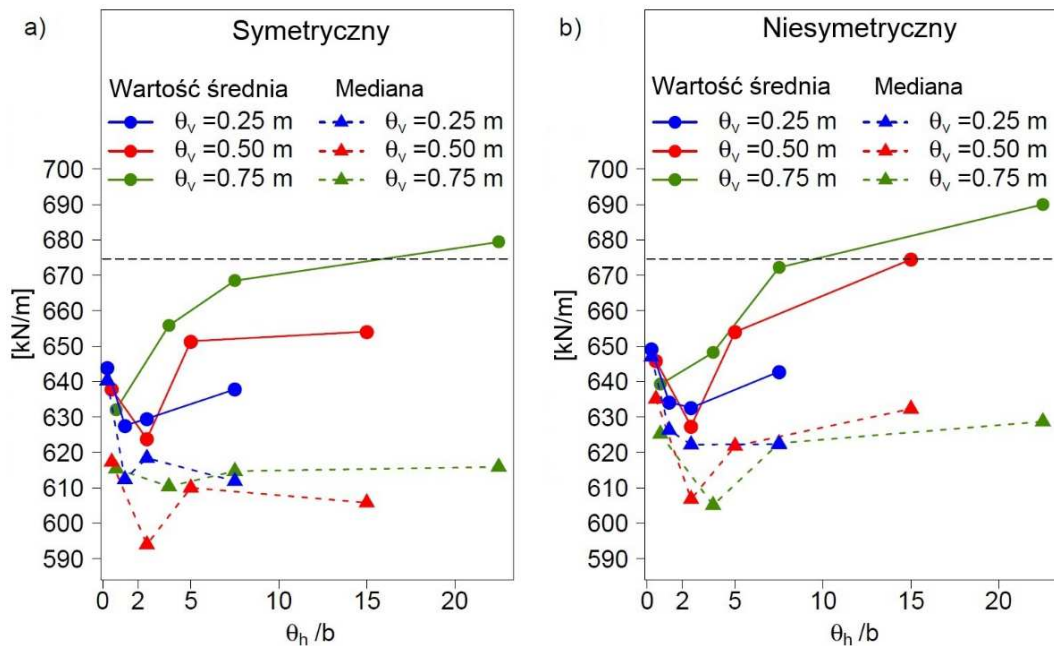
W większości prac w literaturze przedmiotu stosuje się wartości średnie i odchylenia standardowe nośności (lub współczynniki zmienności) do opisu charakterystyk rozkładu nośności podłoża. W przypadku, gdy mamy do czynienia z niesymetrycznymi rozkładami danej cechy, wydaje się właściwe przeanalizowanie wartości median nośności i odniesienie ich do otrzymanych wartości średnich nośności. Porównanie takie przedstawiono na rysunkach 10.7, 10.8, 10.9 i 10.10. Na dwóch pierwszych rysunkach zestawiono wartości średnie z medianami otrzymane przy założeniu mechanizmu Prandtla, pozostałe dwa wykresy dotyczą mechanizmu 6-blokowego. Na podstawie rysunków 10.7 i 10.8 można zaobserwować, że w przypadku mechanizmu Prandtla mediany nośności wydają się być lustrzanym odbiciem wartości średnich względem prostej poziomej wyznaczonej przy założeniu wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych (linia przerywana). W przypadku uśredniania wzdłuż spirali BC i podłoża spoiстого wykresy są „odbite” w proporcji ok. 1:1 (rys. 10.7a). Dla uśredniania wzdłuż spirali BC i podłoża niespoistego wartości median nośności znajdują się wyraźnie bliżej linii przerywanej niż wartości średnie nośności (rys. 10.8a). Podobne zjawisko można zaobserwować dla uśrednień po obszarze ABC (rys. 10.7b i 10.8b). Rosnące wartości względne różnic w wartościach średnich i medianach nośności wskazują na zwiększającą się asymetrię rozkładu nośności podłoża wraz ze wzrostem

kąta tarcia wewnętrznego i poziomej skali fluktuacji ( $\theta_h/b$ ). Podobnie jak wartości średnie nośności, także wartości median stabilizują się przy dużych wartościach poziomej skali fluktuacji.

W przypadku mechanizmu 6-blokowego otrzymane mediany nośności podłoża zachowują się zupełnie inaczej niż w przypadku mechanizmu Prandtla. Zgodnie z rysunkami 10.9 i 10.10, przebieg wartości median nośności wskazuje na ich translację względem wartości średnich nośności. Mediany nośności, podobnie jak w przypadku mechanizmu Prandtla, przyjmują wartości mniejsze od wartości średnich nośności. Dla median także obserwuje się efekt najgorszego przypadku, natomiast jest on słabszy niż dla wartości średnich nośności podłoża. Różnice między wartościami średnimi oraz medianami (w ogólności) rosną wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji – występuje wzrost asymetrii rozkładu nośności. Należy zwrócić uwagę na bezwzględną wartość median nośności; mianowicie, w przypadku mechanizmu Prandtla przyjmują one wyraźnie wyższe wartości. Podobne efekty obserwuje się przy szerokości ławy fundamentowej  $b = 2.0$  m (z tego względu nie przedstawiono tych wyników na rysunkach).

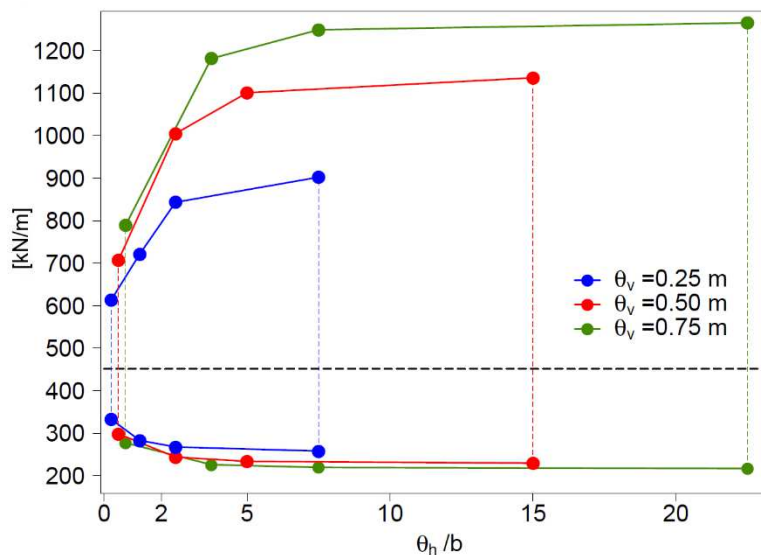


Rysunek 10.9. Porównanie otrzymanych wartości średnich oraz median nośności podłoża przy założeniu mechanizmu 6-blokowego,  $b = 1.0$  m; podłoże spoiste, a) mechanizm symetryczny, b) mechanizm niesymetryczny.

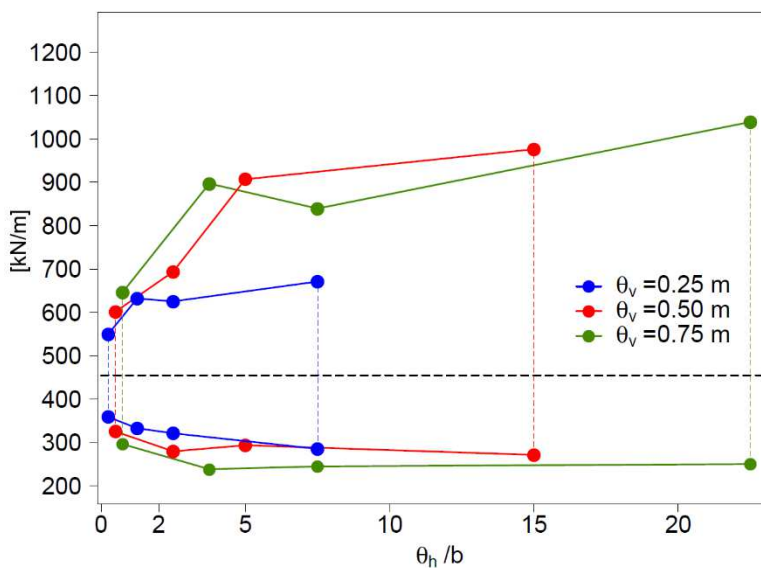


Rysunek 10.10. Porównanie otrzymanych wartości średnich oraz median nośności podłoża przy założeniu mechanizmu 6-blokowego,  $b = 1.0$  m; podłoże niespoiste, a) mechanizm symetryczny, b) mechanizm niesymetryczny.

Na rysunkach 10.11 i 10.12 przedstawiono skrajne wartości (maksymalne i minimalne) nośności podłoża otrzymane w drodze symulacji Monte Carlo. Oba rysunki pozwalają zaobserwować niesymetryczność rozkładów nośności. Linie przerywane oznaczają nośność podłoża otrzymaną przez przyjęcie oczekiwanych wartości parametrów wytrzymałościowych podłoża. Wpływ na otrzymane wartości skrajne nośności ma liczba przeprowadzonych symulacji (większa liczba symulacji oznacza wyższe prawdopodobieństwo wygenerowania większej wartości maksymalnej i mniejszej wartości minimalnej); efekt ten można pominąć przy równej liczbie symulacji dla rozpatrywanych zagadnień. Pomimo tego, autor zdecydował się przedstawić dwa rysunki (tj. 10.11 i 10.11) w celu ilustracji zachowania się wartości skrajnych w zależności od poziomej skali fluktuacji (wszystkie wartości ekstremalne nośności podłoża są przedstawione w tabelach w załączniku J). Na rysunkach 10.11 i 10.12 można zaobserwować wzrost asymetrii w rozkładach nośności podłoża – maksymalne wartości nośności rosną zdecydowanie szybciej niż maleją minimalne wartości nośności. Zjawisko to jest widoczne na histogramach przedstawionych w załączniku J, a także na wcześniejszych rysunkach porównujących mediany z wartościami średnimi nośności podłoża.



Rysunek 10.11. Maksymalne i minimalne wartości nośności podłoża otrzymane przy założeniu mechanizmu Prandtla, uśrednianie wzdłuż spirali BC, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m. Przerywaną linią oznaczono wartość nośności otrzymaną przez przyjęcie wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych podłoża.



Rysunek 10.12. Maksymalne i minimalne wartości nośności podłoża otrzymane przy założeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m. Przerywaną linią oznaczono wartość nośności otrzymaną przez przyjęcie wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych podłoża.

### 10.1.3. Założenie stałej macierzy kowariancji

Wpływ założenia o stałej macierzy kowariancji został przedyskutowany w pracy Puły i Chwały (2015) w odniesieniu do mechanizmu Prandtla, w kontekście wartości

wskaźników niezawodności oraz przy uśrednianiu dokonywanym wzdłuż spirali logarytmicznej BC. W celu dokładniejszego przeanalizowania wpływu założenia stałej macierzy kowariancji przeprowadzono obliczenia dla wybranych przypadków, tj. mechanizmu Prandtla przy następujących wartościach skal fluktuacji:  $\theta_v = 0.25$  m i  $\theta_h = 0.25$  m;  $\theta_v = 0.25$  m i  $\theta_h = 7.50$  m;  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 0.75$  m oraz  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 22.50$  m. Analogiczne analizy zostały przeprowadzone przy założeniu symetrycznego 6-blokowego mechanizmu zniszczenia. Otrzymane rezultaty zamieszczono w załączniku J. W tabelach 10.1 i 10.2 zestawiono otrzymane wartości średnie i odchylenia standardowe nośności przy założeniu indywidualnej macierzy kowariancji (zgodnie z metodyką podaną w rozdziale 5) i stałej macierzy kowariancji (macierz kowariancji wyznaczona przez przyjęcie wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych).

Tabela 10.1. Porównanie wartości średnich nośności przy założeniu stałej i indywidualnej macierzy kowariancji, mechanizm Prandtla, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m. Pogrubiono wartości większe.

		Wartości średnie nośności [kN/m]			
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ ) [m]		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Uśrednianie wzdłuż spirali BC	Indywidualna macierz kowariancji	453.4	456.0	455.5	459.8
	Stała macierz kowariancji	<b>453.6</b>	<b>456.5</b>	<b>455.9</b>	<b>460.4</b>
Uśrednianie po obszarze ABC	Indywidualna macierz kowariancji	452.4	453.4	455.2	457.6
	Stała macierz kowariancji	<b>453.1</b>	<b>453.9</b>	<b>456.5</b>	<b>458.0</b>

Tabela 10.2. Porównanie odchyłeń standardowych nośności przy założeniu stałej i indywidualnej macierzy kowariancji, mechanizm Prandtla, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m. Pogrubiono wartości większe.

		Odchylenia standardowe nośności [kN/m]			
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ ) [m]		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Uśrednianie wzdłuż spirali BC	Indywidualna macierz kowariancji	35.827	70.531	59.717	97.063
	Stała macierz kowariancji	<b>36.039</b>	<b>71.246</b>	<b>60.424</b>	<b>97.922</b>
Uśrednianie po obszarze ABC	Indywidualna macierz kowariancji	28.443	45.347	61.779	80.912
	Stała macierz kowariancji	<b>28.849</b>	<b>49.152</b>	<b>62.943</b>	<b>83.233</b>

Zgodnie z tabelami 10.1 i 10.2, w przypadku stałej macierzy kowariancji obserwuje się większe wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża niż przy indywidualnej macierzy kowariancji. Otrzymane różnice są niewielkie w szerokim zakresie wartości skal fluktuacji (w analizie wybrano przypadki graniczne, tj.  $\theta_h = \theta_v$  i  $\theta_h = 30\theta_v$ ). W tabelach 10.3 i 10.4 przedstawiono porównanie minimalnych i

maksymalnych wartości nośności podłoża otrzymanych w symulacjach Monte Carlo przy założeniu mechanizmu Prandtla. Podobnie jak poprzednio, w tabelach pogrubiono wartości większe.

Tabela 10.3. Porównanie minimalnych wartości nośności przy założeniu stałej i indywidualnej macierzy kowariancji, mechanizm Prandtla, podłoże spoisłe,  $b = 1.0$  m. Pogrubiono wartości większe.

		Wartości minimalne nośności			
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ )		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Uśrednianie wzdłuż spirali BC	Indywidualna macierz kowariancji	332.9	258.2	277.5	217.2
	Stała macierz kowariancji	<b>338.8</b>	<b>262.6</b>	<b>285.0</b>	<b>218.5</b>
Uśrednianie po obszarze ABC	Indywidualna macierz kowariancji	352.4	<b>305.1</b>	276.1	<b>239.8</b>
	Stała macierz kowariancji	<b>362.1</b>	300.7	<b>283.2</b>	233.2

Tabela 10.4. Porównanie maksymalnych wartości nośności przy założeniu stałej i indywidualnej macierzy kowariancji, mechanizm Prandtla, podłoże spoisłe,  $b = 1.0$  m. Pogrubiono wartości większe.

		Wartości maksymalne nośności			
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ )		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Uśrednianie wzdłuż spirali BC	Indywidualna macierz kowariancji	613.6	902.2	789.0	1265.2
	Stała macierz kowariancji	<b>624.0</b>	<b>943.7</b>	<b>823.1</b>	<b>1312.7</b>
Uśrednianie po obszarze ABC	Indywidualna macierz kowariancji	554.5	679.7	804.5	857.5
	Stała macierz kowariancji	<b>582.3</b>	<b>700.6</b>	<b>831.2</b>	<b>1002.4</b>

W większości przypadków wyższe wartości minimalne nośności podłoża otrzymuje się przy założeniu stałej macierzy kowariancji. Jednakże, w dwóch przypadkach przy uśrednianiu po obszarze ABC otrzymano wartości mniejsze (przypadki te dotyczą dużych wartości poziomych skal fluktuacji; może to być efekt silniejszej korelacji pomiędzy wartościami parametrów przy dokonywaniu uśrednień po obszarze ABC). W przypadku wartości maksymalnych nośności podłoża, większe wartości otrzymuje się wyłącznie przy rozpatrzeniu stałej macierzy kowariancji. Powyżej opisane zjawisko można jakościowo wytłumaczyć w następujący sposób: założmy, że w drodze procesu symulacyjnego otrzymujemy małą wartość kąta tarcia wewnętrznego, a co za tym idzie - otrzymujemy mały rozmiar geometrii zniszczenia. Geometria ta odpowiada za (względnie) małe wartości uśrednień, co oznacza, że małe wartości kąta tarcia wewnętrznego (lub spójności) są słabiej „ściągane” w kierunku wartości oczekiwanej (poprzez procedurę uśredniania). W przypadku stałej macierzy kowariancji (która jest wyznaczona dla oczekiwanych wartości parametrów wytrzymałościowych podłoża),



„ściągnięcie” małej wartości parametru podłoża w kierunku wartości oczekiwanej (poprzez procedurę uśredniania) będzie większe niż przy indywidualnie wyznaczonej macierzy kowariancji. Powyższe przekłada się na większą wartość nośności przy zastosowaniu stałej macierzy kowariancji. Dlatego też, w przypadku stałej macierzy kowariancji minimalne wartości nośności podłoża powinny być większe niż przy indywidualnej macierzy kowariancji. Analogiczne zjawisko obserwuje się przy maksymalnych wartościach nośności podłoża, tj. przy dużych wartościach kąta tarcia wewnętrznego (przy zastosowaniu indywidualnej macierzy kowariancji) uśrednienia parametrów wytrzymałościowych gruntu wyznacza się przy względnie dużej geometrii zniszczenia (co skutkuje większymi uśrednieniami). Z tego względu stała wartość macierzy kowariancji prowadzi do większych maksymalnych wartości nośności podłoża, co zostało zaobserwowane.

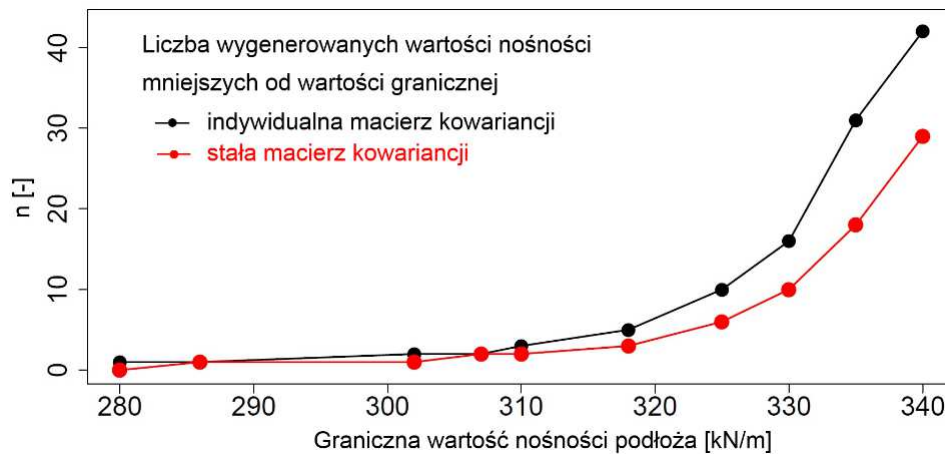
Wyniki otrzymane w analizie niezawodnościowej w oparciu o mechanizm Prandtla (Puła i Chwała, 2015) wskazywały na niewiele niższe wartości wskaźników niezawodności przy założeniu indywidualnej macierzy kowariancji. Oszacowanie wartości wskaźników niezawodności zgodnie z podejściem opisanym w rozdziale 7, przy założeniu globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $F = 1.6$ , prowadzi do wartości podanych w tabeli 10.5. Tabela 10.5 przedstawia wartości wskaźników niezawodności otrzymane przy uśrednianiu wzdłuż spirali BC.

Tabela 10.5. Porównanie wartości wskaźnika niezawodności przy założeniu stałej i indywidualnej macierzy kowariancji – mechanizm Prandtla, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m, obliczenia przeprowadzono dla globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $F = 1.6$ .

		Wskaźniki niezawodności			
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ )		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Uśrednianie wzdłuż spirali BC	Indywidualna macierz kowariancji	5.9923	<b>3.1230</b>	<b>3.6447</b>	<b>2.3612</b>
	Stała macierz kowariancji	<b>5.9928</b>	3.1169	3.6417	2.3170

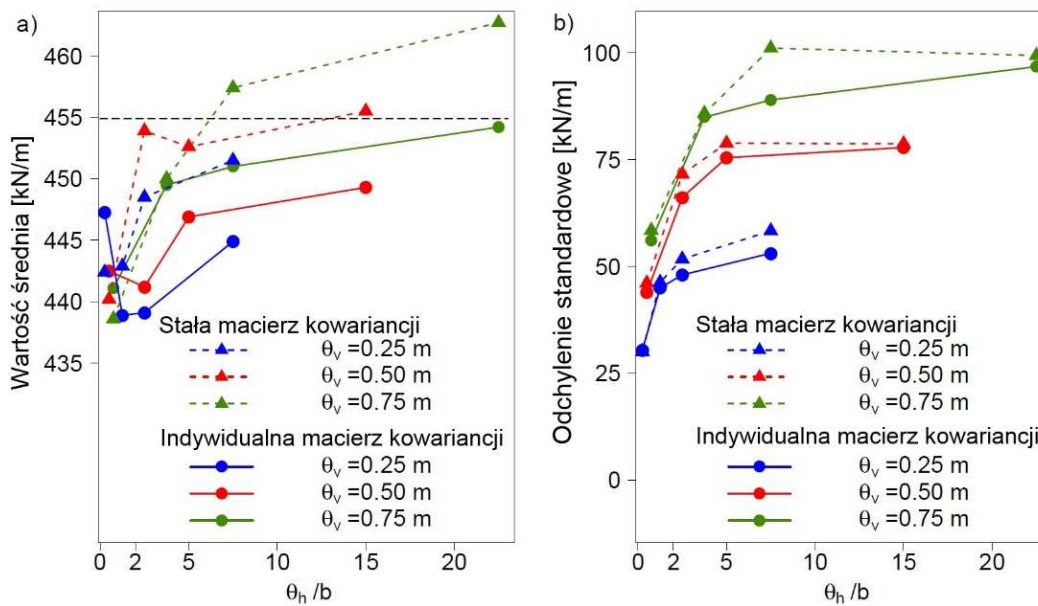
Przypadek ten przeanalizowano celowo, aby porównać wartości wskaźników niezawodności z wynikami otrzymanymi w pracy Puły i Chwały (2015). Okazuje się, że pomimo małych różnic otrzymane rezultaty wskazują na odwrotne zachowanie się wskaźników niezawodności w stosunku do wcześniejszych analiz. Prowadzenie obliczeń przy nieco innych parametrach zadania (niż we wspomnianej pracy) nie jest przyczyną zaobserwowanej sytuacji. Otrzymane różnice wynikają bezpośrednio z charakteru szacowania prawdopodobieństwa awarii. W pracy Puły i Chwały (2015)

prawdopodobieństwa awarii były wyznaczane bezpośrednio z symulacji Monte Carlo (ich liczba w odniesieniu do pojedynczego zagadnienia była znacznie większa niż w niniejszej rozprawie), dlatego omówiony wcześniej efekt zawyżania minimalnych wartości nośności przy założeniu stałej macierzy kowariancji skutkowało wyższymi wskaźnikami niezawodności (w porównaniu z macierzą indywidualną). Szacując wartość wskaźników niezawodności wprost z wygenerowanych danych w przypadku  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 22.5$  m, otrzymuje się (dla  $F = 1.6$ ) odpowiednio: 2.57 przy indywidualnej macierzy kowariancji oraz 2.60 przy stałej macierzy kowariancji (odpowiednio 40 oraz 37 realizacji prowadzących do awarii przy liczbie symulacji  $N = 8000$ ). Powyższy przykład ilustruje efekt zawyżenia wartości prawdopodobieństwa awarii poprzez podejście przyjęte w niniejszej rozprawie. Podejście to opiera się o dopasowanie teoretycznego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, co w przypadku długiego ogona po stronie dużych wartości nośności podłoża powoduje otrzymanie minimalnie większych wartości odchyłeń standardowych nośności przy stałej macierzy kowariancji (w porównaniu z indywidualną); w związku z tym otrzymuje się nieznacznie mniejsze wskaźniki niezawodności w przypadku stałej macierzy kowariancji. Efekt ten przedstawiono na rysunku 10.13, gdzie pokazano liczbę wygenerowanych wartości nośności niższych od wartości granicznej (dzieląc tę liczbę przez całkowitą liczbę symulacji otrzymuje się prawdopodobieństwo awarii); dane przedstawione na rysunku 10.13 dotyczą przypadku izotropowego, tj.  $\theta_v = \theta_h = 0.75$  m. Rysunek 10.13 wskazuje jednoznacznie na większe prawdopodobieństwo awarii przy macierzy kowariancji wyznaczonej indywidualnie (w kontrze do wartości wskaźników niezawodności z tabeli 10.5). W ogólności, opisany efekt ma większy wpływ w sytuacji, gdy prawdopodobieństwo awarii wyznacza się na podstawie niewielkiej liczby symulacji prowadzących do awarii. Jest to możliwa przyczyna wyjaśniająca rezultaty uzyskane w pracy Puły i Chwały (2015), tzn. opisany we wspomnianej pracy wzrost różnicy w wartościach wskaźników niezawodności przy większych ich wartościach (dla większych szerokości fundamentu), może wynikać z proporcjonalnie mniejszej liczby symulacji prowadzących do awarii przy większych wartościach wskaźników niezawodności.



Rysunek 10.13. Różnice w liczbie wygenerowanych nośności podłoża dla określonej wartości granicznej (oś pozioma). Rysunek przedstawia dane uzyskane w przypadku mechanizmu Prandtla, uśredniania wzdłuż spirali BC,  $\theta_v = \theta_h = 0.75$  m.

Na rysunku 10.14 przedstawiono wyniki uzyskane przy założeniu 6-blokowego symetrycznego mechanizmu zniszczenia. W przypadkach anizotropowych zaobserwowano (rys. 10.14a) wyższe wartości średnie nośności przy stałej macierzy kowariancji, a w przypadku izotropowym otrzymano niższe wartości średnie nośności dla stałej macierzy kowariancji. Zaobserwowane różnice są niewielkie, ich maksymalne wartości wynoszą ok. 1%. Odchylenia standardowe nośności przyjmują większe wartości przy założeniu stałej macierzy kowariancji. Otrzymane rezultaty pokrywają się z otrzymanymi w przypadku mechanizmu Prandtla. Wartości średnie nośności podłoża otrzymane poprzez zastosowanie stałej macierzy kowariancji nie wykazują efektu najgorszego przypadku, który jest widoczny przy indywidualnej macierzy kowariancji. Patrząc na otrzymane wartości minimalne nośności (załącznik J), nie można jednoznacznie stwierdzić, które z podejść daje wyższe ich oszacowania; natomiast w przypadku maksymalnych wartości nośności stała macierz kowariancji skutkuje wyższymi ich oszacowaniami. Efekt ten przekłada się na większe odchylenia standardowe nośności w przypadku stałej macierzy kowariancji (rysunek 10.14b).



Rysunek 10.14. Porównanie wartości średnich i odchyłeń standardowych nośności przy założeniu stałej i indywidualnej macierzy kowariancji w przypadku 6-blokowego symetrycznego mechanizmu zniszczenia, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m.

Podsumowując, zaobserwowane różnice dla podejść opartych na zastosowaniu stałej macierzy kowariancji oraz indywidualnej macierzy kowariancji mają istotne znaczenie przy zrozumieniu procesu kryjącego się za uśrednianiem parametrów po liniach poślizgu oraz wpływem uśredniania na otrzymane rezultaty. Wpływ założenia o stałości macierzy kowariancji na otrzymane nośności podłoża rośnie wraz ze wzrostem kąta tarcia wewnętrznego (oraz odchylenia standardowego opisującego ten parametr), co wynika z większych różnic w rozmiarach geometrii zniszczenia. Wpływ ten powinien być pomijalny dla podłoża idealnie spoistego i w przypadku bardzo małych wartości kąta tarcia wewnętrznego. Przeprowadzone analizy pokazują, że koncepcję stałej macierzy kowariancji można zastosować do celów praktycznych; dzieje się tak z uwagi na stosunkowo niewielkie różnice, których wpływ na otrzymywane rezultaty jest znacznie niższy niż niektóre pozostałe czynniki (wpływające na ocenę losowej nośności podłoża), jak chociażby dokładność w oszacowaniu wartości skal fluktuacji (Pieczyńska-Kozłowska i in., 2017).

#### 10.1.4. Wpływ ciężaru objętościowego

W przypadku podłoża idealnie spoiściego (lub warunków bez odpływu) z uwagi na symetryczną geometrię każdej z dwóch stron mechanizmu zniszczenia, otrzymane wartości nośności przy rozważaniu gruntu ważkiego i nieważkiego są identyczne. W przypadku założenia gruntu ważkiego, z uwagi na wspomnianą symetrię, moce sił grawitacji równoważą się i nie wnoszą dodatkowego przyczynku do wartości nośności. Z drugiej strony, poprzez zastosowanie podejścia zaproponowanego w niniejszej rozprawie, otrzymuje się różne rozmiary poszczególnych bloków tworzących mechanizm zniszczenia (które wynikają z przyjęcia różnych wartości spójności na poszczególnych liniach poślizgu i zastosowania procedury optymalizacyjnej). Przekłada się to na możliwość wystąpienia dodatkowych (niezrównoważonych) wartości mocy sił ciężkości (gdy uwzględnia się ciężar objętościowy). W zależności od geometrii mechanizmu zniszczenia mogą one zwiększać lub zmniejszać wartość nośności. Aby sprawdzić, czy omówione wyżej zjawisko ma istotny wpływ przy ocenie losowej nośności podłoża, przeprowadzono szereg obliczeń w przypadku wybranych wartości skal fluktuacji dla ważkiego i nieważkiego gruntu. Analizy przeprowadzono dla  $c = 57.7$  kPa oraz  $\sigma_c = 28.65$  kPa, dla następujących zestawów wartości skal fluktuacji:  $\theta_v = 0.25$  m i  $\theta_h = 0.25$  m,  $\theta_v = 0.25$  m i  $\theta_h = 7.50$  m,  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 0.75$  m oraz  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 22.50$  m. Otrzymane rezultaty zestawiono w tabeli 10.6. Podobnie jak w poprzednim rozdziale, pogrubiono wartości większe. W wartościach średnich nośności praktycznie nie obserwuje się różnic (<1%), natomiast większe różnice pojawiają się przy odchyleniach standardowych nośności podłoża, gdzie dla  $\theta_v = 0.25$  m i  $\theta_h = 0.25$  m otrzymano o ok. 6% mniejszą wartość odchylenia standardowego przy założeniu podłoża nieważkiego. Podobne tendencje zaobserwowano w pozostałych przypadkach, z wyjątkiem  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 22.50$  m, dla którego otrzymano większą wartość odchylenia standardowego przy założeniu podłoża nieważkiego.

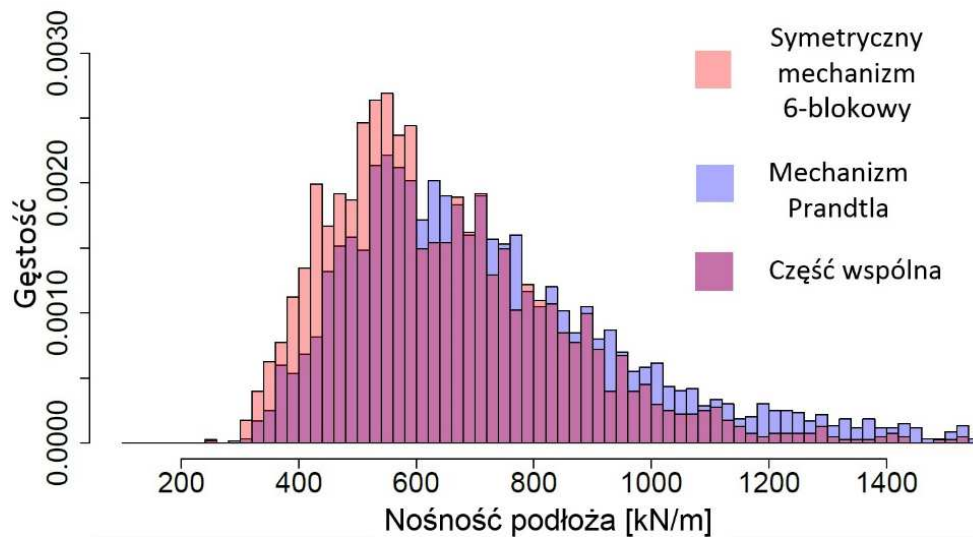
Tabela 10.6 Wpływ uwzględnienia ciężaru objętościowego w przypadku podłoża idealnie spoiстого, 6-blokowy mechanizm symetryczny,  $b = 1.0$  m. Szczegóły w tekście.

Wartości średnie nośności [kN/m]					
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ ) [m]		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Mechanizm symetryczny 6-blokowy	$\gamma \neq 0$	<b>299.8</b>	289.9	281.9	295.3
	$\gamma = 0$	297.6	<b>290.6</b>	<b>282.9</b>	<b>298.0</b>
Odchylenia standardowe nośności [kN/m]					
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ ) [m]		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Mechanizm symetryczny 6-blokowy	$\gamma \neq 0$	<b>37.18</b>	<b>66.95</b>	<b>67.00</b>	104.24
	$\gamma = 0$	34.90	65.30	64.26	<b>108.79</b>
Wartości minimalne nośności [kN/m]					
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ ) [m]		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Mechanizm symetryczny 6-blokowy	$\gamma \neq 0$	214.1	142.1	<b>141.2</b>	<b>106.4</b>
	$\gamma = 0$	<b>214.3</b>	<b>154.0</b>	122.8	98.5
Wartości maksymalne nośności [kN/m]					
Skala fluktuacji ( $\theta_v/\theta_h$ ) [m]		0.25/0.25	0.25/7.5	0.75/0.75	0.75/22.5
Mechanizm symetryczny 6-blokowy	$\gamma \neq 0$	446.5	<b>663.2</b>	<b>595.9</b>	814.6
	$\gamma = 0$	<b>468.5</b>	565.3	595.8	<b>823.6</b>

W przypadku wartości minimalnych i maksymalnych nie widać jakiegokolwiek tendencji. Niniejszy przykład wskazuje, że efekt wpływu ciężaru objętościowego przy założeniu gruntu idealnie spoiстого oraz przy założeniu przestrzennej zmienności parametrów podłoża jest niewielki, co więcej - jest trudny do jednoznacznej oceny w oparciu o przedstawione obliczenia.

Wpływ założenia o nieważkości gruntu na kształt geometrii zniszczenia przy gruntach z tarciami ilustrują rysunki 6.10 i 6.11. Jest on istotny i wpływa na wartości nośności podłoża. Co więcej, zmianie podlega kształt histogramu rozkładu nośności, co zaprezentowano na rysunku 10.15.

W przypadku mechanizmu Prandtla otrzymuje się wyraźnie większą ilość realizacji dających dużą wartość nośności podłoża (nadwyżka oznaczona na niebiesko na rys. 10.15). Większa ilość dużych wartości nośności wpływa na zwiększenie wartości średniej oraz zwiększenie odchylenia standardowego nośności. Przy założeniu mechanizmu Prandtla otrzymano 746.3 kN/m oraz 304.6 kN/m odpowiednio dla wartości średniej i odchylenia standardowego nośności, z kolei w przypadku mechanizmu symetrycznego 6-blokowego odpowiadające wartości wyniosły 654.1 kN/m oraz 219.2 kN/m. Są to znaczne różnice. Należy podkreślić, że gdyby w analizie nie zastosowano procedury uśredniającej wartości parametrów wytrzymałościowych względem rozmiaru geometrii



Rysunek 10.15. Porównanie otrzymanych histogramów nośności podłoża przy założeniu symetrycznego mechanizmu 6-blokowego (liczba realizacji  $N = 2000$ ) oraz mechanizmu Prandtla (liczba realizacji  $N = 3000$ ), podłożo niespoiste (tab. 8.2),  $b = 1.0$  m,  $\theta_v = 0.50$  m i  $\theta_h = 15.00$  m.

mechanizmu zniszczenia, otrzymane różnice pomiędzy dwoma podejściami byłyby jeszcze większe (z uwagi na większe rozmiary geometrii mechanizmu zniszczenia Prandtla uśrednienia parametrów wytrzymałościowych podłoża są także większe).

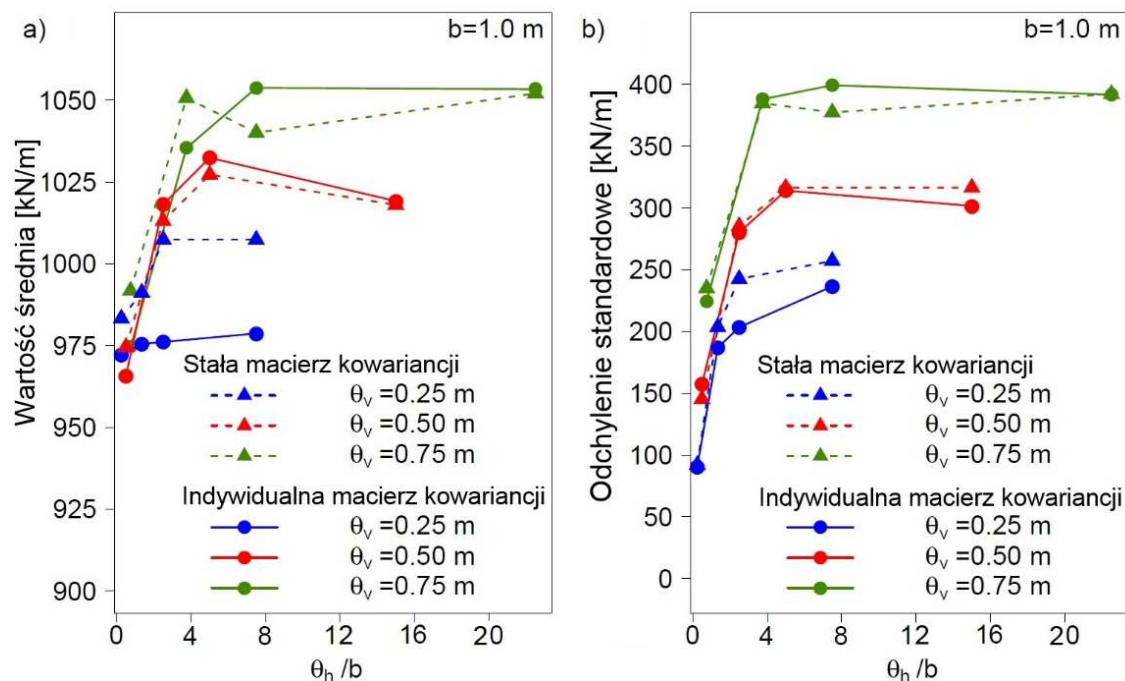
Przedstawiony przykład wskazuje wyraźnie, że w przypadku gruntów typu  $c-\varphi$  konieczne jest uwzględnienie ciężaru objętościowego gruntu przy wyznaczaniu geometrii mechanizmu zniszczenia. Jest to niezwykle ważny element przy opisie cech podłoża gruntowego za pomocą pól losowych.

## 10.2. Kwadratowa stopa fundamentowa

### 10.2.1. Wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża

W przypadku mechanizmu trójwymiarowego przeprowadzono analizy dla podłoża idealnie spoistego (rozdział 8.6) oraz podłoża spoistego (tabela 8.1); rezultaty otrzymane dla podłoża spoistego zaprezentowano na histogramach nośności oraz zestawiono w tabelach w załączniku J. Analizy przeprowadzono przy założeniu symetrii

mechanizmu zniszczenia (rozpatrzono jedno z czterech ramion mechanizmu zniszczenia); rozszerzenie analiz o przypadki niesymetryczne nie jest przedmiotem niniejszej rozprawy (jednak może zostać wprowadzone w ramach proponowanej metodyki). Założenie symetrii, podobnie jak w przypadku płaskiego mechanizmu zniszczenia, prowadzi do zawyżenia odchyłeń standardowych nośności przy małych wartościach skal fluktuacji (dotyczy w szczególności przypadków izotropowych). Obliczenia, podobnie jak dla mechanizmów w płaskim stanie odkształcenia, przeprowadzono w przypadku trzech wartości pionowej skali fluktuacji oraz - odpowiednio dla każdej z nich - czterech wartości skal poziomych. Rozpatrzono przypadki izotropowe i poprzez zwiększanie poziomej skali fluktuacji zwiększano anizotropię w strukturze korelacyjnej opisującej parametry podłoża gruntowego. Na rysunku 10.16 zestawiono otrzymane wartości średnie i odchylenia standardowe nośności. Ogólne zachowanie wartości średnich i odchyłeń standardowych nośności jest podobne do rezultatów uzyskanych w przypadku mechanizmu Prandtla. Obserwuje się wzrost wartości średnich nośności wraz ze wzrostem pionowej i poziomej skali fluktuacji i ich stabilizację przy wartościach  $\theta_h/b > 5$ .



Rysunek 10.16. Porównanie uzyskanych wartości średnich i odchyłeń standardowych nośności podłoża przy założeniu 5-blokowego trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia w przypadku stałej i indywidualnej macierzy kowariancji, podłoża spójnego,  $b = 1.0$  m, a) wartości średnie nośności, b) odchylenia standardowe nośności.

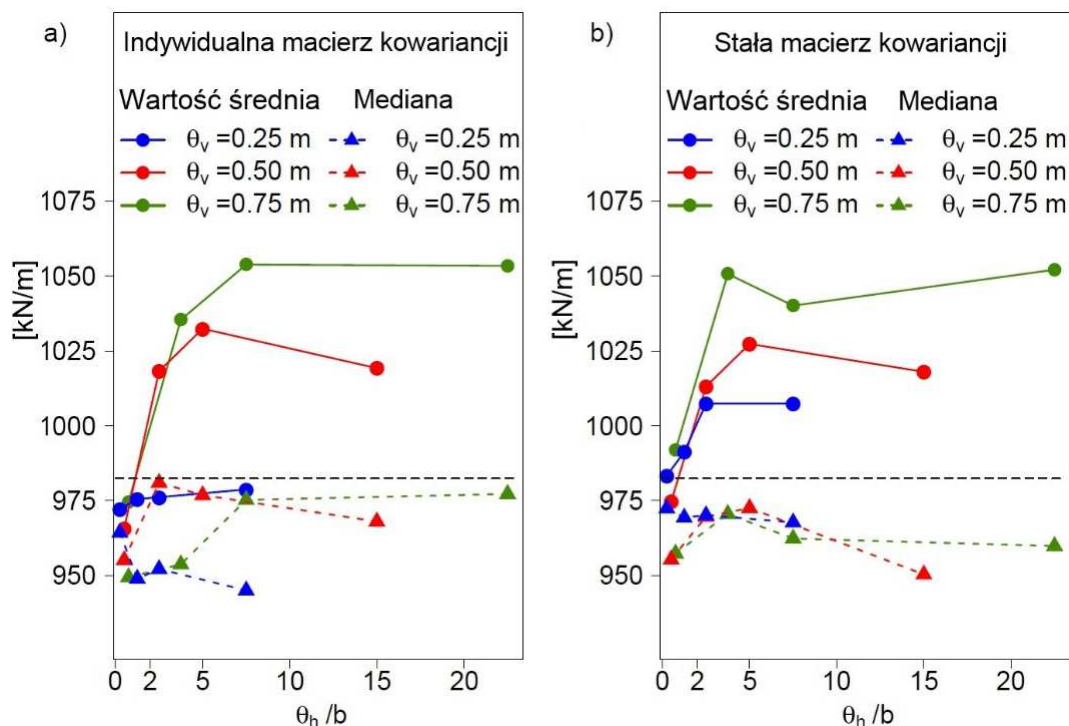


Podobne obserwacje dotyczą odchyłeń standardowych nośności podłoża; mianowicie, po szybkim wzroście ich wartość stabilizuje się przy  $\theta_h/b > 5$ . Na rysunku 10.16 przedstawiono rezultaty otrzymane przy założeniu stałej i indywidualnej macierzy kowariancji. Stała macierz kowariancji została wyznaczona przy wartościach oczekiwanych parametrów podłoża (tab. 8.1) oraz odpowiednich skal fluktuacji (dla każdego rozpatrzonego przypadku postaci macierzy kowariancji zestawiono w załączniku G). Różnice pomiędzy dwoma podejściami w przypadku wartości średnich nośności są widoczne jedynie dla najmniejszej wartości pionowej skali fluktuacji, tj. 0.25 m. Przy pionowych skalach fluktuacji równych 0.5 m oraz 0.75 m otrzymane wartości średnie nośności są praktycznie takie same (wzajemne różnice są mniejsze niż przedziały ufności wartości średnich - patrz załącznik H). Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku odchyłeń standardowych nośności. Zatem wpływ założenia o stałej macierzy kowariancji na uzyskane wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża jest niewielki (w porównaniu do podejścia opartego o indywidualną macierz kowariancji). Na rysunku 10.16 obserwuje się bardzo silny wpływ zarówno pionowej, jak i poziomej wartości skali fluktuacji na wartości odchyłeń standardowych nośności. Największa zmiana występuje w przejściu między przypadkiem izotropowym oraz przypadkiem anizotropowym, tj.  $\theta_h = 5\theta_v$ . Pięciokrotne zwiększenie poziomej wartości skali fluktuacji prowadzi praktycznie do podwojenia wartości odchylenia standardowego nośności. Wpływ tego efektu na otrzymane miary niezawodności jest decydujący. Stabilizacja wartości odchyłeń standardowych dla mechanizmu trójwymiarowego przebiega szybciej niż w przypadku zagadnień rozpatrzonych w płaskim stanie odkształcenia; dla pionowej skali fluktuacji wynoszącej 0.75 m wartości odchyłeń są identyczne przy poziomym skalach fluktuacji równych:  $\theta_h = 5\theta_v$ ,  $10\theta_v$  oraz  $30\theta_v$ . Zaistniała sytuacja może wskazywać na większą korelację wartości parametrów podłoża wynikającą z trójwymiarowej geometrii zniszczenia.

### 10.2.2. Mediany i ekstremalne wartości nośności podłoża

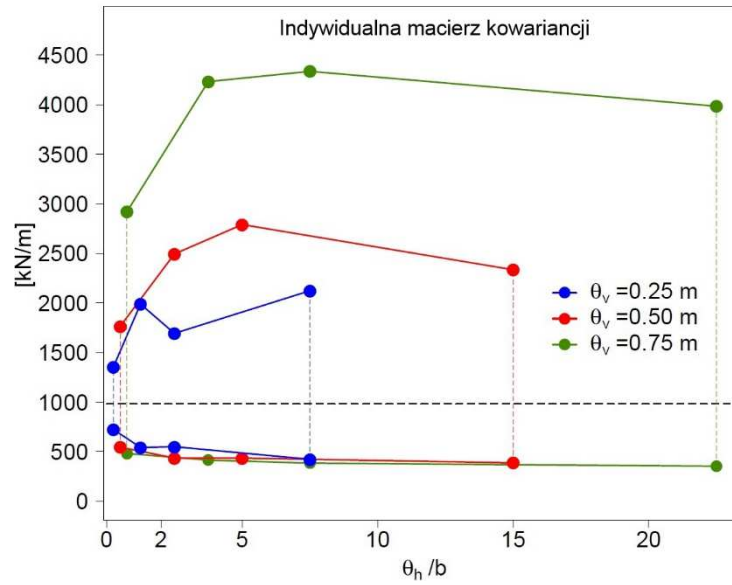
Na rysunku 10.17 przedstawiono porównanie wartości średnich oraz median nośności podłoża przy założeniu trójwymiarowego 5-blokowego mechanizmu zniszczenia podłoża. Ich przebieg z jednej strony przypomina zachowanie median i wartości średnich nośności otrzymanych przy zastosowaniu mechanizmu Prandtla

(odbicie względem nośności wyznaczonej przy wartościach oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych), jednak z drugiej strony mediany wydają się podążać za wartościami średnimi, jak w przypadku mechanizmu płaskiego 6-blokowego. Podobnie jak w rezultatach otrzymanych dla płaskich mechanizmów zniszczenia, również tutaj obserwuje się bliskość wartości średnich i median w przypadku izotropowym oraz ich oddalenie przy przypadkach anizotropowych. Wskazuje to na rosnącą niesymetryczność rozkładu nośności przy wzroście poziomej skali fluktuacji.

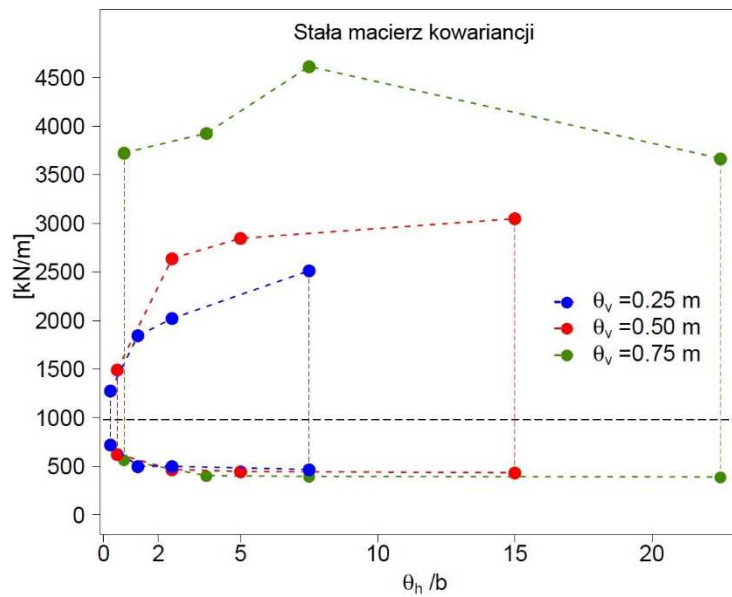


Rysunek 10.17. Porównanie uzyskanych wartości średnich oraz median nośności przy założeniu 5-blokowego trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia w przypadku stałej i indywidualnej macierzy kowariancji, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m, a) indywidualna macierz kowariancji, b) stała macierz kowariancji.

Na rysunkach 10.18 i 10.19 przedstawiono otrzymane w drodze symulacji Monte Carlo wartości minimalne i maksymalne nośności podłoża dla indywidualnej i stałej macierzy kowariancji. Na rysunkach widoczne jest, że przy rosnącej anizotropii oraz większych wartościach pionowej skali fluktuacji zwiększa się asymetria rozkładu nośności podłoża (w stosunku do wartości oznaczonej linią przerywaną i otrzymanej przy wartościach oczekiwanych parametrów podłoża).



Rysunek 10.18. Minimalne i maksymalne wartości nośności podłoża otrzymane przy założeniu 5-blokowego trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia w przypadku macierzy kowariancji wyznaczonej indywidualnie, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m.



Rysunek 10.19. Minimalne i maksymalne wartości nośności podłoża otrzymane przy założeniu 5-blokowego trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia w przypadku stałej macierzy kowariancji, podłoże spoiste,  $b = 1.0$  m.

### 10.3. Odniesienie rezultatów do istniejących rozwiązań

Efekt najgorszego przypadku (*worst case*) dla wartości średnich został zaobserwowany w pionierskiej pracy Griffithsa i Fentona (2001), wykorzystującej metodę RFEM do analizy posadowienia fundamentu bezpośredniego. W swojej pracy autorzy analizowali podłoże nieważkie idealnie spoiste, otrzymując w rezultacie wystąpienie efektu najgorszego przypadku dla  $\theta/b \in (0.5, 1.0)$  (analizowano przypadek izotropowy). W późniejszej pracy Fenton i Griffiths (2003) rozszerzyli analizy o grunt  $c-\varphi$ , dla którego zaobserwowali wystąpienie najgorszego przypadku w zakresie  $\theta/b \in (0.5, 5.0)$ . Pieczyńska w swojej rozprawie doktorskiej (2012) rozbudowała istniejący algorytm RFEM o możliwość uwzględnienia anizotropii, ciężaru objętościowego oraz zagłębienia fundamentu. Autorka zaobserwowała, że wystąpienie efektu najgorszego przypadku ulega przesunięciu w kierunku większych poziomych skal fluktuacji dla przypadku anizotropowego i zawiera się w zakresie  $\theta/b \in (1.0, 5.0)$ . Powyższe rezultaty korespondują z otrzymanymi w niniejszej rozprawie, mianowicie  $\theta/b \approx 2.0$ . Należy zwrócić uwagę na zupełnie inny charakter metody rozwijanej w rozprawie w stosunku do metody RFEM. Wystąpienie efektu najgorszego przypadku dla wartości średnich nie jest kluczowe z punktu widzenia bezpieczeństwa fundamentów. Największy wpływ na miary bezpieczeństwa ma odchylenie standardowe i współczynniki zmienności dla nośności podłoża, dla których w niniejszej rozprawie nie zaobserwowano wystąpienia efektu najgorszego przypadku, co zostało potwierdzone także w pracy Pieczyńskiej. Co więcej, w rozprawie doktorskiej Pieczyńskiej (2012) stwierdzono stabilizację wartości współczynników zmienności dla poziomej skali fluktuacji  $\theta_h/b > 10$ ; podobne zachowanie obserwuje się dla wyników przedstawionych w załączniku J. Różnice w odchyleniach standardowych nośności podłoża pomiędzy podejściem izotropowym a anizotropowym (dla znacznie większej poziomej skali fluktuacji) raportowane przez Pieczyńską (2012) sięgają rzędu 100%; porównywalne wielkości zostały zaobserwowane w analizach numerycznych przeprowadzonych w niniejszej rozprawie.

Otrzymanie zbliżonych jakościowo i ilościowo rezultatów świadczy o dobrym odwzorowaniu wpływu przestrzennej zmienności parametrów podłoża przez zaproponowaną metodę korzystającą z twierdzenia górnego o oszacowaniu nośności granicznej.

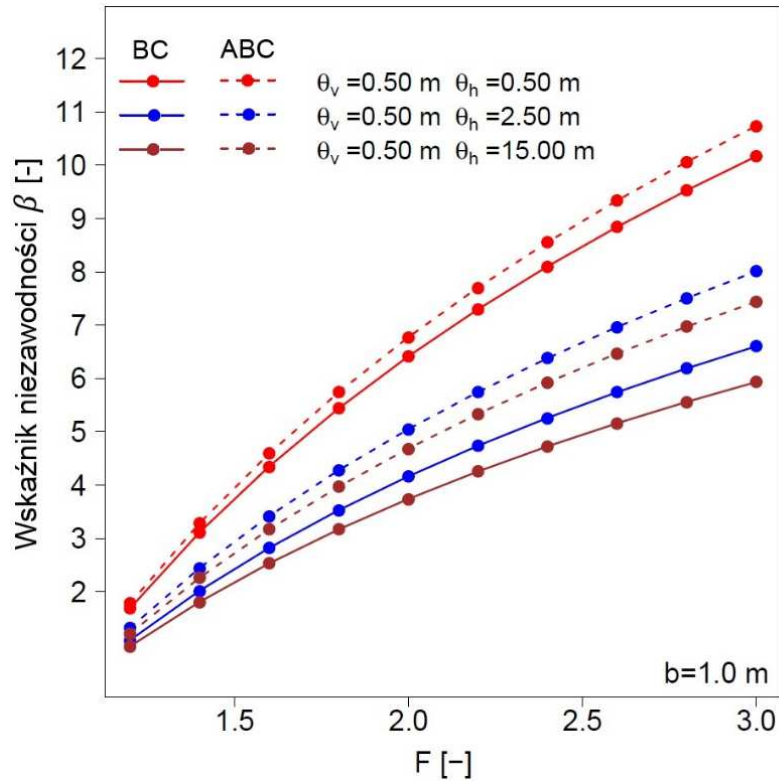
Duży potencjał do przyszłego wykorzystania w analizach niezawodnościowych ma metoda analizy granicznej za pomocą elementów skończonych (ang. *finite element limit analysis*, FELA). Pierwsze próby jej połączenia z teorią pól losowych zostały przeprowadzone dla podłoża idealnie spoistego (Huang i in., 2013); stworzoną metodę nazwano RFLA (*random field limit analysis*). Rezultaty osiągnięte przy jej udziale ograniczają od dołu i od góry wyniki otrzymane poprzez RFEM (porównanie rezultatów uzyskanych za pomocą opracowanej w rozprawie metodyki z wynikami otrzymanymi metodą RFLA przedstawiono w rozdziale 8.5). Innym niedawnym rezultatem otrzymanym w ramach oszacowania górnego i dolnego jest RAFELA (*random adaptive finite element limit analysis*), w ramach której w pracy konferencyjnej Aliego i in. (2016) przeprowadzono analizę fundamentu obciążonego mimośrodowo na podłożu idealnie spoistym.

Algorytm oparty na zaproponowanej metodyce i zaprezentowany w niniejszej rozprawie jest algorytmem efektywnym (mającym jeszcze znaczny potencjał na polu redukcji czasu obliczeń), w związku z czym może być stosowany w zagadnieniach praktycznych. Co więcej, nie wymaga bezpośredniego generowania pól losowych, eliminuje analizy związane z doбором wielkości siatki (metody oparte o MES), a także jest skuteczny w przypadku gruntów niespoistych (kwestia stabilności rozwiązań).

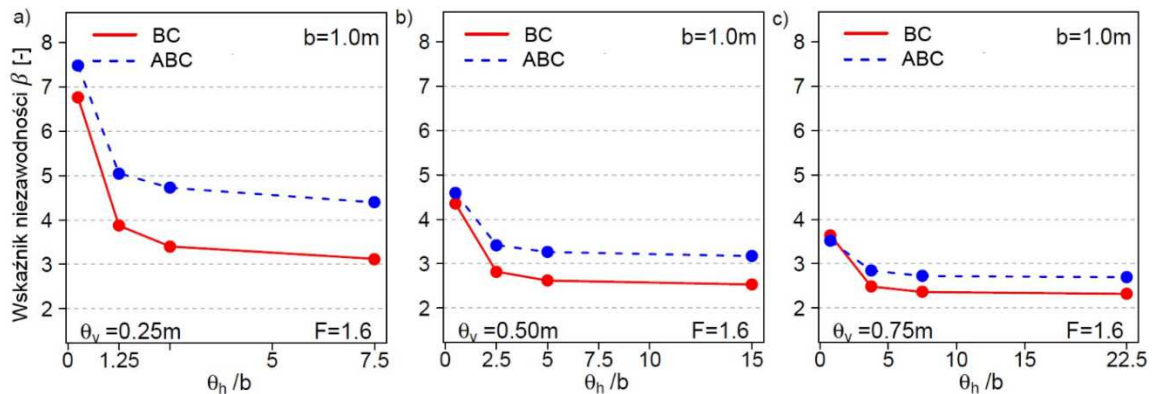
## 11. Wskaźniki niezawodności

W oparciu o metodykę przedstawioną w rozdziale 7, wyznaczono wartości wskaźników niezawodności dla wybranych zagadnień. Rezultaty w postaci wskaźników niezawodności zilustrowano na rysunkach przedstawionych w niniejszym rozdziale. Należy podkreślić, że otrzymane wartości wskaźników niezawodności są wartościami szacunkowymi w związku z faktem, iż otrzymano je dla oceny górnej nośności podłoża. Zgodnie z przedstawionymi wcześniej analizami, zaproponowane oszacowanie jest stosunkowo dokładne przy założeniu mechanizmu wieloblokowego, dla którego różnice pomiędzy górnym i dolnym oszacowaniem nie są znaczne. Znaczące różnice dla obu podejść otrzymuje się w przypadku trójwymiarowym, niemniej jednak na potrzeby wzajemnego porównania otrzymanych rezultatów wskaźniki niezawodności zostały wyznaczone także w przypadku trójwymiarowym.

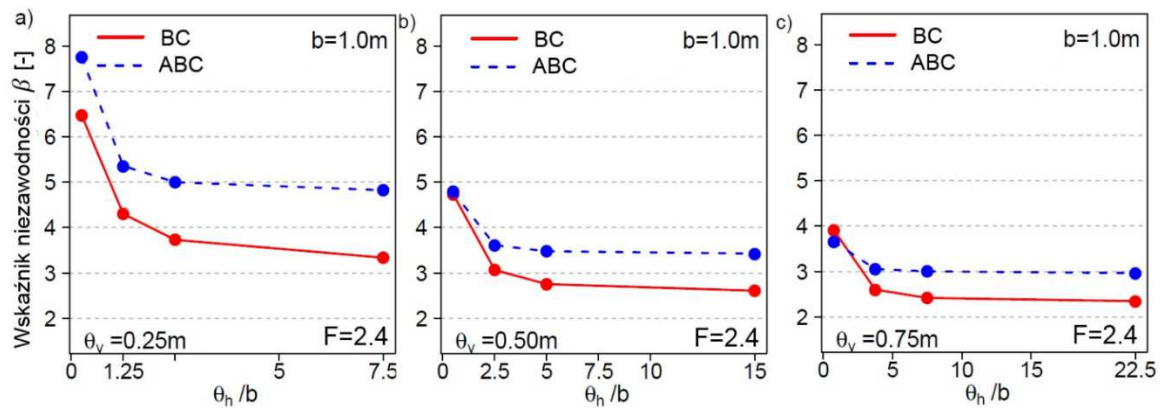
Na rysunku 11.1 przedstawiono wartości wskaźników niezawodności uzyskane przy założeniu mechanizmu Prandtla przy uśrednianiu wzdłuż spirali logarytmicznej BC oraz po obszarze ABC. Rezultaty przedstawiono w zależności od globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $F$  (patrz rozdział 7). Otrzymano większe wartości wskaźników niezawodności przy uśrednianiu po obszarze ABC. Różnice między obydwojma podejściami maleją wraz ze spadkiem wartości poziomej skali fluktuacji i są najmniejsze w przypadku izotropowym ( $\theta_h = \theta_v$ ). Podobny efekt można zaobserwować na rysunkach 11.2 i 11.3, na których przedstawiono wartości wskaźników niezawodności w zależności od  $\theta_h/b$  przy ustalonej wartości  $F$  (podano na rysunkach). Na obu rysunkach widoczne jest, że różnice w wartościach wskaźników niezawodności są znacząco mniejsze w przypadku izotropowym, a co więcej - zmniejszają się wraz ze wzrostem pionowej skali fluktuacji (patrz rysunek 11.2a, b i c).



Rysunek 11.1. Wskaźniki niezawodności w funkcji globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $F$  przy założeniu mechanizmu Prandtla. Linie ciągłe dotyczą uśredniania wzdłuż spirali logarytmicznej BC, natomiast linie przerywane odnoszą się do uśredniania po obszarze ABC. Prezentowane rezultaty dotyczą podłoża spoiowego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m.



Rysunek 11.2. Wskaźniki niezawodności w funkcji  $\theta_h/b$  przy założeniu mechanizmu Prandtla. Linie ciągłe dotyczą uśredniania wzdłuż spirali logarytmicznej BC, natomiast linie przerywane odnoszą się do uśredniania po obszarze ABC. Prezentowane rezultaty dotyczą podłoża spoiowego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m.

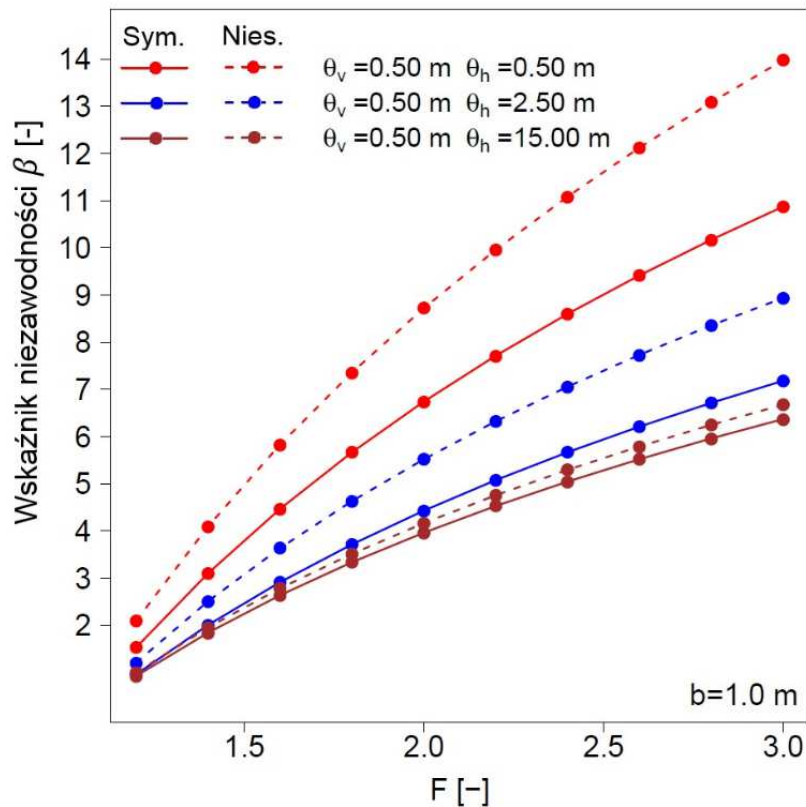


Rysunek 11.3. Wskaźniki niezawodności w funkcji  $\theta_h/b$  przy założeniu mechanizmu Prandtla. Linie ciągłe dotyczą uśredniania wzdłuż spirali logarytmicznej BC, natomiast linie przerywane odnoszą się do uśredniania po obszarze ABC. Prezentowane rezultaty dotyczą podłoża niespoistego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m.

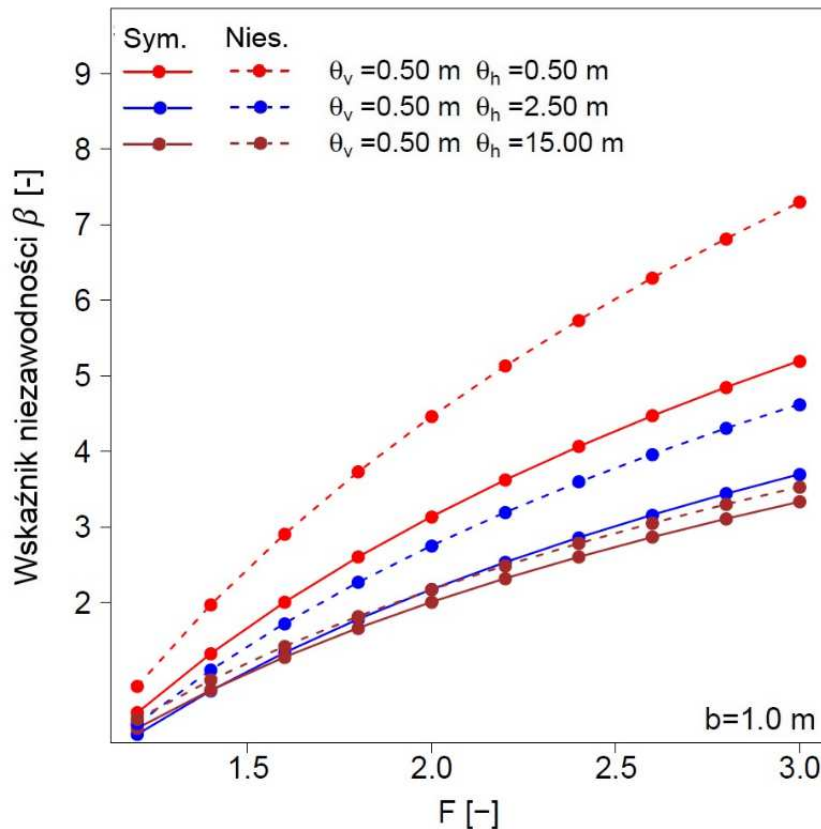
W przypadku pionowej skali fluktuacji  $\theta_v = 0.75$  m przy dwóch rozpatrywanych rodzajach podłoża gruntowego otrzymano większą wartość wskaźnika niezawodności przy uśrednianiu wzdłuż spirali BC. Jest to zaskakująca obserwacja z uwagi na fakt, że uśrednianie po obszarze ABC skutkuje większym poziomem redukcji wariancji wyjściowego pola losowego. Z drugiej strony, wraz z większą redukcją pojawia się także większa korelacja pomiędzy obszarem ABC a linią AB i CD (oznaczenia zgodnie z geometrią mechanizmu zniszczenia), która może wpłynąć na zwiększenie wartości odchylenia standardowego nośności. Parametry wytrzymałościowe podłoża gruntowego są zadane zmiennymi losowymi wynikającymi z procedury uśredniania przestrzennego wyjściowego pola losowego. W rozważaniach dotyczących mechanizmu Prandtla występują trzy zmienne losowe odpowiadające liniom poślizgu AB, CD oraz obszarowi ABC lub spirali BC. Zmienne losowe są związane macierzą kowariancji, która determinuje ich wariancje i wzajemne korelacje (kowariancje). Jeżeli dokonuje się uśredniania po obszarze ABC, uzyskuje się mniejsze wartości wariancji dla zmiennej przypisanej do obszaru ABC, jednocześnie otrzymując większe wartości kowariancji pomiędzy obszarem ABC a liniami AB i CD. Zatem zmniejszenie wariancji prowadzi do zmniejszenia otrzymanych wartości odchylenia standardowego nośności; z drugiej strony, zwiększenie wzajemnych korelacji powoduje zwiększenie wartości odchylenia standardowego nośności. Obydwa procesy są przeciwstawne i dla określonych kombinacji skal fluktuacji jeden oddziałuje silniej niż drugi. Powyższe zjawisko zostało zilustrowane w ujęciu ilościowym na rysunkach 11.2 i 11.3.



W analogii do rysunku 11.1 na rysunkach 11.4 i 11.5 przedstawiono otrzymane wskaźniki niezawodności przy założeniu mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego mechanizmu 6-blokowego. Pierwszy z rysunków dotyczy podłoża spoistego. Dla dwóch rozpatrzonych rodzajów podłoża gruntowego większe wartości wskaźników niezawodności otrzymuje się w przypadku mechanizmu niesymetrycznego. Otrzymane różnice są znaczące w przypadku izotropowym i niewielkie przy silnej anizotropii (duże wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek 11.4. Wskaźniki niezawodności w funkcji globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $F$  przy założeniu 6-blokowego symetrycznego i niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia. Prezentowane rezultaty dotyczą podłoża spoistego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0\text{ m}$ .

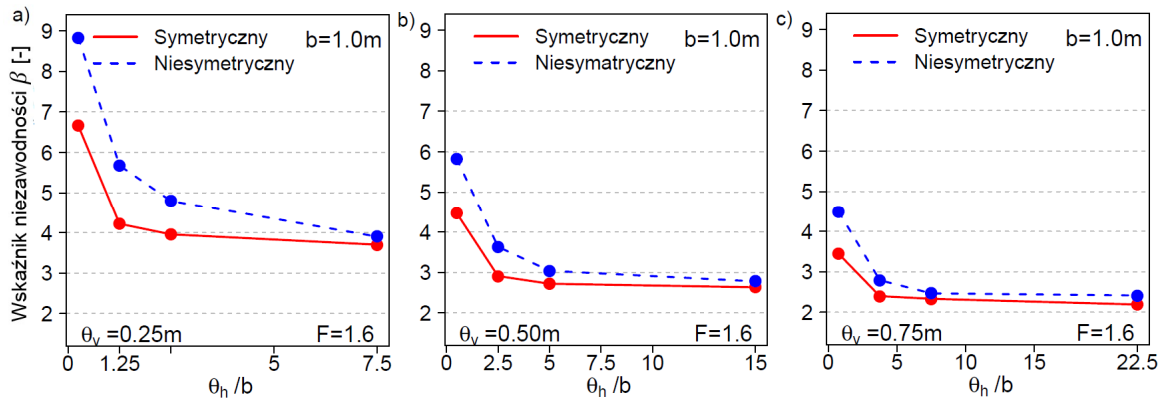


Rysunek 11.5. Wskaźniki niezawodności w funkcji globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $F$  przy założeniu 6-blokowego symetrycznego i niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia. Prezentowane rezultaty dotyczą podłoża niespoistego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m.

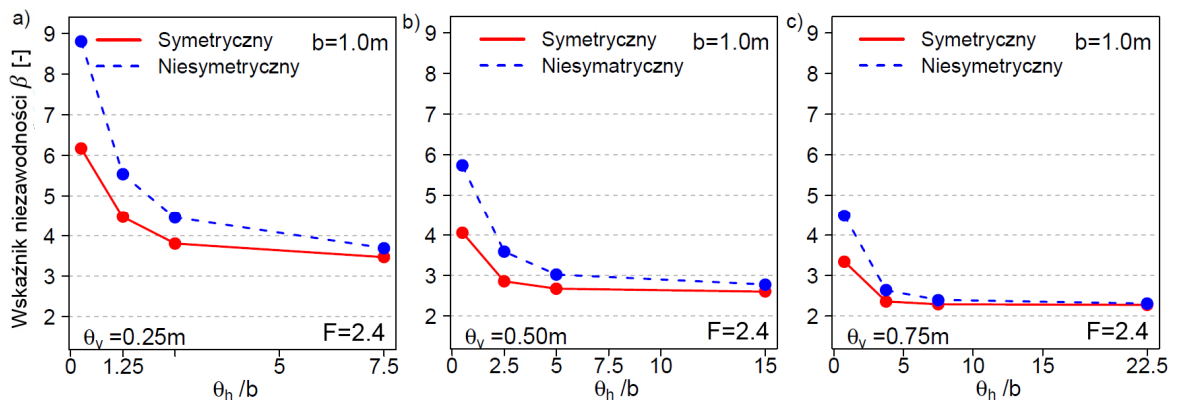
W sytuacji, gdy pozioma skala fluktuacji jest większa od poziomego zasięgu mechanizmu zniszczenia (mechanizm niesymetryczny cechuje dwukrotnie większy zasięg poziomy niż mechanizm symetryczny), jej wpływ na poziom bezpieczeństwa nie jest tak istotny, jak ma to miejsce w przypadku mniejszych poziomych skal fluktuacji. Z tego względu przy dużych poziomych skalach fluktuacji różnice pomiędzy mechanizmem symetrycznym i niesymetrycznym są niewielkie. Powyższa obserwacja ma znaczenie praktyczne; mianowicie, pozwala w sposób mniej konserwatywny oszacować wartość wskaźnika niezawodności (poprzez uwzględnienie braku symetrii mechanizmu zniszczenia) w sytuacjach, gdy pozioma skala fluktuacji jest mniejsza niż poziomy zasięg mechanizmu zniszczenia.

Efekt zbliżania się wartości wskaźników niezawodności dla mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego widoczny jest na rysunkach 11.6 i 11.7; na ich podstawie można stwierdzić, że przy  $\theta_h/b > 5$  różnice w wartościach wskaźników niezawodności są

nieznaczne. Z drugiej strony, w przypadkach bliskich izotropowym różnice są duże i mogą mieć istotny wpływ na rozmiar fundamentu.



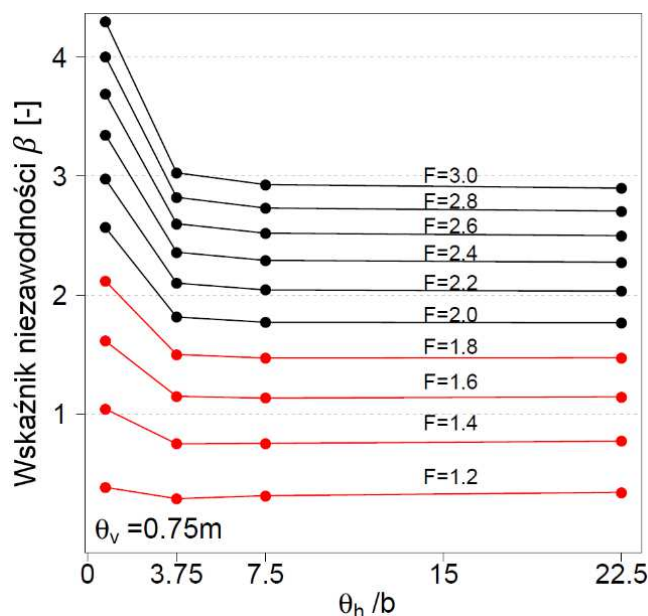
Rysunek 11.6. Wskaźniki niezawodności w funkcji  $\theta_h/b$  przy założeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego. Prezentowane rezultaty dotyczą podłoża spoiowego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m. Założono  $F = 1.6$ .



Rysunek 11.7. Wskaźniki niezawodności w funkcji  $\theta_h/b$  przy założeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego. Prezentowane rezultaty dotyczą podłoża spoiowego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m. Założono  $F = 2.4$ .

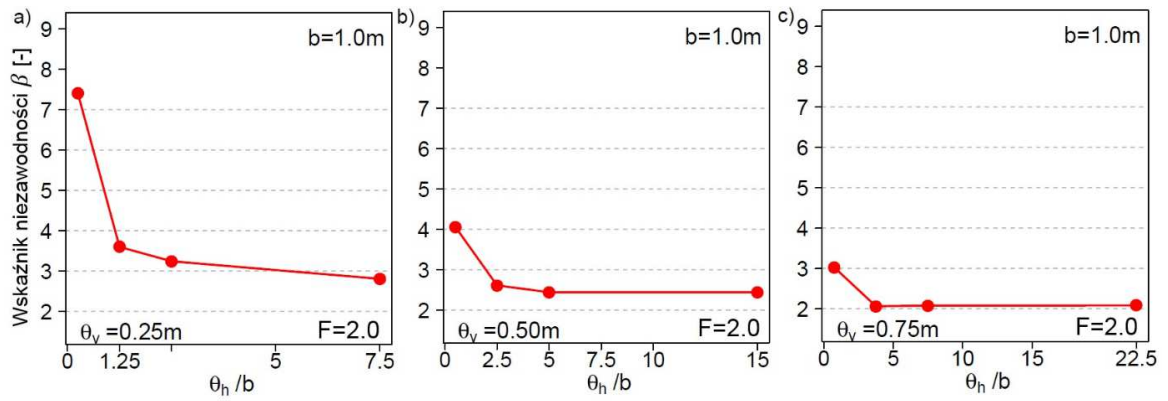
Na rysunku 11.8 przedstawiono efekt najgorszego przypadku (*worst case*) widoczny także dla wskaźników niezawodności (zagadnieniu temu poświęcono więcej uwagi w rozdziale 10). Na czerwono zaznaczono te przypadki, dla których minimalna wartość wskaźnika niezawodności nie została osiągnięta przy maksymalnej wartości poziomej skali fluktuacji. Zgodnie z rysunkiem 11.8, zaobserwowany efekt jest słaby i zanika przy większych wartościach  $F$  (mniejszych wartości prawdopodobieństwa awarii). Na rysunku 11.9 przedstawiono wskaźniki niezawodności otrzymane przy założeniu 5-blokowego

mechanizmu trójwymiarowego. Stabilizacja wskaźników niezawodności zachodzi przy  $\theta_h/b > 5$  i jej charakter jest podobny jak w przypadku dwuwymiarowym.



Rysunek 11.8. Wskaźniki niezawodności w funkcji  $\theta_h/b$  przy założeniu 6-blokowego mechanizmu symetrycznego. Na czerwono zaznaczono wystąpienie najgorszego przypadku dla wartości poziomej skali fluktuacji. Przedstawione rezultaty dotyczą podłoża niespoistego oraz szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m.

Rysunek 11.9 wskazuje na silną zależność wartości wskaźników niezawodności od pionowej skali fluktuacji; zależność ta jest szczególnie silna przy przejściu między  $\theta_v = 0.25$  m a  $\theta_v = 0.50$  m, w obszarze których znajdują się raportowane ostatnio wartości pionowych skal fluktuacji (np. Pieczyńska-Kozłowska i in., 2017). Niezwykle istotny jest także wpływ poziomej skali fluktuacji na wartości wskaźników niezawodności, w szczególności przy  $\theta_h/b < 5$ .



Rysunek 11.9. Wskaźniki niezawodności w funkcji  $\theta_h/b$  przy założeniu 5-blokowego mechanizmu trójwymiarowego. Przedstawione rezultaty dotyczą podłoża spoistego oraz szerokości stopy fundamentowej  $b = 1.0\text{ m}$ . Założono  $F = 2.0$ .

## 12. Studium przypadku

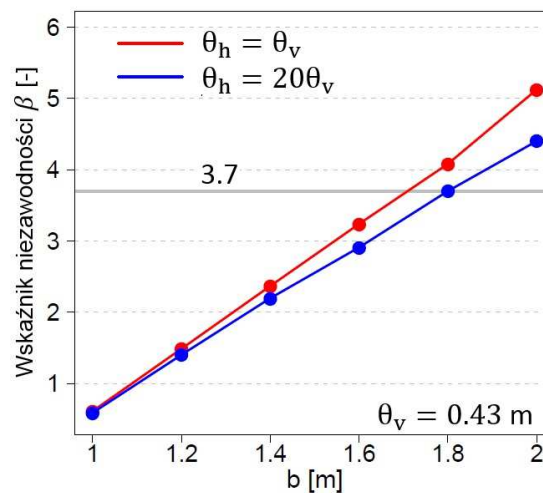
W niniejszym rozdziale przedstawiono prosty przykład zastosowania zaproponowanej metodyki do wyznaczenia szerokości ławy fundamentowej. W tym celu wykorzystano wartości pionowej skali fluktuacji wyznaczone przez Pieczyńską-Kozłowską i in. (2017). Do obliczeń wybrano parametry otrzymane z sondowania nr 202070U502 i zestawiono je w tabeli 12.1. Wyboru dokonano w oparciu o miąższość sondowania adekwatną przy analizie fundamentu bezpośredniego.

Tabela 12.1. Charakterystyka podłoża gruntowego (za Pieczyńską-Kozłowską i in. (2017)).

Numer identyfikacyjny sondowania CPTU	202070U502
Głębokość [m]	1-4
Litologia (na podstawie diagramu Eslami-Felleniusa (2004))	Pył ilasty ( <i>clay silt</i> )
Wartość średnia $s_u$ [kPa]	42.57
Odchylenie standardowe $s_u$ [kPa]	7.22
Współczynnik zmienności $s_u$ [-]	0.17

W pracy Pieczyńskiej-Kozłowskiej i in. (2017) wyznaczono wartości pionowej skali fluktuacji za pomocą czterech metod, uzyskując znaczne różnice w oszacowaniach jej wartości. Na potrzeby niniejszego przykładu autor przyjął wartość maksymalną pionowej skali fluktuacji  $\theta_v = 0.43$  m, która będzie skutkować najbardziej konserwatywnym oszacowaniem prawdopodobieństwa awarii. Dla przyjętej wartości pionowej skali fluktuacji rozpatrzono następujące wartości poziomych skal fluktuacji:  $\theta_h = \theta_v$ ,  $\theta_h = 2\theta_v$ ,  $\theta_h = 5\theta_v$  oraz  $\theta_h = 20\theta_v$ . Zagadnieniem przedstawionym w niniejszym przykładzie jest znalezienie takiej szerokości fundamentu, która pozwoli na przeniesienie zadanego obciążenia i zapewnienie odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa. Poziom ten został przyjęty zgodnie z normą ISO 2394 (2015) w oparciu o wartości graniczne wskaźnika niezawodności ustalone na podstawie LQI (*Life Quality Index*; Rackwitz

(2000), Straub i in. (2011)). Norma ISO wyróżnia trzy poziomy bezpieczeństwa, definiując następujące wartości wskaźników niezawodności: 3.1, 3.7 oraz 4.2 odpowiednio w przypadku: małych, znacznych i wysokich konsekwencji zaistnienia awarii. Na potrzeby niniejszego przykładu, w którym analizowana jest łąwa fundamentowa, uznano za adekwatny poziom 3.7. Założono, że obciążenie pionowe zadane jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej 200 kN/m i odchyleniu standardowym 50 kN/m. Na podstawie algorytmu przedstawionego w niniejszej rozprawie otrzymano wartości wskaźników niezawodności przy różnych szerokościach łąwy fundamentowej. Wyniki przedstawiono na rysunku 12.1. Wskaźnik niezawodności większy od 3.7 otrzymano w przypadku szerokości łąwy fundamentowej  $b = 1.8$  m (przypadek izotropowy) oraz  $b = 2.0$  m (przypadek anizotropowy przy  $\theta_h = 20\theta_v$ ). Z uwagi na stosunkowo dużą wariancję zmiennej losowej opisującej siłę działającą na fundament, otrzymano relatywnie małe różnice w wartościach wskaźników niezawodności dla różnych wartości poziomej skali fluktuacji. Z uwagi na brak informacji o poziomej skali fluktuacji przy założonej rozdzielczości (0.2 m), należy przyjąć szerokość łąwy fundamentowej  $b = 2.0$  m jako wystarczającą do zapewnienia granicznej wartości wskaźnika niezawodności  $\beta = 3.7$ .



Rysunek 12.1. Wskaźniki niezawodności otrzymane dla różnych szerokości łąwy fundamentowej dla symetrycznego mechanizmu 6-blokowego przy założeniu warunków bez odpływu.

Powyższy przykład przedstawia w prosty sposób zastosowanie metodyki i jej implementacji numerycznej do celów praktycznych, tj. zaprojektowania szerokości fundamentu na zadany poziom bezpieczeństwa. Z uwagi na wystąpienie gruntów spoistych rozważono warunki bez odpływu, korzystając wprost z parametru  $s_u$  otrzymanego z sondowania CPTU. W celu pełnej analizy należy sprawdzić warunki z

odpływem, natomiast doświadczenia praktyczne pokazują, że w zdecydowanej większości przypadków wartość nośności podłoża otrzymana dla warunków bez odpływu jest mniejsza i decyduje o rozmiarze fundamentu (dla gruntów słabo przepuszczalnych) (np. Mayne, 2007).



## 13. Podsumowanie i wnioski

W rozprawie autor podjął się rozwiązania oryginalnego zagadnienia badawczego, jakim jest analiza posadowienia bezpośredniego przy uwzględnieniu przestrzennej zmienności parametrów podłoża gruntowego oraz zastosowaniu twierdzenia o ocenie górnej nośności podłoża. Cel osiągnięto poprzez opracowanie metodyki łączącej kinematyczne mechanizmy zniszczenia z elementami teorii pól losowych. Opracowaną metodykę zastosowano przy tworzeniu algorytmów dedykowanych zagadnieniom w płaskim stanie odkształcenia (ława fundamentowa) przy założeniu mechanizmu zniszczenia Prandtla, symetrycznego mechanizmu wieloblokowego oraz niesymetrycznego mechanizmu wieloblokowego, a także zagadnieniu trójwymiarowemu (stopa fundamentowa). Przestrzenną zmienność parametrów podłoża uwzględniono, opisując przestrzenny rozkład wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności za pomocą pól losowych. Wykorzystano teorię uśrednień lokalnych Vanmarcke'a i zastosowano ją do linii lub powierzchni poślizgu wynikających z geometrii zniszczenia. Poprzez wyprowadzenie wzorów całkowych na nowe wartości wariancji i kowariancji umożliwiono dyskretyzację wartości pól losowych na poszczególnych liniach poślizgu; w ten sposób otrzymano indywidualną zmienną losową dla każdej linii lub powierzchni poślizgu. Strukturę korelacyjną pomiędzy otrzymanymi zmiennymi losowymi zadano poprzez wyznaczenie wariancji i kowariancji (macierz kowariancji). Opracowana metodyka nie wymaga bezpośredniego generowania pola losowego. W celu optymalizacji geometrii mechanizmów zniszczenia zastosowano metodę wyżarzania (*simulated annealing*) i opracowano stosowne algorytmy umożliwiające optymalizację dla rozważanych typów mechanizmów zniszczenia podłoża. Wszystkie przeprowadzone analizy dotyczą materiału Coulomba-Mohra.

Przeprowadzone analizy i otrzymane rezultaty wskazują na możliwość zastosowania opracowanej metodyki do oceny losowej nośności podłoża; co więcej, użycie tej metodyki pozwoliło przeanalizować zagadnienia dotąd nieopisywane w literaturze w ramach analiz probabilistycznych uwzględniających przestrzenną zmienność parametrów wytrzymałościowych podłoża i górną ocenę nośności podłoża. W związku z powyższym autor uważa, że osiągnięty został pierwszy i podstawowy cel niniejszej rozprawy. Wykazano możliwość zastosowania opracowanej metodyki do kilku rodzajów mechanizmów zniszczenia. Metodyka pozwala na uwzględnienie ciężaru własnego gruntu i zagłębienia fundamentu przy założeniu dowolnego rodzaju podłoża (idealnie spoiste, typu  $c-\varphi$ , niespoiste). Metodykę zastosowano przy tworzeniu autorskich algorytmów uwzględniających powyższe elementy. Algorytmy służące ocenie losowej nośności podłoża opracowano dla mechanizmu Prandtla, mechanizmu wieloblokowego zaproponowanego przez Michałowskiego (1997) oraz mechanizmu trójwymiarowego (Michałowski, 2001). W ramach rozprawy przedstawiono także ich implementację w środowisku Mathematica. Algorytmy składają się z kilku głównych części; każdą z tych części można w stosunkowo prosty sposób zmodyfikować lub zamienić. Dla przykładu, możliwa jest zamiana procedury optymalizacyjnej na inną (bez zaburzenia reszty programu) lub rozszerzenie macierzy kowariancji o dodanie możliwości generowania skorelowanych pól losowych kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności. Co więcej, procedurę można zmodyfikować w prosty sposób, np. uwzględniając niepewności w zagłębieniu fundamentu lub opisać ciężar objętościowy za pomocą pola losowego, a nie zmiennej losowej, jak to miało miejsce w obliczeniach przeprowadzonych w niniejszej rozprawie. Zaproponowana metodyka może być zastosowana do innych mechanizmów zniszczenia podłoża przy posadowieniu bezpośrednim fundamentów lub do zagadnień związanych ze statecznością skarp.

Osiągnięcie drugiego celu rozprawy było możliwe poprzez odrzucenie założenia o symetryczności mechanizmu wieloblokowego, a tym samym rozpatrzeniu niesymetrycznej geometrii mechanizmu zniszczenia. Uwzględnienie przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego prowadzi w naturalny sposób do wystąpienia niesymetrycznych mechanizmów zniszczenia. W przypadku analizy nośności za pomocą kinematycznych mechanizmów zniszczenia kwestią otwartą pozostaje to, jaki rodzaj mechanizmu będzie najlepiej odwzorowywał rzeczywiste warunki. W niniejszej rozprawie założono mechanizm analogiczny do rozpatrywanego w

przypadku symetrycznym z tą różnicą, że rozszerzono go o drugą stronę, w rezultacie czego otrzymano dwukrotnie większą liczbę linii poślizgu. W ogólności, przyjęcie niesymetrycznej geometrii zniszczenia skutkuje większym zasięgiem mechanizmu zniszczenia po stronie, gdzie występują „słabsze” wartości parametrów wytrzymałościowych i mniejszy zasięg po stronie „mocniejszych” wartości parametrów wytrzymałościowych podłoża. Analizy przeprowadzone dla przypadków anizotropowych przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża wskazują na istotny wpływ przyjęcia niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia na otrzymane wartości odchyłeń standardowych przy założeniu  $\theta_h/b < 2$ . W tym przypadku uwzględnienie braku symetrii prowadzi do wyraźnie mniejszych wartości odchyłeń standardowych nośności podłoża niż w mechanizmie symetrycznym. Z drugiej strony, otrzymane rezultaty wskazują na mały lub nawet całkowicie pomijalny wpływ uwzględnienia niesymetryczności mechanizmu zniszczenia dla  $\theta_h/b > 5$ . Dla mechanizmu niesymetrycznego otrzymano mniejsze wartości odchyłeń standardowych nośności podłoża, co przekłada się na większe wartości wskaźników niezawodności. Powyższe wskazuje na potencjał mniej konserwatywnego oszacowania nośności (dla relatywnie krótkich poziomych skal fluktuacji) poprzez wykorzystanie mechanizmu niesymetrycznego. W związku z możliwością mniej konserwatywnego podejścia do szacowania wartości nośności wyżej omówiona kwestia może być uwzględniona w praktycznym zastosowaniu opracowanej metodyki do oceny losowej nośności podłoża.

Kolejnym celem rozprawy była ocena możliwości zastosowania trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia w ramach zaproponowanej metodyki. Aby osiągnąć powyższy cel, zaadaptowano trójwymiarowy mechanizm zniszczenia zaproponowany przez Michałowskiego (2001). Opierając się na przeprowadzonych analizach, wykazano istotność wpływu skal fluktuacji zarówno pionowej, jak i poziomej na otrzymane wartości odchyłeń standardowych nośności podłoża. Zbadano wpływ założenia o stałej macierzy kowariancji, otrzymując zbliżone rezultaty jak dla macierzy kowariancji wyznaczonej indywidualnie (dla każdej symulacji); zastosowanie stałej macierzy kowariancji pozwala na znaczne ograniczenie czasu obliczeń. Przedstawiona analiza jest jedną z pierwszych, w której rozważa się przestrzenną zmienność parametrów podłoża dla stopy fundamentowej i poddaje się ocenie ich wpływ na poziom bezpieczeństwa fundamentu. Znaczącą niedogodnością przy wykorzystaniu metody kinematycznej do zagadnień trójwymiarowych jest skomplikowana geometria

mechanizmu i wyraźne zawyżanie wartości nośności podłoża (w szczególności przy dużych wartościach kąta tarcia wewnętrznego); z drugiej strony uwzględnienie trójwymiarowości zagadnień, w których rozpatruje się przestrzenną zmienność parametrów wytrzymałościowych gruntu, jest niezwykle istotne i ma wyraźny wpływ na otrzymywane poziomy bezpieczeństwa. Przeprowadzone analizy wskazują na możliwość zastosowania trójwymiarowych geometrii zniszczenia w ramach opracowanej metodyki, w związku z czym autor zamierza podjąć dalsze prace związane z przejściem w kierunku analiz trójwymiarowych, także w kontekście poszukiwań geometrii mechanizmów zniszczenia dających niższe oszacowania nośności podłoża.

Przeprowadzone analizy zostały ukierunkowane na zbadanie wpływu pionowych i poziomych skal fluktuacji na ocenę losowej nośności posadowienia bezpośredniego. We wszystkich rozpatrzonych mechanizmach zniszczenia (łącznie z mechanizmem trójwymiarowym) zaobserwowano silną zależność wartości odchyłeń standardowych nośności od pionowych i poziomych skal fluktuacji. Większe wartości pionowej i poziomej skali fluktuacji skutkują większymi odchyleniami standardowymi nośności. Zaobserwowano stabilizację odchyłeń standardowych w przypadku  $\theta_h/b > 5$ , natomiast największa zmiana w ich wartościach zachodzi przy przejściu od przypadku izotropowego  $\theta_h = \theta_v$  do anizotropowego  $\theta_h = 5\theta_v$ . W przypadku pionowej skali fluktuacji nie zaobserwowano wartości, przy których dochodzi do stabilizacji odchyłeń standardowych; jest to rezultatem przeanalizowania stosunkowo krótkich pionowych skal fluktuacji, które były raportowane w literaturze (np. Pieczyńska-Kozłowska i in., 2017). Mianowicie, rozpatrzono przypadki  $\theta_v/b$  zawierające się w przedziale 0.125 – 0.75. Przedstawione w rozprawie analizy wskazują na niezwykle dużą wagę badań nad wyznaczaniem pionowych i poziomych skal fluktuacji, które są nieodzownym elementem przy opisie przestrzennej zmienności parametrów podłoża gruntowego i mają bardzo istotny wpływ na ocenę losowej nośności podłoża.

W rozprawie wykazano, że efektywność działania algorytmu może być znacząco poprawiona przy zastosowaniu stałej macierzy kowariancji. Stałą macierz kowariancji wyznacza się dla wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych gruntu i pozostaje ona niezmienna podczas całego procesu symulacyjnego dla danego zagadnienia (jako zagadnienie rozumie się ustalone wartości pionowej i poziomej skali fluktuacji). W rozdziale 10.1.3 wykazano, że założenie o stałości macierzy kowariancji ma ograniczony

wpływ na uzyskiwane oceny losowej nośności podłoża gruntowego. Zaobserwowano, że zastosowanie stałej macierzy kowariancji powoduje wzrost wartości średniej oraz odchylenia standardowego nośności podłoża. Wzrost odchylenia standardowego nośności tłumaczy się zmianą kształtu histogramu nośności na bardziej niesymetryczny – obserwuje się więcej realizacji po stronie dużych nośności oraz mniejszy zasięg histogramu dla małych wartości nośności. Zaobserwowane różnice nie są duże i przy zastosowaniu opracowanej metodyki do celów praktycznych mogą zostać pominięte dla szerokiego zakresu wartości skal fluktuacji.

Na podstawie przeprowadzonych analiz numerycznych pokazano, jak istotny jest wpływ ciężaru objętościowego gruntu przy zastosowaniu kinematycznych mechanizmów zniszczenia na nośność podłoża. Wpływ ten rośnie wraz ze wzrostem wartości kąta tarcia wewnętrznego i powoduje zmiany wartości współczynnika  $N_\gamma$  oraz zmiany rozmiaru linii poślizgu, wzdłuż których dokonuje się uśrednień (rysunki 6.11 i 6.12). Co więcej, zastosowanie mechanizmu Prandtla do ważkich gruntów prowadzi do otrzymania większych wartości średnich i odchyłeń standardowych nośności niż ma to miejsce w przypadku mechanizmu wieloblokowego poddanego optymalizacji z uwzględnieniem ciężaru gruntu. Przy zastosowaniu oszacowania górnego nośności podłoża istotne jest otrzymanie możliwie niskich wartości oszacowań nośności; dodatkowo, wykorzystanie lokalnych uśrednień po liniach poślizgu sprawia, że „wypadkowy” poziom uśrednienia zależy m.in. od wielkości geometrii zniszczenia (wyraźnie większe rozmiary geometrii zniszczenia otrzymuje się dla mechanizmu Prandtla). W związku z brakiem możliwości uwzględnienia ciężaru objętościowego gruntu w mechanizmie Prandtla (w procedurze optymalizacyjnej) jego zastosowanie do oceny losowej nośności podłoża powinno być ograniczone do gruntów idealnie spoistych lub cechujących się niewielkimi wartościami kąta tarcia wewnętrznego. W przypadku gruntów ważkich, charakteryzujących się znacznymi wartościami kąta tarcia wewnętrznego  $\varphi$ , mechanizm wieloblokowy optymalizowany z uwagi na wartości parametrów wytrzymałościowych i ciężar objętościowy gruntu lepiej opisuje rozważane zagadnienie. Problem większych odchyłeń standardowych obserwowanych dla mechanizmu Prandtla można wyeliminować poprzez zmianę obszaru uśredniania ze spirali logarytmicznej BC na obszar ciągłej deformacji ABC (patrz rys. 6.3), który wydaje się być bardziej adekwatny dla teoretycznego charakteru mechanizmu Prandtla (występujący obszar deformacji objętościowej).

Zmiana obszaru uśredniania powoduje znaczną redukcję odchyleń standardowych nośności, natomiast wartości średnie nadal pozostają na poziomach wyższych w stosunku do mechanizmu wieloblokowego (średnio rzędu 10%). Przeprowadzone analizy w mechanizmie Prandtla pokazują istotność odpowiedniego doboru obszaru uśredniania.

Do otrzymanych histogramów nośności podłoża dopasowano lognormalne rozkłady gęstości prawdopodobieństwa. W większości przypadków (poza mechanizmem Prandtla dla gruntu niespoistego) dopasowanie rozkładu lognormalnego spełniło kryteria testu Kołmogorowa-Smirnova i można je uznać za satysfakcjonujące dla praktycznych celów szacowania prawdopodobieństwa awarii. Zwiększenie dokładności w szacowaniu prawdopodobieństwa awarii można uzyskać np. poprzez metodę *subset simulation*, co jednak nie było przedmiotem niniejszej rozprawy. W przypadku mechanizmu Prandtla dla gruntu niespoistego otrzymane histogramy nośności charakteryzowały się większą asymetrią niż aproksymowane teoretyczne rozkłady lognormalne. W rozprawie porównano otrzymane wartości średnie z medianami nośności podłoża, co umożliwia prostą ocenę asymetrii rozkładu nośności. Przebieg wartości średnich i median nośności podłoża jest zupełnie inny w przypadku mechanizmu Prandtla i mechanizmu wieloblokowego (np. rysunki 10.7 i 10.9).

W rozprawie zbadano także wpływ ciężaru objętościowego na ocenę losowej nośności podłoża przy założeniu podłoża idealnie spoistego (warunki bez odpływu). Wpływ ten nie występuje dla deterministycznych przypadków z uwagi na równowagę sił ciężkości w obrębie każdej z dwóch stron mechanizmu zniszczenia. Sytuacja ulega zmianie, gdy mamy do czynienia z przestrzennie zmiennym podłożem, dla którego równowaga sił ciężkości w ogólności nie jest zachowana. Analiza wyżej opisanego efektu nie wykazała istotnych różnic przy uwzględnieniu ciężaru objętościowego gruntu, w związku z czym przy zastosowaniu metody kinematycznej dla gruntów idealnie spoistych można pominąć ciężar objętościowy również przy przestrzennej zmienności parametrów podłoża.

Charakter zaproponowanego algorytmu pozwala na wykonanie wielokrotnych iteracji, za pomocą których można dostosować postać macierzy kowariancji do optymalnej geometrii (patrz rozdział 8.5). Poprzez przeprowadzone obliczenia wykazano, że założenie o braku ponownych iteracji macierzy kowariancji nie zaburza

znacząco otrzymanych wyników i może być zastosowane do celów praktycznych. Wykazano także, że wykonanie dodatkowej iteracji praktycznie redukuje wyżej opisane wpływy na wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża. Jest to istotna informacja z uwagi na charakter zaproponowanej metodyki – gdyby do stabilizacji wartości średnich i odchyłeń standardowych nośności konieczna była znaczna liczba iteracji, miałyby to znaczący wpływ na efektywność zaproponowanej metodyki.

### 13.1. Perspektywy dalszych badań

Niniejsza rozprawa przedstawia pierwsze rezultaty otrzymane za pomocą opracowanej metodyki; spora jej część to zagadnienia związane z weryfikacją i wykazaniem możliwości jej zastosowania do oceny losowej nośności podłoża. Z uwagi na spory potencjał metodyki i algorytmu opracowanego na jej podstawie, autor zamierza kontynuować prace ukierunkowane na jej dalszy rozwój i zastosowanie w praktyce. Jako jeden z pierwszych elementów planuje się przepisanie algorytmu numerycznego do środowiska pozwalającego na bardziej efektywne całkowanie numeryczne (np. MatLab lub Python). Specyfika algorytmu pozwala na jego zastosowanie przy założeniu zmienności parametrów podłoża w trzech kierunkach (zagadnienie trójwymiarowe). Za pomocą metodyki można stosunkowo prosto przejść do analiz trójwymiarowych, także w odniesieniu do płaskiego stanu odkształcenia – poprzez założenie płaskich mechanizmów zniszczenia niejawnie zakłada się brak przestrzennej zmienności parametrów podłoża w kierunku prostopadłym do rozpatrywanej płaszczyzny. W rezultacie otrzymuje się większe wartości odchyłeń standardowych niż przy uwzględnieniu przestrzennej zmienności parametrów gruntu w tym kierunku. Co więcej, zaproponowana metodyka może także pozwolić na wykorzystanie informacji o położeniu otworów badawczych (np. sondowań CPT); w tym celu należy dodać w macierzy kowariancji dodatkowy element („linię poślizgu”) z wartością oczekiwaną i wariancją wynikającą wprost z sondowania gruntu, a tym samym uwzględnić jego lokalizację. Jest to zagadnienie nawiązujące do warunkowych pól losowych (w opracowanej metodyce odbywa się to bez bezpośredniego generowania tychże pól).

Przedstawiony algorytm bazuje na górnym oszacowaniu nośności podłoża; pełne rozwiązanie w ramach teorii stanów granicznych opiera się na znalezieniu górnego i

dolnego oszacowania. W związku z tym, komplementarnym zagadnieniem do zaproponowanej metodyki byłaby analiza wpływu przestrzennej zmienności parametrów podłoża przy oszacowaniu dolnym. W tym celu można zastosować np. metodę charakterystyk (Izbicki i Mróz, 1974) i jej probabilistyczny wariant (Przewłócki, 2006).

Zagadnieniem wartym uwagi jest także dokładniejsze porównanie rezultatów otrzymywanych za pomocą metodyki opracowanej w niniejszej rozprawie i metody RFLA (Huang i in., 2013), w szczególności w kontekście zastosowań do gruntów z tarciem, a także rozszerzenie metodyki o możliwość analizy jednostronnego mechanizmu zniszczenia (patrz rozdział 8.5).

Zaproponowana metodyka może być także zastosowana do oceny stateczności skarp przy założeniu przestrzennej zmienności parametrów podłoża gruntowego zarówno w przypadku dwuwymiarowych, jak i trójwymiarowych zagadnień.



## Załącznik A

Tabela. A.1. Wielomiany 5 stopnia reprezentujące głębokość położenia spirali logarytmicznej BC w funkcji  $x$  (współrzędna pozioma) dla mechanizmu Prandtla.

Kąt tarcia wew. $\varphi$ [°]	Głębokość położenia spirali logarytmicznej BC w funkcji $x$
0	$-0.0226931x^5+0.5407594x^4+0.0052658x^3+ 0.6888651x^2-0.0002264x - 0.7068649$
1	$0.01203x^5+0.50611x^4+0.03203x^3+ 0.67402x^2+0.01694 x+ -0.72285$
2	$0.04079x^5+0.47693x^4+0.05660x^3+ 0.66000x^2+0.03412 x+ -0.73910$
3	$0.06423x^5+0.45239x^4+0.07931x^3+ 0.64678x^2+0.05131x+ -0.75561$
4	$0.08296x^5+0.43172x^4+0.10041x^3+ 0.63433x^2+0.06852x+ -0.77240$
5	$0.09755x^5+0.41425x^4+ 0.12016x^3+ 0.62263x^2+0.08576x+ -0.78947$
6	$0.1085x^5+0.3994x^4+ 0.1387x^3+ 0.6117x^2+0.1030x+ -0.8068$
7	$0.1163x^5+ 0.3866x^4+ 0.1563x^3+ 0.6014x^2+0.1204x+ -0.8245$
8	$0.1214x^5+ 0.3754x^4+ 0.1729x^3+ 0.5920x^2+0.1378x+ -0.8425$
9	$0.1241x^5+ 0.3654x^4+ 0.1888x^3+ 0.5832x^2+0.1552x -0.8609$
10	$0.1248x^5+ 0.3563x^4+ 0.2038x^3+ 0.5752x^2+0.1728x -0.8796$
11	$0.1238x^5+ 0.3477x^4+ 0.2182x^3+ 0.5680x^2+0.1904x -0.8987$
12	$0.1214x^5+ 0.3394x^4+ 0.2319x^3+ 0.5615x^2+0.2082x -0.9181$
13	$0.1179x^5+ 0.3311x^4+ 0.2448x^3+ 0.5557x^2+0.2261x -0.9379$
14	$0.1135x^5+ 0.3228x^4+ 0.2570x^3+ 0.5507x^2+0.2442x -0.9582$
15	$0.1084x^5+ 0.3143x^4+ 0.2685x^3+ 0.5465x^2+0.2625x -0.9789$
16	$0.1027x^5+ 0.3055x^4+ 0.2791x^3+ 0.5430x^2+0.2810x -1.0000$
17	$0.09667x^5+ 0.29633x^4+ 0.28892x^3+ 0.54017x^2+0.29973x -1.02161$
18	$0.09041x^5+ 0.28672x^4+ 0.29781x^3+ 0.53809x^2+0.31876x -1.04370$
19	$0.08404x^5+ 0.27667x^4+ 0.30573x^3+ 0.53668x^2+0.33812x -1.06631$
20	$0.07765x^5+ 0.26619x^4+ 0.31262x^3+ 0.53591x^2+0.35783x -1.08945$
21	$0.07133x^5+ 0.25530x^4+ 0.31843x^3+ 0.53573x^2+0.37794x -1.11314$
22	$0.06516x^5+ 0.24403x^4+ 0.32310x^3+ 0.53609x^2+0.39848x -1.13741$
23	$0.05919x^5+ 0.23243x^4+ 0.32659x^3+ 0.53694x^2+0.41950x -1.16229$
24	$0.05348x^5+ 0.22057x^4+ 0.32886x^3+ 0.53819x^2+0.44103x -1.18779$
25	$0.04804x^5+ 0.20849x^4+ 0.32987x^3+ 0.53978x^2+0.46313x -1.21395$
26	$0.04292x^5+ 0.19629x^4+ 0.32960x^3+ 0.54162x^2+0.48582x -1.24079$
27	$0.03813x^5+ 0.18402x^4+ 0.32805x^3+ 0.54361x^2+0.50916x -1.26833$
28	$0.03368x^5+ 0.17177x^4+ 0.32521x^3+ 0.54565x^2+0.53317x -1.29662$
29	$0.02959x^5+ 0.15962x^4+ 0.32110x^3+ 0.54764x^2+0.55790x -1.32566$
30	$0.02726x^5+0.15417x^4+0.32507x^3+ 0.55312x^2+ 0.58255x+ -1.35581$
31	$0.02242x^5+ 0.13589x^4+ 0.30916x^3+ 0.55099x^2+0.60963x -1.38618$

---

32	$0.01933x^5 + 0.12446x^4 + 0.30143x^3 + 0.55212x^2 + 0.63668x - 1.41770$
33	$0.01657x^5 + 0.11340x^4 + 0.29260x^3 + 0.55271x^2 + 0.66455x - 1.45012$
34	$0.01411x^5 + 0.10276x^4 + 0.28275x^3 + 0.55266x^2 + 0.69324x - 1.48346$
35	$0.01193x^5 + 0.09261x^4 + 0.27197x^3 + 0.55183x^2 + 0.72276x - 1.51776$
36	$0.01001x^5 + 0.08298x^4 + 0.26036x^3 + 0.55011x^2 + 0.75310x - 1.55307$
37	$0.008345x^5 + 0.073896x^4 + 0.248024x^3 + 0.547393x^2 + 0.784236x - 1.589408$
38	$0.006901x^5 + 0.065397x^4 + 0.235073x^3 + 0.543565x^2 + 0.816144x - 1.626832$
39	$0.005662x^5 + 0.057498x^4 + 0.221629x^3 + 0.538532x^2 + 0.848779x - 1.665385$
40	$0.004606x^5 + 0.050207x^4 + 0.207820x^3 + 0.532212x^2 + 0.882083x - 1.705117$
41	$0.003714x^5 + 0.043528x^4 + 0.193770x^3 + 0.524531x^2 + 0.915985x - 1.746085$
42	$0.002968x^5 + 0.037455x^4 + 0.179611x^3 + 0.515433x^2 + 0.950397x - 1.788350$
43	$0.002348x^5 + 0.031977x^4 + 0.165467x^3 + 0.504880x^2 + 0.985214x - 1.831981$
44	$0.001839x^5 + 0.027074x^4 + 0.151465x^3 + 0.492851x^2 + 1.020314x - 1.877058$
45	$0.001425x^5 + 0.022725x^4 + 0.137721x^3 + 0.479346x^2 + 1.055559x - 1.923671$

---

## Załącznik B

Poniżej przedstawiono opis algorytmu, na podstawie którego wyznacza się uśrednione wartości parametrów wytrzymałościowych dla mechanizmu zniszczenia Prandtla. Jako rezultat otrzymuje się uśrednione wartości kąta tarcia wewnętrznego ( $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$ ) oraz spójności ( $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ ), skorelowane ze sobą macierzą kowariancji (patrz równanie (6.23) lub (6.24)).

**Krok 1.** Opierając się na wyjściowych charakterystykach probabilistycznych (tabela 8.1 i tabela 8.2) dla stacjonarnych lognormalnych pól losowych opisujących kąt tarcia wewnętrznego  $\varphi$  oraz spójność  $c$ , oznaczmy ich wartości oczekiwane i odchylenia standardowe przez  $\mu_X$  oraz  $\sigma_X$  (gdzie  $X$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ ).

**Krok 2.** Na podstawie równania (B.1) i (B.2) oraz  $\mu_X$  i  $\sigma_X$  wyznacza się wartość oczekiwaną  $\mu_Y$  i wariancję  $\sigma_Y^2$  dla podstawowego rozkładu lognormalnego  $Y$ .

$$\sigma_Y^2 = \ln \left( 1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\mu_Y = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \quad (\text{B.2})$$

**Krok 3.** W oparciu o  $\sigma_Y$  i  $\mu_Y$  generuje się wektor normalny  $\mathbf{Y}_\varphi = (Y_{\varphi 1}, Y_{\varphi 2}, Y_{\varphi 3})$  oraz  $\mathbf{Y}_c = (Y_{c1}, Y_{c2}, Y_{c3})$ , wykorzystując generator liczb pseudolosowych w taki sposób, że  $EY_{\varphi i} = \mu_{Y\varphi}$ ,  $Var(Y_{\varphi i}) = \sigma_{Y\varphi}^2$ ,  $EY_{ci} = \mu_{Yc}$  oraz  $Var(Y_{ci}) = \sigma_{Yc}^2$  dla  $i = 1, 2, 3$ , gdzie współrzędne wektorów  $\mathbf{Y}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Y}_c$  są stochastycznie niezależne.

**Krok 4.** Pierwsza współrzędna wektora  $Y_\varphi$  jest przekształcana do rozkładu lognormalnego poprzez następującą transformację:

$$X_{\varphi 1} = \exp(Y_{\varphi 1}) \quad (\text{B.3})$$

**Krok 5.** W oparciu o  $X_{\varphi 1}$  wyznacza się geometrię zniszczenia dla mechanizmu Prandtla.

**Krok 6.** Zgodnie z równaniami (6.23) lub (6.24) wyznacza się macierz kowariancji  $[C_X]$ , gdzie  $X$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ .

**Krok 7.** Na podstawie macierzy kowariancji  $[C_X]$  wyznacza się macierz współczynników korelacji:

$$[r_X(i, j)] = \frac{[C_X(i, j)]}{\sqrt{[C_X(i, i)][C_X(j, j)]}} \quad (\text{B.4})$$

Gdzie  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Krok 8.** Macierz  $[r_X]$  transformuje się do odpowiadającej jej macierzy  $[r_Y]$ , która odpowiada podstawowemu rozkładowi normalnemu względem  $X$ . Transformacja odbywa się zgodnie z równaniem (B.5) (patrz Fenton i Griffiths, 2008):

$$[r_Y(i, j)] = \frac{\ln(1 + [r_X(i, j)]v_{X_i}v_{X_j})}{\sqrt{\ln(1 + v_{X_i}^2) \ln(1 + v_{X_j}^2)}} \quad (\text{B.5})$$

Gdzie:

$$v_{X_i} = \frac{\sqrt{[C_X(i, i)]}}{\mu_X} \quad (\text{B.6})$$

**Krok 9.** Macierz korelacji  $[r_Y]$  przekształca się do macierzy kowariancji  $[C_Y]$  odpowiadającej podstawowemu rozkładowi normalnemu względem  $X$ .

$$[C_Y(i, j)] = [r_Y(i, j)] \sqrt{\text{Var}(Y_i)\text{Var}(Y_j)} \quad (\text{B.7})$$

Gdzie:

$$\text{Var}(Y_i) = \ln\left(1 + \frac{[C_X(i, i)]}{\mu_X^2}\right) \quad (\text{B.8})$$

Gdzie  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Krok 10.** Macierz kowariancji  $[C_Y]$  rozkłada się na dwie macierze zgodnie z dekompozycją Choleskiego:

$$[C_Y] = [L][L]^T \quad (\text{B.9})$$

Gdzie  $[L]$  jest macierzą dolnotrójkątną z rzeczywistymi dodatnimi wartościami na przekątnej. Jednoznaczność rozkładu Choleskiego wynika z faktu, że macierz  $[C_Y]$  jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona. Algorytm rozkładu Choleskiego można znaleźć np. w Horn i in. (1985).  $Y$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ , w związku z czym otrzymuje się dwie macierze dla  $\varphi$  ( $[L_\varphi]$ ) oraz dla  $c$  ( $[L_c]$ ).

**Krok 11.** Wektory otrzymane w Kroku 3, tj.  $Y_\varphi$  oraz  $Y_c$ , poddaje się procedurze standaryzacji:

$$Y_{\varphi i}^* = \frac{Y_{\varphi i} - \mu_{Y_\varphi}}{\sigma_{Y_\varphi}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.10})$$

$$Y_{c i}^* = \frac{Y_{c i} - \mu_{Y_c}}{\sigma_{Y_c}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.11})$$

Wektory  $Y_\varphi^*$  oraz  $Y_c^*$  mają niezależne współrzędne normalne o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji.

Krok 12. Wykorzystuje się następujące twierdzenie (Fenton i Griffiths, 2008): jeśli  $[C]$  jest dodatnio określoną macierzą  $n \times n$ ,  $\mathbf{U}$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem, którego współrzędne są niezależnymi gaussowskimi zmiennymi losowymi i  $[L]$  jest macierzą dolnotrójkątną taką, że  $[L][L]^T = [C]$ , wtedy wektor losowy zdefiniowany jako  $\mathbf{Z} = [L][\mathbf{U}]$  jest gaussowskim wektorem, którego współrzędne są skorelowane macierzą  $[C]$ . Zgodnie z twierdzeniem wyznacza się nowe wektory  $\mathbf{Z}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Z}_c$ .

$$\mathbf{Z}_\varphi = [L_\varphi]Y_\varphi^* \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{Z}_c = [L_c]Y_c^* \quad (\text{B.13})$$

Gdzie  $[L_\varphi]$  oraz  $[L_c]$  otrzymano w Kroku 10. Wektory  $\mathbf{Z}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Z}_c$  mają zerowe wartości oczekiwane, natomiast ich współrzędne są skorelowane macierzami  $[C_{Y_\varphi}]$  oraz  $[C_{Y_c}]$ .

**Krok 13.** Wyznacza się wektory  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  poprzez dodanie wartości oczekiwanych  $\mathbf{Y}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Y}_c$  do współrzędnych wektorów  $\mathbf{Z}_\varphi$  i  $\mathbf{Z}_c$ .

$$P_{\varphi i} = Z_{\varphi i} + \mu_{Y_{\varphi i}} \quad (\text{B.14})$$

$$P_{c i} = Z_{c i} + \mu_{Y_{c i}} \quad (\text{B.15})$$

gdzie  $i = 1, 2, 3$ .

Wektory  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  są wektorami o normalnych współrzędnych. Wartości oczekiwane współrzędnych wynoszą odpowiednio  $\mu_{Y_{\varphi i}}$  i  $\mu_{Y_{c i}}$ ; współrzędne są skorelowane macierzami kowariancji  $[C_{Y_\varphi}]$  oraz  $[C_{Y_c}]$ .

**Krok 14.** Współrzędne wektorów  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  są transformowane do rozkładu lognormalnego:

$$T_{\varphi i} = \exp(P_{\varphi i}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.16})$$

$$T_{c i} = \exp(P_{c i}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.17})$$

**Krok 15.** Współrzędne wektorów  $T_{\varphi i}$  oraz  $T_{c i}$ , które są rezultatem procedury uśredniania, są wykorzystywane w algorytmie opisanym w rozdziale 5 w sposób następujący:  $\bar{\varphi}_1 = T_{\varphi 1}$ ,  $\bar{\varphi}_2 = T_{\varphi 2}$ ,  $\bar{\varphi}_3 = T_{\varphi 3}$  oraz  $\bar{c}_1 = T_{c 1}$ ,  $\bar{c}_2 = T_{c 2}$ ,  $\bar{c}_3 = T_{c 3}$ .

Rozwiązanie problemów związanych z możliwością pojawienia się macierzy ujemnie określonych przedstawiono w Załączniku F.

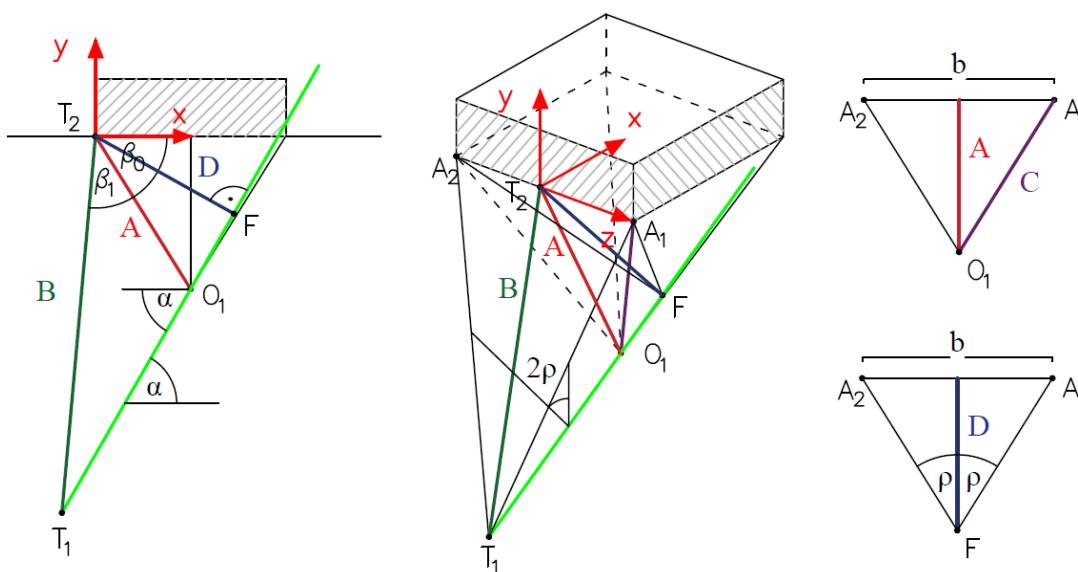
## Załącznik C

W celu wyprowadzenia równania wyrażającego kąt przecięcia się płaszczyzn  $A_1O_1T$  i  $A_2O_1T$  (patrz rysunek C.1), pomocne jest znalezienie odpowiednich stosunków długości boków. Na rysunku C.1 oznaczono długości wybranych odcinków jako  $A$ ,  $B$ ,  $C$  oraz  $D$ . Zapisując funkcję cosinus dla kąta  $\beta_0$ , długość  $A$  wyznacza się z równania (C.1).

$$A = \frac{b}{2 \cos \beta_0} \quad (\text{C.1})$$

Gdzie  $b$  jest szerokością stopy kwadratowej. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta przedstawionego po prawej stronie rysunku wyznacza się długość  $C$  (C.2).

$$C = \sqrt{\frac{b^2}{4(\cos \beta_0)^2} + \frac{b^2}{4}} \quad (\text{C.2})$$



Rysunek C.1. Zależności geometryczne dla mechanizmu trójwymiarowego.

Współrzędne punktu F mogą być znalezione wprost z rozwiązania układu równań liniowych. Pierwsze z nich dotyczy równania prostej zdeterminowanej kątem  $\alpha$  i przechodzącej przez punkt  $O_1$ . Drugie to równanie prostej prostopadłej do  $T_1O_1$  i przechodzącej przez punkt  $T_2$ . Po wyznaczeniu długości D, wartość kąta  $\rho$  pomiędzy rozważanymi płaszczyznami znajdziemy poprzez zapisanie funkcji tangens dla dolnego trójkąta z prawej strony rysunku C.1.

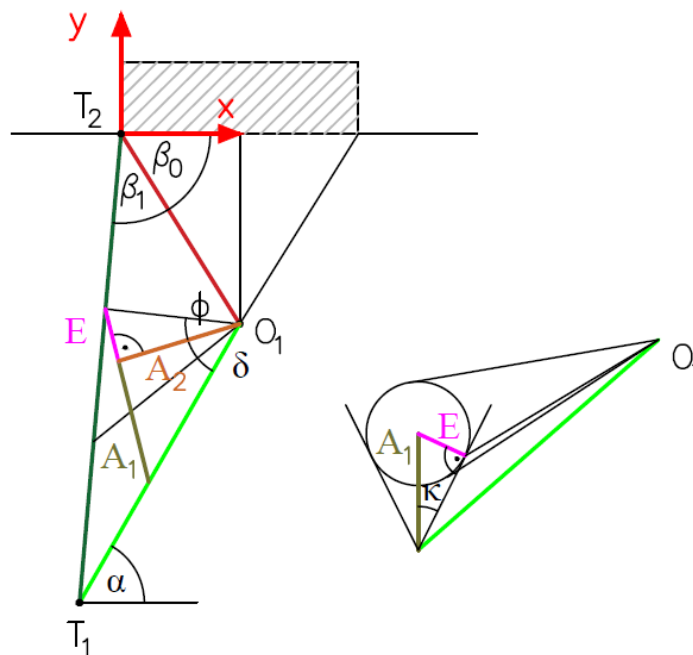
$$\tan \rho = \frac{0.5b}{D} \quad (C.3)$$

Dla ustalonej wartości kąta  $\rho$  możemy obliczyć kąt  $\delta$  (patrz rysunek C.2). Zgodnie z rysunkiem C.2, zapisując funkcję sinus dla kąta  $\kappa$  otrzymuje się:

$$\sin \kappa = \frac{E}{A_1} \quad (C.4)$$

Z drugiej strony, zapisując funkcję tangens dla kąta  $\delta$  otrzymuje się:

$$\tan \varphi = \frac{E}{A_2} \quad (C.5)$$



Rysunek C.2. Definicja kąta  $\kappa$ .

Zauważmy, że w równaniach (C.4) i (C.5) długość E jest promieniem okręgu, będącego przecięciem rozważanej powierzchni stożkowej płaszczyzną prostopadłą do osi stożka. Poprzez tę obserwację można zapisać następującą równość (C.6).



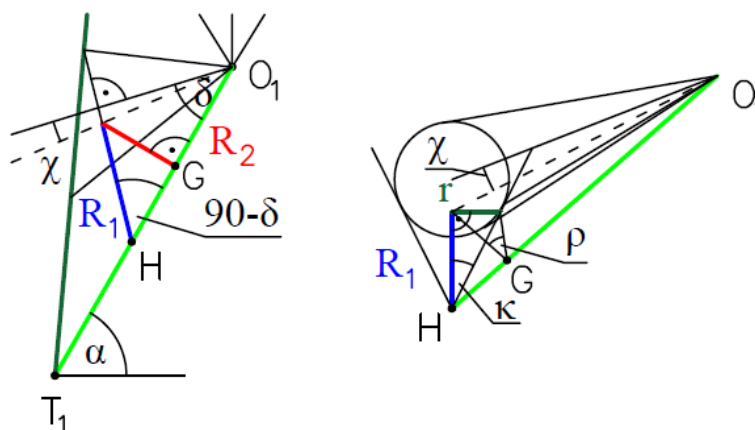
$$\tan \delta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{E}{\sin \kappa}}{\frac{E}{\tan \varphi}} = \frac{\tan \varphi}{\sin \kappa} \quad (\text{C.6})$$

W celu wyznaczenia kąta  $\delta$  niezbędne jest wcześniejsze wyznaczenie kąta  $\kappa$ . Opierając się na rysunku C.3 można zapisać następujące równania:

$$\tan \kappa = \frac{r}{R_1} \quad (\text{C.7})$$

Oraz:

$$\tan \rho = \frac{r}{R_2} \quad (\text{C.8})$$



Rysunek C.3. Zależności geometryczne w rozważanym zadaniu. Opis w tekście.

Co więcej, zapisując funkcję sinus dla kąta  $90-\delta$  (w pobliżu punktu H), otrzymuje się równanie (C.9).

$$\sin(90 - \delta) = \frac{R_2}{R_1} = \cos \delta \quad (\text{C.9})$$

Stosunek długości  $R_2$  oraz  $R_1$  można zapisać stosując równania (C.7) oraz (C.8), w związku z czym wyprowadza się następujące równanie (C.10).

$$\cos \delta = \frac{\tan \kappa}{\tan \rho} \Rightarrow \tan \kappa = \tan \rho \cos \left( \arctan \frac{\tan \varphi}{\sin \kappa} \right) \quad (\text{C.10})$$

W równaniu (C.10) zamiast kąta  $\delta$  podstawiono równanie (C.6). Na rysunku C.4 przedstawiono metodę wyprowadzenia równania na wartość kąta  $\chi$ . Opierając się na rysunku C.4, zapisuje się następujące zależności (C.11), (C.12) i (C.13).

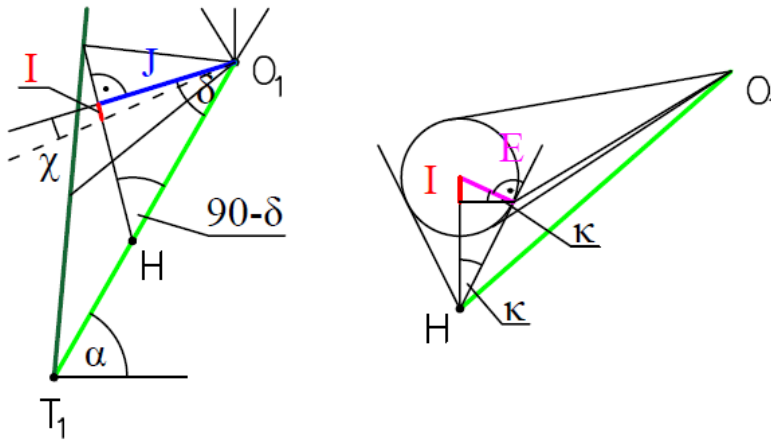
$$\sin \kappa = \frac{I}{E} \quad (\text{C.11})$$

$$\tan \varphi = \frac{E}{J} \quad (\text{C.12})$$

$$\tan \chi = \frac{I}{J} \quad (\text{C.13})$$

Wyznaczając stosunek równań (C.12) i (C.13) i stosując równanie (C.11), otrzymuje się następujące równanie (C.14).

$$\frac{\tan \varphi}{\tan \chi} = \frac{E J}{J I} = \frac{E}{I} = \frac{1}{\sin \kappa} \Rightarrow \tan \chi = \tan \varphi \sin \kappa \quad (\text{C.14})$$



Rysunek C.4. Zależności geometryczne służące wyprowadzeniu wyrażenia na kąt  $\chi$ .

## Załącznik D

Poniżej wyprowadzono wyrażenie podane we wzorze (3.12). Parametryzacja powierzchni stożkowej została podana we wzorze (3.11); z uwagi na przejrzystość wywodu przytacza się ją ponownie we wzorze (D.1).

$$X(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(1-u)^2 a_e b_e}{\sqrt{(1-u)^2 a^2 (\sin v)^2 + (1-u)^2 b^2 (\cos v)^2}} \cos v \\ y = du + \frac{(1-u)^2 a_e b_e}{\sqrt{(1-u)^2 a^2 (\sin v)^2 + (1-u)^2 b^2 (\cos v)^2}} \sin v \\ z = hu \end{array} \right\} \quad (\text{D.1})$$

Pierwsza forma fundamentalna (informacje na ten temat można znaleźć w książkach z geometrii różniczkowej, np. Stoker, 1989) jest iloczynem wektorowym powierzchni stycznych do powierzchni trójwymiarowej w przestrzeni Euklidesa. Często zapisywana jest jako tensor metryczny. Pozwala obliczyć pola powierzchni, jeśli znana jest ich parametryzacja. Element powierzchni  $dA$  wyraża się następująco:

$$dA = |X_u \times X_v| dudv \quad (\text{D.2})$$

Używając tożsamości Lagrange'a do zapisania relacji między iloczynem wektorowym a skalarnym (jak w równaniu (D.2)) otrzymuje się następującą postać równania (D.2):

$$\begin{aligned} dA &= |X_u \times X_v| dudv = \sqrt{\langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2} dudv \\ &= \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Gdzie  $E$ ,  $G$  oraz  $F$  są współczynnikami pierwszej formy fundamentalnej i mogą być wyznaczone jako iloczyn skalarny ich pochodnych cząstkowych  $X_u$  oraz  $X_v$ , jak w równaniu (D.4).

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \quad (D.4)$$

Pochodne cząstkowe dla założonej parametryzacji (D.2) wyrażają się następująco (D.5).

$$\begin{aligned} X_u &= \begin{pmatrix} -\frac{a_e b_e \cos v}{\sqrt{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2}} \\ d - \frac{a_e b_e \sin v}{\sqrt{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2}} \\ h \end{pmatrix} \\ X_v &= \begin{pmatrix} \frac{a_e^3 b_e (u-1) \sin v}{(a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{a_e b_e^3 (u-1) \cos v}{(a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (D.5)$$

Podstawiając równanie (D.5) do (D.3), otrzymuje się następujące wyrażenia na współczynniki pierwszej formy fundamentalnej (D.6).

$$\begin{aligned} E &= \frac{b_e^2 (a_e^2 + d^2 + h^2) \cos^2 v + a_e \sin v \left( a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2} \right)}{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2} \\ F &= -\frac{a_e b_e^2 (u-1) \cos v \left( a_e (a_e - b_e) (a_e + b_e) \sin v + b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2} \right)}{(a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2)^2} \\ G &= -\frac{a_e^2 b_e^2 (1-u)^2 (-a_e^4 - b_e^4 + (a_e^4 - b_e^4) \cos 2v)}{2(a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2)^3} \end{aligned} \quad (D.6)$$

Opierając się na (D.6), pole powierzchni rozważanej figury może być wyznaczone przez całkę oznaczoną poprzez przyjęcie odpowiednich granic całkowania (D.7).

$$S = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (\text{D.7})$$

Podstawiając wartości współczynników pierwszej formy podstawowej (D.6) do równania (D.7), otrzymuje się ostateczną postać wyrażenia na pole powierzchni rozważanego obiektu. Wyrażenie (D.8) jest tożsame z równaniem (3.12).

$$S = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} -a_e b_e (u - 1) \times \sqrt{\frac{b_e^4 (a_e^2 + h^2) \cos^2 v + a_e^3 \sin v \left( a_e (b_e^2 + d^2 + h^2) \sin v - 2b_e d \sqrt{a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2} \right)}{(a_e^2 (\sin v)^2 + b_e^2 (\cos v)^2)^3}} dudv \quad (\text{D.8})$$

## Załącznik E

Poniżej przedstawiono opis algorytmu, na podstawie którego wyznacza się uśrednione wartości parametrów wytrzymałościowych dla trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia. Jako rezultat otrzymuje się uśrednione wartości kąta tarcia wewnętrznego  $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{4n-4})$  oraz spójności  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{4n-4})$ , skorelowane wzajemnie macierzą kowariancji.

**Krok 1.** Opierając się na wyjściowych charakterystykach probabilistycznych (tabela 8.1 i tabela 8.2) dla stacjonarnych lognormalnych pól losowych opisujących kąt tarcia wewnętrznego  $\varphi$  oraz spójność  $c$ , oznaczmy ich wartości oczekiwane i odchylenia standardowe przez  $\mu_X$  oraz  $\sigma_X$  (gdzie  $X$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ ).

**Krok 2.** Na podstawie równania (E.1) i (E.2) oraz  $\mu_X$  i  $\sigma_X$  wyznacza się wartość oczekiwaną  $\mu_Y$  i wariancję  $\sigma_Y^2$  dla podstawowego rozkładu lognormalnego  $Y$ .

$$\sigma_Y^2 = \ln \left( 1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \right) \quad (\text{E.1})$$

$$\mu_Y = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \quad (\text{E.2})$$

**Krok 3.** W oparciu o  $\sigma_Y$  i  $\mu_Y$  generuje się wektor normalny  $\mathbf{Y}_\varphi = (Y_{\varphi 1}, Y_{\varphi 2}, \dots, Y_{\varphi(4n-4)})$  oraz  $\mathbf{Y}_c = (Y_{c1}, Y_{c2}, \dots, Y_{c(4n-4)})$ , wykorzystując generator liczb pseudolosowych w taki sposób, że  $EY_{\varphi i} = \mu_{Y\varphi}$ ,  $\text{Var}(Y_{\varphi i}) = \sigma_{Y\varphi}^2$ ,  $EY_{ci} = \mu_{Yc}$  oraz  $\text{Var}(Y_{ci}) = \sigma_{Yc}^2$  dla  $i = 1, \dots, 4n-4$ , przy czym współrzędne wektorów  $\mathbf{Y}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Y}_c$  są stochastycznie niezależne.

**Krok 4.** Współrzędne wektorów  $Y_\varphi$  oraz  $Y_c$  przekształca się do rozkładu lognormalnego poprzez następującą transformację:

$$X_{\varphi i} = \exp(Y_{\varphi i}) \quad (\text{E.3})$$

$$X_{ci} = \exp(Y_{ci}) \quad (\text{E.4})$$

gdzie  $i = 1, \dots, 4n-4$ . Współrzędne wektorów  $Y_\varphi$  oraz  $Y_c$  wykorzystuje się w algorytmie przedstawionym w rozdziale 5.

**Krok 5.** W oparciu o algorytm przedstawiony w rozdziale 6.4.2 wyznacza się optymalną geometrię zniszczenia (opisaną przez  $\beta_{ci}$  oraz  $\alpha$ ) dla parametrów wytrzymałościowych zadanych wektorami  $X_\varphi$  oraz  $X_c$ .

**Krok 6.** Zgodnie z równaniami (6.23) lub (6.24) wyznacza się macierz kowariancji  $[C_X]$ , gdzie  $X$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ .

**Krok 7.** Na podstawie macierzy kowariancji  $[C_X]$  wyznacza się macierz współczynników korelacji:

$$[r_X(i, j)] = \frac{[C_X(i, j)]}{\sqrt{[C_X(i, i)][C_X(j, j)]}} \quad (\text{E.5})$$

Gdzie  $i, j = 1, \dots, 4n - 4$ .

**Krok 8.** Macierz  $[r_X]$  transformuje się do odpowiadającej jej macierzy  $[r_Y]$ , która odpowiada podstawowemu rozkładowi normalnemu względem  $X$ . Transformacja odbywa się zgodnie z równaniem (E.6) (patrz Fenton i Griffiths, 2008):

$$[r_Y(i, j)] = \frac{\ln(1 + [r_X(i, j)]v_{X_i}v_{X_j})}{\sqrt{\ln(1 + v_{X_i}^2)\ln(1 + v_{X_j}^2)}} \quad (\text{E.6})$$

Gdzie:

$$v_{X_i} = \frac{\sqrt{[C_X(i, i)]}}{\mu_X} \quad (\text{E.7})$$

**Krok 9.** Macierz korelacji  $[r_Y]$  przekształca się do macierzy kowariancji  $[C_Y]$  odpowiadającej podstawowemu rozkładowi normalnemu względem  $X$ .

$$[C_Y(i, j)] = [r_Y(i, j)]\sqrt{\text{Var}(Y_i)\text{Var}(Y_j)} \quad (\text{E.8})$$

Gdzie:

$$\text{Var}(Y_i) = \ln \left( 1 + \frac{[C_X(i, i)]}{\mu_X^2} \right) \quad (\text{E.9})$$

Gdzie  $i, j = 1, \dots, 4n - 4$ .

**Krok 10.** Macierz kowariancji  $[C_Y]$  rozkłada się na dwie macierze zgodnie z dekompozycją Choleskiego:

$$[C_Y] = [L][L]^T \quad (\text{E.10})$$

Gdzie  $[L]$  jest macierzą dolnotrójkątną z rzeczywistymi dodatnimi wartościami na przekątnej. Jednoznaczność rozkładu Choleskiego wynika z faktu, że macierz  $[C_Y]$  jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona. Algorytm rozkładu Choleskiego można znaleźć np. w Horn i in. (1985).  $Y$  oznacza  $\varphi$  lub  $c$ , w związku z czym otrzymuje się dwie macierze dla  $\varphi$  ( $[L_\varphi]$ ) oraz dla  $c$  ( $[L_c]$ ).

**Krok 11.** Wektory otrzymane w Kroku 3, tj.  $Y_\varphi$  oraz  $Y_c$ , poddaje się procedurze standaryzacji:

$$Y_{\varphi i}^* = \frac{Y_{\varphi i} - \mu_{Y_\varphi}}{\sigma_{Y_\varphi}}, \quad i = 1, \dots, 4n - 4 \quad (\text{E.11})$$

$$Y_{c i}^* = \frac{Y_{c i} - \mu_{Y_c}}{\sigma_{Y_c}}, \quad i = 1, \dots, 4n - 4 \quad (\text{E.12})$$

Wektory  $Y_\varphi^*$  oraz  $Y_c^*$  mają niezależne współrzędne normalne o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji.

**Krok 12.** Wykorzystuje się następujące twierdzenie (Fenton i Griffiths, 2008): jeśli  $[C]$  jest dodatnio określoną macierzą  $n \times n$ ,  $\mathbf{U}$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem, którego współrzędne są niezależnymi gaussowskimi zmiennymi losowymi i  $[L]$  jest macierzą dolnotrójkątną taką, że  $[L][L]^T = [C]$ , wtedy wektor losowy zdefiniowany jako  $\mathbf{Z} = [L][\mathbf{U}]$  jest gaussowskim wektorem, którego współrzędne są skorelowane macierzą  $[C]$ . Zgodnie z twierdzeniem wyznacza się nowe wektory  $\mathbf{Z}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Z}_c$ .



$$\mathbf{Z}_\varphi = [L_\varphi] \mathbf{Y}_\varphi^* \quad (\text{E.13})$$

$$\mathbf{Z}_c = [L_c] \mathbf{Y}_c^* \quad (\text{E.14})$$

Gdzie  $[L_\varphi]$  oraz  $[L_c]$  otrzymano w Kroku 10. Wektory  $\mathbf{Z}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Z}_c$  mają zerowe wartości oczekiwane, natomiast ich współrzędne są skorelowane macierzami  $[C_{Y_\varphi}]$  oraz  $[C_{Y_c}]$ .

**Krok 13.** Wyznacza się wektory  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  poprzez dodanie wartości oczekiwanych  $\mathbf{Y}_\varphi$  oraz  $\mathbf{Y}_c$  do współrzędnych wektorów  $\mathbf{Z}_\varphi$  i  $\mathbf{Z}_c$ .

$$P_{\varphi i} = Z_{\varphi i} + \mu_{Y_{\varphi i}} \quad (\text{E.15})$$

$$P_{c i} = Z_{c i} + \mu_{Y_{c i}} \quad (\text{E.16})$$

Gdzie  $i = 1, \dots, 4n - 4$ .

Wektory  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  są wektorami o normalnych współrzędnych. Wartości oczekiwane współrzędnych wynoszą odpowiednio  $\mu_{Y_{\varphi i}}$  i  $\mu_{Y_{c i}}$ ; współrzędne są skorelowane macierzami kowariancji  $[C_{Y_\varphi}]$  oraz  $[C_{Y_c}]$ .

**Krok 14.** Współrzędne wektorów  $\mathbf{P}_\varphi$  oraz  $\mathbf{P}_c$  są transformowane do rozkładu lognormalnego:

$$T_{\varphi i} = \exp(P_{\varphi i}), \quad i = 1, \dots, 4n - 4 \quad (\text{E.17})$$

$$T_{c i} = \exp(P_{c i}), \quad i = 1, \dots, 4n - 4 \quad (\text{E.18})$$

**Krok 15.** Współrzędne wektorów  $T_{\varphi i}$  oraz  $T_{c i}$ , które są rezultatem procedury uśredniania, są wykorzystywane w algorytmie opisanym w rozdziale 5 w sposób następujący:  $\bar{\varphi}_1 = T_{\varphi 1}, \dots, \bar{\varphi}_{4n-4} = T_{\varphi(4n-4)}$  oraz  $\bar{c}_1 = T_{c1}, \dots, \bar{c}_{4n-4} = T_{c(4n-4)}$ .

Rozwiązanie problemów związanych z możliwością pojawienia się macierzy ujemnie określonych przedstawiono w Załączniku F.

## Załącznik F

Trudności obliczeniowe związane z macierzami kowariancji, które nie są dodatnio określone, wynikają ze skończonej precyzji obliczeń i dotyczą wszystkich typów zagadnień rozpatrywanych w rozprawie; jednakże, dotyczą przeciętnie kilku procent realizacji. Jak wspomniano w rozprawie, dla tych kilku procent otrzymane macierze są bliskie macierzom dodatnio określonym. Macierz dodatnio określona ma dodatnie wartości własne ( $\lambda_i > 0$ ); w większości zidentyfikowanych przypadków macierzy ujemnie określonych, ujemne wartości własne (lub jedna wartość własna) były zbliżone do zera i mniejsze przynajmniej o dwa rzędy wielkości od największych dodatnich wartości własnych. Na podstawie powyższych obserwacji autor zdecydował się zastosować rozkład według wartości osobliwych (*singular value decomposition*, SVD; np. Trefethen i Bau, 1997) dla macierzy kowariancji. W pierwszej kolejności wyznaczano wartości własne macierzy kowariancji. Jeśli wszystkie były dodatnie, dekompozycja Choleskiego była znajdowana wprost; jeśli pojawiły się ujemne wartości własne, wyznaczano rozkład macierzy według wartości osobliwych. Dla każdej macierzy  $A$  istnieje następująca faktoryzacja (F.1).

$$A = U\Sigma V^T \tag{F.1}$$

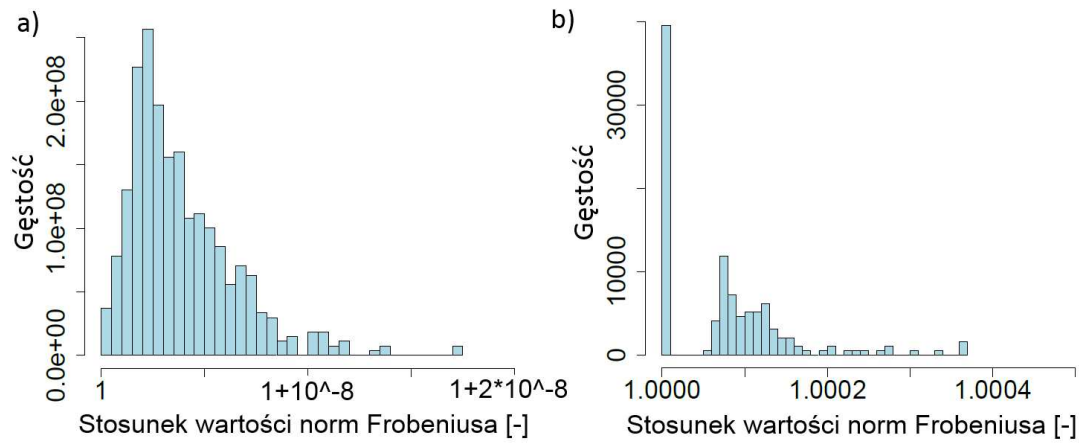
Gdzie  $U$  i  $V$  są macierzami ortogonalnymi, tzn.  $U^{-1} = U^T$  oraz  $V^{-1} = V^T$ ; macierz  $\Sigma$  jest macierzą diagonalną  $\Sigma = \text{diag}(\kappa_i)$ , gdzie  $\kappa_i$  są tzw. wartościami osobliwymi macierzy  $A$  ( $\kappa_i$  są dodatnimi liczbami rzeczywistymi). Jednakże, jeśli macierz  $A$  jest rzeczywista i symetryczna ( $A = A^T$ ), jak w rozważanym przypadku, wtedy SVD wyznacza się z równania (F.2).

$$A = X\Sigma X^T \quad (\text{F.2})$$

Dla tego przypadku dodatnie wartości własne macierzy ( $\lambda_i > 0$ ) są wartościami osobliwymi (dla  $\lambda_i > 0$ ,  $\kappa_i = \lambda_i$ ) oraz wartość bezwzględna ujemnych wartości własnych jest wartością osobliwą (dla  $\lambda_i < 0$ ,  $\kappa_i = |\lambda_i|$ ). Jeśli znajdziemy rozkład jak w równaniu (F.2) i znamy wartości własne rozpatrywanej macierzy kowariancji, wtedy podmieniając wartości osobliwe odpowiadające ujemnym wartościom własnym na bliskie zero ujemne wartości  $-\zeta$  oraz mnożąc macierze z równania (F.2):  $A_{mod} = X\Sigma_{mod} X^T$ , otrzymujemy macierz dodatnio określoną. W analizach numerycznych przyjęto wartość  $\zeta = 10^{-7}$ . Dla macierzy kowariancji występujących w rozprawie przyjęta procedura ma marginalny wpływ na otrzymane rezultaty, jest natomiast istotna z technicznego punktu widzenia; mianowicie, umożliwia przeprowadzenie obliczeń numerycznych. W celu oszacowania wpływu założonej modyfikacji macierzy kowariancji zastosowano normę Frobeniusa (Horn i Johnson, 1990) zadaną w równaniu (F.3):

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |a_{ij}|^2} \quad (\text{F.3})$$

Gdzie  $k$  oznacza rozmiar macierzy (w niniejszej rozprawie rozważa się wyłącznie macierze kwadratowe). Normę Frobeniusa zastosowano do porównania macierzy kowariancji przed i po modyfikacji opisanej w niniejszym załączniku. Dla przykładu, stosunki wartości normy Frobeniusa dla obydwu macierzy przedstawiono na rysunku F.1. Rezultaty otrzymano w przypadku podłoża spoistego dla dwuwymiarowego mechanizmu symetrycznego,  $b = 1.0$  m, przy założeniu  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 22.50$  m (rys. F.1a) oraz podłoża idealnie spoistego dla mechanizmu trójwymiarowego przy założeniu przypadku izotropowego  $\theta/b = 4.0$  (rys. F.1b). Wybrane przypadki dotyczą sytuacji, w których najczęściej uzyskiwano brak dodatniej określoności wyjściowej macierzy kowariancji (ze względu na silną korelację parametrów wytrzymałościowych wynikającą z dużych skal fluktuacji i relatywnie małych mechanizmów zniszczenia). Na podstawie rysunku F.1 można stwierdzić, że wpływ modyfikacji macierzy kowariancji na zmianę wartości normy Frobeniusa jest pomijalny.



Rysunek F.1. Histogramy stosunku norm Frobeniusa dla macierzy kowariancji po modyfikacji (w celu zapewnienia dodatniej określoności) oraz macierzy przed modyfikacją: a) symetryczny mechanizm 6-blokowy, b) trójwymiarowy mechanizm zniszczenia. Szczegółowy opis w tekście.

Wyznaczanie wartości własnych macierzy oraz dekompozycji SVD przeprowadzono w środowisku Mathematica używając wbudowanych funkcji `Eigenvalues()` oraz `SingularValueDecomposition()`.

## Załącznik G

Poniżej przedstawiono macierze kowariancji wyznaczone dla wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych podłoża spoistego, tj.  $\varphi = 20^\circ$ ,  $c = 20$  kPa oraz  $\gamma = 18.2$  kN/m<sup>3</sup>. Poniższe macierze dotyczą mechanizmu dwuwymiarowego symetrycznego 6-blokowego, w związku z czym ich rozmiar to 10 x 10. Macierze wyznaczono dla każdej rozważanej kombinacji wartości skal fluktuacji, szczegóły podano poniżej.

$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 0.25 \text{ m}$$

2,50E+00	9,85E-01	4,13E-01	2,34E-01	1,52E-01	5,19E-01	7,31E-04	5,16E-11	1,15E-22	2,60E-36
9,85E-01	2,28E+00	7,97E-01	3,31E-01	1,86E-01	7,16E-01	4,17E-01	1,48E-04	1,39E-13	2,76E-29
4,13E-01	7,97E-01	2,07E+00	6,38E-01	2,61E-01	2,22E-03	5,83E-01	3,31E-01	1,89E-05	1,20E-17
2,34E-01	3,31E-01	6,38E-01	1,87E+00	4,99E-01	8,51E-09	4,86E-04	4,70E-01	2,56E-01	3,41E-07
1,52E-01	1,86E-01	2,61E-01	4,99E-01	1,67E+00	2,93E-14	7,67E-11	6,44E-05	3,72E-01	6,13E-02
5,19E-01	7,16E-01	2,22E-03	8,51E-09	2,93E-14	5,36E+00	8,34E-01	1,16E-04	2,84E-14	3,72E-32
7,31E-04	4,17E-01	5,83E-01	4,86E-04	7,67E-11	8,34E-01	4,97E+00	6,63E-01	1,44E-05	2,27E-18
5,16E-11	1,48E-04	3,31E-01	4,70E-01	6,44E-05	1,16E-04	6,63E-01	4,56E+00	5,15E-01	2,55E-07
1,15E-22	1,39E-13	1,89E-05	2,56E-01	3,72E-01	2,84E-14	1,44E-05	5,15E-01	4,12E+00	1,23E-01
2,60E-36	2,76E-29	1,20E-17	3,41E-07	6,13E-02	3,72E-32	2,27E-18	2,55E-07	1,23E-01	1,30E+00

$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 1.25 \text{ m}$$

3,06E+00	2,32E+00	1,75E+00	1,42E+00	1,19E+00	6,29E-01	1,05E-02	1,11E-04	1,04E-04	1,95E-03
2,32E+00	2,38E+00	2,00E+00	1,60E+00	1,25E+00	2,01E+00	6,44E-01	8,99E-02	5,28E-02	2,14E-02
1,75E+00	2,00E+00	2,07E+00	1,86E+00	1,43E+00	1,55E+00	1,56E+00	8,92E-01	5,94E-01	9,02E-02
1,42E+00	1,60E+00	1,86E+00	2,00E+00	1,77E+00	8,09E-01	1,09E+00	1,14E+00	1,28E+00	2,51E-01
1,19E+00	1,25E+00	1,43E+00	1,77E+00	2,20E+00	2,27E-01	2,02E-01	1,99E-01	6,79E-01	5,82E-01
6,29E-01	2,01E+00	1,55E+00	8,09E-01	2,27E-01	6,53E+00	2,38E+00	3,15E-01	1,61E-01	3,13E-02
1,05E-02	6,44E-01	1,56E+00	1,09E+00	2,02E-01	2,38E+00	7,50E+00	4,75E+00	2,35E+00	9,69E-02
1,11E-04	8,99E-02	8,92E-01	1,14E+00	1,99E-01	3,15E-01	4,75E+00	8,49E+00	5,59E+00	1,45E-01
1,04E-04	5,28E-02	5,94E-01	1,28E+00	6,79E-01	1,61E-01	2,35E+00	5,59E+00	7,72E+00	6,08E-01
1,95E-03	2,14E-02	9,02E-02	2,51E-01	5,82E-01	3,13E-02	9,69E-02	1,45E-01	6,08E-01	2,15E+00

$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 2.50 \text{ m}$$

3,08E+00	2,43E+00	2,01E+00	1,84E+00	1,87E+00	6,34E-01	1,18E-02	2,16E-04	9,96E-04	3,31E-01
2,43E+00	2,38E+00	2,10E+00	1,93E+00	1,90E+00	2,12E+00	6,59E-01	1,27E-01	2,07E-01	5,59E-01
2,01E+00	2,10E+00	2,07E+00	1,99E+00	1,90E+00	2,02E+00	1,65E+00	9,56E-01	1,08E+00	7,33E-01
1,84E+00	1,93E+00	1,99E+00	2,01E+00	1,99E+00	1,69E+00	1,59E+00	1,21E+00	1,47E+00	9,16E-01
1,87E+00	1,90E+00	1,90E+00	1,99E+00	2,23E+00	1,26E+00	7,32E-01	3,35E-01	7,09E-01	1,22E+00
6,34E-01	2,12E+00	2,02E+00	1,69E+00	1,26E+00	6,58E+00	2,52E+00	4,82E-01	7,52E-01	7,02E-01
1,18E-02	6,59E-01	1,65E+00	1,59E+00	7,32E-01	2,52E+00	7,65E+00	5,60E+00	5,35E+00	5,95E-01
2,16E-04	1,27E-01	9,56E-01	1,21E+00	3,35E-01	4,82E-01	5,60E+00	8,81E+00	7,19E+00	3,08E-01
9,96E-04	2,07E-01	1,08E+00	1,47E+00	7,09E-01	7,52E-01	5,35E+00	7,19E+00	8,02E+00	6,89E-01
3,31E-01	5,59E-01	7,33E-01	9,16E-01	1,22E+00	7,02E-01	5,95E-01	3,08E-01	6,89E-01	2,22E+00

$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 7.50 \text{ m}$$

3,09E+00	2,46E+00	2,10E+00	2,02E+00	2,24E+00	6,35E-01	1,22E-02	2,66E-04	1,99E-03	1,84E+00
2,46E+00	2,39E+00	2,13E+00	2,06E+00	2,24E+00	2,15E+00	6,64E-01	1,41E-01	3,16E-01	1,94E+00
2,10E+00	2,13E+00	2,07E+00	2,03E+00	2,10E+00	2,19E+00	1,68E+00	9,77E-01	1,30E+00	1,86E+00
2,02E+00	2,06E+00	2,03E+00	2,01E+00	2,06E+00	2,10E+00	1,79E+00	1,23E+00	1,53E+00	1,86E+00
2,24E+00	2,24E+00	2,10E+00	2,06E+00	2,24E+00	2,13E+00	1,09E+00	3,95E-01	7,19E-01	2,05E+00
6,35E-01	2,15E+00	2,19E+00	2,10E+00	2,13E+00	6,60E+00	2,56E+00	5,50E-01	1,22E+00	1,98E+00
1,22E-02	6,64E-01	1,68E+00	1,79E+00	1,09E+00	2,56E+00	7,70E+00	5,90E+00	7,00E+00	1,06E+00
2,66E-04	1,41E-01	9,77E-01	1,23E+00	3,95E-01	5,50E-01	5,90E+00	8,91E+00	7,81E+00	3,91E-01
1,99E-03	3,16E-01	1,30E+00	1,53E+00	7,19E-01	1,22E+00	7,00E+00	7,81E+00	8,12E+00	7,16E-01
1,84E+00	1,94E+00	1,86E+00	1,86E+00	2,05E+00	1,98E+00	1,06E+00	3,91E-01	7,16E-01	2,24E+00

$$\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 0.50 \text{ m}$$

4,46E+00	3,16E+00	1,63E+00	9,37E-01	6,07E-01	1,86E+00	2,28E-01	3,08E-03	4,30E-06	6,45E-10
3,16E+00	4,12E+00	2,72E+00	1,32E+00	7,43E-01	2,30E+00	1,55E+00	1,21E-01	5,37E-04	3,06E-08
1,63E+00	2,72E+00	3,78E+00	2,30E+00	1,04E+00	4,98E-01	1,98E+00	1,27E+00	5,58E-02	1,62E-05
9,37E-01	1,32E+00	2,30E+00	3,45E+00	1,88E+00	2,37E-02	2,91E-01	1,68E+00	1,00E+00	6,38E-03
6,07E-01	7,43E-01	1,04E+00	1,88E+00	3,11E+00	1,14E-03	6,16E-03	1,47E-01	1,39E+00	2,45E-01
1,86E+00	2,30E+00	4,98E-01	2,37E-02	1,14E-03	7,53E+00	2,99E+00	1,29E-01	2,41E-04	2,05E-09
2,28E-01	1,55E+00	1,98E+00	2,91E-01	6,16E-03	2,99E+00	7,25E+00	2,48E+00	5,76E-02	6,76E-06
3,08E-03	1,21E-01	1,27E+00	1,68E+00	1,47E-01	1,29E-01	2,48E+00	6,92E+00	1,99E+00	6,42E-03
4,30E-06	5,37E-04	5,58E-02	1,00E+00	1,39E+00	2,41E-04	5,76E-02	1,99E+00	6,50E+00	4,88E-01
6,45E-10	3,06E-08	1,62E-05	6,38E-03	2,45E-01	2,05E-09	6,76E-06	6,42E-03	4,88E-01	2,47E+00

$$\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 2.50 \text{ m}$$

5,26	4,41	3,72	3,40	3,39	2,11	0,52	0,16	0,18	0,69
4,41	4,27	3,87	3,58	3,44	3,60	1,88	0,98	0,95	1,03
3,72	3,87	3,78	3,64	3,47	3,64	2,82	2,05	2,01	1,34
3,40	3,58	3,64	3,68	3,65	3,13	2,70	2,28	2,52	1,69
3,39	3,44	3,47	3,65	3,99	2,28	1,63	1,33	1,87	2,21
2,11	3,60	3,64	3,13	2,28	8,17	5,67	3,12	2,75	1,08
0,52	1,88	2,82	2,70	1,63	5,67	8,56	7,48	6,25	1,11
0,16	0,98	2,05	2,28	1,33	3,12	7,48	8,87	7,89	1,08
0,18	0,95	2,01	2,52	1,87	2,75	6,25	7,89	8,63	1,73
0,69	1,03	1,34	1,69	2,21	1,08	1,11	1,08	1,73	3,92

$\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 5.00 \text{ m}$ 

5,29	4,47	3,87	3,70	3,99	2,12	0,54	0,19	0,28	2,63
4,47	4,28	3,92	3,78	3,95	3,65	1,90	1,07	1,31	2,86
3,87	3,92	3,78	3,71	3,78	3,90	2,86	2,09	2,34	2,90
3,70	3,78	3,71	3,68	3,77	3,75	2,95	2,31	2,63	3,02
3,99	3,95	3,78	3,77	4,04	3,40	2,15	1,48	1,90	3,37
2,12	3,65	3,90	3,75	3,40	8,19	5,82	3,57	4,12	2,78
0,54	1,90	2,86	2,95	2,15	5,82	8,61	7,87	7,84	1,94
0,19	1,07	2,09	2,31	1,48	3,57	7,87	8,95	8,48	1,40
0,28	1,31	2,34	2,63	1,90	4,12	7,84	8,48	8,73	1,86
2,63	2,86	2,90	3,02	3,37	2,78	1,94	1,40	1,86	4,02

 $\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 15.00 \text{ m}$ 

5,30	4,49	3,91	3,79	4,20	2,12	0,54	0,20	0,33	4,01
4,49	4,28	3,94	3,84	4,12	3,67	1,90	1,10	1,44	3,97
3,91	3,94	3,78	3,73	3,88	3,98	2,87	2,10	2,45	3,76
3,79	3,84	3,73	3,69	3,81	3,96	3,03	2,32	2,66	3,71
4,20	4,12	3,88	3,81	4,05	3,83	2,34	1,52	1,90	3,96
2,12	3,67	3,98	3,96	3,83	8,20	5,86	3,72	4,66	3,75
0,54	1,90	2,87	3,03	2,34	5,86	8,62	7,99	8,39	2,31
0,20	1,10	2,10	2,32	1,52	3,72	7,99	8,98	8,67	1,51
0,33	1,44	2,45	2,66	1,90	4,66	8,39	8,67	8,76	1,90
4,01	3,97	3,76	3,71	3,96	3,75	2,31	1,51	1,90	4,05

 $\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 0.75 \text{ m}$ 

5,88E+00	4,95E+00	3,29E+00	2,05E+00	1,35E+00	3,36E+00	1,22E+00	1,72E-01	9,53E-03	8,74E-05
4,95E+00	5,52E+00	4,47E+00	2,77E+00	1,65E+00	3,81E+00	2,91E+00	8,23E-01	6,78E-02	4,84E-04
3,29E+00	4,47E+00	5,14E+00	3,97E+00	2,26E+00	2,03E+00	3,38E+00	2,47E+00	5,05E-01	6,27E-03
2,05E+00	2,77E+00	3,97E+00	4,74E+00	3,43E+00	5,53E-01	1,51E+00	2,96E+00	2,03E+00	8,60E-02
1,35E+00	1,65E+00	2,26E+00	3,43E+00	4,33E+00	1,27E-01	2,87E-01	1,04E+00	2,56E+00	5,52E-01
3,36E+00	3,81E+00	2,03E+00	5,53E-01	1,27E-01	8,26E+00	5,00E+00	9,45E-01	4,14E-02	9,07E-05
1,22E+00	2,91E+00	3,38E+00	1,51E+00	2,87E-01	5,00E+00	8,10E+00	4,42E+00	5,79E-01	3,61E-03
1,72E-01	8,23E-01	2,47E+00	2,96E+00	1,04E+00	9,45E-01	4,42E+00	7,90E+00	3,78E+00	9,73E-02
9,53E-03	6,78E-02	5,05E-01	2,03E+00	2,56E+00	4,14E-02	5,79E-01	3,78E+00	7,62E+00	1,03E+00
8,74E-05	4,84E-04	6,27E-03	8,60E-02	5,52E-01	9,07E-05	3,61E-03	9,73E-02	1,03E+00	3,51E+00

 $\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 3.75 \text{ m}$ 

6,65	5,88	5,21	4,93	5,08	3,72	1,74	0,99	1,07	2,54
5,88	5,68	5,29	5,07	5,09	4,93	3,18	2,22	2,28	2,91
5,21	5,29	5,14	5,02	5,00	5,12	3,98	3,19	3,27	3,16
4,93	5,07	5,02	5,01	5,07	4,83	3,96	3,39	3,64	3,48
5,08	5,09	5,00	5,07	5,38	4,18	3,11	2,60	3,09	4,01
3,72	4,93	5,12	4,83	4,18	8,61	7,22	5,47	5,20	2,69
1,74	3,18	3,98	3,96	3,11	7,22	8,80	8,27	7,64	2,38
0,99	2,22	3,19	3,39	2,60	5,47	8,27	8,94	8,48	2,22
1,07	2,28	3,27	3,64	3,09	5,20	7,64	8,48	8,83	2,89
2,54	2,91	3,16	3,48	4,01	2,69	2,38	2,22	2,89	5,29

$$\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 7.50 \text{ m}$$

6,67	5,92	5,30	5,13	5,51	3,74	1,76	1,06	1,29	4,61
5,92	5,69	5,32	5,19	5,43	4,97	3,19	2,30	2,60	4,69
5,30	5,32	5,14	5,06	5,20	5,27	4,00	3,22	3,51	4,61
5,13	5,19	5,06	5,02	5,16	5,21	4,10	3,40	3,73	4,66
5,51	5,43	5,20	5,16	5,42	4,91	3,45	2,70	3,11	5,01
3,74	4,97	5,27	5,21	4,91	8,62	7,31	5,84	6,24	4,38
1,76	3,19	4,00	4,10	3,45	7,31	8,82	8,47	8,46	3,22
1,06	2,30	3,22	3,40	2,70	5,84	8,47	8,98	8,76	2,59
1,29	2,60	3,51	3,73	3,11	6,24	8,46	8,76	8,88	3,06
4,61	4,69	4,61	4,66	5,01	4,38	3,22	2,59	3,06	5,40

$$\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 22.50 \text{ m}$$

6,68	5,93	5,33	5,19	5,65	3,74	1,77	1,08	1,37	5,54
5,93	5,69	5,33	5,23	5,53	4,99	3,19	2,33	2,70	5,45
5,33	5,33	5,14	5,08	5,26	5,32	4,00	3,23	3,58	5,19
5,19	5,23	5,08	5,03	5,18	5,33	4,14	3,41	3,75	5,12
5,65	5,53	5,26	5,18	5,44	5,16	3,56	2,73	3,12	5,39
3,74	4,99	5,32	5,33	5,16	8,62	7,34	5,95	6,59	5,09
1,77	3,19	4,00	4,14	3,56	7,34	8,83	8,53	8,72	3,53
1,08	2,33	3,23	3,41	2,73	5,95	8,53	8,99	8,85	2,72
1,37	2,70	3,58	3,75	3,12	6,59	8,72	8,85	8,89	3,11
5,54	5,45	5,19	5,12	5,39	5,09	3,53	2,72	3,11	5,44

Poniżej przedstawiono macierze kowariancji wyznaczone dla wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych dla podłoża spoistego, tj.  $\varphi = 20^\circ$ ,  $c = 20 \text{ kPa}$  oraz  $\gamma = 18.2 \text{ kN/m}^3$ . Poniższe macierze dotyczą mechanizmu trójwymiarowego 5-blokowego, w związku z czym ich rozmiar to  $16 \times 16$ . Macierze wyznaczone dla każdej rozważanej kombinacji wartości skal fluktuacji, szczegóły podano poniżej.

$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 0.25 \text{ m}$$

1,23E+00	3,81E-02	3,81E-02	7,23E-02	7,23E-02	9,93E-02	9,93E-02	4,38E-02	4,38E-02	3,45E-01	2,01E-01	1,15E-01	6,07E-08	2,35E-05	2,98E-04	1,72E-05
3,81E-02	1,77E+00	7,49E-02	5,39E-01	1,24E-04	7,15E-02	6,87E-08	1,52E-02	7,55E-14	3,12E-01	5,48E-01	3,33E-01	4,47E-01	3,48E-02	5,70E-05	8,04E-11
7,49E-02	1,77E+00	1,24E-04	5,39E-01	6,87E-08	7,15E-02	7,55E-14	1,52E-02	3,12E-01	5,48E-01	3,33E-01	4,47E-01	3,48E-02	5,70E-05	8,04E-11	7,23E-02
5,39E-01	1,24E-04	2,67E+00	1,79E-04	8,97E-01	1,61E-06	6,32E-02	1,54E-11	3,77E-01	9,51E-02	2,71E-02	8,26E-02	3,13E-01	3,60E-02	7,03E-06	7,23E-02
1,24E-04	5,39E-01	1,79E-04	2,67E+00	1,61E-06	8,97E-01	1,54E-11	6,32E-02	3,77E-01	9,51E-02	2,71E-02	8,26E-02	3,13E-01	3,60E-02	7,03E-06	9,93E-02
6,87E-08	7,15E-02	6,87E-08	8,97E-01	1,61E-06	2,55E+00	2,81E-07	4,83E-01	4,47E-11	6,57E-02	2,53E-02	1,15E-02	1,82E-04	5,50E-02	1,72E-01	7,65E-03
9,93E-02	6,87E-08	7,15E-02	1,61E-06	8,97E-01	2,81E-07	2,55E+00	4,47E-11	4,83E-01	6,57E-02	2,53E-02	1,15E-02	1,82E-04	5,50E-02	1,72E-01	7,65E-03
4,38E-02	1,52E-02	7,55E-14	6,32E-02	1,54E-11	4,83E-01	4,47E-11	1,72E+00	5,06E-13	1,47E-02	8,64E-03	5,08E-03	1,04E-09	3,52E-05	1,55E-02	4,92E-02
4,38E-02	7,55E-14	1,52E-02	1,54E-11	6,32E-02	4,47E-11	4,83E-01	5,06E-13	1,72E+00	1,47E-02	8,64E-03	5,08E-03	1,04E-09	3,52E-05	1,55E-02	4,92E-02
3,45E-01	3,12E-01	3,12E-01	3,77E-01	3,77E-01	6,57E-02	6,57E-02	1,47E-02	1,47E-02	9,66E-01	4,55E-01	1,79E-01	9,46E-02	5,21E-02	1,49E-04	1,50E-10
2,01E-01	5,48E-01	5,48E-01	9,51E-02	9,51E-02	2,53E-02	2,53E-02	8,64E-03	8,64E-03	4,55E-01	8,35E-01	3,04E-01	2,69E-01	6,23E-04	2,78E-08	1,77E-13
1,15E-01	3,33E-01	3,33E-01	2,71E-02	2,71E-02	1,15E-02	1,15E-02	5,08E-03	5,08E-03	1,79E-01	3,04E-01	6,37E-01	5,26E-02	7,87E-08	8,74E-12	1,03E-14
6,07E-08	4,47E-01	4,47E-01	8,26E-02	8,26E-02	1,82E-04	1,82E-04	1,04E-09	1,04E-09	9,46E-02	2,69E-01	5,26E-02	2,83E+00	4,42E-01	2,21E-04	2,42E-12
2,35E-05	3,48E-02	3,48E-02	3,13E-01	3,13E-01	5,50E-02	5,50E-02	3,52E-05	3,52E-05	5,21E-02	6,23E-04	7,87E-08	4,42E-01	2,47E+00	2,87E-01	8,93E-06
2,98E-04	5,70E-05	5,70E-05	3,60E-02	3,60E-02	1,72E-01	1,72E-01	1,55E-02	1,55E-02	1,49E-04	2,78E-08	8,74E-12	2,21E-04	2,87E-01	1,49E+00	4,67E-02
1,72E-05	8,04E-11	8,04E-11	7,03E-06	7,03E-06	7,65E-03	7,65E-03	4,92E-02	4,92E-02	1,50E-10	1,77E-13	1,03E-14	2,42E-12	8,93E-06	4,67E-02	4,50E-01



$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 1.25 \text{ m}$$

4,40E+00 1,40E+00 1,40E+00 1,13E+00 1,13E+00 1,53E+00 1,53E+00 2,56E+00 2,56E+00 2,67E+00 2,33E+00 2,06E+00 1,39E-02 1,04E-03 1,22E-02 5,00E-01  
 1,40E+00 **3,82E+00** 2,73E+00 3,02E+00 1,89E+00 2,56E+00 1,42E+00 1,24E+00 4,60E-01 2,34E+00 2,45E+00 2,36E+00 1,73E+00 4,39E-01 4,71E-01 2,84E-01  
 1,40E+00 2,73E+00 **3,82E+00** 1,89E+00 3,02E+00 1,42E+00 2,56E+00 4,60E-01 1,24E+00 2,34E+00 2,45E+00 2,36E+00 1,73E+00 4,39E-01 4,71E-01 2,84E-01  
 1,13E+00 3,02E+00 1,89E+00 **3,79E+00** 2,06E+00 3,45E+00 1,60E+00 1,38E+00 4,21E-01 2,09E+00 1,88E+00 1,37E+00 2,34E+00 1,30E+00 1,55E+00 6,31E-01  
 1,13E+00 1,89E+00 3,02E+00 2,06E+00 **3,79E+00** 1,60E+00 3,45E+00 4,21E-01 1,38E+00 2,09E+00 1,88E+00 1,37E+00 2,34E+00 1,30E+00 1,55E+00 6,31E-01  
 1,53E+00 2,56E+00 1,42E+00 3,45E+00 1,60E+00 **4,10E+00** 1,63E+00 2,11E+00 5,89E-01 1,92E+00 1,55E+00 1,09E+00 9,60E-01 4,63E-01 9,84E-01 1,02E+00  
 1,53E+00 1,42E+00 2,56E+00 1,60E+00 3,45E+00 1,63E+00 **4,10E+00** 5,89E-01 2,11E+00 1,92E+00 1,55E+00 1,09E+00 9,60E-01 4,63E-01 9,84E-01 1,02E+00  
 2,56E+00 1,24E+00 4,60E-01 1,38E+00 4,21E-01 2,11E+00 5,89E-01 **4,20E+00** 8,18E-01 1,46E+00 1,19E+00 9,56E-01 4,49E-02 9,45E-03 5,36E-02 1,11E+00  
 2,56E+00 4,60E-01 1,24E+00 4,21E-01 1,38E+00 5,89E-01 2,11E+00 8,18E-01 **4,20E+00** 1,46E+00 1,19E+00 9,56E-01 4,49E-02 9,45E-03 5,36E-02 1,11E+00  
 2,67E+00 2,34E+00 2,34E+00 2,09E+00 2,09E+00 1,92E+00 1,92E+00 1,46E+00 1,46E+00 **2,59E+00** 2,43E+00 2,10E+00 7,84E-01 3,68E-01 3,85E-01 3,11E-01  
 2,33E+00 2,45E+00 2,45E+00 1,88E+00 1,88E+00 1,55E+00 1,55E+00 1,19E+00 1,19E+00 2,43E+00 **2,47E+00** 2,31E+00 9,73E-01 3,21E-01 2,41E-01 1,86E-01  
 2,06E+00 2,36E+00 2,36E+00 1,37E+00 1,37E+00 1,09E+00 1,09E+00 9,56E-01 9,56E-01 2,10E+00 2,31E+00 **2,54E+00** 6,75E-01 9,06E-02 6,34E-02 9,54E-02  
 1,39E-02 1,73E+00 1,73E+00 2,34E+00 2,34E+00 9,60E-01 9,60E-01 4,49E-02 4,49E-02 7,84E-01 9,73E-01 6,75E-01 **5,95E+00** 4,40E+00 2,66E+00 2,02E-01  
 1,04E-03 4,39E-01 4,39E-01 1,30E+00 1,30E+00 4,63E-01 4,63E-01 9,45E-03 9,45E-03 3,68E-01 3,21E-01 9,06E-02 4,40E+00 **7,41E+00** 5,03E+00 2,62E-01  
 1,22E-02 4,71E-01 4,71E-01 1,55E+00 1,55E+00 9,84E-01 9,84E-01 5,36E-02 5,36E-02 3,85E-01 2,41E-01 6,34E-02 2,66E+00 5,03E+00 **6,10E+00** 7,51E-01  
 5,00E-01 2,84E-01 2,84E-01 6,31E-01 6,31E-01 1,02E+00 1,02E+00 1,11E+00 1,11E+00 3,11E-01 1,86E-01 9,54E-02 2,02E-01 2,62E-01 7,51E-01 **2,23E+00**

$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 2.50 \text{ m}$$

4,98E+00 2,09E+00 2,09E+00 1,52E+00 1,52E+00 1,99E+00 1,99E+00 4,08E+00 4,08E+00 3,21E+00 2,97E+00 2,91E+00 3,21E-02 1,25E-03 1,43E-02 1,87E+00  
 2,09E+00 **4,01E+00** 3,66E+00 3,49E+00 3,10E+00 3,61E+00 3,13E+00 2,19E+00 1,73E+00 2,83E+00 2,86E+00 2,96E+00 1,88E+00 5,33E-01 9,41E-01 1,64E+00  
 2,09E+00 3,66E+00 **4,01E+00** 3,10E+00 3,49E+00 3,13E+00 3,61E+00 2,19E+00 1,73E+00 2,83E+00 2,86E+00 2,96E+00 1,88E+00 5,33E-01 9,41E-01 1,64E+00  
 1,52E+00 3,49E+00 3,10E+00 **3,84E+00** 3,28E+00 3,74E+00 3,07E+00 1,79E+00 1,32E+00 2,51E+00 2,49E+00 2,36E+00 3,01E+00 1,46E+00 2,22E+00 1,85E+00  
 1,52E+00 3,10E+00 3,49E+00 3,28E+00 **3,84E+00** 3,07E+00 3,74E+00 1,32E+00 1,79E+00 2,51E+00 2,49E+00 2,36E+00 3,01E+00 1,46E+00 2,22E+00 1,85E+00  
 1,99E+00 3,61E+00 3,13E+00 3,74E+00 3,07E+00 **4,19E+00** 3,30E+00 2,41E+00 1,73E+00 2,64E+00 2,51E+00 2,35E+00 1,76E+00 5,62E-01 1,24E+00 2,27E+00  
 1,99E+00 3,13E+00 3,61E+00 3,07E+00 3,74E+00 3,30E+00 **4,19E+00** 1,73E+00 2,41E+00 2,64E+00 2,51E+00 2,35E+00 1,76E+00 5,62E-01 1,24E+00 2,27E+00  
 4,08E+00 2,19E+00 1,73E+00 1,79E+00 1,32E+00 2,41E+00 1,73E+00 **4,56E+00** 3,00E+00 2,70E+00 2,46E+00 2,35E+00 1,41E-01 1,40E-02 6,87E-02 2,45E+00  
 4,08E+00 1,73E+00 2,19E+00 1,32E+00 1,79E+00 1,73E+00 2,41E+00 3,00E+00 **4,56E+00** 2,70E+00 2,46E+00 2,35E+00 1,41E-01 1,40E-02 6,87E-02 2,45E+00  
 3,21E+00 2,83E+00 2,83E+00 2,51E+00 2,51E+00 2,64E+00 2,64E+00 2,70E+00 2,70E+00 **2,91E+00** 2,82E+00 2,77E+00 8,99E-01 4,16E-01 6,31E-01 1,55E+00  
 2,97E+00 2,86E+00 2,86E+00 2,49E+00 2,49E+00 2,51E+00 2,51E+00 2,46E+00 2,46E+00 2,82E+00 **2,79E+00** 2,81E+00 1,05E+00 4,61E-01 6,21E-01 1,35E+00  
 2,91E+00 2,96E+00 2,96E+00 2,36E+00 2,36E+00 2,35E+00 2,35E+00 2,35E+00 2,77E+00 2,77E+00 **2,96E+00** 8,52E-01 2,40E-01 3,72E-01 1,13E+00  
 3,21E-02 1,88E+00 1,88E+00 3,01E+00 3,01E+00 1,76E+00 1,76E+00 1,41E-01 1,41E-01 8,99E-01 1,05E+00 8,52E-01 **6,17E+00** 5,15E+00 5,02E+00 8,61E-01  
 1,25E-03 5,33E-01 5,33E-01 1,46E+00 1,46E+00 5,62E-01 5,62E-01 1,40E-02 1,40E-02 4,16E-01 4,61E-01 2,40E-01 5,15E+00 **7,88E+00** 6,39E+00 4,77E-01  
 1,43E-02 9,41E-01 9,41E-01 2,22E+00 2,22E+00 1,24E+00 1,24E+00 6,87E-02 6,87E-02 6,31E-01 6,21E-01 3,72E-01 5,02E+00 6,39E+00 **6,83E+00** 9,52E-01  
 1,87E+00 1,64E+00 1,64E+00 1,85E+00 1,85E+00 2,27E+00 2,27E+00 2,45E+00 2,45E+00 1,55E+00 1,35E+00 1,13E+00 8,61E-01 4,77E-01 9,52E-01 **2,89E+00**

$$\theta_v = 0.25 \text{ m}; \theta_h = 7.50 \text{ m}$$

5,20E+00 2,38E+00 2,38E+00 1,67E+00 1,67E+00 2,17E+00 2,17E+00 4,79E+00 4,79E+00 3,41E+00 3,22E+00 3,28E+00 4,14E-02 1,32E-03 1,50E-02 3,21E+00  
 2,38E+00 **4,07E+00** 4,03E+00 3,66E+00 3,61E+00 4,05E+00 3,99E+00 2,68E+00 2,59E+00 3,02E+00 3,02E+00 3,19E+00 1,93E+00 5,66E-01 1,17E+00 3,00E+00  
 2,38E+00 4,03E+00 **4,07E+00** 3,61E+00 3,66E+00 3,99E+00 4,05E+00 2,59E+00 2,68E+00 3,02E+00 3,02E+00 3,19E+00 1,93E+00 5,66E-01 1,17E+00 3,00E+00  
 1,67E+00 3,66E+00 3,61E+00 **3,86E+00** 3,79E+00 3,83E+00 3,75E+00 1,95E+00 1,88E+00 2,67E+00 2,73E+00 2,82E+00 3,26E+00 1,51E+00 2,49E+00 2,71E+00  
 1,67E+00 3,61E+00 3,66E+00 3,79E+00 **3,86E+00** 3,75E+00 3,83E+00 1,88E+00 1,95E+00 2,67E+00 2,73E+00 2,82E+00 3,26E+00 1,51E+00 2,49E+00 2,71E+00  
 2,17E+00 4,05E+00 3,99E+00 3,83E+00 3,75E+00 **4,21E+00** 4,10E+00 2,51E+00 2,42E+00 2,94E+00 2,93E+00 3,07E+00 2,13E+00 5,98E-01 1,34E+00 3,07E+00  
 2,17E+00 3,99E+00 4,05E+00 3,75E+00 3,83E+00 4,10E+00 **4,21E+00** 2,42E+00 2,51E+00 2,94E+00 2,93E+00 3,07E+00 2,13E+00 5,98E-01 1,34E+00 3,07E+00  
 4,79E+00 2,68E+00 2,59E+00 1,95E+00 1,88E+00 2,51E+00 2,42E+00 **4,69E+00** 4,46E+00 3,33E+00 3,15E+00 3,21E+00 2,01E-01 1,58E-02 7,50E-02 3,33E+00  
 4,79E+00 2,59E+00 2,68E+00 1,88E+00 1,95E+00 2,42E+00 2,51E+00 4,46E+00 **4,69E+00** 3,33E+00 3,15E+00 3,21E+00 2,01E-01 1,58E-02 7,50E-02 3,33E+00  
 3,41E+00 3,02E+00 3,02E+00 2,67E+00 2,67E+00 2,94E+00 2,94E+00 3,33E+00 **3,03E+00** 2,96E+00 3,04E+00 9,38E-01 4,31E-01 7,35E-01 2,87E+00  
 3,22E+00 3,02E+00 3,02E+00 2,73E+00 2,73E+00 2,93E+00 2,93E+00 3,15E+00 3,15E+00 2,96E+00 **2,91E+00** 2,99E+00 1,07E+00 5,16E-01 8,39E-01 2,77E+00  
 3,28E+00 3,19E+00 3,19E+00 2,82E+00 2,82E+00 3,07E+00 3,07E+00 3,21E+00 3,21E+00 3,04E+00 2,99E+00 **3,11E+00** 9,18E-01 3,25E-01 6,40E-01 2,81E+00  
 4,14E-02 1,93E+00 1,93E+00 3,26E+00 3,26E+00 2,13E+00 2,13E+00 2,01E-01 2,01E-01 9,38E-01 1,07E+00 9,18E-01 **6,24E+00** 5,41E+00 6,16E+00 1,39E+00  
 1,32E-03 5,66E-01 5,66E-01 1,51E+00 1,51E+00 5,98E-01 5,98E-01 1,58E-02 1,58E-02 4,31E-01 5,16E-01 3,25E-01 5,41E+00 **8,04E+00** 6,89E+00 5,75E-01  
 1,50E-02 1,17E+00 1,17E+00 2,49E+00 2,49E+00 1,34E+00 1,34E+00 7,50E-02 7,50E-02 7,35E-01 8,39E-01 6,40E-01 6,16E+00 6,89E+00 **7,09E+00** 1,03E+00  
 3,21E+00 3,00E+00 3,00E+00 2,71E+00 2,71E+00 3,07E+00 3,07E+00 3,33E+00 3,33E+00 2,87E+00 2,77E+00 2,81E+00 1,39E+00 5,75E-01 1,03E+00 **3,18E+00**

$$\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 0.50 \text{ m}$$

3,38E+00 5,80E-01 5,80E-01 9,48E-01 9,48E-01 1,08E+00 1,08E+00 5,84E-01 5,84E-01 1,86E+00 1,21E+00 7,29E-01 2,66E-02 6,51E-02 9,58E-02 2,17E-02  
 5,80E-01 **4,35E+00** 9,36E-01 2,47E+00 1,56E-01 9,07E-01 1,79E-02 2,41E-01 6,16E-04 1,76E+00 2,26E+00 1,66E+00 2,19E+00 5,51E-01 4,17E-02 3,70E-04  
 5,80E-01 9,36E-01 **4,35E+00** 1,56E-01 2,47E+00 1,79E-02 9,07E-01 6,16E-04 2,41E-01 1,76E+00 2,26E+00 1,66E+00 2,19E+00 5,51E-01 4,17E-02 3,70E-04  
 9,48E-01 2,47E+00 1,56E-01 **5,21E+00** 1,90E-01 3,49E+00 5,04E-02 8,20E-01 1,91E-03 1,81E+00 1,04E+00 4,12E-01 1,08E+00 1,70E+00 5,24E-01 1,30E-02  
 9,48E-01 1,56E-01 2,47E+00 1,90E-01 **5,21E+00** 5,04E-02 3,49E+00 1,91E-03 8,20E-01 1,81E+00 1,04E+00 4,12E-01 1,08E+00 1,70E+00 5,24E-01 1,30E-02  
 1,08E+00 9,07E-01 1,79E-02 3,49E+00 5,04E-02 **5,24E+00** 3,01E-02 2,30E+00 2,39E-03 8,08E-01 3,90E-01 1,82E-01 1,37E-01 7,44E-01 9,87E-01 1,26E-01  
 1,08E+00 1,79E-02 9,07E-01 5,04E-02 3,49E+00 3,01E-02 **5,24E+00** 2,39E-03 2,30E+00 8,08E-01 3,90E-01 1,82E-01 1,37E-01 7,44E-01 9,87E-01 1,26E-01  
 5,84E-01 2,41E-01 6,16E-04 8,20E-01 1,91E-03 2,30E+00 2,39E-03 **4,28E+00** 5,38E-04 2,33E-01 1,38E-01 8,12E-02 3,46E-03 4,16E-02 2,34E-01 3,33E-01  
 5,84E-01 6,16E-04 2,41E-01 1,91E-03 8,20E-01 2,39E-03 2,30E+00 5,38E-04 **4,28E+00** 2,33E-01 1,38E-01 8,12E-02 3,46E-03 4,16E-02 2,34E-01 3,33E-01  
 1,86E+00 1,76E+00 1,76E+00 1,81E+00 1,81E+00 8,08E-01 8,08E-01 2,33E-01 2,33E-01 **2,84E+00** 2,14E+00 1,10E+00 8,14E-01 4,82E-01 6,31E-02 1,09E-03  
 1,21E+00 2,26E+00 2,26E+00 1,04E+00 1,04E+00 3,90E-01 3,90E-01 1,38E-01 1,38E-01 2,14E+00 **2,54E+00** 1,62E+00 1,25E+00 1,41E-01 7,20E-03 1,50E-04  
 7,29E-01 1,66E+00 1,66E+00 4,12E-01 4,12E-01 1,82E-01 1,82E-01 8,12E-02 8,12E-02 1,10E+00 1,62E+00 **2,04E+00** 5,71E-01 1,28E-02 7,77E-04 4,00E-05  
 2,66E-02 2,19E+00 2,19E+00 1,08E+00 1,08E+00 1,37E-01 1,37E-01 3,46E-03 3,46E-03 8,14E-01 1,25E+00 5,71E-01 **5,73E+00** 2,29E+00 1,35E-01 2,68E-04  
 6,51E-02 5,51E-01 5,51E-01 1,70E+00 1,70E+00 7,44E-01 7,44E-01 4,16E-02 4,16E-02 4,82E-01 1,41E-01 1,28E-02 2,29E+00 **5,54E+00** 1,80E+00 2,31E-02  
 9,58E-02 4,17E-02 4,17E-02 5,24E-01 5,24E-01 9,87E-01 9,87E-01 2,34E-01 2,34E-01 6,31E-02 7,20E-03 7,77E-04 1,35E-01 1,80E+00 **4,00E+00** 4,71E-01  
 2,17E-02 3,70E-04 3,70E-04 1,30E-02 1,30E-02 1,26E-01 1,26E-01 3,33E-01 3,33E-01 1,09E-03 1,50E-04 4,00E-05 2,68E-04 2,31E-02 4,71E-01 **1,54E+00**

$\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 2.50 \text{ m}$ 

<b>7,00</b>	4,19	4,19	3,39	3,39	4,11	4,11	5,94	5,94	5,16	4,82	4,70	0,48	0,16	0,36	3,19
4,19	<b>6,35</b>	5,78	5,74	5,09	5,71	4,92	4,08	3,28	5,04	5,09	5,13	4,18	2,42	2,70	2,79
4,19	5,78	<b>6,35</b>	5,09	5,74	4,92	5,71	3,28	4,08	5,04	5,09	5,13	4,18	2,42	2,70	2,79
3,39	5,74	5,09	<b>6,02</b>	5,14	6,04	4,96	3,73	2,80	4,56	4,49	4,21	5,04	3,77	4,24	3,22
3,39	5,09	5,74	5,14	<b>6,02</b>	4,96	6,04	2,80	3,73	4,56	4,49	4,21	5,04	3,77	4,24	3,22
4,11	5,71	4,92	6,04	4,96	<b>6,47</b>	5,07	4,68	3,39	4,72	4,49	4,14	3,81	2,67	3,47	3,89
4,11	4,92	5,71	4,96	6,04	5,07	<b>6,47</b>	3,39	4,68	4,72	4,49	4,14	3,81	2,67	3,47	3,89
5,94	4,08	3,28	3,73	2,80	4,68	3,39	<b>6,82</b>	4,53	4,40	4,03	3,79	0,98	0,48	0,83	4,11
5,94	3,28	4,08	2,80	3,73	3,39	4,68	4,53	<b>6,82</b>	4,40	4,03	3,79	0,98	0,48	0,83	4,11
5,16	5,04	5,04	4,56	4,56	4,72	4,72	4,40	4,40	<b>4,96</b>	4,83	4,72	1,98	1,13	1,46	2,69
4,82	5,09	5,09	4,49	4,49	4,49	4,49	4,03	4,03	4,83	<b>4,81</b>	4,80	2,20	1,18	1,40	2,33
4,70	5,13	5,13	4,21	4,21	4,14	4,14	3,79	3,79	4,72	4,80	<b>5,00</b>	1,95	0,85	0,99	1,93
0,48	4,18	4,18	5,04	5,04	3,81	3,81	0,98	0,98	1,98	2,20	1,95	<b>7,88</b>	7,10	6,32	1,77
0,16	2,42	2,42	3,77	3,77	2,67	2,67	0,48	0,48	1,13	1,18	0,85	7,10	<b>8,55</b>	7,64	1,53
0,36	2,70	2,70	4,24	4,24	3,47	3,47	0,83	0,83	1,46	1,40	0,99	6,32	7,64	<b>8,05</b>	2,32
3,19	2,79	2,79	3,22	3,22	3,89	3,89	4,11	4,11	2,69	2,33	1,93	1,77	1,53	2,32	<b>4,88</b>

 $\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 5.00 \text{ m}$ 

<b>7,27</b>	4,63	4,63	3,63	3,63	4,42	4,42	6,78	6,78	5,43	5,17	5,26	0,55	0,17	0,38	4,84
4,63	<b>6,46</b>	6,30	5,98	5,80	6,27	6,04	4,85	4,59	5,31	5,32	5,47	4,28	2,58	3,30	4,69
4,63	6,30	<b>6,46</b>	5,80	5,98	6,04	6,27	4,59	4,85	5,31	5,32	5,47	4,28	2,58	3,30	4,69
3,63	5,98	5,80	<b>6,11</b>	5,84	6,17	5,87	4,01	3,73	4,81	4,84	4,85	5,38	3,90	4,68	4,50
3,63	5,80	5,98	5,84	<b>6,11</b>	5,87	6,17	3,73	4,01	4,81	4,84	4,85	5,38	3,90	4,68	4,50
4,42	6,27	6,04	6,17	5,87	<b>6,52</b>	6,12	4,84	4,47	5,17	5,11	5,13	4,40	2,83	3,73	5,05
4,42	6,04	6,27	5,87	6,17	6,12	<b>6,52</b>	4,47	4,84	5,17	5,11	5,13	4,40	2,83	3,73	5,05
6,78	4,85	4,59	4,01	3,73	4,84	4,47	<b>6,97</b>	6,28	5,24	4,98	5,02	1,26	0,54	0,90	5,23
6,78	4,59	4,85	3,73	4,01	4,47	4,84	6,28	<b>6,97</b>	5,24	4,98	5,02	1,26	0,54	0,90	5,23
5,43	5,31	5,31	4,81	4,81	5,17	5,17	5,24	5,24	<b>5,13</b>	5,04	5,11	2,05	1,17	1,69	4,43
5,17	5,32	5,32	4,84	4,84	5,11	5,11	4,98	4,98	5,04	<b>4,98</b>	5,08	2,25	1,29	1,80	4,22
5,26	5,47	5,47	4,85	4,85	5,13	5,13	5,02	5,02	5,11	5,08	<b>5,25</b>	2,07	1,06	1,52	4,11
0,55	4,28	4,28	5,38	5,38	4,40	4,40	1,26	1,26	2,05	2,25	2,07	<b>7,97</b>	7,46	7,56	2,73
0,17	2,58	2,58	3,90	3,90	2,83	2,83	0,54	0,54	1,17	1,29	1,06	7,46	<b>8,70</b>	8,14	1,86
0,38	3,30	3,30	4,68	4,68	3,73	3,73	0,90	0,90	1,69	1,80	1,52	7,56	8,14	<b>8,31</b>	2,53
4,84	4,69	4,69	4,50	4,50	5,05	5,05	5,23	5,23	4,43	4,22	4,11	2,73	1,86	2,53	<b>5,31</b>

 $\theta_v = 0.50 \text{ m}; \theta_h = 15.00 \text{ m}$ 

<b>7,35</b>	4,77	4,77	3,71	3,71	4,52	4,52	7,07	7,07	5,51	5,28	5,45	0,57	0,17	0,39	5,54
4,77	<b>6,49</b>	6,46	6,05	6,03	6,45	6,42	5,11	5,08	5,40	5,39	5,58	4,32	2,64	3,51	5,51
4,77	6,46	<b>6,49</b>	6,03	6,05	6,42	6,45	5,08	5,11	5,40	5,39	5,58	4,32	2,64	3,51	5,51
3,71	6,05	6,03	<b>6,12</b>	6,07	6,21	6,17	4,09	4,06	4,89	4,95	5,06	5,49	3,94	4,82	4,99
3,71	6,03	6,05	6,07	<b>6,12</b>	6,17	6,21	4,06	4,09	4,89	4,95	5,06	5,49	3,94	4,82	4,99
4,52	6,45	6,42	6,21	6,17	<b>6,53</b>	6,47	4,90	4,86	5,31	5,31	5,48	4,59	2,87	3,81	5,48
4,52	6,42	6,45	6,17	6,21	6,47	<b>6,53</b>	4,86	4,90	5,31	5,31	5,48	4,59	2,87	3,81	5,48
7,07	5,11	5,08	4,09	4,06	4,90	4,86	<b>7,02</b>	6,93	5,52	5,31	5,48	1,36	0,55	0,92	5,64
7,07	5,08	5,11	4,06	4,09	4,86	4,90	6,93	<b>7,02</b>	5,52	5,31	5,48	1,36	0,55	0,92	5,64
5,51	5,40	5,40	4,89	4,89	5,31	5,31	5,52	5,52	<b>5,18</b>	5,10	5,24	2,08	1,18	1,76	5,21
5,28	5,39	5,39	4,95	4,95	5,31	5,31	5,31	5,31	5,10	<b>5,04</b>	5,17	2,27	1,33	1,94	5,11
5,45	5,58	5,58	5,06	5,06	5,48	5,48	5,48	5,48	5,24	5,17	<b>5,33</b>	2,11	1,13	1,74	5,24
0,57	4,32	4,32	5,49	5,49	4,59	4,59	1,36	1,36	2,08	2,27	2,11	<b>8,00</b>	7,58	7,98	3,12
0,17	2,64	2,64	3,94	3,94	2,87	2,87	0,55	0,55	1,18	1,33	1,13	7,58	<b>8,74</b>	8,30	1,97
0,39	3,51	3,51	4,82	4,82	3,81	3,81	0,92	0,92	1,76	1,94	1,74	7,98	8,30	<b>8,39</b>	2,60
5,54	5,51	5,51	4,99	4,99	5,48	5,48	5,64	5,64	5,21	5,11	5,24	3,12	1,97	2,60	<b>5,44</b>

$$\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 0.75 \text{ m}$$

5,16E+00 2,04E+00 2,04E+00 2,67E+00 2,67E+00 2,73E+00 2,73E+00 1,84E+00 1,84E+00 3,76E+00 2,80E+00 1,85E+00 4,99E-01 5,88E-01 5,83E-01 2,17E-01  
2,04E+00 **6,07E+00** 2,60E+00 4,47E+00 1,17E+00 2,55E+00 4,42E-01 1,02E+00 8,58E-02 3,63E+00 4,08E+00 3,36E+00 4,11E+00 1,90E+00 4,58E-01 2,66E-02  
2,04E+00 2,60E+00 **6,07E+00** 1,17E+00 4,47E+00 4,42E-01 2,55E+00 8,58E-02 1,02E+00 3,63E+00 4,08E+00 3,36E+00 4,11E+00 1,90E+00 4,58E-01 2,66E-02  
2,67E+00 4,47E+00 1,17E+00 **6,73E+00** 1,25E+00 5,53E+00 6,98E-01 2,41E+00 1,45E-01 3,56E+00 2,72E+00 1,52E+00 2,90E+00 3,48E+00 1,77E+00 1,76E-01  
2,67E+00 1,17E+00 4,47E+00 1,25E+00 **6,73E+00** 6,98E-01 5,53E+00 1,45E-01 2,41E+00 3,56E+00 2,72E+00 1,52E+00 2,90E+00 3,48E+00 1,77E+00 1,76E-01  
2,73E+00 2,55E+00 4,42E-01 5,53E+00 6,98E-01 **6,76E+00** 5,52E-01 4,31E+00 1,62E-01 2,33E+00 1,49E+00 8,11E-01 1,08E+00 2,29E+00 2,37E+00 5,48E-01  
2,73E+00 4,42E-01 2,55E+00 6,98E-01 5,53E+00 5,52E-01 **6,76E+00** 1,62E-01 4,31E+00 2,33E+00 1,49E+00 8,11E-01 1,08E+00 2,29E+00 2,37E+00 5,48E-01  
1,84E+00 1,02E+00 8,58E-02 2,41E+00 1,45E-01 4,31E+00 1,62E-01 **6,08E+00** 8,42E-02 9,95E-01 6,43E-01 3,91E-01 1,67E-01 4,74E-01 9,79E-01 9,46E-01  
1,84E+00 8,58E-02 1,02E+00 1,45E-01 2,41E+00 1,62E-01 4,31E+00 8,42E-02 **6,08E+00** 9,95E-01 6,43E-01 3,91E-01 1,67E-01 4,74E-01 9,79E-01 9,46E-01  
3,76E+00 3,63E+00 3,63E+00 3,56E+00 3,56E+00 2,33E+00 2,33E+00 9,95E-01 9,95E-01 **4,59E+00** 3,98E+00 2,61E+00 2,09E+00 1,37E+00 4,80E-01 5,31E-02  
2,80E+00 4,08E+00 4,08E+00 2,72E+00 2,72E+00 1,49E+00 1,49E+00 6,43E-01 6,43E-01 3,98E+00 **4,24E+00** 3,30E+00 2,55E+00 8,17E-01 1,83E-01 1,92E-02  
1,85E+00 3,36E+00 3,36E+00 1,52E+00 1,52E+00 8,11E-01 8,11E-01 3,91E-01 3,91E-01 2,61E+00 3,30E+00 **3,58E+00** 1,74E+00 2,71E-01 5,57E-02 7,61E-03  
4,99E-01 4,11E+00 4,11E+00 2,90E+00 2,90E+00 1,08E+00 1,08E+00 1,67E-01 1,67E-01 2,09E+00 2,55E+00 1,74E+00 **7,15E+00** 4,29E+00 9,32E-01 2,74E-02  
5,88E-01 1,90E+00 1,90E+00 3,48E+00 3,48E+00 2,29E+00 2,29E+00 4,74E-01 4,74E-01 1,37E+00 8,17E-01 2,71E-01 4,29E+00 **7,10E+00** 3,80E+00 2,61E-01  
5,83E-01 4,58E-01 4,58E-01 1,77E+00 1,77E+00 2,37E+00 2,37E+00 9,79E-01 9,79E-01 4,80E-01 1,83E-01 5,57E-02 9,32E-01 3,80E+00 **5,84E+00** 1,31E+00  
2,17E-01 2,66E-02 2,66E-02 1,76E-01 1,76E-01 5,48E-01 5,48E-01 9,46E-01 9,46E-01 5,31E-02 1,92E-02 7,61E-03 2,74E-02 2,61E-01 1,31E+00 **2,90E+00**

$$\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 3.75 \text{ m}$$

**7,97** 6,03 6,03 5,26 5,26 5,94 5,94 7,37 7,37 6,58 6,31 6,30 1,67 0,90 1,39 5,36  
6,03 **7,51** 7,20 7,10 6,72 7,22 6,76 6,02 5,49 6,61 6,63 6,69 5,92 4,47 4,79 5,04  
6,03 7,20 **7,51** 6,72 7,10 6,76 7,22 5,49 6,02 6,61 6,63 6,69 5,92 4,47 4,79 5,04  
5,26 7,10 6,72 **7,22** 6,68 7,33 6,70 5,56 4,92 6,18 6,16 6,02 6,56 5,56 5,97 5,26  
5,26 6,72 7,10 6,68 **7,22** 6,70 7,33 4,92 5,56 6,18 6,16 6,02 6,56 5,56 5,97 5,26  
5,94 7,22 6,76 7,33 6,70 **7,63** 6,83 6,40 5,56 6,40 6,27 6,08 5,75 4,72 5,40 5,87  
5,94 6,76 7,22 6,70 7,33 6,83 **7,63** 5,56 6,40 6,40 6,27 6,08 5,75 4,72 5,40 5,87  
7,37 6,02 5,49 5,56 4,92 6,40 5,56 **7,91** 6,59 6,14 5,83 5,71 2,79 1,90 2,50 6,04  
7,37 5,49 6,02 4,92 5,56 5,56 6,40 6,59 **7,91** 6,14 5,83 5,71 2,79 1,90 2,50 6,04  
6,58 6,61 6,61 6,18 6,18 6,40 6,40 6,14 6,14 **6,42** 6,32 6,31 3,31 2,21 2,81 4,88  
6,31 6,63 6,63 6,16 6,16 6,27 6,27 5,83 5,83 **6,32** **6,29** 6,33 3,52 2,32 2,82 4,55  
6,30 6,69 6,69 6,02 6,02 6,08 6,08 5,71 5,71 6,31 6,33 **6,49** 3,33 2,03 2,43 4,19  
1,67 5,92 5,92 6,56 6,56 5,75 5,75 2,79 2,79 3,31 3,52 3,33 **8,45** 8,04 7,65 3,62  
0,90 4,47 4,47 5,56 5,56 4,72 4,72 1,90 1,90 2,21 2,32 2,03 8,04 **8,80** 8,35 3,16  
1,39 4,79 4,79 5,97 5,97 5,40 5,40 2,50 2,50 2,81 2,82 2,43 7,65 8,35 **8,56** 4,00  
5,36 5,04 5,04 5,26 5,26 5,87 5,87 6,04 6,04 4,88 4,55 4,19 3,62 3,16 4,00 **6,46**

$$\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 7.50 \text{ m}$$

**8,11** 6,30 6,30 5,42 5,42 6,13 6,13 7,83 7,83 6,72 6,51 6,66 1,75 0,91 1,44 6,47  
6,30 **7,57** 7,48 7,23 7,13 7,53 7,41 6,52 6,37 6,77 6,77 6,89 6,00 4,61 5,25 6,42  
6,30 7,48 **7,57** 7,13 7,23 7,41 7,53 6,37 6,52 6,77 6,77 6,89 6,00 4,61 5,25 6,42  
5,42 7,23 7,13 **7,24** 7,07 7,40 7,24 5,74 5,57 6,33 6,36 6,40 6,76 5,65 6,26 6,16  
5,42 7,13 7,23 7,07 **7,24** 7,24 7,40 5,57 5,74 6,33 6,36 6,40 6,76 5,65 6,26 6,16  
6,13 7,53 7,41 7,40 7,24 **7,66** 7,43 6,50 6,28 6,67 6,64 6,69 6,11 4,85 5,58 6,64  
6,13 7,41 7,53 7,24 7,40 7,43 **7,66** 6,28 6,50 6,67 6,64 6,69 6,11 4,85 5,58 6,64  
7,83 6,52 6,37 5,74 5,57 6,50 6,28 **7,99** 7,62 6,65 6,44 6,54 3,12 2,00 2,61 6,72  
7,83 6,37 6,52 5,57 5,74 6,28 6,50 7,62 **7,99** 6,65 6,44 6,54 3,12 2,00 2,61 6,72  
6,72 6,77 6,77 6,33 6,33 6,67 6,67 6,65 6,65 **6,52** 6,44 6,54 3,37 2,25 3,01 6,16  
6,51 6,77 6,77 6,36 6,36 6,64 6,64 6,44 6,44 6,44 **6,39** 6,51 3,56 2,41 3,16 6,00  
6,66 6,89 6,89 6,40 6,40 6,69 6,69 6,54 6,54 6,54 6,51 **6,66** 3,42 2,21 2,93 5,98  
1,75 6,00 6,00 6,76 6,76 6,11 6,11 3,12 3,12 3,37 3,56 3,42 **8,50** 8,24 8,30 4,49  
0,91 4,61 4,61 5,65 5,65 4,85 4,85 2,00 2,00 2,25 2,41 2,21 8,24 **8,87** 8,60 3,50  
1,44 5,25 5,25 6,26 6,26 5,58 5,58 2,61 2,61 3,01 3,16 2,93 8,30 8,60 **8,68** 4,20  
6,47 6,42 6,42 6,16 6,16 6,64 6,64 6,72 6,72 6,16 6,00 5,98 4,49 3,50 4,20 **6,72**

$$\theta_v = 0.75 \text{ m}; \theta_h = 22.50 \text{ m}$$

<b>8,15</b>	6,38	6,38	5,46	5,46	6,19	6,19	7,98	7,98	6,77	6,57	6,77	1,78	0,91	1,46	6,86
6,38	<b>7,59</b>	7,56	7,27	7,25	7,63	7,61	6,68	6,66	6,82	6,81	6,95	6,02	4,66	5,40	6,90
6,38	7,56	<b>7,59</b>	7,25	7,27	7,61	7,63	6,66	6,68	6,82	6,81	6,95	6,02	4,66	5,40	6,90
5,46	7,27	7,25	<b>7,24</b>	7,20	7,42	7,40	5,80	5,78	6,38	6,43	6,51	6,82	5,68	6,34	6,46
5,46	7,25	7,27	7,20	<b>7,24</b>	7,40	7,42	5,78	5,80	6,38	6,43	6,51	6,82	5,68	6,34	6,46
6,19	7,63	7,61	7,42	7,40	<b>7,67</b>	7,62	6,55	6,52	6,75	6,76	6,89	6,22	4,89	5,64	6,89
6,19	7,61	7,63	7,40	7,42	7,62	<b>7,67</b>	6,52	6,55	6,75	6,76	6,89	6,22	4,89	5,64	6,89
7,98	6,68	6,66	5,80	5,78	6,55	6,52	<b>8,01</b>	7,95	6,81	6,63	6,82	3,22	2,04	2,64	6,95
7,98	6,66	6,68	5,78	5,80	6,52	6,55	7,95	<b>8,01</b>	6,81	6,63	6,82	3,22	2,04	2,64	6,95
6,77	6,82	6,82	6,38	6,38	6,75	6,75	6,81	6,81	<b>6,55</b>	6,48	6,62	3,38	2,27	3,07	6,62
6,57	6,81	6,81	6,43	6,43	6,76	6,76	6,63	6,63	6,48	<b>6,43</b>	6,56	3,57	2,44	3,27	6,53
6,77	6,95	6,95	6,51	6,51	6,89	6,89	6,82	6,82	6,62	6,56	<b>6,71</b>	3,45	2,27	3,10	6,67
1,78	6,02	6,02	6,82	6,82	6,22	6,22	3,22	3,22	3,38	3,57	3,45	<b>8,52</b>	8,29	8,51	4,79
0,91	4,66	4,66	5,68	5,68	4,89	4,89	2,04	2,04	2,27	2,44	2,27	8,29	<b>8,89</b>	8,67	3,61
1,46	5,40	5,40	6,34	6,34	5,64	5,64	2,64	2,64	3,07	3,27	3,10	8,51	8,67	<b>8,72</b>	4,27
6,86	6,90	6,90	6,46	6,46	6,89	6,89	6,95	6,95	6,62	6,53	6,67	4,79	3,61	4,27	<b>6,80</b>

## Załącznik H

Poniższe tabele zestawiają procentowe przedziały ufności dla otrzymanych wartości średnich nośności podłoża, wyznaczone przy poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ . Wartości przedziałów ufności wyznaczono z następującego wzoru:

$$\pm u_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{N}} \quad (\text{H.1})$$

Gdzie  $u_{\alpha}$  jest statystyką spełniającą warunek:  $P(-u_{\alpha} < U < u_{\alpha}) = 1 - \alpha$ , gdzie  $U$  jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji;  $S$  jest odchyleniem standardowym, a  $N$  liczbą prób.

Tabela H.1 dotyczy mechanizmu Prandtla, tabela H.2 6-blokowego mechanizmu symetrycznego, tabela H.3 6-blokowego mechanizmu niesymetrycznego, a tabela H.4 dotyczy mechanizmu trójwymiarowego 5-blokowego.

Tabela H.1. Procentowe przedziały ufności wartości średnich nośności podłoża dla mechanizmu Prandtla  
 $b = 1.0$  m.

Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Procentowe przedziały ufności dla wartości średnich $\alpha = 0.05$			
	Uśrednianie po spirali BC (rys. 6.1)		Uśrednianie po obszarze ABC (rys. 6.1)	
	Podłoże spoiste	Podłoże niespoiste	Podłoże spoiste	Podłoże niespoiste
	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]
0.25/0.25	0.346	0.847	0.276	0.703
0.25/1.25	0.543	1.317	0.412	1.036
0.25/2.50	0.438	1.108	0.310	0.791
0.25/7.50	0.479	1.275	0.333	0.821
0.50/0.50	0.392	0.966	0.370	0.958
0.50/2.50	0.534	1.400	0.432	1.132
0.50/5.00	0.471	1.340	0.368	0.947
0.50/15.00	0.488	1.461	0.379	0.980
0.75/0.75	0.406	1.025	0.421	1.095
0.75/3.75	0.498	1.446	0.422	1.108
0.75/7.50	0.454	1.402	0.387	0.975
0.75/22.50	0.463	1.481	0.387	0.987

Tabela H.2. Procentowe przedziały ufności wartości średnich nośności podłoża dla 6-blokowego  
mechanizmu symetrycznego.

Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Procentowe przedziały ufności dla wartości średnich $\alpha = 0.05$			
	Symetryczny mechanizm zniszczenia			
	$b = 1.0$ m		$b = 2.0$ m	
	Podłoże spoiste	Podłoże niespoiste	Podłoże spoiste	Podłoże niespoiste
Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]	
0.25/0.25	0.422	0.822	0.317	0.608
0.25/1.25	0.635	1.114	0.457	0.877
0.25/2.50	0.678	1.295	0.522	0.958
0.25/7.50	0.740	1.491	0.607	1.124
0.50/0.50	0.615	1.263	0.447	0.881
0.50/2.50	0.929	1.494	0.687	1.318
0.50/5.00	0.997	1.506	0.738	1.473
0.50/15.00	0.980	1.469	0.782	1.515
0.75/0.75	0.787	1.453	0.598	1.136
0.75/3.75	1.027	1.426	0.859	1.512
0.75/7.50	0.998	1.480	0.928	1.518
0.75/22.50	0.984	1.428	0.987	1.486

Tabela H.3. Procentowe przedziały ufności wartości średnich nośności podłoża dla 6-blokowego mechanizmu niesymetrycznego.

Procentowe przedziały ufności dla wartości średnich $\alpha = 0.05$				
Niesymetryczny mechanizm zniszczenia				
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	$b = 1.0$ m		$b = 2.0$ m	
	Podłoże spoiste	Podłoże niespoiste	Podłoże spoiste	Podłoże niespoiste
	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]
0.25/0.25	0.323	0.593	0.236	0.449
0.25/1.25	0.480	0.915	0.348	0.696
0.25/2.50	0.563	1.121	0.404	0.767
0.25/7.50	0.711	1.413	0.508	0.940
0.50/0.50	0.480	0.905	0.341	0.630
0.50/2.50	0.736	1.373	0.519	1.065
0.50/5.00	0.896	1.449	0.613	1.233
0.50/15.00	1.015	1.508	0.166	1.520
0.75/0.75	0.609	1.151	0.418	0.826
0.75/3.75	0.968	1.467	0.634	1.328
0.75/7.50	0.987	1.506	0.851	1.514
0.75/22.50	0.984	1.542	0.917	1.523

Tab. H.4. Procentowe przedziały ufności dla wartości średnich nośności podłoża w przypadku trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia.

Procentowe przedziały ufności dla wartości średnich $\alpha = 0.05$		
$b = 1.0$ m		
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Indywidualna macierz kowariancji	Stała macierz kowariancji
	Podłoże spoiste	Podłoże spoiste
	Przedział dla wartości średniej [%]	Przedział dla wartości średniej [%]
0.25/0.25	0.913	0.917
0.25/1.25	1.532	1.644
0.25/2.50	1.544	1.783
0.25/7.50	1.624	1.716
0.50/0.50	1.428	1.306
0.50/2.50	1.705	1.745
0.50/5.00	1.885	1.908
0.50/15.00	1.834	1.926
0.75/0.75	1.595	1.642
0.75/3.75	2.120	2.072
0.75/7.50	1.917	1.835
0.75/22.50	1.881	1.886

## Załącznik I

Poniższe tabele zawierają wartości parametrów dla aproksymowanych lognormalnych rozkładów prawdopodobieństwa oraz  $p$ -wartości uzyskane testem Kołmogorowa-Smirnova. W ogólności uzyskane wartości wskazują na to, że otrzymane rozkłady prawdopodobieństwa dobrze przybliżają przebieg histogramów nośności podłoża; jedynie w kilku przypadkach otrzymane  $p$ -wartości znalazły się poniżej poziomu istotności  $\alpha = 0.05$ . Są to rozkłady dla największych współczynników zmienności charakteryzujące się relatywnie długim ogonem dla dużych wartości nośności (dotyczy to przede wszystkim mechanizmu Prandtla). Pomimo tego, opierając się na generalnie dobrym opisie rozkładu nośności podłoża za pomocą rozkładów lognormalnych, zostały one zastosowane w celu oszacowania wskaźników niezawodności oraz wzajemnego porównania rozpatrywanych zagadnień.

Tabela I.1. Wartości oczekiwane  $\mu_p$  i odchylenia standardowe  $\sigma_p$  dla aproksymowanych teoretycznych lognormalnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa dla mechanizmu Prandtla,  $b = 1.0$  m.

Wartości oczekiwane $\mu_p$ i odchylenia standardowe $\sigma_p$ dla rozkładów lognormalnych								
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Mechanizm Prandtla							
	Podłoże spoiste		Podłoże spoiste		Podłoże niespoiste		Podłoże niespoiste	
	Uśrednianie po spirali BC		Uśrednianie po obszarze ABC		Uśrednianie po spirali BC		Uśrednianie po obszarze ABC	
	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$
0.25/0.25	453.375	35.6654	452.439	28.4367	700.202	95.523	696.76	79.0416
0.25/1.25	455.25	55.5183	453.822	42.3617	710.488	147.206	702.971	116.103
0.25/2.50	455.352	63.0026	453.42	45.1024	717.669	172.762	705.113	125.062
0.25/7.50	455.911	68.7196	453.274	48.3717	724.272	195.99	705.929	129.888
0.50/0.50	454.38	49.247	453.907	46.549	710.079	133.818	708.351	131.719
0.50/2.50	457.435	76.5497	455.197	62.635	730.873	216.548	717.538	178.145
0.50/5.00	458.011	82.5036	454.961	65.4508	737.41	244.315	718.038	185.014
0.50/15.00	458.379	85.4111	454.971	67.3152	742.702	260.756	717.67	187.375
0.75/0.75	455.501	58.9978	455.161	60.958	716.236	164.117	713.238	173.737
0.75/3.75	458.905	87.238	456.173	75.3433	744.093	262.561	724.573	213.569
0.75/7.50	459.323	91.7826	458.749	79.9196	751.344	286.783	727.226	218.647
0.75/22.50	459.554	93.4878	457.557	80.0653	755.115	297.842	728.004	221.762



Tabela I.2. Wartości oczekiwane  $\mu_p$  i odchylenia standardowe  $\sigma_p$  dla aproksymowanych teoretycznych lognormalnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa dla symetrycznego mechanizmu 6-blokowego.

Wartości oczekiwane $\mu_p$ i odchylenia standardowe $\sigma_p$ dla rozkładów lognormalnych								
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Mechanizm symetryczny							
	Podłoże spoiste $b = 1.0$ m		Podłoże spoiste $b = 2.0$ m		Podłoże niespoiste $b = 1.0$ m		Podłoże niespoiste $b = 2.0$ m	
	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$
0.25/0.25	447.286	30.3189	1009.27	51.4981	643.81	85.8209	1744.82	171.726
0.25/1.25	438.869	44.7191	1001.12	73.4224	627.472	111.375	1694.37	239.855
0.25/2.50	439.104	47.7067	988.8	82.7219	629.449	131.025	1670.69	258.04
0.25/7.50	444.888	53.1379	998.023	97.2976	637.305	147.307	1679.88	303.67
0.50/0.50	442.484	43.4809	998.314	72.0638	637.585	126.627	1709.58	243.71
0.50/2.50	441.188	65.2922	983.42	107.342	623.319	168.823	1663.18	349.457
0.50/5.00	446.727	72.4972	983.187	116.194	650.327	197.358	1661.41	387.468
0.50/15.00	449.204	76.1227	996.127	125.432	652.866	204.336	1691.66	431.855
0.75/0.75	441.093	55.4367	1001.26	95.525	631.932	149.793	1701.51	309.574
0.75/3.75	449.4	83.2823	983.79	134.305	654.447	225.032	1668.75	418.995
0.75/7.50	450.845	86.3753	996.867	148.332	666.84	240.875	1703.33	495.691
0.75/22.50	454.026	93.5824	1004.73	158.39	677.199	250.487	1724.66	521.613

Tabela I.3. Wartości oczekiwane  $\mu_p$  i odchylenia standardowe  $\sigma_p$  dla aproksymowanych teoretycznych lognormalnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa dla niesymetrycznego mechanizmu 6-blokowego.

Wartości oczekiwane $\mu_p$ i odchylenia standardowe $\sigma_p$ dla rozkładów lognormalnych								
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Mechanizm niesymetryczny							
	Podłoże spoiste $b = 1.0$ m		Podłoże spoiste $b = 2.0$ m		Podłoże niespoiste $b = 1.0$ m		Podłoże niespoiste $b = 2.0$ m	
	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$
0.25/0.25	450.231	23.374	1017.24	38.5976	649.107	61.4544	1761.68	126.561
0.25/1.25	442.194	34.2159	1006.16	56.2635	634.176	92.4363	1722.85	191.661
0.25/2.50	441.374	40.1818	998.165	64.762	632.558	113.63	1691.02	209.138
0.25/7.50	446.221	50.952	1002.55	81.8335	642.475	141.111	1698.12	255.27
0.50/0.50	446.891	34.5076	1010.93	55.5192	645.726	92.8766	1737.24	175.838
0.50/2.50	440.455	52.3792	996.097	82.8619	627.268	137.531	1686.04	281.993
0.50/5.00	443.86	63.8391	994.561	98.4785	653.213	177.415	1682.26	328.653
0.50/15.00	451.132	73.2739	1011.46	126.161	673.424	205.222	1728.75	411.49
0.75/0.75	444.296	43.7903	1006.49	67.5789	639.012	115.434	1718.78	225.546
0.75/3.75	442.268	68.4997	987.989	100.291	647.014	197.859	1665.75	352.003
0.75/7.50	452.363	82.7944	1001.69	135.607	673.222	235.414	1699.8	413.453
0.75/22.50	457.456	87.4489	1013.82	149.487	687.799	255.428	1746.83	498.505

Tabela I.4. Wartości oczekiwane  $\mu_p$  i odchylenia standardowe  $\sigma_p$  dla aproksymowanych teoretycznych lognormalnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa dla mechanizmu trójwymiarowego 5-blokowego dla indywidualnej i stałej macierzy kowariancji.

Wartości oczekiwane $\mu_p$ i odchylenia standardowe $\sigma_p$ dla rozkładów lognormalnych				
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Mechanizm trójwymiarowy			
	Podłoże spoiste $b = 1.0$ m		Podłoże spoiste $b = 1.0$ m	
	Indywidualna macierz kowariancji		Stała macierz kowariancji	
	$\mu_p$	$\sigma_p$	$\mu_p$	$\sigma_p$
0.25/0.25	972.053	89.2219	983.286	90.9592
0.25/1.25	975.305	182.558	991.119	201.742
0.25/2.50	976.008	202.173	1007.11	238.13
0.25/7.50	978.455	233.349	1006.56	243.908
0.50/0.50	965.826	158.584	974.557	144.332
0.50/2.50	1017.79	274.58	1012.22	274.487
0.50/5.00	1031.4	301.551	1025.82	298.565
0.50/15.00	1019.25	302.831	1016.7	300.986
0.75/0.75	974.068	214.991	990.682	213.458
0.75/3.75	1032.13	353.09	1047.67	350.688
0.75/7.50	1050.76	364.989	1037.62	349.432
0.75/22.50	1050.9	364.711	1048.9	359.724

Tabela I.5.  $p$ -wartości otrzymane dla testu Kołmogorowa-Smirnowa dla wszystkich 96 przypadków rozważonych dla mechanizmu 6-blokowego.

$p$ -wartości (test Kołmogorowa-Smirnowa)								
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	Mechanizm symetryczny				Mechanizm niesymetryczny			
	Podłoże spoiste $b = 1.0$ m	Podłoże spoiste $b = 2.0$ m	Podłoże niespoiste $b = 1.0$ m	Podłoże niespoiste $b = 2.0$ m	Podłoże spoiste $b = 1.0$ m	Podłoże spoiste $b = 2.0$ m	Podłoże niespoiste $b = 1.0$ m	Podłoże niespoiste $b = 2.0$ m
0.25/0.25	0.3259	0.8898	0.4671	0.9969	0.9647	0.9167	0.3486	0.7229
0.25/1.25	0.9185	0.4985	0.3373	0.737	0.8858	0.3571	0.2150	0.4113
0.25/2.50	0.803	0.7263	0.9971	0.4983	0.6177	0.6636	0.6908	0.9395
0.25/7.50	0.748	0.9935	0.1687	0.7135	0.6163	0.7658	0.6607	0.5579
0.50/0.50	0.4987	0.6264	0.4106	0.9582	0.9334	0.8544	0.5365	0.9800
0.50/2.50	0.5808	0.3033	0.1814	0.7979	0.1985	0.8159	0.6336	0.4265
0.50/5.00	0.08456	0.0536	0.01530	0.3433	0.4925	0.9940	0.02152	0.4609
0.50/15.00	0.6921	0.8649	0.001562	0.1014	0.3016	0.6532	0.02081	0.1478
0.75/0.75	0.6784	0.7735	0.9634	0.9929	0.9382	0.1225	0.3520	0.7061
0.75/3.75	0.2006	0.6482	0.1325	0.6550	0.4992	0.4148	0.003098	0.1793
0.75/7.50	0.05382	0.8486	0.07199	0.4223	0.1352	0.4584	0.01488	0.8294
0.75/22.50	0.1774	0.9023	0.000756	0.2976	0.0701	0.9604	0.003840	0.09697

Tabela I.6.  $p$ -wartości otrzymane dla testu Kołmogorowa-Smirnowa dla wszystkich 48 przypadków rozważonych dla mechanizmu Prandtla.

Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	$p$ -wartości (test Kołmogorowa-Smirnowa)			
	Uśrednianie wzdłuż linii		Uśrednianie po obszarze	
	BC		ABC	
	$\varphi = 20^\circ$ , $c = 20$ kPa $b = 1.0$ m	$\varphi = 30^\circ$ , $c = 5$ kPa $b = 1.0$ m	$\varphi = 20^\circ$ , $c = 20$ kPa $b = 1.0$ m	$\varphi = 30^\circ$ , $c = 5$ kPa $b = 1.0$ m
0.25/0.25	0.4000	0.8788	0.9244	0.48574
0.25/1.25	0.1104	0.4954	0.5682	0.3705
0.25/2.50	0.06783	0.08985	0.4648	0.4241
0.25/7.50	0.01792	0.007844	0.2606	0.4457
0.50/0.50	0.2606	0.4393	0.2759	0.4367
0.50/2.50	0.02880	0.02790	0.3227	0.1270
0.50/5.00	0.003569	0.0002469	0.1163	0.04488
0.50/15.00	0.001861	0.0000391	0.09119	0.03324
0.75/0.75	0.3329	0.2925	0.1454	0.5994
0.75/3.75	0.002546	0.0002526	0.1935	0.2690
0.75/7.50	0.0009942	0.00002071	0.2185	0.1724
0.75/22.50	0.001182	0.000004674	0.08610	0.2339

Tabela I.7.  $p$ -wartości otrzymane dla testu Kołmogorowa-Smirnowa dla wszystkich 24 przypadków rozważonych dla mechanizmu trójwymiarowego.

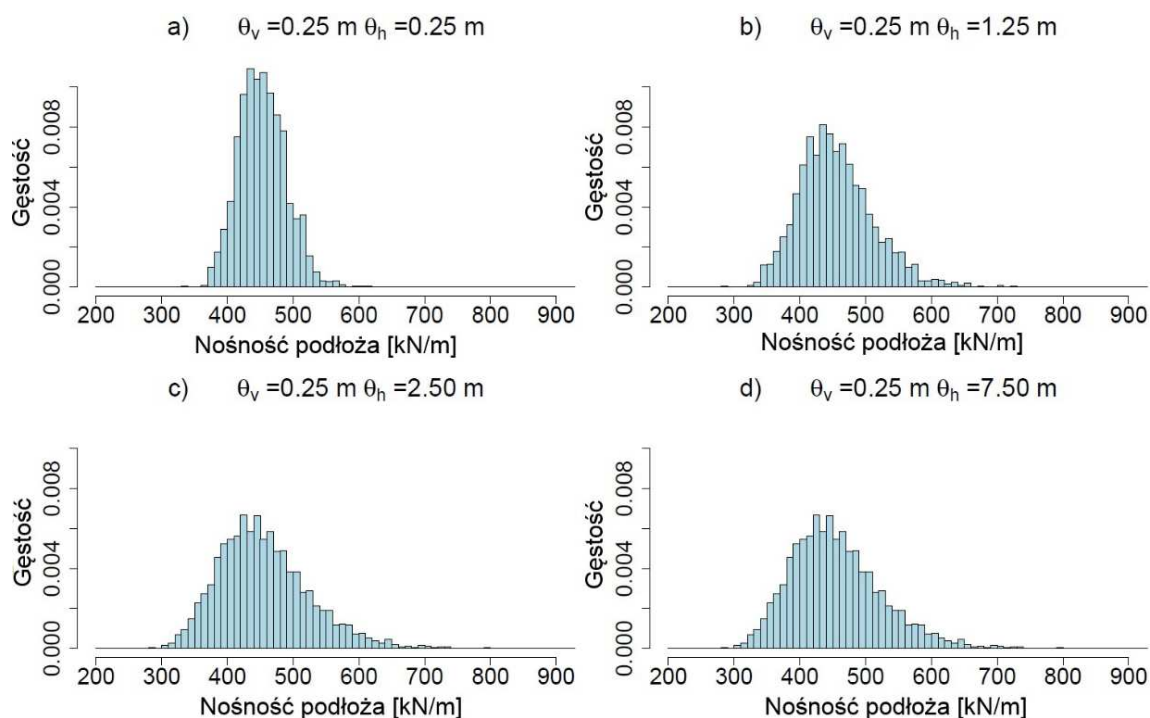
Pionowa/ pozioma skala fluktuacji [m]	$p$ -wartości (test Kołmogorowa-Smirnowa)	
	Indywidualna	Stała
	macierz	macierz
	kowariancji	kowariancji
	$\varphi = 20^\circ$ , $c = 20$ kPa $b = 1.0$ m	$\varphi = 20^\circ$ , $c = 20$ kPa $b = 1.0$ m
0.25/0.25	0.8043	0.3533
0.25/1.25	0.8294	0.6602
0.25/2.50	0.9363	0.5474
0.25/7.50	0.4018	0.09338
0.50/0.50	0.8823	0.8061
0.50/2.50	0.4950	0.4263
0.50/5.00	0.7352	0.1310
0.50/15.00	0.4956	0.1250
0.75/0.75	0.6136	0.3545
0.75/3.75	0.03962	0.08747
0.75/7.50	0.07859	0.04903
0.75/22.50	0.0760	0.0035

## Załącznik J

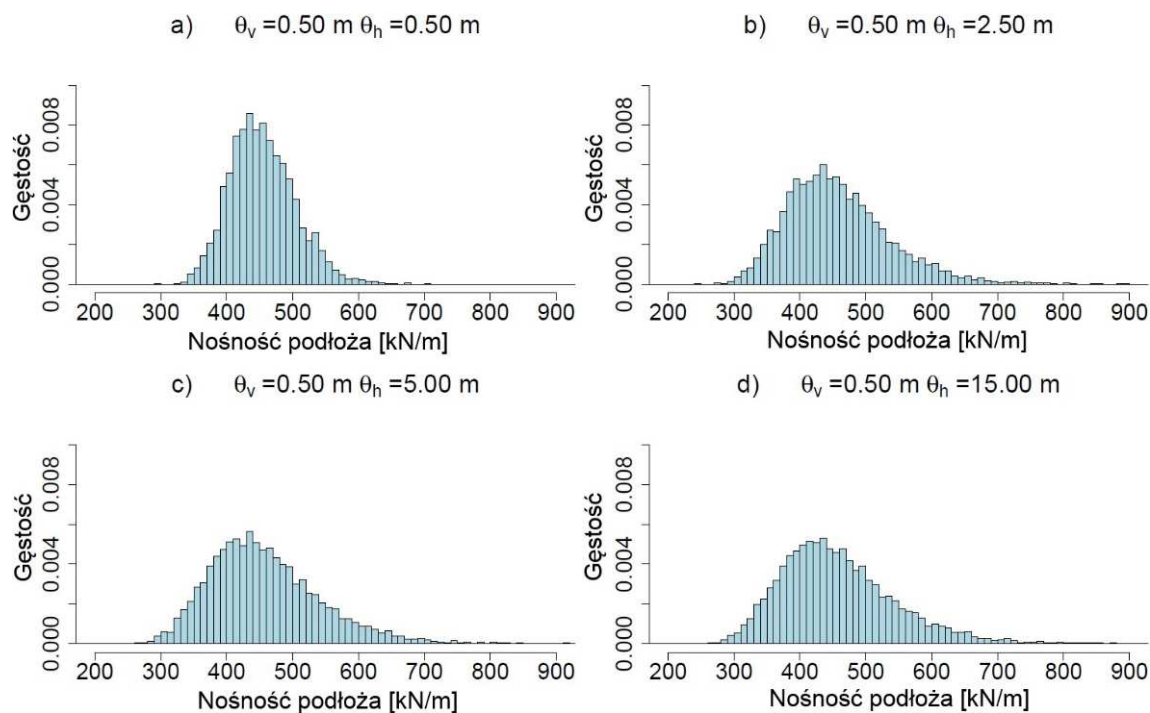
### J.1. Mechanizm Prandtla - rezultaty

Analizy numeryczne zostały przeprowadzone zgodnie z opisem podanym w rozdziale 8.1. W ramach analiz otrzymano serie wartości nośności podłoża, które zostały przedstawione na histogramach. Ponadto, w tabelach J.1, J.2 i J.3 zestawiono m.in. wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża.

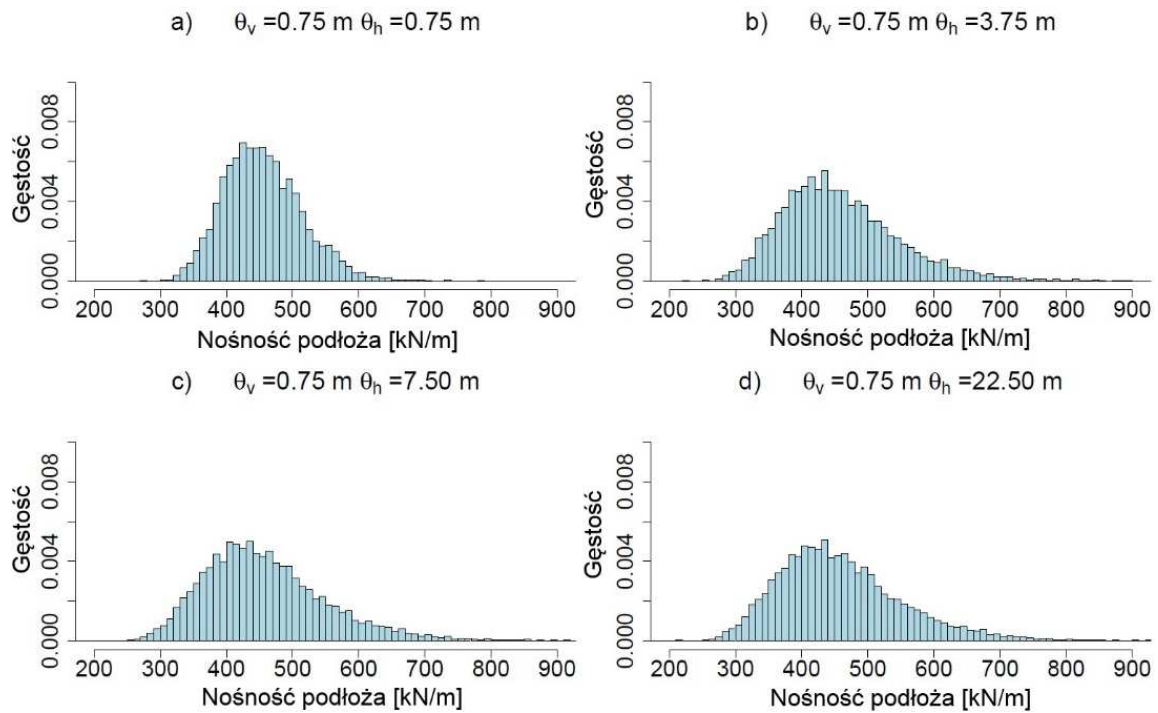
Na rysunkach J.1, J.2 i J.3 przedstawiono histogramy nośności podłoża przy założeniu uśredniania parametrów wytrzymałościowych gruntu wzdłuż spirali logarytmicznej BC. Wyniki dotyczą podłoża spoistego (tabela 8.1) oraz pionowych skal fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m, 0.50 m i 0.75 m (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Rysunki J.4, J.5 i J.6 prezentują rezultaty dla powyższych założeń z tą różnicą, że odnoszą się do podłoża niespoistego (tabela 8.2).



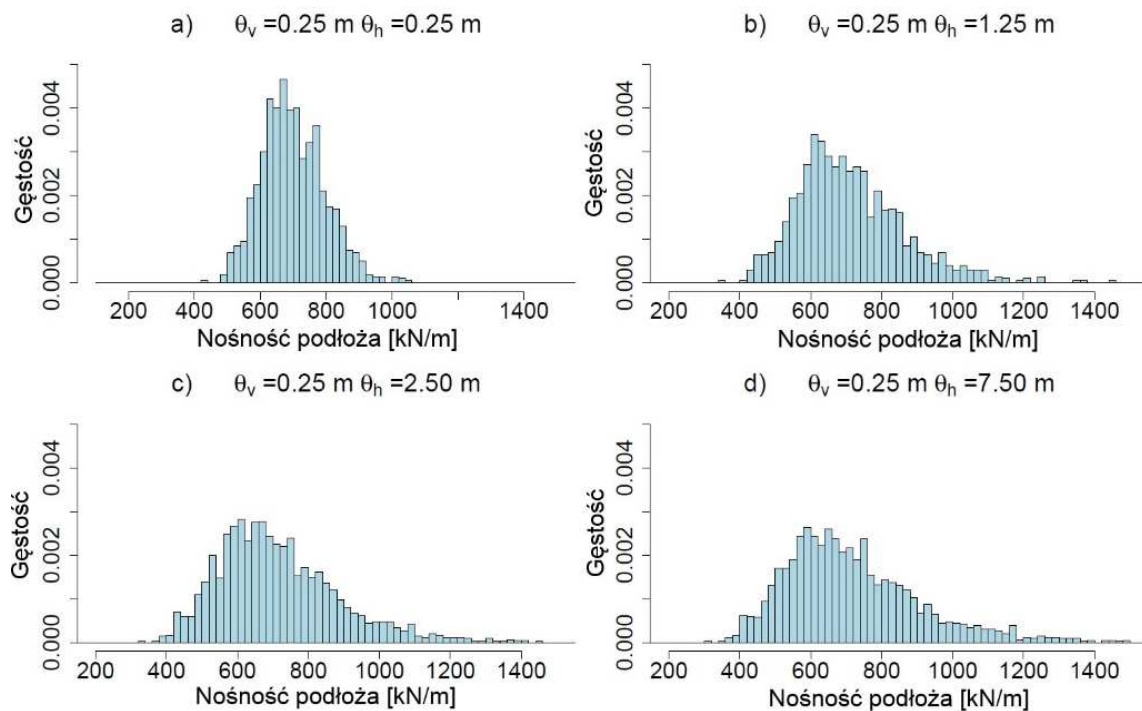
Rysunek J.1. Histogramy nośności podłoża: mechanizm niszczenia Prandtla, grunt spoisty, uśrednianie wzdłuż spirali BC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



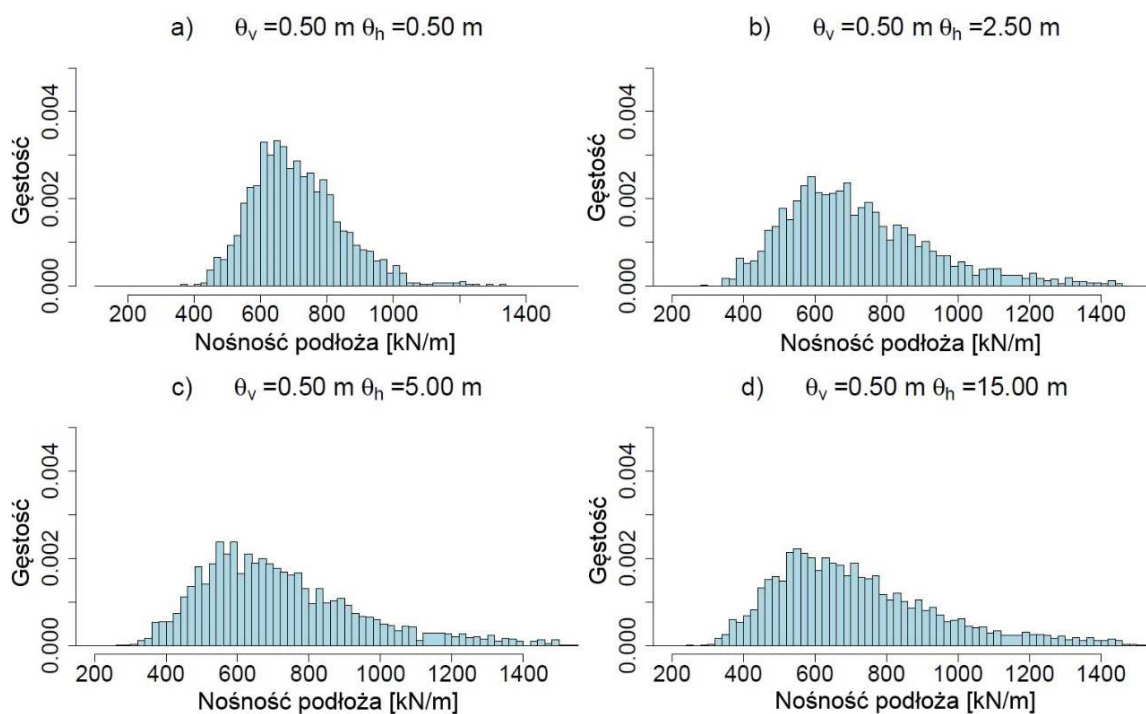
Rysunek J.2. Histogramy nośności podłoża: mechanizm niszczenia Prandtla, grunt spoisty, uśrednianie wzdłuż spirali BC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



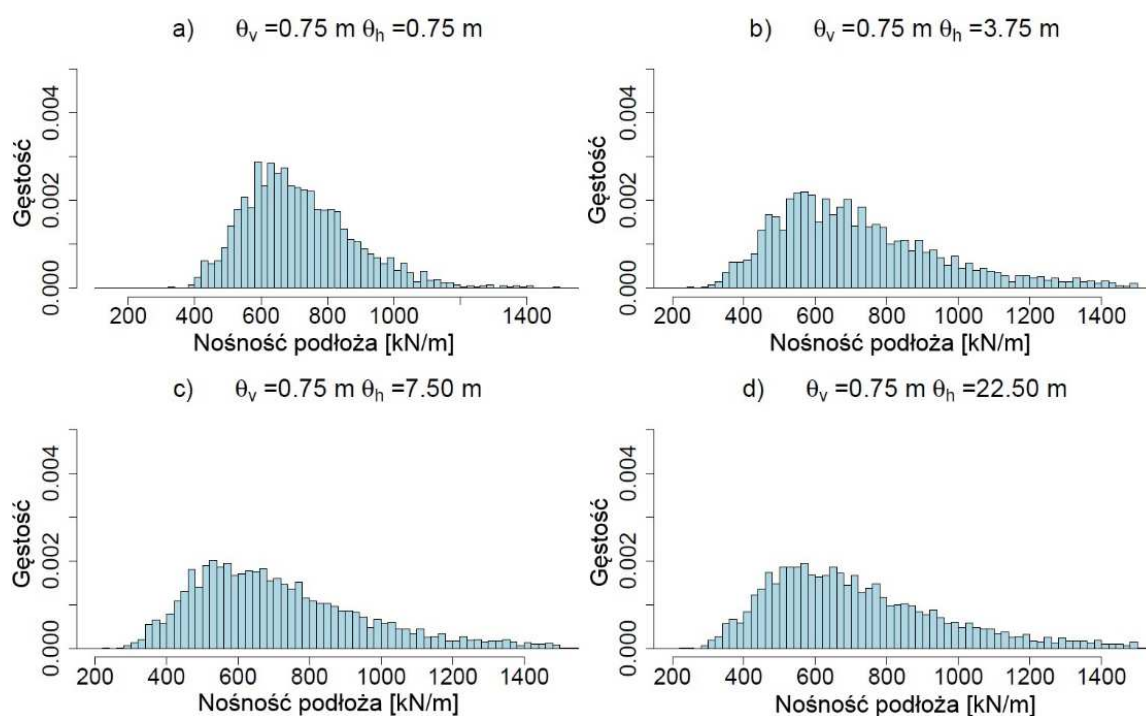
Rysunek J.3. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt spójny, uśrednianie wzdłuż spirali BC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.4. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt niespójny, uśrednianie wzdłuż spirali BC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



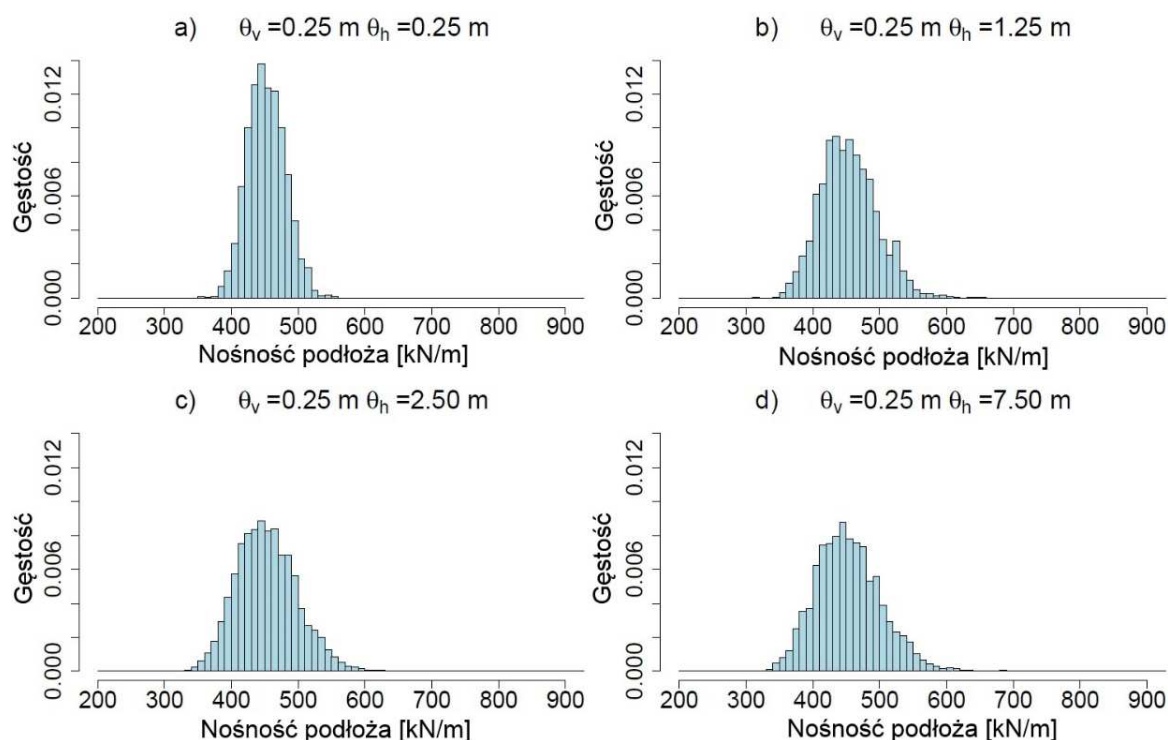
Rysunek J.5. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt niespoisty, uśrednianie wzdłuż spirali BC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



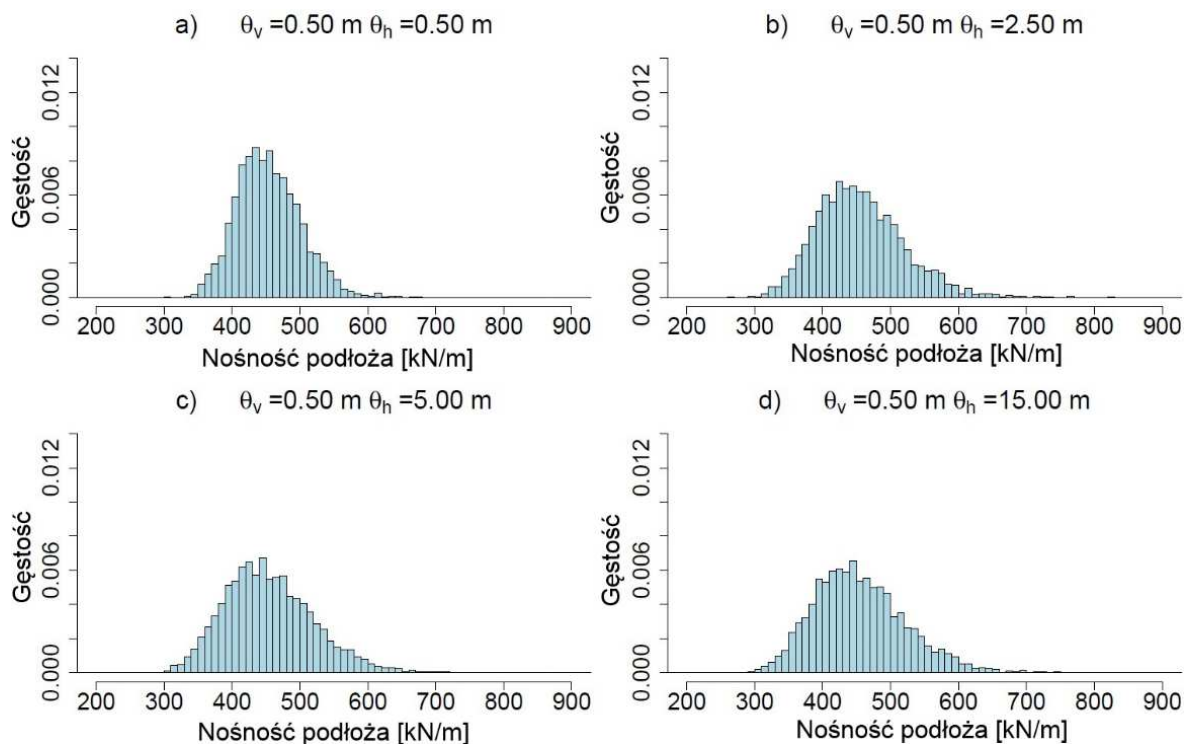
Rysunek J.6. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt niespoisty, uśrednianie wzdłuż spirali BC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

Na rysunkach J.7, J.8 i J.9 przedstawiono histogramy nośności podłoża przy założeniu uśredniania parametrów wytrzymałościowych gruntu po obszarze deformacji objętościowej ABC. Wyniki dotyczą podłoża spoistego (tabela 8.1) oraz pionowych skal

fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m i  $0.75$  m (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Rysunki J.10, J.11 i J.12 prezentują rezultaty dla powyższych założeń z tą różnicą, że odnoszą się do podłoża niespoistego (tabela 8.2)

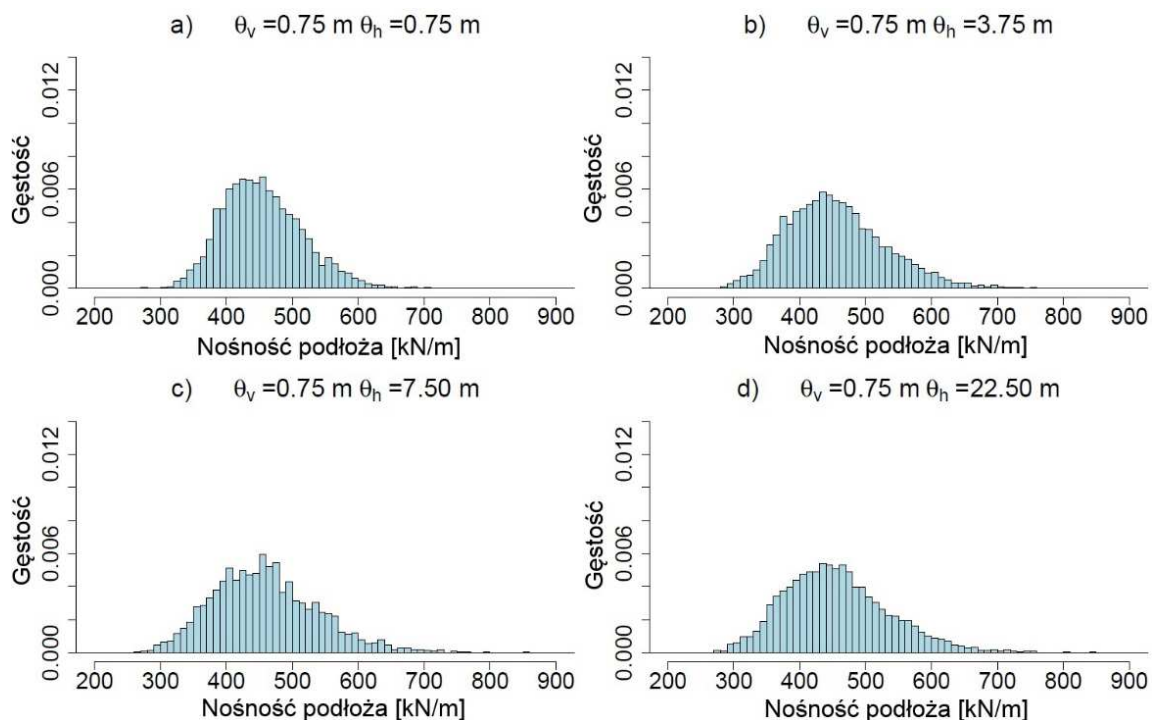


Rysunek J.7. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt spoisty, uśrednianie po obszarze ABC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

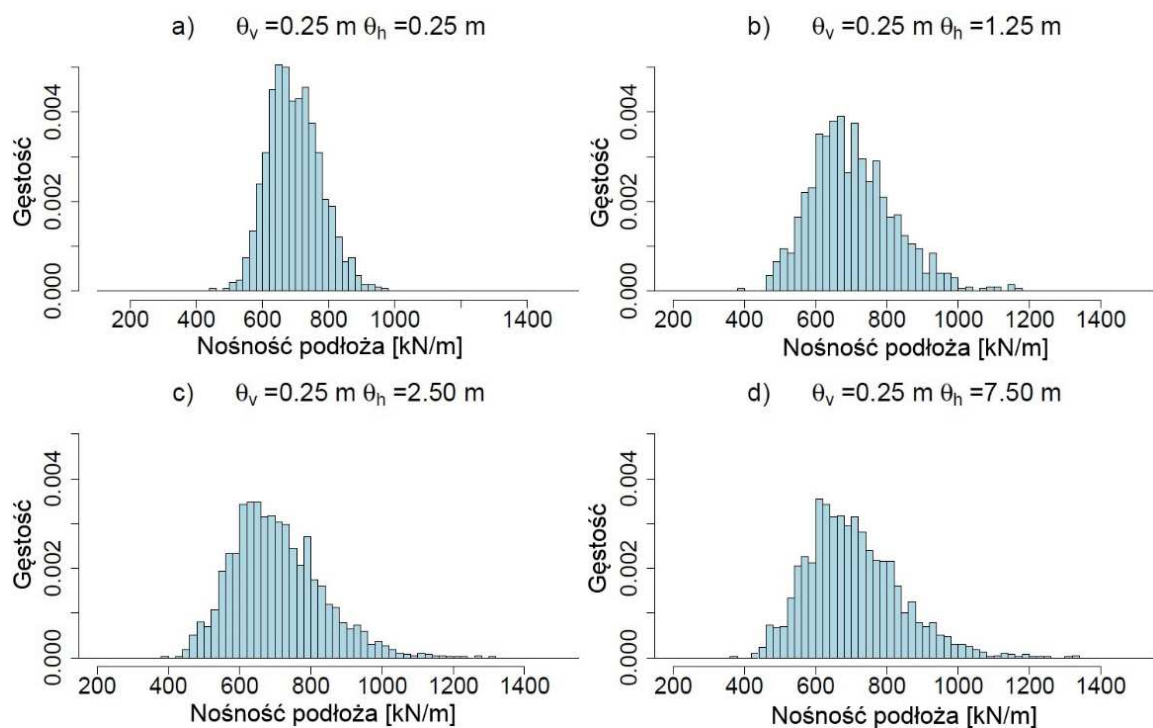


Rysunek J.8. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt spoisty, uśrednianie po obszarze ABC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

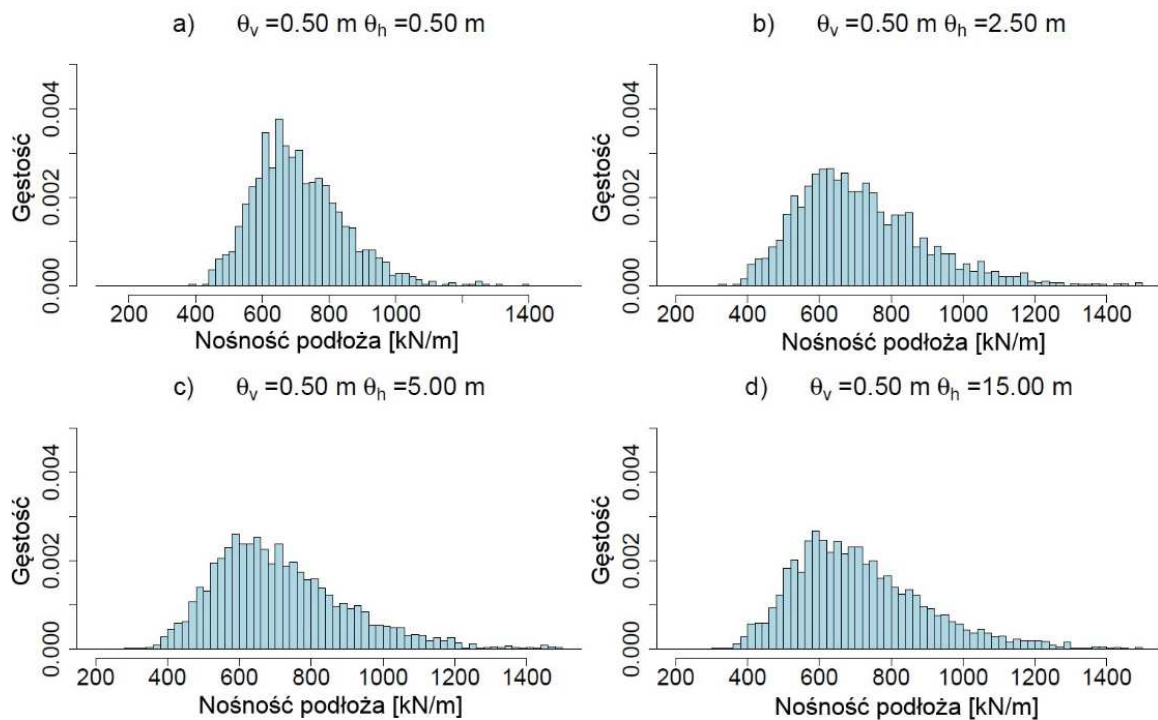




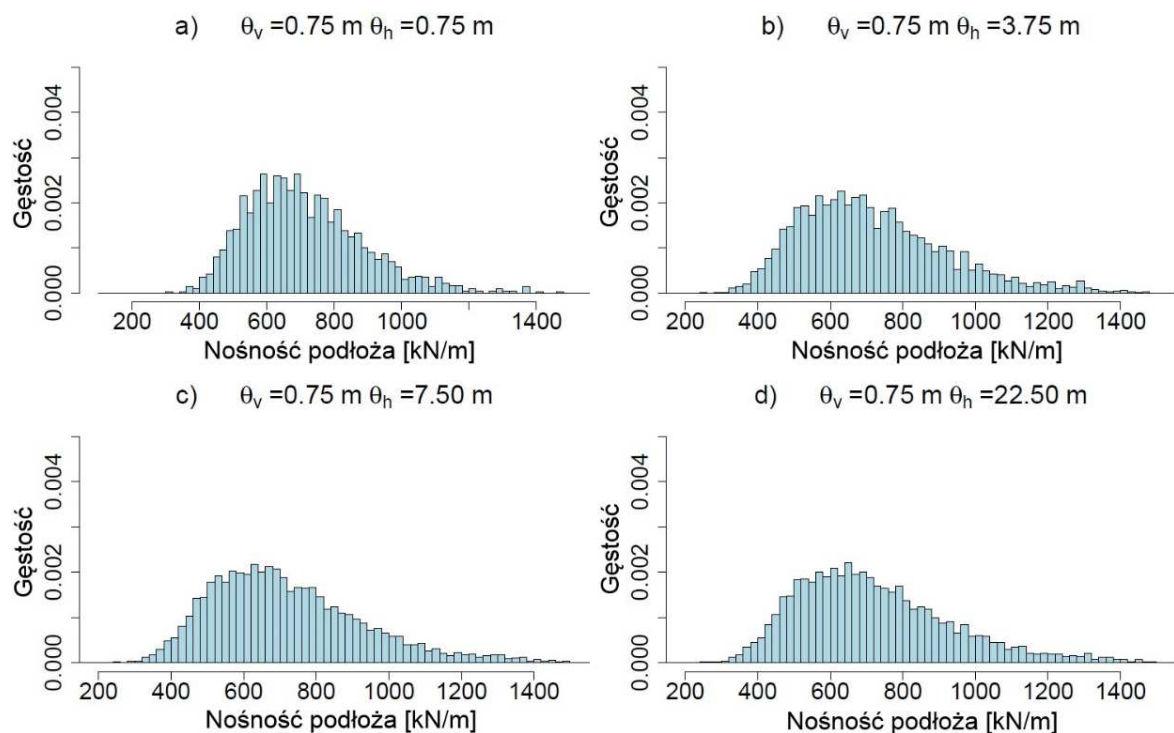
Rysunek J.9. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt spisty, uśrednianie po obszarze ABC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.10. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt niespisty, uśrednianie po obszarze ABC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

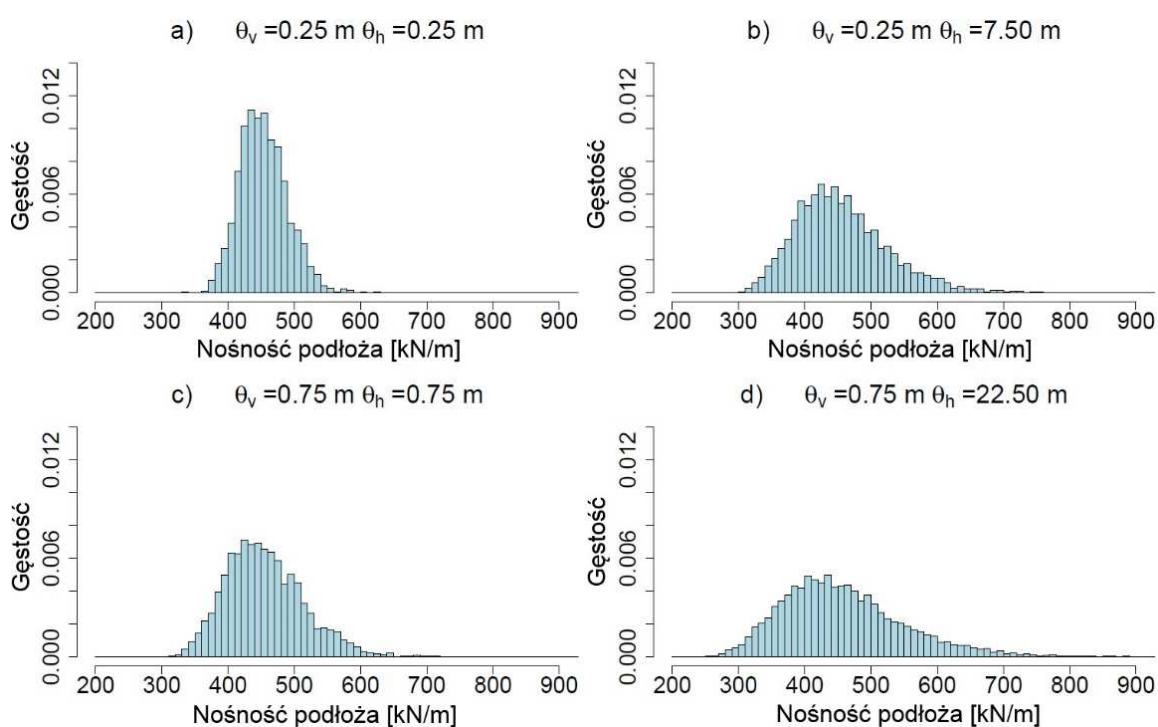


Rysunek J.11. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt niespoisty, uśrednianie po obszarze ABC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

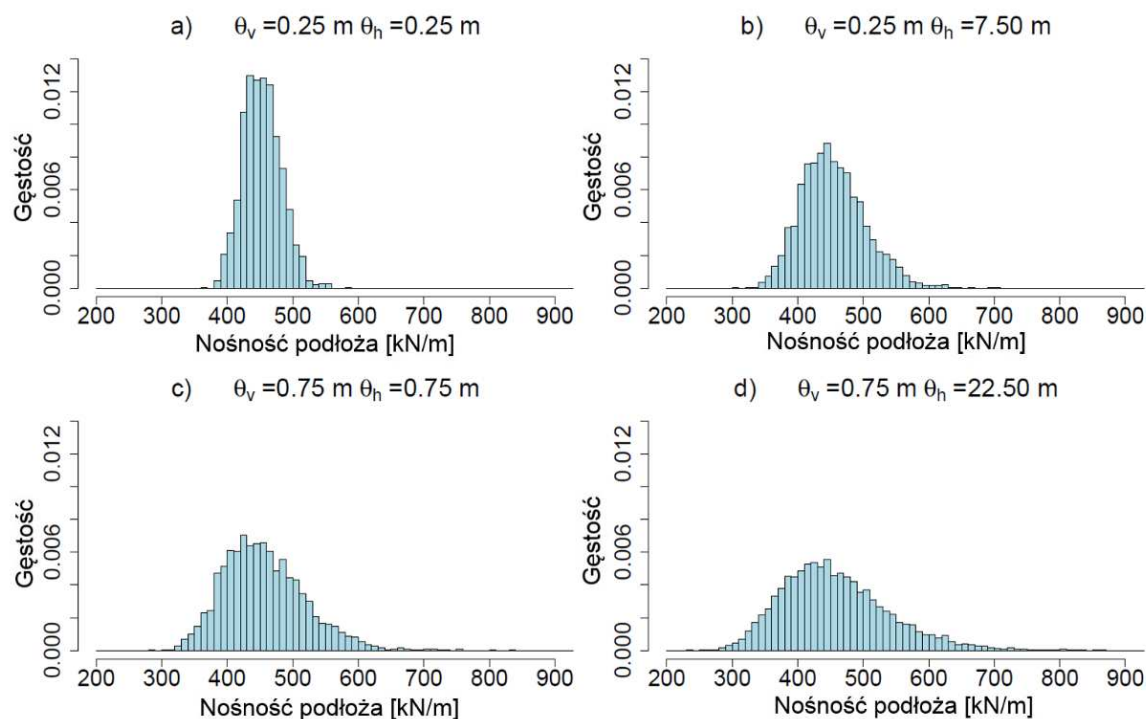


Rysunek J.12. Histogramy nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt niespoisty, uśrednianie po obszarze ABC, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

Na rysunkach J.13 i J.14 przedstawiono rezultaty otrzymane przy założeniu stałej macierzy kowariancji i dla wybranych kombinacji wartości pionowej i poziomej skali fluktuacji. Analizy przeprowadzono przy uśrednianiu wzdłuż spirali logarytmicznej BC oraz po obszarze deformacji objętościowej ABC. Macierze kowariancji zostały wyznaczone poprzez przyjęcie wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych podłoża spoistego (patrz tabela 8.1); ich postacie są podane w załączniku G. Obliczenia przeprowadzono dla następujących wartości skal fluktuacji:  $\theta_v = 0.25$  m i  $\theta_h = 0.25$  m;  $\theta_v = 0.25$  m i  $\theta_h = 7.50$  m;  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 0.75$  m oraz  $\theta_v = 0.75$  m i  $\theta_h = 22.50$  m.



Rysunek J.13. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt spoisty, uśrednianie wzdłuż spirali BC, skale fluktuacji jak na rysunkach (opis w tekście).



Rysunek J.14. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, mechanizm zniszczenia Prandtla, grunt spoiisty, uśrednianie po obszarze ABC, skale fluktuacji jak na rysunkach (opis w tekście).

Tabela J.1. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, uśrednianie wzdłuż spirali BC.

Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m								
Uśrednianie wzdłuż spirali BC (rys. 6.1)								
Podłoże spoiiste (tab. 8.1)								
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	453.4	35.827	0.0790	451.7	332.9	613.6	rys. J.1a
	1.25	455.3	56.393	0.124	448.6	283.2	721.7	rys. J.1b
	2.50	455.4	64.301	0.141	448.0	267.8	843.3	rys. J.1c
	7.50	456.0	70.531	0.155	447.5	258.2	902.2	rys. J.1d
0.5	0.50	454.4	49.744	0.109	450.5	298.7	706.4	rys. J.2a
	2.50	457.6	78.828	0.172	447.2	244.0	1004.8	rys. J.2b
	5.00	458.2	85.243	0.186	446.5	233.9	1100.8	rys. J.2c
	15.0	458.6	88.519	0.193	445.9	229.8	1136.1	rys. J.2d
0.75	0.75	455.5	59.717	0.131	450.2	277.5	789.0	rys. J.3a
	3.75	459.1	90.378	0.197	446.5	226.2	1181.2	rys. J.3b
	7.50	459.5	95.140	0.207	446.0	219.6	1248.9	rys. J.3c
	22.5	459.8	97.063	0.211	446.2	217.2	1265.2	rys. J.3d
Podłoże niespoiste (tab. 8.2)								
0.25	0.25	700.2	95.669	0.137	692.0	432.9	1045.2	rys. J.4a
	1.25	710.7	150.978	0.212	688.0	350.4	1450.5	rys. J.4b
	2.50	718.3	181.604	0.253	689.2	324.0	1949.1	rys. J.4c
	7.50	725.4	211.091	0.291	684.3	304.5	2367.5	rys. J.4d
0.5	0.50	710.2	135.573	0.191	692.9	370.2	1332.4	rys. J.5a
	2.50	732.3	233.718	0.319	688.7	282.2	2670.3	rys. J.5b
	5.00	740.1	277.047	0.374	682.4	263.5	4062.7	rys. J.5c
	15.0	746.3	304.620	0.408	680.3	254.6	4938.1	rys. J.5d

0.75	0.75	716.5	167.607	0.234	692.1	333.4	1574.2	rys. J.6a
	3.75	747.4	302.081	0.404	684.6	251.4	4657.4	rys. J.6b
	7.50	756.0	342.117	0.453	680.5	238.7	6352.0	rys. J.6c
	22.5	760.7	363.505	0.478	678.7	233.6	7290.1	rys. J.6d

Tabela J.2. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: mechanizm zniszczenia Prandtla, uśrednianie po obszarze ABC.

		Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m						
		Uśrednianie po obszarze ABC (rys. 6.1)						
		Podłoże spoiste (tab. 8.1)						
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	452.4	28.443	0.0629	450.9	352.4	554.5	rys. J.7a
	1.25	453.8	42.687	0.0941	450.8	316.8	659.0	rys. J.7b
	2.50	453.4	45.347	0.100	450.5	305.1	679.7	rys. J.7c
	7.50	453.3	48.706	0.107	449.6	293.9	683.4	rys. J.7d
0.5	0.50	453.9	46.974	0.103	450.2	309.5	679.8	rys. J.8a
	2.50	455.2	63.509	0.140	449.3	268.0	826.3	rys. J.8b
	5.00	455.0	66.224	0.146	448.3	257.4	836.6	rys. J.8c
	15.0	455.0	68.147	0.150	447.7	252.2	828.8	rys. J.8d
0.75	0.75	455.2	61.779	0.136	449.2	276.1	804.5	rys. J.9a
	3.75	456.2	76.142	0.167	448.6	245.1	855.1	rys. J.9b
	7.50	458.8	80.976	0.176	450.2	260.2	947.1	rys. J.9c
	22.5	457.6	80.912	0.177	449.7	239.8	857.5	rys. J.9d
		Podłoże niespoiste (tab. 8.2)						
0.25	0.25	696.8	79.048	0.113	690.5	458.8	972.1	rys. J.10a
	1.25	703.0	117.534	0.167	691.2	399.9	1178.5	rys. J.10b
	2.50	705.2	127.242	0.180	690.0	386.3	1310.5	rys. J.10c
	7.50	706.1	132.282	0.187	689.2	372.9	1332.7	rys. J.10d
0.5	0.50	708.5	134.184	0.189	690.6	380.3	1388.5	rys. J.11a
	2.50	718.1	185.439	0.258	688.4	320.3	1791.7	rys. J.11b
	5.00	718.5	190.168	0.265	686.4	280.3	1754.0	rys. J.11c
	15.0	718.4	196.799	0.274	685.5	300.8	2394.6	rys. J.11d
0.75	0.75	713.6	178.297	0.250	689.2	302.4	1953.2	rys. J.12a
	3.75	725.4	224.611	0.310	687.4	257.8	2691.7	rys. J.12b
	7.50	728.1	229.027	0.315	689.6	250.6	2758.1	rys. J.12c
	22.5	728.9	232.061	0.318	689.0	247.6	2756.2	rys. J.12d

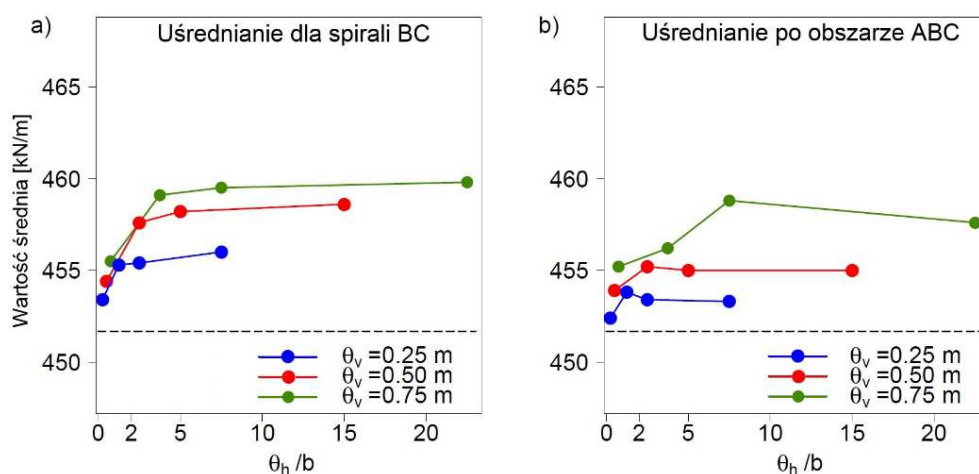
Tabela J.3. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: stała macierz kowariancji, mechanizm zniszczenia Prandtla.

		Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m						
		Podłoże spoiste (tab. 8.1)						
		Uśrednianie po spirali BC (rys. 6.1)						
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	453.6	36.039	0.0795	451.0	338.8	624.0	rys. J.13a
	7.5	456.5	71.246	0.156	447.2	262.6	943.7	rys. J.13b
0.75	0.75	455.9	60.424	0.133	449.6	285.0	823.1	rys. J.13c
	22.50	460.4	97.922	0.213	446.1	218.5	1312.7	rys. J.13d
		Uśrednianie po obszarze ABC (rys. 6.1)						
0.25	0.75	453.1	28.849	0.0637	451.5	362.1	582.3	rys. J.14a
	3.75	453.9	49.152	0.108	449.3	300.7	700.6	rys. J.14b

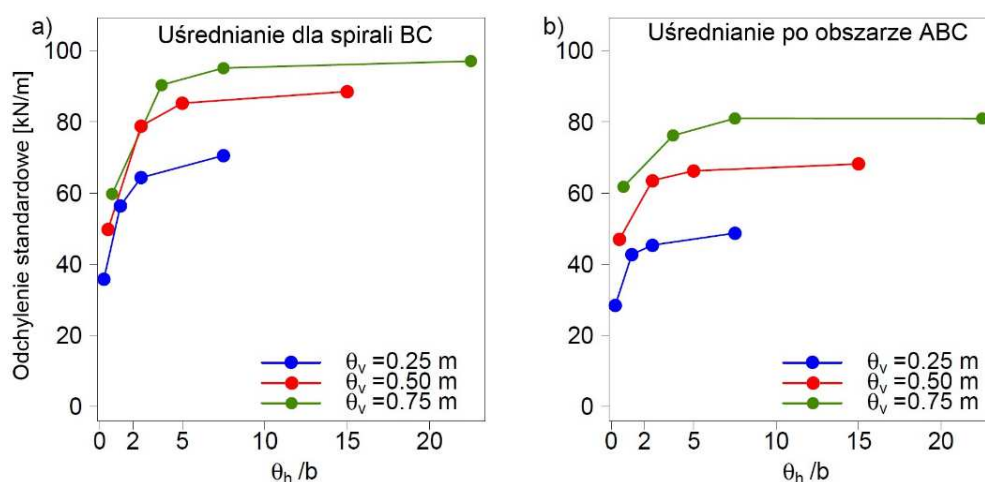
0.75	7.50	456.5	62.943	0.138	449.6	283.2	831.2	rys. J.14c
	22.5	458.0	83.233	0.182	447.2	233.2	1002.4	rys. J.14d

Procentowe przedziały ufności dla wartości średniej nośności podano w Załączniku H.

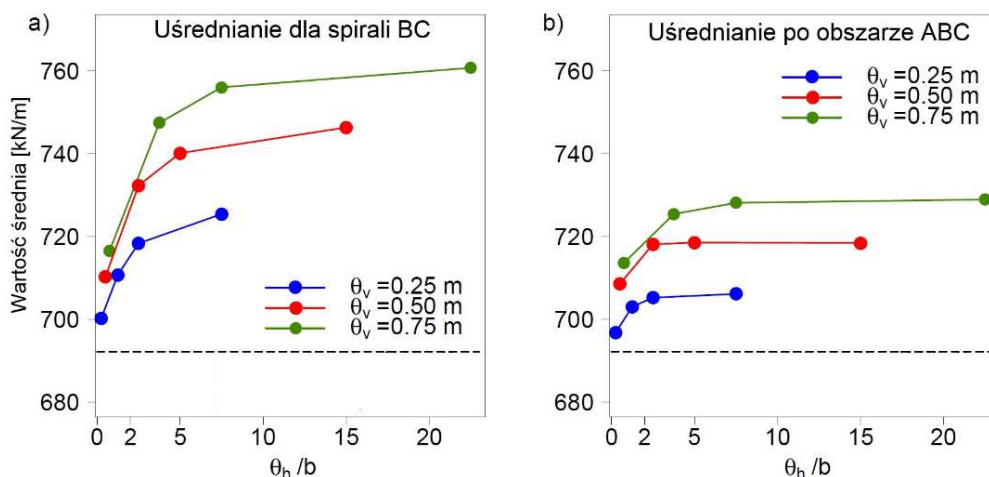
Na rysunku J.15 przedstawiono otrzymane wartości średnie nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla i podłoża spoiście, natomiast odpowiadające im odchylenia standardowe pokazano na rysunku J.16. Analogiczne informacje dla podłoża niespoistego przedstawiają rysunki J.17 i J.18. Na rysunkach J.15 i J.17 przerywaną linią oznaczono nośność podłoża otrzymaną przez przyjęcie oczekiwanych wartości parametrów wytrzymałościowych gruntu.



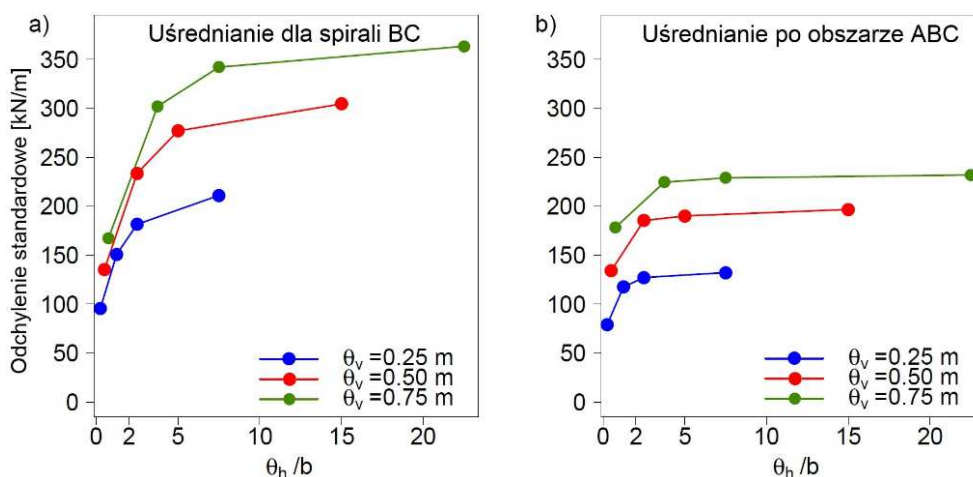
Rysunek J.15. Wartości średnie nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla;  $b = 1.0$  m; podłożo spoiście; a) uśrednianie wzdłuż spirali BC; b) uśrednianie po obszarze ABC.



Rysunek J.16. Odchylenia standardowe nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla;  $b = 1.0$  m; podłożo spoiście; a) uśrednianie wzdłuż spirali BC; b) uśrednianie po obszarze ABC.



Rysunek J.17. Wartości średnie nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla;  $b = 1.0$  m; podłoże niespoiste; a) uśrednianie wzdłuż spirali BC; b) uśrednianie po obszarze ABC.



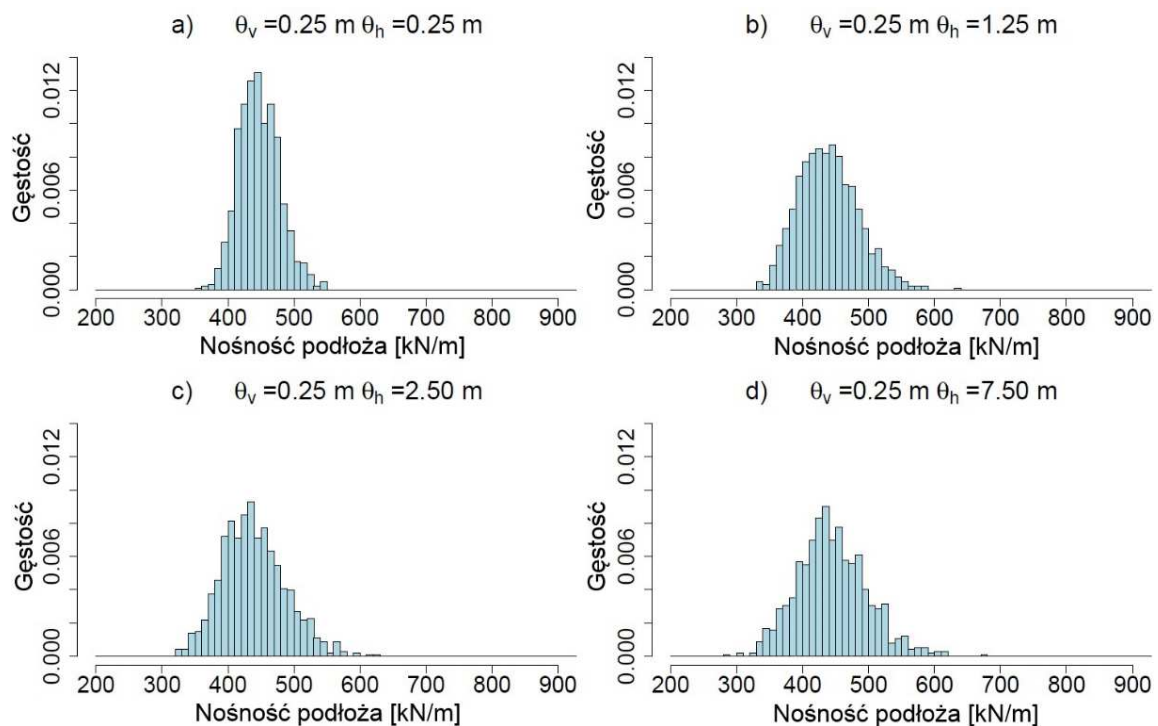
Rysunek J.18. Odchylenia standardowe nośności podłoża przy założeniu mechanizmu Prandtla;  $b = 1.0$  m; podłoże niespoiste; a) uśrednianie wzdłuż spirali BC; b) uśrednianie po obszarze ABC.

## J.2. Mechanizm 6-blokowy - rezultaty

Analizy numeryczne zostały przeprowadzone zgodnie z opisem podanym w rozdziale 8.1. W ramach analiz otrzymano serie wartości nośności podłoża, które zostały przedstawione na histogramach. Ponadto, w tabelach J.4, J.5 i J.6 zestawiono m.in. wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża.

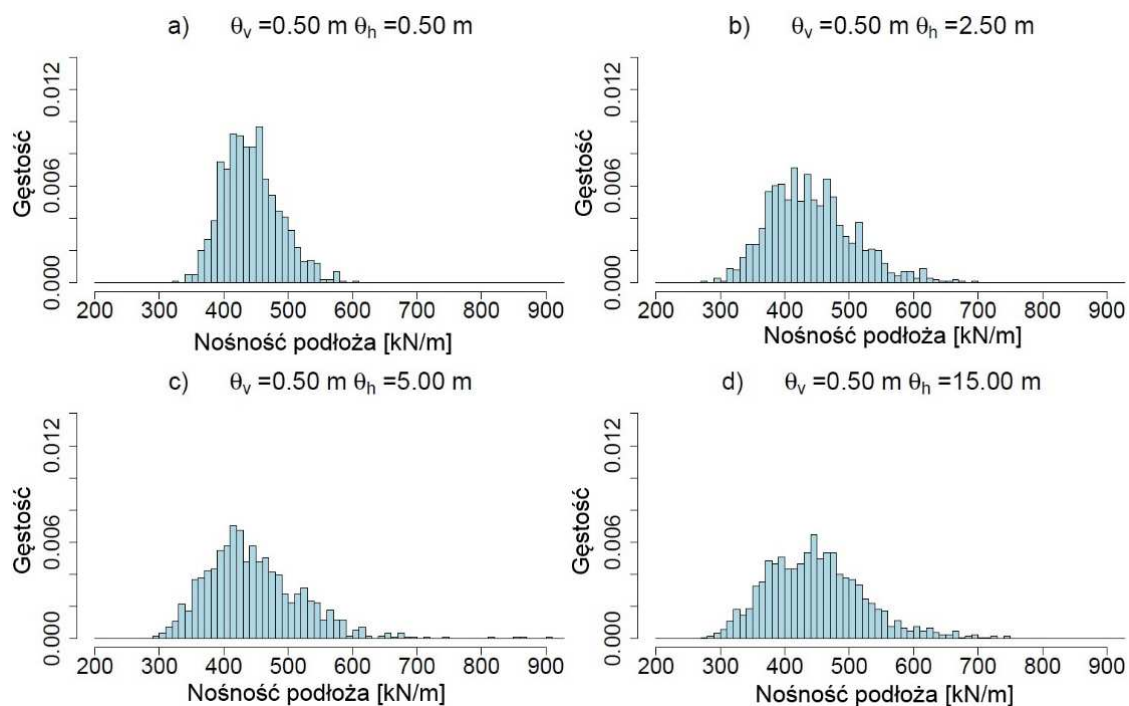
## J.2.1. Mechanizm symetryczny

Na rysunkach J.19, J.20 i J.21 przedstawiono histogramy nośności podłoża przy założeniu 6-blokowego symetrycznego mechanizmu zniszczenia podłoża. Wyniki dotyczą podłoża spoiściego (tabela 8.1), szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m oraz pionowych skal fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m i  $0.75$  m (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Rysunki J.22, J.23 i J.24 prezentują rezultaty dla powyższych założeń z tą różnicą, że odnoszą się do szerokości fundamentu  $b = 2.0$  m.

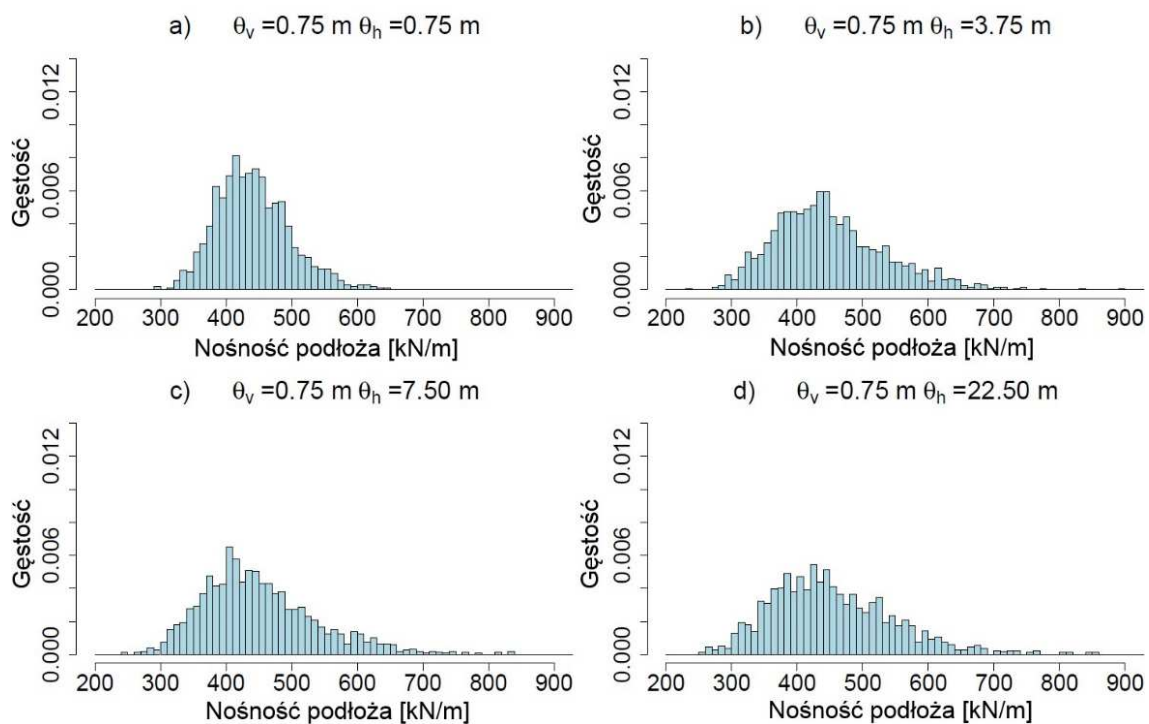


Rysunek J.19. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spoiisty,  $b = 1.0$  m, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

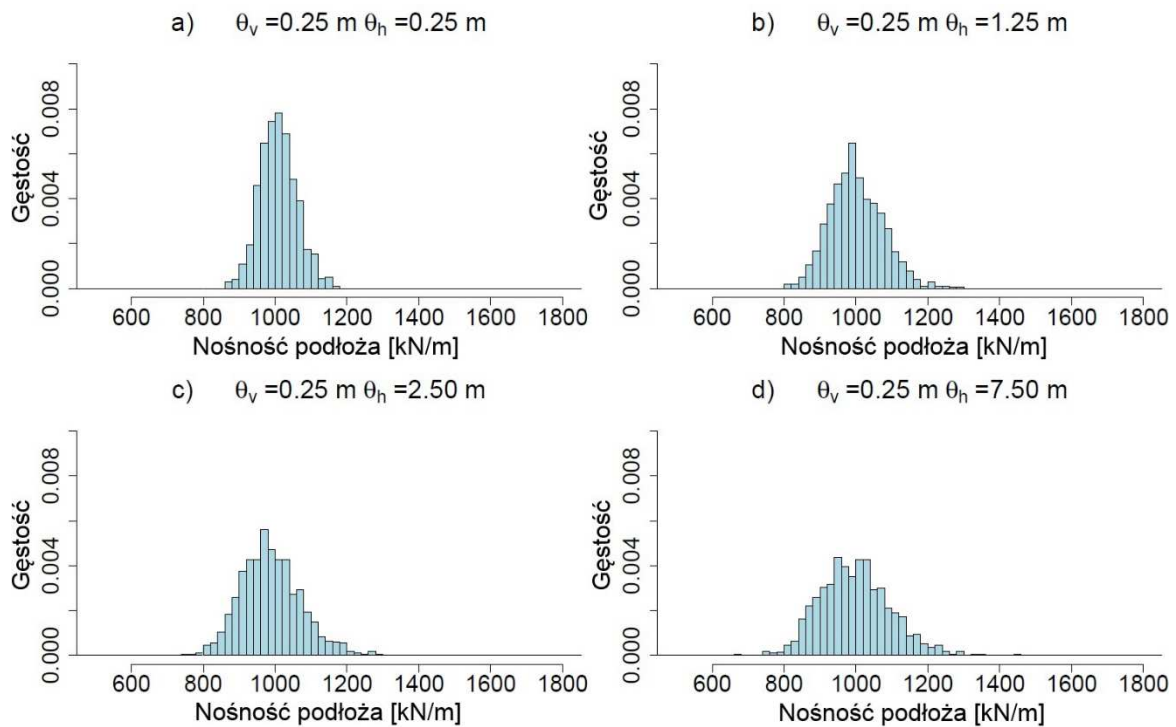




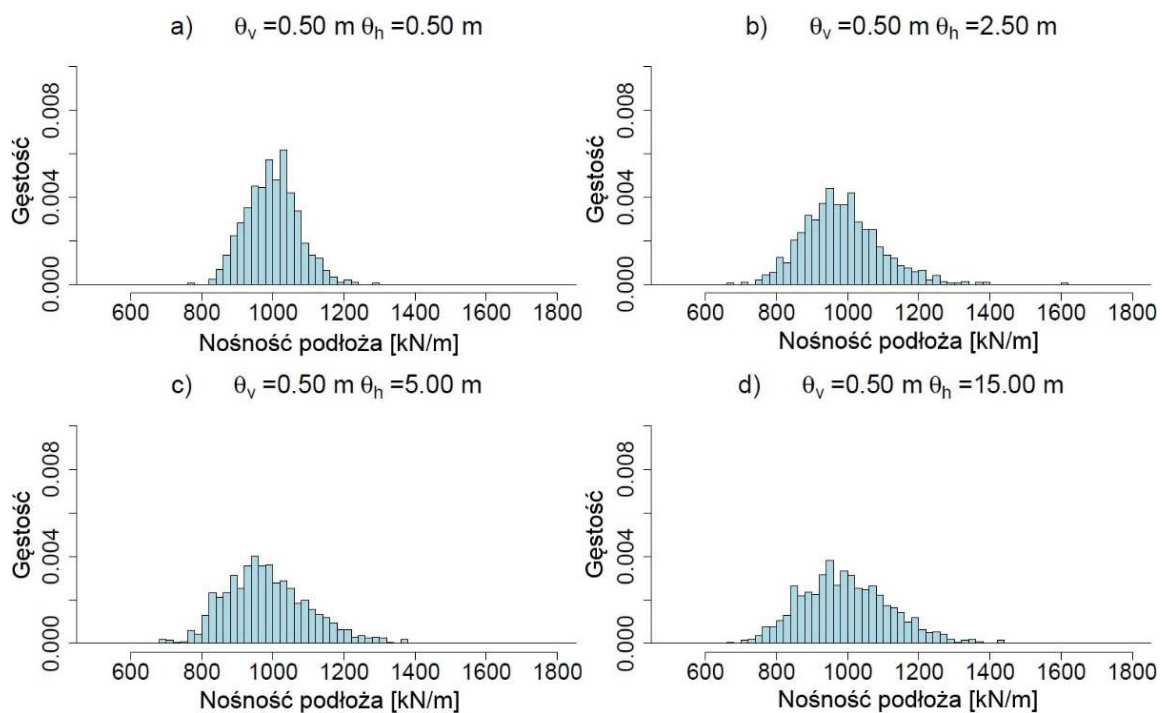
Rysunek J.20. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt pusty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



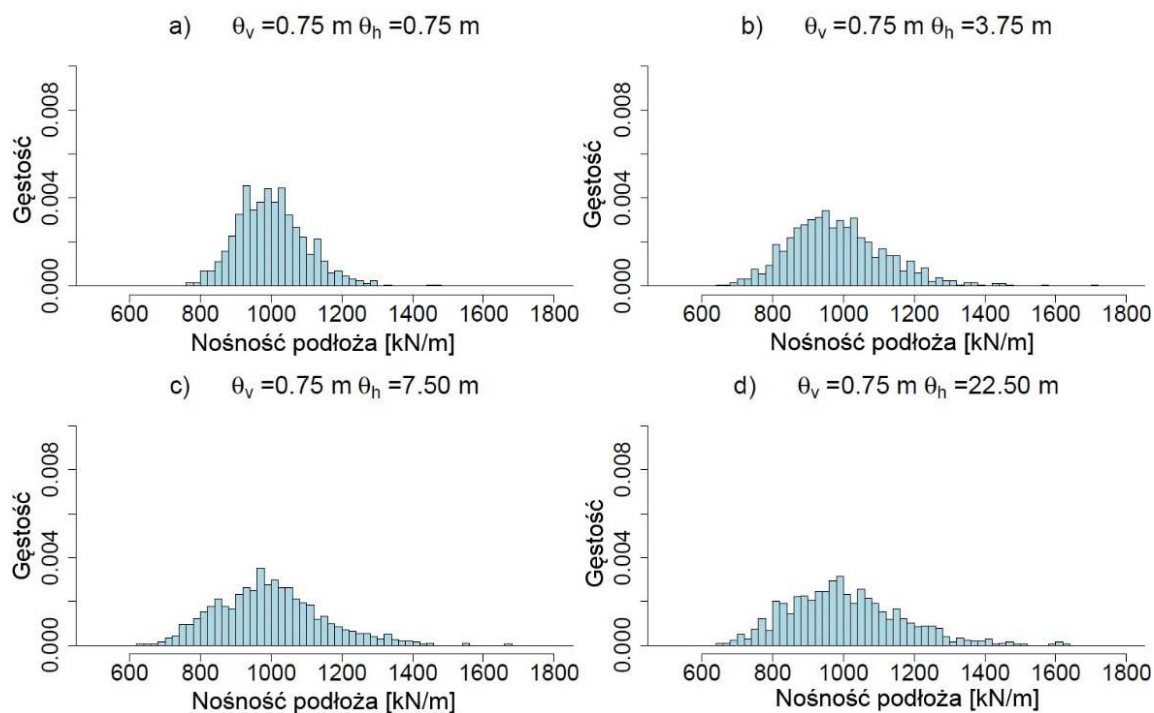
Rysunek J.21. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt pusty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.22. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

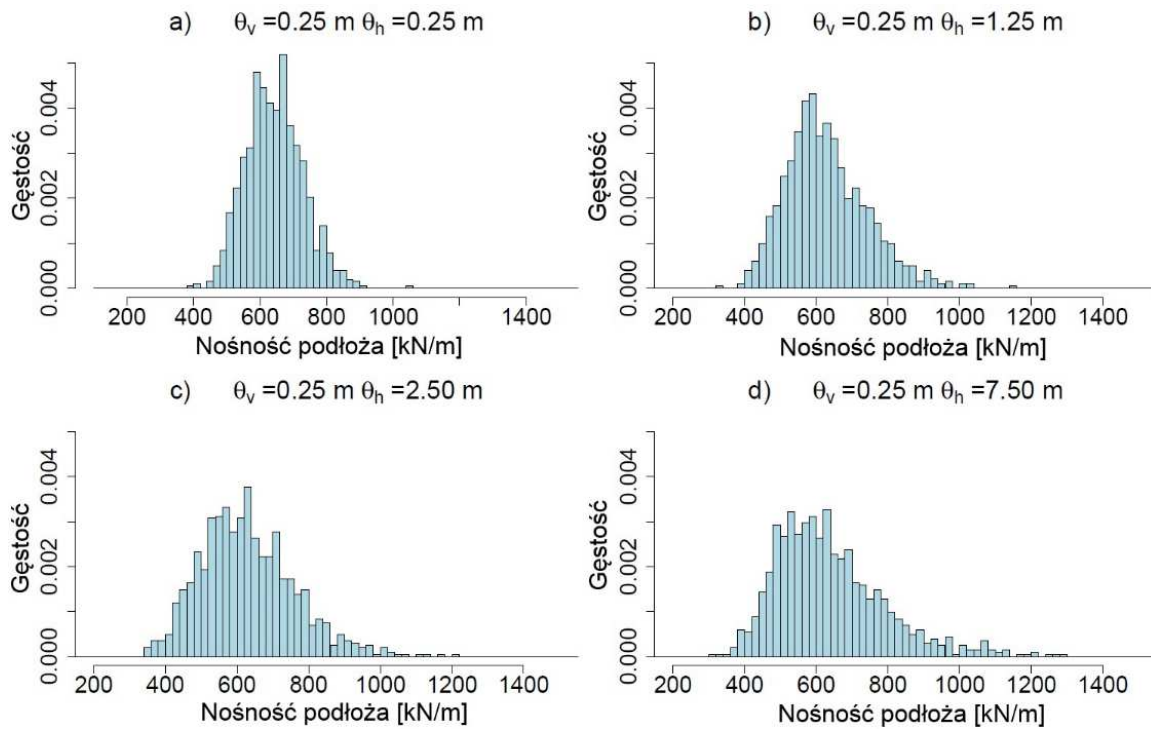


Rysunek J.23. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

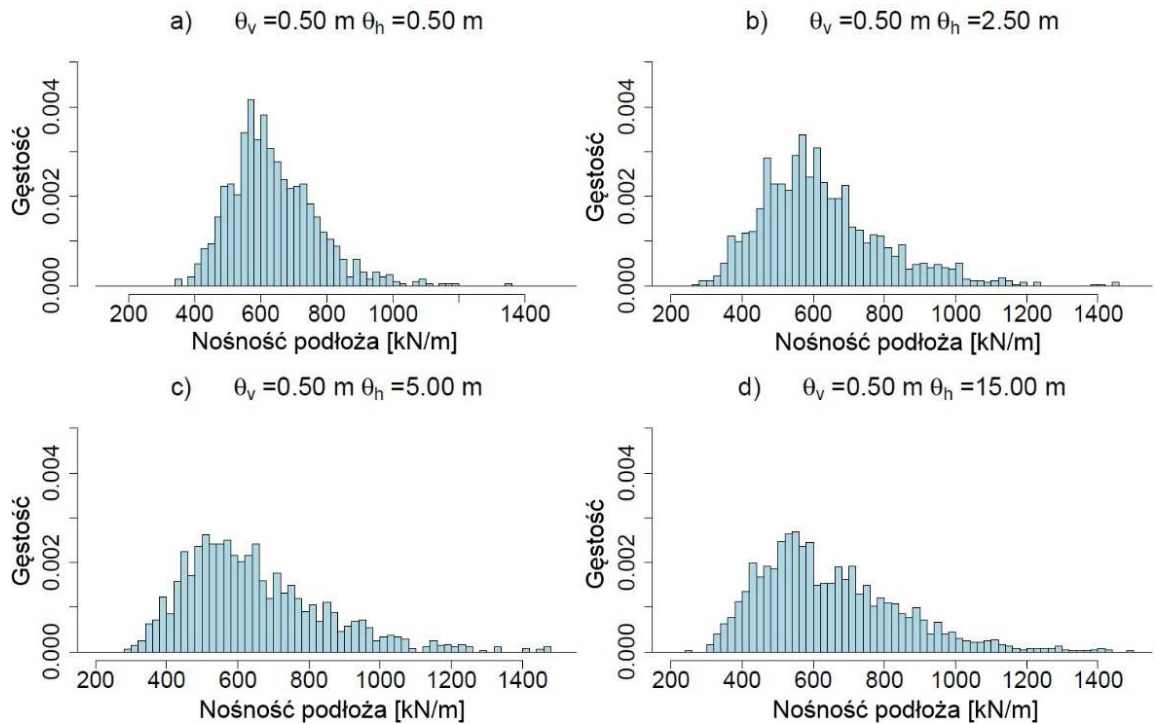


Rysunek J.24. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

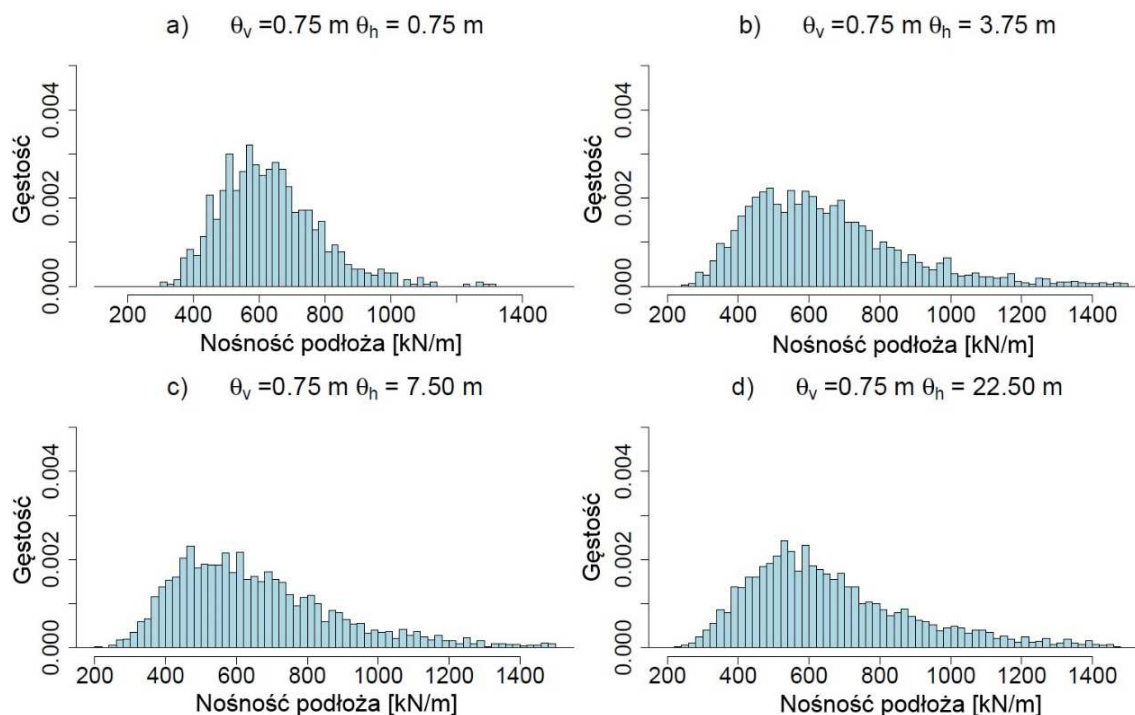
Na rysunkach J.25, J.26 i J.27 przedstawiono histogramy nośności podłoża przy założeniu 6-blokowego symetrycznego mechanizmu zniszczenia podłoża. Wyniki dotyczą podłoża niespoistego (tabela 8.2), szerokości fundamentu  $b = 1.0 \text{ m}$  oraz pionowych skal fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$ ,  $0.50 \text{ m}$  i  $0.75 \text{ m}$  (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Rysunki J.28, J.29 i J.30 prezentują rezultaty dla powyższych założeń z tą różnicą, że odnoszą się do szerokości fundamentu  $b = 2.0 \text{ m}$ .



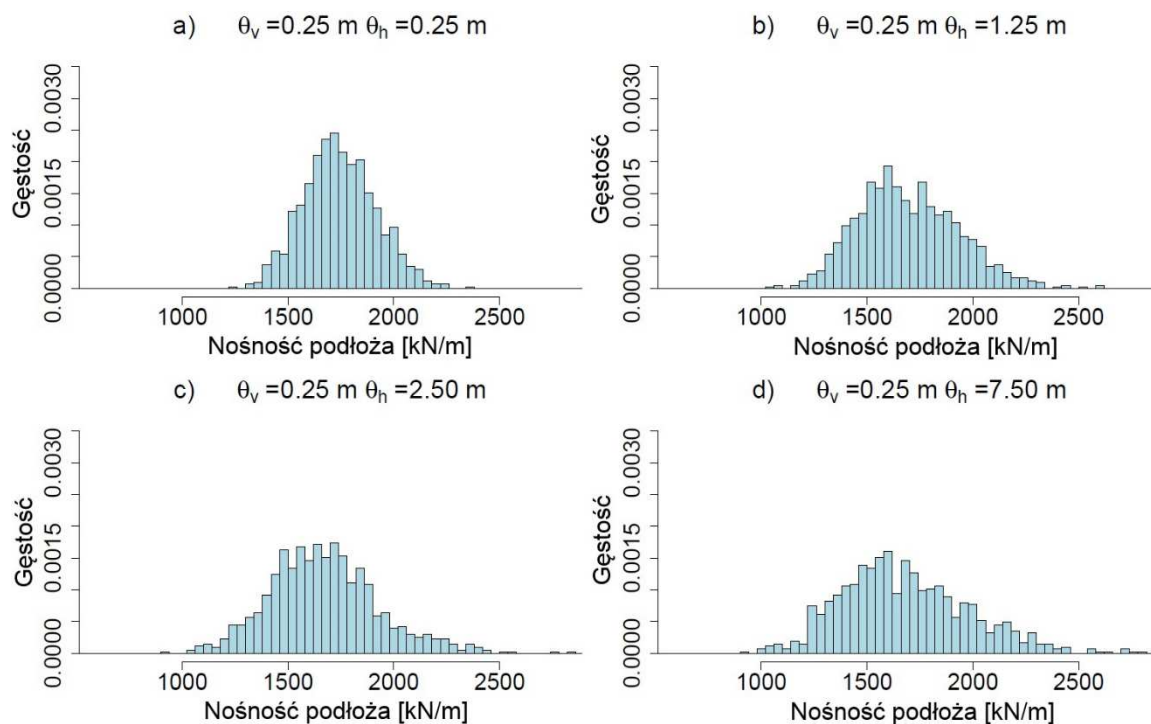
Rysunek J.25. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



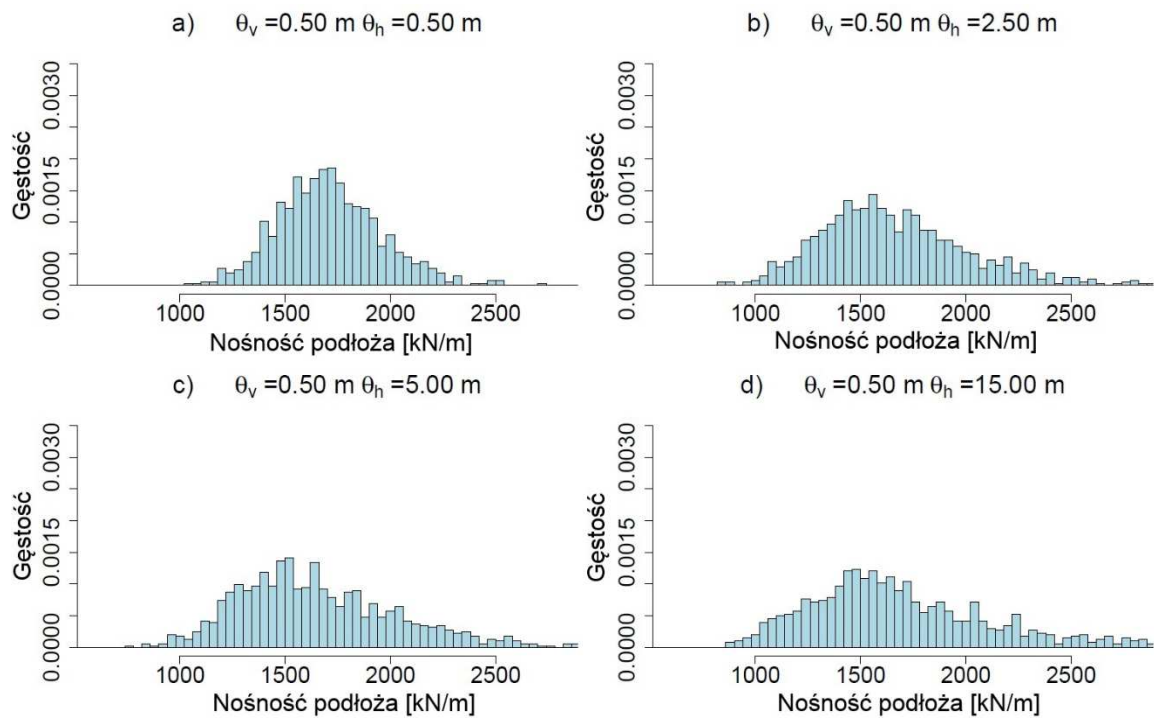
Rysunek J.26. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



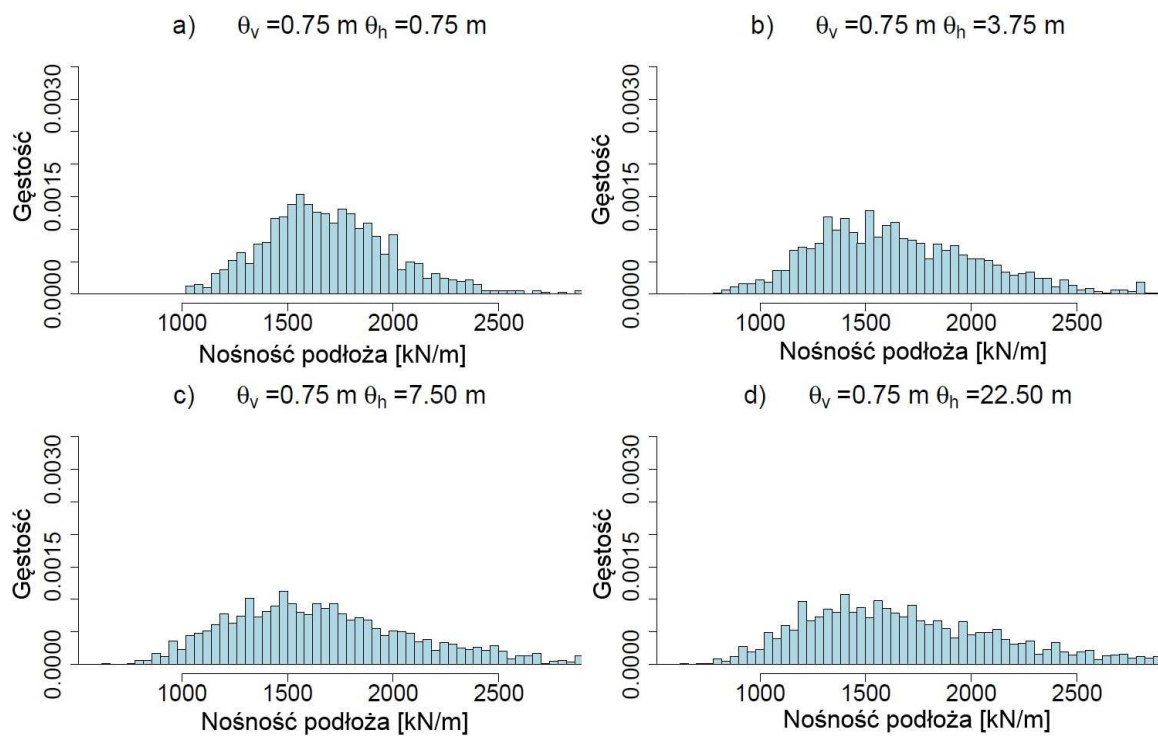
Rysunek J.27. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.28. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

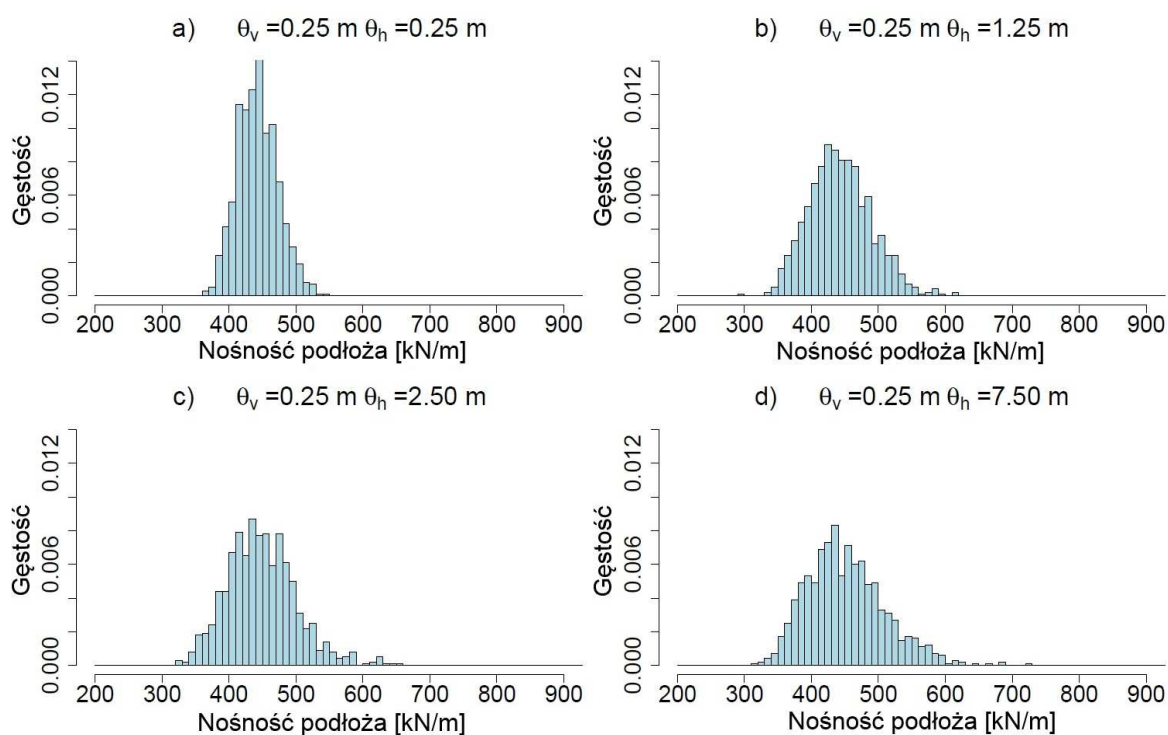


Rysunek J.29. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

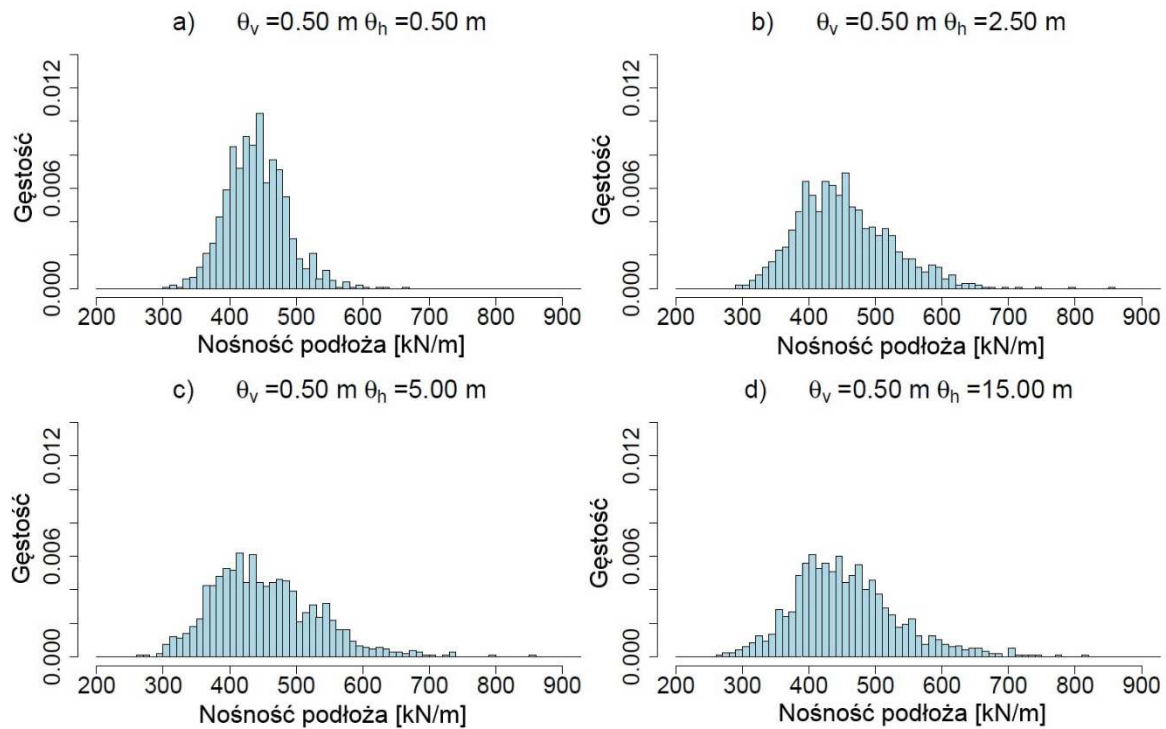


Rysunek J.30. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

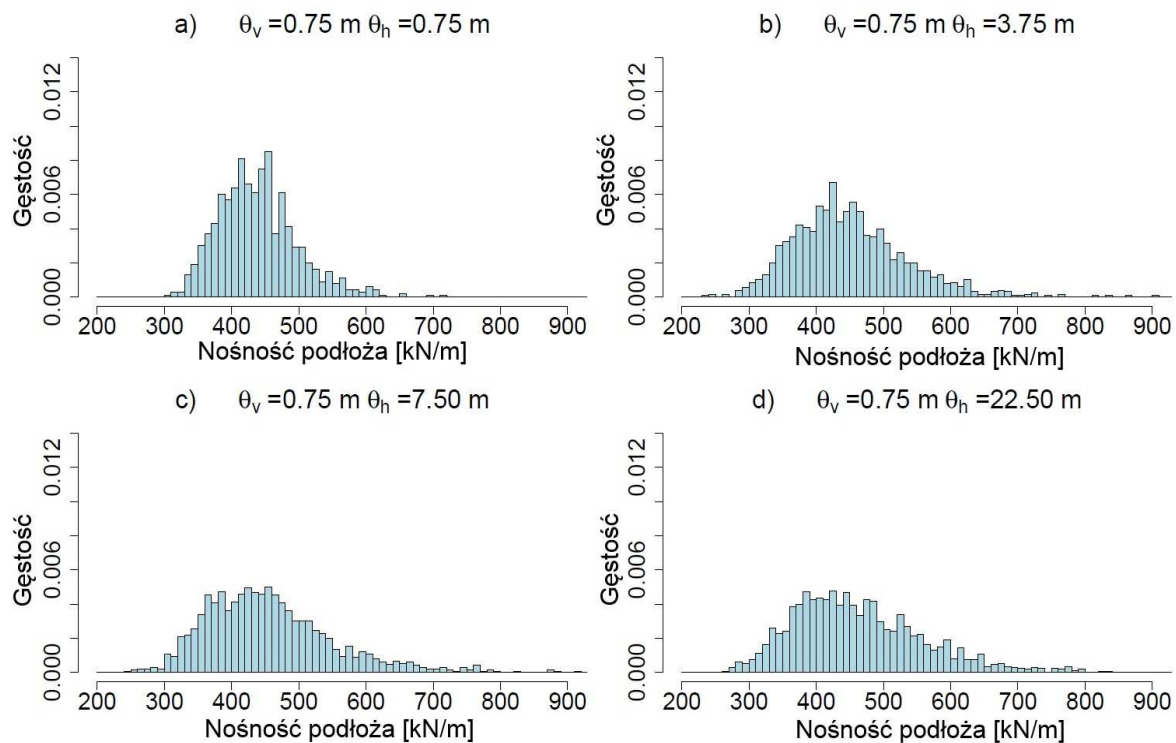
Na rysunkach J.31, J.32 i J.33 przedstawiono rezultaty otrzymane przy założeniu stałej macierzy kowariancji. Analizy przeprowadzono przy założeniu 6-blokowego symetrycznego mechanizmu zniszczenia, szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m oraz pionowych skal fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m i  $0.75$  m (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Macierze kowariancji zostały wyznaczone poprzez przyjęcie wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych podłoża spoiстого (patrz tabela 8.1); ich postacie są podane w załączniku G.



Rysunek J.31. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spoiisty,  $b = 1.0$  m, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.32. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.33. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Tab. J.4. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, szerokość fundamentu  $b = 1.0$  m.

Symetryczny mechanizm 6-blokowy								
Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m								
Podłoże spoiste (tab. 8.1)								
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	447.3	30.459	0.068	447.3	358.8	550.0	rys. J.19a
	1.25	438.9	44.972	0.103	436.1	332.8	632.0	rys. J.19b
	2.50	439.1	48.011	0.109	435.7	321.2	625.4	rys. J.19c
	7.50	444.9	53.087	0.119	440.7	285.2	671.1	rys. J.19d
0.5	0.50	442.5	43.934	0.099	438.7	325.2	601.6	rys. J.20a
	2.50	441.2	66.127	0.150	434.5	279.6	693.8	rys. J.20b
	5.00	446.9	75.423	0.169	436.4	293.6	906.9	rys. J.20c
	15.0	449.3	77.803	0.173	443.1	271.4	976.2	rys. J.20d
0.75	0.75	441.1	56.030	0.127	436.6	296.1	646.6	rys. J.21a
	3.75	449.5	84.906	0.189	439.0	238.4	897.0	rys. J.21b
	7.50	451.0	88.939	0.197	437.5	244.8	839.4	rys. J.21c
	22.5	454.2	96.734	0.213	441.0	250.2	1039.0	rys. J.21d
Podłoże niespoiste (tab. 8.2)								
0.25	0.25	643.8	85.338	0.133	640.3	392.3	1052.0	rys. J.25a
	1.25	627.6	112.787	0.180	612.4	331.9	1152.1	rys. J.25b
	2.50	629.5	131.499	0.209	618.4	341.0	1202.3	rys. J.25c
	7.50	637.8	153.457	0.241	611.9	306.9	1289.9	rys. J.25d
0.5	0.50	637.8	130.007	0.204	617.3	343.6	1344.9	rys. J.26a
	2.50	623.8	174.652	0.280	594.0	268.2	1555.4	rys. J.26b
	5.00	651.4	209.351	0.321	610.0	282.3	2175.8	rys. J.26c
	15.0	654.1	219.209	0.335	605.8	249.8	2314.4	rys. J.26d
0.75	0.75	632.1	151.795	0.240	615.4	301.4	1300.5	rys. J.27a
	3.75	655.8	238.513	0.364	610.4	248.3	2343.1	rys. J.27b
	7.50	668.5	257.383	0.385	614.7	211.7	2810.4	rys. J.27c
	22.5	679.4	271.132	0.399	615.9	230.4	2346.6	rys. J.27d

Tab. J.5. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, szerokość fundamentu  $b = 2.0$  m.

Symetryczny mechanizm 6-blokowy								
Szerokość fundamentu $b = 2.0$ m								
Podłoże spoiste (tab. 8.1)								
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	1009.3	51.587	0.051	1006.5	863.5	1177.8	rys. J.22a
	1.25	1001.1	73.824	0.074	995.7	805.2	1294.5	rys. J.22b
	2.50	988.8	83.343	0.084	981.6	758.3	1289.0	rys. J.22c
	7.50	998.0	97.707	0.0979	994.3	667.1	1454.0	rys. J.22d
0.5	0.50	998.3	72.052	0.0722	998.3	775.9	1291.4	rys. J.23a
	2.50	983.5	108.983	0.111	976.1	672.5	1614.7	rys. J.23b
	5.00	983.2	117.138	0.119	971.1	690.8	1369.8	rys. J.23c
	15.0	996.1	125.647	0.126	987.4	661.2	1425.7	rys. J.23d
0.75	0.75	1001.3	96.607	0.097	995.4	761.7	1473.3	rys. J.24a
	3.75	983.9	136.415	0.139	970.6	659.8	1707.0	rys. J.24b
	7.50	996.9	149.327	0.150	988.1	632.6	1672.8	rys. J.24c
	22.5	1004.8	159.998	0.159	987.8	642.7	1623.8	rys. J.24d

Podłoże niespoiste (tab. 8.2)								
0.25	0.25	1744.8	171.198	0.0981	1735.5	1229.8	2362.3	rys. J.28a
	1.25	1694.4	239.732	0.142	1671.3	1036.7	2619.8	rys. J.28b
	2.50	1670.7	258.255	0.155	1655.5	918.4	2824.8	rys. J.28c
	7.50	1679.9	304.684	0.181	1648.5	939.1	2866.6	rys. J.28d
0.5	0.50	1709.5	242.986	0.142	1697.6	1045.2	2708.2	rys. J.29a
	2.50	1663.5	353.811	0.213	1613.7	857.1	3254.5	rys. J.29b
	5.00	1661.9	394.948	0.238	1603.8	765.5	3554.3	rys. J.29c
	15.0	1692.7	443.576	0.262	1612.2	865.5	3635.5	rys. J.29d
0.75	0.75	1701.6	312.006	0.183	1668.9	1030.9	2990.1	rys. J.30a
	3.75	1669.4	427.224	0.256	1607.1	805.7	3778.6	rys. J.30b
	7.50	1704.7	511.369	0.300	1631.0	645.2	4124.1	rys. J.30c
	22.5	1726.4	539.774	0.313	1631.3	659.4	4548.5	rys. J.30d

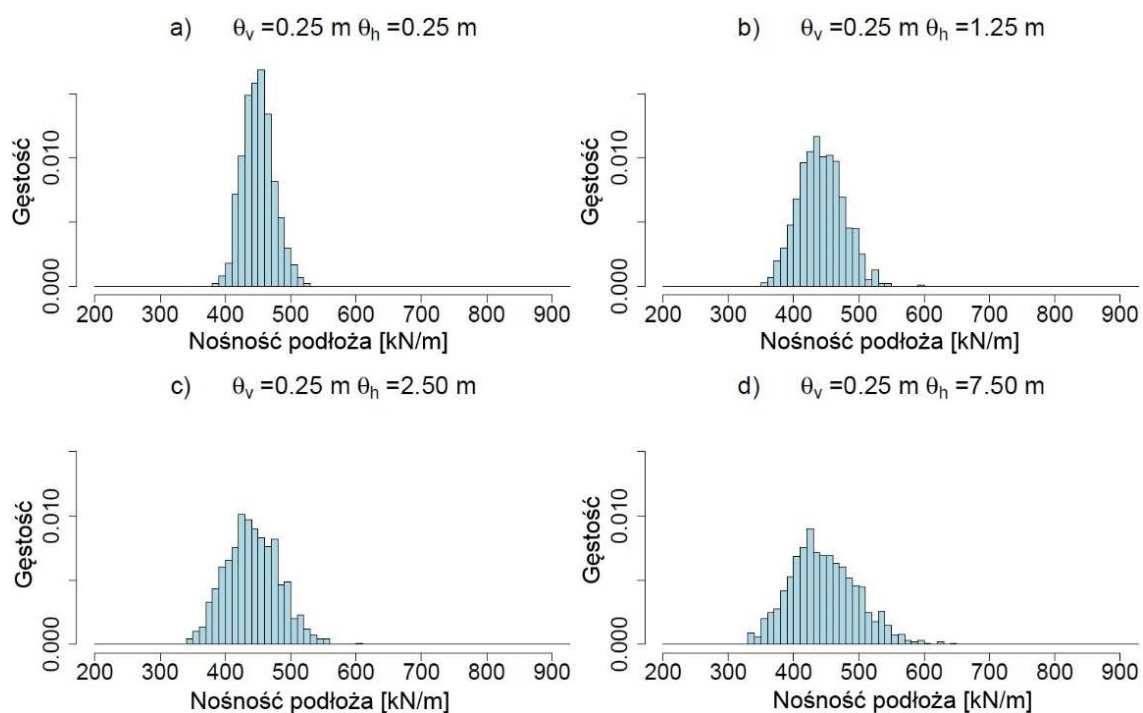
Tabela J.6. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: stała macierz kowariancji, 6-blokowy symetryczny mechanizm zniszczenia, szerokość fundamentu  $b = 1.0$  m.

Symetryczny mechanizm 6-blokowy, stała macierz kowariancji Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m Podłoże spoiste (tab. 8.1)								
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	442.4	30.055	0.0679	441.5	363.5	549.0	Rys. 9.31a
	1.25	442.9	46.291	0.105	440.2	295.5	619.1	Rys. 9.31b
	2.50	448.5	51.718	0.115	445.5	320.6	659.3	Rys. 9.31c
	7.50	451.5	58.320	0.129	445.6	317.4	728.0	Rys. 9.31d
0.5	0.50	440.2	46.116	0.105	437.9	301.5	662.5	Rys. 9.32a
	2.50	453.9	71.554	0.158	446.3	294.3	852.1	Rys. 9.32b
	5.00	452.6	78.826	0.174	442.0	269.2	850.9	Rys. 9.32c
	15.0	455.5	78.691	0.172	446.4	262.2	818.7	Rys. 9.32d
0.75	0.75	438.6	58.440	0.133	433.2	306.2	719.8	Rys. 9.33a
	3.75	450.0	85.794	0.191	440.6	232.2	965.4	Rys. 9.33b
	7.50	457.4	101.063	0.221	443.3	243.4	1134.4	Rys. 9.33c
	22.5	462.7	99.340	0.215	447.5	269.7	1241.0	Rys. 9.33d

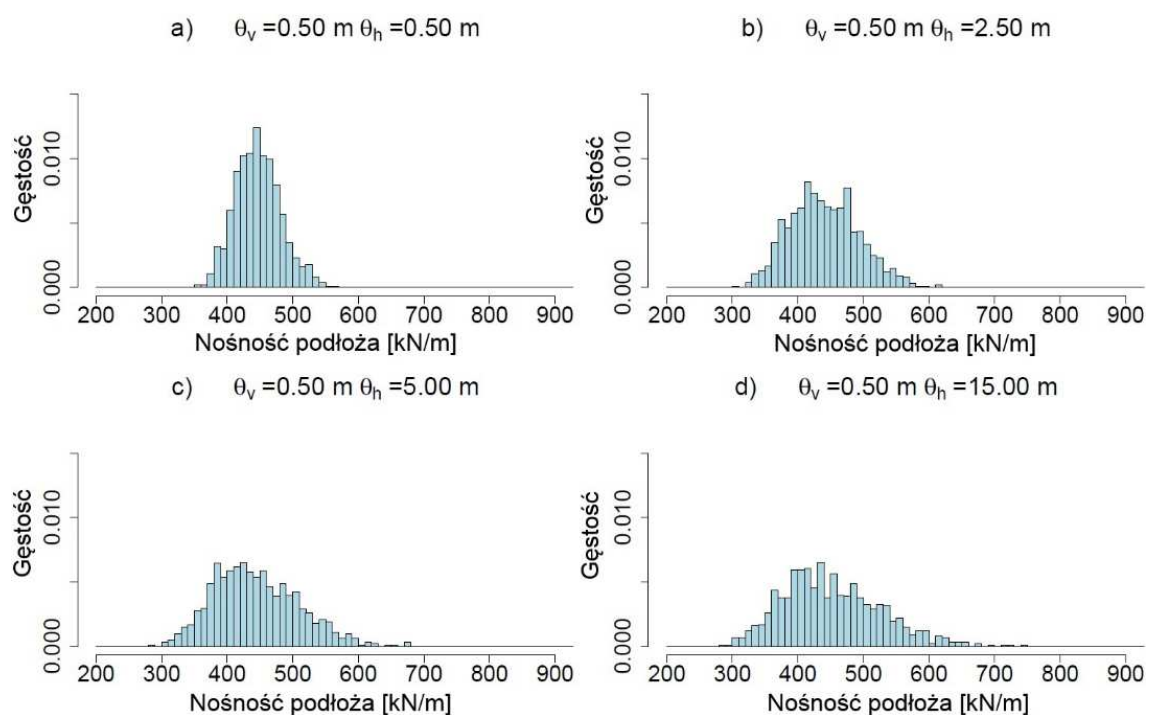
Procentowe przedziały ufności dla wartości średniej nośności podano w Załączniku H. Wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża zestawiono na rysunkach na końcu rozdziału (po prezentacji wyników otrzymanych dla mechanizmu niesymetrycznego).

### J.2.2. Mechanizm niesymetryczny

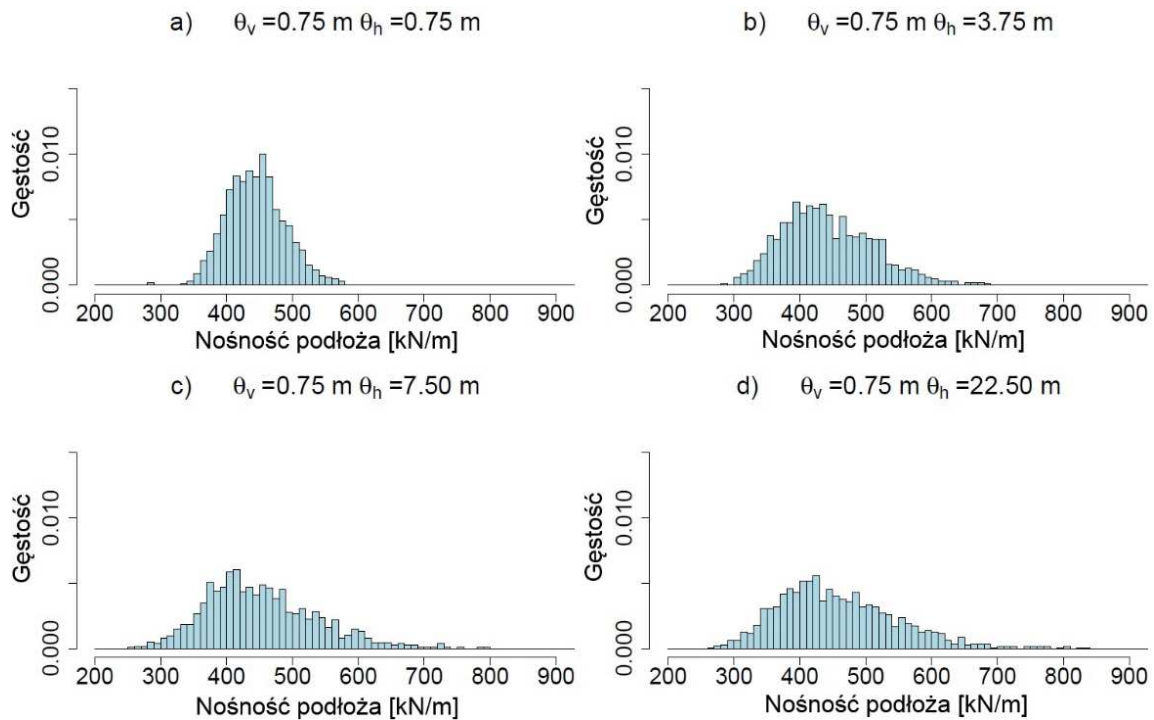
Na rysunkach J.34, J.35 i J.36 przedstawiono histogramy nośności podłoża przy założeniu 6-blokowego niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia podłoża. Wyniki dotyczą podłoża spoistego (tabela 8.1), szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m oraz pionowych skal fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m i  $0.75$  m (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Rysunki J.37, J.38 i J.39 prezentują rezultaty dla powyższych założeń z tą różnicą, że odnoszą się do szerokości fundamentu  $b = 2.0$  m.



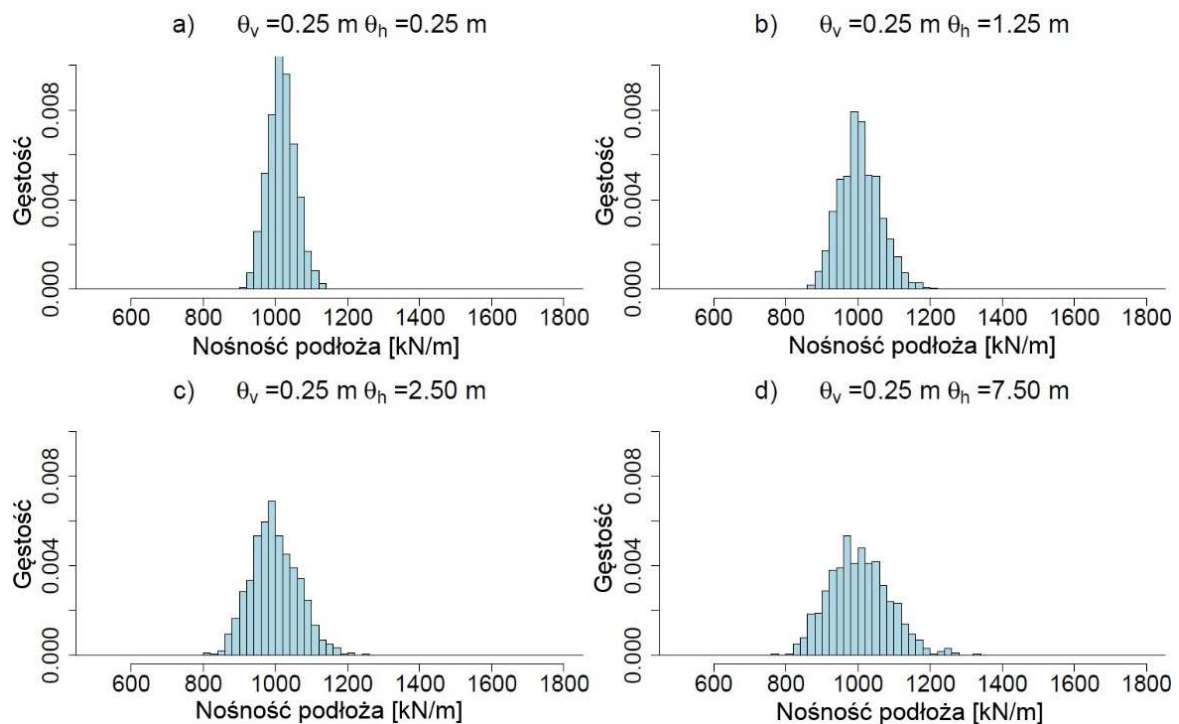
Rysunek J.34. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



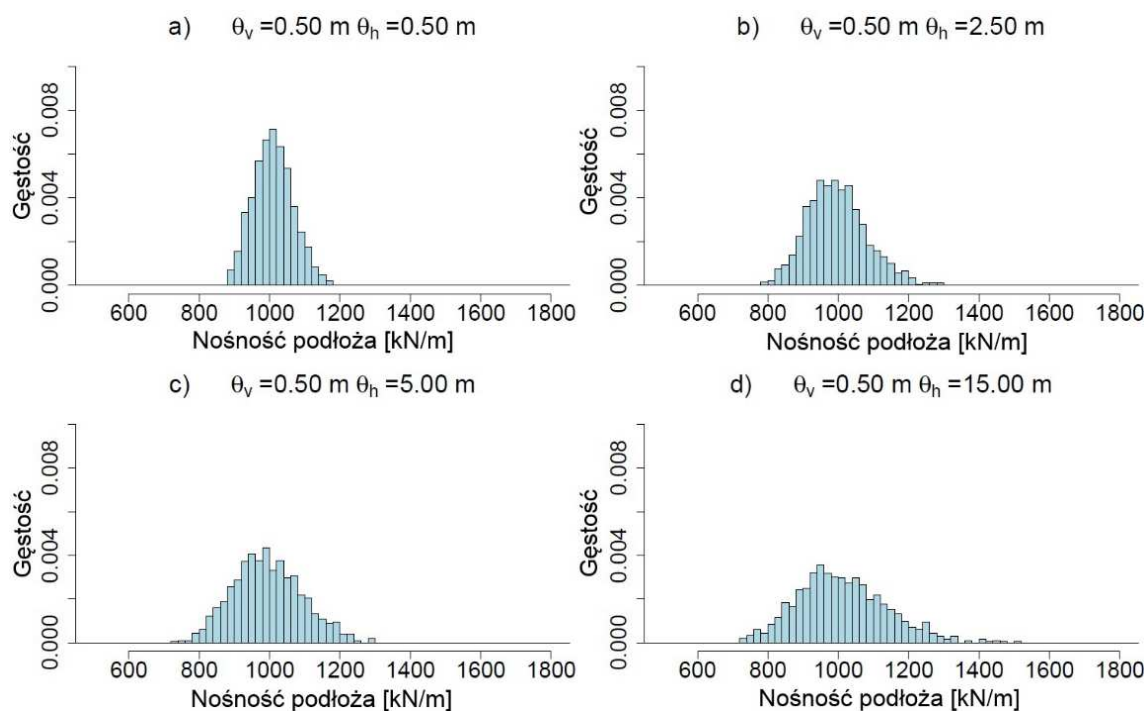
Rysunek J.35. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



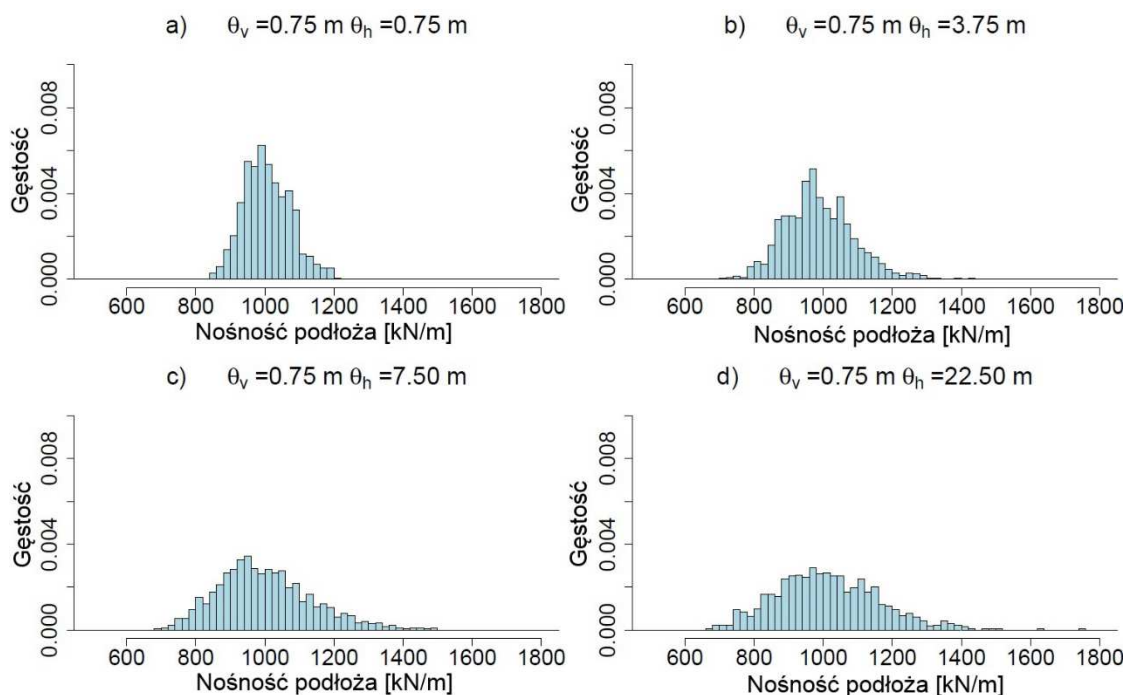
Rysunek J.36. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.37. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



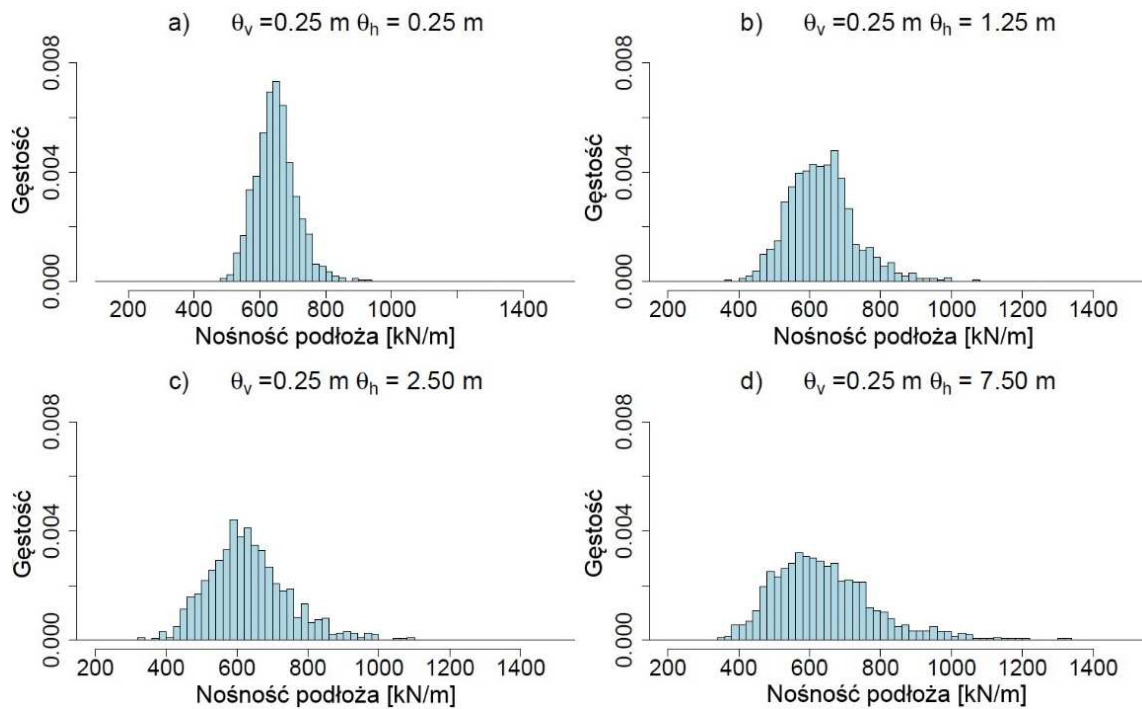
Rysunek J.38. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



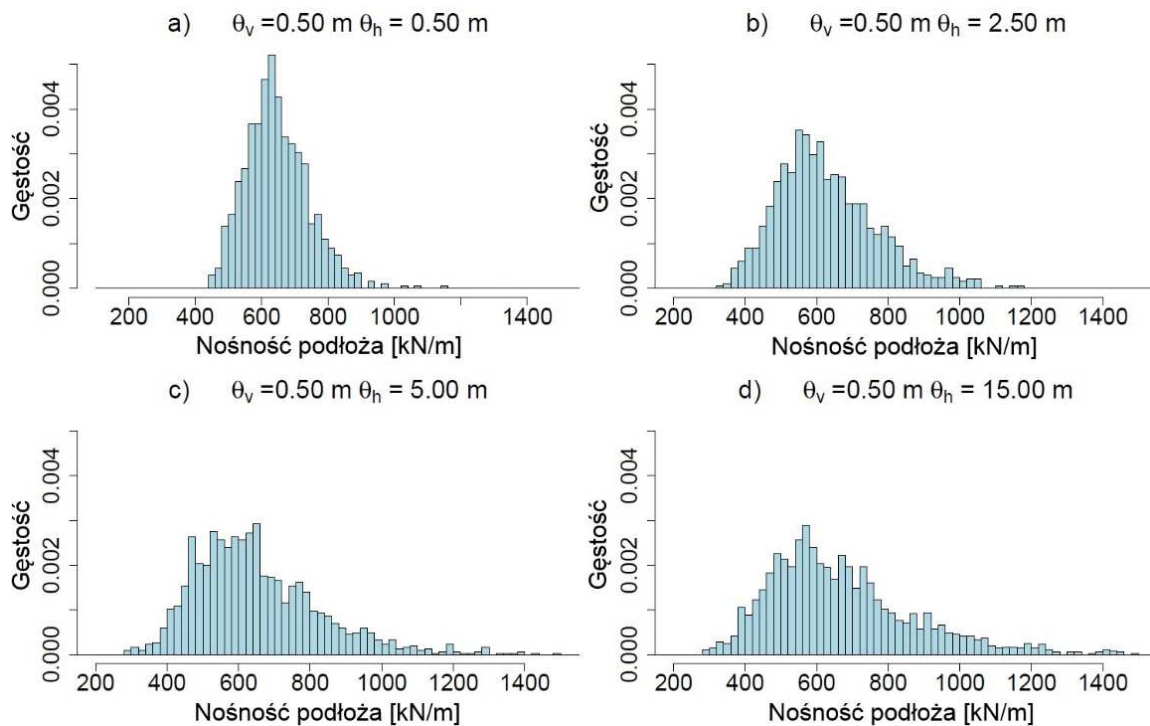
Rysunek J.39. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

Na rysunkach J.40, J.41 i J.42 przedstawiono histogramy nośności podłoża przy założeniu 6-blokowego niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia podłoża. Wyniki dotyczą podłoża niespoistego (tabela 8.2), szerokości fundamentu  $b = 1.0 \text{ m}$  oraz pionowych skal

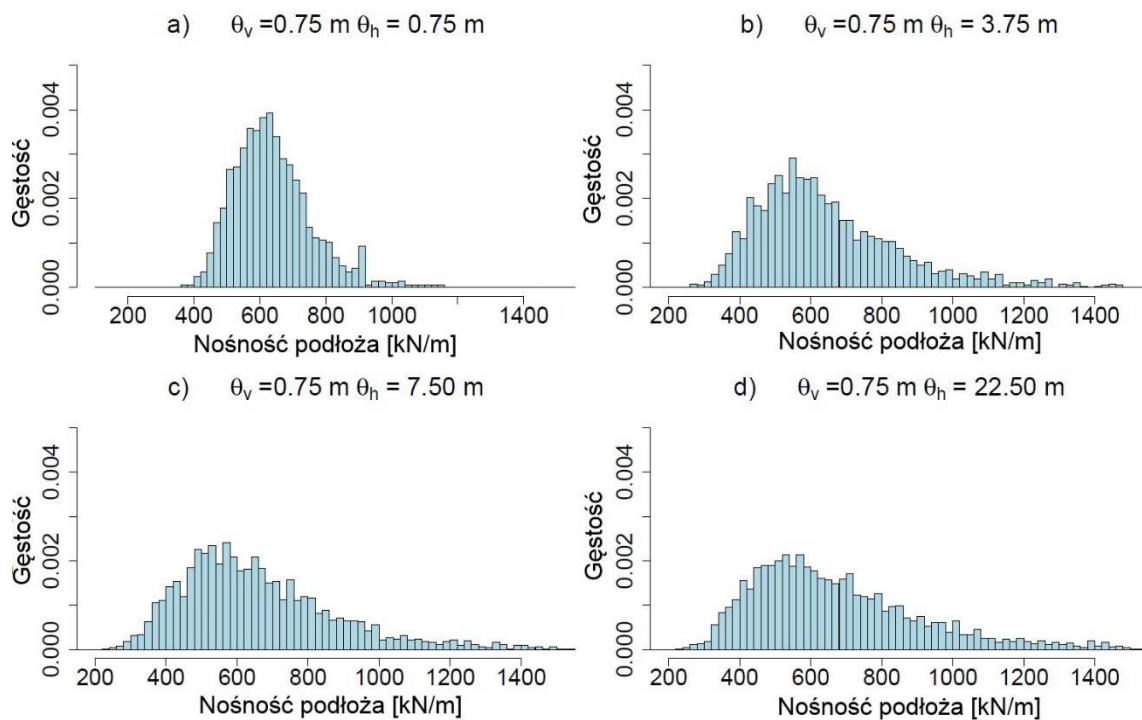
fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m i  $0.75$  m (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Rysunki J.43, J.44 i J.45 prezentują rezultaty dla powyższych założeń z tą różnicą, że odnoszą się do szerokości fundamentu  $b = 2.0$  m.



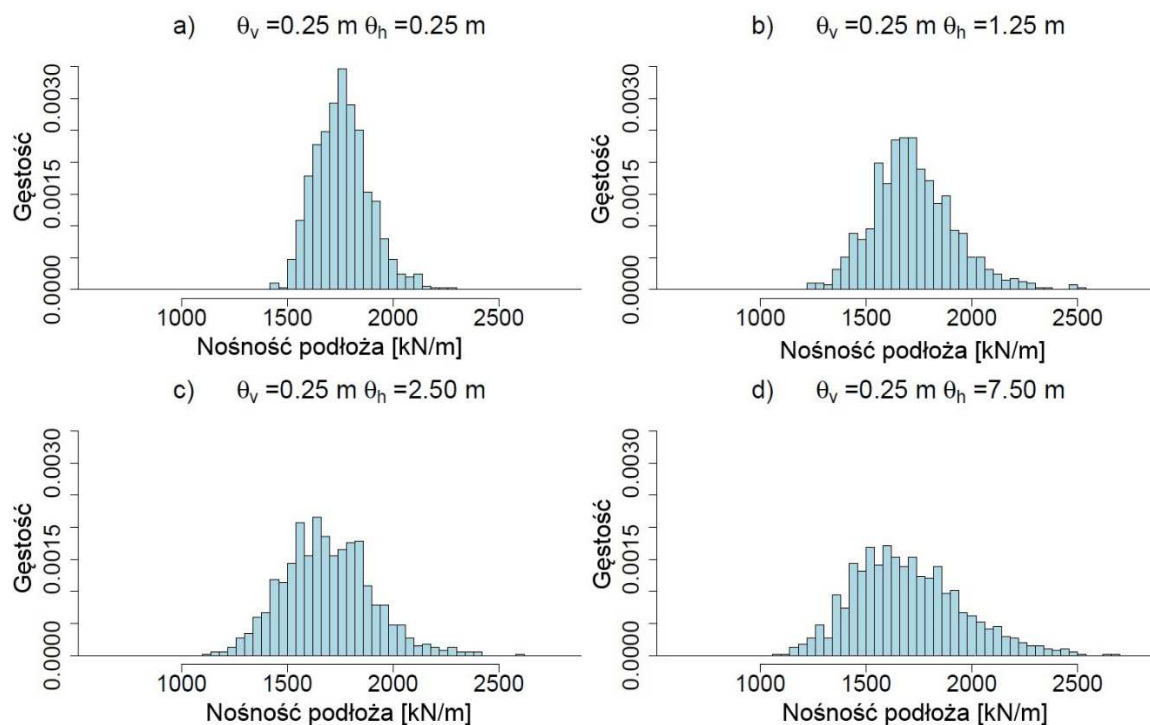
Rysunek J.40. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 1.0$  m, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



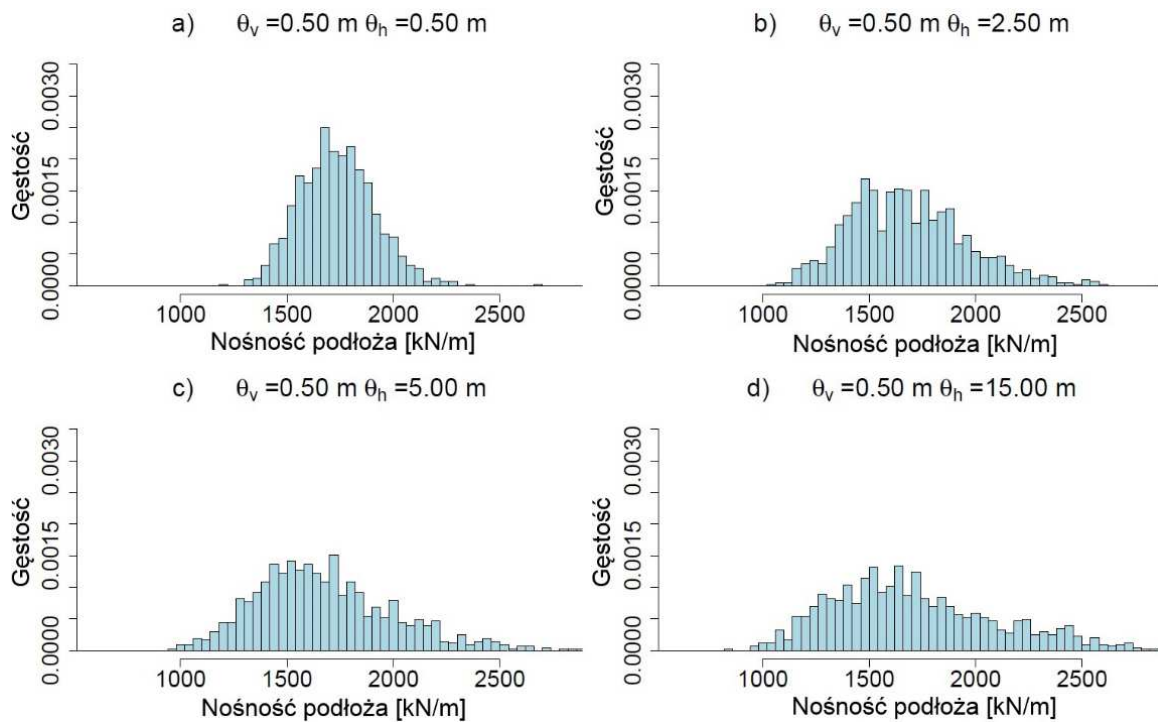
Rysunek J.41. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 1.0$  m, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



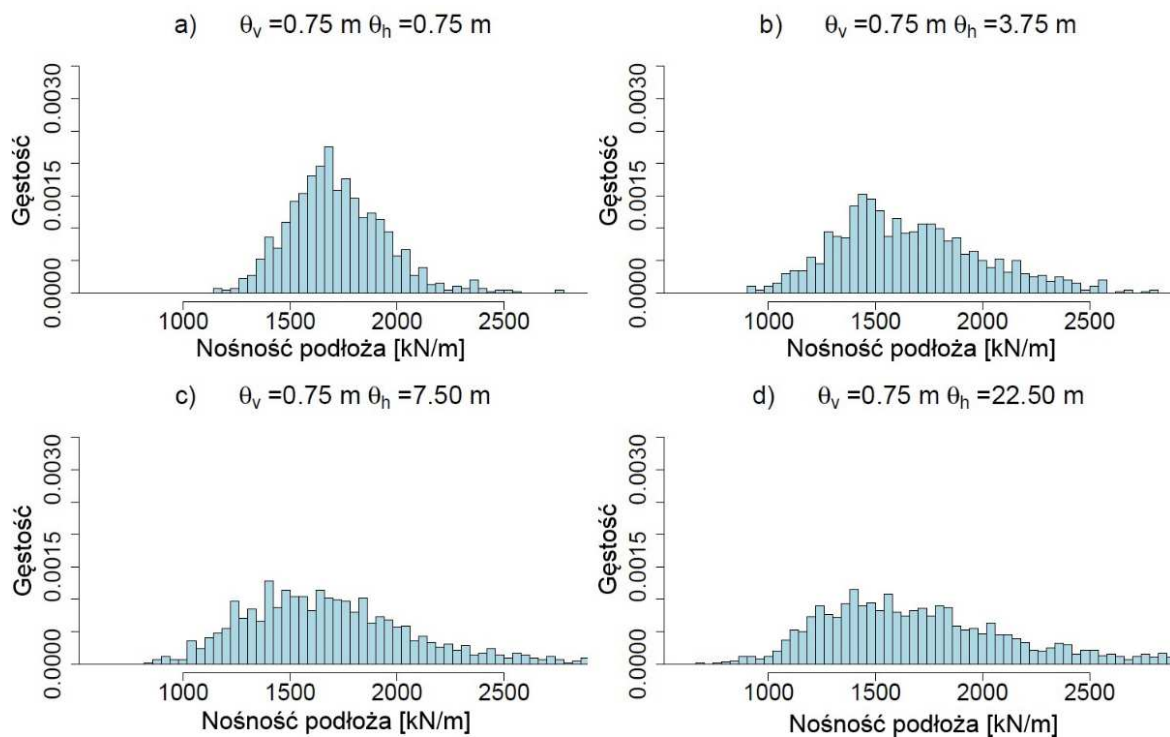
Rysunek J.42. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.43. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.44. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.45. Histogramy nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, grunt niespoisty,  $b = 2.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Tabela J.7. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, szerokość fundamentu  $b = 1.0$  m.

		Niesymetryczny mechanizm 6-blokowy						
		Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m						
		Podłoże spoiste (tab. 8.1)						
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	450.2	23.437	0.0521	449.3	386.3	522.0	rys. J.34a
	1.25	442.2	34.253	0.0775	440.5	357.9	595.4	rys. J.34b
	2.50	441.4	40.095	0.0908	439.6	341.2	604.3	rys. J.34c
	7.50	446.2	51.181	0.115	442.9	330.6	642.9	rys. J.34d
0.5	0.50	446.9	34.625	0.0775	445.0	355.2	563.6	rys. J.35a
	2.50	440.5	52.284	0.119	436.9	307.2	618.8	rys. J.35b
	5.00	443.9	64.171	0.145	437.0	289.6	677.8	rys. J.35c
	15.0	451.2	73.855	0.164	440.8	284.5	740.4	rys. J.35d
0.75	0.75	444.3	43.620	0.0982	443.3	284.4	579.6	rys. J.36a
	3.75	442.3	69.056	0.156	433.9	287.3	681.4	rys. J.36b
	7.50	452.4	83.727	0.185	441.1	256.9	797.3	rys. J.36c
	22.5	457.6	89.014	0.195	445.0	261.2	839.1	rys. J.36d
		Podłoże niespoiste (tab. 8.2)						
0.25	0.25	649.1	62.080	0.0956	647.0	484.9	927.5	rys. J.40a
	1.25	634.2	93.603	0.148	626.3	375.0	1078.2	rys. J.40b
	2.50	632.6	114.369	0.181	622.2	326.6	1091.2	rys. J.40c
	7.50	642.8	146.540	0.228	622.3	357.8	1515.9	rys. J.40d
0.5	0.50	645.8	94.310	0.146	635.1	442.7	1151.8	rys. J.41a
	2.50	627.4	138.979	0.221	606.8	331.1	1173.4	rys. J.41b
	5.00	654.0	187.200	0.286	621.8	282.2	1934.4	rys. J.41c
	15.0	674.5	217.056	0.322	632.3	283.2	2132.8	rys. J.41d
0.75	0.75	639.2	118.668	0.186	625.2	367.7	1145.3	rys. J.42a
	3.75	648.2	211.521	0.326	605.1	260.1	1763.3	rys. J.42b
	7.50	672.2	256.108	0.381	622.6	223.3	2371.6	rys. J.42c
	22.5	690.0	276.660	0.401	628.7	237.3	2394.7	rys. J.42d

Tab. J.8. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: 6-blokowy niesymetryczny mechanizm zniszczenia, szerokość fundamentu  $b = 2.0$  m.

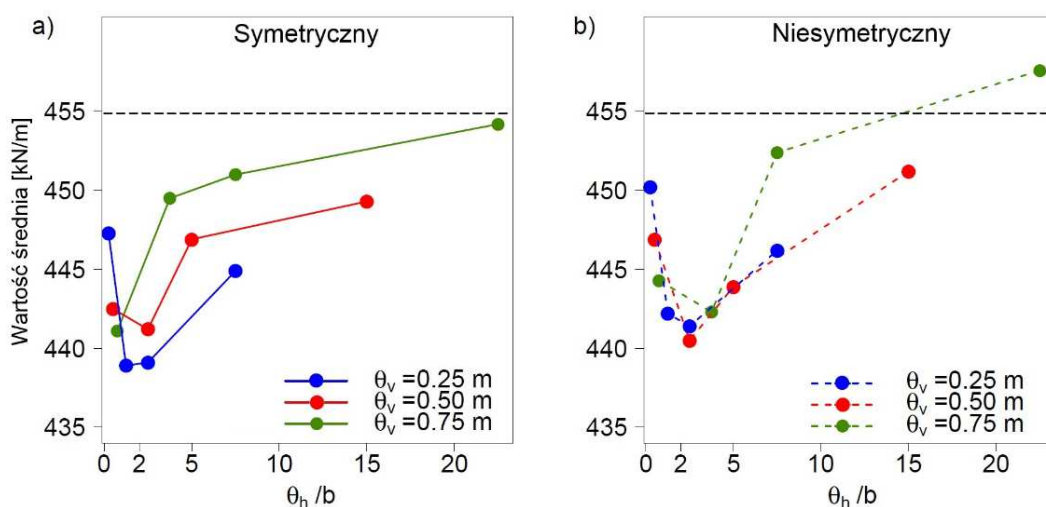
		Niesymetryczny mechanizm 6-blokowy						
		Szerokość fundamentu $b = 2.0$ m						
		Podłoże spoiste (tab. 8.1)						
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	1017.2	38.651	0.0380	1015.7	913.4	1132.4	rys. J.37a
	1.25	1006.2	56.555	0.0562	1002.2	868.9	1201.2	rys. J.37b
	2.50	998.2	64.997	0.0651	993.1	818.0	1256.7	rys. J.37c
	7.50	1002.6	82.230	0.0820	999.1	779.7	1325.7	rys. J.37d
0.5	0.50	1010.9	55.652	0.0551	1009.8	882.7	1179.1	rys. J.38a
	2.50	996.1	83.460	0.0838	990.5	781.3	1290.1	rys. J.38b
	5.00	994.6	98.320	0.0989	989.0	726.3	1295.9	rys. J.38c
	15.0	1011.5	127.154	0.0268	1000.8	724.8	1509.7	rys. J.38d
0.75	0.75	1006.5	67.934	0.0675	1000.6	842.7	1208.0	rys. J.39a
	3.75	988.0	101.086	0.102	979.3	715.6	1428.7	rys. J.39b
	7.50	1001.8	137.501	0.137	984.5	684.7	1486.5	rys. J.39c
	22.5	1013.8	150.005	0.148	1002.6	672.0	1754.2	rys. J.39d

		Podłoże niespoiste (tab. 8.2)							
0.25	0.25	1761.7	127.746	0.0725	1758.5	1447.0	2273.9	rys. J.43a	
	1.25	1722.9	193.419	0.112	1704.7	1229.1	2517.2	rys. J.43b	
	2.50	1691.0	209.365	0.124	1675.9	1126.9	2603.8	rys. J.43c	
	7.50	1698.2	257.611	0.152	1673.4	1088.2	2695.7	rys. J.43d	
0.5	0.50	1737.3	176.463	0.102	1730.6	1211.2	2665.0	rys. J.44a	
	2.50	1686.4	289.642	0.172	1658.2	1057.1	3904.7	rys. J.44b	
	5.00	1682.6	334.632	0.199	1637.9	956.9	3275.1	rys. J.44c	
	15.0	1729.7	424.076	0.245	1654.8	827.3	3775.7	rys. J.44d	
0.75	0.75	1718.9	229.202	0.133	1693.1	1172.5	2760.4	rys. J.45a	
	3.75	1666.1	357.104	0.214	1615.4	901.7	3291.1	rys. J.45b	
	7.50	1700.7	425.810	0.250	1650.0	857.2	4123.5	rys. J.45c	
	22.5	1749.2	526.3	0.301	1655.8	678.6	4890.0	rys. J.45d	

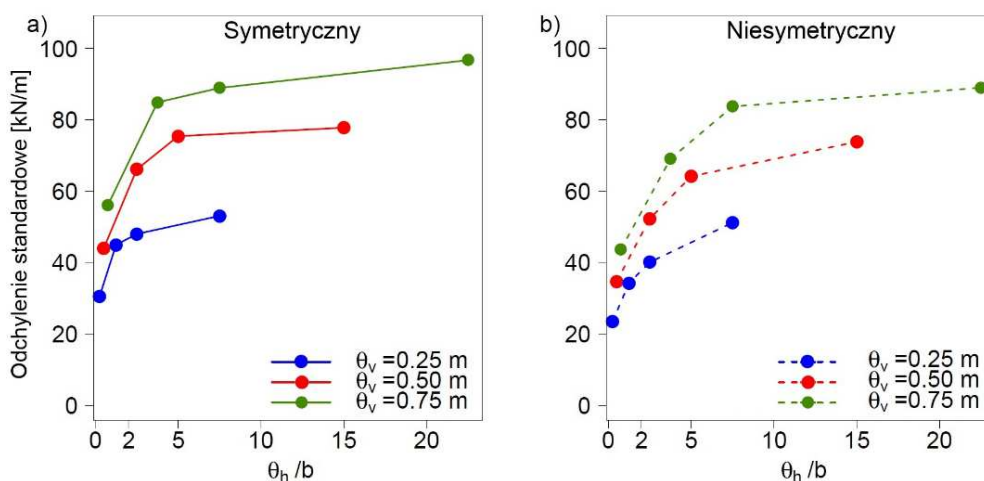
Procentowe przedziały ufności dla wartości średniej nośności podano w Załączniku H.

Na rysunku J.46 przedstawiono porównanie otrzymanych wartości średnich nośności przy założeniu mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego. Rezultaty dotyczą podłoża spoistego i szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m. Odchylenia standardowe nośności pokazano na rysunku J.47. Analogiczne informacje dla podłoża niespoistego przedstawiono na rysunkach J.48 i J.49. Rysunki J.50 i J.51 dotyczą podłoża spoistego i szerokości fundamentu  $b = 2.0$  m, natomiast rysunki J.52 i J.53 przedstawiają rezultaty dla podłoża niespoistego i szerokości fundamentu  $b = 2.0$  m. Ponadto, na rysunku J.54 przedstawiono wyniki przy założeniu stałej macierzy kowariancji i symetrycznego 6-blokowego mechanizmu zniszczenia.

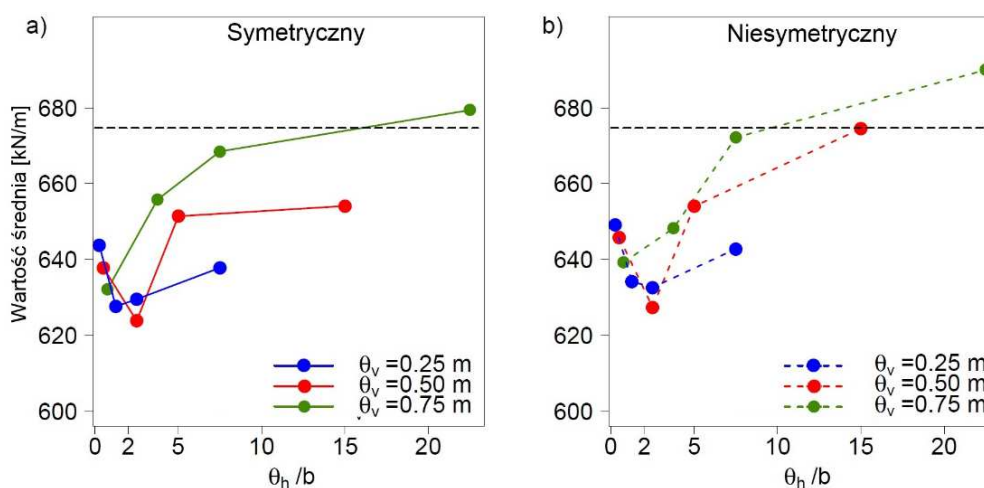
Na rysunkach J.46, J.48, J.50, J.52 i J.54 przerywaną linią oznaczono nośność podłoża otrzymaną przy założeniu wartości oczekiwanych parametrów wytrzymałościowych gruntu.



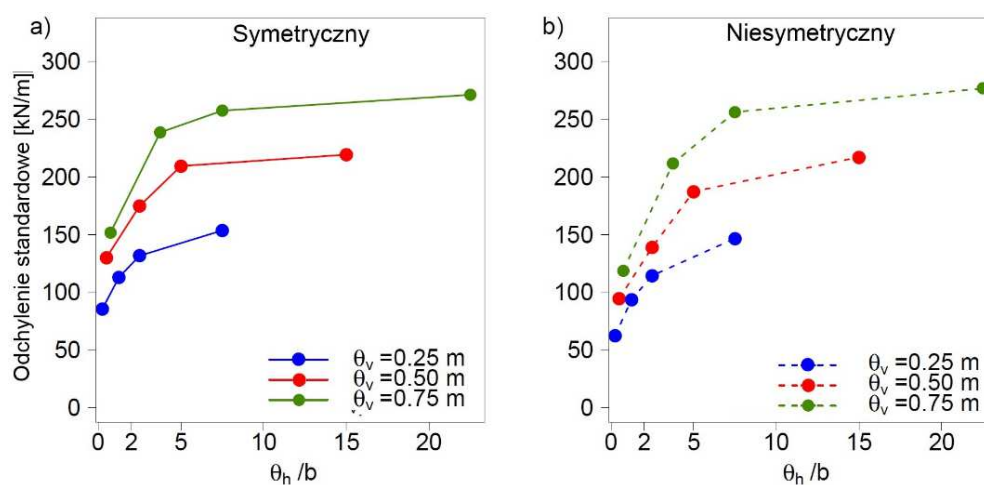
Rysunek J.46. Wartości średnie nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 1.0$  m; podłoże spoiste; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



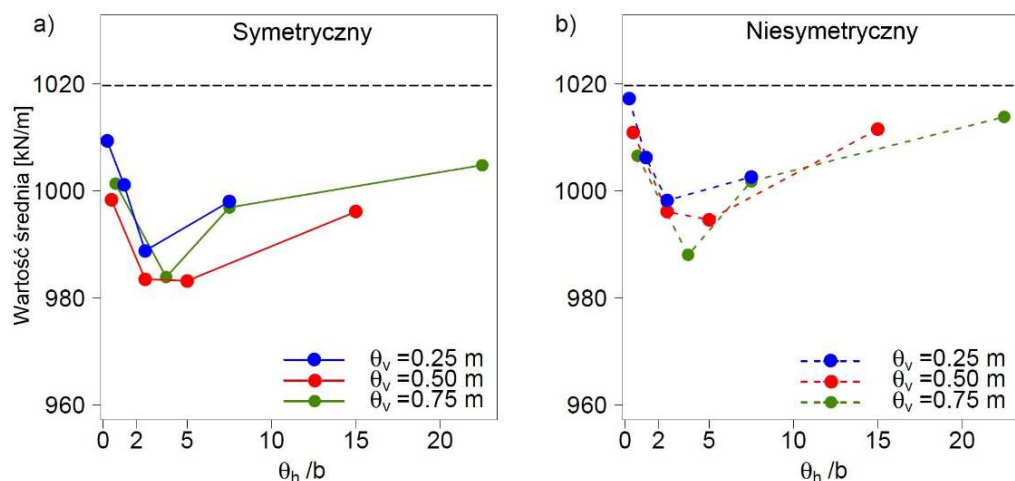
Rysunek J.47. Odchylenia standardowe nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 1.0$  m; podłoże spoiste; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



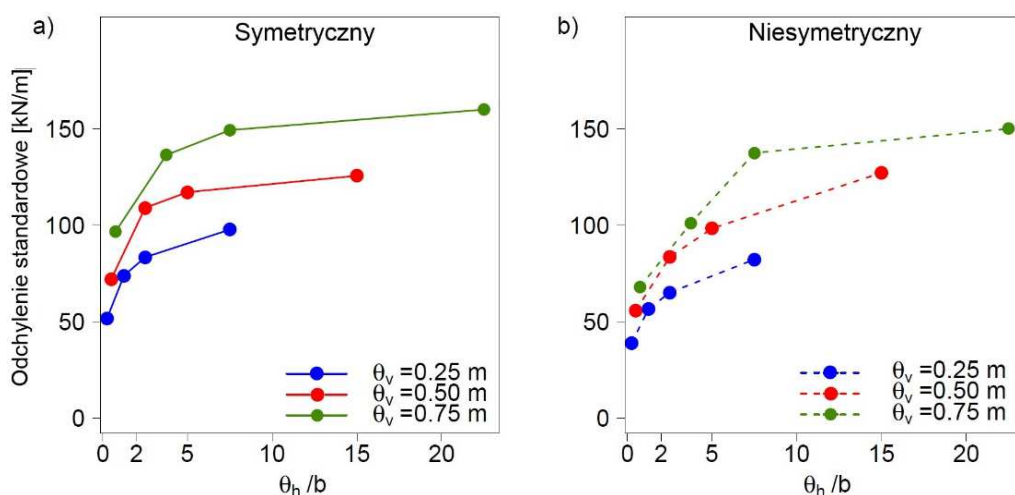
Rysunek J.48. Wartości średnie nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 1.0$  m; podłoże niespoiste; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



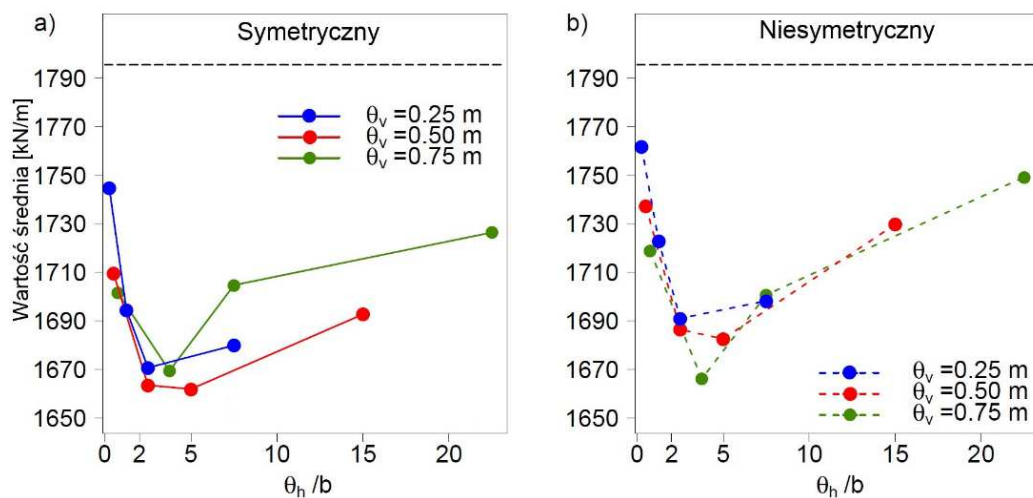
Rysunek J.49. Odchylenia standardowe nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 1.0$  m; podłoże niespoiste; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



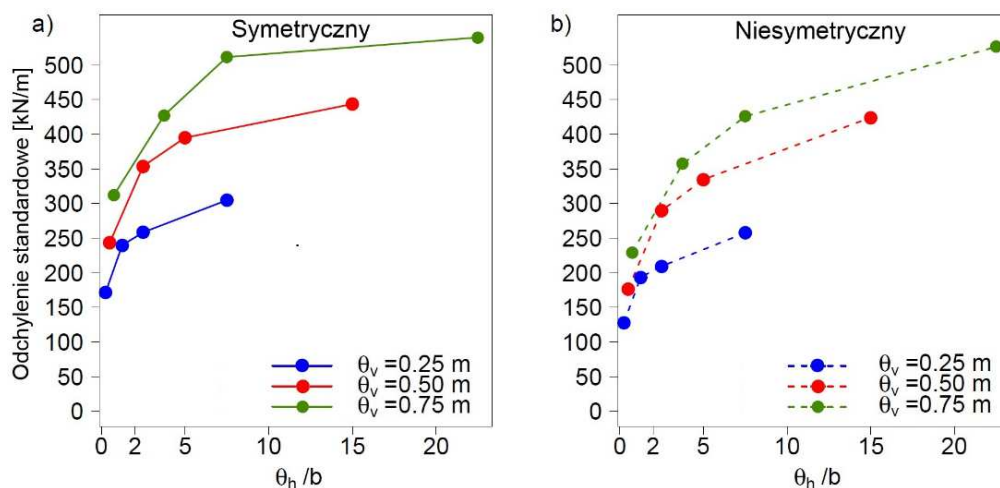
Rysunek J.50. Wartości średnie nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 2.0$  m; podłoże spoisłe; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



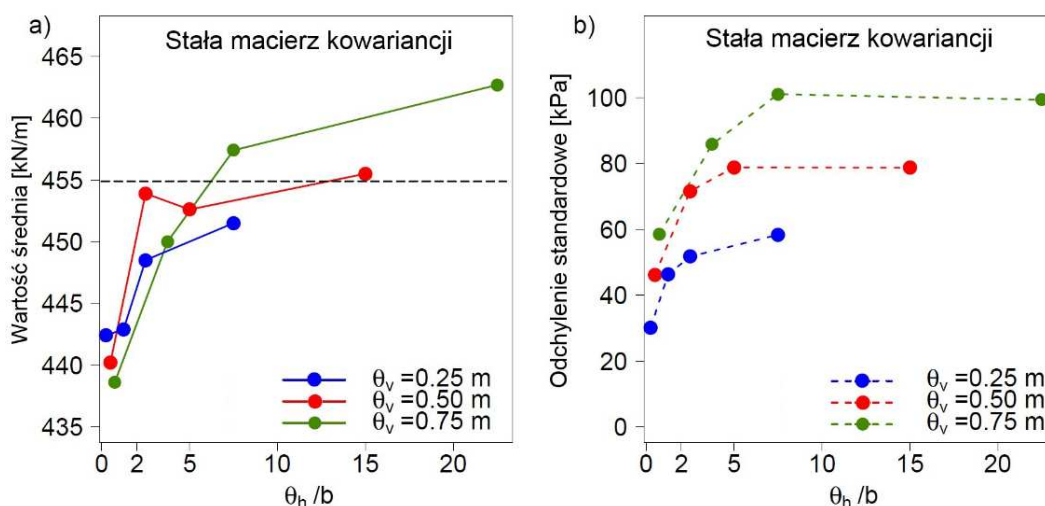
Rysunek J.51. Odchylenia standardowe nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 2.0$  m; podłoże spoisłe; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



Rysunek J.52. Wartości średnie nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 2.0$  m; podłoże niespoisłe; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



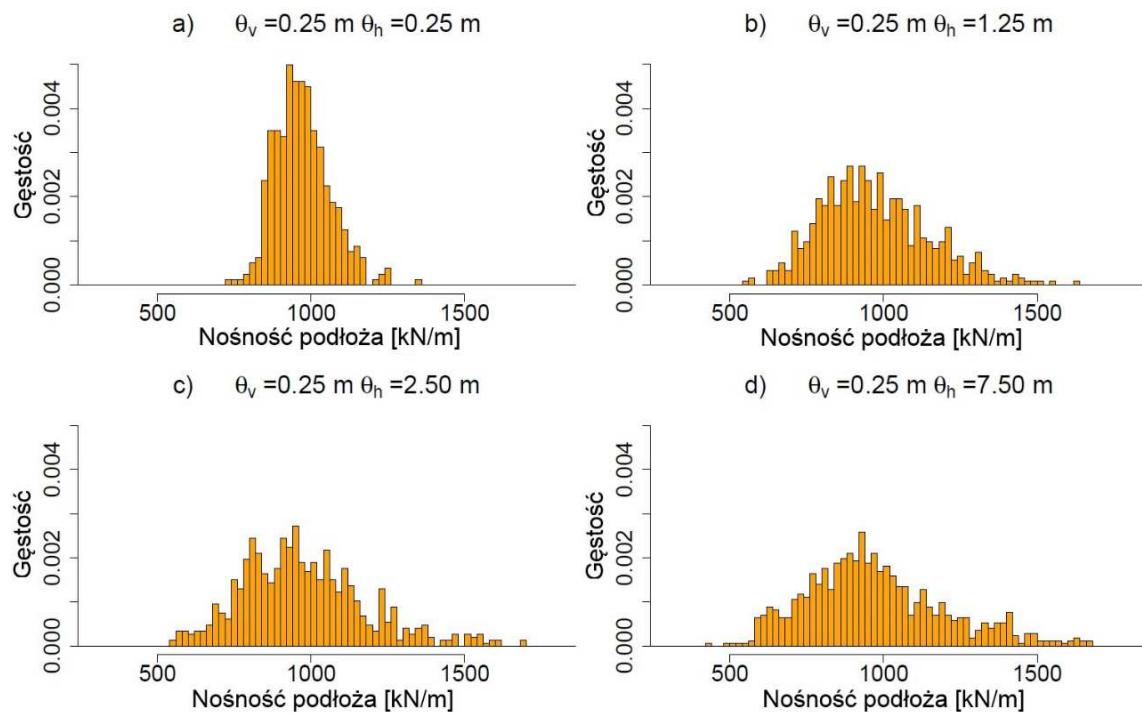
Rysunek J.53. Odchylenia standardowe nośności podłoża otrzymane dla mechanizmu 6-blokowego;  $b = 2.0$  m; podłoże niespoiste; a) mechanizm symetryczny; b) mechanizm niesymetryczny.



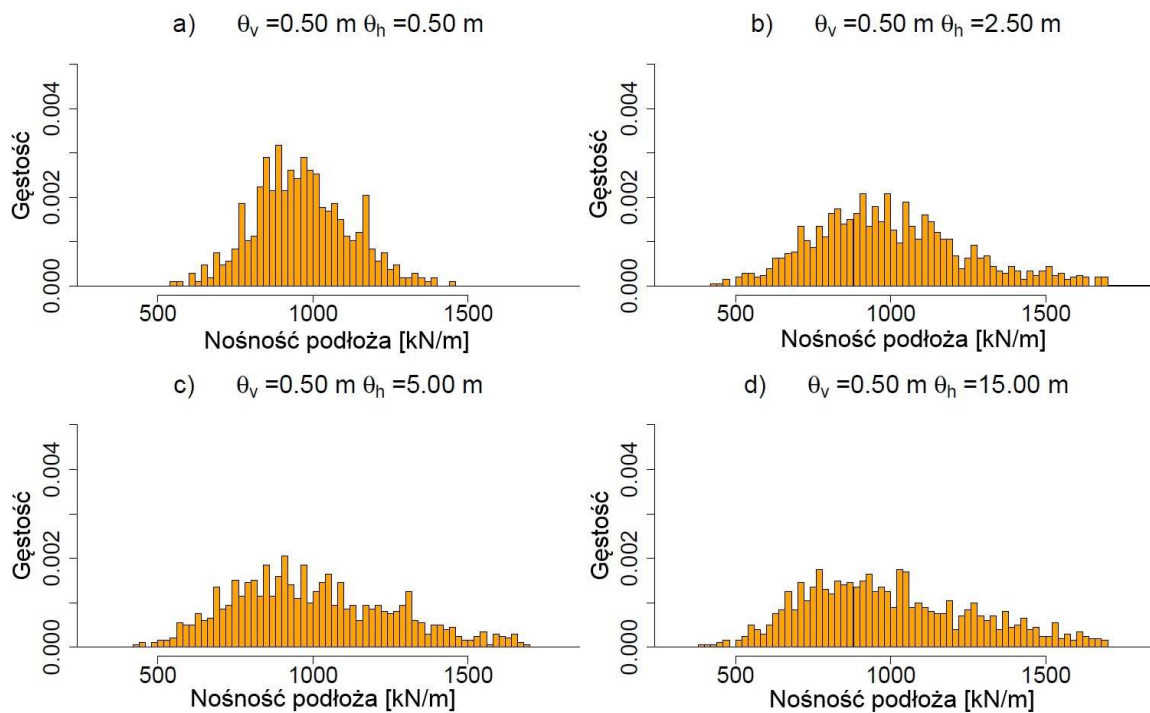
Rysunek J.54. Wartości średnie i odchylenia standardowe nośności podłoża dla mechanizmu 6-blokowego; stała macierz kowariancji;  $b = 1.0$  m; podłoże spoiste.

### J.3. Mechanizm trójwymiarowy - rezultaty

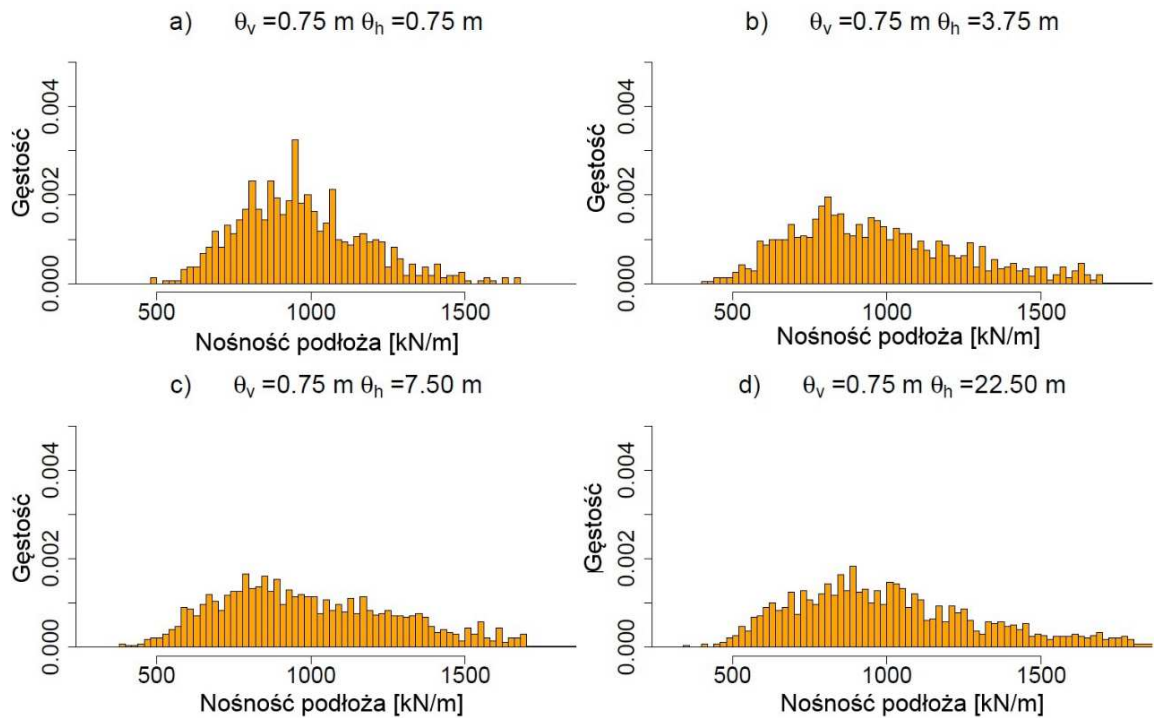
Na rysunkach J.55, J.56 i J.57 przedstawiono histogramy nośności podłoża przy założeniu 5-blokowego trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia podłoża. Wyniki dotyczą podłoża spoistego (tabela 8.1), szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m oraz pionowych skal fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m,  $0.50$  m i  $0.75$  m (oraz 4 wartości poziomych skal fluktuacji - informacje na rysunkach). Na kolejnych rysunkach, tj. J.58, J.59 i J.60, przedstawiono rezultaty otrzymane przy założeniu stałej macierzy kowariancji i przy zachowaniu pozostałych założeń.



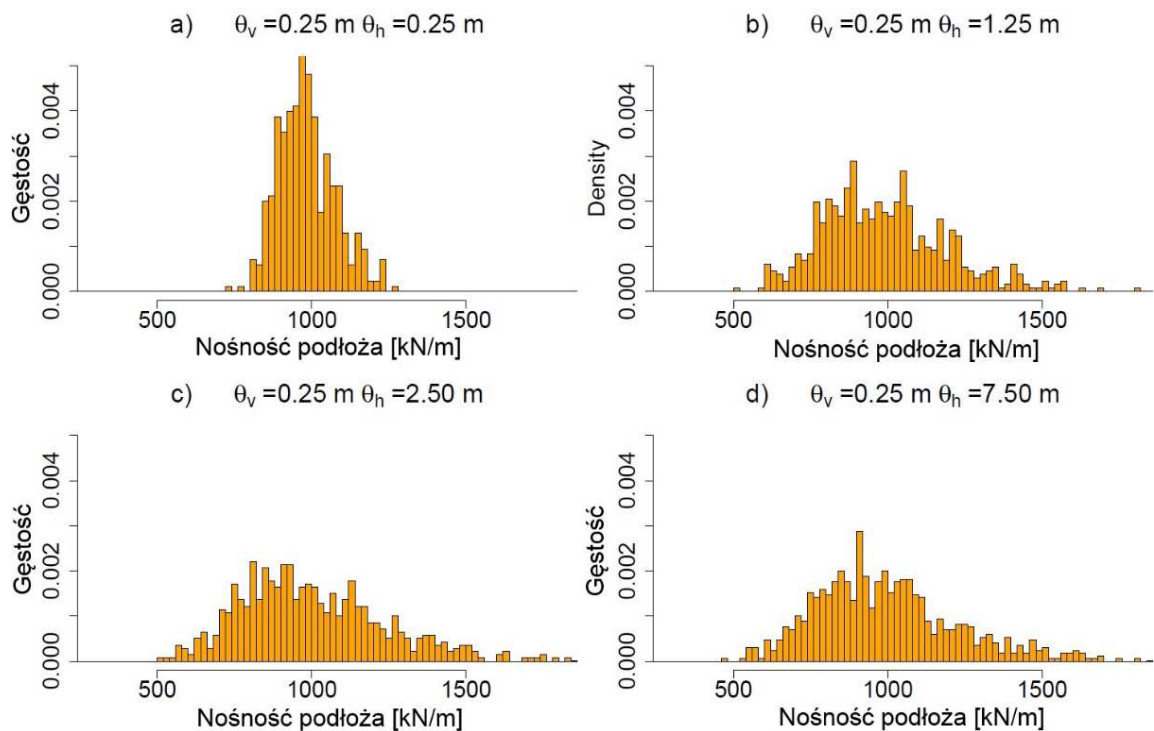
Rysunek J.55. Histogramy nośności podłoża: 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 1.0$  m, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



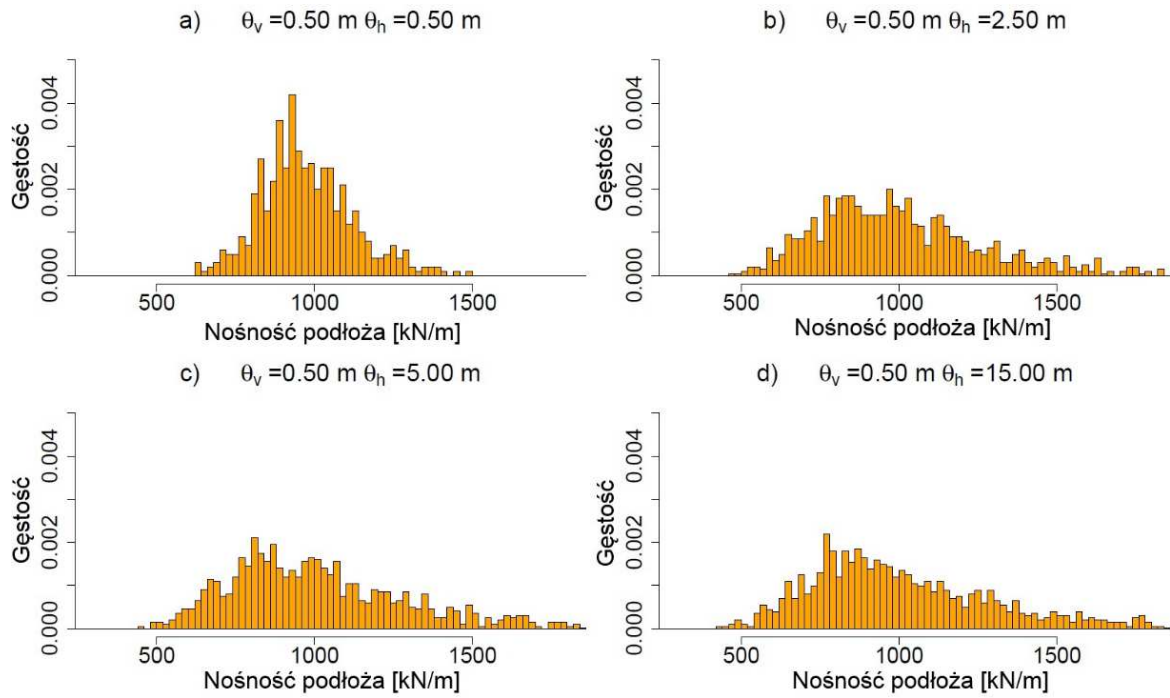
Rysunek J.56. Histogramy nośności podłoża: 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 1.0$  m, pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50$  m (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



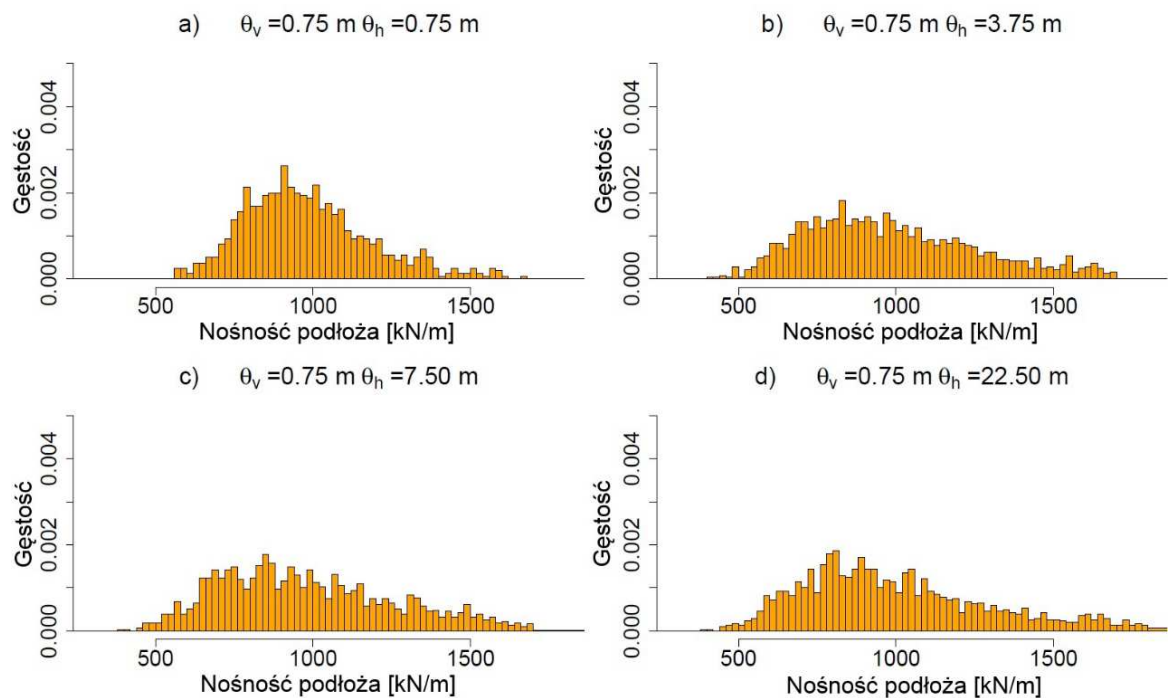
Rysunek J.57. Histogramy nośności podłoża: 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.58. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia, grunt spisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.25 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.59. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia, grunt spoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.50 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).



Rysunek J.60. Histogramy nośności podłoża: stała macierz kowariancji, 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia, grunt spoisty,  $b = 1.0 \text{ m}$ , pionowa skala fluktuacji  $\theta_v = 0.75 \text{ m}$  (dla 4 wartości poziomej skali fluktuacji).

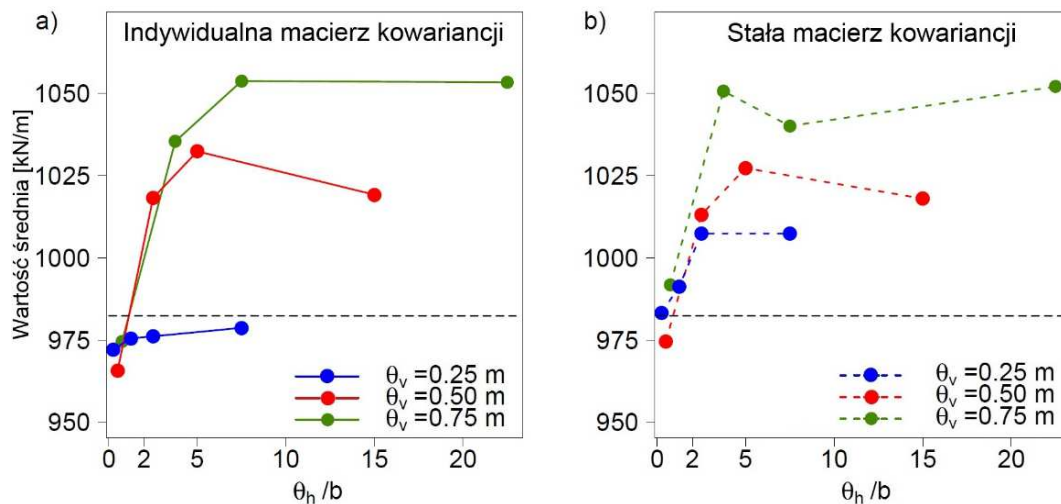


Tabela J.9. Charakterystyki probabilistyczne otrzymanych rozkładów nośności podłoża: 5-blokowy trójwymiarowy mechanizm zniszczenia, szerokość fundamentu  $b = 1.0$  m, podłoże spoiste.

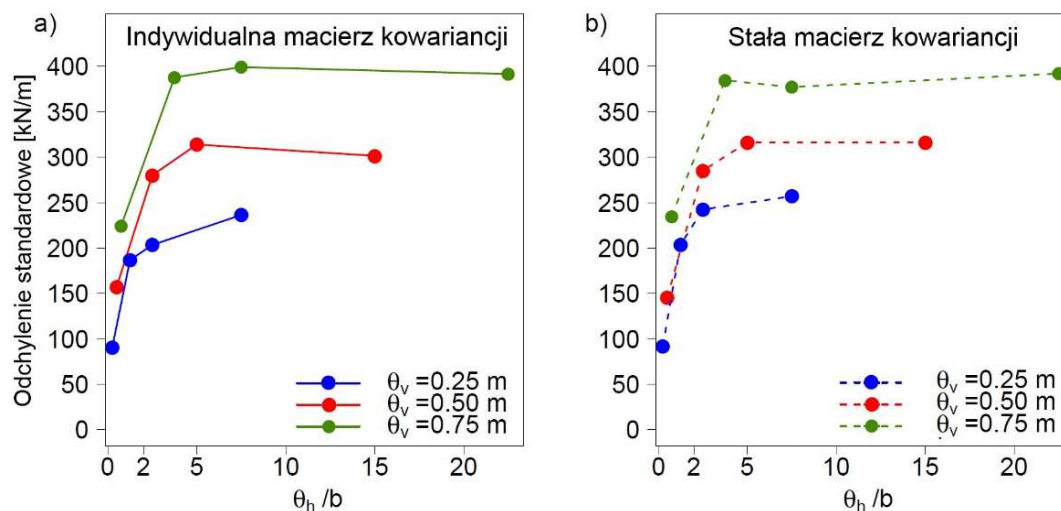
Mechanizm 3-D indywidualna macierz kowariancji								
Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m								
Podłoże spoiste (tab. 8.1)								
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	972.1	90.563	0.0932	964.3	722.9	1355.1	rys. J.55a
	1.25	975.5	186.785	0.191	948.9	542.5	1988.9	rys. J.55b
	2.50	976.1	203.393	0.208	952.1	549.6	1692.9	rys. J.55c
	7.50	978.7	236.432	0.242	945.0	422.6	2123.1	rys. J.55d
0.5	0.50	965.7	157.279	0.163	955.1	545.0	1764.0	rys. J.56a
	2.50	1018.2	280.072	0.275	980.9	435.1	2494.2	rys. J.56b
	5.00	1032.4	313.959	0.304	976.8	434.6	2790.7	rys. J.56c
	15.0	1019.2	301.540	0.296	968.0	386.4	2335.0	rys. J.56d
0.75	0.75	974.6	224.392	0.230	949.4	481.2	2921.1	rys. J.57a
	3.75	1035.4	387.915	0.375	953.7	414.6	4233.1	rys. J.57b
	7.50	1053.8	399.238	0.379	975.2	383.7	4336.8	rys. J.57c
	22.5	1053.4	391.6	0.372	977.2	353.0	3984.7	rys. J.57d

Tab. J.9. Charakterystyki probabilistyczne nośności podłoża dla trójwymiarowego mechanizmu 5-blokowego dla stałej macierzy kowariancji,  $b = 1.0$  m.

Mechanizm 3-D stała macierz kowariancji								
Szerokość fundamentu $b = 1.0$ m								
Podłoże spoiste (tab. 8.1)								
$\theta_v$ [m]	$\theta_h$ [m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wsp. zmienności [-]	Mediana [kN/m]	Wartość min. [kN/m]	Wartość max. [kN/m]	Histogram
0.25	0.25	983.3	91.972	0.0935	972.4	724.8	1277.2	rys. J.58a
	1.25	991.2	203.662	0.205	969.3	500.8	1843.2	rys. J.58b
	2.50	1007.4	242.447	0.241	970.1	500.8	2019.9	rys. J.58c
	7.50	1007.4	257.072	0.255	967.7	467.0	2512.1	rys. J.58d
0.5	0.50	974.6	145.233	0.149	955.3	626.4	1494.1	rys. J.59a
	2.50	1013.1	285.189	0.282	969.6	467.5	2638.3	rys. J.59b
	5.00	1027.3	316.309	0.308	972.5	447.5	2845.3	rys. J.59c
	15.0	1018.0	316.377	0.311	950.3	434.3	3046.9	rys. J.59d
0.75	0.75	991.8	234.941	0.237	957.3	565.8	3724.4	rys. J.60a
	3.75	1050.7	384.689	0.366	970.5	404.1	3926.0	rys. J.60b
	7.50	1040.1	377.239	0.363	962.3	396.5	4612.3	rys. J.60c
	22.5	1052.1	392.104	0.373	959.8	391.1	3666.3	rys. J.60d



Rysunek J.61. Wartości średnie nośności podłoża przy założeniu trójwymiarowego 5-blokowego mechanizmu zniszczenia, szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m oraz podłoża spoiowego, a) indywidualna macierz kowariancji – zgodnie z metodyką opisaną w rozdziale 5, b) stała macierz kowariancji.



Rysunek J.62. Odchylenia standardowe nośności podłoża przy założeniu trójwymiarowego 5-blokowego mechanizmu zniszczenia, szerokości fundamentu  $b = 1.0$  m oraz podłoża spoiowego, a) indywidualna macierz kowariancji – zgodnie z metodyką opisaną w rozdziale 5, b) stała macierz kowariancji.

## Załącznik K

Poniżej podano kod procedury, która dotyczy 6-blokowego symetrycznego mechanizmu zniszczenia. Procedura została zapisana zgodnie z metodyką opisaną w rozdziale 5 oraz przy zastosowaniu wyrażeń wyprowadzonych w rozdziale 6. W niniejszym załączniku nie podano kodu procedury dotyczącego trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia, ponieważ jego objętość jest kilkukrotnie większa. W nawiasach (\* \*) zawarto komentarze, które w celu zwiększenia przejrzystości zostały pogrubione. Z uwagi na specyfikę zapisu kodu w środowisku Mathematica, w większości przypadków zastosowano inne oznaczenia niż w tekście rozprawy (dla najważniejszych z nich w poniższych komentarzach podano nazwę stosowaną w tekście rozprawy).

```
(*      Przypadek dwuwymiarowy - płaski stan odkształcenia      *)
(*      Mechanizm symetryczny 6-blokowy                          *)
(*       $\varphi$  i  $c$  opisane za pomocą pól losowych (zgodnie z tabelą 8.1) *)
(*      ciężar objętościowy                                       *)
(*****
***)
str=OpenWrite["sym_fi20_c20_075_2250.txt"]
str2=OpenWrite["sym_fi20_c20_075_2250_geometria.txt"]
SeedRandom[4672]
(* Procedura do wyznaczenia sąsiadującej geometrii zniszczenia w
ramach metody wyżarzania (rozdział 6.3.2) *)
sasiad[b1_,b2_,b3_,b4_,b5_,b6_,d2_,d3_,d4_,d5_,d6_] :=Module[{b01=b1,b0
2=b2,b03=b3,b04=b4,b05=b5,b06=b6,dd2=d2,dd3=d3,dd4=d4,dd5=d5,dd6=d6,lo
sowa,
losowa2,varunek1,varunek2,zmienna1,zmienna2,c,wynik,b,aa,pomoc,e,d},
  zmienna1=1;
  zmienna2=1;
  pomoc=0;
  b={b01,b02,b03,b04,b05,b06};
  aa={0,0,0,0,0,0}; (* Tablica wartości mniejszych niż 1.5 *)
  For[i=1,i<=6,i++,If[b[[i]]<=3.5,aa[[i]]=i]];
  While[zmienna1==zmienna2,
    varunek1=RandomChoice[{1,2,3,4,5,6}];
```

```

zmienna1=warunek1;

While[(pomoc==aa[[1]]) || (pomoc==aa[[2]]) || (pomoc==aa[[3]]) || (pomoc==aa
[[4]]) || (pomoc==aa[[5]]) || (pomoc==aa[[6]]) ,
  pomoc=RandomChoice[{1,2,3,4,5,6}];
  zmienna2=pomoc;
]
];

c=RandomReal[{0,0.05}];
b[[zmienna1]]=b[[zmienna1]]+c;
b[[zmienna2]]=b[[zmienna2]]-c;

d={dd2,dd3,dd4,dd5,dd6};
If[d[[1]]≥0.3,If[RandomReal[]≥0.5,d[[1]]=d[[1]]+RandomReal[{-
0.01,0.01}]],If[RandomReal[]≥0.5,d[[1]]=d[[1]]+RandomReal[{0,0.01}]]];
If[d[[2]]≥0.4,If[RandomReal[]≥0.5,d[[2]]=d[[2]]+RandomReal[{-
0.01,0.01}]],If[RandomReal[]≥0.5,d[[2]]=d[[2]]+RandomReal[{0,0.01}]]];
If[d[[3]]≥0.5,If[RandomReal[]≥0.5,d[[3]]=d[[3]]+RandomReal[{-
0.01,0.01}]],If[RandomReal[]≥0.5,d[[3]]=d[[3]]+RandomReal[{0,0.01}]]];
If[d[[4]]≥0.6,If[RandomReal[]≥0.5,d[[4]]=d[[4]]+RandomReal[{-
0.01,0.01}]],If[RandomReal[]≥0.5,d[[4]]=d[[4]]+RandomReal[{0,0.01}]]];
If[d[[5]]≥0.6,If[RandomReal[]≥0.5,d[[5]]=d[[5]]+RandomReal[{-
0.01,0.01}]],If[RandomReal[]≥0.5,d[[5]]=d[[5]]+RandomReal[{0,0.01}]]];

wynik={b[[1]],b[[2]],b[[3]],b[[4]],b[[5]],b[[6]],d[[1]],d[[2]],d[[3]],
d[[4]],d[[5]]}
];
(*Charakterystyki probabilistyczne lognormalnego rozkładu
prawdopodobieństwa opisującego kąt tarcia wewnętrznego*)
mfiX=20 ; (*Wartość oczekiwana/ stopnie (tabela 8.1)*)
sfiX=3; (*Odchylenie standardowe/ stopnie (tabela 8.1)*)
(*Charakterystyki probabilistyczne lognormalnego rozkładu
prawdopodobieństwa opisującego spójność gruntu *)
mfiXc=20; (*Wartość oczekiwana/ kPa (tabela 8.1)*)
sfiXc=4 ; (*Odchylenie standardowe/ kPa (tabela 8.1)*)
(*Podstawowy normalny rozkład prawdopodobieństwa dla kąta tarcia
wewnętrznego*)
sfiY=Sqrt[Log[1+sfiX^2/mfiX^2]];
mfiY=Log[mfiX]-0.5*sfiY^2;
(*Podstawowy normalny rozkład prawdopodobieństwa dla spójność gruntu*)
sfiYc=Sqrt[Log[1+sfiXc^2/mfiXc^2]];
mfiYc=Log[mfiXc]-0.5*sfiYc^2;

licznikFalse=0; (*Parametr pomocniczy zliczający błędne macierze
kowariancji*)
(*Początek symulacji Monte Carlo, liczba r oznacza liczbę symulacji
dla danego zagadnienia - w rozprawie oznaczano przez N*)
For[r=1,r≤1000,r++,
  (*Dane wejściowe*)
  gamma=RandomVariate[NormalDistribution[18.2,1.092]];
  b=1.0; (*szerokość fundamentu*)
  q=14.4; (*0.8*18 *)
  (*Stochastycznie niezależne wartości kąta tarcia wewnętrznego
wygenerowane z podstawowego rozkładu normalnego - każda wartość
odpowiada określonej linii poślizgu - krok 3 w algorytmie
przedstawiony w rozdziale 6.3.4*)

vectorY={RandomVariate[NormalDistribution[mfiY,sfiY]],RandomVariate[No

```

```

rma1Distribution[mfiY, sfiY]], RandomVariate[NormalDistribution[mfiY, sfiY]],
RandomVariate[NormalDistribution[mfiY, sfiY]], RandomVariate[NormalD
istribution[mfiY, sfiY]], RandomVariate[NormalDistribution[mfiY, sfiY]], R
andomVariate[NormalDistribution[mfiY, sfiY]], RandomVariate[NormalDistri
bution[mfiY, sfiY]], RandomVariate[NormalDistribution[mfiY, sfiY]], Random
Variate[NormalDistribution[mfiY, sfiY]]};

```

**(\* Stochastycznie niezależne wartości spójności podłoża wygenerowane z podstawowego rozkładu normalnego – każda wartość odpowiada określonej linii poślizgu \*)**

```

vectorYc={RandomVariate[NormalDistribution[mfiYc, sfiYc]], RandomVariate
[NormalDistribution[mfiYc, sfiYc]], RandomVariate[NormalDistribution[mfi
Yc, sfiYc]], RandomVariate[NormalDistribution[mfiYc, sfiYc]], RandomVariat
e[NormalDistribution[mfiYc, sfiYc]], RandomVariate[NormalDistribution[mf
iYc, sfiYc]], RandomVariate[NormalDistribution[mfiYc, sfiYc]], RandomVaria
te[NormalDistribution[mfiYc, sfiYc]], RandomVariate[NormalDistribution[m
fiYc, sfiYc]], RandomVariate[NormalDistribution[mfiYc, sfiYc]]};

```

**(\* Na podstawie wektorów vectorY i vector Yc wyznacza się optymalną geometrię zniszczenia – na podstawie procedury optymalizacyjnej opartej na metodzie wyżarzania\*)**

**(\*Parametry kontrolujące proces symulacyjny\*)**

```

temp=1;
alpha=0.5;
tempMIN=0.00000001;

```

**(\*Wyznaczenie nośności podłoża dla początkowej geometrii zniszczenia\*)**

```

b01=60;
b02=20;
b03=20;
b04=20;
b05=20;
b06=40;

```

```

d2=1.1;
d3=1.2;
d4=1.5;
d5=1.7;
d6=1.8;

```

**(\*Parametry zadania\*)**

```

b=1.0;

```

**(\*Kąty tarcia wewnętrznego przeliczone do rozkładu lognormalnego\*)**

```

fi1=Exp[vectorY[[1]]]*Pi/180;
fi2=Exp[vectorY[[2]]]*Pi/180;
fi3=Exp[vectorY[[3]]]*Pi/180;
fi4=Exp[vectorY[[4]]]*Pi/180;
fi5=Exp[vectorY[[5]]]*Pi/180;
fi6=Exp[vectorY[[6]]]*Pi/180;
fi7=Exp[vectorY[[7]]]*Pi/180;
fi8=Exp[vectorY[[8]]]*Pi/180;
fi9=Exp[vectorY[[9]]]*Pi/180;
fi10=Exp[vectorY[[10]]]*Pi/180;

```

**(\*Spójności przeliczone do rozkładu lognormalnego\*)**

```

c1=Exp[vectorYc[[1]]];
c2=Exp[vectorYc[[2]]];
c3=Exp[vectorYc[[3]]];
c4=Exp[vectorYc[[4]]];
c5=Exp[vectorYc[[5]]];
c6=Exp[vectorYc[[6]]];
c7=Exp[vectorYc[[7]]];
c8=Exp[vectorYc[[8]]];
c9=Exp[vectorYc[[9]]];

```

```
c10=Exp[vectorYc[[10]]];
```

**(\*Obliczenia nośności podłoża\*)**

```
b1=b01*Pi/180;  
b2=b02*Pi/180;  
b3=b03*Pi/180;  
b4=b04*Pi/180;  
b5=b05*Pi/180;  
b6=b06*Pi/180;
```

```
xP1=b/2;  
yP1=-b/2*Tan[b1];
```

**(\*Wyznaczenie współrzędnych punktów\*)**

```
If[Pi-b1-b2==Pi/2,  
  xP2=0;  
  yP2=-d2,  
  aP2=Tan[Pi-b1-b2];  
  If[aP2<0,xP2=d2/Sqrt[1+(aP2)^2],xP2=-d2/Sqrt[1+(aP2)^2]];  
  yP2=aP2*xP2;  
  ];
```

```
If[Pi-b1-b2-b3==Pi/2,  
  
  xP3=0;  
  yP3=-d3,  
  aP3=Tan[Pi-b1-b2-b3];  
  If[aP3<0,xP3=d3/Sqrt[1+(aP3)^2],xP3=-d3/Sqrt[1+(aP3)^2]];  
  yP3=aP3*xP3;  
  ];
```

```
If[Pi-b1-b2-b3-b4==Pi/2,  
  
  xP4=0;  
  yP4=-d4,  
  aP4=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4];  
  If[aP4<0,xP4=d4/Sqrt[1+(aP4)^2],xP4=-d4/Sqrt[1+(aP4)^2]];  
  yP4=aP4*xP4;  
  ];
```

```
If[Pi-b1-b2-b3-b4-b5==Pi/2,  
  
  xP5=0;  
  yP5=-d5,  
  aP5=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4-b5];  
  If[aP5<0,xP5=d5/Sqrt[1+(aP5)^2],xP5=-d5/Sqrt[1+(aP5)^2]];  
  yP5=aP5*xP5;  
  ];
```

```
xP6=-d6;  
yP6=0;
```

**(\*Kąty w hodografie prędkości\*)**

```
k1=VectorAngle[{0,-1},{-(xP2-xP1),-(yP2-yP1)}];  
k2=VectorAngle[{0,-1},{-(xP3-xP2),-(yP3-yP2)}];  
k3=VectorAngle[{0,-1},{-(xP4-xP3),-(yP4-yP3)}];  
k4=VectorAngle[{0,-1},{-(xP5-xP4),-(yP5-yP4)}];  
k5=VectorAngle[{0,-1},{-(xP6-xP5),-(yP6-yP5)}];
```

```
k12={VectorAngle[{0,-1},{0-xP1,0-yP1}]}-fi1,
```

```
If[k2>k1, If[xP2>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-xP2, 0-yP2}]+fi2, 2*Pi-
VectorAngle[{0, -1}, {0-xP2, 0-yP2}]+fi2], If[xP2>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-
xP2, 0-yP2}]-fi2, 2*Pi-VectorAngle[{0, -1}, {0-xP2, 0-yP2}]-fi2]],
```

```
If[k3>k2, If[xP3>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-xP3, 0-yP3}]+fi3, 2*Pi-
VectorAngle[{0, -1}, {0-xP3, 0-yP3}]+fi3], If[xP3>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-
xP3, 0-yP3}]-fi3, 2*Pi-VectorAngle[{0, -1}, {0-xP3, 0-yP3}]-fi3]],
```

```
If[k4>k3, If[xP4>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-xP4, 0-yP4}]+fi4, 2*Pi-
VectorAngle[{0, -1}, {0-xP4, 0-yP4}]+fi4], If[xP4>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-
xP4, 0-yP4}]-fi4, 2*Pi-VectorAngle[{0, -1}, {0-xP4, 0-yP4}]-fi4]],
```

```
If[k5>k4, If[xP5>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-xP5, 0-yP5}]+fi5, 2*Pi-
VectorAngle[{0, -1}, {0-xP5, 0-yP5}]+fi5], If[xP5>0, VectorAngle[{0, -1}, {0-
xP5, 0-yP5}]-fi5, 2*Pi-VectorAngle[{0, -1}, {0-xP5, 0-yP5}]-fi5]]
```

```
};
```

```
k01={VectorAngle[{0, -1}, {xP2-xP1, yP2-yP1}]+fi6,
VectorAngle[{0, -1}, {xP3-xP2, yP3-yP2}]+fi7,
VectorAngle[{0, -1}, {xP4-xP3, yP4-yP3}]+fi8,
VectorAngle[{0, -1}, {xP5-xP4, yP5-yP4}]+fi9,
VectorAngle[{0, -1}, {xP6-xP5, yP6-yP5}]+fi10
};
```

**(\*Współczynniki kierunkowe\*)**

```
wk12={Tan[Pi/2-k12[[1]]],
Tan[Pi/2-k12[[2]]],
Tan[Pi/2-k12[[3]]],
Tan[Pi/2-k12[[4]]],
Tan[Pi/2-k12[[5]]]
};
```

```
wk01={Tan[Pi/2-k01[[1]]],
Tan[Pi/2-k01[[2]]],
Tan[Pi/2-k01[[3]]],
Tan[Pi/2-k01[[4]]],
Tan[Pi/2-k01[[5]]]
};
```

**(\*Współrzędne punktów charakterystycznych w hodografie prędkości\*)**

```
oP1={1/(wk12[[1]]-wk01[[1]]), wk01[[1]]/(wk12[[1]]-wk01[[1]])};
oP2={ (oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]]), wk01[[2]]*(oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]])};
oP3={ (oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]]), wk01[[3]]*(oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]])};
oP4={ (oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]]), wk01[[4]]*(oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]])};
oP5={ (oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]]), wk01[[5]]*(oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]])};
```

**(\*Wektory prędkości\*)**

```
v01={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]])^2], Sqrt[(oP2[[1]])^2+(oP2[[2]])^2], S
qrt[(oP3[[1]])^2+(oP3[[2]])^2], Sqrt[(oP4[[1]])^2+(oP4[[2]])^2], Sqrt[(o
P5[[1]])^2+(oP5[[2]])^2]};
v12={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]]+1)^2], (*współBrzedne punktu
począ05tkowego (0, -1)*)
Sqrt[(oP2[[1]]-oP1[[1]])^2+(oP2[[2]]-oP1[[2]])^2],
Sqrt[(oP3[[1]]-oP2[[1]])^2+(oP3[[2]]-oP2[[2]])^2],
Sqrt[(oP4[[1]]-oP3[[1]])^2+(oP4[[2]]-oP3[[2]])^2],
```

```

    Sqrt [(oP5[[1]]-oP4[[1]])^2+(oP5[[2]]-oP4[[2]])^2]
};

l12=Sqrt [xP1^2+yP1^2];
l23=Sqrt [xP2^2+yP2^2];
l34=Sqrt [xP3^2+yP3^2];
l45=Sqrt [xP4^2+yP4^2];
l56=Sqrt [xP5^2+yP5^2];

l20=Sqrt [(xP2-xP1)^2+(yP2-yP1)^2];
l30=Sqrt [(xP3-xP2)^2+(yP3-yP2)^2];
l40=Sqrt [(xP4-xP3)^2+(yP4-yP3)^2];
l50=Sqrt [(xP5-xP4)^2+(yP5-yP4)^2];
l60=Sqrt [(xP6-xP5)^2+(yP6-yP5)^2];
(*Wartości dyssypacji na poszczególnych liniach poślizgu*)
d12=l12*c1*Cos [fi1]*v12[[1]];
d23=l23*c2*Cos [fi2]*v12[[2]];
d34=l34*c3*Cos [fi3]*v12[[3]];
d45=l45*c4*Cos [fi4]*v12[[4]];
d56=l56*c5*Cos [fi5]*v12[[5]];

d02=l20*c6*Cos [fi6]*v01[[1]];
d03=l30*c7*Cos [fi7]*v01[[2]];
d04=l40*c8*Cos [fi8]*v01[[3]];
d05=l50*c9*Cos [fi9]*v01[[4]];
d06=l60*c10*Cos [fi10]*v01[[5]];

(*Wpływ ciężaru objętościowego*)
(*Pola bloków*)
t1=0.5*Abs [yP1*b];
t2=0.5*Abs [xP2*yP1-yP2*xP1];
t3=0.5*Abs [xP3*yP2-yP3*xP2];
t4=0.5*Abs [xP4*yP3-yP4*xP3];
t5=0.5*Abs [xP5*yP4-yP5*xP4];
t6=0.5*Abs [xP6*yP5-yP6*xP5];

g1=-1.0*t1;
g2=oP1[[2]]*t2;
g3=oP2[[2]]*t3;
g4=oP3[[2]]*t4;
g5=oP4[[2]]*t5;
g6=oP5[[2]]*t6;

(*Nośność podłoża dla początkowej geometrii zniszczenia w metodzie wyżarzania*)
pkM=2*(d12+d23+d34+d45+d56+d02+d03+d04+d05+d06)+2*Abs [xP6]*oP5[[2]]*g+(g1+2*(g2+g3+g4+g5+g6))*gamma;

(*Oznaczenie wartości pkM jako wartość optymalna i odpowiadającej jej geometrii zniszczenia jako optymalnej geometrii zniszczenia*)
opt=pkM;
optB={b01,b02,b03,b04,b05,b06,d2,d3,d4,d5,d6};

(*Rozpoczęcie właściwej części metody wyżarzania*)
(*Pętla 1 z kroku IV z rozdziału 6.3.2*)
While [temp>tempMIN,
    z=1;
    While [z<=1200, (*Pętla 2 z kroku V z rozdziału 6.3.2*)
        (*
(*Wyznaczenie sąsiadującej geometrii zniszczenia do optymalnej*)

```



```
noweoptB=sasiad[optB[[1]],optB[[2]],optB[[3]],optB[[4]],optB[[5]],optB
[[6]],optB[[7]],optB[[8]],optB[[9]],optB[[10]],optB[[11]]];
```

**(\*Wyznaczenie nośności dla nowej geometrii zniszczenia\*)**

```
b1=noweoptB[[1]]*Pi/180;
b2=noweoptB[[2]]*Pi/180;
b3=noweoptB[[3]]*Pi/180;
b4=noweoptB[[4]]*Pi/180;
b5=noweoptB[[5]]*Pi/180;
b6=noweoptB[[6]]*Pi/180;
d2=noweoptB[[7]];
d3=noweoptB[[8]];
d4=noweoptB[[9]];
d5=noweoptB[[10]];
d6=noweoptB[[11]];

xP1=b/2;
yP1=-b/2*Tan[b1];

If[Pi-b1-b2==Pi/2,
  xP2=0;
  yP2=-d2,
  aP2=Tan[Pi-b1-b2];
  If[aP2<0,xP2=d2/Sqrt[1+(aP2)^2],xP2=-d2/Sqrt[1+(aP2)^2]];
  yP2=aP2*xP2;
  ];

If[Pi-b1-b2-b3==Pi/2,

  xP3=0;
  yP3=-d3,
  aP3=Tan[Pi-b1-b2-b3];
  If[aP3<0,xP3=d3/Sqrt[1+(aP3)^2],xP3=-d3/Sqrt[1+(aP3)^2]];
  yP3=aP3*xP3;
  ];

If[Pi-b1-b2-b3-b4==Pi/2,

  xP4=0;
  yP4=-d4,
  aP4=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4];
  If[aP4<0,xP4=d4/Sqrt[1+(aP4)^2],xP4=-d4/Sqrt[1+(aP4)^2]];
  yP4=aP4*xP4;
  ];

If[Pi-b1-b2-b3-b4-b5==Pi/2,

  xP5=0;
  yP5=-d5,
  aP5=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4-b5];
  If[aP5<0,xP5=d5/Sqrt[1+(aP5)^2],xP5=-d5/Sqrt[1+(aP5)^2]];
  yP5=aP5*xP5;
  ];

xP6=-d6;
yP6=0;

k1=VectorAngle[{0,-1},{-(xP2-xP1),-(yP2-yP1)}];
k2=VectorAngle[{0,-1},{-(xP3-xP2),-(yP3-yP2)}];
k3=VectorAngle[{0,-1},{-(xP4-xP3),-(yP4-yP3)}];
k4=VectorAngle[{0,-1},{-(xP5-xP4),-(yP5-yP4)}];
```

```

k5=VectorAngle[{0,-1},{-(xP6-xP5),-(yP6-yP5)}];

k12={VectorAngle[{0,-1},{0-xP1,0-yP1}]-fi1,

If[k2>k1,If[xP2>0,VectorAngle[{0,-1},{0-xP2,0-yP2}]+fi2,2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP2,0-yP2}]+fi2],If[xP2>0,VectorAngle[{0,-1},{0-
xP2,0-yP2}]-fi2,2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP2,0-yP2}]-fi2]],

If[k3>k2,If[xP3>0,VectorAngle[{0,-1},{0-xP3,0-yP3}]+fi3,2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP3,0-yP3}]+fi3],If[xP3>0,VectorAngle[{0,-1},{0-
xP3,0-yP3}]-fi3,2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP3,0-yP3}]-fi3]],

If[k4>k3,If[xP4>0,VectorAngle[{0,-1},{0-xP4,0-yP4}]+fi4,2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP4,0-yP4}]+fi4],If[xP4>0,VectorAngle[{0,-1},{0-
xP4,0-yP4}]-fi4,2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP4,0-yP4}]-fi4]],

If[k5>k4,If[xP5>0,VectorAngle[{0,-1},{0-xP5,0-yP5}]+fi5,2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP5,0-yP5}]+fi5],If[xP5>0,VectorAngle[{0,-1},{0-
xP5,0-yP5}]-fi5,2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP5,0-yP5}]-fi5]]
};

k01={VectorAngle[{0,-1},{xP2-xP1,yP2-yP1}]+fi6,
VectorAngle[{0,-1},{xP3-xP2,yP3-yP2}]+fi7,
VectorAngle[{0,-1},{xP4-xP3,yP4-yP3}]+fi8,
VectorAngle[{0,-1},{xP5-xP4,yP5-yP4}]+fi9,
VectorAngle[{0,-1},{xP6-xP5,yP6-yP5}]+fi10
};

wk12={Tan[Pi/2-k12[[1]]],
Tan[Pi/2-k12[[2]]],
Tan[Pi/2-k12[[3]]],
Tan[Pi/2-k12[[4]]],
Tan[Pi/2-k12[[5]]]
};

wk01={Tan[Pi/2-k01[[1]]],
Tan[Pi/2-k01[[2]]],
Tan[Pi/2-k01[[3]]],
Tan[Pi/2-k01[[4]]],
Tan[Pi/2-k01[[5]]]
};

oP1={1/(wk12[[1]]-wk01[[1]]),wk01[[1]]/(wk12[[1]]-wk01[[1]])};
oP2={ (oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]]),wk01[[2]]*(oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]])};
oP3={ (oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]]),wk01[[3]]*(oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]])};
oP4={ (oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]]),wk01[[4]]*(oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]])};
oP5={ (oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]]),wk01[[5]]*(oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]])};

v01={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]])^2],Sqrt[(oP2[[1]])^2+(oP2[[2]])^2],S
qrt[(oP3[[1]])^2+(oP3[[2]])^2],Sqrt[(oP4[[1]])^2+(oP4[[2]])^2],Sqrt[(o
P5[[1]])^2+(oP5[[2]])^2]};
v12={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]]+1)^2],
Sqrt[(oP2[[1]]-oP1[[1]])^2+(oP2[[2]]-oP1[[2]])^2],

```

```

Sqrt [(oP3[[1]]-oP2[[1]])^2+(oP3[[2]]-oP2[[2]])^2],
Sqrt [(oP4[[1]]-oP3[[1]])^2+(oP4[[2]]-oP3[[2]])^2],
Sqrt [(oP5[[1]]-oP4[[1]])^2+(oP5[[2]]-oP4[[2]])^2]
};

l12=Sqrt [xP1^2+yP1^2];
l23=Sqrt [xP2^2+yP2^2];
l34=Sqrt [xP3^2+yP3^2];
l45=Sqrt [xP4^2+yP4^2];
l56=Sqrt [xP5^2+yP5^2];

l20=Sqrt [(xP2-xP1)^2+(yP2-yP1)^2];
l30=Sqrt [(xP3-xP2)^2+(yP3-yP2)^2];
l40=Sqrt [(xP4-xP3)^2+(yP4-yP3)^2];
l50=Sqrt [(xP5-xP4)^2+(yP5-yP4)^2];
l60=Sqrt [(xP6-xP5)^2+(yP6-yP5)^2];

d12=l12*c1*Cos[fi1]*v12[[1]];
d23=l23*c2*Cos[fi2]*v12[[2]];
d34=l34*c3*Cos[fi3]*v12[[3]];
d45=l45*c4*Cos[fi4]*v12[[4]];
d56=l56*c5*Cos[fi5]*v12[[5]];

d02=l20*c6*Cos[fi6]*v01[[1]];
d03=l30*c7*Cos[fi7]*v01[[2]];
d04=l40*c8*Cos[fi8]*v01[[3]];
d05=l50*c9*Cos[fi9]*v01[[4]];
d06=l60*c10*Cos[fi10]*v01[[5]];

t1=0.5*Abs[yP1*b];
t2=0.5*Abs[xP2*yP1-yP2*xP1];
t3=0.5*Abs[xP3*yP2-yP3*xP2];
t4=0.5*Abs[xP4*yP3-yP4*xP3];
t5=0.5*Abs[xP5*yP4-yP5*xP4];
t6=0.5*Abs[xP6*yP5-yP6*xP5];
g1=-1.0*t1;
g2=oP1[[2]]*t2;
g3=oP2[[2]]*t3;
g4=oP3[[2]]*t4;
g5=oP4[[2]]*t5;
g6=oP5[[2]]*t6;

(*Obliczenie nośności podłoża*)
If[oP5[[2]]≤0,pkM=10000,pkM=2*(d12+d23+d34+d45+d56+d02+d03+d04+d05+d06
)+2*Abs[xP6]*oP5[[2]]*qt+(g1+2*(g2+g3+g4+g5+g6))*gamma];

(*Wyłuskanie optymalnej geometrii zniszczenia podczas procesu
symulacyjnego*)

If[pkM<opt,opt=pkM;
optB={noweoptB[[1]],noweoptB[[2]],noweoptB[[3]],noweoptB[[4]],noweoptB
[[5]],noweoptB[[6]],noweoptB[[7]],noweoptB[[8]],noweoptB[[9]],noweoptB
[[10]],noweoptB[[11]]}];

If[(opt-pkM)/(temp)≥-5*10^8,pa=Exp[(opt-pkM)/(temp)],pa=Exp[-
5*10^8]];
(*Prawdopodobieństwo akceptacji wyższej od optymalnej nośności podłoża
- krok VIII z rozdziału 6.3.2*)
If[pa≥RandomReal[],

```

```
optB={noweoptB[[1]],noweoptB[[2]],noweoptB[[3]],noweoptB[[4]],noweoptB
[[5]],noweoptB[[6]],noweoptB[[7]],noweoptB[[8]],noweoptB[[9]],noweoptB
[[10]],noweoptB[[11]]};
    opt=pkM
    ]
    z++]; (*Koniec pętli 2*)

temp=temp*alpha
]; (*Koniec pętli 1*)
```

**(\*Dla optymalnej geometrii optB wyznaczam macierz kowariancji\*)**

```
b01=optB[[1]];
b02=optB[[2]];
b03=optB[[3]];
b04=optB[[4]];
b05=optB[[5]];
b06=optB[[6]];
```

```
d2=optB[[7]];
d3=optB[[8]];
d4=optB[[9]];
d5=optB[[10]];
d6=optB[[11]];
```

**(\*Zamiana wartości kątów ze stopni na radiany\*)**

```
b1=b01*Pi/180;
b2=b02*Pi/180;
b3=b03*Pi/180;
b4=b04*Pi/180;
b5=b05*Pi/180;
b6=b06*Pi/180;
```

```
xP1=b/2;
yP1=-b/2*Tan[b1];
```

```
If[Pi-b1-b2==Pi/2,
  xP2=0;
  yP2=-d2,
  aP2=Tan[Pi-b1-b2];
  If[aP2<0, xP2=d2/Sqrt[1+(aP2)^2], xP2=-d2/Sqrt[1+(aP2)^2]];
  yP2=aP2*xP2;
];
```

```
If[Pi-b1-b2-b3==Pi/2,
  xP3=0;
  yP3=-d3,
  aP3=Tan[Pi-b1-b2-b3];
  If[aP3<0, xP3=d3/Sqrt[1+(aP3)^2], xP3=-d3/Sqrt[1+(aP3)^2]];
  yP3=aP3*xP3;
];
```

```
If[Pi-b1-b2-b3-b4==Pi/2,
  xP4=0;
  yP4=-d4,
  aP4=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4];
  If[aP4<0, xP4=d4/Sqrt[1+(aP4)^2], xP4=-d4/Sqrt[1+(aP4)^2]];
  yP4=aP4*xP4;
];
```

```
If[Pi-b1-b2-b3-b4-b5==Pi/2,
  xP5=0;
```

```

yP5=-d5,
aP5=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4-b5];
If[aP5<0,xP5=d5/Sqrt[1+(aP5)^2],xP5=-d5/Sqrt[1+(aP5)^2]];
yP5=aP5*xP5;
];

xP6=-d6;
yP6=0;

(*Macierz kowariancji*)
(*Parametry opisujące korelację pola losowego - równanie (6.2)*)
wv=0.423142187;(*odpowiada pionowej skali fluktuacji = 0,75m*)
wh=12.69426563;(*odpowiada poziomej skali fluktuacji = 22,5m*)
(*Wyrażenia na wariancje po uśrednieniu wzdłuż linii poślizgu*)
varAB=NIntegrate[Exp[-(xP1*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-(yP1*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varAC=NIntegrate[Exp[-(xP2*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-(yP2*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varAD=NIntegrate[Exp[-(xP3*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-(yP3*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varAE=NIntegrate[Exp[-(xP4*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-(yP4*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varAF=NIntegrate[Exp[-(xP5*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-(yP5*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

varBC=NIntegrate[Exp[-((xP2-xP1)*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-((yP2-yP1)*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varCD=NIntegrate[Exp[-((xP3-xP2)*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-((yP3-yP2)*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varDE=NIntegrate[Exp[-((xP4-xP3)*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-((yP4-yP3)*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varEF=NIntegrate[Exp[-((xP5-xP4)*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-((yP5-yP4)*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
varFG=NIntegrate[Exp[-((xP6-xP5)*(t1-t2)/wh)^2]*Exp[-((yP6-yP5)*(t1-
t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

(*Wyrażenia na kowariancje po uśrednieniu wzdłuż linii poślizgu -
rozdział 6.3.3*)
covABAC=NIntegrate[Exp[-((xP1*t1-xP2*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP1*t1-
yP2*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covABAD=NIntegrate[Exp[-((xP1*t1-xP3*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP1*t1-
yP3*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covABAE=NIntegrate[Exp[-((xP1*t1-xP4*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP1*t1-
yP4*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covABAF=NIntegrate[Exp[-((xP1*t1-xP5*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP1*t1-
yP5*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covACAD=NIntegrate[Exp[-((xP2*t1-xP3*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP2*t1-
yP3*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covACAE=NIntegrate[Exp[-((xP2*t1-xP4*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP2*t1-
yP4*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covACAF=NIntegrate[Exp[-((xP2*t1-xP5*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP2*t1-
yP5*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covADAE=NIntegrate[Exp[-((xP3*t1-xP4*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP3*t1-
yP4*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covADAF=NIntegrate[Exp[-((xP3*t1-xP5*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP3*t1-
yP5*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAEAF=NIntegrate[Exp[-((xP4*t1-xP5*t2)/wh)^2]*Exp[-((yP4*t1-
yP5*t2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

```

```

covBCCD=NIntegrate[Exp[-((xP2-xP1)*t1-(xP3-xP2)*t2+(xP1-xP2)/wh)^2]*Exp[-((yP2-yP1)*t1-(yP3-yP2)*t2+(yP1-yP2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covBCDE=NIntegrate[Exp[-((xP2-xP1)*t1-(xP4-xP3)*t2+(xP1-xP3)/wh)^2]*Exp[-((yP2-yP1)*t1-(yP4-yP3)*t2+(yP1-yP3)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covBCEF=NIntegrate[Exp[-((xP2-xP1)*t1-(xP5-xP4)*t2+(xP1-xP4)/wh)^2]*Exp[-((yP2-yP1)*t1-(yP5-yP4)*t2+(yP1-yP4)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covBCFG=NIntegrate[Exp[-((xP2-xP1)*t1-(xP6-xP5)*t2+(xP1-xP5)/wh)^2]*Exp[-((yP2-yP1)*t1-(yP6-yP5)*t2+(yP1-yP5)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covCDDE=NIntegrate[Exp[-((xP3-xP2)*t1-(xP4-xP3)*t2+(xP2-xP3)/wh)^2]*Exp[-((yP3-yP2)*t1-(yP4-yP3)*t2+(yP2-yP3)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covCDEF=NIntegrate[Exp[-((xP3-xP2)*t1-(xP5-xP4)*t2+(xP2-xP4)/wh)^2]*Exp[-((yP3-yP2)*t1-(yP5-yP4)*t2+(yP2-yP4)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covCDFG=NIntegrate[Exp[-((xP3-xP2)*t1-(xP6-xP5)*t2+(xP2-xP5)/wh)^2]*Exp[-((yP3-yP2)*t1-(yP6-yP5)*t2+(yP2-yP5)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covDEEF=NIntegrate[Exp[-((xP4-xP3)*t1-(xP5-xP4)*t2+(xP3-xP4)/wh)^2]*Exp[-((yP4-yP3)*t1-(yP5-yP4)*t2+(yP3-yP4)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covDEFG=NIntegrate[Exp[-((xP4-xP3)*t1-(xP6-xP5)*t2+(xP3-xP5)/wh)^2]*Exp[-((yP4-yP3)*t1-(yP6-yP5)*t2+(yP3-yP5)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covEFGF=NIntegrate[Exp[-((xP5-xP4)*t1-(xP6-xP5)*t2+(xP4-xP5)/wh)^2]*Exp[-((yP5-yP4)*t1-(yP6-yP5)*t2+(yP4-yP5)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

covABBC=NIntegrate[Exp[-((xP1)*t1-(xP2-xP1)*t2+(0-xP1)/wh)^2]*Exp[-((yP1)*t1-(yP2-yP1)*t2+(0-yP1)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covABCD=NIntegrate[Exp[-((xP1)*t1-(xP3-xP2)*t2+(0-xP2)/wh)^2]*Exp[-((yP1)*t1-(yP3-yP2)*t2+(0-yP2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covABDE=NIntegrate[Exp[-((xP1)*t1-(xP4-xP3)*t2+(0-xP3)/wh)^2]*Exp[-((yP1)*t1-(yP4-yP3)*t2+(0-yP3)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covABEF=NIntegrate[Exp[-((xP1)*t1-(xP5-xP4)*t2+(0-xP4)/wh)^2]*Exp[-((yP1)*t1-(yP5-yP4)*t2+(0-yP4)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covABFG=NIntegrate[Exp[-((xP1)*t1-(xP6-xP5)*t2+(0-xP5)/wh)^2]*Exp[-((yP1)*t1-(yP6-yP5)*t2+(0-yP5)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

covACBC=NIntegrate[Exp[-((xP2)*t1-(xP2-xP1)*t2+(0-xP1)/wh)^2]*Exp[-((yP2)*t1-(yP2-yP1)*t2+(0-yP1)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covACCD=NIntegrate[Exp[-((xP2)*t1-(xP3-xP2)*t2+(0-xP2)/wh)^2]*Exp[-((yP2)*t1-(yP3-yP2)*t2+(0-yP2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covACDE=NIntegrate[Exp[-((xP2)*t1-(xP4-xP3)*t2+(0-xP3)/wh)^2]*Exp[-((yP2)*t1-(yP4-yP3)*t2+(0-yP3)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covACEF=NIntegrate[Exp[-((xP2)*t1-(xP5-xP4)*t2+(0-xP4)/wh)^2]*Exp[-((yP2)*t1-(yP5-yP4)*t2+(0-yP4)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covACFG=NIntegrate[Exp[-((xP2)*t1-(xP6-xP5)*t2+(0-xP5)/wh)^2]*Exp[-((yP2)*t1-(yP6-yP5)*t2+(0-yP5)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

covADBC=NIntegrate[Exp[-((xP3)*t1-(xP2-xP1)*t2+(0-xP1)/wh)^2]*Exp[-((yP3)*t1-(yP2-yP1)*t2+(0-yP1)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covADCD=NIntegrate[Exp[-((xP3)*t1-(xP3-xP2)*t2+(0-xP2)/wh)^2]*Exp[-((yP3)*t1-(yP3-yP2)*t2+(0-yP2)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covADDE=NIntegrate[Exp[-((xP3)*t1-(xP4-xP3)*t2+(0-xP3)/wh)^2]*Exp[-((yP3)*t1-(yP4-yP3)*t2+(0-yP3)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covADEF=NIntegrate[Exp[-((xP3)*t1-(xP5-xP4)*t2+(0-xP4)/wh)^2]*Exp[-((yP3)*t1-(yP5-yP4)*t2+(0-yP4)/wv)^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

```

```

covADFG=NIntegrate[Exp[-((xP3)*t1-(xP6-xP5)*t2+(0-xP5))/wh]^2]*Exp[-
((yP3)*t1-(yP6-yP5)*t2+(0-yP5)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

covAEBC=NIntegrate[Exp[-((xP4)*t1-(xP2-xP1)*t2+(0-xP1))/wh]^2]*Exp[-
((yP4)*t1-(yP2-yP1)*t2+(0-yP1)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAECD=NIntegrate[Exp[-((xP4)*t1-(xP3-xP2)*t2+(0-xP2))/wh]^2]*Exp[-
((yP4)*t1-(yP3-yP2)*t2+(0-yP2)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAEDE=NIntegrate[Exp[-((xP4)*t1-(xP4-xP3)*t2+(0-xP3))/wh]^2]*Exp[-
((yP4)*t1-(yP4-yP3)*t2+(0-yP3)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAEFE=NIntegrate[Exp[-((xP4)*t1-(xP5-xP4)*t2+(0-xP4))/wh]^2]*Exp[-
((yP4)*t1-(yP5-yP4)*t2+(0-yP4)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAEFG=NIntegrate[Exp[-((xP4)*t1-(xP6-xP5)*t2+(0-xP5))/wh]^2]*Exp[-
((yP4)*t1-(yP6-yP5)*t2+(0-yP5)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];

covAFBC=NIntegrate[Exp[-((xP5)*t1-(xP2-xP1)*t2+(0-xP1))/wh]^2]*Exp[-
((yP5)*t1-(yP2-yP1)*t2+(0-yP1)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAFCD=NIntegrate[Exp[-((xP5)*t1-(xP3-xP2)*t2+(0-xP2))/wh]^2]*Exp[-
((yP5)*t1-(yP3-yP2)*t2+(0-yP2)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAFDE=NIntegrate[Exp[-((xP5)*t1-(xP4-xP3)*t2+(0-xP3))/wh]^2]*Exp[-
((yP5)*t1-(yP4-yP3)*t2+(0-yP3)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAFEF=NIntegrate[Exp[-((xP5)*t1-(xP5-xP4)*t2+(0-xP4))/wh]^2]*Exp[-
((yP5)*t1-(yP5-yP4)*t2+(0-yP4)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
covAFFG=NIntegrate[Exp[-((xP5)*t1-(xP6-xP5)*t2+(0-xP5))/wh]^2]*Exp[-
((yP5)*t1-(yP6-yP5)*t2+(0-yP5)/wv]^2],{t1,0,1},{t2,0,1}];
(*AB with opposit branch*)

```

**(\*Wyznaczenie wartości kąta tarcia wewnętrznego na liniach poślizgu na podstawie macierzy kowariancji - algorytm przedstawiony w rozdziale 6.5.4\*)**

```
final={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
```

**(\*Macierz kowariancji - lognormalna\*)**

```
covX=sfiX^2*
```

```

{{varAB,covABAC,covABAD,covABAE,covABAF,covABBC,covABCD,covABDE,covABE
F,covABFG},
{covABAC,varAC,covACAD,covACAE,covACAF,covACBC,covACCD,covACDE,covACEF
,covACFG},
{covABAD,covACAD,varAD,covADAE,covADAF,covADBC,covADCD,covADDE,covADEF
,covADFG},
{covABAE,covACAE,covADAE,varAE,covAEAF,covAEBC,covAECD,covAEDE,covAEFE
,covAEFG},
{covABAF,covACAF,covADAF,covAEAF,varAF,covAFBC,covAFCD,covAFDE,covAFEF
,covAFFG},
{covABBC,covACBC,covADBC,covAEBC,covAFBC,varBC,covBCCD,covBCDE,covBCEF
,covBCFG},
{covABCD,covACCD,covADCD,covAECD,covAFCD,covBCCD,varCD,covCDDE,covCDEF
,covCDFG},
{covABDE,covACDE,covADDE,covAEDE,covAFDE,covBCDE,covCDDE,varDE,covDEEF
,covDEFG},
{covABEF,covACEF,covADEF,covAEFE,covAFEF,covBCEF,covCDEF,covDEEF,varEF
,covEFFG},

{covABFG,covACFG,covADFG,covAEFG,covAFFG,covBCFG,covCDFG,covDEFG,covEF
FG,varFG}
};

```

**(\*Macierz korelacji - lognormalna\*)**

```
rX=Table[covX[[i,j]]/Sqrt[covX[[i,i]]*covX[[j,j]]],{i,1,10},{j,1,10}];
```

**(\*Macierz korelacji - normalna\*)**

```

rY=Table[Log[1+rX[[i,j]]*Sqrt[covX[[i,i]]*Sqrt[covX[[j,j]]]/mfiX^2]/S
qrt[Log[1+covX[[i,i]]/mfiX^2]*Log[1+covX[[j,j]]/mfiX^2]],{i,1,10},{j,1
,10}];
(*Macierz kowariancji - normalna*)
covY=Table[rY[[i,j]]*Sqrt[Log[1+covX[[i,i]]/mfiX^2]*Log[1+covX[[j,j]]/
mfiX^2]],{i,1,10},{j,1,10}];
(*****)
(*Sprawdzenie dodatniej określoności macierzy covY i ewentualna
modyfikacja, jeśli macierz nie jest dodatnio określona*)
podstawienie=Table[0,{i,1,10}];
wartosci=Eigenvalues[covY];
k=0;
kk=1;
Do[If[wartosci[[i]]<0,podstawienie[[kk]]=i;k=k+1;kk=kk+1,k=k},{i,10}];
(* Rozkład względem wartości osobliwych*)
{svd1,svd2,svd3}=SingularValueDecomposition[covY];
Do[svd2[[podstawienie[[i]],podstawienie[[i]]]]=-0.0000001,{i,k}];
wynik2=svd1.svd2.Transpose[svd3];
Do[Do[wynik2[[e,f]]=wynik2[[f,e]},{e,f-1}},{f,10}];
(*Macierz po modyfikacji*)
covY=wynik2;
(*****)
(*Rozkład Choleskiego*)
l=CholeskyDecomposition[covY];
If[Boole[MatrixQ[l,Im[#]==0&]]==0,licznikFalse=licznikFalse+1;
Print[i," ","Zła macierz ",licznikFalse];
Continue[],Print["Ok"]
];
ldolna=Transpose[l];
(*Standaryzacja wektora vectorY*)
vectorYstand=Table[(vectorY[[i]]-mfiY)/sfiY,{i,1,10}];
z=ldolna.vectorYstand;
p={z[[1]]+Log[mfiX]-0.5*Log[1+covX[[1,1]]/mfiX^2],z[[2]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[2,2]]/mfiX^2],z[[3]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[3,3]]/mfiX^2],z[[4]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[4,4]]/mfiX^2],z[[5]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[5,5]]/mfiX^2],z[[6]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[6,6]]/mfiX^2],z[[7]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[7,7]]/mfiX^2],z[[8]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[8,8]]/mfiX^2],z[[9]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[9,9]]/mfiX^2],z[[10]]+Log[mfiX]-
0.5*Log[1+covX[[10,10]]/mfiX^2]};
(*Wartości katów tarcia wewnętrznego skorelowane macierzą
kowariancji*)
final=Table[Exp[p[[i]]],{i,1,10}];

(*Wyznaczenie wartości spójności gruntu na liniach poślizgu na
podstawie macierzy kowariancji*)
covXc=sfiXc^2*
{{varAB,covABAC,covABAD,covABAE,covABAF,covABBC,covABCD,covABDE,covABE
F,covABFG},
{covABAC,varAC,covACAD,covACAE,covACAF,covACBC,covACCD,covACDE,covACEF
,covACFG},

{covABAD,covACAD,varAD,covADAE,covADAF,covADBC,covADCD,covADDE,covADEF
,covADFG},
{covABAE,covACAE,
covADAE,varAE,covAEAF,covAEBC,covAECD,covAEDE,covAEFE,covAEFG},
{covABAF,covACAF,covADAF,covAEAF,varAF,covAFBC,covAFCD,covAFDE,covAFEF
,covAFFG},

```



```

{covABBC, covACBC, covADBC, covAEBC, covAFBC, varBC, covBCCD, covBCDE, covBCEF
, covBCFG},
{covABCD, covACCD, covADCD, covAECD, covAFCD, covBCCD, varCD, covCDDE, covCDEF
, covCDFG},
{covABDE, covACDE, covADDE, covAEDE, covAFDE, covBCDE, covCDDE, varDE, covDEEF
, covDEFG},
{covABEF, covACEF, covADEF, covAEEF, covAFEF, covBCEF, covCDEF, covDEEF, varEF
, covEFG},
{covABFG, covACFG, covADFG, covAEFG, covAFFG, covBCFG, covCDFG, covDEFG, covEF
FG, varFG}
};

```

```

rXc=Table[covXc[[i, j]]/Sqrt[covXc[[i, i]]*covXc[[j, j]]], {i, 1, 10}, {j, 1, 10}];
rYc=Table[Log[1+rXc[[i, j]]]*Sqrt[covXc[[i, i]]]*Sqrt[covXc[[j, j]]]/mfiXc^2]/Sqrt[Log[1+covXc[[i, i]]/mfiXc^2]*Log[1+covXc[[j, j]]/mfiXc^2]], {i, 1, 10}, {j, 1, 10}];

```

```

covYc=Table[rYc[[i, j]]*Sqrt[Log[1+covXc[[i, i]]/mfiXc^2]*Log[1+covXc[[j, j]]/mfiXc^2]], {i, 1, 10}, {j, 1, 10}];
podstawieniec=Table[0, {i, 1, 10}];
wartoscic=Eigenvalues[covYc];
kc=0;
kkc=1;

```

```

Do[If[wartoscic[[i]]<0, podstawieniec[[kkc]]=i; kc=kc+1; kkc=kkc+1, kc=kc], {i, 10}];
{svd1c, svd2c, svd3c}=SingularValueDecomposition[covYc];
Do[svd2c[[podstawieniec[[i]], podstawieniec[[i]]]]=-0.0000001, {i, kc}];
wynik2c=svd1c.svd2c.Transpose[svd3c];
Do[Do[wynik2c[[e, f]]=wynik2c[[f, e]], {e, f-1}], {f, 10}];
covYc=wynik2c;

```

```

lc=CholeskyDecomposition[covYc];
ldolnac=Transpose[lc];
vectorYstandc=Table[(vectorYc[[i]]-mfiYc)/sfiYc, {i, 1, 10}];
zc=ldolnac.vectorYstandc;
pc={zc[[1]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[1, 1]]/mfiXc^2], zc[[2]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[2, 2]]/mfiXc^2], zc[[3]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[3, 3]]/mfiXc^2], zc[[4]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[4, 4]]/mfiXc^2], zc[[5]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[5, 5]]/mfiXc^2], zc[[6]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[6, 6]]/mfiXc^2], zc[[7]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[7, 7]]/mfiXc^2], zc[[8]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[8, 8]]/mfiXc^2], zc[[9]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[9, 9]]/mfiXc^2], zc[[10]]+Log[mfiXc]-
0.5*Log[1+covXc[[10, 10]]/mfiXc^2]};
(*Wartości spójności gruntu skorelowane macierzą kowariancji*)
finalc=Table[Exp[pc[[i]]], {i, 1, 10}];

```

**(\*Dla wyznaczonych wartości kąta tarcia wewnętrznego i spójności ponownie znajduję optymalną geometrię zniszczenia za pomocą metody wyżarzania\*)**

```

temp=1;
alpha=0.5;
tempMIN=0.00000001;

```

```

b01=60;

```

```
b02=20;
b03=20;
b04=20;
b05=20;
b06=40;

d2=1.1;
d3=1.2;
d4=1.5;
d5=1.7;
d6=1.8;

b=1;
fi1=final[[1]]*Pi/180;
fi2=final[[2]]*Pi/180;
fi3=final[[3]]*Pi/180;
fi4=final[[4]]*Pi/180;
fi5=final[[5]]*Pi/180;
fi6=final[[6]]*Pi/180;
fi7=final[[7]]*Pi/180;
fi8=final[[8]]*Pi/180;
fi9=final[[9]]*Pi/180;
fi10=final[[10]]*Pi/180;

c1=finalc[[1]];
c2=finalc[[2]];
c3=finalc[[3]];
c4=finalc[[4]];
c5=finalc[[5]];
c6=finalc[[6]];
c7=finalc[[7]];
c8=finalc[[8]];
c9=finalc[[9]];
c10=finalc[[10]];

b1=b01*Pi/180;
b2=b02*Pi/180;
b3=b03*Pi/180;
b4=b04*Pi/180;
b5=b05*Pi/180;
b6=b06*Pi/180;

xP1=b/2;
yP1=-b/2*Tan[b1];

If[Pi-b1-b2==Pi/2,
  xP2=0;
  yP2=-d2,
  aP2=Tan[Pi-b1-b2];
  If[aP2<0, xP2=d2/Sqrt[1+(aP2)^2], xP2=-d2/Sqrt[1+(aP2)^2]];
  yP2=aP2*xP2;
  ];

If[Pi-b1-b2-b3==Pi/2,

  xP3=0;
  yP3=-d3,
  aP3=Tan[Pi-b1-b2-b3];
  If[aP3<0, xP3=d3/Sqrt[1+(aP3)^2], xP3=-d3/Sqrt[1+(aP3)^2]];
  yP3=aP3*xP3;
```

```

];

If[Pi-b1-b2-b3-b4==Pi/2,

  xP4=0;
  yP4=-d4,
  aP4=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4];
  If[aP4<0, xP4=d4/Sqrt[1+(aP4)^2], xP4=-d4/Sqrt[1+(aP4)^2]];
  yP4=aP4*xP4;
];

If[Pi-b1-b2-b3-b4-b5==Pi/2,

  xP5=0;
  yP5=-d5,
  aP5=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4-b5];
  If[aP5<0, xP5=d5/Sqrt[1+(aP5)^2], xP5=-d5/Sqrt[1+(aP5)^2]];
  yP5=aP5*xP5;
];

xP6=-d6;
yP6=0;

k1=VectorAngle[{0,-1},{-(xP2-xP1),-(yP2-yP1)}];
k2=VectorAngle[{0,-1},{-(xP3-xP2),-(yP3-yP2)}];
k3=VectorAngle[{0,-1},{-(xP4-xP3),-(yP4-yP3)}];
k4=VectorAngle[{0,-1},{-(xP5-xP4),-(yP5-yP4)}];
k5=VectorAngle[{0,-1},{-(xP6-xP5),-(yP6-yP5)}];

k12={VectorAngle[{0,-1},{0-xP1,0-yP1}]-fi1,

  If[k2>k1, If[xP2>0, VectorAngle[{0,-1},{0-xP2,0-yP2}]+fi2, 2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP2,0-yP2}]+fi2], If[xP2>0, VectorAngle[{0,-1},{0-
xP2,0-yP2}]-fi2, 2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP2,0-yP2}]-fi2]],

  If[k3>k2, If[xP3>0, VectorAngle[{0,-1},{0-xP3,0-yP3}]+fi3, 2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP3,0-yP3}]+fi3], If[xP3>0, VectorAngle[{0,-1},{0-
xP3,0-yP3}]-fi3, 2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP3,0-yP3}]-fi3]],

  If[k4>k3, If[xP4>0, VectorAngle[{0,-1},{0-xP4,0-yP4}]+fi4, 2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP4,0-yP4}]+fi4], If[xP4>0, VectorAngle[{0,-1},{0-
xP4,0-yP4}]-fi4, 2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP4,0-yP4}]-fi4]],

  If[k5>k4, If[xP5>0, VectorAngle[{0,-1},{0-xP5,0-yP5}]+fi5, 2*Pi-
VectorAngle[{0,-1},{0-xP5,0-yP5}]+fi5], If[xP5>0, VectorAngle[{0,-1},{0-
xP5,0-yP5}]-fi5, 2*Pi-VectorAngle[{0,-1},{0-xP5,0-yP5}]-fi5]]
];

k01={VectorAngle[{0,-1},{xP2-xP1,yP2-yP1}]+fi6,
  VectorAngle[{0,-1},{xP3-xP2,yP3-yP2}]+fi7,
  VectorAngle[{0,-1},{xP4-xP3,yP4-yP3}]+fi8,
  VectorAngle[{0,-1},{xP5-xP4,yP5-yP4}]+fi9,
  VectorAngle[{0,-1},{xP6-xP5,yP6-yP5}]+fi10
};

wk12={Tan[Pi/2-k12[[1]]],
  Tan[Pi/2-k12[[2]]],
  Tan[Pi/2-k12[[3]]],
  Tan[Pi/2-k12[[4]]],
  Tan[Pi/2-k12[[5]]]
};

```

```

wk01={Tan[Pi/2-k01[[1]]],
      Tan[Pi/2-k01[[2]]],
      Tan[Pi/2-k01[[3]]],
      Tan[Pi/2-k01[[4]]],
      Tan[Pi/2-k01[[5]]]
};

oP1={1/(wk12[[1]]-wk01[[1]]),wk01[[1]]/(wk12[[1]]-wk01[[1]])};
oP2={ (oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]]),wk01[[2]]*(oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]])};
oP3={ (oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]]),wk01[[3]]*(oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]])};
oP4={ (oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]]),wk01[[4]]*(oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]])};
oP5={ (oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]]),wk01[[5]]*(oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]])};

v01={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]])^2],Sqrt[(oP2[[1]])^2+(oP2[[2]])^2],S
qrt[(oP3[[1]])^2+(oP3[[2]])^2],Sqrt[(oP4[[1]])^2+(oP4[[2]])^2],Sqrt[(o
P5[[1]])^2+(oP5[[2]])^2]};
v12={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]]+1)^2], (*współrzędne punktu
początkowego (0,-1)*)
      Sqrt[(oP2[[1]]-oP1[[1]])^2+(oP2[[2]]-oP1[[2]])^2],
      Sqrt[(oP3[[1]]-oP2[[1]])^2+(oP3[[2]]-oP2[[2]])^2],
      Sqrt[(oP4[[1]]-oP3[[1]])^2+(oP4[[2]]-oP3[[2]])^2],
      Sqrt[(oP5[[1]]-oP4[[1]])^2+(oP5[[2]]-oP4[[2]])^2]
};

l12=Sqrt[xP1^2+yP1^2];
l23=Sqrt[xP2^2+yP2^2];
l34=Sqrt[xP3^2+yP3^2];
l45=Sqrt[xP4^2+yP4^2];
l56=Sqrt[xP5^2+yP5^2];

l20=Sqrt[(xP2-xP1)^2+(yP2-yP1)^2];
l30=Sqrt[(xP3-xP2)^2+(yP3-yP2)^2];
l40=Sqrt[(xP4-xP3)^2+(yP4-yP3)^2];
l50=Sqrt[(xP5-xP4)^2+(yP5-yP4)^2];
l60=Sqrt[(xP6-xP5)^2+(yP6-yP5)^2];

d12=l12*c1*Cos[fi1]*v12[[1]];
d23=l23*c2*Cos[fi2]*v12[[2]];
d34=l34*c3*Cos[fi3]*v12[[3]];
d45=l45*c4*Cos[fi4]*v12[[4]];
d56=l56*c5*Cos[fi5]*v12[[5]];

d02=l20*c6*Cos[fi6]*v01[[1]];
d03=l30*c7*Cos[fi7]*v01[[2]];
d04=l40*c8*Cos[fi8]*v01[[3]];
d05=l50*c9*Cos[fi9]*v01[[4]];
d06=l60*c10*Cos[fi10]*v01[[5]];

t1=0.5*Abs[yP1*b];
t2=0.5*Abs[xP2*yP1-yP2*xP1];
t3=0.5*Abs[xP3*yP2-yP3*xP2];

```

```

t4=0.5*Abs[xP4*yP3-yP4*xP3];
t5=0.5*Abs[xP5*yP4-yP5*xP4];
t6=0.5*Abs[xP6*yP5-yP6*xP5];

g1=-1.0*t1;
g2=oP1[[2]]*t2;
g3=oP2[[2]]*t3;
g4=oP3[[2]]*t4;
g5=oP4[[2]]*t5;
g6=oP5[[2]]*t6;

pkM=2*(d12+d23+d34+d45+d56+d02+d03+d04+d05+d06)+2*Abs[xP6]*oP5[[2]]*q+
(g1+2*(g2+g3+g4+g5+g6))*gamma;

opt=pkM;
optB={b01,b02,b03,b04,b05,b06,d2,d3,d4,d5,d6};

While[temp>tempMIN,
  z=1;
  While[z≤1000,

noweoptB=sasiad[optB[[1]],optB[[2]],optB[[3]],optB[[4]],optB[[5]],optB
[[6]],optB[[7]],optB[[8]],optB[[9]],optB[[10]],optB[[11]]];

  b1=noweoptB[[1]]*Pi/180;
  b2=noweoptB[[2]]*Pi/180;
  b3=noweoptB[[3]]*Pi/180;
  b4=noweoptB[[4]]*Pi/180;
  b5=noweoptB[[5]]*Pi/180;
  b6=noweoptB[[6]]*Pi/180;
  d2=noweoptB[[7]];
  d3=noweoptB[[8]];
  d4=noweoptB[[9]];
  d5=noweoptB[[10]];
  d6=noweoptB[[11]];

  xP1=b/2;
  yP1=-b/2*Tan[b1];

  If[Pi-b1-b2==Pi/2,
    xP2=0;
    yP2=-d2,
    aP2=Tan[Pi-b1-b2];
    If[aP2<0,xP2=d2/Sqrt[1+(aP2)^2],xP2=-d2/Sqrt[1+(aP2)^2]];
    yP2=aP2*xP2;
  ];

  If[Pi-b1-b2-b3==Pi/2,

    xP3=0;
    yP3=-d3,
    aP3=Tan[Pi-b1-b2-b3];
    If[aP3<0,xP3=d3/Sqrt[1+(aP3)^2],xP3=-d3/Sqrt[1+(aP3)^2]];
    yP3=aP3*xP3;
  ];

  If[Pi-b1-b2-b3-b4==Pi/2,

    xP4=0;
    yP4=-d4,
    aP4=Tan[Pi-b1-b2-b3-b4];

```

```

If [aP4<0, xP4=d4/Sqrt [1+ (aP4) ^2], xP4=-d4/Sqrt [1+ (aP4) ^2]];
yP4=aP4*xP4;
];

If [Pi-b1-b2-b3-b4-b5==Pi/2,

xP5=0;
yP5=-d5,
aP5=Tan [Pi-b1-b2-b3-b4-b5];
If [aP5<0, xP5=d5/Sqrt [1+ (aP5) ^2], xP5=-d5/Sqrt [1+ (aP5) ^2]];
yP5=aP5*xP5;
];

xP6=-d6;
yP6=0;

k1=VectorAngle [{0, -1}, {-(xP2-xP1), -(yP2-yP1)}];
k2=VectorAngle [{0, -1}, {-(xP3-xP2), -(yP3-yP2)}];
k3=VectorAngle [{0, -1}, {-(xP4-xP3), -(yP4-yP3)}];
k4=VectorAngle [{0, -1}, {-(xP5-xP4), -(yP5-yP4)}];
k5=VectorAngle [{0, -1}, {-(xP6-xP5), -(yP6-yP5)}];

k12={VectorAngle [{0, -1}, {0-xP1, 0-yP1}]-fi1,

If [k2>k1, If [xP2>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-xP2, 0-yP2}]+fi2, 2*Pi-
VectorAngle [{0, -1}, {0-xP2, 0-yP2}]+fi2], If [xP2>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-
xP2, 0-yP2}]-fi2, 2*Pi-VectorAngle [{0, -1}, {0-xP2, 0-yP2}]-fi2]],

If [k3>k2, If [xP3>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-xP3, 0-yP3}]+fi3, 2*Pi-
VectorAngle [{0, -1}, {0-xP3, 0-yP3}]+fi3], If [xP3>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-
xP3, 0-yP3}]-fi3, 2*Pi-VectorAngle [{0, -1}, {0-xP3, 0-yP3}]-fi3]],

If [k4>k3, If [xP4>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-xP4, 0-yP4}]+fi4, 2*Pi-
VectorAngle [{0, -1}, {0-xP4, 0-yP4}]+fi4], If [xP4>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-
xP4, 0-yP4}]-fi4, 2*Pi-VectorAngle [{0, -1}, {0-xP4, 0-yP4}]-fi4]],

If [k5>k4, If [xP5>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-xP5, 0-yP5}]+fi5, 2*Pi-
VectorAngle [{0, -1}, {0-xP5, 0-yP5}]+fi5], If [xP5>0, VectorAngle [{0, -1}, {0-
xP5, 0-yP5}]-fi5, 2*Pi-VectorAngle [{0, -1}, {0-xP5, 0-yP5}]-fi5]]
];

k01={VectorAngle [{0, -1}, {xP2-xP1, yP2-yP1}]+fi6,
VectorAngle [{0, -1}, {xP3-xP2, yP3-yP2}]+fi7,
VectorAngle [{0, -1}, {xP4-xP3, yP4-yP3}]+fi8,
VectorAngle [{0, -1}, {xP5-xP4, yP5-yP4}]+fi9,
VectorAngle [{0, -1}, {xP6-xP5, yP6-yP5}]+fi10
];

wk12={Tan [Pi/2-k12[[1]]],
Tan [Pi/2-k12[[2]]],
Tan [Pi/2-k12[[3]]],
Tan [Pi/2-k12[[4]]],
Tan [Pi/2-k12[[5]]]
};

wk01={Tan [Pi/2-k01[[1]]],
Tan [Pi/2-k01[[2]]],
Tan [Pi/2-k01[[3]]],
Tan [Pi/2-k01[[4]]],
Tan [Pi/2-k01[[5]]]
};

```

```

oP1={1/(wk12[[1]]-wk01[[1]]),wk01[[1]]/(wk12[[1]]-wk01[[1]])};
oP2={ (oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]]),wk01[[2]]*(oP1[[2]]-wk12[[2]]*oP1[[1]])/(wk01[[2]]-
wk12[[2]])};
oP3={ (oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]]),wk01[[3]]*(oP2[[2]]-wk12[[3]]*oP2[[1]])/(wk01[[3]]-
wk12[[3]])};
oP4={ (oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]]),wk01[[4]]*(oP3[[2]]-wk12[[4]]*oP3[[1]])/(wk01[[4]]-
wk12[[4]])};
oP5={ (oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]]),wk01[[5]]*(oP4[[2]]-wk12[[5]]*oP4[[1]])/(wk01[[5]]-
wk12[[5]])};

v01={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]])^2],Sqrt[(oP2[[1]])^2+(oP2[[2]])^2],S
qrt[(oP3[[1]])^2+(oP3[[2]])^2],Sqrt[(oP4[[1]])^2+(oP4[[2]])^2],Sqrt[(o
P5[[1]])^2+(oP5[[2]])^2]};
v12={Sqrt[(oP1[[1]])^2+(oP1[[2]]+1)^2], (*współrzędne punktu
początkowego (0,-1)*)
Sqrt[(oP2[[1]]-oP1[[1]])^2+(oP2[[2]]-oP1[[2]])^2],
Sqrt[(oP3[[1]]-oP2[[1]])^2+(oP3[[2]]-oP2[[2]])^2],
Sqrt[(oP4[[1]]-oP3[[1]])^2+(oP4[[2]]-oP3[[2]])^2],
Sqrt[(oP5[[1]]-oP4[[1]])^2+(oP5[[2]]-oP4[[2]])^2]
};

l12=Sqrt[xP1^2+yP1^2];
l23=Sqrt[xP2^2+yP2^2];
l34=Sqrt[xP3^2+yP3^2];
l45=Sqrt[xP4^2+yP4^2];
l56=Sqrt[xP5^2+yP5^2];

l20=Sqrt[(xP2-xP1)^2+(yP2-yP1)^2];
l30=Sqrt[(xP3-xP2)^2+(yP3-yP2)^2];
l40=Sqrt[(xP4-xP3)^2+(yP4-yP3)^2];
l50=Sqrt[(xP5-xP4)^2+(yP5-yP4)^2];
l60=Sqrt[(xP6-xP5)^2+(yP6-yP5)^2];

d12=l12*c1*Cos[fi1]*v12[[1]];
d23=l23*c2*Cos[fi2]*v12[[2]];
d34=l34*c3*Cos[fi3]*v12[[3]];
d45=l45*c4*Cos[fi4]*v12[[4]];
d56=l56*c5*Cos[fi5]*v12[[5]];

d02=l20*c6*Cos[fi6]*v01[[1]];
d03=l30*c7*Cos[fi7]*v01[[2]];
d04=l40*c8*Cos[fi8]*v01[[3]];
d05=l50*c9*Cos[fi9]*v01[[4]];
d06=l60*c10*Cos[fi10]*v01[[5]];

t1=0.5*Abs[yP1*b];
t2=0.5*Abs[xP2*yP1-yP2*xP1];
t3=0.5*Abs[xP3*yP2-yP3*xP2];
t4=0.5*Abs[xP4*yP3-yP4*xP3];
t5=0.5*Abs[xP5*yP4-yP5*xP4];
t6=0.5*Abs[xP6*yP5-yP6*xP5];

g1=-1.0*t1;
g2=oP1[[2]]*t2;
g3=oP2[[2]]*t3;
g4=oP3[[2]]*t4;

```

```
g5=oP4[[2]]*t5;
g6=oP5[[2]]*t6;

If[oP5[[2]]≤0,pkM=10000,pkM=2*(d12+d23+d34+d45+d56+d02+d03+d04+d05+d06
)+2*Abs[xP6]*oP5[[2]]*q+(g1+2*(g2+g3+g4+g5+g6))*gamma];
  If[pkM<opt,opt=pkM;
optB={noweoptB[[1]],noweoptB[[2]],noweoptB[[3]],noweoptB[[4]],noweoptB
[[5]],noweoptB[[6]],noweoptB[[7]],noweoptB[[8]],noweoptB[[9]],noweoptB
[[10]],noweoptB[[11]]}}];

  If[(opt-pkM)/(temp)≥-5*10^8,pa=Exp[(opt-pkM)/(temp)],pa=Exp[-
5*10^8]];
  If[pa≥RandomReal[],

optB={noweoptB[[1]],noweoptB[[2]],noweoptB[[3]],noweoptB[[4]],noweoptB
[[5]],noweoptB[[6]],noweoptB[[7]],noweoptB[[8]],noweoptB[[9]],noweoptB
[[10]],noweoptB[[11]]}};
  opt=pkM
  ]
  z++];

temp=temp*alpha;
];

(*Otrzymane wartości nośności podłoża (opt) i optymalnej geometrii
(otpB) są rezultatem końcowym procedury, liczba otrzymanych nośności
podłoża zależy od przyjęcia liczby symulacji w ramach metody Monte
Carlo (N)*)
Write[str,opt];
Write[str2,optB];

]

Close[str]
Close[str2]
```



---

## Bibliografia

1. Ali A., Lyamin A. V., Huang J., Sloan S. W., Cassidy M. J., (2016). Effect of Spatial Correlation Length on the Bearing Capacity of an Eccentrically Loaded Strip Footing. 6<sup>th</sup> APSSRA 2016, 311-316.
2. Alonso E., (1976). Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays. *Geotechnique*, 26 (3), 453-472.
3. Alonso E., Krizek R., (1975). Stochastic formulation of soil properties. Proc. 2<sup>nd</sup> ICASP, Vol. II, 9-32.
4. Ben-Ameur W., (2004). Computing the Initial Temperature of Simulated Annealing, *Computational Optimization and Applications*; 29, 369-385.
5. Biernatowski K., (1966a). Stateczność fundamentów cz. I – Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa do oceny współczynników bezpieczeństwa przy sprawdzaniu fundamentów, *Archiwum Hydrotechniki*, Vol. 13, No. 2, p. 239-262.
6. Biernatowski K., (1966b). Stateczność fundamentów cz. II – Stateczność na obrót i przesunięcie w ujęciu probabilistycznym, *Archiwum Hydrotechniki*, Vol. 13, No. 2, p. 283-302.
7. Biernatowski K., (1982). *Metody statystyczne w geotechnice*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej.
8. Bochner S., (1959). *Lectures on Fourier integrals*. Princeton University Press.
9. Bolton M. D., Lau C. K., (1993). Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr-Coulomb soil. *Canadian Geotechnical Journal* 30 (6), 1024-1033.
10. Bond, A. J., and Harris, A. J. (2008). *Decoding Eurocode 7*, London: Taylor & Francis, p. 618.
11. Booker J. R., (1969). *Applications of theories of plasticity to cohesive frictional soils*. PhD thesis, Sydney University.
12. Box G. P., Jenkins G. M., (1983). *Analiza szeregów czasowych*, PWN, Warszawa.
13. Brząkała W., (1981). Losowość parametrów podłoża gruntowego. *Archiwum Inżynierii Łądowej*, 28 (4), 599-606.

14. Chambers J. M., (1992). Linear models. Chapter 4 of *Statistical Models in S*, ed. J. M. Chambers and T. J. Hastie, Wadsworth & Brooks/Cole.
15. Chen W. F., (1975). *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier.
16. Chen W.F., Liu X. L., (1990). *Limit Analysis in Soil Mechanics*, Elsevier.
17. Cherubini C., (1997), Data and consideration on the variability of geotechnical properties of soils, *Proc. of the ESREL Conf. Lisboa*, s. 1538-1591.
18. Cherubini C., (2000). Probabilistic approach to the design of anchored sheet pile walls. *Computers and Geotechnics*, Vol. 26 (3-4), 309-330.
19. Clifton F., (1969). Strength variability in structural materials, *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, No. 3654, February.
20. Cohn H., Fielding M., (1999). Simulated annealing: searching for an optimal temperature schedule, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 9, No. 3, pp. 779-802.
21. Corotis R. B., Azzouz A. S., Krizek R. I., (1975). Statistical evaluation of soil index properties and constrained modulus. *Proc. 2<sup>nd</sup> International Conference on Applied of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP)*, Aachen, Vol. II, 273-293.
22. De Beer E. E., (1970). Experimental determination of the shape factors and the bearing capacity factors of sand, *Geotechnique*, 20, 387-411.
23. Ditlevsen O., Tarp-Johansen N. J., (2000). Bayesian soil assessment combining prior with posterior censored samples. *Computers and Geotechnics*, Vol. 26 (3-4), 187-198.
24. Drescher A., Detournay E., (1993). Limit load in translational failure mechanism for associative and non-associative materials. *Geotechnique* 43 (3), 443-456.
25. Drucker D.C., Prager W., (1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Q. Appl. Math.*, 10(2), 157-165.
26. Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje, 1991 (PN-EN 1991).
27. Eurocode 7: Geotechnical Design Worked examples, (2013). Authors: Bond A. J., Schuppener B., Scarpelli G., Orr T. L. L., JRC Scientific and Policy Reports, European Commission.
28. Fenton G., (1990). Simulation and analysis of random fields. PhD thesis, Princeton University.
29. Fenton G., Vanmarcke, E., (1990). Simulation of random fields via local average subdivision. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering* , 116 (8), 1733-1749.
30. Fenton G., Griffiths D., (1993a). Statistics of block conductivity through a simple bounded stochastic medium. *Water Resources Research*, 29 (6), 1825-1830.
31. Fenton G., Griffiths D., (1993b). Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil. *Geotechnique*, 43 (6), 577-587.

32. Fenton G., Griffiths D., (1996). Statistics of free surface flow through stochastic earth dam. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 122 (6), 1825-1830.
33. Fenton G., Griffiths D., (2003). Bearing capacity prediction of spatially random soil  $c - \phi$ . *Canadian Geotechnical Journal*, 40 (1), 54-65.
34. Fenton G. A., Griffiths D. V., (2008). *Risk Assessment in Geotechnical Engineering*, Wiley 2008.
35. Ferenc J., (2013). The random variability analysis of the mechanical properties of the selected aluminum alloys, *Technical Transactions Civil Engineering 3-B/2013*.
36. Ferreira V., Panagopulos T., Andrade R., Guerrero C., Loures L., (2015). Spatial variability of soil properties and soil erodibility in the Alqueva reservoir watershed. *Solid Earth*, 6, 383-392.
37. Frydman S., Burd H. J., (1997). Numerical studies of bearing capacity factor  $N_{\gamma}$ . *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123 (1), 20-29.
38. Gelfand A. E., Diggle P., Fuentes M., Guttorp, P. (eds.), (2010). *Handbook of Spatial Statistics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRL.
39. Gourvenc S. M., Mana D. S. K., (2011). Undrained vertical bearing capacity factors for shallow foundations. *Geotechnique Letters*, 1: 101-108.
40. Griffiths D. V., (1982). Computation of bearing capacity factors using finite elements. *Geotechnique* 32 (3), 195-202.
41. Griffiths D. V., Fenton G., (2001). Bearing capacity of spatially random soil: The undrained clay Prandtl problem revisited. *Geotechnique*, 54 (4), 351-359.
42. Griffiths D. V., Fenton G., (2004). Probabilistic slope stability by finite elements. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130 (5), 507-518.
43. Hansen J. B., Christiansen N. H., (1969). Discussion of "Theoretical bearing capacity of very shallow footings" by A. L. Larkin. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division (ASCE)* 95, 6, 1567-1568.
44. Hansen J. B., (1970). A revised and extended formula for bearing capacity. *Bulletin of the Danish Geotechnical Institute* 28, 5-11.
45. Hawskbee S., Smith C., Gilbert M., (2013). Application of discontinuity layout optimization to three-dimensional plasticity problems. *Proceedings Royal Society A*, 469 (2155).
46. Hill R., (1950). *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford.
47. Hjjaj M., Lyamin A. V., Sloan S. W., (2005). Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor  $N_{\gamma}$ , *International Journal of Solids and Structures*, 42,1681-1704.
48. Horn R.A., Johnson C.R., (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
49. Horn R.A., Johnson C.R., (1990). *Matrix Computations*. Baltimore, MD: John Hopkins

50. Huang J., Lyamin A. V., Griffiths D. V., Sloan S. W., Krabbenhoft K., Fenton G.A., (2013). Undrained bearing capacity of spatially random clays by finite elements and limit analysis. *Proceedings of the 18<sup>th</sup> ICSMGE, Paris 2013*, 731-734.
51. ISO 2394, (2015). *General principles on reliability for structures*.
52. Izbicki R., Mróz Z., (1976). *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał*. Polskie Wydawnictwo Naukowe.
53. Kawa M., (2015). Reliability analysis of bearing capacity of square footing on soil with strength anisotropy due to layered microstructure. *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. 37, No. 4.
54. Kawa M., Pula W., Suska M., (2016). Random analysis of bearing capacity of square footing using the LAS procedure. *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. 38, No. 3.
55. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P., (1983). Optimization by Simulated Annealing, *Science*; 220:671-680.
56. Kirkpatrick S., (1984). Optimization by Simulated Annealing: Quantitative Studies. *Journal of Statistical Physics*; Vol. 34, Nos. 5/6.
57. Kryszicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., (1999). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, tom 1*, PWN.
58. Kulhawy F. H., Roth N. J., Grigoriu M. D., (1991). Some statistical evaluations of geotechnical properties. *Proc. Of the 6<sup>th</sup> ICASP, Mexico City*, 705-712.
59. Kumar J., (2009). The variation of  $N_{\gamma}$  with footing roughness using the method of characteristics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 33, 275-284.
60. Langejan A., (1965). Some aspects of the safety factor in soil mechanics and foundation engineering, *Proc. Of 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, montreal*, Vol. II, 500-502.
61. Larkin L. A., (1968). Total bearing capacity of very shallow footings. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division (ASCE)*, 94, 6, 1347-1357.
62. Leshchinsky B., (2015). Bearing capacity of footings placed adjacent to  $c-\phi$  slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 141 (6).
63. *LimitState:GEO Manual*, (2016). LimitState Ltd. Version 3.4.a.
64. Lumb P., (1965). The variability of natural soils. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 3, No. 2, p.74-97.
65. Lumb P., (1970), Safety factors and the probability distributions of soil strength, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 7, No. 3, 225-242.
66. Lumb P., (1974). Application of Statistics in Soil Mechanics. In: *Soil Mechanics - New Horizons*, ed. I K. Lee, 44-111.

- 
67. Lumb P., (1975). Spatial variability of soil properties. Proc. 2<sup>nd</sup> ICASP, Vol. II, 397-422.
  68. Lyamin A. V., Sloan S. W., (2002a). Lower bound limit analysis using non-linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55: 573-611.
  69. Lyamin A. V., Sloan S. W., (2002b). Upper bound limit analysis using non-linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26: 181-216.
  70. Lyamin A. V., Salgado R, Sloan S. W., Prezzi M., (2007). Two- and three-dimensional bearing capacity of footings in sand. *Geotechnique* 57, No. 8, 647-662.
  71. Łydźba D., Róžański A., (2014). Microstructure measures and the minimum size of a representative volume element: 2D numerical study. *Acta Geophysica*, 62(5), 1060-1086.
  72. Majidi A R., Mirghasemi A. A., Arabshahi M., (2011). Three dimensional bearing capacity analysis of shallow foundations using discrete element method, *International Journal of Civil Engineering*, 9 (4).
  73. Martin C. M., (2005). Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics. *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference IACMAG*, 4.
  74. Meyerhof, G. G., (1951). The ultimate bearing capacity of foundations. *Geotechnique* 2 (4), 301-332.
  75. Meyerhof, G. G., (1963). Some recent research on the bearing capacity of foundations. *Canadian Geotechnical Journal* 1 (1), 16-26.
  76. Michalowski R. L., (1997). An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis. *Soils and Foundations*; 37; No. 4; 57-64.
  77. Michalowski R. L., (2001). Upper-bound load estimates on square and rectangular footings. *Geotechnique* 51, No. 9, 789-798.
  78. Paulos H. G., Carter J. P., Small J. C., (2001). Foundations and retaining structures – research in practise. Proc. 15<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Istanbul, Turkey, Vol. 4, A. A. Balkema, Rotterdam, 2527-2606.
  79. Paz-Gonzales A. V. S., Vierira S. R., Castro M. T., 2000. The effect of cultivation on spatial variability of selected properties of an umbric horizon. *Geoderma*, 97, 273-292.
  80. Phoon, K. K., (2008). *Reliability – Based Design in Geotechnical Engineering: Computations and Applications*. Singapore, Taylor & Francis.
  81. Pieczyńska-Kozłowska J. M., Puła W., Vessia G., (2017). A collection of fluctuation scale values and autocorrelation functions of fine deposits in Emilia Romagna Palin,

- Italy; Geo-Risk 2017; Reston: American Society of Civil Engineers, cop. 2017; 290-299.
82. Pieczyńska J., (2012). Losowa metoda elementów skończonych w analizie posadowienia bezpośredniego. Praca Doktorska, Politechnika Wrocławska, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Raport serii PRE Nr 1/2012.
83. Pieczyńska-Kozłowska J.M., Puła W., Griffiths D.V., & Fenton G.A., (2015). Influence of embedment, self-weight and anisotropy on bearing capacity reliability using the random finite element method. *Computers and Geotechnics*; 67; 229-238.
84. Pietruszczak S., (2015). Podstawy Teorii Plastyczności w Geomechanice, DWE.
85. PN-EN 1997-1 (2008). Eurokod 7 Projektowanie geotechniczne część 1: Zasady ogólne.
86. Prandtl L., (1920). Uber die Harte plastischer Korper. *Nachr Kgl Ges Wiss Gottingen, Math Phys, Kl.* 74-85.
87. Przewłocki J., (1998). Losowość w wybranych zagadnieniach mechaniki gruntów. PAN, Instytut Budownictwa Wodnego, Gdańsk.
88. Przewłocki J. (2006). Problemy stochastycznej mechaniki gruntów. Ocena niezawodności. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław.
89. Puła W., (1987). Statistical distributions of soil properties for the investigation of the reliability of geotechnical structures. *Proc. Of the 1<sup>st</sup> Conf. on Mechanics, Praha, Vol. 6,* 134-137.
90. Pula W., (2004). Applications of structural reliability theory to foundations safety evaluation. Wrocław: Wrocław University of Technology Press.
91. Pula W., (2007). On some aspects of reliability computations in bearing capacity of shallow foundations. In: Griffiths DV, Fenton Gordon A, editors. *Puła in: probabilistic methods in geotechnical engineering. CISM courses and lectures, nr 491.* Wien, New York: Springer, 127–45.
92. Pula W., Chwala M., (2015). On spatial averaging along random slip lines in the reliability computations of shallow strip foundations. *Computers and Geotechnics*; 68; 128-136.
93. Pula W., Zaskorski Ł., (2015) On some methods in safety evaluation in geotechnics, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. 37, No.2, 2015
94. Rackwitz R., (2000). Reviewing probabilistic soils modelling. *Computers and Geotechnics*, 25 (3-4), 199-223.
95. Simoes J. T., Neves L. C., Antao A. N., Guerra N. m. C., (2014). Probabilistic analysis of bearing capacity of shallow foundations using three-dimensional limit analyses. *International Journal of Computational Methods*, 11.

96. Shield R. T., Drucker D. C., (1953). The application of limit analysis to punch - indentation problems. *Journal of Applied Mechanics*, 20, 453-460.
97. Sloan S. W., (1988). Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 12, 61-77.
98. Salgado R., Lyamin A. V., Sloan S. W., Yu H. S., (2004). Two- and three-dimensional bearing capacity of foundations in clay. *Geotechnique* 54, No. 5, 297-306.
99. Schultze E., (1975). Some aspects concerning the application of statistics and probability to foundation structures. 2 ICASP, 389-424.
100. Sloan S. W., (1989). Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, 263-282.
101. Smith C., Gilbert M., (2007). Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems. *Proceedings of the Royal Society A-Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 463 (2086), 2461-2484.
102. Sobótka M., Łydźba D., Różański, A., (2013). Shape optimization of underground excavation by simulated annealing. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 35(1), 209-218.
103. Sobótka M., Pachnicz M., (2016). Shape optimization of road tunnel cross-section by simulated annealing. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 38 (2), 47-52.
104. Sokołowski W. W. (1958), *Statyka ośrodków sypkich*, PWN.
105. Soubra A. H., (1999). Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 125 (1), 59-68.
106. Stefaniuk D., Różański A., Łydźba D., (2016). Recovery of microstructure properties: random variability of soil solid thermal conductivity. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 38(1), 99-107.
107. Stein M. L., (1999). *Interpolation of Spatial Data*. New York: Springer-Verlag.
108. Stoker J.J., (1989). *Differential geometry*. Wiley.
109. Terzaghi K., (1943). *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, New York.
110. Trefethen L. N., Bau III, D., (1997). *Numerical linear algebra*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics.
111. Vanmarcke E. H., (1983). *Random fields – analysis and synthesis*. Cambridge: MIT Press.
112. Vanmarcke E. H., (1977a). Probabilistic modelling of soil profiles. *J. Geotech. Eng. Div.* 1977, 103(GT11), 1227–46.
113. Vanmarcke E. H., (1977b). Reliability of earth slopes. *J. Geotech. Eng. Div.*, 103(GT11), 1247–65.

114. Venables W. N., Ripley B. D., (2002). *Modern Applied Statistics with S*. Fourth edition, Springer.
115. Vesic A. S., (1973). Analysis of ultimate loads of shallow foundations, *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division ASCE*, Vol. 99, 1, 45-73.
116. Vesic A. S., (1975). Bearing capacity of shallow foundations. In: Winterkorn, H. F., Fang H. Y. (Editors), *Foundation Engineering Handbook*, Van Nostrand Reinhold, New-York, 121-147.
117. Vincente da Silva M., Antao A. N., (2008). Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 45 (22), 5788-5804.
118. Wang Y., Yin J., Chen Z., (2001). Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25, 841-851.
119. Wang Y. Q., Shao M. A., (2013). Spatial variability of soil physical properties in a region of the loess plateau of PR China subject to wind and water erosion. *Land Degradation and Development*, 24, 296-304.
120. Wentzell A. D., (1980), *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa.
121. Wilde P., (1977). Modele dyskretne pól losowych podłoża. *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki PWr*, 24 (9), 5-16. [In Polish]
122. Wilde P., (1981). *Dyskretyzacja pól losowych w obliczeniach inżynierskich*. Warszawa, PWN. [In Polish]
123. Wilkinson G. N., Rogers C. E., (1973). Symbolic descriptions of factorial models for analysis of variance. *Applied Statistics*, 22, 392-399.
124. Woo G., (1999). *The mathematics of natural catastrophes*, Imperial College Press.
125. Wu T. H., Kraft L. M., (1967). The probability of foundation safety, *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 93, No. Sn 5.
126. Yamamoto K., Lyamin A. V., Abbo A. J., Sloan S. W., Hira M., (2009). Bearing capacity and failure mechanism of different types of foundations on sand, *Soils and Foundations* Vol. 49, No. 2, 305-314.
127. Yang Rui., Huang Jinsong., Griffiths D.V., Sheng Daichao, (2017). *Probabilistic Stability Analysis of Slopes by Conditional Random Fields*.
128. Yu S., Zhang X., Sloan S. W., (2016). A 3D upper bound limit analysis using radial point interpolation meshless method and second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108, 1696-1704.
129. Zhou H., Zheng X., Yin R., Jia R., Yang X., (2018). The bearing capacity and failure mechanism of a vertically loaded strip footing placed on the top of slopes. *Computers and Geotechnics*, 94, 12-21.



130. Zhu D. Y., (2000). The least upper-bound solution for the bearing capacity factor  $N_\gamma$ .  
Soils and Foundations 40 (1), 123-129.
131. Zhu M., Michałowski R. L., (2005). Shape Factors for Limit Loads on Square and Rectangular Footings, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 223-231.

## STRESZCZENIE

Przedmiotem niniejszej rozprawy jest opracowanie metodyki dedykowanej ocenie losowej nośności podłoża gruntowego przy założeniu bezpośredniego posadowienia fundamentu. Zaproponowana metodyka łączy ocenę górną nośności podłoża (w ramach teorii nośności granicznej) wraz z elementami teorii pól losowych. Jej zastosowanie pozwala na ocenę losowej nośności podłoża w przypadku gruntów typu  $c-\varphi$  z uwzględnieniem ciężaru objętościowego gruntu, zagłębienia fundamentu oraz założenia anizotropii przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża.

Zaproponowaną metodykę autor zastosował do kilku zagadnień związanych z posadowieniem bezpośrednim. W tym celu opracowane zostały algorytmy dla płaskiego stanu odkształcenia i przypadku trójwymiarowego. Opracowanie algorytmów wymagało dostosowania deterministycznych mechanizmów zniszczenia podłoża do analiz probabilistycznych, a także wyprowadzenia wzorów na współczynniki macierzy kowariancji, na podstawie której odbywał się proces generowania wartości parametrów wytrzymałościowych na poszczególnych liniach lub powierzchniach poślizgu. Opracowane algorytmy zaimplementowano w środowisku Mathematica. Za ich pomocą przeanalizowano zagadnienia dotąd nieopisane w literaturze w ramach analiz probabilistycznych i oszacowania górnego nośności. Zbadano wpływ założenia o symetrii mechanizmu zniszczenia podłoża poprzez analizę mechanizmu niesymetrycznego (płaski stan odkształcenia). Przeprowadzono szereg analiz przy założeniu trójwymiarowego mechanizmu zniszczenia podłoża (dla kwadratowej stopy fundamentowej). Przeanalizowano wpływ anizotropii przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych podłoża na ocenę losowej nośności podłoża.

Przeprowadzone analizy i otrzymane rezultaty wykazały możliwość zastosowania opracowanej metodyki do oceny losowej nośności podłoża, a co więcej - potwierdziły jej efektywność i uniwersalność w zastosowaniu do różnych typów mechanizmów zniszczenia, także w przypadku trójwymiarowym. Szybki rozwój metod rozpoznania warunków gruntowych poprzez sondowania (np. CPT) i równoległy postęp w opracowywaniu ich wyników pozwalają na coraz dokładniejszy opis matematyczny przestrzennej zmienności parametrów gruntu. Zaproponowana metodyka wychodzi naprzeciw powyższym trendom, umożliwiając w efektywny sposób wykorzystanie informacji o przestrzennej zmienności parametrów podłoża do oceny jego nośności.

## SUMMARY

The subject of this thesis is the development of a methodology dedicated to the random bearing capacity evaluation for shallow foundations. The proposed methodology includes upper bound bearing capacity analysis (limit analysis) and selected parts of the random field theory. Application of the methodology allows the random bearing capacity evaluation for  $c$ - $\varphi$  soils with inclusion of self-weight of soil, foundation base depth and anisotropy in the spatial variability of the soil strength properties.

The proposed methodology was applied by the author for several issues dedicated to shallow foundations. To make this possible, the algorithms have been developed for plain strain condition and three dimensional case. Adaptation of the deterministic failure mechanism in soil for probabilistic analysis was crucial in the process of algorithms development. Moreover, the covariance matrix components which are necessary in generating soil strength parameters (for each slip line or slip surface) have to be derived. The proposed algorithms were implemented in Mathematica software. The algorithms were used in the analysis of the currently unsolved problems in the framework of probabilistic and upper bound analysis. The impact of the assumption of failure mechanism symmetry was investigated by the analysis of the asymmetrical case (for plain strain condition). Several analyses for the three dimensional issue for square footing were carried out. Furthermore, the impact of soil parameters spatial variability anisotropy on random bearing capacity evaluation was examined.

The performed analysis and the obtained results demonstrate the applicability of the proposed methodology for the random bearing capacity evaluation, moreover they indicate its effectiveness and universality in application to various failure mechanism types (also in the case of three dimensional failure mechanism). Fast development and spreading of field testing methods (e.g., CPT) and development in analysing the results, allow to provide precise mathematical modelling of soil spatial variability. The proposed methodology meets the above trends and enables the effective use of the information provided in field tests for bearing capacity evaluation for shallow foundations.