

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
Politechniki Wrocławskiej

**Termokonsolidacja ośrodka porowatego z
uwzględnieniem występowania fazy
gazowej**

**Raport serii PRE nr 1/2018
Praca doktorska**

Anna Uciechowska-Grakowicz

Słowa kluczowe:
termokonsolidacja,
porospężystość,
przewodzenie ciepła,
ośrodek porowaty.

Promotor: Prof. dr hab. inż. Tomasz Strzelecki

Wrocław, styczeń 2018

Autor:

mgr inż. Anna Uciechowska-Grakowicz

.....

Politechnika Wroclawska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
Katedra Geotechniki, Hydrotechniki, Budownictwa Podziemnego i Wodnego
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
tel. 71 320 3474
e-mail: anna.uciechowska@pwr.edu.pl

Raport został złożony w Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w styczniu 2017 r.

Lista odbiorców:

Recenzenci	2 egz.
Promotor	1 egz.
Autor	2 egz.
CWiINT PW _r	1 egz.
Archiwum W-2	2 egz.

Razem	<hr/> 8 egz.
-------	--------------

*Składam serdeczne podziękowania promotorowi,
Panu Profesorowi Tomaszowi Strzeleckiemu, za
wielką życzliwość i zaangażowanie oraz ogrom
poświęconego czasu i wyrozumiałość.
Podziękowania kieruję również do rodziny, za
wsparcie i cierpliwość podczas pisania pracy.*

Spis treści

Spis treści	3
1 Cel i zakres pracy	6
2 Spis najważniejszych oznaczeń	9
3. Przegląd literatury dotyczącej przedmiotu pracy	12
3.1. Teoria konsolidacji	12
3.1.1. Klasyczna teoria konsolidacji Terzagiego.....	12
3.1.2. Teoria porospężystości Biota-Darcy'ego.....	17
3.1.3. Teoria porospężystości w świetle teorii homogenizacji	24
3.1.4. Teoria porospężystości w świetle termodynamiki	31
3.1.5. Konsolidacja układu ciało stałe – gaz	40
3.1.6. Prace z zakresu termokonsolidacji ośrodków porowatych	49
3.2. Podziemne zgazowanie węgla jako przykład możliwego wykorzystania wyników pracy dla celów inżynierskich	61
3.2.1. Zarys historyczny podziemnego zgazowania węgla	61
3.2.3. Podział technologii podziemnego zgazowania węgla.....	66
3.2.4. Gaz syntezowy	72
3.2.5. Zagadnienia geotechniczne przy technologii zgazowania węgla.....	73
4. Budowa modelu matematycznego procesu termo-konsolidacji ośrodków porowatych	74
4.1 Budowa modelu matematycznego procesu termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i cieczy	74
4.1.1 Równanie ciągłości przepływu	74
4.1.2 Zasada zachowania pędu.....	77
4.1.3 Związki konstytutywne dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i cieczy	80
4.1.3.1 Związki konstytutywne przy założeniu, że temperatura szkieletu i cieczy są takie same.....	80
4.1.3.2 Związki konstytutywne gdy zakładamy, że temperatura szkieletu i cieczy w skali por jest niejednakowa	81
4.1.4 Równania przewodnictwa cieplnego dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i cieczy	85
4.1.5 Układ równań termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i cieczy	86
4.2. Budowa modelu matematycznego procesu termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i gazu.....	88
4.2.1 Równania ciągłości przepływu i zachowania pędu oraz równanie filtracji.....	88
4.2.2 Związki konstytutywne	89
4.2.2.1 Związki konstytutywne gdy zakładamy, że ciepło rozchodzi się przez ośrodek jednofazowy	89
4.2.2.2 Związki konstytutywne, gdy zakładamy, że przepływ ciepła odbywa się w obu fazach ośrodka niezależnie.	91
4.2.3. Równania przewodnictwa cieplnego.....	92

4.2.4. Układ równań termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i gazu	93
5. Analiza zjawiska termo-konsolidacji w oparciu o proponowany model matematyczny.....	95
5.1 Założenia dotyczące geometrii obszaru i scenariusza zmian warunków brzegowych.....	97
5.2. Porównanie funkcjonowania modeli matematycznych w przypadku, gdy płynem porowym jest woda.....	102
5.2.1. Model ośrodka dwufazowego.....	102
5.2.2. Model ośrodka jednofazowego.....	107
5.2.3. Podsumowanie dla cieczy.....	112
5.3. Porównanie modeli termokonsolidacji dla gazu:	112
5.3.1. Wyniki dla modelu 2 fazowego.....	112
5.3.2. Wyniki dla modelu jednofazowego.....	115
5.3.3. Podsumowanie dla gazu	119
5.4. Podsumowanie dla modeli próbki.....	119
6 Oddziaływanie podziemnego zgazowania węgla na środowisko	120
6.1 Przykład wykorzystania modelu termokonsolidacji do celów inżynierskich.	120
6.1.1. Geometria modelu oraz założone warunki geologiczne w pobliżu przykładowego procesu PZW	121
6.1.2. Model matematyczny oraz warunki brzegowe.....	123
6.2 Wyniki obliczeń numerycznych	126
7. Podsumowanie i wnioski.....	137
Bibliografia.....	141
Spis rysunków	148
Streszczenie	150
Załączniki	152

1 Cel i zakres pracy

Wiele materiałów wykorzystywanych w budownictwie ma strukturę porowatą, gdzie w porach może występować gaz lub ciecz. Są to np. grunty, kruszywa, beton, drewno, ceramika czy materiały izolacyjne. Modele konsolidacji opisujące tego typu ośrodki najczęściej wykorzystują równania konstytutywne, w których płyn porowy jest nieściśliwy, lub jego ściśliwość jest niewielka. W obliczeniach stanu naprężenia i odkształcenia tego typu ośrodków porowatych nie uwzględnia się równań konstytutywnych fazy gazowej. Jak do tej pory brakuje kompleksowego opisu ośrodka porospężystego, w którego porach może znajdować się ciecz lub gaz, również w warunkach nieizotermicznych. Tymczasem zmiany temperatury mogą mieć istotny wpływ na naprężenia oraz przemieszczenia, np. w masywnych budowach betonowych lub gruntowych oraz w górotworze, na przykład przy stosowaniu w przypadku zbiorników odpadów poflotacyjnych lub w zagadnieniach związanych ze składowaniem odpadów radioaktywnych. Zmiany temperatury mogą mieć również istotny wpływ na duże budowle hydrotechniczne, np. elektrownie wodne, a w szczególności ich awarie (Łydźba, Sobótka, 2014). Temperatura może być przyczyną katastrof budowlanych (np. zawalenie się wież World Trade Center w Nowym Yorku po zamachu terrorystycznym). Rodzi to przekonanie o potrzebie pełniejszego opisu wpływu na zachowanie ośrodka rodzaju medium wypełniającego pory ośrodka oraz zmian temperatury w procesie projektowania budowli inżynierskich, co wpisuje się również w myśl wybitnego polskiego naukowca i inżyniera budownictwa, Witolda Nowackiego, że „badania w dziedzinie pól sprzężonych mają przed sobą wielką przyszłość”¹.

W pracach doktorskich stawia się na początku tezy pracy lub określa cel wykonywanych prac naukowych. Wraz z promotorem pracy uznaliśmy, że bardziej prawidłowe będzie przedstawienie celów pracy ze względu na jej charakter w dużej części teoretyczny.

Podstawowym celem niniejszej pracy doktorskiej było opracowanie modelu termo-konsolidacji ośrodka porowatego dla 2 stanów skupienia płynu porowego: ciekłego lub gazowego. Model matematyczny termo-konsolidacji ośrodka wypełnionego cieczą lub gazem wyprowadzono z równań termodynamiki procesów nieodwracalnych. Rozważono dwa przypadki transportu ciepła – jeden, gdy transport odbywa się oddzielnie fazą stałą i płynną, aż do wyrównania się temperatur obydwu faz, i drugi, gdy transport ciepła odbywa

¹ Witold Nowacki, *Notatki Autobiograficzne*, PWN Warszawa, 1985

się przez ośrodek porowaty traktowany jako uśredniony ośrodek jednofazowy z punktu widzenia przewodnictwa cieplnego.

Drugim ważnym celem pracy było wykazanie wpływu konkretnego rodzaju płynu na procesy zachodzące w ośrodku dwufazowym. Ponieważ możliwości naszego laboratorium nie pozwalają na przeprowadzenie badań laboratoryjnych w tym zakresie powyższy cel realizowałam metodami numerycznymi wykorzystując do tego celu metodę elementów skończonych na przykładzie próbki trójosiowego ściskania poddanej działaniu wzrastającej temperatury w dolnej płaszczyźnie próbki. Przeprowadzono analizy numeryczne przy wykorzystaniu proponowanego przeze mnie modelu w przypadku wody, pary wodnej i powietrza jako fazy płynnej w odniesieniu do uśrednionego modelu jednofazowego (z punktu widzenia przewodzenia ciepła).

Kolejnym celem pracy było wykorzystanie stworzonego modelu matematycznego w modelu numerycznym dla zagadnienia inżynierskiego wymagającego uwzględnienia zmian temperatury i występowania fazy gazowej. Przedstawienie zastosowania opracowanego modelu matematycznego do konkretnego zagadnienia inżynierskiego wymagało znalezienia takiego przypadku, w którym występują znaczne różnice temperatur oraz różne stany skupienia płynu porowego. Wybrano zagadnienie procesu termo-konsolidacji na skutek oddziaływania generatora podziemnego zgazowania węgla. Mamy tu do czynienia ze złożonym przestrzennym modelem geologicznym podłoża, w którym ponadto występują określone warunki hydrogeologiczne. Wybrany przykład nie dotyczy zagadnienia związanego bezpośrednio z budownictwem, ale z pewnością dotyczy mechaniki gruntów i skał, więc dziedziny uprawianej przez geotechników (inżynierów budownictwa).

Mimo faktu, że historia podziemnego zgazowania węgla sięga już ponad 100 lat, nadal wiele aspektów związanych z tym sposobem eksploatacji złoża węgla jest wciąż celem badań. Dotyczy to głównie zagadnień dotyczących oddziaływania procesu zgazowania na środowisko. Istotnym elementem wybranego zagadnienia jest budowa numerycznego modelu termo-konsolidacji ośrodka porowatego z uwzględnieniem przemiany fazowej wody w parę wodną w bezpośrednim kontakcie wody z generatorem. Przedstawiony model numeryczny funkcjonuje w układzie trójfazowym, bowiem w części obszaru występuje w porach para wodna, a w części woda. Wyprowadzony układ równań opisujący procesy w ośrodku zbudowanym z ciała stałego i płynu jest całkowicie odmienny w obszarze

występowania cieczy i gazu. Przedstawiony przykład obliczeniowy pokazuje proponowany sposób rozwiązania zagadnień inżynierskich, gdy mamy do czynienia z trzema fazami jednocześnie. Zbudowany model numeryczny jest modelem nieliniowym, bowiem parametry modelu są funkcjami temperatury zgodnie z ogólnie przyjętymi w fizyce cieczy i gazów równaniami.

Jako punkt wyjścia dla niniejszej pracy przyjęto stosowany w mechanice gruntów i skał model konsolidacji Biot-Darcy'ego (Biot, 1941), który poszerzono o dodatkowe zjawiska: przyjęto, że w porach ośrodka dwufazowego występuje bardzo ściśliwy płyn porowy (gaz) oraz występują zjawiska termiczne.

W rozdziale 3 przedstawiono analizę literatury dotyczącą modelu porospężystości, również w ujęciu termodynamiki oraz teorii homogenizacji, przedstawiono zaproponowane do tej pory rozszerzenia teorii, oraz przedstawiono zarys technologii podziemnego zgazowania węgla, jako przykładu wykorzystania niniejszej pracy dla celów inżynierskich.

W rozdziale 4 przedstawiono model matematyczny termo-konsolidacji ośrodka porowatego wypełnionego płynem, obejmujący równania ciągłości, równania ruchu, związki konstytutywne oraz równania przewodzenia ciepła utworzony w oparciu o podstawowe prawa fizyki. Dla stworzenia modelu termokonsolidacji w przypadku układu ciało stałe - gaz wykorzystano prawo Boyle'a-Mariotte'a. Dla obu płynów porowych zaproponowano dwa warianty modelu ze względu na sposób przewodzenia ciepła:

- traktujący ośrodek porowaty jako jednofazowy (z punktu widzenia przewodnictwa ciepła) – uśredniony dla przypadku fazy stałej i cieczy lub fazy stałej i gazu, opisujący przewodzenie ciepła przy pomocy jednego równania dla każdego z dwóch wymienionych przypadków
- wariant opisujący przewodzenie ciepła w każdej z faz z osobna: dla każdej fazy mamy oddzielne równanie przewodnictwa cieplnego, a parametry efektywne występujące w równaniach są parametrami poszczególnych faz ośrodka.

W rozdziale 5 dla każdego z wariantów stworzono model numeryczny termokonsolidacji walcowej próbki pod wpływem zmian temperatury. Dla stworzenia tego modelu użyto wykorzystującego metodę elementów skończonych programu FlexPDE 6, tworząc skrypty wprowadzające geometrię obszaru, równania fizyczne procesu termo-konsolidacji oraz warunki graniczne rozwiązywanego zagadnienia. Obróbkę wyników przeprowadzono przy użyciu programu Paraview 5.0.3. Przeanalizowano różnice między

obydwoma podejściami (ośrodek jednofazowy i dwufazowy ze względu na przewodnictwo cieplne) oraz wpływ przyjętego termicznego sprężenia faz na wyniki modelowania.

W rozdziale 6 zaprezentowano model termo-konsolidacji obszaru, w obrębie którego prowadzona jest eksploatacja węgla metodą podziemnego zgazowania. Założono, że w obrębie modelu znajduje się 8 warstw geologicznych ograniczonych krzywoliniowymi powierzchniami, oraz że zgazowywane złoża znajduje się na głębokości 120m p.p.t. Do modelowania użyto modelu matematycznego wykorzystującego założenie o jednofazowości ośrodka ze względu na przewodnictwo cieplne. Przyjęto, że po przekroczeniu wartości granicznej następuje przemiana fazowa wody w parę wodną co powoduje, że oprócz zmiany parametrów fizycznych (lub funkcji je opisujących), używane są związki konstytutywne dla gazu, co ma wpływ również na postać równania przewodnictwa cieplnego. w modelowanym obszarze określono m.in. zasięg występowania fazy gazowej w porach gruntu, rozkład temperatur w sąsiedztwie zgazowywanego złoża, oraz przemieszczenia ośrodka a także prędkości oraz kierunki filtracji pary wodnej i wody.

Rozdział 7 stanowi podsumowanie pracy.

2 Spis najważniejszych oznaczeń

Ze względu na różnorodność zjawisk występujących w ośrodku porowatym, cytowane w niniejszej pracy wzory pochodzą z różnych działów fizyki, trudnym zatem byłoby uniknięcie powtórzeń w oznaczeniach. Poniższy spis oznaczeń dotyczy opisu najważniejszych zjawisk z punktu widzenia głównego celu tej pracy, jakim jest model termokonsolidacji. Oznaczenia używane w cytowaniach i nie pojawiające się w dalszej części pracy objaśniane są na bieżąco w tekście.

- **Litery łacińskie**

A – stała materiałowa ośrodka porosprężystego odpowiadającej stałej Lamégo λ dla ośrodka sprężystego,

B – parametr Skempton,

c_σ – ciepło właściwe przy stałym naprężeniu,

c_v – ciepło właściwe przy stałej objętości,

D_{ij} – to tensor prędkości dewiatora odkształceń,

e – wskaźnik porowatości,

E – moduł Younga,

f - porowatość,

F – energia swobodna Helmholtza,

g – przyspieszenie ziemskie,

G – entalpia swobodna,

H – miara ściśliwości gruntu pod wpływem zmiany ciśnienia płynu,

I – spadek hydrauliczny,

I_{ij} – tensor jednostkowy,

k – współczynnik filtracji,

K – moduł sprężystości objętościowej, energia kinetyczna układu,

\dot{L} – moc sił działających n układ,

\dot{L}_1^G – moc sił grawitacji,

\dot{L}_1^η – moc sił oporu lepkiego,

\dot{L}^S – moc sił powierzchniowych,

m – masa,

M – edometryczny moduł ściśliwości,

M_G – masa molowa,

p – ciśnienie porowe,

q – wydatek na jednostkę powierzchni, ciepło na jednostkę objętości,

Q – współczynnik określający ilość płynu, która może być wtłoczona do ośrodka porospężystymi bez zmiany jego objętości, ciepło,

R – zmiana zawartości płynu wskutek zmiany ciśnienia, liczba Reynoldsa, stała gazowa,

s – entropia na jednostkę objętości, osiadania,
 S – współczynnik pojemności wg Biota, entropia,
 t – czas,
 T – temperatura,
 \vec{u} – wektor przemieszczenia,
 v – prędkość filtracji,
 V – objętość,
 W – energia wewnętrzna,
 w_1 – energia wewnętrzna szkieletu,
 w_2 – energia wewnętrzna płynu.

- **litery greckie:**

α – współczynnik Biota,
 β – współczynnik Forchheimera,
 δ_{ij} – delta Kroneckera,
 ε_{ij} – tensor odkształceń ośrodka,
 ε – odkształcenie objętościowe ośrodka, mały parametr teorii homogenizacji,
 λ – współczynnik przewodzenia ciepła,
 γ – ciężar właściwy,
 χ – energia swobodna na jednostkę objętości,
 ρ – gęstość,
 μ – lepkość dynamiczna płynu,
 σ – naprężenie w płynie,
 σ' – naprężenie efektywne wg Terzagiego,

σ_a – naprężenie pochodzące od ciśnienia atmosferycznego,

σ_{ij} – tensor naprężeń,

σ_m – średnie naprężenie,

ν – współczynnik Poissona,

ζ – zmiana zawartości płynu w porach ośrodka,

ϑ – temperatura względna,

θ – zmiana objętości płynu,

Ω – przestrzeń wypełniona przez ośrodek.

- **indeksy:**

0 – wartość początkowa,

rz – wartość rzeczywista,

t – wartość po upływie czasu t,

f – płyn,

s – szkielet,

l – ciecz,

g – gaz,

w – woda,

os – środek.

3. Przegląd literatury dotyczącej przedmiotu pracy

3.1. Teoria konsolidacji

3.1.1. Klasyczna teoria konsolidacji Terzagiego

Ośrodek gruntowy jest ośrodkiem wielofazowym – tworzą go szkielet, będący fazą stałą oraz płyn: ciecz lub gaz. W przypadku przyłożenia obciążenia ośrodek taki odkształca się stopniowo, w miarę rozpraszania się ciśnienia w płynie porowym. Zjawisko takie nosi

nazwę konsolidacji. W 1923r Karl von Terzaghi przedstawił teorię konsolidacji dla przypadku jednowymiarowego. Według tego modelu całkowite naprężenie przenoszone przez ośrodek wynosi (Wiłun, 1976):

$$\sigma^{os} = \sigma' - p, \quad (3.1)$$

gdzie σ' to naprężenie efektywne w szkielecie, odpowiadające za odkształcenia, przeliczone na przekrój gruntu, p to ciśnienie porowe. Teoria Terzagiego zakłada, że szkielet ośrodka gruntowego oraz płyn są nieściśliwe, a przemieszczenia spowodowane są odpływem wody z gruntu, czyli zmianą objętości przestrzeni porowej. Osiadanie takiego gruntu jest zatem funkcją porowatości. Jeśli h_0 i e_0 to początkowa wysokość próbki i wskaźnik porowatości, natomiast h_t i e_t to wysokość próbki i wskaźnik porowatości po upływie czasu t , można ułożyć następujące równanie (za Piętkowskim, 1957):

$$\frac{h_0}{1 + e_0} = \frac{h_t}{1 + e_t}, \quad (3.2)$$

stąd osiadanie $s = h_0 - h_t$ można określić przy pomocy wzoru:

$$s = -ah_0 \frac{\sigma'_t - \sigma'_0}{1 + e_0}, \quad (3.3)$$

gdzie a to współczynnik ściśliwości, $a = (e_t - e_0) / (\sigma'_t - \sigma'_0)$.

Korzystając z edometrycznego modułu ściśliwości (Wiłun 1976), $M = -(\sigma'_t - \sigma'_0)(1 + e_0) / (e_0 - e_t)$, oraz różniczkując równania (3.2) i (3.3) po czasie otrzymać można następujący wzór na przyrost osiadania elementarnej warstwy:

$$\frac{\partial s}{\partial t} dz = -\frac{1}{M} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} dz. \quad (3.4)$$

Jeśli osiadanie jest wynikiem zmiany porowatości, w ośrodku nasyconym jest ono równe objętości wody, która została wyciśnięta z porów. Prędkość przepływu w przekroju obliczeniowym jest wynikiem wyciskania płynu z warstw leżących poniżej, natomiast w odległości dz , przy założeniu, że naprężenie całkowite jest stałe, zwiększa się o wartość:

$$\frac{\partial v}{\partial z} dz = -\frac{\partial s}{\partial t} dz = -\frac{1}{M} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} dz. \quad (3.5)$$

Korzystając z prawa Darcy'ego, $v = -kI$, gdzie k to współczynnik filtracji, a I to spadek hydrauliczny, można określić zmianę prędkości filtracji w kierunku pionowym, skąd można otrzymać następującą zależność:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (3.6)$$

gdzie c_k to współczynnik konsolidacji,

$$c_k = \frac{kM}{\gamma_w} \quad (3.7)$$

Równania ruchu obu faz przedstawił Gersewanow (1937), w formie nieco zmodyfikowanej podał je Piętkowski (1957).

- Równanie ruchu płynu

W celu uzyskania równania ruchu płynu, wydziela się elementarny sześcian o bokach dx, dy, dz . Początkowa objętość wody w sześcianie elementarnym to $V^l = \frac{e}{1+e} dx dy dz$,

natomiast szkieletu to $V^s = \frac{1}{1+e} dx dy dz$. Przez dolną powierzchnię sześcianu wpływa woda

o wydatku q (na jednostkę powierzchni), natomiast przez górną ściankę wypływa $q + \frac{\partial q}{\partial z} dz$.

Zgodnie z założeniem nieściśliwości obu faz, wypływająca woda zostaje zastępowana przez szkielet. Dla ruchu wody i szkieletu wyłącznie w kierunku pionowym

$$q + q_s = 0, \quad (3.8)$$

gdzie q_s to ilość szkieletu, która została wtłoczona do elementarnego sześcianu. W czasie dt ubytek wody z elementarnego sześcianu wyniesie:

$$\left[\left(q + \frac{\partial q}{\partial z} dz \right) dx dy - q dx dy \right] dt = \frac{\partial q}{\partial z} dx dy dz dt, \quad (3.9)$$

objętość wody natomiast będzie wynosić

$$V_t^l = \frac{e}{1+e} dx dy dz - \frac{\partial q}{\partial z} dz dx dy dz dt, \quad (3.10)$$

natomiast przychód szkieletu wyniesie $\frac{\partial q_s}{\partial z} dx dy dz dt$, i analogicznie, zgodnie z (3.8):

$$V_t^s = \frac{1}{1+e} dx dy dz + \frac{\partial q}{\partial z} dz dx dy dz dt. \quad (3.11)$$

Wskaźnik porowatości w czasie dt zmieni się o $\frac{\partial e}{\partial t} dt$, uwzględniając (3.10) i (3.11)

$$e + \frac{\partial e}{\partial t} dt = \frac{\frac{e}{1+e} dx dy dz - \frac{\partial q}{\partial z} dx dy dz dt}{\frac{1}{1+e} dx dy dz + \frac{\partial q}{\partial z} dx dy dz dt} \quad (3.12)$$

Po odrzuceniu małej wyższego rzędu dt^2 , otrzymuje się równanie:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} (1+e)^2, \quad (3.13)$$

które można zapisać również w postaci (Piętkowski 1957):

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{a}{(1+e)^2} \frac{\partial \sigma'}{\partial t}. \quad (3.14)$$

- Równanie ruchu szkieletu

Podczas wyciskania wody ku górze, szkielet gruntowy przemieszcza się w dół. Na sześcian elementarny działają w tej sytuacji następujące siły (za Piętkowskim 1957):

- siła ciężkości szkieletu pomniejszona o siłę wyporu:

$$G_w = -(\gamma^s - \gamma^w) \frac{1}{1+e} dx dy dz, \quad (3.15)$$

gdzie γ_s to ciężar właściwy szkieletu a γ^w to ciężar właściwy wody,

- nacisk szkieletu gruntowego $-\frac{\partial \sigma'}{\partial z}$
- ciśnienie spływowe

$$D dx dy dz = \left(\gamma^w I - \frac{\gamma^w}{g} \frac{\partial q}{\partial t} \right) dx dy dz, \quad (3.16)$$

- siła bezwładności

$$\frac{\gamma^s}{g} \frac{1}{1+e} dx dy dz \frac{dv^s}{dt}. \quad (3.17)$$

Prędkość przesuwania się szkieletu gruntowego bez uwzględnienia przekroju porów wynosi:

$$v^s = (1+e) q_g, \quad (3.18)$$

$$\frac{dv^s}{dt} = (1+e) \frac{dq^s}{dt}. \quad (3.19)$$

Uwzględniając równanie (3.19) w (3.17):

$$\frac{\gamma^s}{g} \frac{1}{1+e} dx dy dz (1+e) \frac{dq^s}{dt} = \frac{\gamma^s}{g} dx dy dz \frac{dq^s}{dt}. \quad (3.20)$$

Przyrównując (3.15), (3.16) i (3.17) do (3.20), po podzieleniu przez $dx dy dz$, oraz oznaczeniu $q = -q^s$ i zastąpieniu $\frac{dq}{dt}$ przez $\frac{\partial q}{\partial t}$, dla bardzo małych prędkości filtracji otrzymuje się:

$$-\frac{\gamma^s - \gamma^w}{1+e} + \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \gamma^w I - \frac{\gamma^w}{g} \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\gamma^s}{g} \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Przez powierzchnię sześcianu elementarnego przesącza się do góry woda w ilości q , jednocześnie w dół przesącza się szkielet w ilości $q_g = -q$ oraz woda w ilości eq_g . Pod wpływem spadku hydraulicznego woda przesącza się zatem w ilości:

$$q(1+e) = kI, \quad (3.22)$$

stąd

$$I = \frac{1+e}{k} q. \quad (3.23)$$

Zatem równanie (3.21) przybiera postać:

$$-\frac{\gamma^s - \gamma^w}{1+e} - \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \frac{1+e}{k} \gamma^w q - \frac{\gamma^w}{g} \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\gamma^s}{g} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3.24)$$

Rozwiązanie równań ruchu (3.14) i (3.24) stanowi funkcja osiadania:

$$s = -ah \frac{\sigma'_t - \sigma'_0}{1 + e} (1 - e^{at}), \quad (3.25)$$

która dla $t = \infty$ jest równa (3.3).

Model ten, mimo, iż przestarzały, jest do chwili obecnej szeroko wykorzystywany w mechanice gruntów. Jego podstawową wadą jest fakt, że opisuje jedynie jednowymiarową konsolidację, oraz zakłada nieściśliwość obu faz ośrodka, co jest oczywiście nieprawdą w odniesieniu do rzeczywistych gruntów. Ponadto model ten nie definiuje żadnych stałych materiałowych dla ośrodka. Nowakowski (2015) zwraca uwagę, że w świetle swoich ograniczeń (nieściśliwy szkielet i nieściśliwy, nielepki płyn) teoria ta teoretycznie nie powinna mieć zastosowania w mechanice gruntów i skał. Szymański (2007) jako powód popularności tej teorii, pomimo rozbieżności modelu z gruntem rzeczywistym, podaje łatwość wyznaczenia jej stałych materiałowych.

3.1.2. Teoria porospężystości Biota-Darcy'ego

Bardziej ogólną, trójwymiarową teorię konsolidacji przedstawił w 1935r Biot, obecnie znaną jako teoria porospężystości. Ma ona zastosowanie nie tylko dla gruntów, lecz również dla ogółu ośrodków porowatych, w tym anizotropowych (Biot 1955), wypełnionych płynem, jak np. niektóre tkanki biologiczne. Teoria ta następnie była rozwijana przez Biota, Biota i Willisa i wielu innych. Należy wspomnieć, że o ile same równania teorii nie budzą zastrzeżeń, tak ich współczynniki są w różny sposób interpretowane przez badaczy, stąd w literaturze można spotkać różne ich definicje, również w pracach Biota (1941,1955).

Układ równań zawierający równania równowagi uwzględniające podane przez Biota związki dla obu faz uzupełniony równaniem filtracji Darcy'ego zastosowanym do opisu zmiany zawartości płynu w ośrodku (wydatku) tworzą model Biota-Darcy'ego.

Podstawowe założenia pierwotnej teorii Biota (1941) były następujące:

- Materiał jest izotropowy (praca z 1955r przedstawia również teorię dla ośrodków anizotropowych),
- Relacje naprężenie-odkształcenie są liniowe i odwracalne,
- Występują małe przemieszczenia,

- płyn wypełniający pory ośrodka jest nieściśliwy (w kolejnych pracach Biot zakładał już, że płyn jest lepki i ściśliwy),
- płyn porowy może zawierać bąbelki gazu,
- płyn przepływa przez pory ośrodka zgodnie z prawem Darcy'ego.

Biot potraktował szkielet jako ośrodek sprężysty, w którym relacje naprężenie-odkształcenie opisać można za pomocą prawa Hooke'a, oraz założył, że na odkształcenie szkieletu ma wpływ również naprężenie w płynie. Odkształcenie ośrodka opisał równaniem:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{\sigma \delta_{ij}}{3H}, \quad (3.26)$$

gdzie ε_{ij} to odkształcenie ośrodka, σ_{ij} to tensor naprężeń w szkielecie, G to moduł Kirchoffa, ν to współczynnik Poissona, E to moduł Younga, σ to naprężenie w płynie, natomiast H jest miarą ściśliwości gruntu pod wpływem zmiany ciśnienia płynu. Wykorzystywane przez ten model naprężenia w płynie i w szkielecie, odniesione do powierzchni ośrodka, $\sigma = -pf$ określane są jako naprężenia „rozmyte” lub „cząstkowe”. W opartych na klasycznym modelu Biota, występują 2 równania konstytutywne. Biot, posługiwał się stosunkowo łatwą do pomierzenia w trakcie procesu konsolidacji zmianą zawartości płynu w porach ośrodka, którą opisał równaniem (Biot, 1941):

$$\zeta = \frac{\sigma_{ii}}{3H} + \frac{\sigma}{R}, \quad (3.27)$$

gdzie ζ to zmiana zawartości płynu w porach ośrodka, a R określa zmianę zawartości płynu wskutek zmiany ciśnienia.

Dla odkształceń objętościowych, przy użyciu naprężenia średniego $\sigma_m = \sigma_{ii} / 3$ związki konstytutywne wg Biota przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} + \frac{\sigma}{H}, \\ \zeta &= \frac{\sigma_m}{H} + \frac{\sigma}{R}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

gdzie K to moduł sprężystości objętościowej szkieletu.

W celu uproszczenia zapisu i możliwości porównania teorii konsolidacji Biota z teorią Terzagiego, pierwsze z równań (3.28) można napisać w postaci:

$$K\varepsilon = \sigma_m + \alpha\sigma, \quad (3.29)$$

gdzie α to współczynnik Biota $\alpha = K / H$ – oznacza on stosunek zmiany zawartości płynu do zmiany objętości całej próbki. Według Skemptona (1954) współczynnik Biota ma wartość:

$$\alpha = 1 - \frac{K^d}{K^s}, \quad (3.30)$$

gdzie K^d to moduł sprężystości objętościowej ośrodka dwufazowego z odpływem, natomiast K^s to moduł sprężystości objętościowej szkieletu. Nur i Byerlee (1971) zaproponowali dla tak określonego współczynnika Biota uogólnioną postać równania (3.29) w postaci:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \quad (3.31)$$

gdzie σ'_{ij} to naprężenie efektywne, a p to ciśnienie porowe. Dla naprężenia izotropowego $\sigma = \sigma' - \alpha p$. Gdy współczynnik $\alpha = 1$ (szkielet nieściśliwy), zagadnienie sprowadza się do modelu Terzagiego.

Jeśli analogicznie postąpi się z drugim z równań (3.28) i wprowadzi $B = R / H$, można otrzymać:

$$R\zeta = \sigma + \frac{\sigma_m}{B}, \quad (3.32)$$

gdzie B to parametr Skemptona, $B = \Delta p / \Delta \sigma$ (Skempton 1954) – w przypadku teorii Terzagiego, gdzie pomijana jest ściśliwość płynu i szkieletu, $B = 1$.

Stąd w literaturze spotykana jest czasem następująca postać równań konstytutywnych (Detournay, Cheng 1993):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{K} (\sigma_m + \alpha\sigma), \\ \zeta &= \frac{\alpha}{K} \left(\sigma_m + \frac{\sigma}{B} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Układ równań (3.33) można zapisać też przy użyciu modułu Biota M_B . Jest on odwrotnością współczynnika pojemności S, definiowanego jako zmiana objętości płynu w wyniku zmiany

ciśnienia porowego przy stałym odkształceniu objętościowym i w stałej temperaturze, za Verruijtem (2015):

$$\frac{1}{M_B} = S = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p} \Big|_{\varepsilon} = \frac{f}{K_f} + \frac{\alpha - f}{K}. \quad (3.34)$$

Równania konstytutywne mają wtedy postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \alpha M_B \zeta - K_u \varepsilon, \\ \sigma &= \alpha M_B \varepsilon - M_B \zeta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

W 1955r Biot przedefiniował swoją teorię, oraz zaadaptował ją dla ośrodków anizotropowych. Zmieniła się również definicja podanych przez niego stałych materiałowych, skąd w wielu pracach dotyczących porosprężystości można spotkać różne ich definicje. Definicje wszystkich stałych z różnych etapów pracy Biota i zależności między nimi zebrali i opisali Detournay i Cheng (1993).

Dla szkieletu izotropowego, związki opisujące zależność naprężenia od odkształcenia, zapisane za pomocą oznaczeń przyjętych przez Biota (1955) mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N \varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\zeta) \delta_{ij}, \\ \sigma \delta_{ij} &= Q\varepsilon \delta_{ij} + R\zeta \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

gdzie A i N to współczynniki dla ośrodka porowatego, odpowiadające stałym Lamégo λ i μ dla ośrodka sprężystego, Q to współczynnik określający ilość płynu, która może być wtłoczona do ciała bez zmiany jego objętości, $\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}$. Wygodną dla obliczeń formą równań, której używają m.in. Derski (1982) i Strzelecki i in. (2008), jest postać uzyskana przez eliminację z pierwszego z równań (3.36) zmiany objętości płynu za pomocą drugiego z równań (3.36):

$$\sigma_{ij} = 2N \varepsilon_{ij} + \left(M_B \varepsilon + \frac{Q}{R} \sigma_w \right) \delta_{ij}, \quad (3.37)$$

gdzie $M_B = A - \frac{Q}{R}$.

Zmiana zawartości płynu w porach wynika, oprócz jego ściśliwości, ze zmiany objętości porów, czyli wydatku. Prędkość wypływu opisuje równanie Darcy:

$$v = -k \operatorname{grad} \left(-\frac{\sigma}{\gamma^w f_0} + z \right), \quad (3.38)$$

gdzie v to prędkość filtracji, $v = v_{rz} f$. Jeśli $\sigma = -p f_0$ i $v_{rz} = \dot{\theta}$, przy założeniu stałego współczynnika filtracji i porowatości, zgodnie z drugim w równań (3.35) można napisać (za Verruijtem, 2015):

$$\frac{k}{\rho^f g f_0} \nabla^2 \sigma = \alpha \dot{\varepsilon} - \frac{S}{f_0} \dot{\sigma}. \quad (3.39)$$

Przedstawione powyżej równania stanowią klasyczny model Biota-Darcy'ego. Nieco inny od przedstawionego powyżej opis przedstawił Coussy (2007,2010). Zamiast zmiany zawartości płynu, używa on w związkach konstytutywnych zmiany porowatości. Dodatkowo, wyróżnił on porowatość w opisie Lagrange'a (oznaczona tu jako f) i Eulera (oznaczana jako n). Według tego opisu, jeśli objętość $d\Omega$ zmienia się w miarę deformacji, to w danej chwili pory zajmują objętość $nd\Omega$, natomiast w odniesieniu do stanu początkowego można ją przedstawić jako $f\Omega_0$. Zmianę porowatości w procesie odkształcenia oznaczyć można wtedy jako $\varphi = f - f_0$. Odkształcenie ośrodka definiowane jest w postaci:

$$\varepsilon = (1 - f_0) \varepsilon_s + \varphi, \quad (3.40)$$

gdzie ε to odkształcenie objętościowe ośrodka a ε_s to odkształcenie objętościowe szkieletu. W przypadku ośrodka w którym szkielet jest słabo ściśliwy i można założyć jego nieodkształcalność, $\varepsilon = \varphi$. Można wtedy napisać, że $\varepsilon = (e - e_0) / (1 + e_0)$, gdzie e to wskaźnik porowatości. Naprężenie przenoszone przez ośrodek jest sumą naprężeń rozmytych:

$$\sigma = (1 - f_0) \sigma_s - f_0 p. \quad (3.41)$$

Bilans energii swobodnej Coussy przedstawia wyrażeniem:

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \varphi dp - d\eta = 0, \quad (3.42)$$

gdzie η to funkcja stanu uzyskana w wyniku transformacji Legendre'a, $\eta = \chi - p\varphi$, s_{ij} to naprężenia ścinające, e_{ij} to odkształcenie postaciowe a φ to zmiana porowatości wg opisu

Lagrange'a (jest tu ona parametrem stanu). Wg Coussy'ego powodem odkształcenia ośrodka jest, oprócz odkształcenia szkieletu zmiana jego porowatości: $\varepsilon = (1 - f_0)\varepsilon_s + \varphi$, gdzie f_0 to porowatość początkowa, zatem dla nieodkształcalnego szkieletu odkształcenie ośrodka wynika jedynie ze zmiany jego porowatości: $\varepsilon = \varphi$. Równania stanu, od których pochodzą wiązki konstytutywne mają u niego postać:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varphi = -\frac{\partial \eta}{\partial p}. \quad (3.43)$$

Dla warunków izotermicznych równania konstytutywne mają wtedy postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \left(K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \\ \varphi &= \alpha \varepsilon + \frac{p}{N}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

gdzie α to współczynnik Biota, N jest współczynnikiem określającym, jaki wpływ ma naprężenie w płynie na zmianę objętości porów, $N^{-1} = (\alpha - f_0) / K$.

Coussy proponuje również zapis pierwszego z równań w postaci:

$$\sigma_{ij}'' = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}, \quad (3.45)$$

gdzie $\sigma_{ij}'' = \sigma_{ij} + \alpha p \delta_{ij}$, jest naprężeniem efektywnym w ujęciu teorii Biota. Coussy (2010) zaznacza, że jeśli szkielet jest nieściśliwy, $K \rightarrow \infty$, więc $\alpha \rightarrow 1$, $N^{-1} \rightarrow 0$, otrzymujemy więc wspomnianą wcześniej zależność $\varepsilon = \varphi$ a naprężenie efektywne σ_{ij}'' redukuje się do naprężenia efektywnego w rozumieniu Terzagiego.

Zmianę zawartości płynu autor uzyskuje korzystając z zależności określającej masę płynu w porach $m^f = \rho^f \varphi$. Jej zmiana wyniesie $dm_f = \varphi d\rho_f + \rho_f d\varphi$, zatem zmiana objętości

płynu to $d\zeta = \frac{dm_f}{\rho_f} = \varphi \frac{d\rho_f}{\rho_f} + d\varphi$, skąd eliminując zmianę porowatości $d\varphi$ można

uzyskać:

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = b_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{M} dp. \quad (3.46)$$

Kolejną formą interpretacji równań prezentują np. Auriault i in (1993), Strzelecki i in (2008), gdzie zamiast zawartości płynu w porach ośrodka ϑ autorzy posługują się zmianą objętości płynu θ . Zmiana objętości zajmowanej przez płyn wynika, oprócz jego ściśliwości, ze zmiany objętości porów. Opis ruchu płynu w ośrodku przedstawia zasada zachowania pędu uwzględniająca równanie Darcy'ego.

Wilmański (2006) podał w wątpliwość część założeń Biota, na przykład sprzężenie obu faz ośrodka, gdzie bez uwzględnienia gradientu porowatości, ośrodek można rozpatrywać jako prostą mieszaninę, gdzie naprężenie w danej fazie zależy wyłącznie od odkształceń tej fazy. Za niezgodne z zasadą materialnej obiektywności, według której związki konstytutywne powinny być niezmiennie bez względu na punkt odniesienia, Wilmański uznał też człony sprzężenia dynamicznego obu faz, które zależą od układu odniesienia i materiału. Zarzucił również, że model Biota nie opisuje zmian porowatości. Aby móc wykazać uzależnienie naprężenia od odkształceń obu faz i zachować zgodność z drugą zasadą termodynamiki, przedstawił model, w którym równania konstytutywne pokazują zależność naprężenia również od gradientu porowatości:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij} - N(f - f_0)\delta_{ij}, \\ \sigma &= \sigma^0 + \rho^f R\theta + Q\varepsilon + N_p(f - f_0),\end{aligned}\tag{3.47}$$

gdzie N_p to nowa stała materiałowa, określająca wpływ zmiany porowatości na naprężenia. Autor zaznacza, że człon ten może zaniknąć w modelu liniowym.

Ostatecznie Wilmański uznał jednak, że opisane wady (które występują w wielu liniowych modelach, choćby w klasycznej teorii sprężystości) nie dyskwalifikują modelu Biota, gdyż uwzględnienie opisanych przez niego efektów nie ma dużego wpływu na rezultaty.

Teoria porosprężystości, oprócz modelowania materiałów takich jak grunty i skały, znajduje również zastosowanie przy modelowaniu innych ośrodków porowatych, np. tkanek biologicznych takich, jak kości (Cowin 1999) ściany tętnic (Simon i in 1993), skóra (Mark i in 1994), mięsień sercowy (Yang i Taber 1991), mózg (Peña 1996), Płuca (Berger i in, 2016) czy torebka stawowa (Mow i in. 1986), gdzie tkanka jest traktowana jako ośrodek dwufazowy złożony z najczęściej nieściśliwych, szkieletu oraz płynu tkankowego. Interesujące podejście zaprezentowali Peña i in. (1998), którzy przedstawili teoretyczny model zakładający, że tkanka może być traktowana jako materiał porosprężysty, złożony ze szkieletu (będącego również materiałem porosprężystym, zbudowanym z polimerów, takich

jak kolagen) wypełniony, oprócz płynu tkankowego, porosprężystymi komórkami. Model ten pozwala na zamodelowanie m.in. różnego ciśnienia płynu w komórkach i płynu tkankowego. Według tych autorów w tkankach twardych, takich jak tkanka łączna, obciążenia przenoszone są głównie przez szkielet, natomiast w miękkich tkankach, takich, jak tkanka nabłonkowa, przez cytoszkielet. Dla skali komórek szkielet stanowią organelle, natomiast płyn jest płynem wewnątrzkomórkowym. Podczas procesu konsolidacji płyn wewnątrzkomórkowy wypływa przez ściany komórkowe do przestrzeni tkanki. Dokładniejszy opis cytoplazmy jako materiału porosprężystego przedstawili Mooendarbary i in (2013). Roose i in. (2003) Wykorzystali również model porosprężystości do zamodelowania naprężeń, jakie wywiera na otaczającej tkance rosnący guz.

3.1.3. Teoria porosprężystości w świetle teorii homogenizacji

Równania konstytutywne, odpowiadające równaniom dla teorii porosprężystości można również otrzymać za pomocą metod teorii homogenizacji. Teoria homogenizacji pozwala na określenie cech makroskopowych niejednorodnego ośrodka (zwanego ośrodkiem makroskopowo-ekwiwalentnym), takich, jak związki konstytutywne, równania bilansu wielkości fizycznych i parametry efektywne na podstawie znajomości jego mikrostruktury: geometrii, równań równowagi, równań konstytutywnych oraz warunków brzegowych dla reprezentatywnego elementu objętości REV (ang. representative element of volume) (Strzelecki i in, 2006).

Metody teorii homogenizacji podzielić można na metody zakładające periodyczność lub losowość ośrodka. Matematyczne podstawy homogenizacji struktur periodycznych (HSP) przedstawili Benssoussan, Lions i Papanicolau (1978), metoda następnie rozwijana była przez Sancheza-Palencię (1980) i in. Z metod zakładających losowość ośrodka wymienić można metodę modelowania stochastycznego Krönera (1986), metody samostabilizujące (Zaoui 1987), Metody Gelhara (1987), Matherona (1967), oraz przedstawiane przez licznych autorów metody średnich.

Teoria asymptotycznej homogenizacji posługuje się dwiema skalami – mikroskopową, będącą skalą niejednorodności, oraz makroskopową, dla ośrodka ekwiwalentnego (taktowanego jako jednorodny). Stosunek skali opisuje parametr $\varepsilon = \frac{l}{L}$, gdzie l jest wymiarem REV, natomiast L jest wymiarem w skali makroskopowej. Warunkiem możliwości skorzystania z tej metody jest rozdzielnosc skal, zatem parametr ε musi spełniać warunek $\varepsilon < 0.1$ (Strzelecki i in. 1996). Wielkość L odpowiada zmienna X ,

natomiast wielkości l – zmienna Y . Dla obydwu układów definiuje się zmienne bezwymiarowe: w skali makro $x = X / L$ (tzw. zmienna wolna) i w skali mikro $y = Y / l$ (tzw. zmienna szybka), przy pokrywającym się układzie współrzędnych można napisać $x = y\varepsilon$ gdy układem odniesienia jest skala mikro, i $y = x / \varepsilon$, gdy układem odniesienia jest skala makro. Operator różniczkowy teorii homogenizacji ma postać

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (3.48)$$

Rozwiązanie zagadnienia polega na znormalizowaniu równania opisującego proces, czyli sprowadzeniu wartości fizycznych do bezwymiarowych funkcji parametru ε , następnie rozwinięciu asymptotycznym funkcji:

$$f(x, y) = f^{(0)}(x, y) + \varepsilon f^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 f^{(2)}(x, y) + \dots + \varepsilon^i f^{(i)}(x, y), \quad (3.49)$$

i po identyfikacji członów odpowiadających danej potędze parametru ε i założeniu $\varepsilon \rightarrow 0$, rozwiązaniu otrzymanych równań różniczkowych i powrocie do wartości fizycznych.

Wśród licznych prac dotyczących ośrodków porowatych wymienić można rozwiązanie zagadnienia izotermicznego przepływu cieczy przez ośrodek porowaty przez Ene i Sanchez-Palencię (1975), pracę dotyczącą drgań (Sanchez-Palencia 1980), rozwiązanie zagadnienia przepływu gazu (Auriault, Strzelecki i Bauer 1990), rozwiązanie przewodzenia ciepła w ośrodku porowatym (Auriault 1983), rozwiązania transportu zanieczyszczeń przez dyfuzję (Auriault i Lewandowska 1993) i adwekcję (Auriault i Lewandowska 1996). Zagadnieniami dla skali wielokrotnej zajmowali się Auriault (1991), Royer (1996). Rozwiązanie zagadnienia propagacji fal w ośrodku porosprężystym, odpowiadające modelowi M.A. Biota uzyskali Burridge i Keller (1982). Wpływem mikrostruktury na parametry efektywne ośrodka porowatego zajmował się m.in. Łydźba (2002).

Przytaczane tu zagadnienie konsolidacji ośrodka porowatego opisane zostało przez Auriault i Sanchez Palencię (1977) dla porów wypełnionych płynem, oraz przez Auriault, Strzeleckiego i Bauera (1990) dla pustej matrycy porowatej lub matrycy wypełnionej gazem.

W przypadku, gdy pory ośrodka są puste, (ośrodek wypełnia przestrzeń Ω , szkielet wypełnia przestrzeń Ω_s), poszukiwaną funkcją jest tylko funkcja przemieszczenia szkieletu. W praktyce stan taki nie występuje, gdyż pory ośrodka zawsze wypełnione są cieczą lub

gazem - stanowi jednak ono punkt wyjścia dla analizy zagadnienia przy porach wypełnionych płynem. Przyjmuje się wtedy (Auriault i in, 1990):

- równanie równowagi szkieletu

$$\operatorname{div} \sigma_{ij}^{sf} = 0, \quad (3.50)$$

gdzie σ_{ij}^{sf} to tensor naprężenia ciała liniowo sprężystego, indeksy: s – dla szkieletu, f – wartość fizyczna,

- związek konstytutywny dla szkieletu (prawo Hooke'a):

$$\sigma_{ij}^{sf} = a_{ijkh}^f e_{kh}(\vec{u}^f), \quad (3.51)$$

gdzie a_{ijkh} to tensor stałych sprężystości, a e_{kh} to tensor odkształcenia, zależny od wektora przemieszczenia \vec{u} ,

- warunek brzegowy w przypadku pustych porów:

$$\left(\sigma_{ij}^{sf} N_j \right) |_{\Gamma} = 0, \quad (3.52)$$

- warunek brzegowy uzupełniają warunki okresowości przemieszczeń i naprężeń:

$$\begin{aligned} \left[\vec{u}^f \right] &= 0, \\ \left[\sigma_{ij}^{sf} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Po podstawieniu rozwinięcia przemieszczeń w szereg asymptotyczny i identyfikacji trzech najniższych rzędów rozwinięcia, uzyskiwane są kolejno rozwiązania dla najniższych rzędów ε . Ich szczegółowy opis można znaleźć w pozycjach Strzelecki (1996) lub Auriault, Boutin, Geindreau (2009).

Z rozwiązania dla rzędu ε^0 wynika, że przemieszczenia zależą tylko od zmiennej makroskopowej:

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{u}^{(0)}(x). \quad (3.54)$$

Uzyskane tą metodą równanie konstytutywne ośrodka ciągłego ma postać:

$$\sigma_{ij}^{T(0)} = c_{ijkh} e_{xkh}(\vec{u}^{(0)}), \quad (3.55)$$

gdzie $c_{ijkh} = a_{ijkh} + a_{ijkh} e_{ykh} \left(\xi_i^{lm} \right)$.

W skali makroskopowej równanie równowagi ma postać:

$$\sigma_{ij}^{T(0)},j = 0. \quad (3.56)$$

Naprężenie σ^T w skali makroskopowej jest naprężeniem rozmytym – w tej skali nie odróżnia się już obszarów zajmowanych przez szkielet i miejsc pustych, dotyczy ono całej powierzchni ośrodka. W przypadku pustych porów jest ono równe naprężeniu rozmytemu σ^s .

Metodą teorii homogenizacji został tu uzyskany nowy tensor stałych materiałowych dla ośrodka ciągłego, natomiast opisujące go równanie konstytutywne pozostało bez zmian (prawo Hooke'a).

W rzeczywistości pory ośrodka zawsze wypełnione są płynem – najczęściej jest to woda lub powietrze. Fazę gazową może stanowić też para wodna. Oprócz przemieszczenia szkieletu, poszukiwanymi funkcjami są tu prędkość przepływu płynu $\vec{v}^{(0)}$, oraz jego ciśnienie $p^{(0)}$; w przypadku płynu ściśliwego, również jego gęstość $\rho^{(0)}$.

W przypadku, gdy pory wypełnia nieściśliwy płyn Newtona, za który w pewnym przybliżeniu można uznać wodę, oprócz równania równowagi i równania konstytutywnego dla fazy stałej, należy również uwzględnić równanie ruchu cieczy:

$$\text{div } \sigma_{ij}^{lf} = 0, \quad (3.57)$$

równanie konstytutywne cieczy przybiera postać:

$$\sigma^{lf} = -p^f I_{ij} + 2\mu D_{ij}, \quad (3.58)$$

gdzie I_{ij} to tensor jednostkowy, a D_{ij} to tensor prędkości dewiatora odkształceń:

$$D_{ij} = e_{ij} \left(\vec{v}^f \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk} \left(\vec{v}^f \right), \quad (3.59)$$

gdzie δ_{ij} to delta Kroneckera, oraz równanie ciągłości przepływu:

$$\text{div} \left(v_i^f \right) = 0. \quad (3.60)$$

Warunki brzegowe mają wtedy postać:

$$\begin{aligned} \left[\left(\sigma_{ij}^{sf} - \sigma_{ij}^{lf} \right) N_j \right]_{\Gamma} &= 0, \\ \left[v_i^f - \dot{u}_i^f \right]_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Z rozwiązań dla rzędu ε^{-1} dla ciśnienia i dla rzędu ε^0 dla przemieszczeń i prędkości, wynika, że ciśnienie i przemieszczenia w płynie zależą tylko od zmiennej makroskopowej. z kolei rozwiązanie dla prędkości prowadzi do prawa Darcy'ego:

$$w_i^{f(0)} = -\tilde{k}_{ij} \text{grad } p^{(0)}, \quad (3.62)$$

gdzie \vec{w} to prędkość płynu względem szkieletu: $w_i = v_i - \dot{u}_i$, natomiast $\tilde{k}_{ij} = \frac{l^2}{\mu} k_{ij(y)}$.

Tensor $k_{ij}(y)$ jest funkcją zmiennej lokalnej.

W skali ośrodka naprężenie w szkielecie określa związek:

$$\sigma_{ij}^{T(0)} = c_{ijkh} e_{xkh} \left(\vec{u}^{(0)} \right) - \alpha_{ij} p^{(0)}, \quad (3.63)$$

gdzie α_{ij} to tensor sprężystości określający wpływ ciśnienia płynu w porach na stan naprężenia:

$$\alpha_{ij} = n I_{ij} + a_{ijlm} e_{ylm} \left(\vec{\eta} \right), \quad (3.64)$$

gdzie $n = \frac{|\Omega_f|}{|\Omega|}$.

Rozwiązanie równania ciągłości przepływu ma postać:

$$\frac{\partial \left(v_i^{(0)} - n \dot{u}_i^{(0)} \right)}{\partial x_i} = -\gamma_{ij} \dot{e}_{xij} \left(\vec{u}^{(0)} \right) - \beta \dot{p}^{(0)}, \quad (3.65)$$

gdzie $\gamma_{ij} = n I_{ij} - \xi_{p,p}^{ij}$ i $\beta = \eta_{p,p}$.

Podsumowując, makroskopowe zachowania ośrodka porowatego wypełnionego nieściśliwym płynem Newtona, opisują następujące równania:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} c_{ijkh} e_{xkh}(\bar{u}) - \alpha_{ij} p = 0, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\tilde{k}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = -\gamma_{ij} \dot{e}_{xij}(\bar{u}) - \beta \dot{p}.$$

Układ ten odpowiada układowi równań modelu porospężystości Biota-Darcy'ego. W przypadku, gdy wypełniający pory płyn jest ściśliwy, poszukiwaną funkcją jest również jego gęstość. Równania dla szkieletu oraz warunki brzegowe pozostają bez zmian względem modelu dla płynu nieściśliwego, modyfikacji ulegają równania dla płynu (w tym przykładzie model Stokesa z uwzględnieniem ściśliwości barotropowej):

- równanie ruchu:

$$\operatorname{div} \sigma_{ij}^{lf} = \rho^f \frac{D\bar{v}^f}{Dt}, \quad (3.67)$$

- równanie konstytutywne płynu:

$$\sigma^{lf} = -p^f I_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda e_{ii}(\bar{v}^f) I_{ij}. \quad (3.68)$$

Po uwzględnieniu równania konstytutywnego, równanie ruchu ma postać:

$$\mu \nabla^2 \bar{v}^f - (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{v}^f) - \operatorname{grad} p^f = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}^f}{\partial t} + (\bar{v}^f \operatorname{grad}) \bar{v}^f \right). \quad (3.69)$$

W pracy Auriault, Strzelecki, Bauer (1993) przedstawione są rozwiązania dla przepływu ustalonego i nieustalonego, dla różnych rzędów wielkości liczb bezwymiarowych Q_l (stosunek sił powstających z działania gradientu ciśnienia do sił oporu lepkiego przepływającej cieczy), R_{ll} (liczba Reynoldsa), R_{el} (chwilowa liczba Reynoldsa), oraz liczby Strouhala $S = R_{ll} / R_{el}$. Autorzy pracy wykazali, że proces jest niehomogenizowalny dla liczby Strouhala $S = O(\varepsilon^{-1})$, natomiast dla rzędów wyższych, niż $O(1)$, przepływ nieustalony sprowadza się do przypadku przepływu ustalonego. W przypadku, gdy liczba Reynoldsa rośnie w stosunku do Q ($Q = O(\varepsilon^{-1})$ i $R_{el} = O(1)$), prawo przepływu przestaje być liniowe.

Rozwiązanie dla prędkości, przemieszczeń i ciśnienia dla niższych rzędów ε odpowiada rozwiązaniu dla płynu nieściśliwego, skąd otrzymać można przy analogicznym postępowaniu związek konstytutywny:

$$\sigma_{ij}^{T(0)} = c_{ijkh} e_{xkh} \left(u^{(0)} \right) - \alpha_{ij} p^{(0)}, \quad (3.70)$$

oraz równanie równowagi:

$$\operatorname{div}_x \sigma_{ij}^{T(0)} = 0. \quad (3.71)$$

Po ich uwzględnieniu w równaniu ciągłości przepływu dla rzędu ε otrzymuje się następujące równanie w skali makro:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + A \bar{u} v_{ij} \operatorname{grad} p + \rho (\chi_{ij} \dot{e}_{ij} + \beta \dot{p}) = -n \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.72)$$

gdzie A to współczynnik podatności cieczy: $A = -\frac{\partial f}{\partial p} / \frac{\partial f}{\partial \rho}$, v_{ij} to tensor ściśliwości płynu,

χ_{ij} to tensor drugiego rzędu, $\chi_{ij} = \gamma_{ij} - n I_{ij}$, a β to parametr efektywny.

Układ równań konsolidacji dla ośrodka ekwiwalentnego zatem ma postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} c_{ijkh} e_{xkh} \left(\bar{u} \right) - \alpha_{ij} p &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\rho \tilde{k}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) &= -\rho (\gamma_{ij} \dot{e}_{xij}(\bar{u}) - \beta \dot{p}) - A \bar{u} v_{ij} \operatorname{grad} p - n \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ f(p, \rho) &= 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

W przypadku, założenia nieściśliwości płynu: $A = 0$, $\rho = \text{const}$, układ równań sprowadza się do układu równań klasycznej teorii konsolidacji dla cieczy nieściśliwej. W przypadku małej ściśliwości ($\rho^{(1)} = 0, v_{ij} = 0$), zdefiniowanej jako:

$$\dot{p} = k_l \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad (3.74)$$

gdzie k_l to współczynnik ściśliwości cieczy, równanie przepływu ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\rho \tilde{k}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \gamma_{ij} \dot{e}_{xij}(\bar{u}) - \beta^* \dot{p}, \quad (3.75)$$

dzie β^* jest zmodyfikowanym współczynnikiem uwzględniającym wpływ ściśliwości płynu, $\beta^* = \beta + nk_l^{-1}$. Taka postać równania odpowiada propozycji Bauera i Gergowicza (1986).

Współczynniki równań w skali makro uzyskać można metodami numerycznymi, przeprowadzając obliczenia na elemencie REV. Modelując REV przy użyciu równań w skali mikro przy założeniu warunków brzegowych i warunków periodyczności uzyskuje się wyniki, które po porównaniu z równaniami w skali makro, pozwalają uzyskać ich współczynniki.

3.1.4. Teoria porospężystości w świetle termodynamiki

3.1.4.1. Pierwsza zasada termodynamiki

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki, zmiana energii wewnętrznej układu jest równa sumie energii w formie ciepła i pracy mechanicznej wykonanej na układzie. Zasada ta jest formą zasady zachowania energii, rozszerzoną na procesy termodynamiczne. Można ją zapisać w postaci ogólnej, jako:

$$\dot{L} + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t}(W + K), \quad (3.76)$$

gdzie \dot{L} to moc sił działających n układ, Q to ciepło, W to energia wewnętrzna, natomiast K to energia kinetyczna układu.

W przypadku ośrodków dwufazowych, na podstawie prac De Groot, Mazur (1984), Derski (1975), Strzelecki i in (2008) można opisać energię wewnętrzną układu jako sumę energii wewnętrznej jego składników:

$$\dot{w} = \dot{w}_1 + \dot{w}_2, \quad (3.77)$$

gdzie w_1 to energia wewnętrzna szkieletu, a w_2 to energia wewnętrzna płynu. Na szkielet działają siły powierzchniowe, siły grawitacji oraz siły oporu lepkiego. Sumę ich mocy można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \dot{L}_1^S + \dot{L}_1^G + \dot{L}_1^\eta = \int_S \sigma_{ij} n_j v_j^s dS + \int_\Omega X_i \rho^1 v_i^s d\Omega + \int_\Omega b v_1^r v_i^s d\Omega \\ &= \int_\Omega \left(v_i^s (\sigma_{ij,j} + X_i \rho^1 + b v_1^r) + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Energia cieplna dostarczona do szkieletu (lub odebrana) przez powierzchnię S jest równa:

$$Q_1 = -\int_s q_i^s n_i dS = -\int_{\Omega} q_{i,i}^s d\Omega.$$

Energia wewnętrzna jest funkcją stanu, nie jest znana jej całkowita wartość, w opisie procesów termodynamicznych określa się jej zmianę, wynikającą ze zmiany parametrów stanu układu. Dla opisu ośrodka ciągłego można posłużyć się zmianą energii wewnętrznej szkieletu na jednostkę objętości:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1 = \int_{\Omega} \dot{w}_1 d\Omega. \quad (3.79)$$

Zmiana energii kinetycznej natomiast, dla szkieletu wyniesie:

$$\frac{\partial K_1}{\partial t} = \int_{\Omega} v_i^s \left(\rho_{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho_{12} \frac{\partial v_i^l}{\partial t} \right). \quad (3.80)$$

Stąd dla szkieletu i zasadę termodynamiki można zapisać w postaci:

$$\int_{\Omega} v_i^s \left(\sigma_{ij,j} + X_i \rho^1 + b v_i^r - \rho_{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} - \rho_{12} \frac{\partial v_i^l}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i}^s \right) d\Omega = \int_{\Omega} \dot{w}_1 d\Omega. \quad (3.81)$$

Wykorzystując równanie zachowania pędu, lokalną zmianę energii wewnętrznej dla szkieletu można opisać wzorem (Strzelecki i in. 2008):

$$\dot{w}_1 = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i}^s. \quad (3.82)$$

W podobny sposób kolejne człony równania (3.78) można zapisać dla płynu:

- moc sił działających na układ:

$$\dot{L}_2 = \dot{L}_2^S + \dot{L}_2^G + \dot{L}_2^N = \int_{\Omega} \left(v_i^l \left(\sigma_{,i} + X_i \rho^2 - b v_i^r \right) + \sigma \dot{\theta}_{ij} \right) d\Omega, \quad (3.83)$$

- energia cieplna dostarczona do układu:

$$Q_2 = -\int_s q_i^l n_i dS = -\int_{\Omega} q_{i,i}^l d\Omega, \quad (3.84)$$

- zmiana energii kinetycznej płynu:

$$\frac{\partial K_2}{\partial t} = \int_{\Omega} v_i^l \left(\rho_{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho_{22} \frac{\partial v_i^l}{\partial t} \right). \quad (3.85)$$

Stąd i zasadę termodynamiki można zapisać w postaci:

$$\int_{\Omega} \dot{w}_2 d\Omega = \int_{\Omega} v_i^l \left(\sigma_{,i} + X_i \rho^2 - b v_i^r \right) - \rho_{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} - \rho_{22} \frac{\partial v_i^l}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma \dot{\theta} - q_{i,i}^l \right) d\Omega. \quad (3.86)$$

Po zastosowaniu zasady zachowania pędu dla płynu lokalną zmianę energii wewnętrznej płynu opisuje wyrażenie:

$$\dot{w}_2 = \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}^l \quad (3.87)$$

Dla ośrodka dwufazowego, zgodnie z (3.77), zmiana energii wewnętrznej wyniesie:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}^s - q_{i,i}^l. \quad (3.88)$$

Zakładając, że ciepło przepływające przez układ jest równe sumie ciepła przepływającego przez obie fazy, $q_{i,i} = q_{i,i}^s + q_{i,i}^l$, można napisać:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}. \quad (3.89)$$

3.1.4.2. Druga zasada termodynamiki

Zgodnie z II zasadą termodynamiki, w układzie zamkniętym istnieje funkcja stanu niemalejąca z czasem: entropia. Entropię jako wielkość fizyczną przedstawić można analogicznie do objętości. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki, zmiana energii wewnętrznej jest równa sumie wykonanej pracy i dostarczonego/odebranego ciepła. Jeśli jako czynnik aktywny przyjąć ciśnienie oraz temperaturę, wtedy:

- praca mechaniczna wykonana zostaje wskutek działania ciśnienia, które powoduje przyrost lub ubytek objętości

$$dW = p dV, \quad (3.90)$$

- ciepło dostarczone/odebrane jest z układu wskutek działania temperatury. Wielkość ulegająca zmianie to entropia:

$$dQ = T dS. \quad (3.91)$$

Stąd entropię definiuje się za pomocą różniczki:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (3.92)$$

Druga zasada termodynamiki określa kierunek procesów samorzutnych. De Groot i Mazur (1965) oraz Derski (1975) posługują się entropią właściwą, odniesioną do jednostki objętości:

$$S = \int_{\Omega} s d\Omega. \quad (3.93)$$

Jeśli

$$\dot{Q} = - \int_S q_i n_i dS = - \int_{\Omega} q_{i,i} d\Omega, \quad (3.94)$$

oraz

$$\dot{s} = \frac{\dot{Q}}{T}, \quad (3.95)$$

wówczas

$$\dot{s} = \frac{\dot{Q}}{T^0} = - \int_{\Omega} \frac{q_{i,i}}{T} d\Omega. \quad (3.96)$$

Skoro

$$\left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} = \frac{q_{i,i}}{T} - \frac{q_i T_{,i}}{T^2}, \quad (3.97)$$

można napisać, że

$$\dot{s} = - \frac{q_{i,i}}{T} = - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}. \quad (3.98)$$

Stąd

$$\dot{s} = \dot{s}_z + \dot{s}_w, \quad (3.99)$$

gdzie $\dot{s}_z = -\left(\frac{q_{i,i}}{T}\right)_{,i}$ to lokalna entropia zewnętrzna, odnosząca się do odwracalnej części

procesu przewodzenia ciepła, która może przyjmować znak ujemny lub dodatni, natomiast

$\dot{s}_w = -\frac{q_i T_{,i}}{(T)^2}$ to lokalna entropia wewnętrzna, odnosząca się do procesu nieodwracalnego.

W przypadku procesu odwracalnego $\dot{s}_w = 0$. Drugą zasadę termodynamiki definiuje się również za pomocą nierówności Clausiusa-Duhema:

$$\dot{S}_w = -\int_{\Omega} \frac{q_i T_{,i}}{T^2} \geq 0 \quad (3.100)$$

Po uwzględnieniu entropii zewnętrznej w równaniu bilansu energii wewnętrznej ośrodka (3.89):

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}, \quad (3.101)$$

gdzie $q_{i,i} = \text{div}(\vec{q}) = \text{div}(\vec{q}^1 + \vec{q}^2)$, otrzymujemy:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} + \dot{s}T. \quad (3.102)$$

W równaniu tym występuje sześć parametrów stanu, z których trzy są niezależne. Można założyć, że energia wewnętrzna jest funkcją odkształceń szkieletu, dylatacji cieczy i entropii: $w = w(\varepsilon_{ij}, \theta, s)$. Różniczka zupełna ma wtedy postać:

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial w}{\partial s} \dot{s}, \quad (3.103)$$

stąd: $\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$, $\sigma = \frac{\partial w}{\partial \theta}$ i $T = \frac{\partial w}{\partial s}$. z tej zależności można otrzymać związki

konstytutywne, dla ośrodków sprężystych. Związki takie przez Nowackiego (1970) określane są jako trzecia postać związków konstytutywnych. Z drugiej zasady termodynamiki wynika również prawo przewodnictwa cieplnego.

Przewodzenie ciepła jest to przepływ energii z miejsc o wyższej temperaturze, do miejsc temperaturze niższej. Jako proces samorzutny i nieodwracalny, związany jest z powstawaniem entropii (Nowacki, 1970):

$$\Theta = -\frac{q_i T_{,i}}{T^2} > 0. \quad (3.104)$$

Powyższą nierówność można zapisać również w postaci

$$\Theta = q_i F_i, \quad (3.105)$$

gdzie $F_i = \frac{T_{,i}}{T^2} = \text{grad}\left(\frac{1}{T}\right)$ są to bodźce termodynamiczne wywołujące przepływ ciepła, od

których zależny jest wektor przepływu ciepła:

$$q_i = q_i(F_1, F_2, F_3). \quad (3.106)$$

W przypadku procesu quasi-statycznego proces przewodzenia ciepła można przybliżyć związkiem liniowym:

$$q_i = -L_{ij} F_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.107)$$

Zgodnie z IV zasadą termodynamiki, L_{ij} jest macierzą symetryczną. Zgodnie z równaniem Clausiusa-Duhema:

$$\Theta = L_{ij} F_i F_j > 0. \quad (3.108)$$

Współczynniki L_{ij} zgodnie z pracą De Groota i Mazura (1965) ograniczone są w następujący sposób:

$$L_{ij} \geq 0, \quad (3.109)$$

$$L_{kk} L_{jj} \geq \frac{1}{4} (L_{jk} + L_{kj})^2, \quad j, k = 1, 2, 3 \text{ (nie sumować).}$$

Oznaczając $\frac{L_{ij}}{T^2}$ jako λ_{ij} , nierówność (3.108) można zapisać w postaci:

$$\Theta = \frac{\lambda_{ij}}{T^2} T_{,i} T_{,j} > 0. \quad (3.110)$$

Z porównania otrzymanego równania z równaniem (3.104) wynika zależność:

$$q_i = -\lambda_{ij} T_{,j}. \quad (3.111)$$

Która stanowi prawo przewodnictwa cieplnego Fouriera dla ciała anizotropowego. Zakładając niewielkie wzrosty temperatury, składowe tensora λ_{ij} można potraktować jako wartości stałe. Jeśli przepływ entropii określa równanie $T\dot{S} = -q_{i,i}$, można napisać:

$$T\dot{S} = -\lambda_{ij}T_{,ij}. \quad (3.112)$$

W przypadku ośrodka dwufazowego najczęściej zakłada się, że jest on ośrodkiem ciągłym, a przepływ ciepła następuje w obu fazach jednocześnie. Można jednak przepływ ciepła potraktować w dwojaki sposób:

- przyjąć założenie, że ośrodek dwufazowy jest ośrodkiem ciągłym, gdzie zmiana energii wewnętrznej opisywana jest wzorem (3.89):

$$q_i = -\lambda_{ij}^{eff}T_{,j}, \quad (3.113)$$

- przyjąć przepływ ciepła w każdej fazie ośrodka, gdzie lokalnie płyn może mieć inną temperaturę niż szkielet, przepływ ciepła odbywa się też między fazami, zmiana energii wewnętrznej opisywana jest wzorem (3.88):

$$\begin{aligned} q_i^1 &= -\lambda_{ij}^1 T_{,j}^1, \\ q_i^2 &= -\lambda_{ij}^2 T_{,j}^2. \end{aligned} \quad (3.114)$$

3.1.4.3. Związki konstytutywne dla ośrodka dwufazowego składającego się z ciała stałego i płynu.

Związki konstytutywne dla ośrodka dwufazowego można określić przy pomocy praw termodynamiki, analogicznie, jak dla ośrodka jednofazowego. Zagadnieniem określania związków konstytutywnych dla ośrodków sprężystych zajmował się Nowacki (1970). Wyróżnił on 3 postaci związków konstytutywnych:

- I postać – związki określające zależność naprężenia i entropii od odkształcenia i temperatury, wyprowadzone przy użyciu energii swobodnej
- II postać – związki określające zależność odkształcenia i entropii od naprężenia i temperatury, wyprowadzone przy użyciu entalpii swobodnej (potencjału Gibbsa)
- III postać – związki określające zależność naprężenia i temperatury od odkształcenia i entropii, wyprowadzone przy użyciu energii wewnętrznej jako funkcji stanu

W podobny sposób określić można związki dla ośrodka porosprężystego. Pierwszą postać związków dla tego typu ośrodka przedstawili Coussy (1995) i Strzelecki (2008), różniąc się one temperaturą odniesienia.

Związki te wyprowadza się przy użyciu energii swobodnej Helmholtza, definiowanej jako:

$$F = W - ST . \quad (3.115)$$

W odniesieniu do jednostki objętości, $F = \int_{\Omega} \chi d\Omega$. Jej zmianę w czasie można zapisać

następującym wzorem:

$$\dot{\chi} = \dot{w} - \dot{s}T - s\dot{T}. \quad (3.116)$$

Zgodnie ze wzorem na zmianę energii wewnętrznej ośrodka dwufazowego (3.102), można zapisać:

$$\dot{\chi} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - s\dot{T}, \quad (3.117)$$

lub

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - s\dot{T} - \dot{\chi} = 0. \quad (3.118)$$

W pierwszej kolejności przedstawione zostanie postępowanie przy złożeniu procesu izotermicznego w celu porównania związków konstytutywnych uzyskanych tą metodą z klasycznymi związkami podanymi przez Biota (1957). Dla procesu izotermicznego ($s\dot{T} = 0$) powyższy związek przyjmuje postać:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - \dot{\chi} = 0. \quad (3.119)$$

Przy założeniu, że lokalna energia swobodna jest funkcją odkształceń: $\chi = \chi(\varepsilon_{ij}, \theta)$, oraz

jej zmiana jest różniczką zupełną, $d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} d\theta$, a przyrosty parametrów stanu są

pochodnymi cząstkowymi względem czasu, jej zmianę w czasie można zapisać w postaci:

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \dot{\theta}, \quad (3.120)$$

stąd:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\sigma - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} = 0, \quad (3.121)$$

czyli:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{oraz} \quad \sigma = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \quad (3.122)$$

W celu otrzymania związków funkcję energii swobodnej należy rozwinąć w szereg Taylora w okolicy stanu naturalnego:

$$(\varepsilon_{ij}, \theta) = \chi(0,0) + \frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \varepsilon_{ij} \theta + \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \theta \partial \theta} \theta^2 \right] + \dots$$

W stanie naturalnym przyjmuje się, że energia swobodna $\chi(0,0)$ oraz naprężenie w szkielecie $\frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij}}$ są równe zero, natomiast naprężenie w płynie $\frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \theta}$ w stanie naturalnym równe jest naprężeniu pochodzącemu od ciśnienia atmosferycznego. Stąd po zastosowaniu podstawień:

$$\frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = c_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} = \beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \theta \partial \theta} = \gamma, \quad (3.123)$$

równanie to można zapisać z dokładnością do małych wartości drugiego rzędu w postaci:

$$(\varepsilon_{ij}, \theta) = \sigma_a \theta + \frac{1}{2} (c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \gamma \theta^2). \quad (3.124)$$

Różniczkując zgodnie z (3.120), można otrzymać związki konstytutywne:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \theta, \quad (3.125)$$

$$\sigma - \sigma_a = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \gamma \theta.$$

Tensor c_{ijkl} jest tensorem czwartego rzędu, co udowodnił Nowacki (1975). Dla ośrodków izotropowych, zgodnie z pracą Nowackiego (1975), tensor c_{ijkl} można przedstawić przy użyciu stałych Lamégo:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (3.126)$$

Stałe λ i μ przez Biota oznaczone zostały odpowiednio jako A oraz N . Tensor drugiego rzędu β_{ij} , określający wzajemne oddziaływanie płynu oraz szkieletu. Zakładając, że na odkształcenie szkieletu ma wpływ tylko odkształcenie objętościowe płynu, $\beta_{ij} = \beta \delta_{ij}$, tensor ten oznaczyć można przy pomocy stałych materiałowych Biota jako $\beta_{ij} = Q \delta_{ij}$, natomiast stała $\gamma = R$ wyraża zmianę objętości płynu pod wpływem ciśnienia. Związki te można zapisać wtedy w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N \varepsilon_{ij} + (A \varepsilon + Q \theta) \delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q \varepsilon_{ij} + R \theta, \end{aligned} \quad (3.127)$$

co stanowi klasyczny zapis związków konstytutywnych teorii porosprężystości Biota.

3.1.5. Konsolidacja układu ciało stałe – gaz

Woda jest płynem słabo ściśliwym, w modelach filtracji i konsolidacji Terzaghiego uznawana jest za płyn nieściśliwy. W przypadku modelu konsolidacji Biota zakłada się, że jest płynem ściśliwym, choć czasem ta ściśliwość bywa pomijana. Gaz jest płynem mocno ściśliwym, ponadto jego objętość jest silnie zależna od temperatury. Zależność objętości gazu od ciśnienie i temperatury opisuje równanie Clapeyrona:

$$pV = nRT, \quad (3.128)$$

gdzie p to ciśnienie gazu, V to jego objętość, R to stała gazowa a T to temperatura. Poniżej przedstawione zostaną różne sposoby uwzględnienia ściśliwości fazy płynnej.

Detournay i Cheng (1993) dla bardzo ściśliwego płynu definiują współczynniki porosprężyste w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
K_u &= K \left(1 + \frac{\alpha^2 K_f}{\phi K} \right), \\
B &= \frac{K_f}{K_p}, \\
M &= \frac{K_f}{\phi}.
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Określają oni następujące wartości graniczne: Jeśli $K_f \rightarrow 0$, to $B \rightarrow 0$, $K_u \rightarrow K$ i $M \rightarrow 0$, czyli ośrodek zachowuje się jak materiał sprężysty bez płynu.

Verruijt (2015) proponuje dla ośrodka wypełnionego gazem modyfikację równania opisującego wypływ płynu z objętości kontrolnej. W równaniu filtracji (3.39) w gruntach nasyconych wodą człon $S\dot{p}$ jest niewielki w porównaniu do członu $\alpha\dot{\varepsilon}$, w przypadku gazów natomiast sytuacja jest odwrotna. Verruijt proponuje, żeby w przypadku płynu silnie ściśliwego pominąć człon opisujący odkształcenie szkieletu i używać równania w formie:

$$k\nabla^2\sigma = S\dot{\sigma}. \tag{3.130}$$

W układzie ciało stałe-gaz, oprócz interakcji mechanicznych między fazami, mogą występować zjawiska sorpcji. Szczególnie narażone na takie zjawiska są wapienie i węgiel. w przypadku występowania tego zjawiska, ośrodek na który działa ciśnienie p zamiast zmniejszać, zwiększa swoją objętość. Łydźba (1991) podał równania konstytutywne dla układu węgiel kamienny - gaz, w którym występują zjawiska sorpcji i desorpcji (model zakłada brak oddziaływań mechanicznych i chemicznych między fazami). Odkształcenie objętościowe szkieletu jest w tym modelu zależne od odkształcenia sprężystego, oraz od odkształcenia wynikającego z sorpcji:

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p, \tag{3.131}$$

gdzie ε_k to odkształcenie sprężyste, a ε_p to odkształcenie wynikające ze zjawiska sorpcji:

$$\varepsilon_p = a_1 + a_2 \ln\left(\frac{\tilde{p}}{p_0}\right) F(\tilde{p}), \tag{3.132}$$

gdzie a_1 i a_2 to parametry określające wpływ sorpcji na zmianę objętości, $F(\tilde{p})$ to izoterma sorpcji, a \tilde{p} to ciśnienie w stanie równowagi. Po zastosowaniu Izotermy Langmuira, związek opisujący zależność naprężenia od odkształcenia ma postać:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{E}{3(1-2\nu)} \left[a_1 + a_2 \ln \left(\frac{\tilde{p}}{p_0} \right) \right] \frac{A \frac{\tilde{p}}{p_0}}{B + \frac{\tilde{p}}{p_0}} \delta_{ij}. \quad (3.133)$$

Coussy (2010) dla ściśliwego płynu porowego proponuje zastosowanie równania konstytutywnego:

$$\frac{d\rho^f}{\rho^f} = \frac{dp}{K^f}, \quad (3.134)$$

gdzie K^f jest modułem sprężystości objętościowej płynu. Jeśli $\rho^f \phi$ jest masą płynu, który znajduje się w porach objętości kontrolnej $d\Omega_0$, zakładając niewielkie odkształcenia ($\phi / \phi_0 \ll 1$), równanie konstytutywne dla płynu ma postać:

$$\frac{d(\rho^f \phi)}{\rho^f} = \alpha d\varepsilon + \frac{dp}{M}, \quad (3.135)$$

gdzie $M^{-1} = \phi_0 / K^f + 1 / N$. Jeśli płyn porowy jest ściśliwą cieczą, moduł K^f Coussy uznaje za niezależny od ciśnienia. W przypadku gazu, jego ciśnienie opisując można równaniem gazu doskonałego:

$$p = \frac{\rho^f RT}{M_G}, \quad (3.136)$$

gdzie M_G to masa molowa, a ρ^f to aktualna gęstość gazu. Wtedy:

$$\frac{d\rho^f}{\rho^f} = \frac{dp}{p}, \quad \text{więc} \quad K^f = p, \quad (3.137)$$

czyli

$$\frac{d(\rho^f \phi)}{\rho^f} = \alpha d\varepsilon + \frac{dp}{N} + \frac{\phi_0 dp}{p}. \quad (3.138)$$

Przy przepływie nienasyconym (ciecz + gaz), z uwzględnieniem efektów powierzchniowych między fazami, równania dla warunków nieizotermicznych wg Coussy'ego mają postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \left(K - \frac{2}{3} N \right) \varepsilon \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} - \alpha \left[\chi p_1 + (1 - \chi) p_2 \right] \delta_{ij} - 3aKT \delta_{ij}, \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = \alpha \varepsilon + \frac{(\alpha \chi - \phi_0 S_1) p_1 + [\alpha (1 - \chi) - \phi_0 S_2] p_2}{M (\alpha - \phi_0)} + 2a_\varphi T,\end{aligned}\tag{3.139}$$

gdzie χ to stała zależna od saturacji S , T to temperatura, a, a_φ to współczynniki rozszerzalności termicznej.

Związki konstytutywne oparte na prawie Boyle'a-Mariotte'a dla procesów izotermicznych zaproponowali Strzelecki i in (1993), używając związków w postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K^*} + \frac{\sigma}{B}, \\ 1 + \theta &= \frac{\sigma_m}{B} + \frac{\sigma_a}{\sigma},\end{aligned}\tag{3.140}$$

gdzie B to parametr określający sprzężenie faz.

Model ten umożliwia zachowanie liniowej postaci układu równań konsolidacji, modyfikując jedynie ich współczynniki:

$$\begin{aligned}N^{sg} \nabla^2 u_i + 3(M^{sg} + N) \gamma_{0,i} &= -\frac{H^{sg}}{R^{sg}} \sigma_{w,i}, \\ C \nabla^2 \sigma_w &= \frac{1}{R^{sg}} \dot{\sigma}_w - 3 \frac{H^{sg}}{R^{sg}} \dot{\gamma}_0 + W.\end{aligned}\tag{3.141}$$

Gdzie indeks „sg” oznacza współczynnik zmodyfikowany dla gazu. Model numeryczny termokonsolidacji na podstawie tych związków przedstawiony został w pracy (Uciechowska, Strzelecki 2014).

W równaniach konstytutywnych (3.140) jedynie zmiana objętości płynu odniesiona jest do ciśnienia atmosferycznego jako ciśnienia początkowego, przy którym nie występują odkształcenia. W dalszej części pracy Strzelecki i in (1993), podane są również związki dla gazu, w których również odkształcenie objętościowe szkieletu jest uzależnione nie od absolutnej wartości ciśnienia, ale od wartości względem ciśnienia atmosferycznego:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{K}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \varepsilon_1 + \frac{B}{2} \left(1 - \frac{\Psi}{\Phi} \right) \theta, \\ \sigma &= \frac{B}{2} \left(1 - \frac{\Psi}{\Phi} \right) \varepsilon_1 + \frac{B^2}{2K} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \theta,\end{aligned}\tag{3.142}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Phi &= \left(1 + \frac{K\sigma_a}{B^2}\right), \\ \Psi &= \left(1 - \frac{K\sigma_a}{B^2}\right), \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon + \frac{\sigma_a}{B},\end{aligned}\tag{3.143}$$

skąd można po podstawieniu otrzymać współczynniki:

$$K^{sg} = \frac{K}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{\Phi}\right); \quad Q^{sg} = \frac{B}{2} \left(1 - \frac{\Psi}{\Phi}\right); \quad R^{sg} = \frac{B^2}{2K} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi}\right).\tag{3.144}$$

Z formy przedstawionych równań autorzy wywnioskowali, że $K > 0$ oraz $B < 0$. Spełnienie tego warunku nie jest jednak możliwe przy $Q > 0$, gdzie wg Biota (1957) Q jest zawsze dodatnie.

W celu korekty związków, wychodząc z układu równań opisującego odkształcenie objętościowe w ośrodku nasyconym wodą,

$$\begin{aligned}\sigma_m &= K\varepsilon + Q\theta, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta,\end{aligned}\tag{3.145}$$

uzyskać można związki odwrotne:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} + \frac{\sigma}{B}, \\ \theta &= \frac{\sigma_m}{B} + \frac{\sigma}{C},\end{aligned}\tag{3.146}$$

gdzie $K = \frac{2}{3}N + A - \frac{Q^2}{R}$, $B = -\frac{R}{Q}K + Q$, oraz $C = \frac{RK}{\frac{2}{3}N + A}$. Dla płynu ściśliwego, przy

uwzględnieniu równania Boyle'a-Mariotte'a:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} - \frac{\sigma - \sigma_a}{B}, \\ \theta &= -\frac{\sigma_m}{B} + \frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma}.\end{aligned}\tag{3.147}$$

W celu określenia na ich podstawie związków odwrotnych należy rozwiązać równanie kwadratowe:

$$\sigma_m^2 + \sigma_m \left[\frac{K}{B} \sigma_a - K\varepsilon + B(\theta + 1) \right] + K(\theta + 1)(\sigma_a - B\varepsilon) - K\sigma_a = 0. \quad (3.148)$$

Zakładając, że przy braku obciążeń odkształcenia zarówno szkieletu, jak i gazu są równe zero, szukanym wynikiem będzie pierwiastek spełniający równanie $\sigma_m(0,0) = 0$. Warunek ten spełniony jest dla wyrażenia:

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \left[-\frac{K}{B} \sigma_a + K\varepsilon - B(\theta + 1) + \sqrt{\left[\frac{K}{B} (\sigma_a - B\varepsilon) - B(\theta + 1) \right]^2 - 4K\sigma_a} \right], \quad (3.149)$$

Wobec tego związek opisujący naprężenia w płynie ma postać:

$$\sigma = \frac{B}{2K} \left[\frac{K}{B} \sigma_a - K\varepsilon - B(\theta + 1) + \sqrt{\left[\frac{K}{B} (\sigma_a - B\varepsilon) - B(\theta + 1) \right]^2 - 4K\sigma_a} \right]. \quad (3.150)$$

Kolejnym krokiem w celu uzyskania współczynników dla gazu jest rozwinięcie związków w szeregi MacLaurina:

$$\begin{aligned} \sigma_m = & \left[\frac{K}{2} + K \frac{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{2 \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right)} \right] \varepsilon - \left[\frac{B}{2} - \frac{B \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right) + 4K\sigma_a}} \right] \theta \\ & + \frac{K^2 \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right) - K^2 \frac{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{\left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right)}}{4 \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2} \varepsilon^2 \\ & + \frac{B^2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right) + 4K\sigma_a} - B^2 \frac{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}}}{4 \left[\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a \right]} \theta^2, \end{aligned} \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned}
\sigma = \sigma_a - \frac{B}{2K} & \left[K - \frac{K \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}} \right] \varepsilon - \frac{B}{2K} \frac{B \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}} \theta \\
& + \frac{B}{4K} \frac{K^2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} - \frac{K^2 \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}}}{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} \varepsilon^2 \\
& - \frac{B}{4K} \frac{B^2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} - \frac{B^2 \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}}}{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} \theta^2.
\end{aligned} \tag{3.152}$$

Dla małych odkształceń można przyjąć liniowe człony szeregów. Mają one postać:

$$\sigma_m = \frac{K}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \varepsilon + \frac{B}{2} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \theta, \tag{3.153}$$

$$\sigma = \sigma_a + \frac{B}{2} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \varepsilon + \frac{B^2}{2K} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \theta,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Phi &= \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right), \\
\Psi &= \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right).
\end{aligned} \tag{3.154}$$

Podstawiając: $K^{sg} = \frac{K}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right)$, $Q^{sg} = \frac{B}{2} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right)$, $R^{sg} = \frac{B^2}{2K} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right)$, równania można zapisać w znanej postaci:

$$\begin{aligned}
\sigma_m &= K^{sg} \varepsilon + Q^{sg} \theta, \\
\sigma &= Q^{sg} \varepsilon + R^{sg} \theta
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Pozostałe stałe materiałowe można obliczyć na podstawie uzyskanych współczynników równań dla gazu (za Strzeleckim i in. 2008): $A^{sg} = K^{sg} - \frac{2}{3}N$, $M^{sg} = A^{sg} - \frac{Q^{sg}}{R^{sg}}$, $H^{sg} = Q^{sg} + R^{sg}$. W formie równań (3.153) nie występuje już sprzeczność. Układ równań konsolidacji ośrodka wypełnionego gazem ma zatem postać:

$$N\nabla^2 u_i + (M^{sg} + N)\varepsilon_{,i} = -\frac{H^{sg}}{R^{sg}}\sigma_{,i},$$

$$\frac{C}{f}\nabla^2 \sigma = \frac{1}{R^{sg}}\dot{\sigma} - \frac{H^{sg}}{R^{sg}}\dot{\varepsilon}. \quad (3.156)$$

Układ można uzupełnić o człony związane z temperaturą w przypadku potrzeby opisu konsolidacji w warunkach nieizotermicznych. W przypadku dużych odkształceń, należy użyć kolejnych członów rozwinięcia.

Dodatkowo należałoby zwrócić uwagę, że w przypadku cieczy prędkości filtracji są niewielkie, przepływ jest laminarny, zatem do opisu przepływu można użyć prawa Darcy'ego; w równaniach zachowania pędu przy małych prędkościach pomijamy człony związane z bezwładnością. W przypadku gazów, zwłaszcza przy wysokiej temperaturze i ciśnieniu, powodujących szybki przepływ gazu o dużej gęstości, bezwładność zaczyna odgrywać większą rolę, i w porach gruntu może występować przepływ turbulentny.

Przy przepływie laminarnym opory ruchu zależne są tylko od lepkości przepływającej cieczy, widoczne jest to w formie równania Darcy'ego zaproponowanej dla przepływów jednowymiarowych przez Beara (1972):

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa} \vec{v}^f, \quad (3.157)$$

gdzie κ to współczynnik przepuszczalności, a μ to lepkość dynamiczna płynu, $\kappa = \frac{k\mu}{\gamma}$.

Przy wyższych prędkościach przepływ laminarny przechodzi w turbulentny i zależność między gradientem wysokości hydraulicznej a prędkością przestaje być liniowa, zaczynają mieć znaczenie opory związane z masą przepływającego płynu, będące funkcją kwadratową prędkości przepływu. Stąd do równania Darcy'ego została wprowadzona poprawka Forchheimera (1901), wśród zapisów tego równania, jedną z najbardziej popularnych jest forma podana przez Beara (1972):

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa} \bar{v}^f + \beta \rho \bar{v}^{f^2}, \quad (3.158)$$

gdzie β to współczynnik Forchheimera, znany również, jako współczynnik fluacji.

Bardziej szczegółowa klasyfikacja reżimów przepływu płynów przez ośrodki porowate została opracowana Chauvetau & Trirriot (1967), następnie zmodyfikowana przez Skjetne (1995). Dla ośrodków o prostej geometrii wyróżnia ona 4 reżimy (za Skjetne & Auriault, 1999):

- przepływ o liniowej charakterystyce, opisywany przez równanie Darcy'ego (3.157)
- przepływ o słabej bezwładności, opisywany przez równanie sześciennic:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa} \bar{v}^f + \frac{\gamma \rho}{\mu} \bar{v}^{f^3}, \quad (3.159)$$

Gdzie γ to stała materiałowa ośrodka,

- przepływ o dużej bezwładności, opisywany równaniem potęgowym:

$$-\frac{dp}{dx} = a \bar{v}^f + b \bar{v}^{f^m}, \quad (3.160)$$

gdzie a i b to współczynniki materiałowe, oraz $1 < m < 2$, lub w wersji uproszczonej:

$$-\frac{dp}{dx} = b \bar{v}^{f^m}. \quad (3.161)$$

W przypadku ośrodków anizotropowych, wg Skjetne & Auriault (1999), przepływ o dużej bezwładności opisuje równanie odpowiadające równaniu Forchheimera (3.158), przy czym współczynnik κ jest różny od współczynnika przepuszczalności przy przepływie laminarnym, a współczynnik β jest zależny od kierunku.

- Przepływ turbulentny, opisany równaniem:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa_{ft}} \bar{v}^f + \beta_t \rho \bar{v}^{f^2}, \quad (3.162)$$

gdzie: $\kappa_{ft} \neq \kappa_{fh}$ i $\beta_t \neq \beta$.

Analizę zagadnienia nieliniowej filtracji metodami asymptotycznej homogenizacji przeprowadzili m.in. Mei & Auriault (1991), Rasoloarijaona & Auriault (1994), gdzie dla reżimu przepływu o niewielkiej bezwładności (przy siłach lepkości będących tego samego rzędu, co siły bezwładności) otrzymali oni człon korygujący równanie Darcy'ego będący funkcją sześcienną prędkości filtracji (jego wartość, zgodnie z prezentowanymi przez nich wynikami badań laboratoryjnych, jest jednak niewielka), człon ten zanika dla reżimu u dużej bezwładności (Przy dominacji sił bezwładności nad siłami lepkości), gdzie spadek ciśnienia opisany jest funkcją kwadratową prędkości, co odpowiada równaniu Forchheimera.

Zgodnie z pracą Skjetne & Auriault (1999), przepływ o małej bezwładności występuje przy liczbie Reynoldsa $Re \ll 1$ do $Re = O(1)$, natomiast w pełni turbulentny występuje przy $Re \gg 1$. Dla ośrodków porowatych liczbę Reynoldsa definiuje się np. przez formułę podaną przez Beara (1972):

$$Re = \frac{v^f d_m}{\nu} \quad (3.163)$$

Gdzie d_m to średnica miarodajna ziaren (przyjmowana jako d_{10}), a ν to lepkość kinematyczna. W miarę wzrostu liczby Reynoldsa człon liniowy staje się pomijalny, zatem przepływ taki lepiej opisuje równanie Chezy-Krasnopolskiego (Kulma, 1995):

$$\nu = K \sqrt{I} \quad (3.164)$$

gdzie K to współczynnik oporów nieliniowych a i to spadek hydrauliczny (spadek wysokości H); używając oznaczeń jak w równaniu (3.158) można napisać $K = 1 / \sqrt{\beta \rho}$. Współczynniki filtracji i fluacji wyznaczyć można laboratoryjnie, oprócz tego istnieje wiele formuł empirycznych. Zestawienie formuł dla określania współczynników filtracji i fluacji oraz opis metody wyznaczania laboratoryjnego można znaleźć np. w pracy Sobieski & Dudda (2016).

3.1.6. Prace z zakresu termokonsolidacji ośrodków porowatych

W warunkach nieizotermicznych, na stan naprężenia i odkształcenia w ośrodku wpływ ma również pole temperatury. Biot w pracy dotyczącej termosprężystości (1956) zauważył analogię między związkami konstytutywnymi uwzględniającymi obecność płynu w porach ośrodka, a związkami uwzględniającymi zmiany temperatury. Porównanie związków konstytutywnych i stałych materiałowych dla obu procesów przedstawił Norris (1992).

Zimmermann (2010) przedstawił również analogię między równaniami równowagi oraz równaniami przepływu płynu i przepływu ciepła. Sam termin „porosprężystość” powstał przez analogię do termosprężystości. W przypadku zagadnień nieizotermicznych dla ośrodków porowatych w publikacjach anglojęzycznych używany jest często termin „thermoporoelectricity”, który analogicznie można przetłumaczyć jako „termoporosprężystość”.

W przypadku ośrodków sprężystych zależności między temperaturą, odkształceniem i naprężeniem opisują związki Duhamela-Neumanna. Sposób wyprowadzenia tych związków przedstawia w swojej monografii Nowacki (1970). Wychodząc z pierwszej zasady termodynamiki oraz spełniając nierówność Clausiusa-Duhema otrzymuje się związki opisujące zależność naprężenia i entropii od odkształcenia i zmian temperatury:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\vartheta \quad (3.165)$$

Gdzie ϑ to zmiana temperatury, a β_{ij} to stała materiałowa zależna od współczynnika rozszerzalności cieplnej: $\beta_{ij} = c_{ijkl}\alpha_{kl}$.

W przypadku ośrodków porosprężystych, związki konstytutywne wyprowadzić można w analogiczny sposób, przy czym zmiana energii wewnętrznej ośrodka zależna jest również od zmiany objętości płynu, jak to przedstawiono wcześniej dla przypadku izotermicznego. Autorów, którzy przedstawiali związki dla ośrodków porosprężystych odpowiadające związkom Duhamela-Neumanna różnią przyjęte założenia oraz użyte funkcje stanu, stąd w pracach z zakresu termoporosprężystości można spotkać się z różnymi interpretacjami stałych materiałowych.

Strzelecki (2006) przyjął jako funkcję stanu energię swobodną χ , jako parametry stanu natomiast odkształcenie ośrodka, odkształcenie płynu oraz temperaturę: $\chi = \chi(\varepsilon_{ij}, \theta, T)$.

Różniczka energii swobodnej ma postać $d\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\chi}{\partial T}dT$. Postępując

w sposób analogiczny do podanego wcześniej dla przypadku izotermicznego, oraz do podanego przez Nowackiego (1970) dla ośrodków termosprężystych, jej zmianę w czasie można zapisać w postaci:

$$\dot{\chi} = \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial T}\dot{T}. \quad (3.166)$$

Korzystając z równania (3.117) z rozdziału 3.1.4:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\sigma - \frac{\partial \chi}{\partial \theta}\right) \dot{\theta} + \left(-s - \frac{\partial \chi}{\partial T}\right) \dot{T} = 0, \quad (3.167)$$

Autor uzyskał zależności:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad -s = \frac{\partial \chi}{\partial T}. \quad (3.168)$$

Rozwinięcie w szereg Taylora energii swobodnej jako funkcji odkształceń szkieletu i płynu, oraz temperatury ma postać:

$$\begin{aligned} \chi(\varepsilon_{ij}, \theta, T) = & \chi(0, 0, T_0) + \frac{\partial \chi(0, 0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \chi(0, 0, T_0)}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial \chi(0, 0, T_0)}{\partial T} T + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi(0, 0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 \chi(0, 0, T_0)}{\partial \theta^2} \theta^2 + \frac{\partial^2 \chi(0, 0, T_0)}{\partial (T)^2} T^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 \chi(0, 0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \varepsilon_{ij} \theta + 2 \frac{\partial^2 \chi(0, 0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} T + 2 \frac{\partial^2 \chi(0, 0, T_0)}{\partial T \partial \theta} T \theta \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.169)$$

gdzie T_0 to temperatura stanu naturalnego, w którym nie występują naprężenia i odkształcenia. Dla takiego stanu można napisać:

$$\begin{aligned} \chi(0, 0, T_0) &= 0, \\ \sigma_{ij}(0, 0, T_0) &= 0, \\ \sigma(0, 0, T_0) &= \sigma_a, \\ s(0, 0, T_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Po zastosowaniu podstawień:

$$\begin{aligned}
c_{ijkl} &= \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \\
\beta_{ij} &= \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta}, \\
\gamma &= \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0)}{\partial \theta \partial \theta}, \\
\xi &= \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0)}{\partial T \partial T}, \\
\eta_{ij} &= \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}, \\
\omega &= \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0)}{\partial \theta \partial T},
\end{aligned} \tag{3.171}$$

rozwińnięcie z dokładnością do małych wartości drugiego rzędu ma postać:

$$\chi(\varepsilon_{ij}, \theta, T) = \sigma_a \theta + \frac{1}{2} (c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \eta_{ij} \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \gamma \theta^2 + \omega \theta (T - T_0) + \xi (T - T_0)^2),$$

skąd, korzystając z zależności (3.168) uzyskać można związki konstytutywne w postaci:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= c_{ijk} \varepsilon_{kl} + (\beta \theta + \eta \vartheta) \delta_{ij}, \\
\sigma &= \sigma_a + \beta \varepsilon_{ij} + \gamma \theta + \omega \vartheta, \\
-s &= \eta \varepsilon + \omega \theta + \xi \vartheta,
\end{aligned} \tag{3.172}$$

gdzie $\vartheta = T - T_0$. Przy użyciu oznaczeń takich, jak dla przypadku izotermicznego, otrzymuje się postać odpowiadającą tej zaproponowanej przez Biota i Willisa (1957), poszerzoną dodatkowo o wpływ temperatury. Po zróżniczkowaniu względem czasu równania entropii, korzystając z równania przewodnictwa cieplnego otrzymać można równanie opisujące rozkład temperatury w ośrodku porosprężystym:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= 2N \varepsilon_{ij} + (A \varepsilon + Q \theta + \eta \vartheta) \delta_{ij}, \\
\sigma &= Q \varepsilon + R \theta + \omega \vartheta, \\
\lambda \nabla^2 T &= -\eta \dot{\varepsilon} T - \omega \dot{\theta} T - \xi \dot{\vartheta} T.
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Współczynniki η i ω można uzyskać zakładając odkształcenia spowodowane jedynie przez temperaturę, $\varepsilon = 3\alpha_t^s \vartheta$, $\theta = \alpha_t^l \vartheta$, gdzie α_t^s i α_t^l to odpowiednio współczynniki rozszerzalności cieplnej szkieletu (liniowy) i płynu (objętościowy).

$$\begin{aligned}\eta &= -(3K\alpha_t^s + Q\alpha_T^l), \\ \omega &= -(Q\alpha_T^l + 3R\alpha_T^l)\end{aligned}\tag{3.174}$$

Współczynnik ξ określić można zakładając stałe odkształcenie płynu i szkieletu ($\dot{\varepsilon} = 0, \dot{\theta} = 0$):

$$-T\dot{s} = \xi\dot{\theta}T,\tag{3.175}$$

oraz korzystając z definicji ciepła właściwego przy stałej objętości, $c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$:

$$\xi \cong -\frac{\rho c_v}{T_0},$$

gdzie T_0 to temperatura bezwzględna stanu naturalnego. Uzyskane związki odpowiadają związkom Duhamela-Neumanna dla ośrodka sprężystego.

W podobny sposób związki konstytutywne uzyskał Coussy (2004), skorzystał on jednak z entalpii swobodnej jako funkcji stanu, a jako jednego z parametrów stanu użył on porowatości:

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - \phi dp - s dT - dG = 0,\tag{3.176}$$

skąd można uzyskać równania stanu:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad \phi = -\frac{\partial G}{\partial p}; \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T}.\tag{3.177}$$

Uzyskane w ten sposób związki konstytutywne mają postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 &= c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - b_{ij}(p - p_0) - c_{ijkl}\alpha_{kl}(T - T_0), \\ \phi - \phi_0 &= b_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{p - p_0}{N} - 3\alpha_\phi(T - T_0), \\ s - s_0 &= c_{ijkl}\alpha_{kl}\varepsilon_{ij} - 3\alpha_\phi(p - p_0) + \frac{C}{T_0}(T - T_0),\end{aligned}\tag{3.178}$$

gdzie α_ϕ to współczynnik określający wpływ temperatury na porowatość.

Zmianę zawartości płynu w porach ośrodka można uzyskać analogicznie jak dla przypadku izotermicznego:

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = b_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{M} dp - \alpha_f dT, \quad (3.179)$$

gdzie α_f to współczynnik rozszerzalności termicznej płynu. Związków określających naprężenie i porowatość podanych przez Coussy'ego używa w swoim modelu również Bundschuh (2010). Zmianę zawartości płynu w warunkach nieizotermicznych określa on przy użyciu definicji współczynnika rozszerzalności termicznej:

$$\alpha_f = \frac{1}{V_f} = \left(\frac{\partial V_f}{\partial T} \right)_{p_f} = - \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial T} \right)_{p_f} \quad (3.180)$$

Autor korzysta ze wzoru na zmianę objętości płynu w porach $d\zeta = \frac{dm_f}{\rho_f} = \phi \frac{d\rho_f}{\rho_f} + d\phi$.

Jeśli gęstość jest funkcją ciśnienia i temperatury, jej różniczkę można zapisać w postaci:

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} dp + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial T} dT \quad (3.181)$$

Korzystając z definicji współczynnika ściśliwości $s_f = \frac{1}{K_f} = \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial p} \right)_T$, zmianę zawartości płynu można określić równaniem:

$$d\zeta = d\phi + \frac{\phi}{K_f} dp - \phi \alpha_f dT. \quad (3.182)$$

Po scałkowaniu autor uzyskał wyrażenie

$$\zeta = \zeta_0 + b \frac{\sigma_M}{K} + \frac{p - p_0}{M} + \phi (\alpha_\phi - \alpha_f) (T - T_0), \quad (3.183)$$

gdzie b to współczynnik Biota-Willisa, M to moduł Biota.

Równania te wykorzystał do obliczeń numerycznych Suarez-Arriga (2010), który przedstawił model pompowania wody z warstwy wodonośnej z uskokiem dla dwóch przypadków – wody o temperaturze 200°C oraz 250°C. Autor porównał uzyskane wartości

przemieszczeń po 10 latach obniżania zwierciadła wody, przykładowo odkształcenia poziome w przypadku wody geotermalnej 5-krotnie wyższe, niż w przypadku wody zimnej.

Korzystając z entalpii swobodnej można uzyskać również II postać związków konstytutywnych. Sposób uzyskania związków dla naprężeń jako parametrów stanu przedstawiony został w pracy Uciechowskiej-Grakowicz (2016).

Potencjał Gibbsa dla procesu samorzutnego jest funkcją malejącą i osiąga minimum w stanie równowagi. Różniczkę potencjału Gibbsa dla ośrodka dwufazowego można zapisać w postaci:

$$dG = dF + pdV + Vdp, \quad (3.184)$$

gdzie

$$\begin{aligned} pdV &= -\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} V - \sigma d\theta V, \\ Vdp &= -d\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} V - d\sigma \theta V. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Przyjmując założenie, że różniczka jest zmianą funkcji w czasie, wykorzystując równanie opisujące zmianę entalpii swobodnej ośrodka dwufazowego (3.184), w odniesieniu do jednostki objętości można ją zapisać w postaci:

$$\dot{g} = -s\dot{T} - T\dot{s}_w - \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} - \dot{\sigma}\theta. \quad (3.186)$$

Zakładając, że parametrem stanu, oprócz naprężeń w obu fazach jest temperatura, można zapisać różniczkę potencjału Gibbsa:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial g}{\partial T} dT, \quad (3.187)$$

czyli

$$Tds = -d\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - d\sigma \theta - s dT - \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\sigma - \frac{\partial g}{\partial T} dT. \quad (3.188)$$

Aby druga zasada termodynamiki została spełniona:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \theta = -\frac{\partial g}{\partial \sigma}; \quad s = -\frac{\partial g}{\partial T}. \quad (3.189)$$

Podobnie, jak w przypadku energii swobodnej, w celu uzyskania związków konstytutywnych, należy rozwinąć potencjał Gibbsa w szereg Taylora w otoczeniu stanu naturalnego.:

$$g(\sigma_{ij}, \sigma, \vartheta) = g(0, 0, T) + \frac{\partial g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} + \frac{\partial g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma} \sigma + \frac{\partial g(0, 0, T_0)}{\partial \vartheta} \vartheta + \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma^2} \sigma^2 + \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \vartheta^2} \vartheta^2 \\ & + 2 \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma} \sigma_{ij} \sigma + 2 \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \vartheta} \sigma_{ij} \vartheta + 2 \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma \partial \vartheta} \sigma \vartheta \end{aligned} \right). \quad (3.190)$$

Po zastosowaniu podstawień:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} &= -s_{ijkl}, \\ 2 \frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma} &= -t_{ij}, \\ \frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial \sigma \partial \sigma} &= -u, \\ 2 \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \vartheta} &= \alpha_{ij}^s, \\ 2 \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \sigma \partial \vartheta} &= \alpha^l, \\ \frac{\partial^2 g(0, 0, T_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta} &= b, \end{aligned} \quad (3.191)$$

z dokładnością do małych wartości drugiego rzędu można napisać:

$$2g(\sigma_{ij}, \sigma) = -s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - t_{ij} \sigma_{ij} \sigma - u \sigma \sigma - b_{1ij} \sigma_{ij} \vartheta - b_2 \sigma \vartheta - b_3 \vartheta \vartheta. \quad (3.192)$$

W płynie nie występują odkształcenie postaciowe, można więc napisać $t_{ij} = t \delta_{ij}$. Związki konstytutywne można więc zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= -\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + t \sigma \delta_{ij} + \alpha_{ij}^s \sigma_{ij} \vartheta, \\ \theta &= -\frac{\partial g}{\partial \sigma} = t \delta_{ij} \sigma_{ij} + u \sigma + \alpha^l \vartheta, \\ -s &= -\frac{\partial g}{\partial \vartheta} = \alpha_{ij}^s \sigma_{ij} + \alpha^l \sigma + b \vartheta. \end{aligned} \quad (3.193)$$

Tensor podatności s_{ijkl} jest odwrotnością tensora sztywności $s_{ijkl} = c_{ijkl}^{-1}$, dla szkieletu izotropowego, może on zostać przedstawiony przy użyciu oznaczeń $A = \frac{A}{2N(2N+3A)}$

i $N = \frac{1}{4N}$:

$$s_{ijkl} = A \delta_{ij} \delta_{kl} + N (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.194)$$

Oznaczając $t = 1/H$, oraz $u = 1/R$, związki te można zapisać w formie odpowiadającej tej podanej przez Biota (1941), poszerzone o wpływ temperatury. Różniczkując po czasie przemnożone przez temperaturę równanie entropii, po skorzystaniu z równania przewodnictwa cieplnego (3.112) otrzymać można rozkład temperatury w ośrodku:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= s_{ijkl} \sigma_{kl} + h \sigma \delta_{ij} + \alpha_{ij}^s \vartheta, \\ \theta &= h \sigma_m + \beta \sigma + \alpha^l \vartheta, \\ \lambda \nabla^2 T &= -\alpha_{ij}^s \dot{\sigma}_{ij} T - \alpha^l \dot{\sigma} T - b \dot{\vartheta} T. \end{aligned}$$

Analogicznie dla związków termosprężystości s_{ijkl} jest tensorem podatności, h jest współczynnikiem określającym wpływ naprężeń w danej fazie na odkształcenie drugiej z faz. Przy założeniu wyłącznie odkształceń termicznych można zauważyć, że tensor α_{ij}^s jest tensorem rozszerzalności termicznej szkieletu, dla ośrodka izotropowego $\alpha_{ij}^s = \alpha^s \delta_{ij}$ a α^l jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej płynu, z kolei przy założeniu stałego naprężenia, $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma} = 0$, $b \cong \frac{\rho c_\sigma}{T_0}$, gdzie c_σ to ciepło właściwe przy stałym naprężeniu. .

Stosując stałe materiałowe Biota (1941) dla odkształceń objętościowych można napisać:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} + \frac{\sigma}{H} + \alpha^s \vartheta, \\ \theta &= \frac{\sigma_m}{H} + \frac{\sigma}{R} + \alpha^l \vartheta, \\ \lambda \nabla^2 T &= -\alpha^s \dot{\sigma} T - \alpha^l \dot{\sigma} T - b \dot{\vartheta} T. \end{aligned} \quad (3.195)$$

Związki te odpowiadają związkom Duhamela-Neumanna dla ośrodka sprężystego, oraz równaniom Biota (1941) dla przypadku izotermicznego, upraszczają się również, dla ośrodka nieodkształcalnego, do postaci związków termo-filtracji przedstawionych przez Strzeleckiego (2013).

Analityczne rozwiązanie zadania termokonsolidacji równomiernie obciążonej warstwy gruntu, bazujący na równaniach podanych przez Strzeleckiego (2006) podał Gaszyński (2007). Rozwiązanie dotyczyło konsolidacji ośrodka porowatego pod zadaniem obciążeniem, oraz oceny wpływu temperatury na proces konsolidacji. Przyjął on sprzężony układ równań w postaci:

$$(2N + M)w_{,zz} + \frac{H}{R}\sigma_{,z} - \frac{2N + M}{T_0}b_3\vartheta_{,z} = 0 \quad (3.196)$$

$$\sigma_{,zz} = \frac{1}{kR}\dot{\sigma} - \frac{H}{kR}\dot{w}_{,z} + \frac{2N + M}{kRT_0}b_2\dot{\vartheta}$$

$$\vartheta_{,zz} = \left(b_0 + \frac{2N + M}{R}b_2^2\right)\frac{2N + M}{\lambda T_0}\dot{\vartheta} + \frac{2N + M}{R\lambda}b_2\dot{\sigma} + \frac{2N + M}{\lambda}b_3\dot{w}_{,z}$$

oraz związki fizyczne:

$$\sigma_z = (2N + M)w_{,z} + \frac{Q}{R}\sigma - \left(b_1 - \frac{Q}{R}b_2\right)\frac{2N + M}{T_0}\vartheta \quad (3.197)$$

$$\sigma = Qw_{,z} + R\theta - b_2\frac{2N + M}{T_0}\vartheta$$

Gdzie w to osiadanie, ϑ to temperatura wywołana procesem konsolidacji ($\vartheta = T - T_0$), gdzie T to temperatura bezwzględna, a T_0 to temperatura bezwzględna stanu początkowego.

A, N, Q, R to stałe Biota, λ to współczynnik przewodnictwa cieplnego, $H = Q + R$,

$$M = A - \frac{Q^2}{R}, \quad b_1 = \left(3K\alpha_T^s + Q\alpha_T^{sc}\right)\frac{T_0}{2N + M}, \quad b_2 = \left(Q\alpha_T^{sc} + R\alpha_T^c\right)\frac{T_0}{2N + M}, \quad b_3 = b_1 - \frac{Q}{R}b_2.$$

Jako warunki początkowe przyjęte zostały osiadania, ciśnienie w płynie i temperatura równe zero. Warunki brzegowe Gaszyński przyjął w następującej postaci:

Dla $z = 0$ (brzeg górny, przepuszczalny) :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -q_0H(t), \\ \sigma &= 0, \\ \vartheta &= \vartheta_0L(t), \end{aligned} \quad (3.198)$$

Dla $z = h$ (brzeg dolny, nieprzepuszczalny):

$$\begin{aligned}
w &= 0 \\
\sigma_{,z} &= 0 \\
\mathcal{G}_{,z} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.199}$$

W celu rozwiązania tak skonstruowanego zagadnienia, Gaszyński zastosował transformatę Laplace'a. Po scałkowaniu równania opisującego osiadanie, wyeliminował je z układu równań i otrzymał układ sprzężonych równań niejednorodnych, rozwiązanie którego pozwoliło na wyznaczenie transformaty przemieszczenia brzegu warstwy konsolidującej, skąd uzyskał zależności opisujące osiadania. Wartość końcową osiadań brzegu modelu opisuje równanie odpowiadające równaniu dla ośrodka niewrażliwego na wpływ temperatury:

$$w_0(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2N + M} h q_0 - \frac{1}{b_4} \left(b_3 b_4 + \frac{H}{R} b_5 \right) h \frac{\mathcal{G}_0}{T_0},
\tag{3.200}$$

natomiast osiadanie początkowe opisuje zależność, która przy założeniu braku wpływu temperatury nie sprowadza się do zależności dla ośrodka niewrażliwego na temperaturę:

$$w_0(t \rightarrow 0) = \frac{2 \frac{H}{R} b_3 b_4 + \frac{2N + M}{B} b_3^2 + b_4^2 - \frac{2N + M}{R} b_5}{b_4^2 - \frac{2N + M}{B} b_5} \frac{1}{E} h q_0,
\tag{3.201}$$

gdzie $B = \frac{(2N + M) R^2}{(2N + M) R + H^2}$.

W kolejnej publikacji (2008) Gaszyński przedstawił również rozwiązanie dla wciskanego w półprzestrzeń kołowego sztywnego stempla obciążonego siłą P. Uzyskane rozwiązania osiadań dla chwili początkowej i końcowej, odpowiadające rozwiązaniom nieuwzględniającym wpływu temperatury wskazały na duży wpływ właściwości termicznych ośrodka na osiadanie początkowe fundamentu w obszarze kontaktu.

Model termokonsolidacji ośrodka lepko-porosprężystego przedstawiony przez Strzeleckiego (2006), został wykorzystany również dla utworzenia modelu uwzględniającego lepkość szkieletu ośrodka, przez Bartlewską-Urban i Strzeleckiego (2012). W pracy tej autorzy przedstawili układ równań termokonsolidacji (równanie równowagi, równanie filtracji oraz równanie przewodzenia ciepła) w następującej formie:

$$N\Psi_k \nabla^2 u_i + \left(A\Psi_L - \frac{Q^2}{R} + N\Psi_k \right) \varepsilon_{,i} + \frac{H}{R} \sigma_{,i} - \overline{\rho_s} \delta_{i3} = -P_1 T_{,i}, \quad (3.202)$$

$$\frac{kR}{f^2 \rho_w g} \nabla^2 \sigma = T_0 [\dot{\sigma} - H\dot{\varepsilon} + P_4 \dot{T}]$$

$$\lambda \nabla^2 T = T_0 [P_2 \dot{\varepsilon} - P_3 \dot{\sigma} + P_5 \dot{T}],$$

gdzie $P_2 = 3r^s \left(K - \frac{HQ}{R} \right) - Rr^l$, $P_3 = 3r^s \frac{Q}{R} + r^l$, $P_4 = RP_3$,

$$P_5 = \frac{(3Qr^s + r^l R)^2}{R} + \frac{(\overline{\rho_s} + \overline{\rho_w}) c_v}{T}, \quad \Psi_k \text{ i } \Psi_L \text{ to operatory różniczkowe: } \Psi_L = 1 + T_b \frac{\partial}{\partial t},$$

natomiast $T_a = \frac{\eta^s}{N}$ i $T_b = \frac{\lambda^s}{A}$, gdzie η^s i λ^s to lepkość postaciowa i objętościowa szkieletu.

Przykład zastosowania modelu matematycznego do numerycznego modelowania cylindrycznej kolumny gruntu (odpowiadający badaniu w aparacie trójosiowego ściskania), której szkielet opisany jest modelem Kelvina-Voighta przedstawiony został w pracy Bartlewska-Urban, Strzelecki (2013), następnie model ten został wykorzystany również do obliczeń osiadań obiektów inżynierskich, takich, jak zbiornik odpadów poflotacyjnych „Żelazny Most” (Bartlewska-Urban i Strzelecki 2014), gdzie autorzy stworzyli model numeryczny zbiornika, w którym zaimplementowali jako warunek brzegowy sinusoidalny przebieg temperatury odpowiadający amplitudzie rocznych wahań temperatury. Wpływ wahań temperatury na przemieszczenia w obszarze zbiornika wyliczony został na przestrzeni 30 lat. Innym zastosowaniem modelu były przedstawione w pracy Bartlewskiej-Urban, Zombronia i Strzeleckiego (2016) obliczenia osiadań autostrady w zależności od rocznych wahań temperatury. Dużą zaletą modelu szkieletu Kelvina-Voighta jest brak odkształceń natychmiastowych, co jest zgodne z doświadczeniami.

Przedstawione modele trójwymiarowej konsolidacji różnią się co do wykorzystywanych założeń oraz parametrów ośrodka, wszystkie jednak jako podstawę przyjmują teorię przedstawioną przez Biota (1935, 1941), w różnym stopniu ją modyfikując i poszerzając, umożliwiając jej wykorzystanie na kolejnych polach inżynierii oraz medycyny. Niniejsza praca dotyczy modyfikacji modelu dla ośrodków wypełnionych gazem przy zmiennej

temperaturze, co umożliwi wykorzystanie jej np. do modelowania wpływu na filtrację oraz pole przemieszczeń górotworu procesu podziemnego zgazowania węgla.

3.2. Podziemne zgazowanie węgla jako przykład możliwego

wykorzystania wyników pracy dla celów inżynierskich

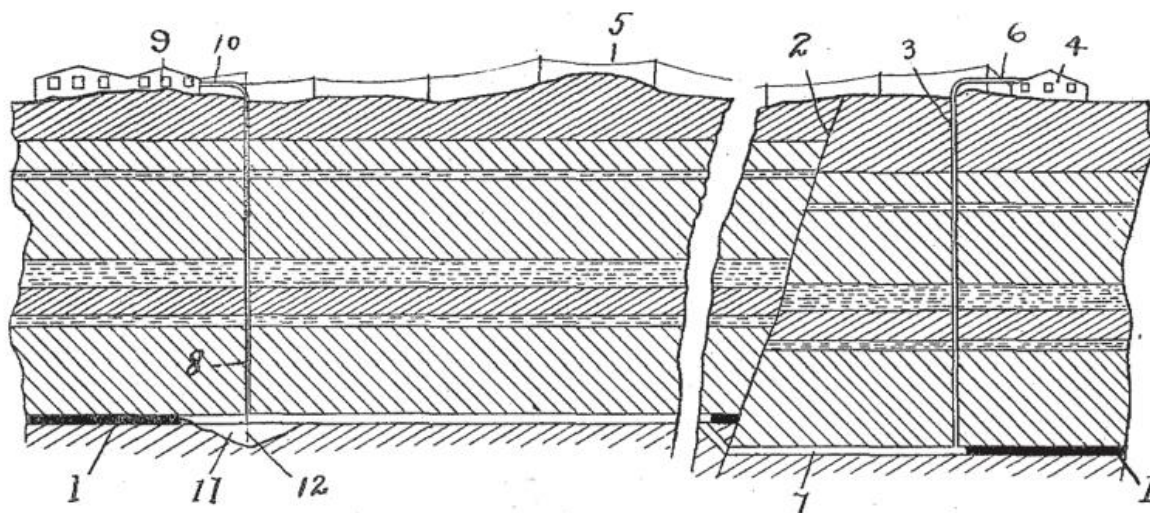
Proces podziemnego zgazowania węgla skrótowo oznaczany PZW określa technologię uzyskiwania gazu syntezowego z pokładów węgla kamiennego lub brunatnego.

PZW pozwala na eksploatację złóż, których wydobycie tradycyjnymi metodami byłoby nieopłacalne - np. głęboko zalegających lub stromych pokładów, o dużej zawartości popiołów. Stosowane jest również w przypadku pokładów resztkowych węgla w wyeksploatowanych kopalniach. W porównaniu do tradycyjnych metod eksploatacji złoża, charakteryzuje się większym bezpieczeństwem osób zatrudnionych przy eksploatacji, mniejszym zanieczyszczeniem pyłem i hałasem, pozwala również na obniżenie kosztów eksploatacji oraz kosztów, które stwarza transport i składowanie węgla, nie generuje potrzeby składowania odpadów i popiołów (Bhutto et al. 2013).

3.2.1. Zarys historyczny podziemnego zgazowania węgla

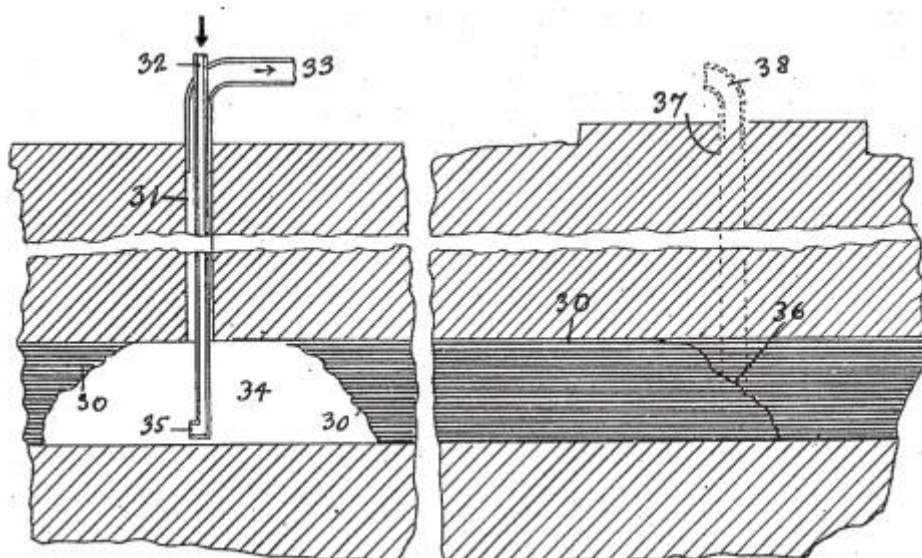
Pierwsza koncepcja podziemnego zgazowania węgla została przedstawiona w 1868r przez sir Williama Siemens'a w zakresie wynalazków braci Siemensów. Jednym z wynalazków było urządzenie służące do gazyfikacji węgla. W swoim przemówieniu do brytyjskiego stowarzyszenia chemików, przedstawił on ideę zastosowania urządzenia w kopalni i wydobywanie gazu za pomocą systemu rur. Idea dalej rozwijana była przez rosyjskiego chemika, Dymitra Mendelejewa. Zakładał on zgazowanie węgla bez naruszania go w pokładzie, co byłoby rozwiązaniem o wiele efektywniejszym i generującym niższe koszty pracy.

W 1910r swoją metodę opatentował amerykański inżynier, Anson G. Betts. Patent Bettsa zakładał użycie strumienia powietrza i utworzenie połączenia między dwoma szybami, jak to ma miejsce we współczesnych technologiach zgazowania węgla. Przy otworze eksploatacyjnym miałyby być zlokalizowany zakład oczyszczający syngaz i elektrownia. Prąd z elektrowni zasilałby kompresory wtłaczające powietrze.



Rysunek 3.1. Jeden ze schematów przez Bettsa. 1. Pokład węgla, 2. Uskok 3. Szyb dostarczający powietrze, 4. Stacja pomp 7. Połączenie między studniami, 8. Szyb wydobywczy, 9. Elektrownia, 11. Popiół, 5. Linia energetyczna. (Betts, 1910)

Inny z pomysłów Bettsa, znany dziś jako metoda ślepego odwiertu (Blind Bolrehole method), zakładał dostarczanie powietrza i odbieranie gazu syntezowego za pomocą jednej studni – jedną rurą dostarczane byłoby powietrze, drugą odbierany gaz syntezowy (Klimenko 2009, Betts 1910).



Rysunek 3.2 Schemat Bettsa z jednym szybem włączającym powietrze i wydobywającym gaz. 30. Pokład węgla, 31. Szyb, 32. Rura dostarczająca powietrze, 33. Rura odbierająca syngaz, 37. Kolejny szyb, dzięki któremu można zwiększyć powierzchnię, w której nastąpi zgazowanie (Betts 1910)

Betts zalecał stosowanie obniżonego ciśnienia w celu uniknięcia ucieczki gazu w powstających wskutek osiadań spękaniach. Same spękania uważał za korzystne dla procesu, gdyż zwiększają one powierzchnię kontaktu węgla z powietrzem – w niektórych obecnych technologiach stosuje się większe ciśnienia, w celu ograniczenia dopływu wód gruntowych.

Znaczący wkład w popularyzację idei UCG miał pierwszy brytyjski laureat nagrody Nobla, sir William Ramsay. Założeniem Ramsaya było ograniczenie smogu w miastach przemysłowych. Zaproponował on, aby zamiast spalać węgiel, wytwarzać energię elektryczną z gazu syntezowego pochodzącego z podziemnego zgazowania węgla, co zaowocowałoby poprawą jakości powietrza i obniżeniem kosztów związanych z pracą. Zaproponował on użycie w jednym szybie trzech rur – doprowadzającej powietrze, odprowadzającej gaz i odprowadzającej wodę (przepływ wody w złożu miał też służyć chłodzeniu). Korzystając ze wsparcia potentata przemysłowego, sir Hugh Bella, w 1912 r sir William Ramsay przygotował pierwsze eksperymenty w Hett Hill w hrabstwie Durham w Anglii, nie doszły one jednak do skutku ze względu na wybuch i Wojny Światowej i śmierć Ramsaya w roku 1916.

Pierwszy eksperyment podziemnego zgazowania węgla został przeprowadzony 3 marca 1933r w kopalni Krutova w ZSRR, zastosowano tam metodę komorową, polegającą na wygrodeniu fragmentu pokładu ścianami – metoda ta przypomina bardziej ideę Siemensa umieszczenia w kopalni generatora, niż proponowane przez Bettsa metody zgazowania węgla in situ. W pokładzie węgla został ogrodzony ceglanymi ścianami obszar 10 x 10 m. z jednej strony dostarczono powietrze, z drugiej – odbierano gaz. Ze względu na słabe przygotowanie eksperymentu (brak monitoringu, nieszczelności, słaba moc dmuchaw), uzyskany gaz był słabej jakości. Kolejny, lepiej przygotowany eksperyment został przeprowadzony 29 listopada 1933 w pobliżu Doniecka. o ile uzyskany gaz wydobyty w otworu eksploatacyjnym był słabej jakości, próbki z odwiertów wykonanych w kanale między otworami zawierały 7.7-13% CO, 13-27% H₂ i 0.2-2% CH₄. Pierwsze starannie przygotowane eksperymenty przeprowadzone zostały w 1934r w Lisichansku pod nadzorem inżyniera Kirichenki. Rozpoczęte w lutym 1934 próby przez kilka miesięcy nie przyniosły efektów w postaci palnego gazu (próba wtłoczenia gazu do jednego z otworów skończyła się całkowitym wypaleniem go). W czerwcu uzyskano palny gaz w otworze wywierconym z powierzchni – gaz płonął przez 15 dni, jego średnia wartość kaloryczna wynosiła 1300 kcal/m³, składał się w 5-12% CO, 7.8-20-6% H₂ i 2.8-4.2% CH₄ (za Klimenko 2009).

W kolejnych próbach, w lipcu 1934r zamiast metody komorowej użyto serii ślepych odwiertów. Po pierwszych, nieudanych z powodu ucieczki gazów eksperymentach, uzyskano palny gaz – palił się on błękitnym płomieniem przez 40 minut. Eksperyment został wielokrotnie powtórzony, zatem można go uznać za udany, jednak metoda ta wymagała dużego nakładu pracy.

Pierwsze eksperymenty dla przy użyciu metody zakładającej przepływ gazu między otworem dostarczającym powietrze a eksploatacyjnym przeprowadzono 5 czerwca 1935 w Leninsku w kopalni, której fragment został zasypany po pożarze. Początkowo nie uzyskiwano dobrych rezultatów, jednak po zawale stropu, który zmienił obieg gazów uzyskany został gaz o wartości kalorycznej między 2000 a 5000 kcal/m³ (Klimenko 2009). Dalsze eksperymenty przeprowadzane w Lisichansku polegały na użyciu tlenu jako czynnika zgazowującego, będącego produktem ubocznym znajdującego się w pobliżu zakładu produkującego gaz obojętny. Eksperyment zaowocował znaczną poprawą parametrów gazu syntezowego – przy użyciu powietrza w podziemnym zgazowaniu węgla można uzyskać wartość opałową nie większą, niż 5 MJ/m³, podczas gdy przy użyciu tlenu i pary wodnej – nawet do 12 MJ/m³ (Shafirovich, Varma 2009).

W 1935r w Gorlkovej w pobliżu Doniecka uruchomiona została pilotażowa instalacja podziemnego zgazowania węgla metodą strumieniową. Wartość opałowa uzyskanego gazu wahała się między 932 a 2472 kcal/m³ w zależności od ilości podawanego tlenu. Wytworzony gaz był przez dwa lata dostarczany do znajdujących się w pobliżu zakładów chemicznych. Pierwsza instalacja nie wymagająca pracy ludzi pod ziemią została utworzona w 1940r w Tule. Połączenie między studniami wykorzystywało naturalne przewodnictwo węgla. W 1947r metoda ta została wykorzystana w Lisichansku w pokładzie węgla kamiennego. (Klimenko 2009). W latach 50-tych program był już na tyle zaawansowany, żeby wdrożyć go na skalę przemysłową, do późnych lat 70-tych zgazowanych zostało 6.6 miliona ton węgla, z którego wytworzono z 25 milionów m³ syngazu (Bhutto et al. 2013). Po odkryciu złóż gazu ziemnego, którego eksploatacja jest prostsza a wartość opałowa większa, metoda podziemnego zgazowania węgla została zmarginalizowana. Próby w Związku Radzieckim dostarczyły jednak wielu cennych, wykorzystywanych do tej pory doświadczeń, również na polu monitoringu wód gruntowych. Przykładem może być stacja Yuzhno-Abinsk, gdzie obserwowana była zawartość fenoli w wodach podziemnych – próbki pobrane z obszaru zgazowania zawierały 0.017mg/l, z obszaru otaczającego 0.0007-0.0042mg/l (przy normie dla wody pitnej do 0.001mg/l),

w trzy miesiące po zakończeniu procesu, w obszarze, gdzie zgazowywany był węgiel, zawartość fenoli spadła do poziomu dopuszczalnego dla wody pitnej (Shafirovich, Varma 2009).

Kolejne próby eksploatacji pokładów węgla metodą podziemnego zgazowania na większą skalę podjęto w latach 70-tych w Stanach Zjednoczonych – na skutek kryzysu paliwowego Departament Energii Stanów Zjednoczonych poszukiwał alternatywnych źródeł energii. Podjęto wtedy pierwsze próby połączenia otworów przy użyciu energii elektrycznej – wskutek przepływu prądu zostaje wypalony wąski kanał, którym następnie przepływa gaz w dalszym procesie zgazowania. W instalacjach w Hanna w Wyoming zostało zgazowanych ponad 30 000 ton węgla brunatnego w pokładzie na głębokości ok 100m. Jako czynnik zgazowujący używane było powietrze. Kolejne próby podjęto w 1979r w Princetown w Zachodniej Wirginii, dla pokładu węgla bitumicznych na głębokości 270m, gdzie zgazowano ponad 200ton węgla w czasie 118 dni. Zakończone sukcesem próby z użyciem tlenu i pary wodnej jako czynnika zgazowującego przeprowadzono w Hoe Creek w Wyoming. Program ten zaowocował również wynalezieniem metody CRIP (Controlled retracting injection point). Program zyskał złą prasę wskutek wynikającego z błędów przy eksploatacji zanieczyszczenia wód podziemnych w kilku lokalizacjach. Mimo cennego doświadczenia i udanych prób został on zamknięty w 1989r, ze względu na niską cenę ropy naftowej (Klimenko 2009).

W Europie, po kilku nieudanych próbach we Francji i w Belgii (wskutek niemożności ustanowienia połączenia hydraulicznego między studniami), kolejnych prób na większą skalę podjęto się hiszpańsko-brytyjsko-francuskie konsorcjum na instalacji El Tremendal w prowincji Tereuel w Hiszpanii. W latach 1992-1999, zgazowano tam 240t niskogatunkowego węgla brunatnego w pokładzie zalegającym na głębokości 550m. Podczas próby napotkano na wiele trudności, związanych ze słabym rozpoznaniem geologicznym (Hajdo 2011). Podczas dwóch prób uzyskano gaz o wartości opałowej 10.97 i 10.9 MJ/m³, podczas trzeciej próby, wskutek awarii systemów zapłonu i kontroli temperatury nastąpił wybuch metanu, który zniszczył studnię zasilającą, co zakończyło próby (Shafirovich, Varma 2009).

Zainteresowanie metodą podziemnego zgazowania węgla powróciło w XXIw z powodu wysokich cen paliw. Kolejne instalacje powstają w Australii, Południowej Afryce, Indiach, Kanadzie, Chinach i USA. Obecnie najważniejsze przedsiębiorstwa zajmujące się

podziemnym zgazowaniem węgla to australijskie Linc Energy, Cougar Energy, Carbon Energy, oraz Kanadyjskie Swan Hills synfuels, Ergo Exergy i chińskie ENN. Obecnie na świecie istnieje 50 pilotażowych instalacji zgazowania węgla. Najważniejsze z nich to instalacja w Chinchilla w Queensland w Australii, oraz Angren w Uzbekistanie. W Chinchilla zgazowywany był pokład węgla podbitumicznego o miąższości 10m, zalegający na głębokości 130m. Ze zgazowania 32-35tys ton węgla uzyskano 80mln m³ gazu o wartości opałowej 4.5-5.7 MJ/Nm³ (Hajdo 2011), użytego do wytwarzania prądu (koszt wytwarzania 1.5 centa/kWh, za Bhutto (2011)). Instalacja w Angren w Uzbekistanie działa od roku 1962, syngaz z węgla brunatnego wykorzystuje elektrownia o mocy 400MW, należąca do będącego filią Linc Energy, Yerostigazu (Bhutto et al. 2013). Yerostigaz produkuje 1 000 000 m³ gazu syntezowego dziennie, wg przewidywań Linc Energy, z obecną wydajnością będzie mógł pracować przez najbliższe 50 lat. Najgłębiej położone pokłady węgla zgazowywane są w Alberta w Kanadzie, na głębokości 1400m za pomocą metody Linear CRIP .

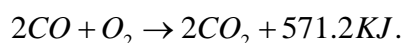
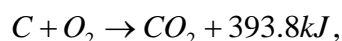
Znaczne zainteresowanie podziemnym zgazowaniem węgla można zaobserwować w Chinach, gdzie planowane jest wykorzystanie węgla zalegającego w zamkniętych kopalniach. W kopalni Wonishan w prowincji Jiangsu rozwijana jest technologia produkcji wodoru (Shafirovich, Varma 2009).

Zainteresowania tą technologią można zaobserwować również w Polsce. Obecnie GiG prowadzi projekt HUGE2 (Hydrogen Oriented Underground Coal Gasification for Europe – Environmental and Safety Aspects), mający na celu produkcję wodoru przy zgazowaniu głęboko zalegających pokładów, głównie w przeznaczonych do zamknięcia kopalniach. Złoże węgla brunatnego w rejonie Głogowa KGHM planowano również eksploatować metodą podziemnego zgazowania.

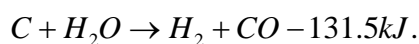
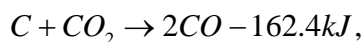
3.2.3. Podział technologii podziemnego zgazowania węgla

Podczas podziemnego zgazowania węgla mają miejsce procesy analogiczne, jak przy zgazowaniu węgla na powierzchni . Reakcje chemiczne zachodzą w pokładzie węgla, oraz między gazami. Odcinek między otworem zasilającym, przy którym następuje zapłon (najczęściej przy pomocy iskry elektrycznej) a otworem eksploatacyjnym można podzielić na trzy strefy: strefę utleniania, w której mają miejsce reakcje między tlenem znajdującym się w czynniku zgazowującym i węglem w pokładzie, strefę redukcji, oraz strefę suchej destylacji i pirolizy.

W strefie utleniania mają miejsce reakcje między zawartym w czynniku zgazowującym tlenem, a węglem w pokładzie. Reakcje te wyzwalają dużo ciepła, w związku z czym temperatura pokładu może osiągnąć nawet 1450 stopni Celsjusza (Wu, 1988). Reakcja w strefie utleniania, za Self et al. (2012):



W następnej kolejności gazy przepływają do strefy redukcji, gdzie para wodna i dwutlenek węgla, pod wpływem wysokiej temperatury zredukowane są do wodoru i tlenku węgla:



Pod katalitycznym wpływem znajdujących się w popiołach tlenków metali, przy podwyższonym ciśnieniu zachodzi w tej strefie również reakcja metanizacji:

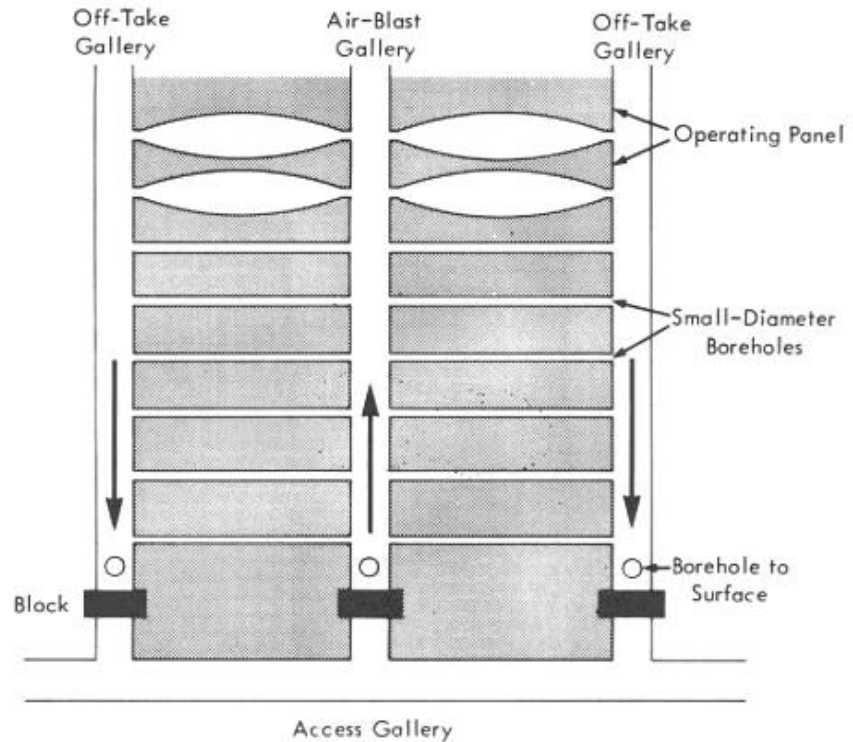


Reakcje redukcji są endotermiczne, zatem w strefie redukcji temperatura spada. Reakcje te przebiegają tylko w odpowiednio wysokiej temperaturze, w miarę jej spadku ustają, zaczyna się strefa suchej destylacji, gdzie z węgla uzyskuje się parę wodną, tlenki węgla, węglowodory, smołę i popiół. Ostatecznie gaz syntezowy składa się głównie z wodoru, tlenku węgla, dwutlenku węgla, metanu i azotu. Proporcje tych składników zależą od właściwości pokładu, czynnika zgazowującego, oraz technologii. W miarę wzrostu temperatury, w której przebiega proces, uzyskuje się większe ilości wodoru z powodu rozpadu pary wodnej, oraz tlenku węgla wskutek redukcji dwutlenku węgla. Jeśli czynnikiem zgazowującym jest powietrze, powstaje gaz o niskiej wartości (wskutek rozcieńczenia gazu przez znajdujący się w powietrzu azot. Przy zastosowaniu tlenu, lub mieszanki pary wodnej z tlenem temperatura procesu jest wyższa, a średnia wartość kaloryczna powstałego gazu syntezowego jest ok 2 razy większa niż w przypadku powietrza. Przy zgazowaniu można również wykorzystać wodę znajdującą się w pokładzie lub jego pobliżu - ze względu na fakt, że nie można kontrolować ilości wody, gaz ma wtedy zmienne

parametry - w celu utrzymania ich na zbliżonym poziomie należy dostosowywać ilość podawanego tlenu (Yang et al., 2009).

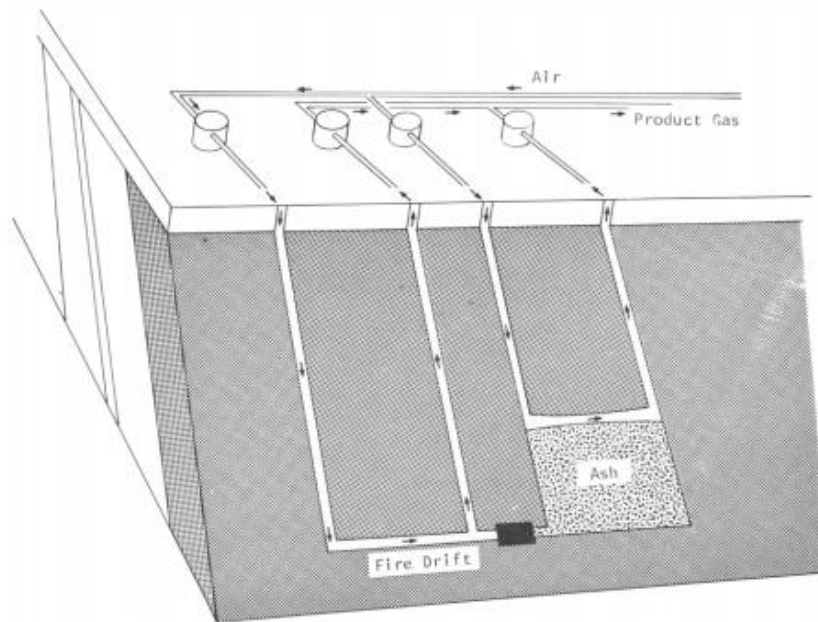
Najstarszym i najbardziej ogólnym podziałem technologii zgazowania węgla jest podział ze względu na sposób udostępnienia złoża. Wszystkie metody zgazowania węgla można podzielić na:

- metody wymagające robót górniczych (z angielskiego shaft methods - metody szybowe): wykorzystują one chodniki i szyby do transportu czynników zgazowujących i syngazu. Historycznie są to pierwsze metody PZW, używane głównie w zamkniętych kopalniach podziemnych (Wiatowski et al. 2012),
- metoda komorowa (chamber method) – Fragmenty pokładu poddawane zgazowaniu udostępniane są za pomocą chodników i oddzielone ceglanyścianami, metoda wykorzystuje naturalną przepuszczalność węgla, przepływ gazów jest powolny, skład syngazu może się różnić w różnych momentach procesu. Można zwiększyć wydatek za pomocą wstępnego skruszenia węgla za pomocą materiałów wybuchowych. (Lee et al. 2007),
 - metoda zgazowania węgla w kanałach wierconych z pokładu węgla (ang. Borehole producer method) - w płasko zalegającym pokładzie tworzone są co ok 150m trzy równoległe chodniki, połączone otworami wiertniczymi (lub innymi metodami). W każdym otworze następuje zapłon za pomocą iskry elektrycznej (Lee et al. 2007).



Rysunek 3.3. Schemat metody zgazowania w odwiertach (Berkovitz 1993)

- o Metoda strumieniowa: w pochyłym pokładzie drążone są co 80-100m równoległe upadowe o długości ok 50-60m, połączone w najniższym punkcie poziomym chodnikiem, gdzie następuje zapłon. Jedną z upadowych dostarczany jest czynnik zgazowujący, proces zgazowania postępuje w przeciwnym kierunku, syngaz przepływa drugą upadową. Popioły opadają zapelniając pustkę powstałą po zgazowaniu, nie tłumiąc procesu (Berkovitz 1993). Metoda ta opatentowana została w Związku Radzieckim (patent nr 947608 z 1933r), przy jej pomocy zgazowywano pokład węgla w Gorlkovej (Klimenko, 2009).



Rysunek 3.4. Schemat metody strumieniowej (Berkovitz 1993)

- LLT (Long and large tunnel) - metoda zaproponowana przez Li Yu (Chen, Yu 1996) dla testowej instalacji zgazowania w kopalni w kopalni Xuzhou Xinghe #2 w Chinach. Wykorzystywany jest w niej wydrążony metodami górniczymi tunel łączący otwór zasilający z produkcyjnym. Zazwyczaj metoda ta wykorzystuje oprócz głównego kanału, dwa pomocnicze otwory (do wtłaczania czynnika zgazowującego lub kontroli jakości gazu) i dwa pomocnicze kanały, zabezpieczające przed zablokowaniem głównego kanału w przypadku zawału. Według Chena i Yu (1996), długi tunel skutkuje większą strefą suchej destylacji, co poprawia wartość opałową syngazu.
- Metody nie wymagające pracy ludzi pod ziemią (z angielskiego shaftless methods - metody bezszybowe) – wykorzystujące wiercenia kierunkowe. Można je podzielić na dwie podstawowe kategorie połączonych pionowych studni i CRIP:
 - Metoda połączonych pionowych studni LVW (Linked Vertical Wells) - Najprostsza instalacja zgazowania węgla składać się może z dwóch pionowych otworów - zasilającego - dostarczającego powietrze lub inny czynnik zgazowujący i eksploatacyjnego. Po wydrążeniu studni tworzony jest między nimi kanał (w przypadku węgla brunatnych można wykorzystać naturalną przewodność węgla), którym przepływać będą gazy. Może on być drążony na dwa sposoby (Blinderman et al., 2008):

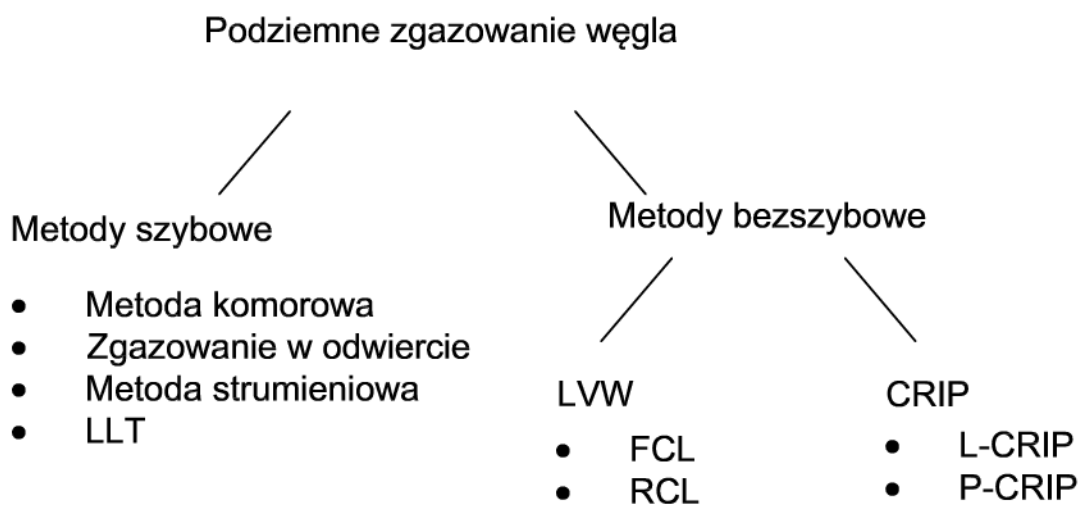
- w kierunku przepływu gazów: FCL (z angielskiego Forward combustion linking) - zapłon następuje przy otworze zasilającym, utleniacz jest dostarczany do momentu, kiedy ogień dotrze do otworu eksploatacyjnego
- w kierunku do niego odwrotnym: RCL (z angielskiego reverse combustion linking) - utleniacz dostarczany jest przez otwór zasilający, a zapłon następuje przy otworze eksploatacyjnym, utleniacz jest dostarczany do momentu, kiedy ogień dotrze do otworu zasilającego

Miejsce podawania czynnika zgazowującego jest niezmiennie w ciągu całego procesu, w czasie jego postępu front oddala się od otworu zasilającego, co ma negatywny wpływ na parametry syngazu. Bardziej zaawansowane systemy LVW wykorzystują serię otworów zasilających ułożonych wzdłuż pokładu, w związku z czym punkt podawania czynnika zgazowującego przemieszcza się wraz z postępowaniem procesu (Self et al., 2012).

Przy węglach o wysokiej przewodności, może zostać wykorzystana metoda filtracyjna - węgiel taki może być zgazowywany bez tworzenia połączeń między otworem zasilającym a produkcyjnym, przy zastosowaniu podwyższonego ciśnienia w celu wywołania przepływu gazów. Możliwe jest tu stosowanie zarówno spalania w kierunku przepływu gazów, jak i w kierunku odwrotnym. Po zgazowaniu całego węgla między otworami, proces przenoszony jest do kolejnej pary otworów

- CRIP (ang. controlled reaction and injection point) - czynnik zgazowujący jest dostarczany za pomocą zakrzywionego otworu zasilającego, punkt zapłonu przemieszcza się w poziomie od otworu eksploatacyjnego do otworu zasilającego - przepływ gazu ma kierunek poziomy, a postęp spalania pionowy. Temperatura w pokładzie dochodzi do 1000 stopni Celsjusza. (Bhutto et al. 2013). Metoda CRIP ma dwie odmiany:
 - Liniowa (L-CRIP) – Otwór zasilający jest otworem kierunkowym, wierconym w pokładzie. Jest on połączony z pionowym otworem eksploatacyjnym. Po zgazowaniu węgla w okolicy zapłonu, tworzony jest nowy, bliżej studni zasilającej.

- Równoległa (P-CRIP) – otwory zasilający oraz eksploatacyjny są wiercone w pokładzie równolegle do siebie, w kierunku trzeciego, pionowego otworu, w którym następuje zapłon.



Rysunek 3.5. Schemat podziału metod podziemnego zgazowania węgla

3.2.4. Gaz syntezowy

Najważniejsze składniki gazu syntezowego, to za Bhutto et al. (2013): wodór (11-35%), tlenek węgla (2-16%), dwutlenek węgla (12-28%), metan (1-8%) i siarkowodór (0.03-3.5%). Przy użyciu powietrza jako czynnika zgazowującego wartość opałowa syngazu wynosi zazwyczaj 3.5-5 MJ/m³, w przypadku użycia tlenu może być dwukrotnie wyższa (Walker et al. 2001).

Syngaz wykorzystywany jest po oczyszczeniu (usuwane są z niego związki siarki i azotu) jako czyste źródło energii dla elektrowni, może być też przetwarzany w celu uzyskania płynnych paliw, oraz nawozów, metanu, czy metanolu. Bardziej efektywne wykorzystanie syngazu w elektrowniach zapewniają układy kombinowane, gazowo-parowe, zintegrowane ze zgazowaniem węgla (IGCC -Integrated Gasification Combined Cycle). Polegają one na zastosowaniu dodatkowych turbin: wykorzystującą syngaz wydobywający się z otworu eksploatacyjnego, oraz turbiny zasilanej parą wodną wytworzoną dzięki ciepłu syngazu. System taki stosowany jest w instalacji Chinchilla w Australii (Walker 2001).

Przy użyciu procesu Fischera-Tropscha (FTL – Fischer – Tropsch Liquid Fuels), z syngazu można wytworzyć również paliwa płynne. W procesie tym, po usunięciu z syngazu dwutlenku węgla i związków siarki, syngaz kierowany jest do reaktora, gdzie w obecności

katalizatora wodór i tlenek węgla przetwarzane są w mieszanekę węglowodorów, z której w następnych krokach można uzyskać benzynę i olej napędowy (Kreuz 2008).

3.2.5. Zagadnienia geotechniczne przy technologii zgazowania węgla

Pomiędzy odwiertami powstaje przestrzeń wypełniona częściowo pozostałościami po zgazowaniu węgla, mogą tam znajdować się również skały pochodzące z warstwy zalegającej nad nim. Zawał stropu w obrębie tej przestrzeni, oprócz powodowania osiadań na powierzchni terenu, może mieć wpływ na wydajność procesu zgazowania oraz zwiększenie przewodności hydraulicznej w jej pobliżu i powstawanie nowych spękań nawet w dalszej okolicy, co może spowodować połączenie poziomów wodonośnych. Woda z sąsiednich warstw dostaje się do niej i bierze udział w procesie zgazowania, co powoduje obniżenie zwierciadła wody gruntowej. Po zakończeniu eksploatacji woda ta może być użyta w celu wymycia zanieczyszczeń. Rozmiar tej przestrzeni zależy od wielu czynników, technologicznych, takich jak ilość doprowadzonych gazów, oraz naturalnych, takich jak właściwości węgla i otaczających go skał: współczynnik przewodzenia ciepła, właściwości chemiczne węgla, wodoprzewodność i sieć spękań. z kolei właściwości mechaniczne skał otaczających strefę spalania determinują stabilność stropu przestrzeni otaczającej generator zgazowania węgla (Morris et al., 2009).

Określenie rozmiarów i kształtu pustki po zgazowaniu węgla jest ważne dla określenia osiadań powierzchni, ich rozmiaru i tempa wzrostu. Mają one również wpływ na przepływ gazu. Rozmiar pustki zależy od tempa reakcji. Kształt pustki jest w rzucie z góry symetryczny. W kierunku odwrotnym do przepływu gazu jej wymiar jest mniejszy niż jej wysokość, natomiast w kierunku przepływu gazu pustka jest wymiar pustki jest większy w kierunku poziomym (Bhutto et al., 2013).

Próby oszacowania rozmiaru i kształtu przestrzeni pozostałej po zgazowaniu podjęto np. w pracy Liang et al. (2011). Autorzy przeprowadzili analizę wsteczną: założono cylindryczne strefy spalania o różnych promieniach, dla których obliczono rozkład temperatur, który porównano z rozkładem rzeczywistym, na których podstawie dobrano promień strefy spalania. W ten sposób, znając objętość pustki można podejmować dalsze kroki dla określenia jej oddziaływania mechanicznego na powierzchnię.

Interesujący eksperyment mający na celu zamodelowanie powstawania pustki przy różnych prędkościach przepływu tlenu przeprowadzili Prabu i Jaynati (2011), posługując się jako analogiem pokładu, balem z drewna akacji, w którym podczas spalania przebiegają te same

reakcje, co podczas zgazowania węgla. Pustka była tym bardziej wydłużona, im szybszy był przepływ tlenu, podobny kształt pustki uzyskano również dla kanału załamane.

Zagadnienia geotechniczne polegające na analizie wpływu procesu zgazowania na otaczające środowisko są istotnym elementem w podejmowaniu decyzji o podjęciu się tego typu przedsięwzięcia lub zaniechanie działań w tym zakresie. Właśnie to zagadnienie jest rozpatrywane przeze mnie w niniejszej pracy.

4. Budowa modelu matematycznego procesu termo-konsolidacji ośrodków porowatych

4.1 Budowa modelu matematycznego procesu termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i cieczy

4.1.1 Równanie ciągłości przepływu

Równanie ruchu dla ośrodka dwufazowego przedstawione zostanie przy użyciu następujących założeń i oznaczeń:

- Płyn porusza się w porach ośrodka z prędkością rzeczywistą \vec{v}_{rzecz}^f . Rozpatrując ośrodek składający się z płynu i szkieletu najczęściej używa się prędkości odniesionej do całego przekroju $\vec{v}^f = \vec{v}_{rzecz}^f f_A$, gdzie f_A to porowatość powierzchniowa. Podobnie określa się prędkość szkieletu: $\vec{v}^s = \vec{v}_{rzecz}^s (1 - f_A)$, gdzie \vec{v}_{rzecz}^s to prędkość rzeczywista szkieletu,; która jest również prędkością, z którą porusza się ośrodek (płyn + szkielet) przy braku przepływu płynu względem szkieletu. Płyn względem szkieletu porusza się z prędkością względną $\vec{v}_{rzecz}^r = \vec{v}_{rzecz}^f - \vec{v}_{rzecz}^s$, w odniesieniu do całego przekroju $\vec{v}^r = \vec{v}_{rzecz}^r f_A$. Składowe prędkości płynu, szkieletu, oraz prędkości względnej oznaczane będą odpowiednio jako v_i^f, v_i^s i v_i^r dla prędkości odniesionych do powierzchni ośrodka, oraz $v_{rzecz,i}^f, v_{rzecz,i}^s$ i $v_{rzecz,i}^r$ dla prędkości rzeczywistych.
- Porowatość powierzchniowa jest przyjmowana jako równa porowatości objętościowej $f_A = f$. Jest ona wielkością stałą dla określonego ośrodka.
- Zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi przez Biota, gęstość ośrodka $\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$. Masa szkieletu na jednostkę objętości wynosi $\rho_1 = (1 - f)\rho_s$, gdzie ρ_s to gęstość szkieletu, według Biota (1956) jest ona równa $\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}$.

Masa płynu w jednostce objętości jest natomiast równa $\rho_2 = f \rho_1$, według Biot (1956) jest on równa $\rho_2 = \rho_{12} + \rho_{22}$, stąd $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Współczynnik ρ_{12} określa dynamiczne sprzężenie faz, $\rho_{12} < 0$.

- Energia kinetyczna ośrodka dwufazowego wyraża się wzorem (Biot, 1956):

$$2K = \int_{\Omega} (\rho^{11} v_i^s v_i^s + 2\rho^{12} v_i^s v_i^f + \rho^{22} v_i^f v_i^f) d\Omega. \quad (4.1)$$

- Naprężenia odnoszone są do powierzchni całkowitej ośrodka, za naprężenia ujemne uznaje się naprężenia ściskające, zatem naprężenie w płynie $\sigma = -pf$, gdzie p to ciśnienie płynu.
- Pory ośrodka dwufazowego wzajemnie się komunikują – nie ma por zamkniętych.
- Płyn jest ściśliwym, lepkiem płynem, newtonowskim.
- Podczas przepływu płynu względem szkieletu na skutek działania lepkości, na styku obu faz następuje dyssypacja energii – jest ona funkcją kwadratową prędkości względnej cieczy:

$$2D = \int_{\Omega} b v_i^r v_i^r d\Omega, \quad (4.2)$$

gdzie b to współczynnik uśrednionych oporów lepkich cieczy zależny od lepkości płynu i średnicy ziaren ośrodka porowatego.

W celu wyprowadzenia równań ciągłości przepływu dla ośrodka dwufazowego oraz płynu przesączającego się przez jego pory, można, zgodnie z pracą Strzeleckiego i in. (2008) skorzystać z reprezentatywnego elementu REV (Representative element of Volume) wypełnionego ośrodkiem. Element ten ma objętość Ω , ograniczony jest powierzchnią S , natomiast \vec{n} jest wektorem jednostkowym skierowanym normalnie i na zewnątrz do powierzchni S . Ośrodek (szkielet i płyn) przemieszcza się przez ścianki elementu z prędkością \vec{v}_{rzecz}^s .

Masa przemieszczającego się przez powierzchnię S ośrodka jest równa:

$$\int_S \rho v_{rzecz,i}^s n_i dS = \int_S \rho_1 v_{rzecz,i}^s n_i dS + \int_S \rho_2 v_{rzecz,i}^s n_i dS = \int_S \rho_s v_i^s n_i dS + \int_S \rho_l v_i^s n_i dS, \quad (4.3)$$

jednocześnie ma miejsce przepływ płynu względem szkieletu z prędkością

$\vec{v}_{rzecz}^r = \vec{v}_{rzecz}^f - \vec{v}_{rzecz}^s$. Masa przepływającego płynu jest równa:

$$\int_S \rho_2 v_{rzecz,i}^r n_i dS = \int_S \rho_1 v_i^r n_i dS. \quad (4.4)$$

Zmiana masy szkieletu i płynu przepływających przez powierzchnię S ograniczającą element w jednostce czasu jest równa:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho^1 + \rho^2)}{\partial t} d\Omega. \quad (4.5)$$

Sumarycznie można zatem napisać:

$$\int_S \rho v_{rzecz,i}^s n_i dS + \int_S \rho_1 (v_i^f - v_i^s) n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (4.6)$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\int_{\Omega} (\rho v_{rzecz,i}^s)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} (\rho_1 v_i^r)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \right) d\Omega = 0,$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_{rzecz,i}^s{}_{,i} + \rho_{,i} v_{rzecz,i}^s \right) d\Omega = - \int_S (\rho_1 v_i^r)_{,i} d\Omega. \quad (4.7)$$

Korzystając z definicji pochodnej materialnej $\left(\frac{D^s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{rzecz,i}^s \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$, oraz faktu, że

$v_{rzecz,i}^s{}_{,i} = \dot{\varepsilon}$, w układzie lokalnym można zapisać równanie ciągłości ośrodka w postaci:

$$\frac{D^s \rho}{Dt} + \rho \dot{\varepsilon} = -(\rho_1 v_i^r)_{,i}. \quad (4.8)$$

Jeśli rozpatrujemy wyłącznie ruch płynu porowego względem szkieletu, równanie ciągłości zawiera jedynie wypływ masy płynu i zmianę jego ilości w czasie:

$$\int_S \rho_2 v_{rzecz,i}^s n_i dS + \int_S \rho_1 v_i^r n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (4.9)$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\int_{\Omega} (\rho_2 v_{rzecz,i}^s)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} (\rho_1 v_i^r)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} d\Omega = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{2,i} v_{rzecz,i}^r + \rho_2 v_{rzecz,i,i}^r = -(\rho_2 v_{rzecz,i}^s)_{,i}. \quad (4.10)$$

Korzystając z pochodnej materialnej $\left(\frac{D^r}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{rzecz,i}^r \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$, w układzie lokalnym można zapisać równanie ciągłości płynu:

$$\frac{D^r \rho_2}{Dt} + \rho_2 (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) = -(\rho_2 v_{rzecz,i}^s)_{,i}. \quad (4.11)$$

Zakładając brak ruchu szkieletu $v_{rzecz,i}^s = 0$, czyli $v_{rzecz,i}^r = v_{rzecz,i}^f$. Wtedy:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{2,i} v_i^f + \rho_2 v_{i,i}^f = 0. \quad (4.12)$$

Stąd równanie ciągłości płynu ma postać:

$$div(\rho_1 v_i^f) = -\frac{\partial(\rho_1 f)}{\partial t}, \quad (4.13)$$

Która zgodna jest z postacią równania ciągłości dla modelu hydrodynamicznego przepływu płynu przez ośrodek porowaty.

4.1.2 Zasada zachowania pędu

Pęd dla obu faz ośrodka i działające na nie siły bezwładności określić można używając założeń podanych przez Biota (1956). Równanie energii kinetycznej wg Biota ma postać:

$$2K = \int_{\Omega} (\rho^{11} v_i^s v_i^s + 2\rho^{12} v_i^s v_i^f + \rho^{22} v_i^f v_i^f) d\Omega, \quad (4.14)$$

stąd pęd szkieletu oraz płynu ośrodka dwufazowego można otrzymać przez zróżniczkowanie energii kinetycznej względem prędkości:

$$P_i^s = \frac{\partial K}{\partial v_i^s} = \int_{\Omega} (\rho^{11} v_i^s + \rho^{12} v_i^f) d\Omega, \quad (4.15)$$

$$P_i^f = \frac{\partial K}{\partial v_i^f} = \int_{\Omega} (\rho^{12} v_i^s + \rho^{22} v_i^f) d\Omega.$$

Siły bezwładności szkieletu i płynu opisują następujące zależności:

$$\begin{aligned} B_i^s &= \int_{\Omega} \left(\rho^{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{12} \frac{\partial v_i^f}{\partial t} \right) d\Omega, \\ B_i^f &= \int_{\Omega} \left(\rho^{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{22} \frac{\partial v_i^f}{\partial t} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Funkcja dyssypacji energii podczas przepływu płynu przez pory ciała stałego ma postać:

$$2W_d = \int_{\Omega} b v_i^r v_i^r d\Omega, \quad (4.17)$$

gdzie b oznacza uśrednioną siłę oporu lepkiego, a W_d funkcję dyssypacji w postaci formy kwadratowej zależnej od prędkości relatywnej $\mathbf{v}^r = (v_i^r)$.

Można określić siły oporu lepkiego działające na szkielet i płyn obliczając:

$$\begin{aligned} M_i^s &= \frac{\partial W_d}{\partial v_i^s} = - \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega, \\ M_i^f &= \frac{\partial W_d}{\partial v_i^f} = \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Zasada zachowania pędu dla fazy stałej ośrodka ma postać:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\Omega} X_i (\rho - \rho_2) d\Omega = - \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho^{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{12} \frac{\partial v_i^f}{\partial t} \right) d\Omega. \quad (4.19)$$

Po zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego, związek lokalny można zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij,j} + X_i \rho_2 = -b v_i^r + \rho^{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{12} \frac{\partial v_i^f}{\partial t}. \quad (4.20)$$

Dla fazy płynnej ośrodka zasada zachowania pędu będzie miała postać:

$$\int_S \sigma n_i dS + \int_{\Omega} X_i \rho_2 d\Omega = \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho^{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{22} \frac{\partial v_i^f}{\partial t} \right) d\Omega \quad (4.21)$$

Związek lokalny po zastosowaniu zasady Gaussa-Ostrogradskiego ma postać:

$$\sigma_{,i} + X_i \rho_2 = b v_i^r + \rho^{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{22} \frac{\partial v_i^f}{\partial t}. \quad (4.22)$$

Równanie dla obu faz ośrodka łącznie ma postać:

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho = \rho^{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{12} \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + \frac{\partial v_i^s}{\partial t} \right) + \rho^{22} \frac{\partial v_i^f}{\partial t}. \quad (4.23)$$

Zakładając proces quasi statyczny, gdzie przyspieszenia obu faz są małe, więc $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho &= 0, \\ \sigma_{,i} + X_i \rho_2 &= b v_i^r. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Z ostatniego równania można otrzymać prędkość względną płynu:

$$v_i^r = \frac{1}{b} (\sigma_{,i} + X_i \rho_2) = \frac{1}{b} (\sigma_{,i} - g \rho_2) = -\frac{\rho_2 g}{b} \left(-\frac{\sigma_{,i}}{\rho_2 g} + 1 \right). \quad (4.25)$$

Zakładając definicję wysokości hydraulicznej H zgodnie z równaniem Bernoulliego:

$$H = \frac{E}{mg} = h + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}, \quad (4.26)$$

przy założeniu braku wpływu energii kinetycznej na przepływ płynu w ośrodku porowatym w postaci:

$$H = \frac{p}{\rho_l g} + x_3, \quad (4.27)$$

zgodnie z założeniem, że $\rho_2 = f \rho_l$ i $\sigma = -fp$, dla stałej porowatości $p_{,i} = -\frac{\sigma_{,i}}{f}$:

$$H_{,i} = -\frac{\sigma_{,i}}{\rho_2 g} + 1. \quad (4.28)$$

Wzór na prędkość względną płynu można zapisać w postaci:

$$v_i^r = -\frac{\rho_2 g}{b} H_{,i}. \quad (4.29)$$

Porównując otrzymane równanie z prawem Darcy'ego:

$$v_i^r = -kH_{,i} , \quad (4.30)$$

można pokazać, że prawo Darcy'ego jest prostą konsekwencją zasady zachowania pędu dla przypadku przepływów laminarnych płynu przez ośrodek porowaty. Wprowadzając oznaczenia: $k = \frac{\rho_2 g}{b}$, można określić współczynnik oporu lepkiego $b = \frac{\rho_2 g}{k}$.

4.1.3 Związki konstytutywne dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i cieczy

4.1.3.1 Związki konstytutywne przy założeniu, że temperatura szkieletu i cieczy są takie same

Na podstawie prac Nowackiego (1970) oraz Strzeleckiego i in (2008), dotyczących ośrodków sprężystych oraz porosprężystych, korzystając z praw termodynamiki opisujących procesy nieodwracalne można wyprowadzić związki konstytutywne dla ośrodka porosprężystego w warunkach izotermicznych oraz nieizotermicznych, przy założeniu że ciepło przewodzone jest przez obie fazy jednocześnie, lub przewodzone jest przez każdą z faz osobno. Związki zakładające jednakową temperaturę obu faz ośrodka oraz metodyka ich wyprowadzenia przedstawione zostały w rozdziale 3.1.4, przy czym uważam, że używana w obliczeniach mocy prędkość, z jaką przemieszcza się dana faza powinna być prędkością rzeczywistą, co jednak nie ma wpływu na końcową postać równań, wpływa natomiast na definicję prędkości dylatacji każdej z faz. Pierwsza zasada termodynamiki ma wtedy dla szkieletu następującą postać:

$$\int_{\Omega} v_{rzecz.i}^s (\sigma_{ij,j} + X_i \rho^1 + b v_1^r - \rho_{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} - \rho_{12} \frac{\partial v_i^l}{\partial t}) d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i}^s) d\Omega = \int_{\Omega} \dot{w}_1 d\Omega, \quad (4.31)$$

natomiast dla płynu:

$$\int_{\Omega} v_{rzecz.i}^l (\sigma_{,i} + X_i \rho^2 - b v_i^r - \rho_{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} - \rho_{22} \frac{\partial v_i^l}{\partial t}) d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma \dot{\theta} - q_{i,i}^l) d\Omega = \int_{\Omega} \dot{w}_2 d\Omega, \quad (4.32)$$

co po uwzględnieniu zasady zachowania pędu daje dla całego ośrodka postać pierwszej zasady termodynamiki:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}. \quad (4.33)$$

Związki konstytutywne dla ośrodka porosprężystego przy braku zmian temperatury mają zatem postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon_{ij} + R\theta;\end{aligned}\tag{4.34}$$

natomiast w przypadku nieizotermicznym zgodnie z podrozdziałem 3.1.4:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta + \eta\vartheta)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta + \omega\vartheta.\end{aligned}\tag{4.35}$$

4.1.3.2 Związki konstytutywne gdy zakładamy, że temperatura szkieletu i cieczy w skali por jest niejednakowa

W przypadku transportu przez ośrodek porowaty, płyn przepływa tylko przez przestrzeń porową – stąd wartość prędkości filtracji płynu jest iloczynem wartości prędkości rzeczywistej oraz porowatości. Nieco inaczej sprawa się ma w przypadku przewodzenia ciepła – przepływa ono przez obie fazy w różnym tempie, co więcej, następuje wymiana ciepła między fazami. Mając ten fakt na względzie wyprowadziłam równania konstytutywne podobnie, jak dla ośrodka traktowanego jako ciągły, przy założeniu że obie fazy mogą mieć w danym momencie różną temperaturę: jako T^s oznaczana będzie temperatura szkieletu, natomiast T^l temperatura cieczy. W związku z różnymi temperaturami prędkość zmian entropii będzie również różna dla obu faz:

- prędkość zmiany entropii szkieletu:

$$\dot{s}_1 = -\frac{q_{i,i}^s}{T^s},\tag{4.36}$$

- prędkość zmian entropii płynu:

$$\dot{s}_2 = -\frac{q_{i,i}^l}{T^l},\tag{4.37}$$

gdzie q_i^s to składowe strumienia ciepła przepływającego przez szkielet, a q_i^l to składowe strumienia ciepła przepływającego przez płyn. Używając tych oznaczeń, zmianę energii wewnętrznej ośrodka można zapisać za pomocą wzoru:

$$\dot{w} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma\dot{\theta} - q_{i,i}^s - q_{i,i}^l.\tag{4.38}$$

Energię swobodną Helmholtza przy założeniu różnych temperatur obu faz można wyrazić wzorem:

$$F = W - S_1 T^s - S_2 T^l, \quad (4.39)$$

a prędkość jej zmian w układzie lokalnym:

$$\dot{\chi} = \dot{w} - s_1 \dot{T}^s - \dot{s}_1 T^s - s_2 \dot{T}^l - \dot{s}_2 T^l. \quad (4.40)$$

Stąd można uzyskać wyrażenie:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - s_1 \dot{T}^s - s_2 \dot{T}^l - \dot{\chi} = 0. \quad (4.41)$$

Zakładając, że energia swobodna jest funkcją odkształceń obu faz oraz ich temperatur bezwzględnych: $\chi = \chi(\varepsilon_{ij}, \theta, T^s, T^l)$, można zapisać jej różniczkę w postaci:

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \chi}{\partial T^s} \dot{T}^s + \frac{\partial \chi}{\partial T^l} \dot{T}^l, \quad (4.42)$$

która pozwala nam napisać powyższe wyrażenie:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\sigma - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \left(-s_1 - \frac{\partial \chi}{\partial T^s} \right) \dot{T}^s + \left(-s_2 - \frac{\partial \chi}{\partial T^l} \right) \dot{T}^l = 0, \quad (4.43)$$

skąd można uzyskać następujące zależności:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad -s_1 = \frac{\partial \chi}{\partial T^s}, \quad -s_2 = \frac{\partial \chi}{\partial T^l}. \quad (4.44)$$

Funkcję lokalną energii swobodnej można rozwinąć w szereg Maclaurina, przy czym temperatura każdej z faz przedstawiona zostanie za pomocą sumy temperatury początkowej oraz temperatury względnej:

$$\begin{aligned} T^s &= T_0 + \mathcal{G}^s, \\ T^l &= T_0 + \mathcal{G}^l. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Wprowadzając dodatkowe oznaczenia wynikające z różnych temperatur obu faz ośrodka:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T^l} &= \eta_{ij}^l, & \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial \theta \partial T^s} &= \omega^s, & \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial \theta \partial T^l} &= \omega^l, \\
\frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T^l} &= \eta_{ij}^l, & \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial \theta \partial T^s} &= \omega^s, & \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial \theta \partial T^l} &= \omega^l, \\
\frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial (T^s)^2} &= \xi^s, & \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial (T^l)^2} &= \xi^l, & \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T^s} &= \eta_{ij}^s, \\
&& \frac{\partial^2 \chi(0,0,T_0^s,T_0^l)}{\partial T^l \partial T^s} &= \xi^s, & &
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Funkcję energii swobodnej z dokładnością do małych drugiego rzędu można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
2\chi(\varepsilon_{ij}, \theta, T^s, T^l) &= 2\sigma_a \theta + c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \gamma \theta^2 + \xi^s (T^s)^2 + \xi^l (T^l)^2 \\
&+ 2\beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + 2\eta_{ij}^s \varepsilon_{ij} T^s + 2\eta_{ij}^l \varepsilon_{ij} T^l + 2\omega^s \theta T^s + 2\omega^l \theta T^l + \xi^{ls} T^s T^l,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Uzyskałam związki konstytutywne i równania entropii w obydwu fazach ośrodka dwufazowego w postaci:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \theta + \eta_{ij}^s \mathcal{G}^s + \eta_{ij}^l \mathcal{G}^l, \\
\sigma - \sigma_a &= \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \gamma \theta + \omega^s \mathcal{G}^s + \omega^l \mathcal{G}^l, \\
-s_1 &= \eta_{ij}^s \varepsilon_{ij} + \omega^s \theta + \xi^s \mathcal{G}^s + \xi^{ls} \theta^l, \\
-s_2 &= \eta_{ij}^l \varepsilon_{ij} + \omega^l \theta + \xi^{ls} \mathcal{G}^l + \xi^l \mathcal{G}^l.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Analogicznie, jak w przypadku ośrodka jednofazowego ze względu na przewodnictwo cieplne o uśrednionych parametrach cieplnych i jednakowej temperaturze, tensor c_{ijkl} można wyrazić za pomocą stałych Lamégo, natomiast tensor β_{ij} i stałą γ za pomocą stałych Biota:

$$\begin{aligned}
\beta_{ij} &= Q \delta_{ij}, \\
\gamma &= R.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Zgodnie z założeniem, że ośrodek jest izotropowy, tensory η_{ij}^s i η_{ij}^l można wyrazić przy pomocy stałych η^s i η^l wzorami:

$$\begin{aligned}
\eta_{ij}^s &= \eta^s \delta_{ij}, \\
\eta_{ij}^l &= \eta^l \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Zatem związki konstytutywne i równania entropii dostają w postaci:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta + \eta^s \mathcal{G}^s + \eta^l \mathcal{G}^l) \delta_{ij}, \\
 \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta + \omega^s \mathcal{G}^s + \omega^l \mathcal{G}^l, \\
 -s_1 &= \eta^s \varepsilon_{ij} + \omega^s \theta + \xi^s \mathcal{G}^s + \xi^{ls} \mathcal{G}^l, \\
 -s_2 &= \eta^l \varepsilon_{ij} + \omega^l \theta + \xi^{ls} \mathcal{G}^l + \xi^l \mathcal{G}^l.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Współczynniki η^s i η^l można uzyskać przez zwężenie pierwszego ze związków (4.51):

$$\sigma_{ii} = (2N + 3A)\varepsilon + 3Q\theta + 3\eta^s \mathcal{G}^s + 3\eta^l \mathcal{G}^l. \tag{4.52}$$

Jeśli moduł odkształcenia objętościowego szkieletu oznaczymy jako $K = A + 2/3N$, naprężenia średnie można wyrazić wzorem:

$$\sigma_m = K\varepsilon + Q\theta + \eta^s \mathcal{G}^s + \eta^l \mathcal{G}^l. \tag{4.53}$$

Zakładając, że jedyną przyczyną powodującą odkształcenia szkieletu jest temperatura \mathcal{G}^s ($\sigma_m = 0, \mathcal{G}^l = 0, \theta = 0$), wtedy:

$$K\varepsilon = -\eta^s \mathcal{G}^s. \tag{4.54}$$

Stąd można stwierdzić, że

$$\eta^s = -K\alpha^s, \tag{4.55}$$

gdzie α^s jest współczynnikiem objętościowej rozszerzalności szkieletu. Jeśli natomiast odkształcenia cieczy spowodowane są wyłącznie zmianą jej temperatury, wtedy

$$Q\theta = -\eta^l \mathcal{G}^l, \tag{4.56}$$

co pozwala na określenie wartości współczynnika η^l :

$$\eta^l = -Q\alpha^l, \tag{4.57}$$

gdzie α^l jest współczynnikiem objętościowej rozszerzalności cieplnej płynu.

W podobny sposób można uzyskać współczynniki ω^s i ω^l dla drugiego ze związków. Jeśli jedyną przyczyną odkształcenia objętościowego cieczy jest zmiana jej temperatury, wtedy:

$$R\theta = -\omega^l \mathcal{G}^l, \quad (4.58)$$

stąd:

$$\omega^l = -R\alpha^l. \quad (4.59)$$

Podobnie w przypadku odkształceń szkieletu, jeśli przyczyną ich odkształceń jest wyłącznie temperatura, wtedy:

$$\omega^s = -Q\alpha^s. \quad (4.60)$$

Związki konstytutywne dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i cieczy przy założeniu niezależnego przepływu ciepła w obu fazach z wymianą ciepła między fazami proponuję przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta - K\alpha^s \mathcal{G}^s - Q\alpha^l \mathcal{G}^l) \delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta - Q\alpha^s \mathcal{G}^s - R\alpha^l \mathcal{G}^l. \end{aligned} \quad (4.61)$$

4.1.4 Równania przewodnictwa cieplnego dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i cieczy

Uwzględniając uzyskane wcześniej współczynniki, równania entropii mają postać:

$$\begin{aligned} -\dot{s}_1 &= -K\alpha^s \varepsilon - Q\alpha^s \theta + \xi^s \mathcal{G}^s + \xi^{ls} \mathcal{G}^l, \\ -\dot{s}_2 &= -Q\alpha^l \varepsilon - R\alpha^l \theta + \xi^{ls} \mathcal{G}^l + \xi^l \mathcal{G}^l. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu i przemnożeniu przez temperaturę bezwzględną T:

$$\begin{aligned} -T\dot{s}_1 &= -TK\alpha^s \dot{\varepsilon} - TQ\alpha^s \dot{\theta} + T\xi^s \dot{\mathcal{G}}^s + T\xi^{ls} \dot{\mathcal{G}}^l, \\ -T\dot{s}_2 &= -TK\alpha^s \dot{\varepsilon} - TQ\alpha^s \dot{\theta} + T\xi^s \dot{\mathcal{G}}^s + T\xi^{ls} \dot{\mathcal{G}}^l. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Wielkość $T \frac{ds}{dt}$ jest miarą ilości ciepła wytworzonego w jednostce objętości rozważanego obszaru w procesie zmiany temperatury, gdy odkształcenie ośrodka konsolidującego jest stałe (prędkość dylatacji szkieletu i cieczy jest równa zero). Wielkość taka określana jest mianem ciepła właściwego odpowiedniego składnika ośrodka przy stałej objętości c_v .

Ponieważ η^s , η^l oraz ω^s i ω^l są ujemne, więc $\xi^s < 0$, $\xi^l < 0$ i $\xi^{ls} < 0$, $a_3 < 0$ i wynosi:

$$\xi^s = -\frac{\rho_1 c_v^s}{T_0}, \quad \xi^l = -\frac{\rho_2 c_v^l}{T_0}, \quad \xi^{ls} = -\frac{\rho c_v^{ls}}{T_0}, \quad (4.64)$$

gdzie c_v^s i c_v^l odpowiadają kolejno ciepłu właściwemu szkieletu i płynu przy stałej objętości, oraz c_v^{ls} to ciepło właściwe sprzężenia termicznego faz. Korzystając z prawa przewodnictwa cieplnego Fouriera można napisać:

$$\begin{aligned}\lambda^s \nabla^2 \mathcal{G}^s &= -TK\alpha^s \dot{\varepsilon} - TQ\alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0} (\rho_1 c_v^s \dot{\mathcal{G}}^s + \rho c_v^{ls} \dot{\mathcal{G}}^l), \\ \lambda^l \nabla^2 \mathcal{G}^l &= -TQ\alpha^l \dot{\varepsilon} - TR\alpha^l \dot{\theta} + \frac{T^l}{T_0} (\rho c_v^{ls} \dot{\mathcal{G}}^l + \rho_2 c_v^l \dot{\mathcal{G}}^l),\end{aligned}\quad (4.65)$$

gdzie λ^s jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego szkieletu ośrodka dwufazowego, natomiast λ^l jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego płynu. Równania (4.63) i (4.65) są proponowanymi przeze mnie równaniami konstytutywnym i równaniami przewodnictwa cieplnego przy założeniu, że proces przepływu ciepła odbywa się dwoma fazami (ciecz i ciało) stałe niezależnie.

Sumując stronami równania (4.65) otrzymać można postać wyprowadzonego przez Strzeleckiego (2008) równania przewodnictwa cieplnego ośrodka jednofazowego z punktu widzenia przewodnictwa cieplnego, w wykorzystującą parametry fizyczne dla obu faz ośrodka w :

$$\lambda^{sr} \nabla^2 T = - (3K\alpha_i^s + Q\alpha_T^l) \dot{\varepsilon} T - (3Q\alpha_T^s + R\alpha_T^l) \dot{\theta} T - \frac{\rho c_v}{T_0} \dot{\mathcal{G}} T, \quad (4.66)$$

gdzie $\lambda = \lambda^s + \lambda^l$ i $\rho c_v = \rho_1 c_v^s + 2\rho c_v^{ls} + \rho_2 c_v^l$.

4.1.5 Układ równań termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i cieczy

Zaproponowany przeze mnie modele termokonsolidacji zawiera 23 niewiadome:

- 3 przemieszczenia u_i ,
- 3 składowe prędkości filtracji v_i ,
- 6 składowych tensora odkształcenia ε_{ij} ,
- 6 składowych tensora naprężenia σ_{ij} ,
- naprężenie porowe σ ,
- odkształcenie objętościowe szkieletu ε ,
- odkształcenie objętościowe płynu θ ,

- temperatura płynu,
- temperatura szkieletu.

Układ równań termokonsolidacji ośrodka dwufazowego składa się zatem z 23 równań dla 23 niewiadomych dla przypadku niezależnego przepływu ciepła przez obie fazy:

- związki geometryczne (6 związków dla odkształceń postaciowych i objętościowych oraz dylatacja):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.67)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

- związki fizyczne (6 związków dla szkieletu i jeden dla płynu):

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta - K\alpha^s g^s - Q\alpha^l g^l) \delta_{ij}, \quad (4.68)$$

$$\sigma - \sigma_a = Q\varepsilon + R\theta - Q\alpha^{ss} g^s - R\alpha^l g^l,$$

- równanie równowagi wewnętrznej dla przypadku quasi-statycznego (3 równania):

$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i \rho = 0, \quad (4.69)$$

- równanie ruchu cieczy:

$$k \sigma_{,ii} = (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}), \quad (4.70)$$

- równania opisujące prędkość cieczy (3 równania)

$$v_i^r = -kH_i \quad (4.71)$$

- równania przewodnictwa ciepła :

$$\lambda^s \nabla^2 g^s = -TK\alpha^s \dot{\varepsilon} - TQ\alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0} (\rho_1 c_v^s \dot{g}^s + \rho c_v^{ls} \dot{g}^l), \quad (4.72)$$

$$\lambda^l \nabla^2 g^l = -TQ\alpha^l \varepsilon - TR\alpha^l \dot{\theta} + \frac{T^l}{T_0} (\rho c_v^{ls} \dot{g}^l + \rho_2 c_v^l \dot{g}^l),$$

Wśród wymienionych niewiadomych, niezależnych jest tylko 6 z 23. Układ ten sprowadza się do 6 równań z 6 niewiadomymi: $U_1, U_2, U_3, \sigma, T^s, T^l$:

- 3 równań równowagi wewnętrznej (4.69),
- 1 równania ruchu cieczy (4.70),
- 2 równań przewodnictwa ciepła (4.72).

W przypadku założenia ośrodka jednofazowego z punktu widzenia przewodnictwa cieplnego przez ośrodek porowaty, układ sprowadza się do 5 równań z 5 niewiadomymi U_1, U_2, U_3, σ, T , gdzie równania (4.72) zastąpione są przez równanie przewodzenia ciepła dla ośrodka (4.66), a w równaniach (4.68) temperatura szkieletu równa jest temperaturze płynu. Oczywiście przyjęcie takiego założenia charakteryzuje się istotną niekonsekwencją, bowiem model Biota był budowany od początku dla ośrodka dwufazowego.

4.2. Budowa modelu matematycznego procesu termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i gazu

4.2.1 Równania ciągłości przepływu i zachowania pędu oraz równanie filtracji

Dla ośrodka wypełnionego gazem, równanie ciągłości przepływu oraz równania zachowania pędu są identyczne, jak ośrodka wypełnionego cieczą:

- równanie ciągłości przepływu ośrodka dwufazowego (4.8):

$$\frac{D^s \rho}{Dt} + \rho \dot{\varepsilon} = -(\rho_1 v_i^r)_{,i},$$

- równanie ciągłości przepływu płynu przez ośrodek dwufazowy (4.11):

$$\frac{D^r \rho_2}{Dt} + \rho_2 (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) = -(\rho_2 v_{rzecz,i}^s)_{,i},$$

- zasada zachowania pędu dla ośrodka (4.23):

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho = \rho^{11} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho^{12} \left(\frac{\partial v_i^g}{\partial t} + \frac{\partial v_i^s}{\partial t} \right) + \rho^{22} \frac{\partial v_i^g}{\partial t},$$

- zasada zachowania pędu dla obu faz przy założeniu procesu quasi-statycznego (4.24):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho &= 0, \\ \sigma_{,i} + X_i \rho^2 &= b v_i^r. \end{aligned}$$

4.2.2 Związki konstytutywne

4.2.2.1 Związki konstytutywne gdy zakładamy, że ciepło rozchodzi się przez ośrodek jednofazowy

W przypadku klasycznej teorii sprężystości używa się liniowych związków konstytutywnych, dla określania modułów sprężystości obu faz ośrodka dwufazowego (stałej i płynnej) niezbędne jest określenie przyrostów naprężenia i odkształcenia obu faz ośrodka. Ścisłość ciał sprężystych definiowana jest jako odwrotność współczynnika sprężystości objętościowej:

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}, \quad (4.73)$$

jest ona zazwyczaj przyjmowana, jako wartość stała dla danej substancji w określonych warunkach. W przypadku gazów, zależność objętości od ciśnienia jest nieliniowa, stąd przy określaniu współczynnika ścisłości należy posługiwać się wartościami bezwzględnymi. Zależności między ciśnieniem, objętością i temperaturą opisują prawa gazowe. Zależność między ciśnieniem a objętością dla stałej temperatury opisuje prawo Boyle'a-Mariotte'a:

$$pV = \text{const}. \quad (4.74)$$

Objętość przy dowolnym naprężeniu można zatem zapisać w odniesieniu do objętości w stanie początkowym $V = V_0(1 + \theta)$. Posługując się naprężeniem porowym w miejsce ciśnienia prawo to można zapisać w postaci $\sigma V = \text{const}$. Jeśli jako punkt odniesienia przyjmiemy naprężenie wywołane ciśnieniem atmosferycznym, czyli:

$$\sigma_a V_a = \sigma V_a (1 + \theta), \quad (4.75)$$

naprężenie można zapisać w funkcji odkształcenia:

$$\sigma = \frac{\sigma_a}{1 + \theta}. \quad (4.76)$$

Z prawa Boyle'a-Mariotte'a wynika również definicja współczynnika ścisłości dla gazu

$\beta = \frac{1}{p}$, co przy użyciu powyższych zależności można zapisać w postaci $\beta = \frac{(1 + \theta)}{p_a}$ lub

stosując oznaczenie Biota $R = -\frac{\sigma_a}{(1+\theta)f}$, zatem nie jest on stałą materiałową, lecz funkcją.

Dlatego równania konstytutywne ośrodka dwufazowego przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f}\theta,\end{aligned}\tag{4.77}$$

dla procesów izotermicznych, natomiast w przypadku procesów nieizotermicznych:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta + \eta\vartheta)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f}\theta + \omega\vartheta,\end{aligned}\tag{4.78}$$

ze współczynnikami:

$$\eta = -(3K\alpha^s + Q\alpha^s_T),\tag{4.79}$$

oraz

$$\omega = -(3Q\alpha^s + R\alpha^s).\tag{4.80}$$

Po uwzględnieniu powyższych relacji oraz wynikającej z prawa Clapeyrona zależności $\alpha^s = 1/T$, współczynniki (4.79) i (4.80) mają postać:

$$\begin{aligned}\eta^{sg} &= -\left(3K\alpha^s + \frac{Q}{T}\right), \\ \omega^{sg} &= -\left(3Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\right).\end{aligned}\tag{4.81}$$

Stąd można związki konstytutywne dla procesu nieizotermicznego zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - \left(3K\alpha^s + \frac{Q}{T}\right)\vartheta\right)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f}\theta - \left(Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\right)\vartheta.\end{aligned}\tag{4.82}$$

4.2.2.2 Związki konstytutywne, gdy zakładamy, że przepływ ciepła odbywa się w obu fazach ośrodka niezależnie.

Podobnie, jak w przypadku przepływu cieczy uznałam, że właściwym modelem opisującym proces termokonsolidacji jest model przyjmujący, że z punktu widzenia przewodzenia ciepła nie powinno przyjmować się założenia stosowanego w licznych publikacjach, że przepływ ciepła odbywa się przez ośrodek jednofazowy o uśrednionych parametrach cieplnych, lecz przeciwnie obie fazy przewodzą ciepło niezależnie. Dlatego wprowadziłam modyfikacje stosowanych modeli termokonsolidacji również w przypadku fazy gazowej.

Podstawowa forma związków konstytutywnych dla gazu jako płynu porowego nie zmienia się i ma postać taką, jak równania (4.61) w poprzednim podrozdziale:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta + \eta^s \mathcal{G}^s + \eta^g \mathcal{G}^g) \delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta + \omega^s \mathcal{G}^s + \omega^g \mathcal{G}^g.\end{aligned}\quad (4.83)$$

Współczynniki η^s i ω^s dotyczące szkieletu pozostają bez zmian, opisują je związki (4.55) i (4.60):

$$\begin{aligned}\eta^s &= -3K\alpha^s, \\ \omega^s &= -3Q\alpha^s.\end{aligned}\quad (4.84)$$

Współczynniki dotyczące płynu, w przypadku gazu nie są już stałymi materiałowymi, lecz funkcjami. Przy założeniu zmian objętości gazu wskutek wyłącznie zmiany jego temperatury funkcja η^{sg} ma postać:

$$\eta^{sg} = -Q\alpha^g = -\frac{Q}{T},\quad (4.85)$$

podobnie w przypadku drugiego ze związków, funkcję ω^{sg} można zapisać w następującej postaci:

$$\omega^{sg} = -\frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}.\quad (4.86)$$

Proponowane związki konstytutywne dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i gazu można zatem zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - 3K\alpha^s g^s - \frac{Q}{T} g^s \right) \delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f} \theta - 3Q\alpha^s g^s - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT} g^s.\end{aligned}\tag{4.87}$$

4.2.3. Równania przewodnictwa cieplnego

Zmiany wynikające z nieliniowego zachowania gazu mają wpływ również na postać równań przewodzenia ciepła. W przypadku ośrodka traktowanego jako jednofazowy, dla którego równanie przewodnictwa cieplnego ma postać (4.66):

$$\lambda \nabla^2 T = -\eta \dot{\varepsilon} T - \omega \dot{\theta} T - \xi \dot{g} T.\tag{4.88}$$

W równaniu tym należy dokonać zmiany współczynników η i ω na funkcje:

$$\begin{aligned}\eta^{sg} &= -\left(3K\alpha^s + \frac{Q}{T} \right), \\ \omega^{sg} &= -\left(3Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT} \right).\end{aligned}\tag{4.89}$$

Stąd ostatecznie równanie ma postać

$$\lambda \nabla^2 T = -\left(3K\alpha^s + \frac{Q}{T} \right) \dot{\varepsilon} T - \left(3Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT} \right) \dot{\theta} T - \xi \dot{g} T.\tag{4.90}$$

W moim modelu proponuję w miejsce powyższego wprowadzić model przepływu ciepła przez każdą z faz ośrodka. Proponowany przeze mnie model sprowadza się do zapisu przepływu ciepła dwoma równaniami przewodnictwa cieplnego w miejsce równania (4.90)

:

$$\begin{aligned}\lambda^s \nabla^2 g^s &= -T^s 3K\alpha^s \dot{\varepsilon} - T^s 3Q\alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0} \left(\rho_1 c_v^s \dot{g}^s + \rho c_v^{ls} \dot{g}^l \right), \\ \lambda^g \nabla^2 g^g &= -Q\varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f} \dot{\theta} + \frac{T^g}{T_0} \left(\rho c_v^{gs} \dot{g}^g + \rho_2 c_v^g \dot{g}^g \right),\end{aligned}\tag{4.91}$$

gdzie λ^s jest współczynnikiem przewodnictwa ciepła przez szkielet ośrodka dwufazowego, natomiast λ^g jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego gazu.

4.2.4. Układ równań termo-konsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i gazu

W modelu termokonsolidacji ośrodka wypełnionego gazem, podobnie jak w przypadku ośrodka wypełnionego cieczą, występują 23 niewiadome dla przypadku osobnych obliczeń przewodzenia ciepła w szkielecie i płynie:

- przemieszczenia u_i ,
- 3 składowe prędkości filtracji v_i ,
- 6 składowych tensora odkształcenia ε_{ij} ,
- 6 składowych tensora naprężenia σ_{ij} ,
- naprężenie porowe σ ,
- odkształcenie objętościowe szkieletu ε ,
- odkształcenie objętościowe płynu θ ,
- temperatura płynu (dla przypadku założenia równoległego przewodzenia ciepła),
- temperatura szkieletu (dla przypadku założenia równoległego przewodzenia ciepła).

Układ równań proponowanego prze mnie modelu termo-konsolidacji ośrodka dwufazowego składa się z 23 równań w tym:

- związki geometryczne (6 związków dla odkształceń postaciowych i objętościowych oraz dylatacja) (4.67):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

- związki fizyczne (6 związków dla szkieletu i jeden dla płynu) (4.87):

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - 3K\alpha^s g^s - \frac{Q}{T} g^s \right) \delta_{ij},$$

$$\sigma - \sigma_a = Q\varepsilon + -\frac{\sigma_a}{(1+\theta)f} \theta - 3Q\alpha^s g^s - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT} g^s,$$

- równań równowagi wewnętrznej dla przypadku quasi-statycznego (3 równania) (4.69):

$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i\rho = 0,$$

- 1 równania ruchu (przepływu) cieczy (4.70):

$$k \sigma_{,ii} = (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}),$$

- równań opisujące prędkość cieczy (3 równania):
 - równania Darcy'ego dla przepływu laminarnego (4.71):

$$v_i^r = -kH_{,i},$$

- lub równania Forchheimera dla przepływu turbulentnego (3.169):

$$v_i^r = K\sqrt{H_{,i}},$$

- równania przewodzenia ciepła (4.91) (2 równania):

$$\begin{aligned} \lambda^s \nabla^2 \mathcal{G}^s &= -T^s K \alpha^s \dot{\varepsilon} - T^s Q \alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0} (\rho_1 c_v^s \dot{\mathcal{G}}^s + \rho c_v^{gs} \dot{\mathcal{G}}^l), \\ \lambda^g \nabla^2 \mathcal{G}^g &= -Q \varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f} \dot{\theta} + \frac{T^g}{T_0} (\rho c_v^{gs} \dot{\mathcal{G}}^g + \rho_2 c_v^g \dot{\mathcal{G}}^g). \end{aligned} \quad (4.92)$$

W przypadku modelu zakładającego, że przepływ ciepła odbywa się przez ośrodek jednofazowy mamy model termo-konsolidacji w którym zamiast układu 2 równań (4.92) występuje pojedyncze równanie:

$$\lambda \nabla^2 T = - \left(K \alpha^s + \frac{Q}{T} \right) \dot{\varepsilon} T - \left(Q \alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT} \right) \dot{\theta} T - \xi \dot{\mathcal{G}} T. \quad (4.93)$$

Podobnie, jak w przypadku, kiedy fazę płynną reprezentuje ciecz, niezależnych jest w moim modelu termo-konsolidacji układu szkielet - gaz 6 z 23 niewiadomych. Układ ten sprowadza się zatem do 6 równań z 6 niewiadomymi: $U_1, U_2, U_3, \sigma, T^s, T^l$:

- 3 równań równowagi (4.69),
- 1 równania ruchu cieczy (4.70),
- 2 równań przewodzenia ciepła: (4.92)

W modelach, w których przepływ ciepła odbywa się przez ośrodek jednofazowy niezależnych jest 5 z 22 niewiadomych U_1, U_2, U_3, σ, T , składa się on z 5 równań:

- 3 równań równowagi (4.69),
- 1 równania ruchu cieczy (4.70),
- 1 równanie przewodnictwa ciepła (4.93)

Podsumowując zaprezentowane przeze mnie modele termo-konsolidacji zarówno dla fazy ciekłej i gazowej różnią się w istotny sposób od modeli proponowanych przez innych badaczy [Coussy (1995,2010), Strzelecki i inni (2008), Auriault i inni (1990)], bowiem przepływ ciepła odbywa się w obu fazach ośrodka (stałej i płynnej) niezależnie, więc podstawowy układ równań termokonsolidacji prowadzi do 6 niezależnych równań różniczkowych cząstkowych, a nie 5 proponowanych w literaturze. Model taki pozwala dokładnie prześledzić proces przepływu ciepła przez obie fazy ośrodka i przeanalizować jak długo trwa proces wyrównywania temperatur w obu fazach, bowiem zaproponowany przeze mnie model uwzględnia wymianę ciepła między fazami. Parametry cieplne dotyczące obu faz ośrodka są w literaturze dobrze znane, więc model opisujący przepływ ciepła przez każdą z faz ośrodka można analizować przy znajomości właściwości każdej z faz oddzielnie. W uzyskanych z termodynamiki procesów nieodwracalnych równaniach występuje dodatkowy człon charakteryzujący sprzężenia pola temperatury w fazie stałej z polem temperatury w płynie. Ten dodatkowy człon wyrażony poprzez współczynnik ρc_v^{ls} w obu równaniach przewodnictwa cieplnego jest analogiczny do sprzężenia energii kinetycznej w klasycznym modelu Biota i wprowadzeniu przez Niego nowej gęstości ρ_{12} w równaniu (4.14). Oczywiście wyznaczenie wartości tego współczynnika wymaga precyzyjnych badań laboratoryjnych, których niestety możliwości dostępnego mi laboratorium nie pozwalają. Dodatkowo zmodyfikowany został również przeze mnie klasyczny model termo-konsolidacji dla przypadku fazy gazowej. Otóż uwzględnienie nieliniowych praw ściśliwości gazów w modelach klasycznych termo-konsolidacji jak również w modelach przeze mnie proponowanych daje układ równań opisujący sprzężone pola ruchu fazy stałej i płynnej z polami przepływu ciepła w obu fazach w sposób odbiegający od proponowanych dotychczas modeli matematycznych, ale zgodny z podstawowymi prawami mechaniki gazów. Dla fazy gazowej modele te nawet w przypadku procesów izotermicznych są nieliniowe, więc wykorzystanie ich do rozwiązywania konkretnych zagadnień technicznych wymaga dużej ostrożności i uwagi, czy proces całkowania układu równań jest zbieżny.

5 Analiza zjawiska termo-konsolidacji w oparciu o proponowany model matematyczny.

Analizę procesu termo-konsolidacji przeprowadziłam na podstawie rozwiązania numerycznego układu równań termokonsolidacji metodą elementów skończonych próbki trójosiowego ściskania podgrzewanej od dołu w przypadku, gdy pory ośrodka w pełni

wypełnione są wodą, a następnie, gdy pory wypełnione są parą wodną lub powietrzem. Celem analiz numerycznych było uwypuklenie różnic w przebiegu obserwowanych zjawisk:

- zmian pola wektorowego prędkości filtracji w czasie,
- zmian pola skalarowego temperatur w poszczególnych fazach w czasie,
- zmian pola skalarowego wysokości hydraulicznej w czasie,
- zmian pola skalarowego dylatacji szkieletu w czasie,
- zmian pola skalarowego ciepła w czasie,
- zmian pola wektorowego przemieszczeń w czasie,
- zmian odkształceń szkieletu w czasie.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla dwóch przypadków:

- Zaproponowanego przeze mnie modelu termo-konsolidacji uwzględniającego fakt, że w rzeczywistości obie fazy ośrodka przewodzą ciepło i parametry dla obu faz są różne.
- Klasycznego modelu termo-konsolidacji zakładającego, że przepływ odbywa się ze względu na ciepło, przez ośrodek jednofazowy, którego parametry zostały określone w przedstawionym w rozdz. 4 modelu matematycznym,

Wykonane obliczenia numeryczne posłużyły do wykonania analizy porównawczej wymienionych wyżej modeli termo-konsolidacji gruntów.

Dodatkowo porównano wyniki symulacji komputerowej dla przypadku, gdy w porach ośrodka jest para wodna i powietrze. Oprócz prezentacji wyników zmian poszczególnych pól wektorowych i skalarowych przedstawiono wykres zmian parametrów fizycznych poszczególnych płynów w czasie.

Do symulacji użyto oprogramowania FlexPDE. Jest to program do numerycznego rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych, umożliwiający tworzenie jedno-, dwu- i trójwymiarowych modeli numerycznych. Największą zaletą programu jest możliwość zastosowania dowolnych równań różniczkowych (nie ma równań wbudowanych – są one definiowane przez użytkowników), bez ograniczenia co do ich ilości, co czyni program uniwersalnym - znajduje on zastosowanie w modelowaniu zjawisk z dziedziny mechaniki, chemii, przewodzenia ciepła, elektromagnetyzmu itd. Program posiada interfejs tekstowy dający pełną kontrolę nad modelem (model wprowadza się w postaci skryptu). FlexPDE automatycznie buduje siatkę elementów skończonych, która może być automatycznie

modyfikowana w kolejnych krokach czasowych (również kontrolowanych przez program i użytkownika poprzez wprowadzanie odpowiednich parametrów obliczeniowych). Skrypt programu podzielony jest na sekcje, gdzie kolejno definiowane są:

- title: tytuł zadania,
- select: parametry pracy programu,
- variables: niewiadome, których wartości obliczane są przez program,
- definitions: używane w zadaniu parametry i funkcje,
- equations: rozwiązywane równania różniczkowe,
- boundaries: definicja geometrii modelu i warunków brzegowych,
- monitors/Plots: wyniki w formie graficznej,
- end: polecenie kończące skrypt.

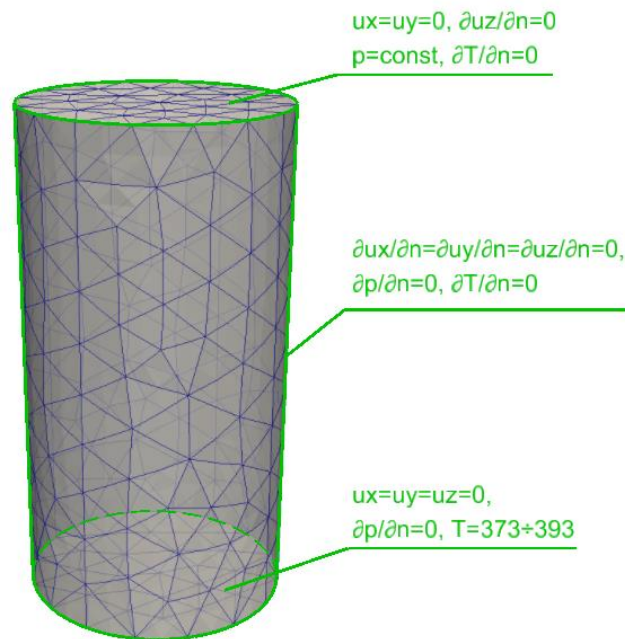
W skrypcie można umieszczać komentarze przy pomocy wykrzykników ("!") lub nawiasów klamrowych ("{}"), co polepsza przejrzystość i ułatwia późniejszą edycję skryptów. Załączniki 1 i 2 zawierają użyte w niniejszej pracy skrypty.

Wyniki graficzne w programie FlexPDE są niestety słabej jakości, ponadto wsadowy system pracy sprawia, że w celu uzyskania dodatkowego wykresu (np. dodatkowego przekroju) należy żądany wykres zdefiniować i jeszcze raz przeliczyć model, co może być czasochłonne. Wyniki obliczeń, oprócz postaci graficznej, mogą być jednak eksportowane w wielu formatach, co ułatwia postprocessing. W tym przypadku wyniki wyeksportowano do formatów txt oraz vtk i wygenerowano wykresy przy pomocy programów ParaView oraz MS Excel. Program ParaView jest programem Open Source, korzystającym z bibliotek VTK (Visualization Toolkit), służącym do tworzenia wizualizacji i analizy danych, wykorzystywanym w publikacjach naukowych z różnych dziedzin (mechanika, dynamika płynów, astrofizyka, nauka o klimacie itd.).

5.1 Założenia dotyczące geometrii obszaru i scenariusza zmian warunków brzegowych

Do obliczeń numerycznych przyjęto walcową próbkę gruntu o wymiarach $d=40$ mm i $H=76$ mm, obciążoną początkowo ciężarem własnym, poddaną działaniu temperatury po czasie $t=60$ s od momentu początkowego obliczeń. Próbka znajduje się w osłonie adiabatycznej, od dołu jest podgrzewana o 20°C powyżej temperatury początkowej. Siatkę elementów skończonych oraz warunki brzegowe przedstawiono na rysunku 5.1. Płynem

porowym jest woda (w zależności od zakresu temperatur, występująca w postaci ciekłej lub gazowej) lub powietrze.

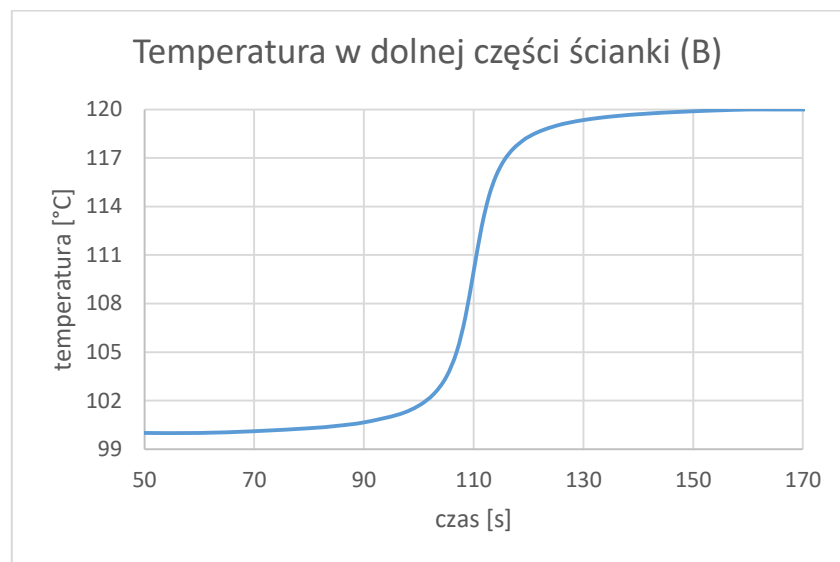
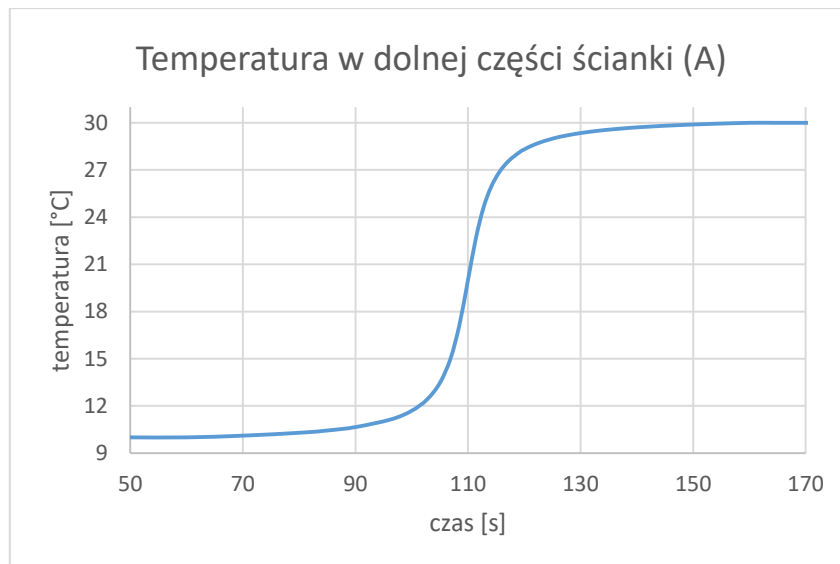


Rysunek 5.1. Wygenerowana przez program FlexPDE siatka elementów skończonych dla czasu $t=0$ oraz warunki brzegowe modelu

Dla obu płynów porowych przyjęto dwa scenariusze podgrzewania dolnej powierzchni próbki:

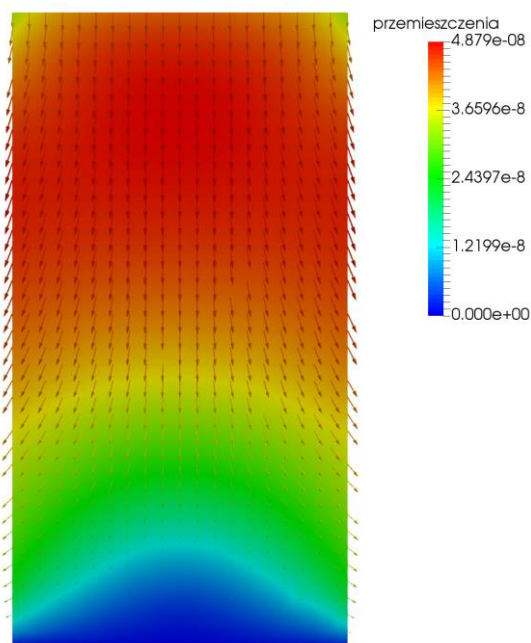
- A) po 60s od momentu początkowego włączone zostaje źródło ciepła, w którym temperatura wzrasta od 10°C do 30°C w ciągu 100s,
- B) po 60s od momentu początkowego włączone zostaje źródło ciepła, w którym temperatura wzrasta od 100°C do 120°C w ciągu 100s.

Przebieg temperatury w dolnej ścianie próbki przebiega wg funkcji $swage(t-110,0,20/tp0,10)$ zdefiniowanej w programie FlexPDE, którą dla pierwszego z wymienionych scenariuszy (A) przedstawiono na rys. 5.2. Górna powierzchnia próbki nagrzewa się na skutek przepływu ciepła przez próbkę.



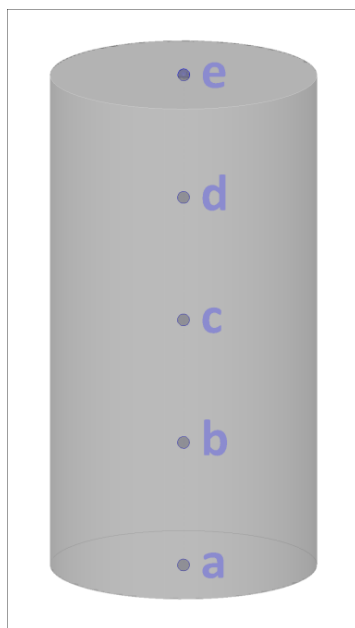
Rysunek 5.2. Warunek brzegowy dla temperatury w dolnej ściance próbki dla obu scenariuszy podgrzewania

Jako warunki początkowe przyjęto temperaturę 10°C dla schematu A lub 100°C dla schematu B, oraz naprężenie w płynie odpowiadające ciśnieniu atmosferycznemu ($\sigma_f = -p_a f$), początkowe wartości przemieszczeń przyjęto jako wynikające z natychmiastowego osiadania pod wpływem ciężaru własnego (rys 5.3).



Rysunek 5.3 Warunek początkowy dla przemieszczeń (dla modelu zakładającego wodę w porach ośrodka – schemat A)

Obliczenia numeryczne jak już wspomniałam zostały wykonane metodą elementów skończonych w programie FlexPDE v6. Wzdłuż osi próbki wybrano 6 punktów odniesienia, w których będzie prowadzona obserwacja zmieniających się obliczanych przez program poszukiwanych wielkości w formie wykresów (rys. 5.4): są to punkty 0,0,0 (środek dolnej ścianki), 0,0,19mm, 0,0,38mm (geometryczny środek próbki), 0,0,57mm, 0,0,76mm (środek górnej ścianki).



Rysunek 5.4 Położenie punktów odniesienia dla których przedstawione zostaną wykresy

Przyjęto następujące parametry ośrodka:

- porowatość: $f = 0.25$,
- parametry mechaniczne ośrodka:
 - moduł sprężystości postaciowej Biota $N = 2.5 \cdot 10^8 Pa$,
 - moduł sprężystości objętościowej dla ośrodka wypełnionego płynem $A = 5 \cdot 10^8 Pa$,
 - współczynnik określający wpływ naprężenia w płynie na zmianę jego objętości $R = 1 \cdot 10^7 Pa$,
 - współczynnik określający wpływ naprężenia w płynie na odkształcenia objętościowe w szkielecie $Q_g = 3 \cdot 10^5 Pa$, $Q_w = 3 \cdot 10^7 Pa$,
- właściwości cieplne przedstawiono w tabeli nr 1.

Tabela nr 1. Parametry termiczne poszczególnych faz oraz ośrodka.

	rozszerzalność termiczna ¹⁾ [1/K]	współczynnik przewodzenia ciepła [W/m/K]	ciepło właściwe [J/kg/K]
woda	$69 \cdot 10^{-6}$	0.6	4150
para wodna	$1/T$	$16.2 \cdot 10^{-3}$ ²⁾	1970
powietrze	$1/T$	$24.4 \cdot 10^{-3}$ ²⁾	1005
szkielet	$5 \cdot 10^{-6}$	3	700
ośrodek	-	$\lambda = (1-f)\lambda_s + f\lambda_f$	$c_v = (\rho_1 c_{vs} + \rho_2 c_{vf}) / \rho$

- 1) Dla płynów podano rozszerzalność objętościową, dla szkieletu liniową
- 2) Wartość zależna od temperatury, podano wartość początkową (dla 0°C)

- Współczynnik filtracji

Współczynnik filtracji zależny jest od lepkości: ($k = K / \mu$), która zmienia się wraz z temperaturą. Zależność lepkości wody od temperatury opisuje wzór Thorpego-Rodgera:

$$\mu_w = \frac{1.79 \cdot 10^{-3}}{1 + 3.37 \cdot 10^{-2} (T - 273) + 2.2 \cdot 10^{-4} (T - 273)^2} \quad (5.1)$$

W przypadku gazów lepkość opisuje wzór Sutherlanda:

$$\mu_g = \mu_0 \frac{273 + C_s}{T + C_s} \left(\frac{T}{273} \right)^{1.5} \quad (5.2)$$

gdzie μ_0 to lepkość początkowa, a C_s to stała Sutherlanda, dla pary wodnej $\mu_0 = 8.53 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, , dla powietrza $\mu_0 = 17.21 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ $C_s = 122$.

Przyjęto wyjściową wartość współczynnika filtracji dla wody $k_{10} = 10^{-8} \text{ m} / \text{s}$.

- Przewodnictwo cieplne gazu, podobnie jak lepkość, opisuje wzór Sutherlanda:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{273 + C_s}{T + C_s} \left(\frac{T}{273} \right)^{1.5}, \quad (5.3)$$

gdzie λ_0 to początkowy współczynnik przewodzenia ciepła, wartości dla powietrza i pary wodnej podane zostały w tabeli nr 1.

- Gęstość

Zarówno w przypadku gazów jak i wody gęstość zamodelowana została jako zależna od temperatury oraz ciśnienia. W przypadku wody gęstość opisuje wzór:

$$\rho_w = \frac{1000 \text{ kg} / \text{m}^3}{\left[1 + \alpha^w (T - T_p) \right] (1 - \beta_w p)}, \quad (5.4)$$

natomiast w przypadku gazów gęstość opisuje zależność wynikająca ze wzoru Clapeyrona:

$$\rho_g = \frac{p}{rT}, \quad (5.5)$$

gdzie r to indywidualna stała gazowa dla pary wodnej $r=461.5 \text{ J/kg/K}$, oraz dla powietrza $r=287.05 \text{ J/kg/K}$.

5.2. Porównanie funkcjonowania modeli matematycznych w przypadku, gdy płynem porowym jest woda

5.2.1. Model ośrodka dwufazowego

Model opisujący termokonsolidację przy założeniu przewodzenia ciepła równoległe obu fazach ośrodka składa się z 6 równań: (4.69), (4.70), (4.72), przepływ ciepła w każdej fazie opisuje osobne równanie. W przypadku cieczy jako płynu porowego układ równań ma następującą postać:

$$(\sigma_{ij} + \sigma \delta_{ij})_{,j} + X_i \rho = 0,$$

$$k \sigma_{,ii} = (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}),$$

$$\lambda^s \nabla^2 \mathcal{G}^s = -TK\alpha^s \dot{\varepsilon} - TQ\alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0} (\rho_1 c_v^s \dot{\mathcal{G}}^s + \rho c_v^{ls} \dot{\mathcal{G}}^l),$$

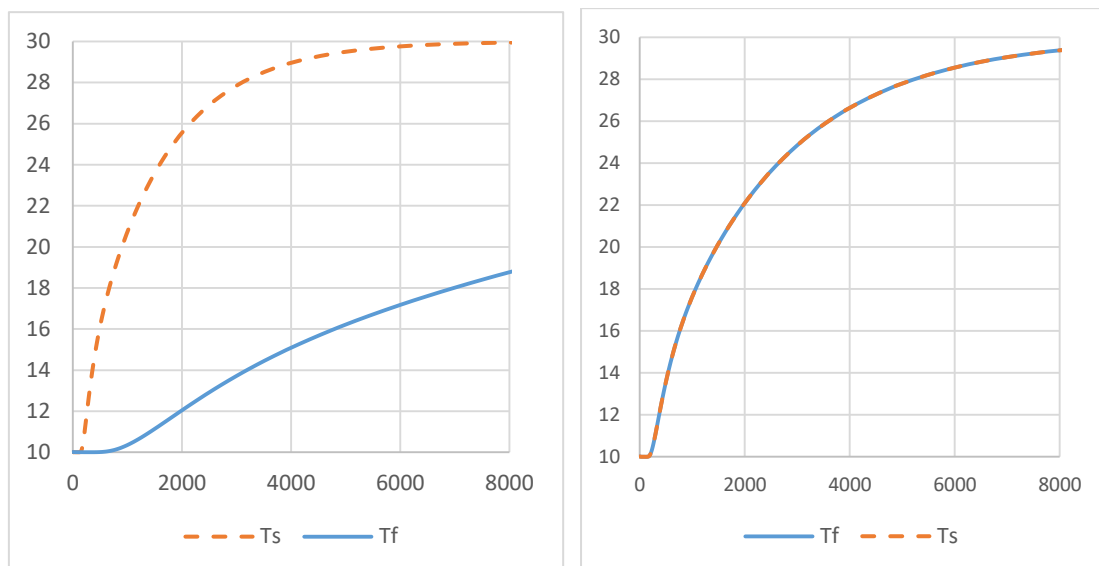
$$\lambda^l \nabla^2 \mathcal{G}^l = -TQ\alpha^l \dot{\varepsilon} - TR\alpha^l \dot{\theta} + \frac{T^l}{T_0} (\rho c_v^{ls} \dot{\mathcal{G}}^l + \rho_2 c_v^l \dot{\mathcal{G}}^l).$$

Wartość członu określającego termiczne sprzężenie faz ρc_v^{ls} jest nieznaną, wobec braku możliwości wyznaczenia jej doświadczalnie, zastąpiono wyniki doświadczeń analizą teoretyczną przyjmującą skrajne założenia wyjściowe i obserwację wyników obliczeń numerycznych.

1. Założenie braku sprzężenia faz: $\rho c_v^{ls} = 0$.
2. Założenie pełnego sprzężenia faz, gdzie wartości członu ρc_v^{ls} dobrano tak, żeby przy założeniu stałego odkształcenia współczynniki dyfuzji ciepła odpowiadały współczynnikowi dyfuzji ciepła dla modelu z jednym równaniem przewodzenia ciepła. Przy takim założeniu przy stałym odkształceniu temperatury obu faz są jednakowe $\mathcal{G}^s = \mathcal{G}^l$.

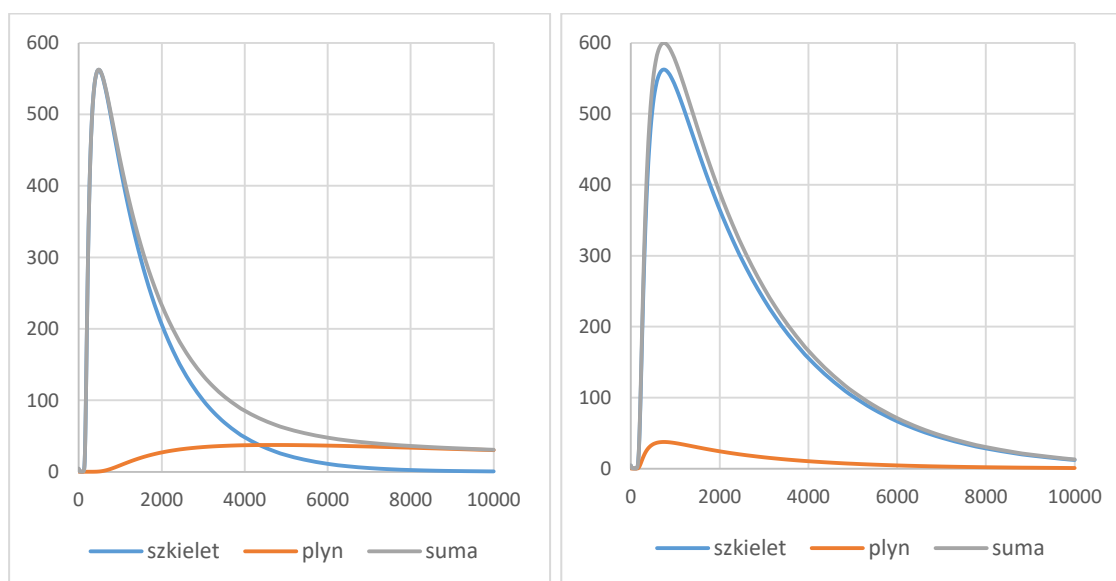
- Zmiany termiczne

Przebieg temperatur dla obu przypadków w geometrycznym środku próbki przedstawia Rysunek 5.5 Przebieg w czasie temperatur w obu fazach dla obu modeli. W przypadku pełnego sprzężenia faz, temperatury są identyczne w obu fazach, natomiast dla założenia braku sprzężenia faz można zauważyć, że temperatura szybciej wzrasta w szkielecie, niż w płynie, co spowodowane jest wyższym współczynnikiem przewodzenia ciepła wody, oraz niższym ciepłem właściwym szkieletu.



Rysunek 5.5 Przebieg w czasie temperatur w obu fazach dla obu modeli.

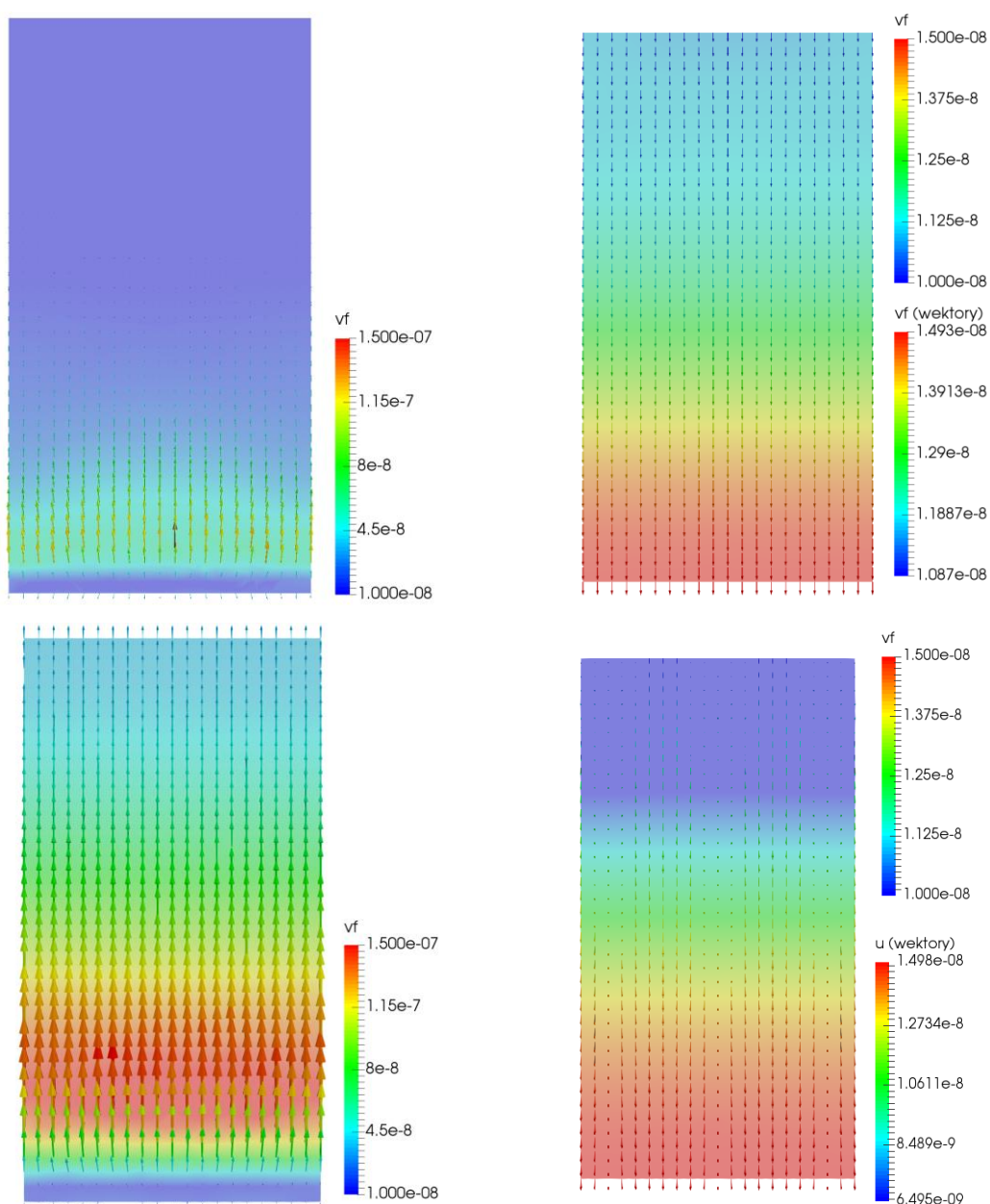
Przebieg temperatur w modelu bez sprzężenia faz wskazuje na to, że szybciej ogrzewa się szkielec. W przypadku modelu ze sprzężeniem faz szkielec część ciepła oddaje do płynu, który w związku z tym ogrzewa się szybciej, niż w przypadku, kiedy nie byłoby pomiędzy nimi sprzężenia. Ilość ciepła transportowaną przez obie fazy przedstawia rysunek nr 5.6. W przypadku modelu bez sprzężenia faz ilość transportowanego ciepła jest mniejsza w początkowej fazie (ze względu na wolniejsze nagrzewanie się płynu), natomiast wyższa w końcowej fazie ze względu na większą ilość ciepła przewodzonego w tym czasie przez wodę.



Rysunek 5.6 Przebieg w czasie ilości ciepła transportowanego przez obie fazy – po lewej stronie przy braku sprzężenia, po prawej – przy pełnym sprzężeniu.

- Filtracja

Ze względu na różne tempo wzrostu temperatury w płynie w obu przypadkach, w modelu bez sprzężenia faz naprężenia w płynie są nieco mniejsze, niż w przypadku pełnego sprzężenia, podobnie, jak związane z nimi niższe prędkości filtracji. Wykresy prędkości filtracji dla obu przypadków przedstawiono na rysunku 5.7. W celu lepszego zobrazowania różnic, skala barw mapy prędkości filtracji w obu krokach czasowych dla obu przypadków jest taka sama, natomiast skala wektorów dopasowana jest do ich wartości.

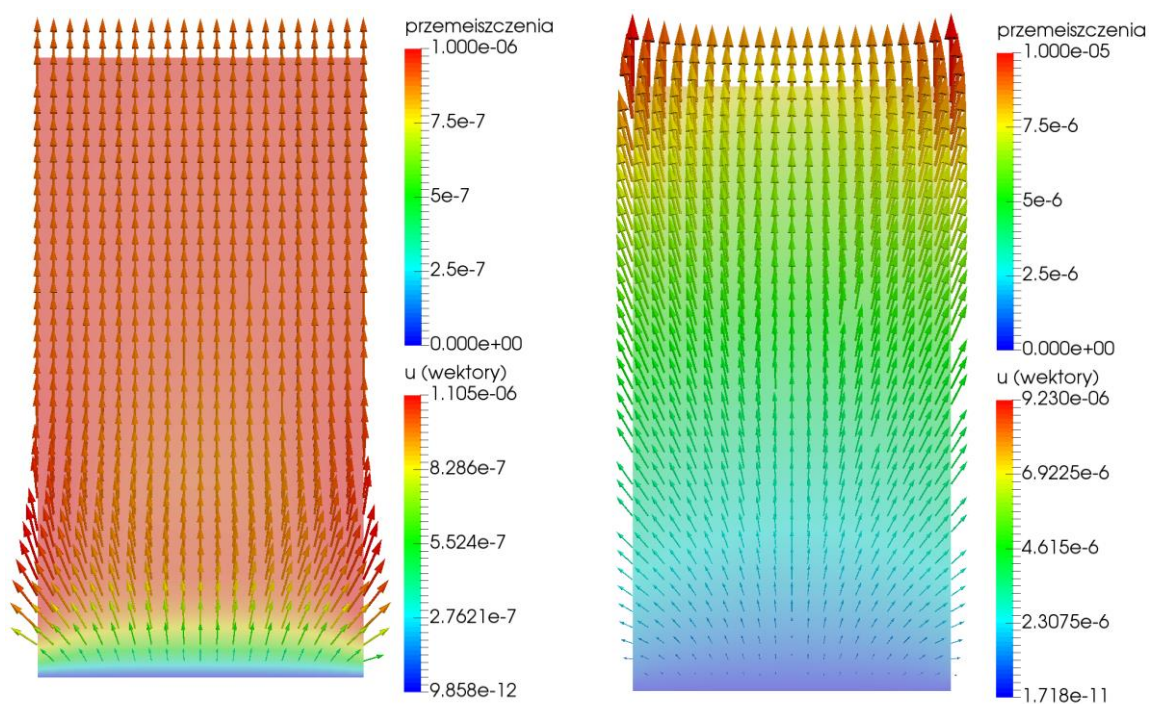


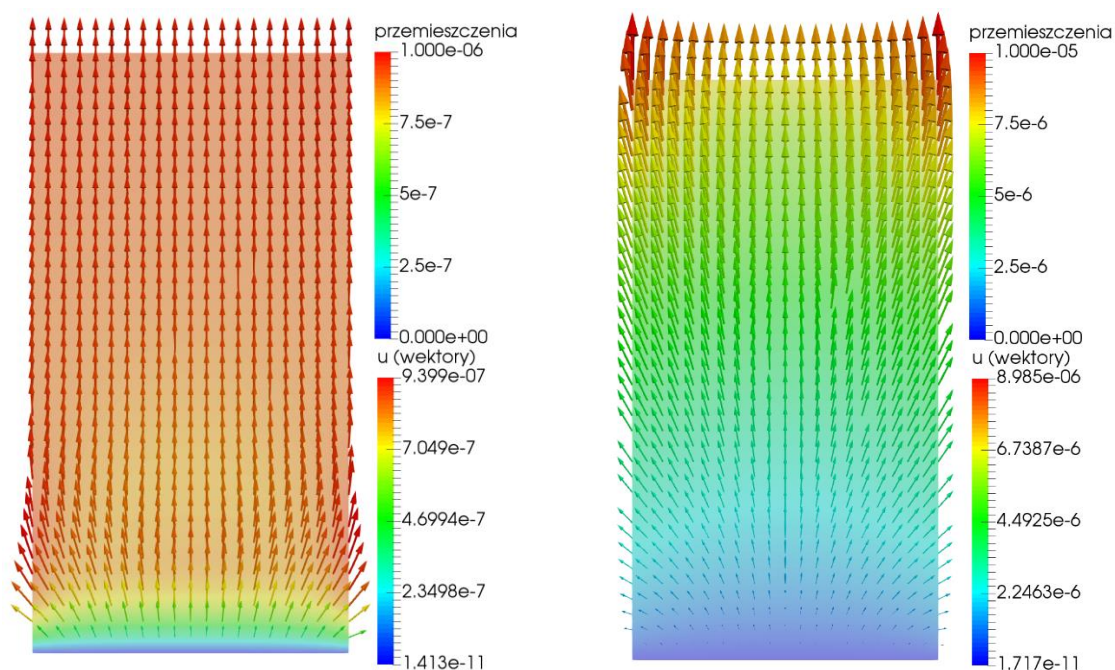
Rysunek 5.7 Rozkład prędkości filtracji dla $t=120s$ i $t=3000s$, u góry model bez sprzężenia, na dole z pełnym sprzężeniem.

- Przemieszczenia

W przypadku przemieszczeń, ich wartości ustalają się szybciej w modelu bez sprzężenia faz, głównie ze względu na szybsze ustalenie się temperatury szkieletu. Ostateczne wartości przemieszczeń i prędkości filtracji dla obu modeli (gdy temperatura w całej próbce osiąga wartość 30°C) są takie same. Różnice pojawiają się w trakcie podgrzewania, kiedy temperatury są różne.

Na rys nr 5.8 przedstawiono przemieszczenia będące wynikiem wzrostu temperatury (od wartości ostatecznej odjęto przemieszczenia początkowe) dla wody w porach ośrodka. Zastosowano, podobnie jak w przypadku filtracji, różne skale barw dla mapy oraz dla wektorów. Największy przyrost przemieszczeń obserwowany jest w początkowym czasie podgrzewania próbki, następnie przemieszczenia ustalają się.





Rysunek 5.8 Przemieszczenia w czasie $t=130s$ oraz $t=8000s$ dla wody

Przemieszczenia są nieco większe w przypadku modelu bez sprzężenia faz z powodu szybszego ogrzewania się szkieletu. Różnice między modelami z czasem zmniejszają się wraz ze wzrostem temperatury w modelu z pełnym sprzężeniem faz.

5.2.2. Model ośrodka jednofazowego

Model numeryczny dotyczy ośrodka złożonego z porowatego szkieletu oraz wody wypełniającej jego pory. Przyjęto założenie, że przewodzenie ciepła odbywa się w obu fazach jednocześnie, zatem układ równań różniczkowych składa się z równań (4.69), (4.70) i (4.73):

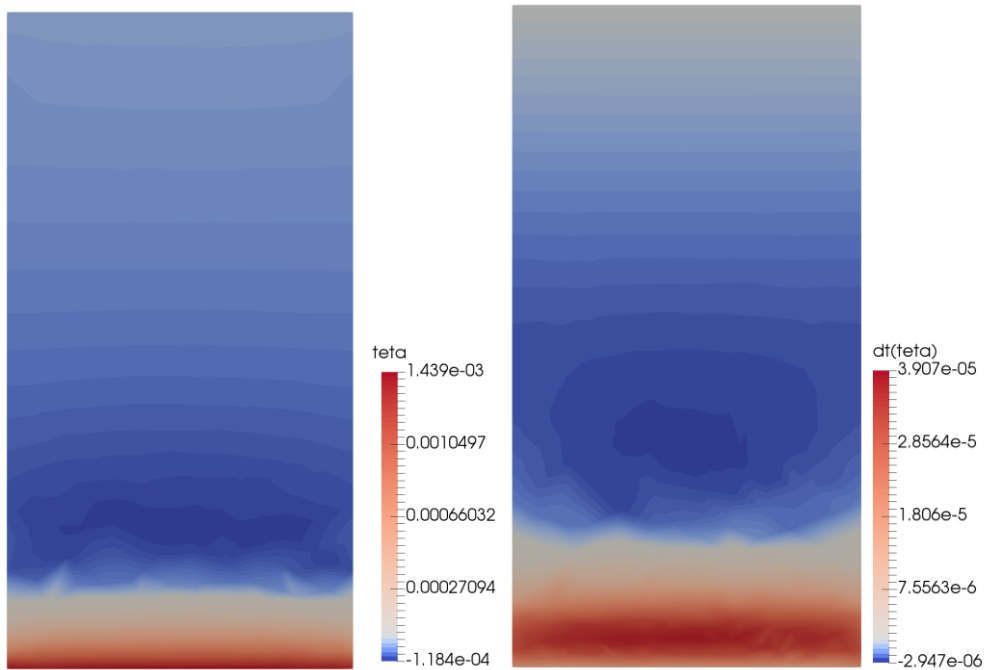
$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i\rho = 0,$$

$$k\sigma_{,ii} = (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}),$$

$$\lambda\nabla^2 T = -(3K\alpha_i^s + Q\alpha_T^l)\dot{\varepsilon}T - (3Q\alpha_T^s + R\alpha_T^l)\dot{\theta}T - \frac{\rho c_v}{T_0}\dot{g}T.$$

Wyniki modelowania zachowania próbki przy użyciu powyższego układu równań pokrywają się z wynikami uzyskanymi przy użyciu modelu z dwoma równaniami przewodzenia ciepła, skupiono się zatem na analizach, nie ujętych w poprzednim podrozdziale, lecz interesujących z punktu widzenia rozpatrywanych zjawisk.

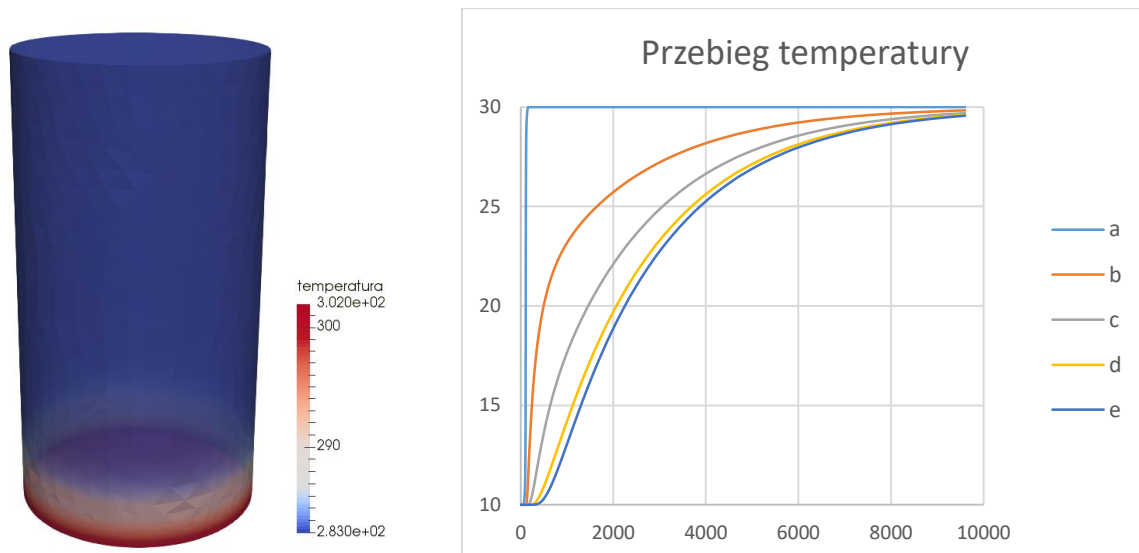
Skutkiem zmiany temperatury jest zmiana objętości płynu i wzrost ciśnienia. Rozkład dylatacji wody i jej prędkości w płynie po czasie $t=120s$ (60s od początku podgrzewania) przedstawia rysunek nr 5.9.



Rysunek 5.9 Rozkład dylatacji oraz prędkości dylatacji oraz naprężenia w płynie w czasie $t=120s$ (schemat A)

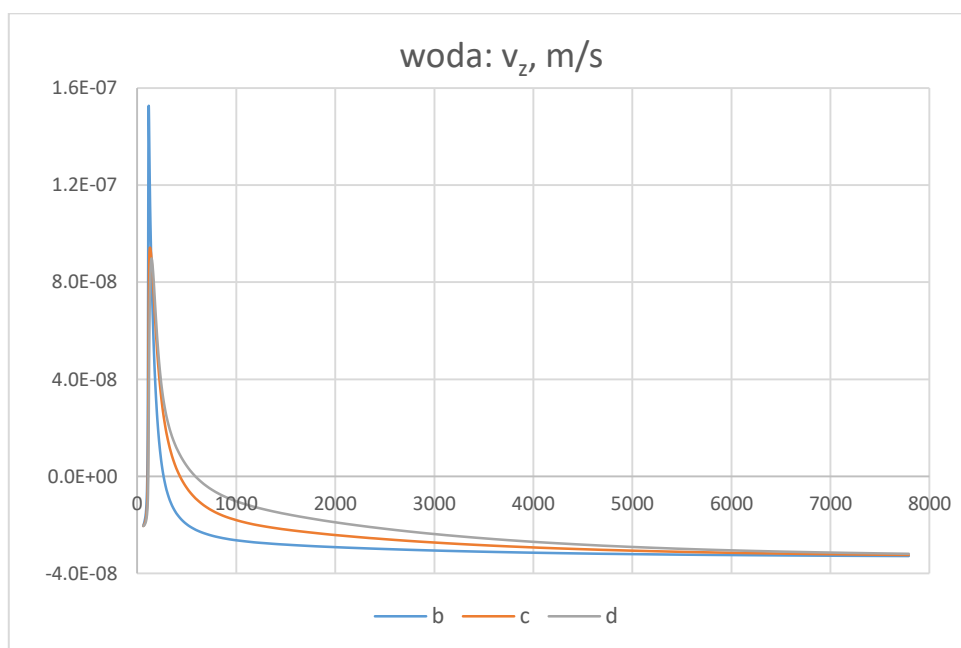
Największe wartości dylatacji płynu w tym kroku czasowym zaobserwować można w obszarze o najwyższej temperaturze. Powyżej tego obszaru wartości dylatacji (i jej prędkości) są najniższe. W kolejnych krokach czasowych, w miarę podnoszenia się temperatury w kolejnych fragmentach próbki, wzrasta w nich również dylatacja.

Rozkład temperatury w czasie $t=120s$ oraz przebieg jej zmian w czasie przedstawia rys nr 5.10.



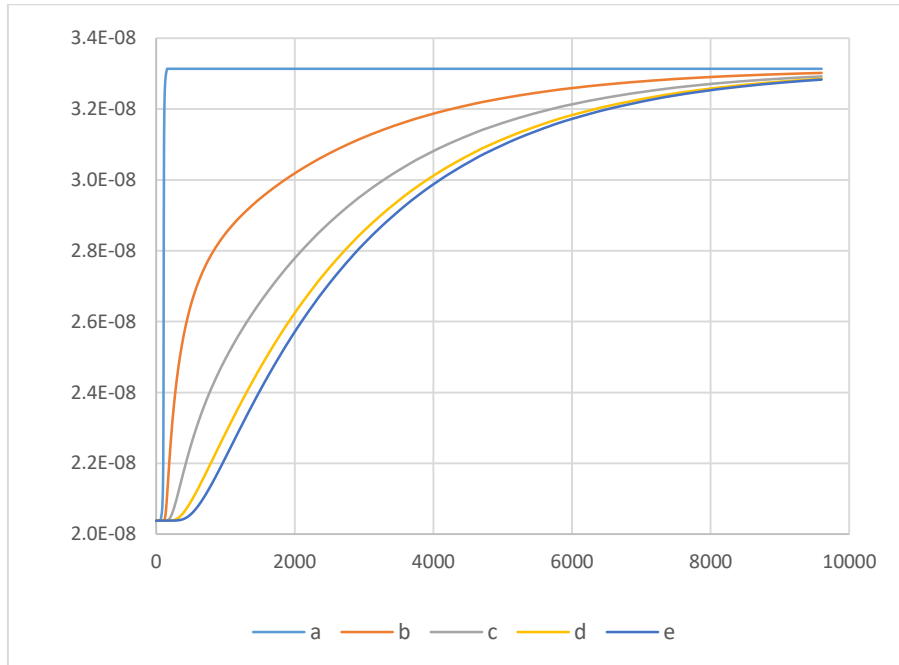
Rysunek 5.10 Rozkład temperatury przy $t=3000s$ oraz przebieg temperatury w czasie w wybranych punktach próbki.

Szybki wzrost objętości płynu w podgrzewanej części próbki razem z podwyższonym ciśnieniem poskutkowało we wszystkich przypadkach na początku podgrzewania zmianą kierunku przepływu. Na wykresie prędkości filtracji w czasie (rys 5.11) widoczny jest gwałtowny wzrost prędkości przepływu wywołany wzrostem ciśnienia w dolnej części próbki. W miarę spadku ciśnienia i ustalania się warunków przepływu ciepła prędkość stopniowo maleje, następnie zmienia zwrot na zgodny z kierunkiem siły grawitacji – zjawisko to przedstawiono również wcześniej, przy omawianiu modeli z dwoma równaniami przewodzenia ciepła (rys 5.7).



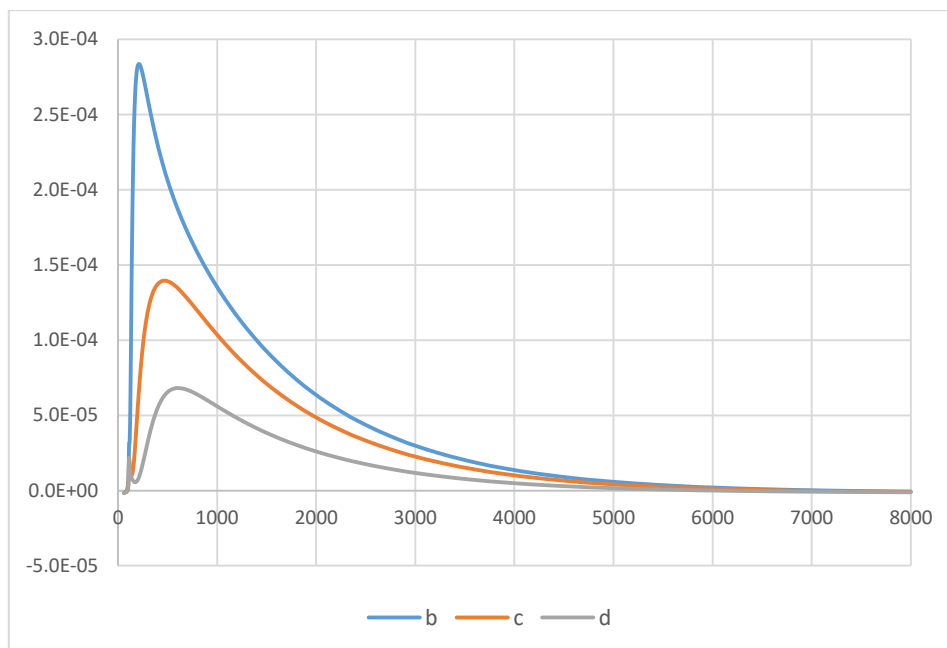
Rysunek 5.11 Przebieg w czasie pionowej składowej prędkości filtracji w wybranych punktach próbki w przypadku wody.

W przypadku cieczy, wraz ze wzrostem temperatury lepkość maleje, przez co współczynnik filtracji rośnie. Przebieg w czasie współczynnika filtracji przedstawia rys. nr. 5.12.



Rysunek 5.12 Przebieg w czasie współczynnika filtracji w wybranych punktach dla wody

W celach porównawczych wykonany został model dla parametrów tego samego gazu (powietrza) w dwóch zakresach temperatur w celu porównania wyników z wynikami dla wody i dla pary wodnej. Różnice między modelami przejawiają się głównie w różnicach w wartości dylatacji płynu oraz prędkości filtracji. W zakresie temperatur odpowiadającym modelom dla wody w porach osrodka, prędkości filtracji są większe ze względu na mniejszą lepkość gazu. Dla obu zakresów temperatur przebieg prędkości filtracji przedstawiony został na rys nr 5.13.



Rysunek 5.13 Przebieg w czasie prędkości filtracji powietrza w wybranych punktach, zakres temperatur 10÷30°C.

Przemieszczenia w modelu z jednym równaniem przewodzenia ciepła pokrywają się z wynikami modelu o dwóch równaniach z pełnym sprzężeniem faz. Rys 5.16 przedstawia wykres naprężeń w czasie.



Rysunek 5.14 Przebieg przemieszczeń pionowych w czasie w wybranych punktach próbki dla wody jako płynu porowego

5.2.3. Podsumowanie dla cieczy

W celu zachowania przejrzystości w pracy, przy przedstawianiu modelu z dwoma równaniami przewodzenia ciepła skupiono się na podstawowych zagadnieniach, takich, jak zjawiska termiczne, jak filtracja i przemieszczenia. Wyniki modelu z pełnym sprzężeniem faz, jak można się spodziewać, pokrywają się z wynikami modelowania przy użyciu jednego równania przewodzenia ciepła, zatem przy przedstawianiu wyników pominięto wcześniej prezentowane wyniki dotyczące filtracji i przemieszczeń, skupiając się na dodatkowych analizach, takich jak przebieg zmian wybranych parametrów w czasie oraz porównanie z wynikami dla powietrza jako płynu porowego, w tym samym zakresie temperatur.

5.3. Porównanie modeli termokonsolidacji dla gazu:

5.3.1. Wyniki dla modelu 2 fazowego

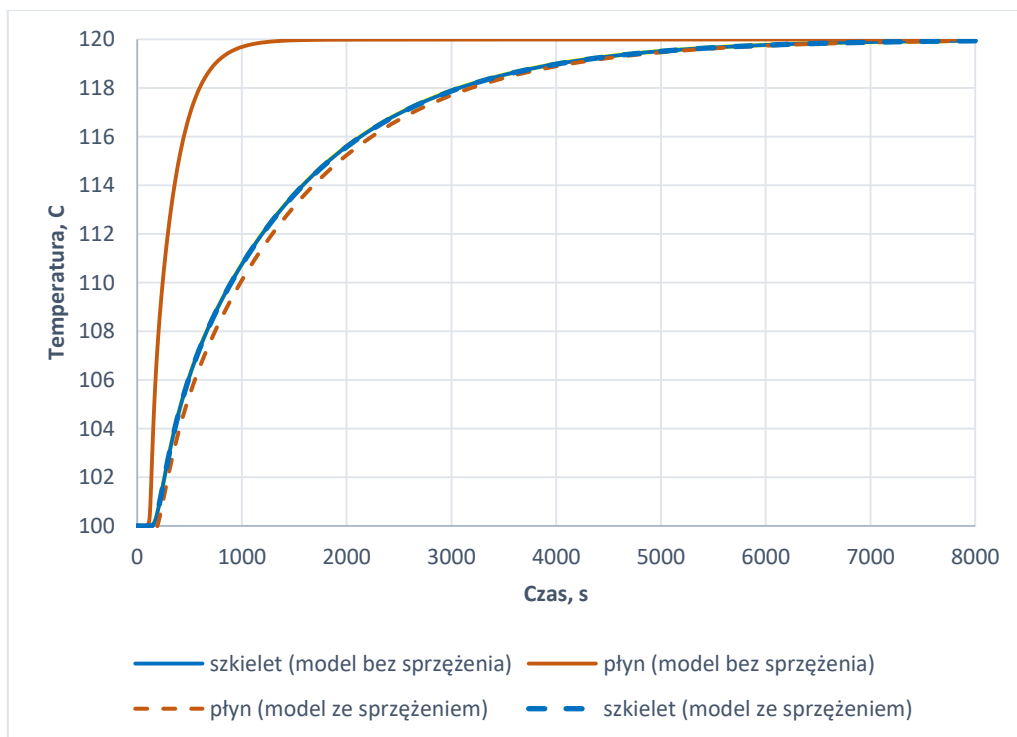
W podobny sposób zamodelowano próbkę wypełnioną parą wodną. Podobnie, jak w punkcie 5.3.1, model składa się z 6 równań z 6 niewiadomymi, różne są jednak równania konstytutywne dla płynu (4.88), równania przewodzenia ciepła mają postać (4.92):

$$\lambda^s \nabla^2 g^s = -T^s K \alpha^s \dot{\varepsilon} - T^s Q \alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0} (\rho_1 c_v^s \dot{g}^s + \rho c_v^{ls} \dot{g}^l)$$

$$\lambda^g \nabla^2 g^g = -Q \varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f} \dot{\theta} + \frac{T^g}{T_0} (\rho c_v^{gs} \dot{g}^g + \rho_2 c_v^g \dot{g}^g).$$

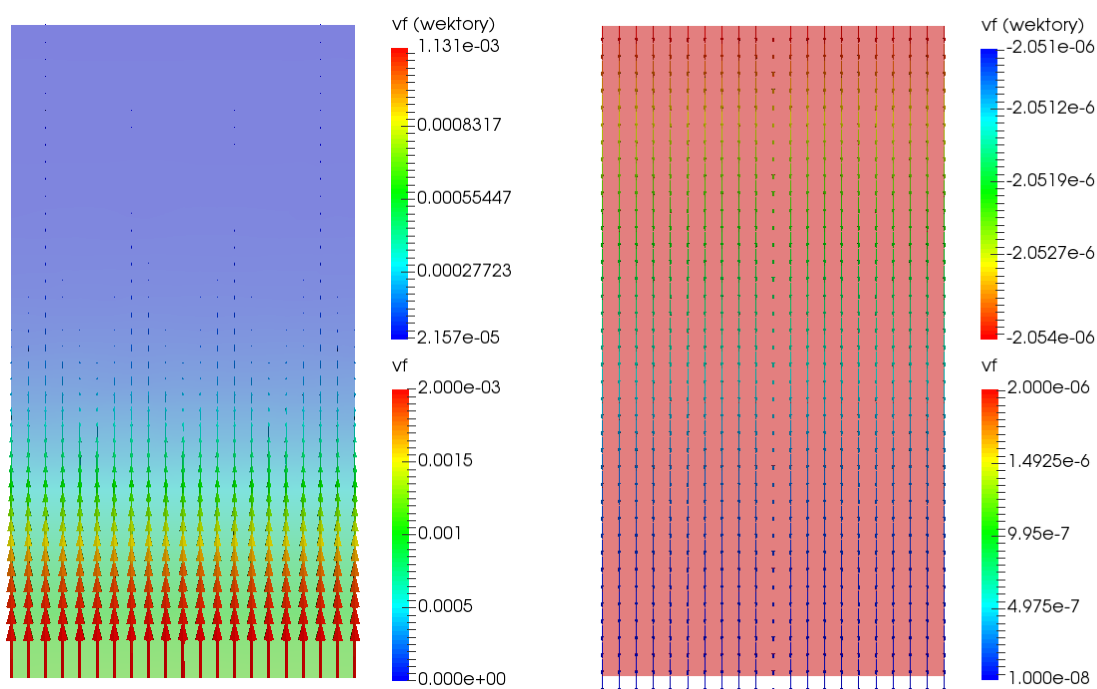
Podobnie jak poprzednio, zakłada się dwa skrajne przypadki: braku sprzężenia faz, oraz całkowitego sprzężenia, co odpowiada modelowi z jednym równaniem przewodzenia ciepła.

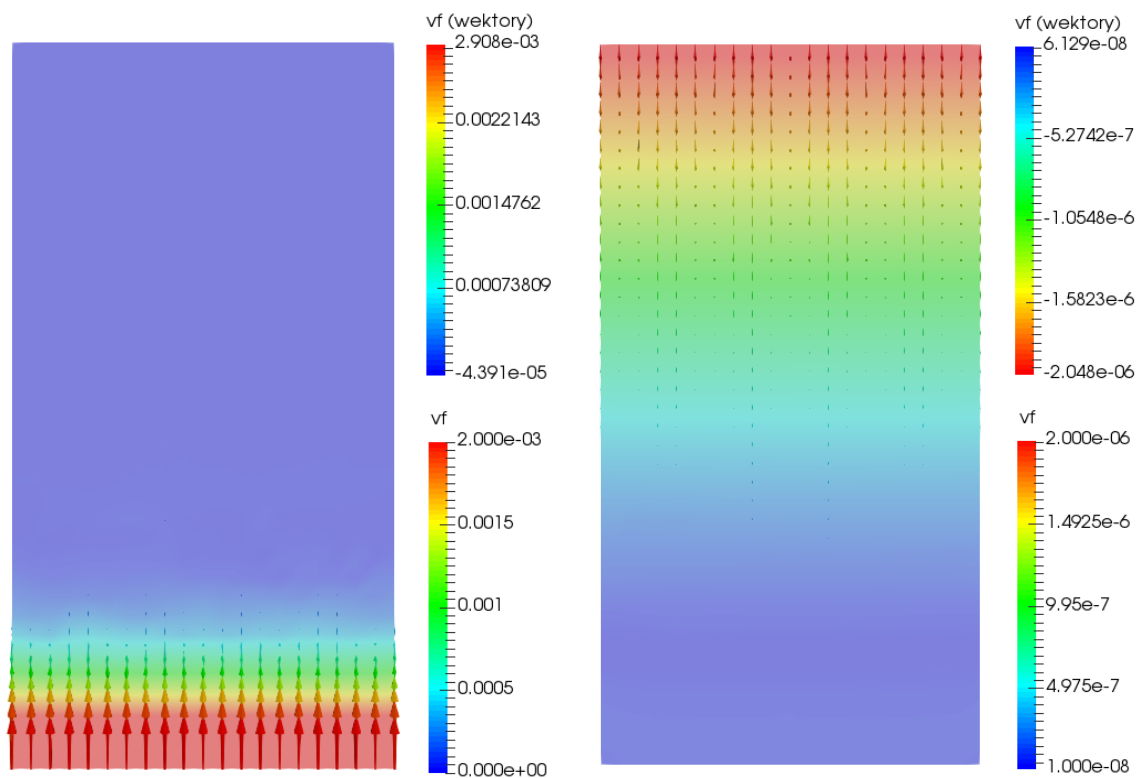
Para wodna ma dużo mniejsze ciepło właściwe oraz współczynnik przewodzenia ciepła, niż woda, w związku z czym szybko się nagrzewa, jednak przewodzi niewielką ilość ciepła i ma niewielki wpływ na temperaturę ośrodka. Jest to widoczne na wykresie przebiegu temperatur w modelach sprzężonym i niesprzężonym (rys nr. 5.15): w przypadku modelu bez sprzężenia faz temperatura w płynie rośnie szybko. W przypadku sprzężenia faz temperatury są zbliżone (różnice wynikają ze zmian objętości pary wodnej). Różnica między oboma modelami dotyczy gazu, który oddaje ciepło do szkieletu, jednak ze względu na niskie ciepło właściwe, fakt ten praktycznie nie ma wpływu na przebieg temperatury w szkielecie, który pokrywa się z przebiegiem temperatury ośrodka traktowanego jako jednorodny.



Rysunek 5.15 Przebieg temperatur w obu fazach

W przypadku pary wodnej, duża rozszerzalność cieplna oraz znacznie mniejsza lepkość powodują, że prędkości filtracji są znacznie większe, niż w przypadku wody. Poniżej przedstawiono pole przepływu filtracyjnego w czasie $t=120s$ i $8000s$ dla pary wodnej (rys 5.16).

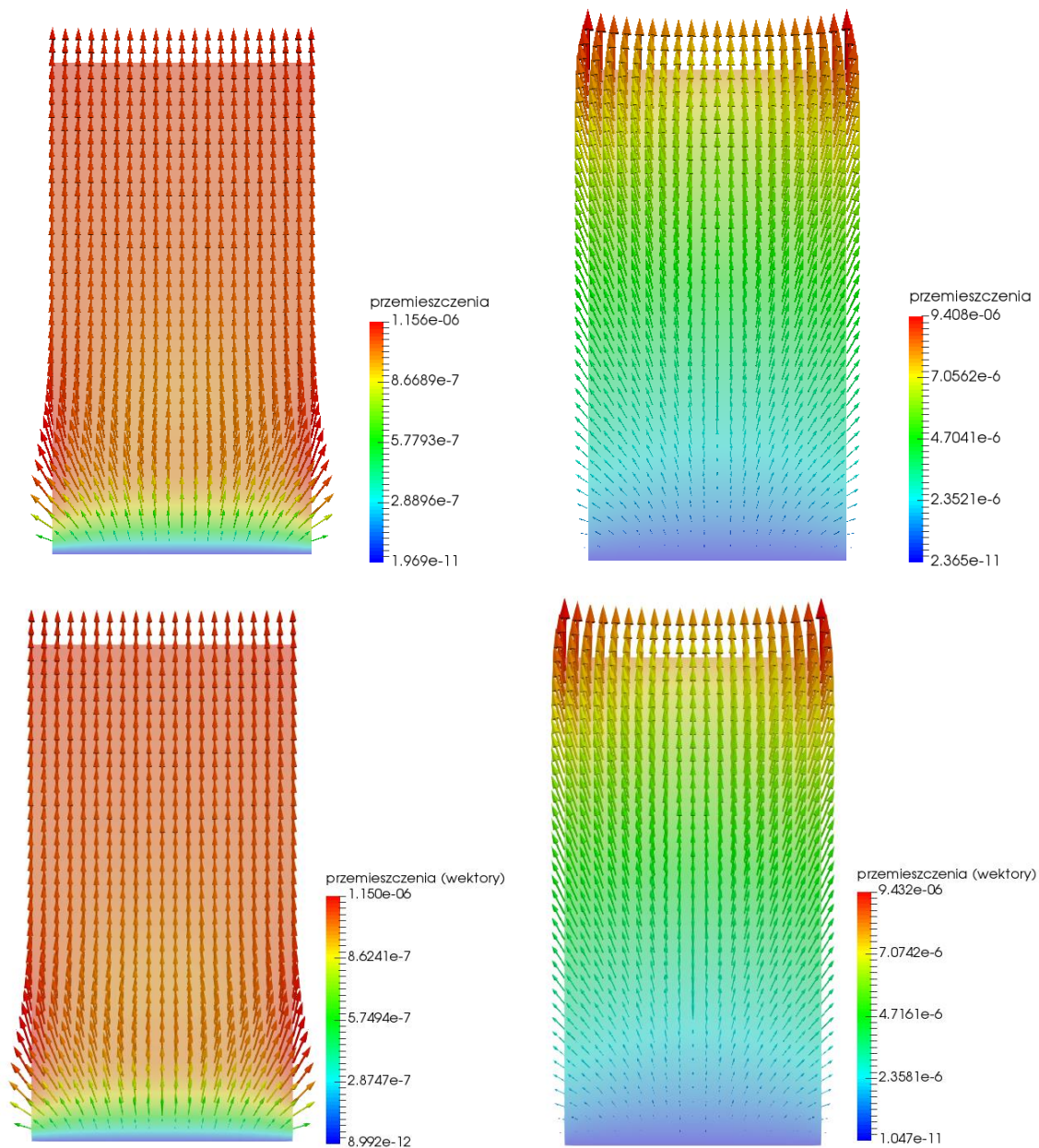




Rysunek 5.16 Rozkład prędkości filtracji dla $t=120s$ i $t=8000s$ – brak sprężenia faz na górze i pełne sprężenie faz na dole

Różnice w prędkości filtracji na wykresie dla $t=3000$ dla wody i $t=10000$ dla pary wodnej wynikają z różnej lepkości i gęstości płynu regionach o różnej temperaturze.

Wartości przemieszczeń są w przypadku zakresu temperatur $100\div 120^{\circ}\text{C}$ nieco większe, niż w przypadku zakresu temperatur $10\div 30^{\circ}\text{C}$, ponadto proces ustala się szybciej. Pole przemieszczeń po czasie 130s i 8000s przedstawia rys nr 5.17.



Rysunek 5.17 Przemieszczenia w czasie $t=130s$ oraz $t=8000s$ dla pary wodnej w porach ośrodka.

Różnice między oboma modelami nie są tak widoczne, jak w przypadku filtracji cieczy, gdyż różnica między temperaturami szkieletu w obu modelach są niewielkie.

5.3.2. Wyniki dla modelu jednofazowego

W przypadku występowania w porach gruntu gazu, zastosowanie mają związki konstytutywne (4.88). Układ równań różniczkowych opisujący stan przemieszczenia, pole filtracji oraz temperatury składa się, podobnie jak w poprzednim przypadku z 5 równań: 3

równań równowagi, równania przepływu filtracyjnego (4.70), oraz równania przewodzenia ciepła (4.94):

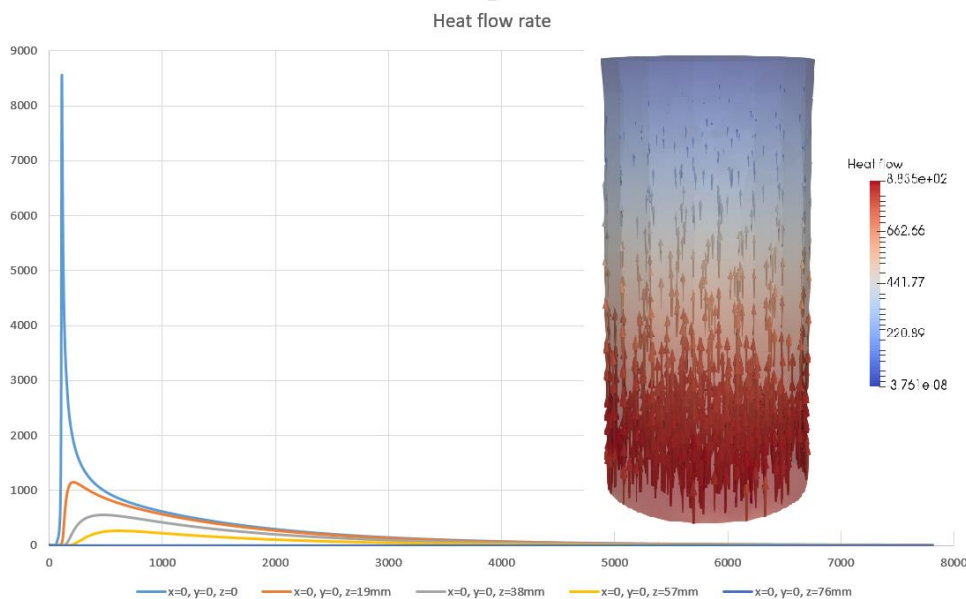
$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i\rho = 0,$$

$$k\sigma_{,ii} = (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}),$$

$$\lambda\nabla^2 T = -\left(K\alpha^s + \frac{Q}{T}\right)\dot{\varepsilon}T - \left(Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\right)\dot{\theta}T - \xi\dot{g}T.$$

Podobnie, jak w przypadku cieczy, wyniki tego modelu pokrywają się z wynikami modelu z dwoma równaniami przewodzenia ciepła przy pełnym sprzężeniu faz, przedstawione więc zostaną tylko wyniki nieujęte w poprzedniej analizie.

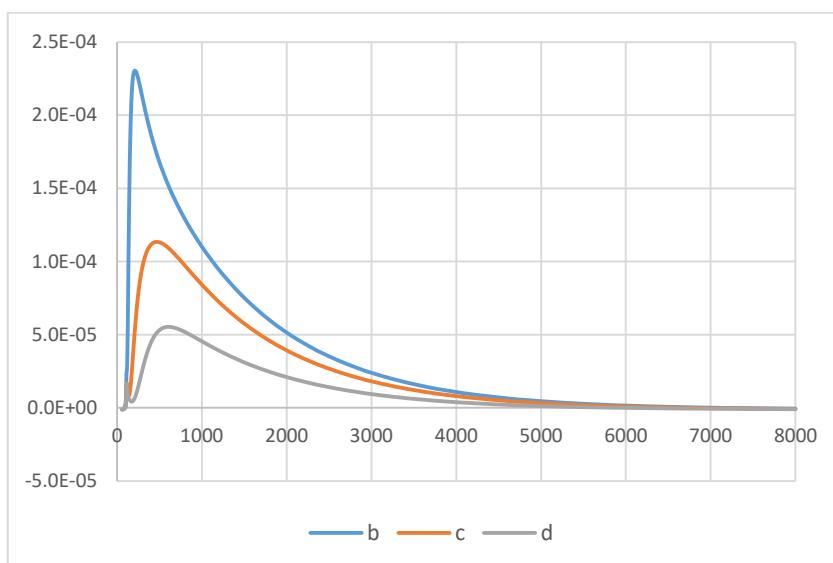
Ilość ciepła przewodzonego przez gaz jest zanedbywalnie mała w porównaniu do ilości ciepła przewodzonego przez szkielet. Na wykresie (rys 5.18) nie przedstawiono rozróżnienia linii dla ilości ciepła przewodzonego przez obie fazy, gdyż wartości dla gazu są pomijalnie małe (o 3 rzędy wielkości mniejsze od wartości dla szkieletu).



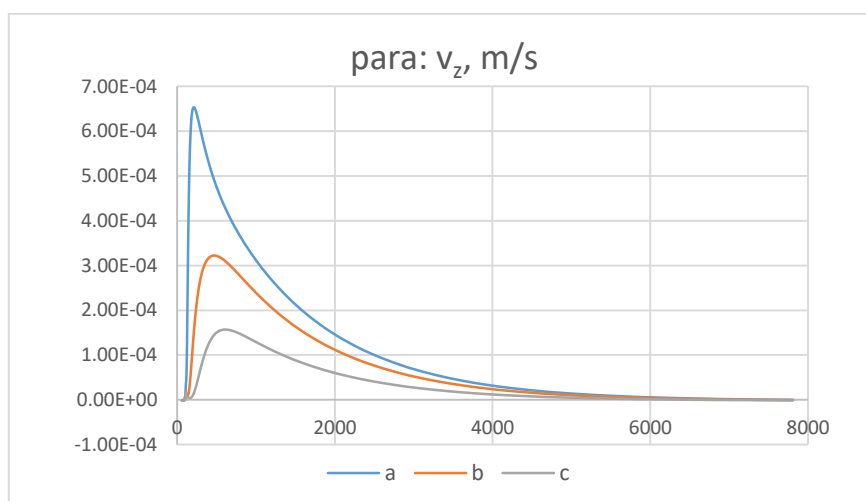
Rysunek 5.18 Ilość ciepła transportowanego przez szkielet ośrodka

Porównując model z powietrzem z powietrzem jako płynem porowym, przebieg prędkości filtracji ma podobny kształt, jak w przypadku pary wodnej, przepływ jest jednak znacznie wolniejszy. W przypadku obu gazów przeciwny zwrot prędkości filtracji utrzymuje się znacznie dłużej, niż w przypadku wody.

Przebieg prędkości filtracji przedstawiony został na rys nr 5.19 i 5.20.

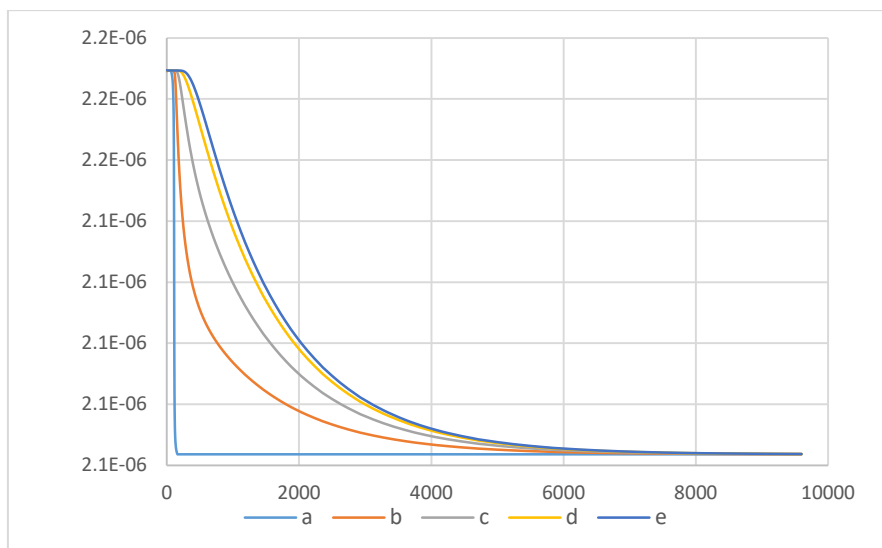


Rysunek 5.19 Przebieg w czasie pionowej składowej prędkości filtracji powietrza w wybranych punktach, zakres temperatur 100÷120°C.



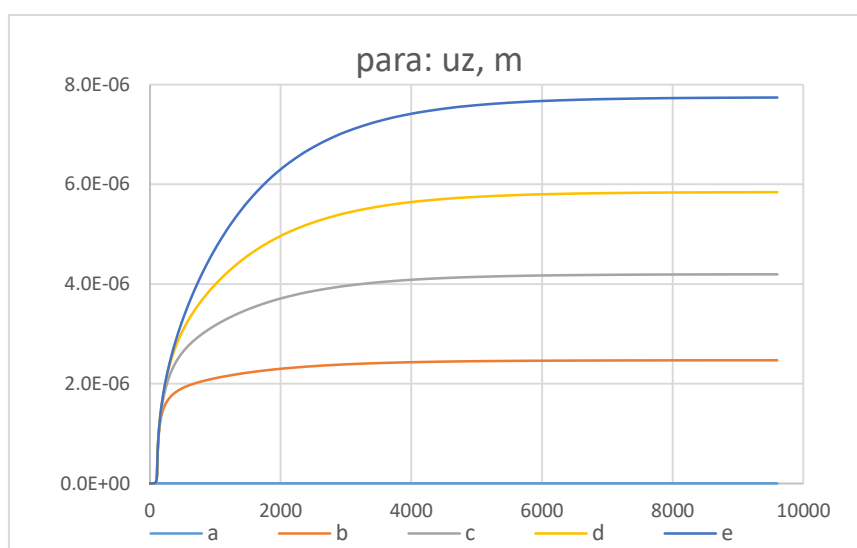
Rysunek 5.20 Przebieg w czasie pionowej składowej prędkości filtracji w wybranych punktach próbki w przypadku pary wodnej

W przypadku gazów, odwrotnie niż w cieczach, wraz ze wzrostem temperatury lepkość rośnie, przez co współczynnik filtracji maleje. Przebieg w czasie współczynnika filtracji przedstawia rys. nr. 5.21.



Rysunek 5.21 Przebieg w czasie współczynnika filtracji w wybranych punktach dla pary wodnej

Przebieg w czasie przemieszczeń (rys 5.22) ma nieco inny kształt, niż w przypadku wody, jako płynu porowego – w początkowym etapie rosną one szybciej.



Rysunek 5.22 Przebieg przemieszczeń pionowych w czasie w wybranych punktach próbki dla pary wodnej jako płynu porowego

W przypadku zastosowania powietrza jako płynu porowego w obu zakresach temperatur, przemieszczenia są w porównaniu z wodą nieco większe w przedziale temperatur $10\div 30^{\circ}\text{C}$ (o $0.12 \cdot 10^{-6}$), oraz nieco niższe od wody w przedziale temperatur $100\div 120^{\circ}\text{C}$ (o $0.13 \cdot 10^{-6}$).

Przemieszczenia i prędkości filtracji w przypadku modelu z pełnym sprzężeniem faz odpowiadają modelowi jednorodnego ośrodka, w przypadku braku sprzężenia faz ze

względu na szybsze ogrzewanie się gazu prędkość filtracji oraz dylatacja płynu wzrastają szybciej.

5.3.3. Podsumowanie dla gazu

W przypadku gazu w porach ośrodka temperatura szkieletu jest zbliżona we wszystkich modelach, i to właśnie szkielet odpowiedzialny jest za przewodzenie ciepła. Fakt odbierania ciepła od gazu nie ma wpływu na temperaturę szkieletu ze względu na jego duże ciepło właściwe i gęstość (w porównaniu do gazu). Stąd przemieszczenia w rozpatrywanych przypadkach różnią się jedynie nieznacznie. Różnice między modelami występują natomiast w przypadku filtracji –ze względu na różnice temperatur płynu między modelami. Gaz przepływa przez ośrodek znacznie szybciej, niż ciecz. Przemieszczenia próbki są nieco większe, niż w przypadku wody, ich prędkość jest też większa.

5.4. Podsumowanie dla modeli próbki

Wykonano łącznie 8 modeli:

- model z dwoma równaniami przewodzenia ciepła dla wody, bez sprzężenia faz,
- model z dwoma równaniami przewodzenia ciepła dla wody, z pełnym sprzężeniem faz,
- model z jednym równaniem przewodzenia ciepła dla wody,
- model z jednym równaniem przewodzenia ciepła dla powietrza w zakresie temperatur 10°C-30°C,
- model z dwoma równaniami przewodzenia ciepła dla pary wodnej, bez sprzężenia faz,
- model z dwoma równaniami przewodzenia ciepła dla pary wodnej, z pełnym sprzężeniem faz,
- model z jednym równaniem przewodzenia ciepła dla pary wodnej,
- model z jednym równaniem przewodzenia ciepła dla powietrza w zakresie temperatur 100°C-120°C.

Przedstawiono podstawowe różnice w przewodzeniu ciepła, filtracji oraz przemieszczeniach między modelami z pełnym sprzężeniem faz i bez sprzężenia. W modelach tych ostateczne wartości prędkości filtracji oraz przemieszczeń są takie same (po wyrównaniu się temperatur), zasadnicze różnice dotyczą etapu kiedy temperatury obu faz są różne. W przypadku wody jako płynu porowego szkielet ogrzewa

się szybciej, niż woda, w przypadku równania z pełnym sprzężeniem faz część ciepła oddaje on wodzie, przez co jego temperatura wzrasta wolniej, natomiast szybciej wzrasta temperatura wody. W przypadku pary wodnej jako płynu porowego szybciej ogrzewa się para wodna, która następnie przekazuje część ciepła szkieletowi – w przeciwieństwie do modelu dla wody jako płynu porowego, tutaj fakt wymiany ciepła między fazami nie ma dużego wpływu na temperaturę szkieletu – ilość ciepła transportowanego przez gaz jest na tyle mała, że fakt jego przekazania nie ma znaczącego wpływu na temperaturę szkieletu. Można stwierdzić, że model z jednym równaniem przewodzenia ciepła jest pewnym uproszczeniem modelu z dwoma równaniami ciepła. Zakładając że sprzężenie faz jest bliskie pełnego, model uproszczony jest wystarczający. Dalsze analizy przedstawiono używając modelu z jednym równaniem przewodzenia ciepła, które są jednocześnie wynikami modelu z pełnym sprzężeniem faz, porównując wyniki również z wynikami dla powietrza jako płynu porowego, w celu określania wpływu na badane zjawiska fazy płynu.

6 Oddziaływanie podziemnego zgazowania węgla na środowisko

6.1 Przykład wykorzystania modelu termokonsolidacji do celów inżynierskich.

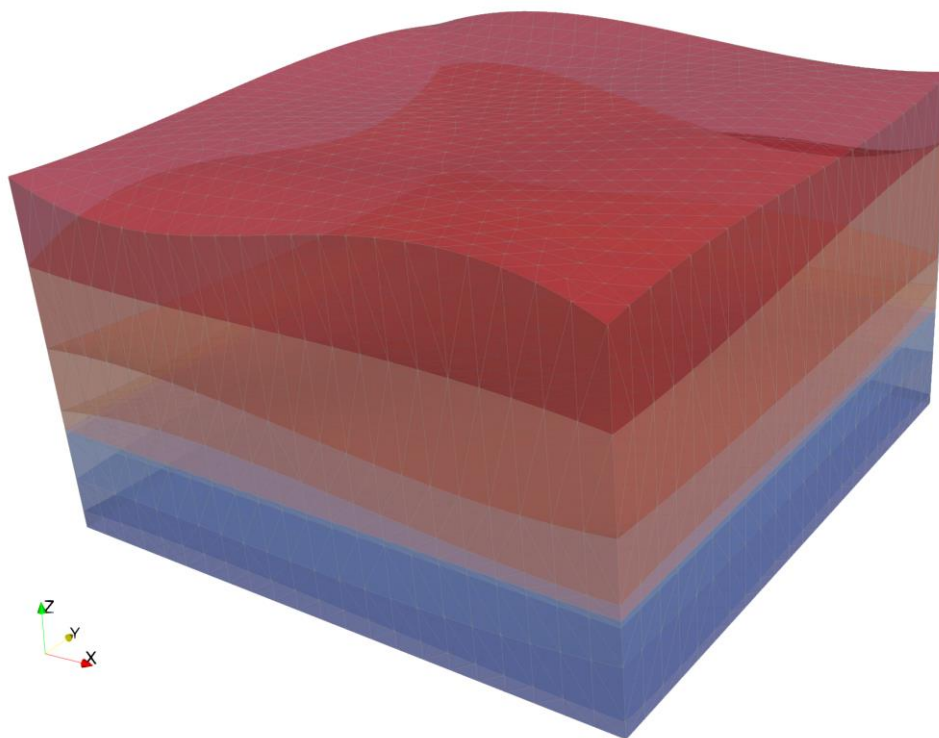
Wybór zagadnienia inżynierskiego, na przykładzie którego zaprezentowane zostanie użycie przedstawionego w poprzednich rozdziałach modelu padł na zagadnienie podziemnego zgazowania węgla w uwarstwionym ośrodku gruntowym, ponieważ w procesie zgazowania w warstwie węgla na skutek jego utleniania powstaje wysoka temperatura i istnieje silne oddziaływanie tej warstwy na otaczające środowisko geologiczne. Jest to zagadnienie bliższe zastosowaniu modelu termokonsolidacji w górnictwie, gdyż znalezienie równie wyrazistego przykładu zastosowania w budownictwie wydaje się być trudne, bowiem zjawiska takie są często słabo opisane lub niedostępne od strony przebiegu procesu, lub wiadomo tylko tyle, że wystąpiły w procesie odkształceń cieplnych efekty niszczące, co wykraczałoby poza zakres funkcjonowania przedstawionych modeli termo-konsolidacji. Nie znaczy to oczywiście, że nie widzę zastosowania przedstawionych modeli w budownictwie lądowym i wodnym – wahania temperatur występują np. wskutek dobowych i rocznych amplitud temperatur, najbardziej narażona jest na nie znajdująca się przy powierzchni część

budowli ziemnych, w której porach występuje gaz (powietrze). Powietrze występuje też w wielu porowatych materiałach budowlanych, takich, jak pianki, materiały termoizolacyjne itp.

Przy wykonaniu modelu oparto się na wynikach badań geologicznych i hydrogeologicznych dla wybranych gruntów, uzupełniając je o dane przyjęte na podstawie literatury.

6.1.1. Geometria modelu oraz założone warunki geologiczne w pobliżu przykładowego procesu PZW

Założono, że zgazowany zostanie fragment przykładowego złoża węgla brunatnego, o miąższości 3m, zalegającego na głębokości ok 120m poniżej powierzchni terenu (rozwiązywane zagadnienie jest przykładem hipotetycznym nieopartym na konkretnym przykładzie, bowiem nie dysponuję szczegółowymi danymi bazującymi na obserwacjach rzeczywistego procesu zgazowania węgla). Poniżej warstwy węgla brunatnego występuje piasek gruby, powyżej złoża izolowane jest warstwą iłu. Założono, że w obrębie modelu występuje 8 warstw geologicznych, których rzędne granic znane są w 16 punktach rozmieszczonych w siatce 500m. W celu uzyskania gładkiej geometrii modelu, rzędne granic warstw pomiędzy tymi punktami określono przy pomocy interpolacji wielomianami dwóch zmiennych trzeciego stopnia. Geometrię modelu przedstawia rysunek 6.1.

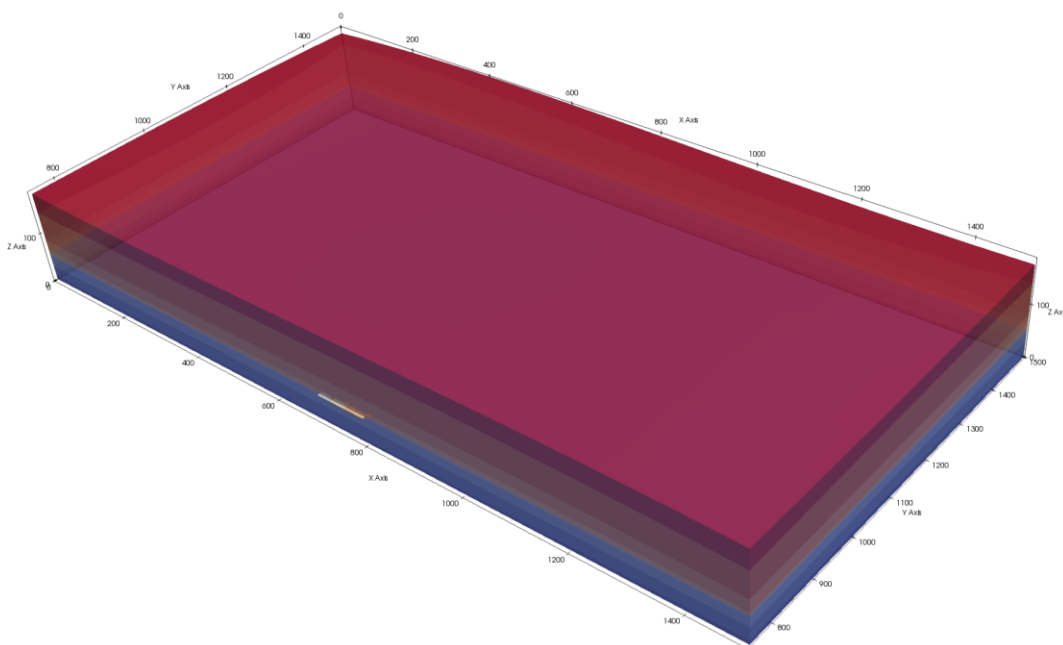


Rysunek 6.1 Wygenerowana siatka elementów skończonych określająca geometrię modelu (skala skażona 1:10)

Jako rzędną „0” określającą dno modelu przyjęto płaszczyznę w obrębie piaskowców. Założono, że stropy poszczególnych warstw stanowią powierzchnie znajdujące się na następujących rzędnych:

1. Piaskowiec 4.7-10.9m
2. Żwir 25.2-32.7m
3. Ł 50m
4. Węgiel 53m
5. Ł 57.2-69.8m
6. Piasek ilasty 80.5-95m
7. Ł 125.9-149.9m
8. Ł pylasty 166.1-184m

Założono, że obszar, w którym następuje zgazowanie, znajduje się w środkowej części modelu i ma wymiary 10m*100m.



Rysunek 6.2 Przekrój przez rozpatrywany obszar – w środku zaznaczone położenie generatora zgazowania węgla

W warstwie węgla po ustaniu procesu zgazowania założono zmniejszanie się parametrów mechanicznych modelu termo-konsolidacji. Przyjęto przykładowe oparte na danych z literatury (Strzelecki M., 2017) i tablic² parametry mechaniczne i termiczne dla gruntów, które w przypadku zastosowania modelu dla ośrodka rzeczywistego można zastąpić parametrami uzyskanymi z badań. Przyjęte do obliczeń parametry zestawiono w tabeli 6.1.

Tabela 6.1. Wartości parametrów materiałowych poszczególnych warstw geologicznych

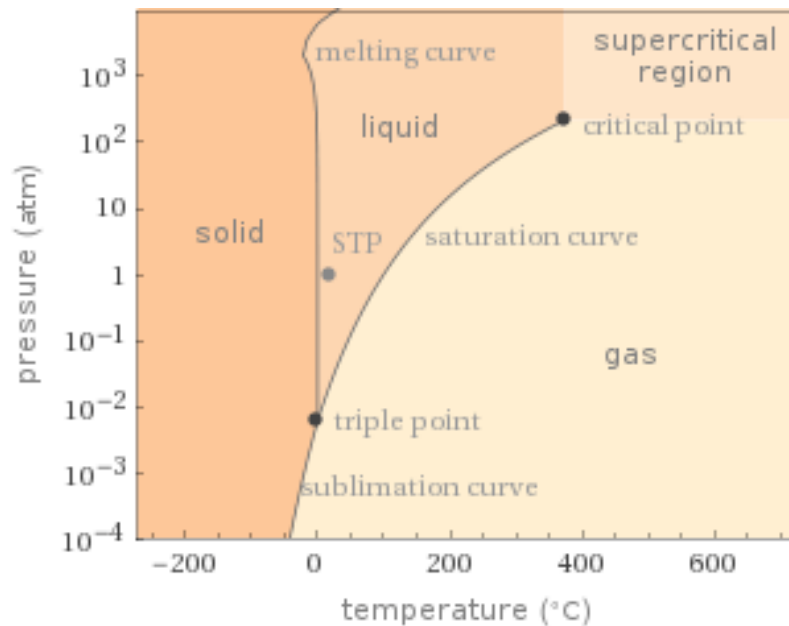
Warstwa	strop min	strop max	f	N	A	α	ρ_s	k	c_v	λ
Piaskowiec	4.7	10.9	0.15	2.31E+09	3.46E+09	1.16E-05	2.6	5.00E-07	1100	3.1
żwir zailony	25.2	32.7	0.28	3.90E+06	2.40E+07	6.00E-06	2.53	3.00E-06	639	2.5
łł	50	50	0.31	1.32E+07	6.91E+07	5.80E-06	2.38	3.00E-08	566	2.1
Węgiel *	53	53	0.2	5.80E+08	8.70E+08	5.00E-06	1.21	5.00E-09	1250	0.5
łł	57.2	69.8	0.4	1.28E+06	9.42E+06	5.90E-06	2.62	6.00E-08	481	2.9
Piasek ilasty	80.5	95	0.32	1.30E+06	9.00E+06	6.00E-06	2.49	1.20E-06	889	3.5
łł	125.9	149.9	0.37	2.50E+06	1.85E+07	6.10E-06	2.71	7.00E-08	514	1.4
łł pylasty	166.1	184	0.28	3.30E+06	1.50E+07	6.00E-06	2.66	5.00E-08	612	1.9

*wartości początkowe, które stopniowo spadają do 1% początkowej wartości w obszarze generatora zgazowania

6.1.2. Model matematyczny oraz warunki brzegowe

Podobnie, jak w poprzednim rozdziale, model numeryczny obliczeń MES stworzony został przy wykorzystaniu narzędzi programu FlexPDE v.6. Do obliczeń przyjęto modele matematyczne dla cieczy i gazu z jednym uśrednionym dla obu faz równaniem przewodzenia ciepła. Założono, że początkowo w całym obszarze płynem porowym jest woda, w miarę wzrostu temperatury ulega ona przemianie fazowej (rys 6.3.).

² <http://www.engineeringtoolbox.com>



Rysunek 6.3 Wykres fazowy wody³

Dla określenia temperatury przemiany fazowej w zależności od panującego w ośrodku ciśnienia użyto równania Clausiusa-Clapeyrona:

$$T_p = \frac{T_0 L}{L - T_0 R \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)}. \quad (6.1)$$

W obszarze, w którym nastąpiła przemiana fazowa, zastosowano model matematyczny termo-konsolidacji dla układu porowate ciało stałe-gaz.

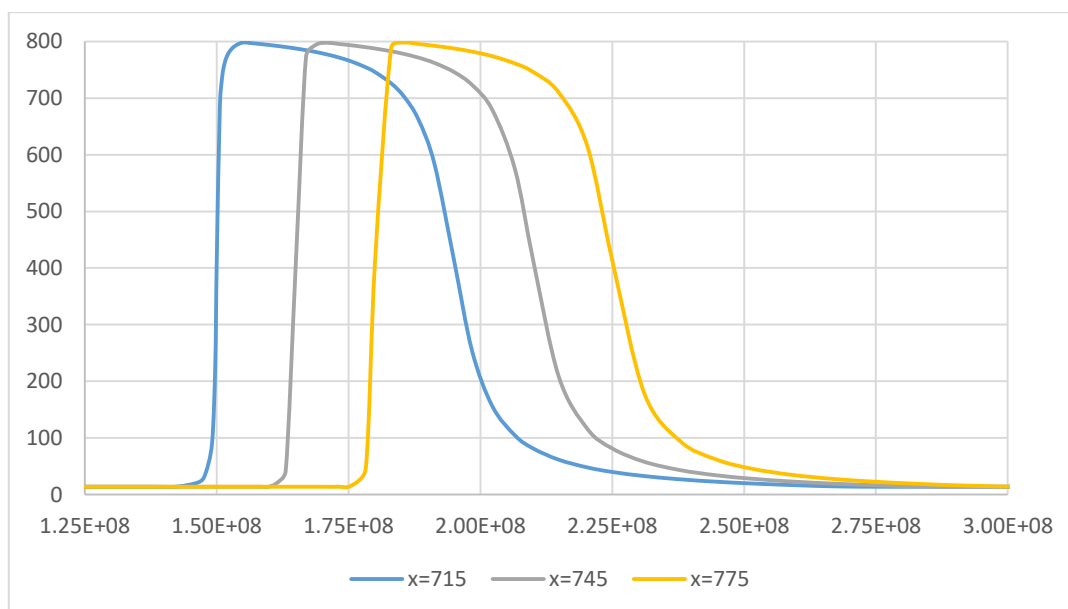
- **Warunki brzegowe**

- 1) Przyjęto brak przemieszczeń pionowych w dolnej płaszczyźnie modelu, oraz brak przemieszczeń poziomych w płaszczyznach bocznych.
- 2) Na poszczególnych powierzchniach rozdzielających warstwy przyjęto warunek zgodności przemieszczeń poziomych i pionowych.
- 3) Założono brak przepływu płynu przez dolną i boczne powierzchnie modelu oraz warunek zgodności naprężenia w cieczy na powierzchniach rozdzielających warstwy.

³ <https://www.wolframalpha.com>

- 4) Przyjęto, znaną temperaturę na powierzchni terenu oraz w płaszczyznach bocznych i dolnej, zmieniającą się liniowo w zależności od głębokości: od $10^{\circ}C$ przy powierzchni terenu do $15^{\circ}C$ na głębokości 180m poniżej terenu.

Dla generatora zgazowania węgla przyjęto scenariusz procesu zgazowania oparty na opisach zgazowywania węgla z literatury: Blinderman i Jones (2002), Bhutto (2013). Jako długość okresu, w którym trwa zgazowanie węgla przyjęto 5e7s (19 miesięcy). Temperatura wzrasta stopniowo zgodnie z funkcją liniową, początkowo w przyjętym punkcie obszaru, po czym w miarę przenoszenia się procesu zgazowania wzdłuż warstwy węgla następuje wygaszanie. Przebieg temperatury w punktach należących do zgazowywanego obszaru przedstawia rys nr 6.4. Założono, że podczas procesu zgazowania w reaktorze utrzymywane jest ciśnienie obniżone w stosunku do ciśnienia hydrostatycznego.



Rysunek 6.4 Przebieg temperatury w wybranych punktach zgazowywanego obszaru

- **Warunki początkowe**

Przyjęto przemieszczenia oraz rozkład ciśnienia płynu porowego wynikające z ciężaru własnego, natomiast rozkład temperatury podobnie, jak w przypadku warunków brzegowych, liniowo zmienny od $10^{\circ}C$ do $15^{\circ}C$.

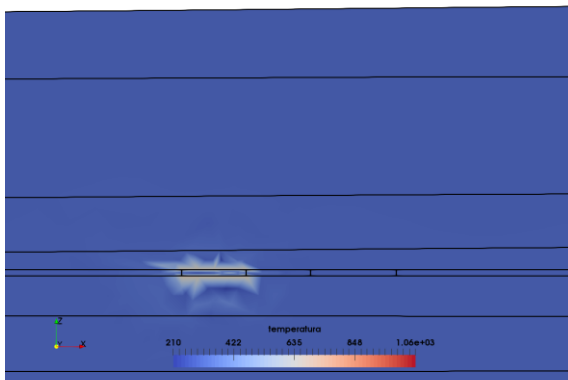
Obliczenia podobnie, jak w przypadku poprzednich modeli, przeprowadzono dwuetapowo, początkowo założono jedynie obciążenie ciężarem własnym bez zmian temperatury, przyjmując następnie uzyskane wyniki przemieszczeń jako warunek początkowy drugiego etapu obliczeń, w celu obserwacji wyłącznie efektów zgazowania.

6.2 Wyniki obliczeń numerycznych

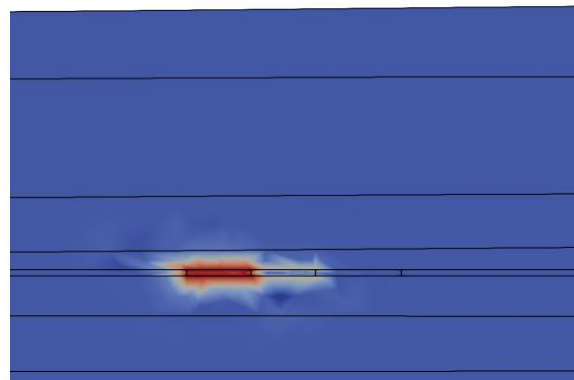
Przeprowadzone obliczenia numeryczne pozwoliły na uzyskanie pól przemieszczeń ośrodka, naprężeń w płynie i temperatury. Pozwoliło to na określenie kierunków i wartości filtracji, strumienia ciepła, oraz naprężeń w górotworze. Dzięki znajomości rozkładu temperatury oraz ciśnienia w górotworze możliwe było określenie zasięgu występowania gazu w porach ośrodka. Dodatkowo obliczenia numeryczne umożliwiły analizę zależnych od temperatury lub/i ciśnienia parametrów takich, jak gęstość płynu, współczynnik filtracji, współczynnik przewodzenia ciepła czy parametry materiałowe. Podczas obliczeń siatka elementów skończonych ulegała zmianom podczas obliczeń, ilość węzłów wynosiła od 14885 do 21191, ilość elementów 10171 do 14502. Liczba niewiadomych wynosiła 74425 do 105955.

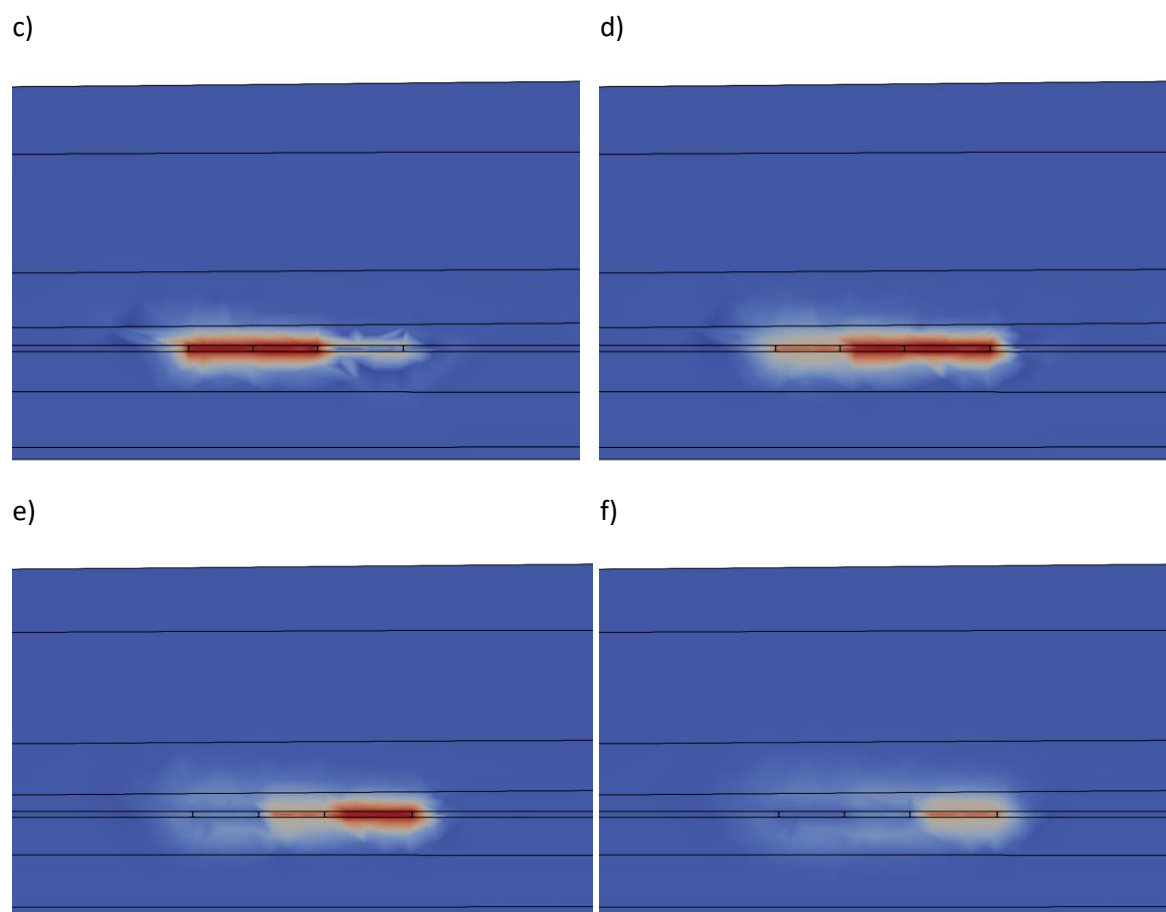
Przebieg temperatury w zadanych punktach generatora zagazowania przedstawiono na rys 6.4. Rozkład temperatury w otoczeniu zgazowywanego złoża w wybranych momentach przedstawia rys. 6.5 kolejno dla czasu: $1.5e8$ (początek procesu zgazowania), $1.65e8$ (174 dni), $1.8e8$ (347 dni), $1.95e8$ (521 dni), $2.1e8$ (694 dni), $2.25e8$ (868dni), oraz $1e9$ (27 lat). Jak widać maksimum temperatury przesuwa się w czasie wzdłuż warstwy węgla ulegającej zgazowaniu. Proces stygnięcia górotworu jest powolny, podwyższona temperatura wokół złoża utrzymuje się przez wiele lat po ustaniu procesu.

a)



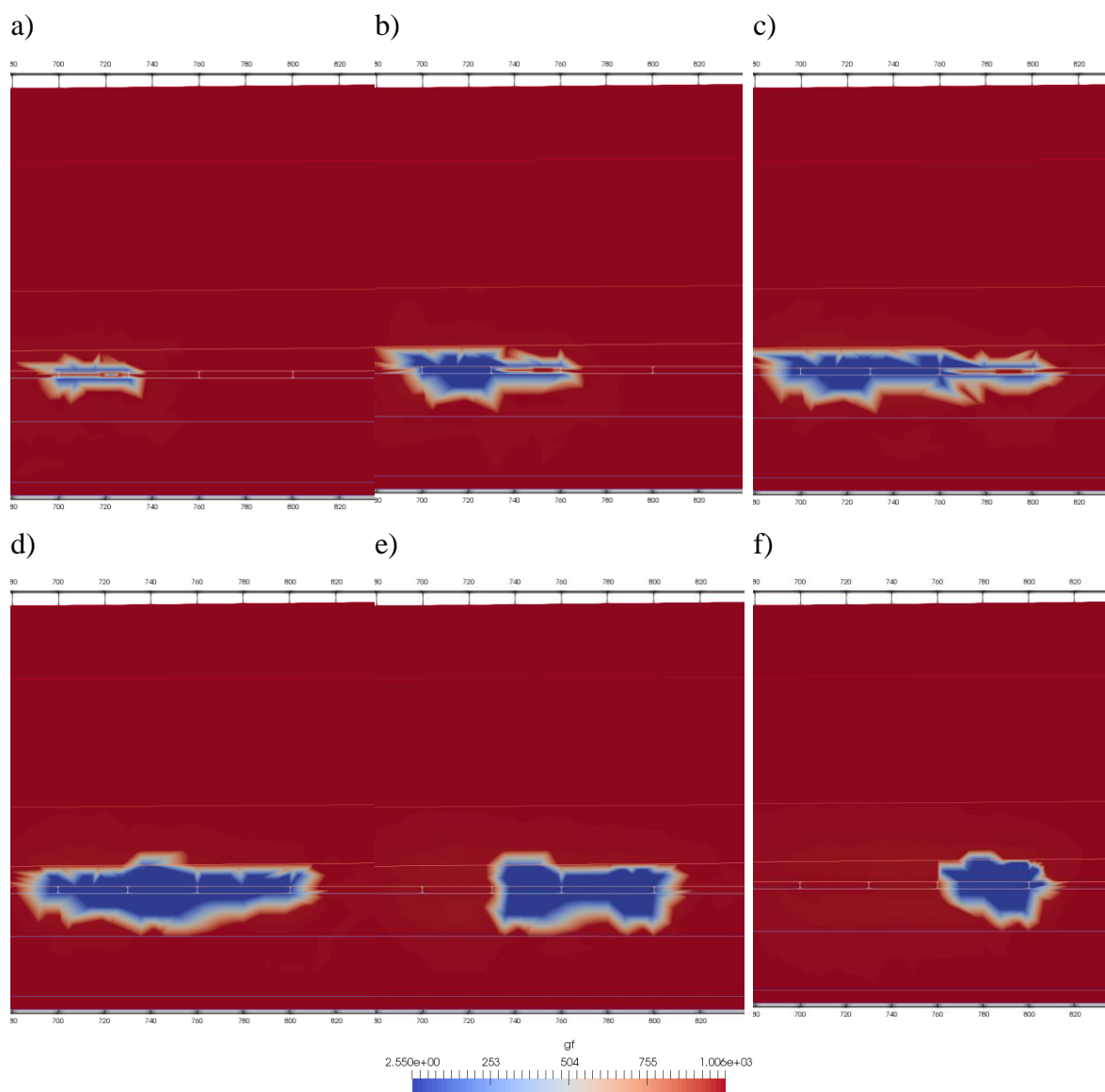
b)



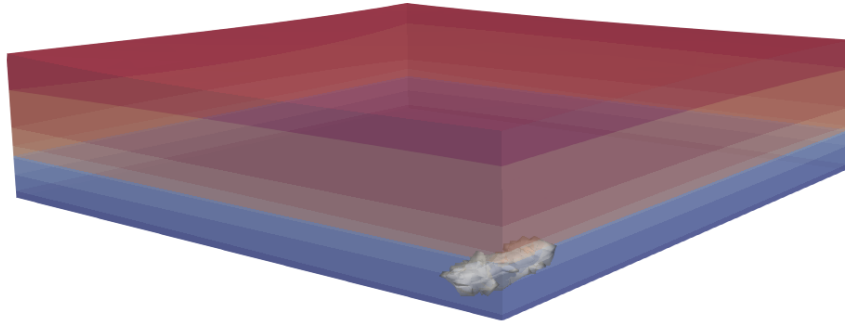


*Rysunek 6.5 Ewolucja zmian temperatury wokół generatora zgazowania węgla po czasie:
a) $1.5e8s$, b) $1.65e8s$, c) $1.8e8$, d) $1.95e8$, e) $2.1e8s$, f) $2.25e8s$.*

Wskutek podwyższonej temperatury następuje przemiana fazowa. Zasięg przemiany fazowej jest największy w czasie $1.95e8$ – jest to ok 10m. Rys nr 6.6 przedstawia rozkład gęstości płynu w punktach czasowych odpowiadającym przedstawionym na rys. 6.4. Widok przestrzenny usytuowania obszaru występowania gazu (pary wodnej) w porach ośrodka przedstawiony jest na rysunku 6.7.

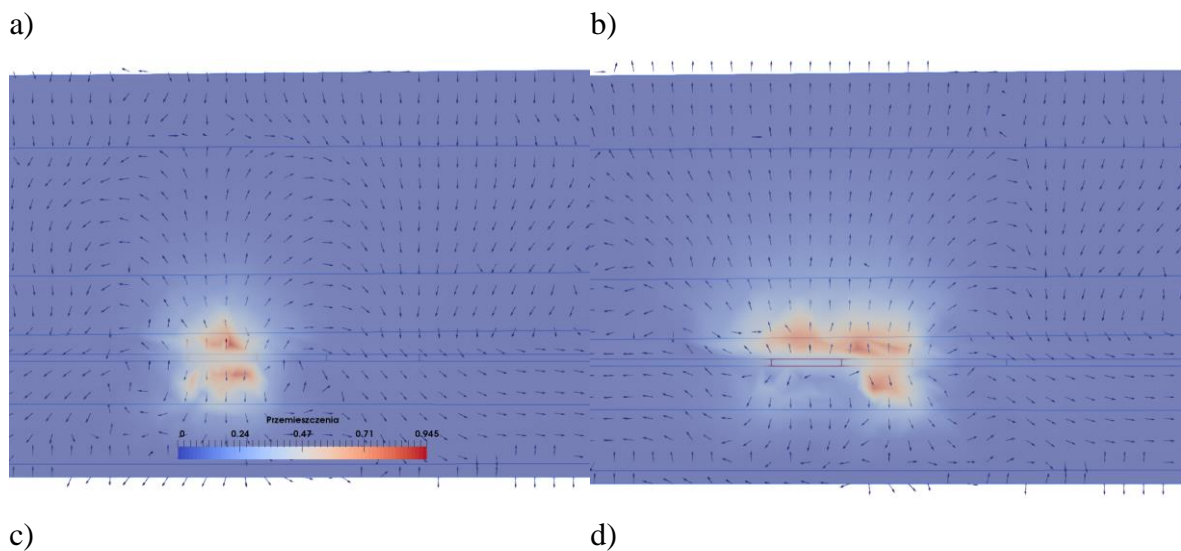


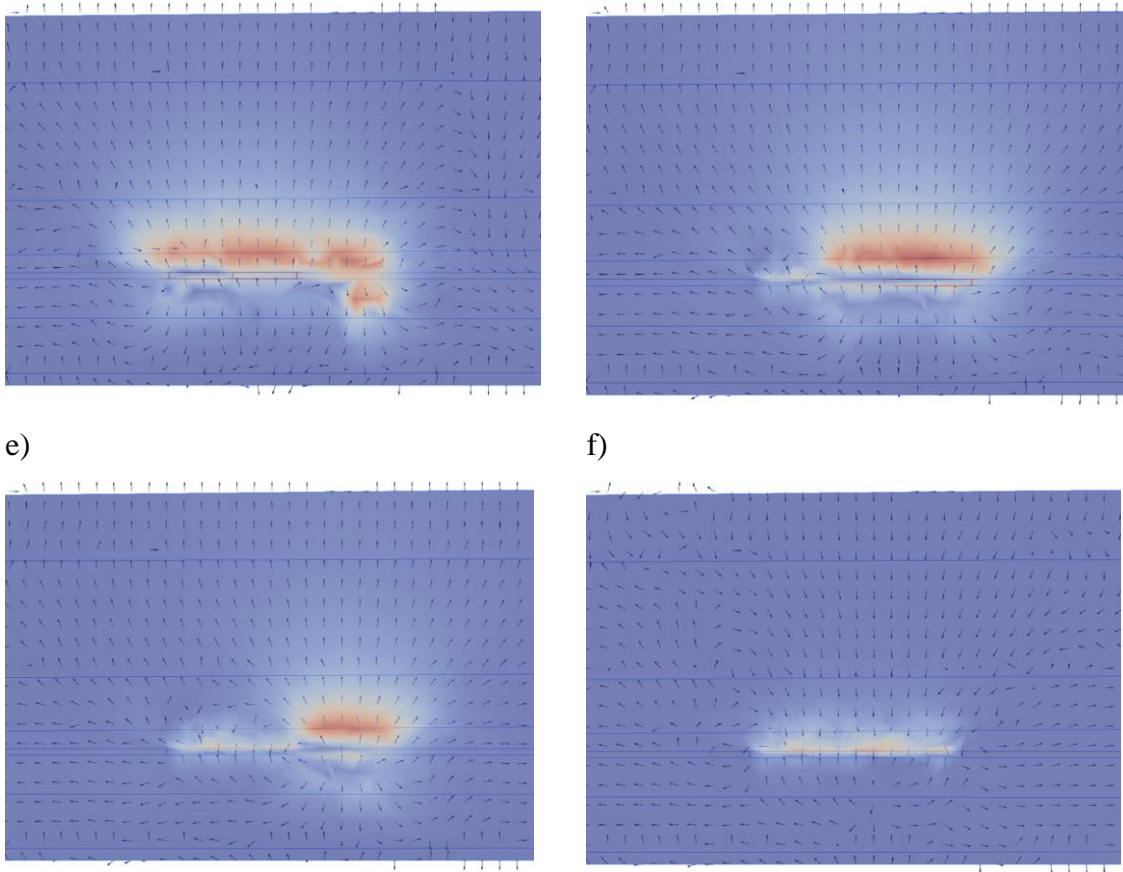
Rysunek 6.6 Rozkład gęstości plynu w przekroju poprzecznym po w czasach a) $1.5e8$, b) $1.65e8s$, c) $1.8e8s$, d) $1.95e8s$, e) $2.1e8s$, f) $2.25e8s$. Kolor szkarlatny – woda, kolor granatowy - para wodna



Rysunek 6.7 Przestrzenne usytuowanie obszaru występowania pary wodnej w czasie $t=1.95e8s$.

Pole wektorowe przemieszczeń będące wynikiem podwyższonej temperatury przedstawia rys 6.8. Przemieszczenia te są wynikiem podwyższonej temperatury oraz zmiany parametrów mechanicznych w warstwie węgla w wyniku zgazowania. Maksymalne przemieszczenia wynoszą 0.36m i występują przy stopie węgla w czasie $t=2.1e8$ s. początku procesu zgazowania.

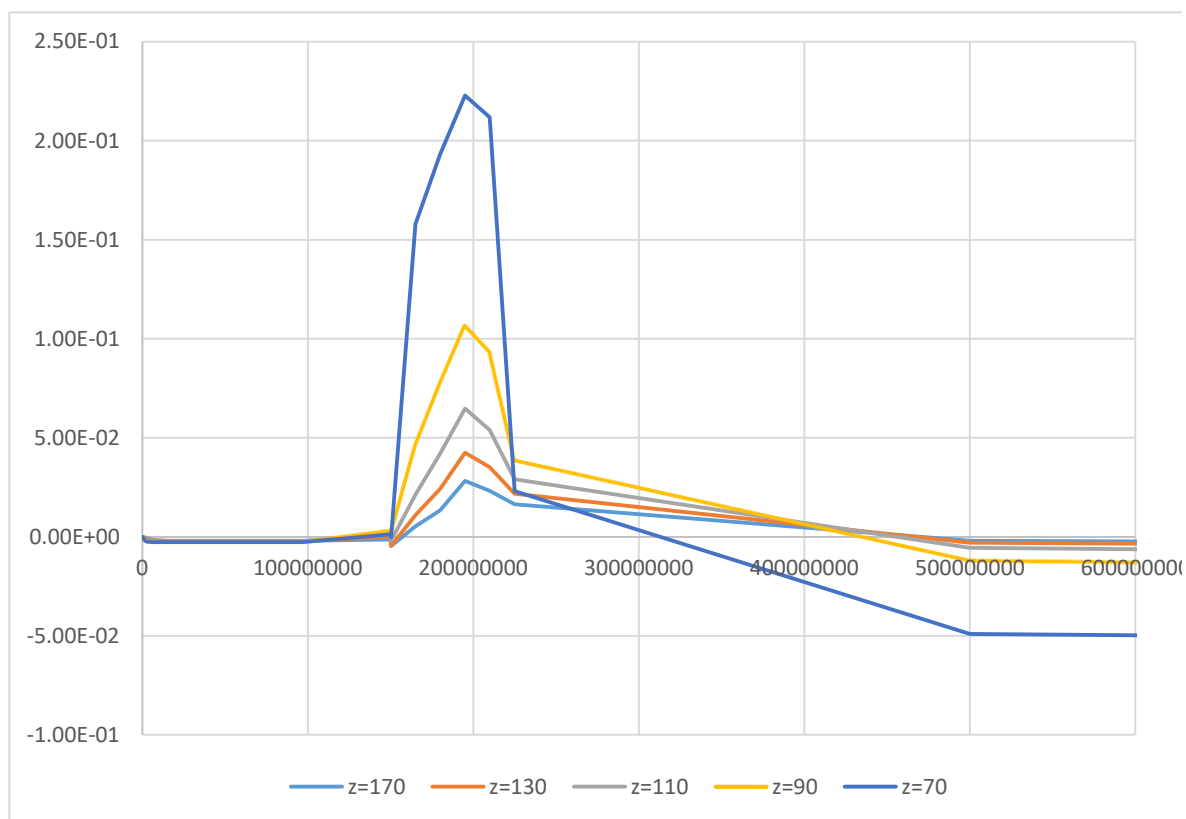




Rysunek 6.8 Rozkład przemieszczeń w przekroju poprzecznym po w czasach a) $1.5e8s$, b) $1.65e8s$, c) $1.8e8s$, d) $1.95e8s$, e) $2.1e8s$, f) $2.25e8s$.

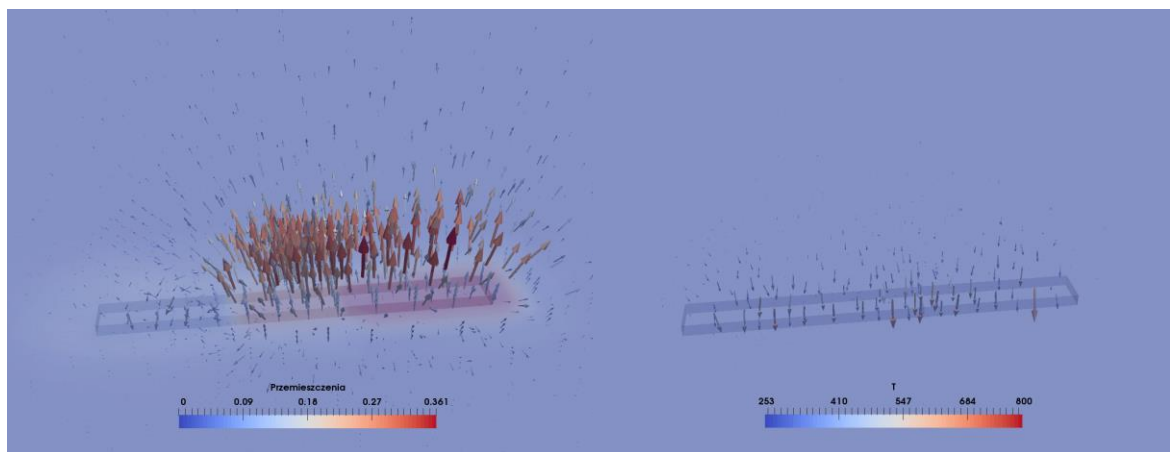
Z czasem niewielkie wartości przemieszczeń pojawiają się również w dalszym sąsiedztwie zgazowywanego złoża, również w poziomie powierzchni terenu. Rys. 6.7 przedstawia przemieszczenia pionowe w przekroju podczas procesu zgazowania, początkowo dodatnie wskutek rozszerzalności termicznej, następnie ujemne, spowodowane osiadaniem po ustaniu procesu. Maksymalne przemieszczenia powierzchni terenu podczas procesu zgazowania wyniosły $+2.8\text{cm}$ dla $t=1.95e8$, oraz -6mm dla $t=1e10$. Przebieg w czasie przemieszczeń w wybranych punktach położonych powyżej złoża ($x=750$, $y=750$, $z=70,90,110,130,170$) oraz przestrzenny rozkład przemieszczeń na tle pola temperatury przedstawia rys. 6.9. Wybrane zostały momenty czasowe $2.1e8$, oraz $1e10$ – końcowy moment modelowania. Na rysunku 6.9b widoczne są, oprócz przemieszczeń spowodowanych rozszerzalnością termiczną, przeciwnie skierowane przemieszczenia w pierwszej sekcji zgazowywanego złoża, wynikające ze zmiany parametrów mechanicznych ośrodka wskutek ubytku masy w procesie zgazowania.

a)



b)

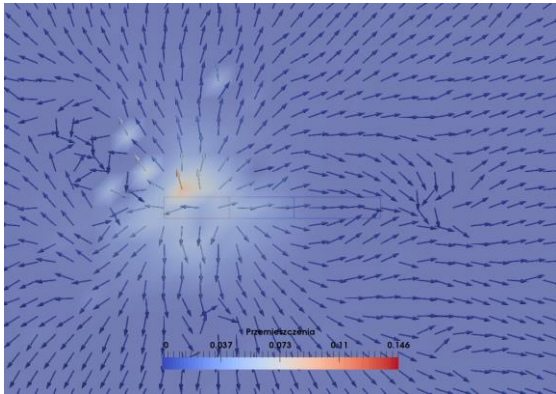
c)



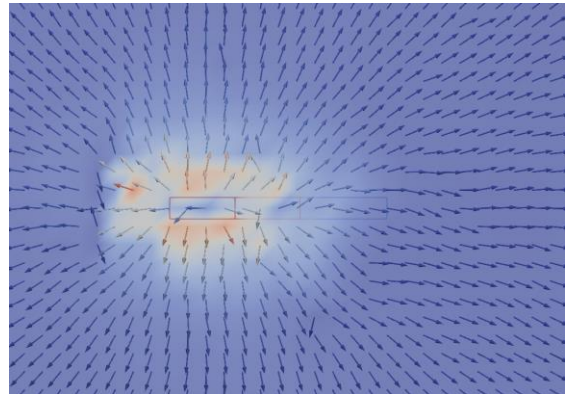
Rysunek 6.9 a) Wykresy przemieszczeń pionowych w czasie, b) Pole wektorowe przemieszczeń w pobliżu generatora dla $t=2.1e8$, c) Pole wektorowe przemieszczenie w pobliżu generatora dla czasu $t= 1e10s$.

Przemieszczenia poziome są niewielkie w stosunku do pionowych. Największe wartości występują, podobnie jak w przypadku przemieszczeń pionowych, w warstwie iłó nad złożem węgla. Rozkład przemieszczeń poziomych w poziomie $z=60$ przedstawiony jest na rysunku 6.10.

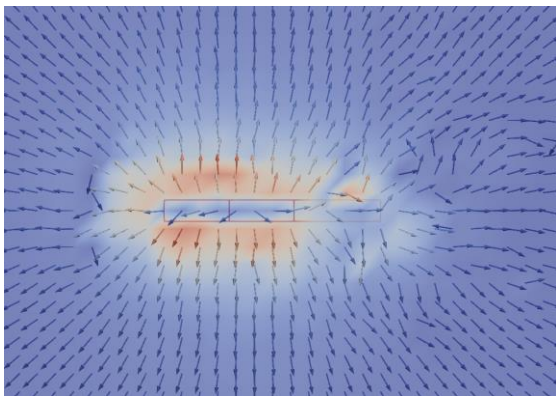
a)



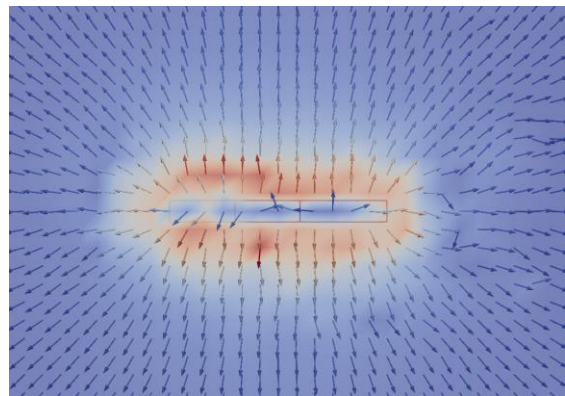
b)



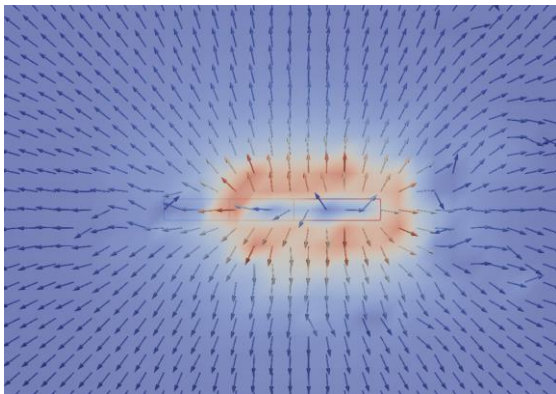
c)



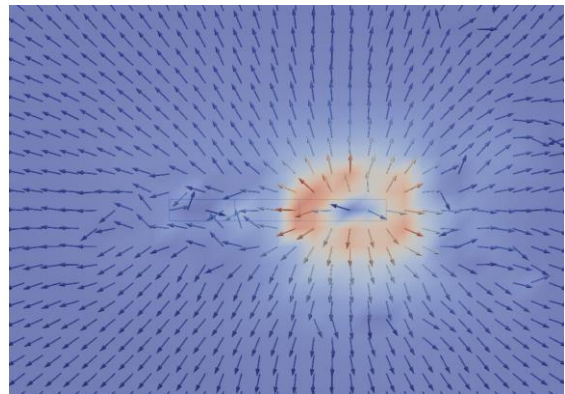
d)



e)

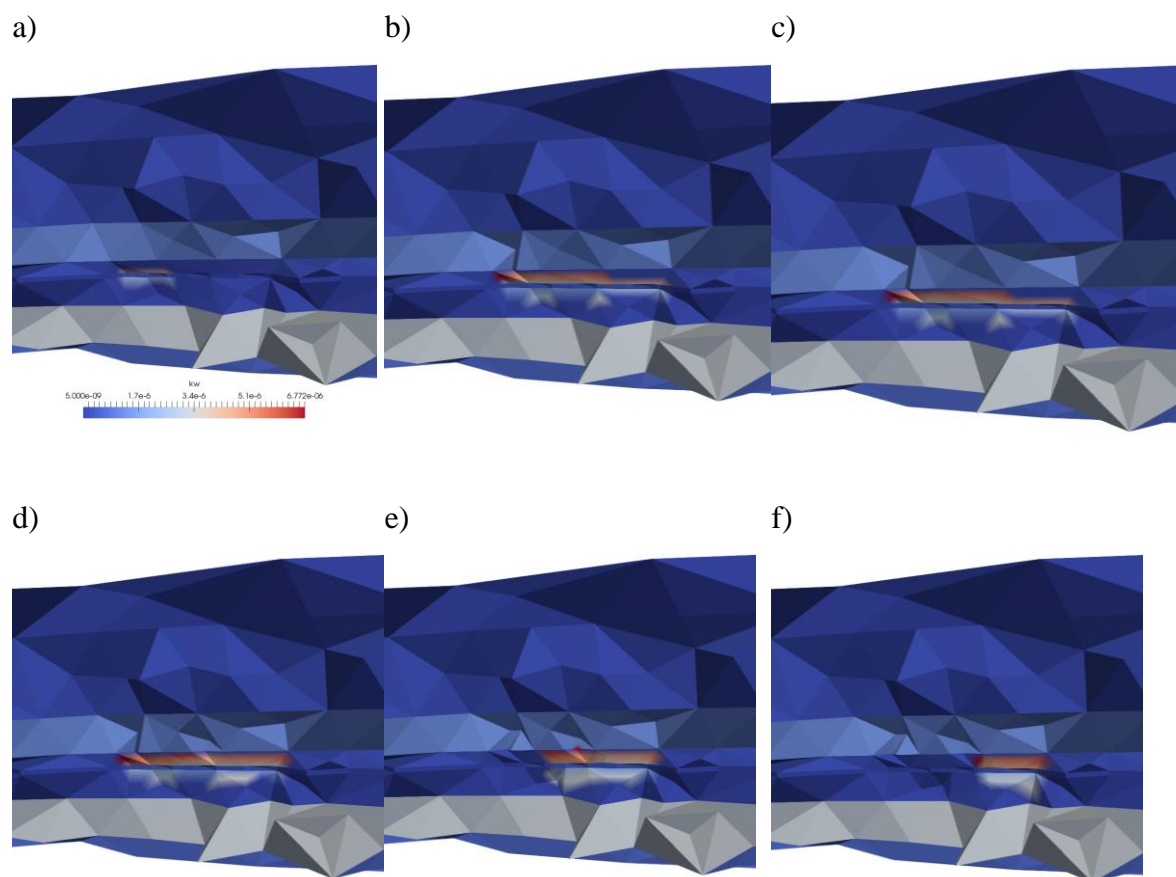


f)



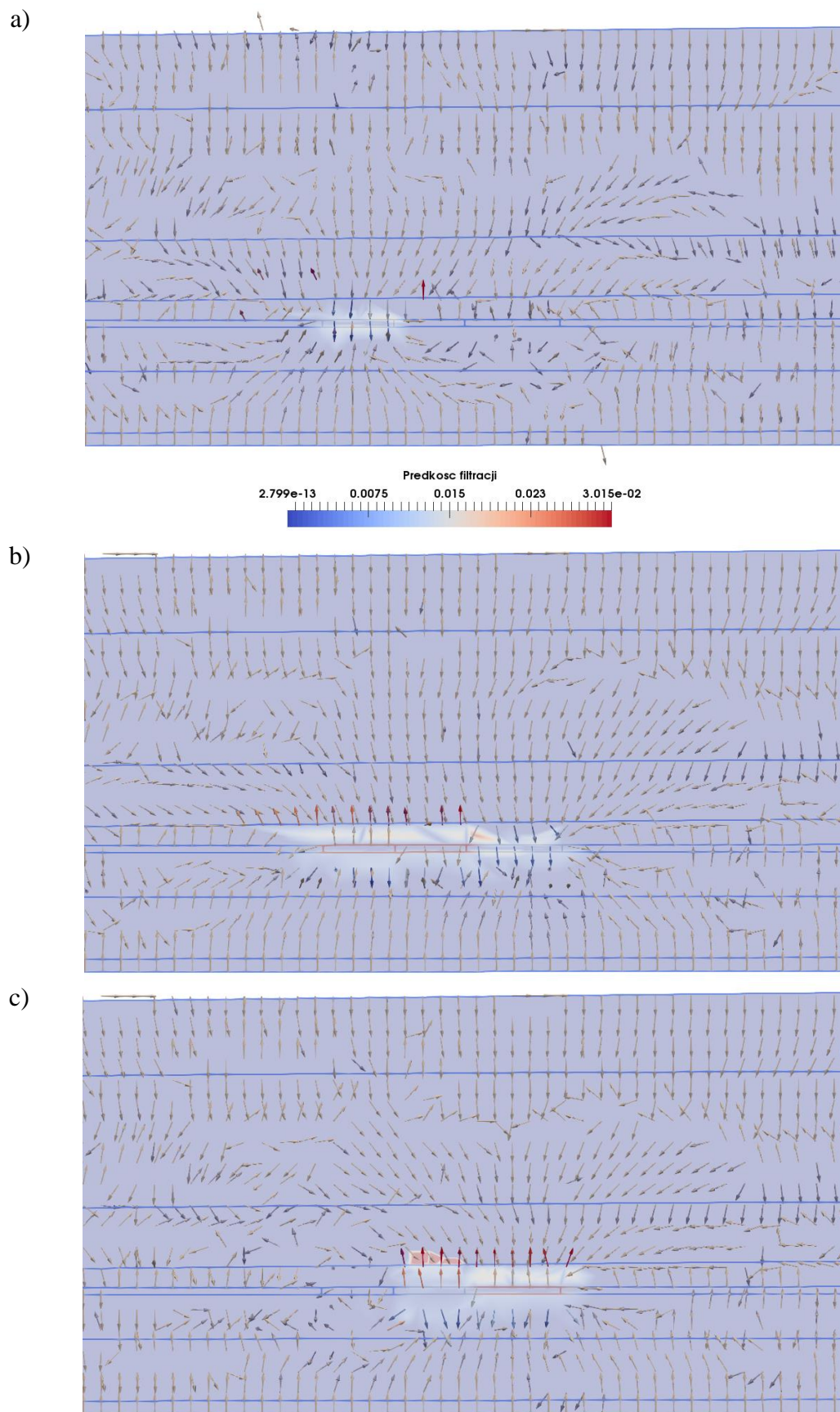
Rysunek 6.10 Pole wektorowe przemieszczeń w czasie a) $1.5e8s$, b) $1.65e8s$, c) $1.8e8s$, d) $1.95e8s$, e) $2.1e8s$, f) $2.25e8s$.

W przestrzeni wypełnionej gazem, ze względu na jego niewielką lepkość w stosunku do wody, współczynnik filtracji jest niższy, a prędkość filtracji większa. Zgodnie ze wzorem Sutherlanda, wraz ze wzrostem temperatury rośnie lepkość gazu rośnie, a współczynnik filtracji maleje. Rozkład współczynnika filtracji przedstawiony jest na rysunku nr 6.11.



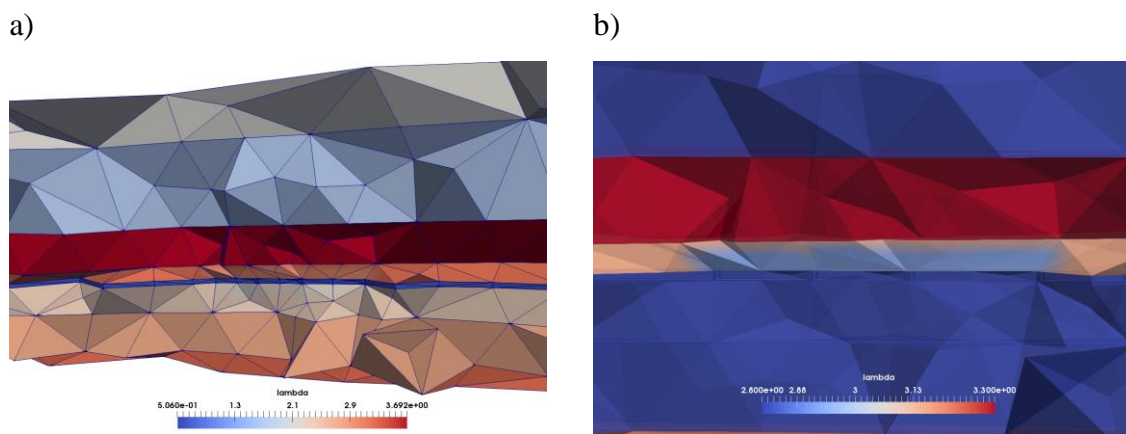
Rysunek 6.11 Rozkład współczynnika filtracji w pobliżu obszaru zgazowania węgla w czasie a) $1.5e8s$, b) $1.65e8s$, c) $1.8e8s$, d) $1.95e8s$, e) $2.1e8s$, f) $2.25e8s$ – przekroje wygenerowane zostały z zachowaniem integralności elementów skończonych (dla lepszego uwidocznienia obszaru ze zróżnicowanym współczynnikiem filtracji)

Wektory filtracji przedstawione są na rys nr 6.12 – z ich kierunku wynika, że zgodnie za założeniami metody zgazowania węgla stosującej obniżone ciśnienia, woda dopływa do strefy zgazowania zapewniając potrzebną w procesie parę wodną, co również zapobiega migracji zanieczyszczeń.



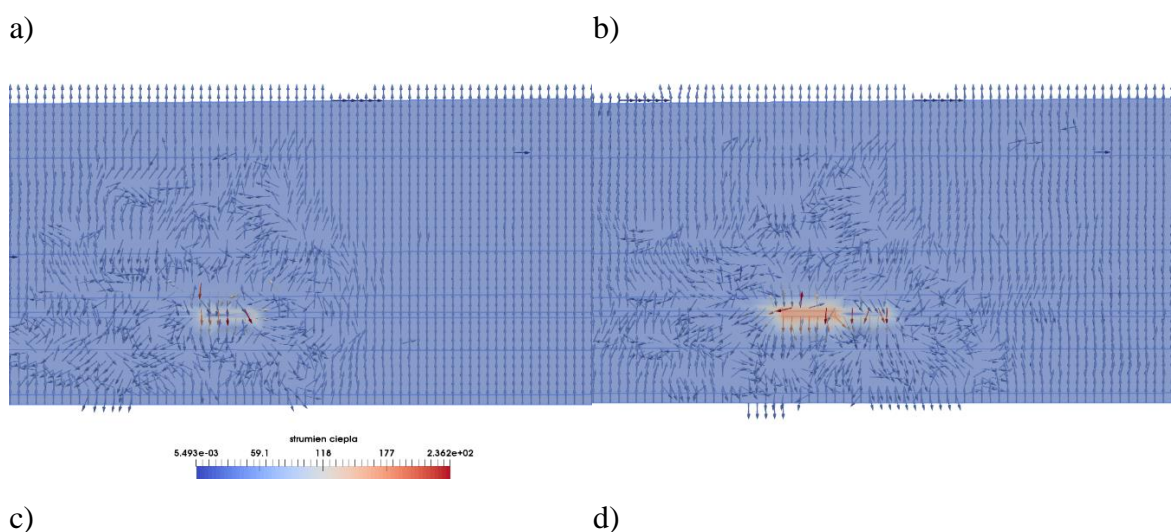
Rysunek 6.12 Prędkość filtracji w czasie a) $1.5e8s$, b) $1.8e8s$, c) $1.95e8s$

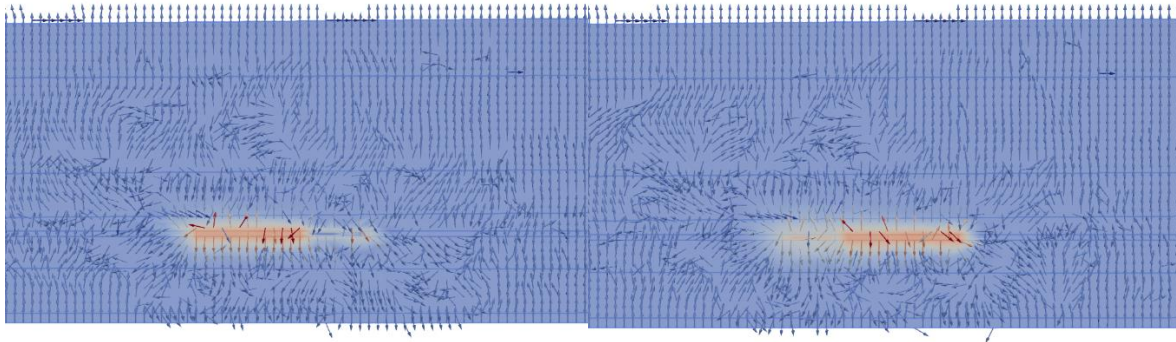
Rozkład współczynników przewodzenia ciepła w czasie $1.8e8s$ przedstawia rysunek 6.13. Na rysunku a) skala barw nie pozwala na obserwację zmian współczynnika przewodzenia ciepła w obszarze, w którym występuje gaz, w tym celu dla rysunku b) dobrano węższą skalę barw, dzięki czemu widoczna na nim jest różnica w między gorącym obszarem wypełnionym gazem oraz chłodniejszym obszarem wypełnionym cieczą – wynika ona z niższego przewodzenia ciepła przez gaz, oraz zmianą przewodnictwa cieplnego wraz z temperaturą (oba przekroje wykonano z uwzględnieniem kształtów elementów skończonych).



Rysunek 6.13 Współczynnik przewodzenia ciepła w $t=1.8e8s$ a) rozkład w przekroju, w którym zgasowywane jest złożę węgla b) zbliżenie obszaru zgasowania ze skalą dobraną w sposób pozwalający na obserwację zmiany współczynnika wskutek przemiany fazowej

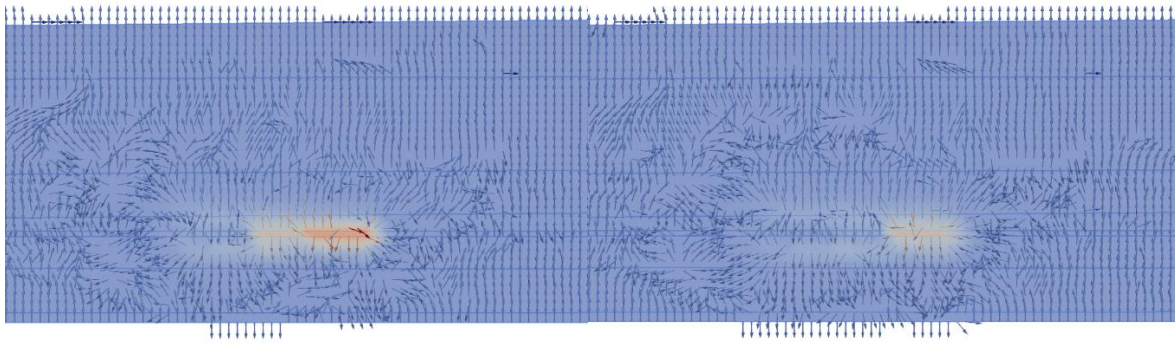
Rys. 6.14 przedstawia wektory strumienia ciepła na tle pola temperatury w momentach czasowych odpowiadających wcześniej prezentowanym wykresom.





e)

f)



Rysunek 6.14 Strumień ciepła na tle pola temperatury w czasie a) $1.5e8s$, b) $1.65e8s$, c) $1.8e8s$, d) $1.95e8s$, e) $2.1e8s$, f) $2.25e8s$.

Z punktu widzenia wpływu na środowisko, najważniejszymi zagadnieniami są filtracja (a wraz z nią migracja zanieczyszczeń) oraz osiadania. Zgodnie z wynikami symulacji, przemieszczenia pionowe powierzchni terenu wynoszą $+2.8\text{cm}$ w czasie trwania procesu zgazowania, oraz -6mm po jego ustaniu, ze względu na zmianę parametrów materiałowych węgla po zgazowaniu. Dzięki zastosowaniu obniżonego, w stosunku do panującego w górotworze ciśnienia, woda dopływa do generatora zasilając go w parę wodną oraz zapobiegając rozprzestrzenianiu się zanieczyszczeń. Przedstawiony model pozwala na testowanie różnych parametrów procesu (takich, jak temperatura oraz ciśnienie w generatorze) w celu określania optymalnych warunków przy zadanej geologii. w zależności od potrzeb istnieje możliwość wykorzystania modelu analizy dodatkowych, nie będący przedmiotem tej pracy zagadnień, takich, jak np. potencjał plastyczności w górotworze i odkształcenia lepko-plastyczne.

7. Podsumowanie i wnioski

W części teoretycznej pracy przedstawiono model matematyczny termo-konsolidacji w zakresie teorii sprężystości dla fazy stałej ośrodka. Konstrukcja modelu zawiera:

- równania ciągłości,
- równania ruchu fazy stałej i płynnej ośrodka,
- związki konstytutywne dla obu faz ośrodka porowatego,
- równania przewodnictwa ciepła dla obu faz ośrodka.

Równania ciągłości oraz równania ruchu są klasycznymi równaniami teorii Biot-Darcy'ego procesu konsolidacji w teorii porosprężystości. Wykazano przy tym, że prawo Darcy'ego wynika z zasady zachowania pędu płynu przy przepływie laminarnym przez pory ośrodka dwufazowego, co potwierdzają również cytowane badania wykorzystujące teorię homogenizacji.

Ze względu na różne właściwości obu płynów w warunkach izotermicznych – liniowa charakterystyka naprężenie/odkształcenie cieczy, oraz nieliniowa w przypadku gazów, konieczne było uwzględnienie praw gazowych w związkach konstytutywnych ośrodka porosprężystego. Uwzględniając różne właściwości płynów wypełniających pory ośrodka:

- w przypadku cieczy, jako płynu porowego wychodząc z praw termodynamiki procesów nieodwracalnych uzyskano związki konstytutywne odpowiadające związkom Duhamela-Neumanna dla ośrodków sprężystych;
- w przypadku gazu jako płynu porowego dodatkowo wykorzystano prawa gazowe (Prawo Boyle'a-Mariotte'a dla oddziaływań mechanicznych oraz prawo Gay Lussaca dla oddziaływań termicznych), z których wynika, że ściśliwość płynu nie jest stałą materiałową, lecz funkcją ciśnienia; analogicznie do ściśliwości, rozszerzalność cieplna jest funkcją temperatury.

W wyprowadzonych przeze mnie równaniach konstytutywnych ośrodka kolejne człony odpowiadają za wpływ na naprężenia w ośrodku oraz w płynie wywierany przez: odkształcenia ośrodka, odkształcenia fazy płynnej, zmiany temperatury w fazie stałej, oraz zmiany temperatury w fazie płynnej (lub w przypadku rozpatrywania ośrodka jako jednorodnego z uśrednionymi parametrami termicznymi, wpływ zmiany temperatury ośrodka). Parametry uzyskanych równań konstytutywnych zidentyfikowano analogicznie,

jak w pracach Nowackiego (1970) oraz Strzeleckiego i in (2008), przy użyciu dodatkowych założeń dla przypadku nieizotermicznego, takich, jak:

- zmiana objętości szkieletu wyłącznie na skutek zmiany jego temperatury,
- zmiana objętości płynu wyłącznie na skutek zmiany jego temperatury.

Człony równań określające wpływ zmian temperatury na naprężenia wykorzystują stałe materiałowe ośrodka porospężystego. W równaniu dotyczącym naprężenia w fazie gazowej dwukrotnie pojawia się nieliniowy człon, uzależniający wartość ściśliwości od dylatacji – określa on wpływ na naprężenie oddziaływań mechanicznych oraz termicznych, dodatkowo człon odpowiedzialny za oddziaływania termiczne jest również funkcją temperatury. Nieliniowa charakterystyka gazu ma też wpływ na równania przewodzenia ciepła, w których występuje również ściśliwość oraz rozszerzalność termiczna obu faz. Dla obu rodzajów płynów porowych zastosowano dwa podejścia do procesu przewodzenia ciepła:

- założenie, że ciepło przepływa w obu fazach tak, jakby ośrodek był jedną fazą o uśrednionych właściwościach przewodzenia ciepła i charakteryzowany jest przez uśredniony współczynnik przewodzenia ciepła i ciepło właściwe. Uzyskano w ten sposób równanie przewodnictwa cieplnego dla ośrodka (różna postać równań w przypadku ośrodka wypełnionego cieczą lub gazem).
- Założenie, że ciepło przepływa niezależnie przez obie fazy, przy czym następuje też wymiana ciepła między fazami. Uzyskano w ten sposób 2 równania opisujące przewodzenie ciepła w ośrodku: równanie przewodzenia ciepła w szkielecie, oraz równanie przewodzenia ciepła w płynie (różna postać równań dla cieczy lub gazu). Ośrodek charakteryzowany jest wtedy przez współczynniki przewodzenia ciepła i ciepła właściwe obu faz: analogicznie, jak w przypadku równań opisujących zagadnienia rozchodzenia się fal w ośrodku dwufazowym, ρ_{11} i ρ_{22} są gęstościami efektywnymi danej fazy a ρ_{12} odpowiada za ich dynamiczne sprzężenie, w równaniach przewodzenia ciepła mamy człony opisujące efektywne ciepło właściwe danej fazy oraz człon odpowiadający za ich termiczne sprzężenie.

Uzyskany model matematyczny oprócz mechaniki skał i gruntów może mieć zastosowanie dla porowatych materiałów budowlanych wypełnionych gazem, takich jak np. beton, ceramika czy pianki.

Dalsze wnioski dotyczą doświadczeń numerycznych: modelowania próbki odpowiadającej rozmiarami klasycznej próbki dla testu trójosiowego ściskania, następnie modelowania procesu zgazowania węgla. W przypadku modelowania próbki zastosowano dwa modele przewodzenia ciepła: przewodzenie przez jednorodny ośrodek o uśrednionych parametrach, oraz rozpatrywanie każdej z faz osobno. Oba przypadki rozpatrywano w dwóch zakresach temperatur, w których woda występuje w stanie ciekłym lub gazowym. Współczynnik określający termiczne sprzężenie faz jest nowością występującą w moim modelu, zatem nie są znane jego wartości. Wobec braku możliwości jego laboratoryjnego wyznaczenia, w modelu numerycznym przeanalizowano jego wpływ na termokonsolidację zakładając dwa skrajne warianty:

- pełne sprzężenie faz (osiągnięte przez dobór współczynników określających sprzężenie termiczne zapewniających tę samą temperaturę obu faz przy założeniu braku odkształceń),
- brak sprzężenia faz (współczynnik określający termiczne sprzężenie faz równy zero), gdzie ciepło jest przewodzone w obu fazach niezależnie – nie ma przepływu ciepła między fazami.

Przy pełnym sprzężeniu faz ze względu na identyczną temperaturę w obu fazach wyniki sprowadzają się do takich, jak w modelu wykorzystującym jedno równanie przewodzenia ciepła, gdzie współczynnik przewodzenia ciepła jest średnią ważoną względem udziału frakcyjnego, natomiast ciepło właściwe jest średnią ważoną z wagą gęstości cząstkowej danej fazy. Wyniki dla modelowania obu faz równoległe, bez sprzężenia są nie są zgodne z intuicją (występują duże różnice temperatur między fazami w danym punkcie modelu), pozwalają jednak na zaobserwowanie kierunku przepływu ciepła między fazami: w przypadku cieczy jako płynu porowego, ogrzewający się szkielet oddaje część ciepła do płynu, natomiast w przypadku gazu sytuacja jest odwrotna, jednak ze względu na niską gęstość, ilość oddanego przez gaz ciepła jest bardzo niewielka i nie ma większego wpływu na temperaturę szkieletu. Zasadnicza różnica między modelami, w których płynem porowym były ciecz i gaz, wynika z różnych równań konstytutywnych dla obu tych faz i jest nią wielkość dylatacji płynu. W przypadku wody dylatacja jest niewielka, rośnie powoli w miarę ogrzewania się płynu. W przypadku gazu dylatacja jest gwałtowna, co w połączeniu z wyższym współczynnikiem filtracji dla ośrodka wypełnionego gazem, skutkuje wyższą prędkością filtracji. W początkowej fazie podgrzewania, zarówno dla wody jak i dla gazu, ze względu na różnice gęstości oraz ciśnienia nastąpiła zmiana kierunku przepływu.

W przypadku wody zjawisko to ma miejsce jedynie na samym początku podgrzewania, natomiast w przypadku znacznie rzadszego gazu, filtracja zmienia kierunek na zgodny z grawitacją dopiero pod koniec modelowania, gdy zmniejszają się różnice temperatur w poszczególnych częściach próbki. Model pozwala również na określenie przemieszczeń, które w przypadku gazu jako płynu porowego były nieco większe i postępowały szybciej, niż w przypadku cieczy, oraz na analizę zmienności zależnych od temperatury parametrów, takich, jak gęstość, współczynnik filtracji, lepkość itd.

Jako przykład zastosowania stworzonego przeze mnie modelu do celów inżynierskich przedstawiono symulację procesu podziemnego zgazowania węgla – metody pozwalającej na uzyskanie gazu syntezowego bez potrzeby wydobywania węgla. Podczas trwania procesu w związku z występowaniem wysokiej temperatury mogą wystąpić przemieszczenia skierowane ku górze spowodowane rozszerzalnością cieplną, następnie, w związku z ubytkiem masy węgla osiadania terenu, co może powodować uszkodzenia budowli i infrastruktury oraz zaburzać przepływ wód podziemnych i powierzchniowych.

Ze względu na większą prostotę modelu i brak możliwości wyznaczenia współczynnika określającego termiczne sprzężenie faz, dla numerycznego modelowania procesu zgazowania węgla wybrano model wykorzystujący jedno równanie przewodzenia ciepła oraz uśrednione parametry ośrodka. Zastosowano, w zależności od temperatury oraz ciśnienia, modele dla wody oraz pary wodnej w porach ośrodka. Obszar, w którym w porach ośrodka występuje para wodna wyznaczono w oparciu o równanie Clausiusa-Clapeyrona, i w zależności od stanu skupienia zastosowano odpowiednie dla gazu równania konstytutywne oraz parametry materiałowe. Przy założonej geologii oraz scenariuszu zgazowania, określono przemieszczenia oraz kierunki i wartości prędkości filtracji, co ma istotne znaczenie dla bezpieczeństwa procesu ze względu na migrację zanieczyszczeń. Przemieszczenia pionowe powierzchni terenu wyniosły +2.8cm w trakcie trwania procesu zgazowania, oraz -6mm po jego zakończeniu, wskutek obniżenia parametrów wytrzymałościowych węgla. Filtracja, dzięki zastosowaniu obniżonego, w porównaniu do obszaru otaczającego ciśnienia w generatorze była skierowana do generatora, co zapobiega migracji zanieczyszczeń w górotworze, oraz zapewnia potrzebną w procesie parę wodną. Model ten pozwolił również na wyznaczenie naprężeń w szkielecie oraz płynie, śledzenie w wybranych punktach zmian zależnych od temperatury parametrów takich, jak gęstość, lepkość, współczynnik przewodzenia ciepła czy współczynnik filtracji. Model ten jest możliwy do modyfikacji (w niewymagający dużych nakładów czasowych sposób można

zadać inną geometrię oraz parametry materiałowe) oraz, w przypadku dostępności dodatkowych danych, rozszerzenia o dalsze analizy materiałowe.

Obliczenia wykonano przy użyciu zasobów udostępnionych przez Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe (<http://wcss.pl>), grant obliczeniowy Nr 427.

Bibliografia

Auriault J.-L., Sanchez-Palencia E, 1977, Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux sature deformable, *Journal de Mecanique*, vol 16, 576-603.

Auriault J.-L. 1980 Dynamic Behaviour of a Porous Medium Saturated by a Newtonian Fluid, *Int. J. Engng Sc*, vol 18, s 775-785

Auriault J.-L. 1983, Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites, *J Heat Mass Transfer* vol 26, 861-869

Auriault, J.-L., Strzelecki T, Bauer J., He S. 1990. Porous de-formable media saturated by a very compressible fluid: quasi-statics, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9, vol 4, 373-392

Auriault J.-L. (1991) Heterogeneous Medium. Is an Equivalent Macroscopic Description Possible?, *Int. J. Engng. Sci.*, 29, 7, s. 785 - 795.

Auriault J.-L., Lewandowska J. „Homogenization of diffusion and adsorption macrotransport in porous media: Macrotransport in absence of advection”, *Geotechnique*, vol. 43, 457-469, 1993

Auriault J.-L., Lewandowska J. „Diffusion/adsorption/advection macrotransport in soils”, *Eur J. Mech A/Solids*, vol 15, 681-704, 1996

Auriault J.-L., Boutin C, Geindreau C., *Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media*, Wiley 2009, ISBN 978-1-84821-161-2

Bauer J, Gergowicz Z., Próba skonstruowania teoretycznego modelu węgla wyrzutowych, Raport Seri SPR Nr. 388, Instytut Geotechniki Politechniki Wrocławskiej.

Bear J. 1972, *Dynamics of fluids in Porous Media*, Elsevier, Nowy Jork

Bensoussan A, Lions J.L., Papanicolau G. (1978) *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*

- Berger L., Kay D., Burrowes K., Grau V., Tavener S.J., Bordas R., (2016) A poroelastic model of the lung *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.* Vol 32 Issue 1
- Robert Burrridge, Joseph B. Keller (1982) Biot's poroelasticity equations by homogenization, Macroscopic Properties of Disordered Media, *Proceedings of a Conference Held at the Courant Institute June 1–3, 1981*, pp 51-57, DOI 10.1007/3-540-11202-2_4
- Bartlewska-Urban M, Strzelecki T (2012) Thermal consolidation of porous medium with a rheological Kelvin-Voigt skeleton. *Studia Geotechnica et Mechanica.* 2012, vol. 34, nr 3, s. 17-35.
- Bartlewska-Urban M, Strzelecki T (2013) Numerical calculation of deformation of three dimensional sample in triaxial apparatus under external load and temperature field. *Studia Geotechnica et Mechanica.* 2013, vol. 35, nr 1, s. 27-39.
- Bartlewska-Urban M, Strzelecki T (2014) Effect of variation of temperature field n the proces of thermal consolidation of tailings pond „Żelazny Most”, *Studia Geotechnica et Mechanica.* 2014, vol. 36, nr 2, s. 57-65.
- Bartlewska-Urban M, Zombroń M, Strzelecki T, 2016, Numerical analysis of road pavement thermal deformability, based on Biot viscoelastic model of porous medium, *Studia Geotechnica et Mechanica* 2016, vol 38, nr 1, s 15-22
- Berkovitz N., 1993, *An introduction to coal technology*, Elsevier, ISBN: 978-0-12-091951-2
- Betts A.G., 1910, Method of utilizing buried coal, U.S. Patent 947,608, filed 1906, issued 1910.
- Bhutto A.W., Bazmi A.A., Zahedi G., 2013, Underground coal gasification: From fundamentals to applications, *Progress in Energy and Combustion Science* 39
- Biot, M.A., (1941) General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *Journal of Applied Physics*, vol 12, no 2 pp 155-164, February 1941
- Biot, M.A.: Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.* 26, 182 (1955)

- Biot, M.A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol 28, pp 168-178, 1956
- Biot, MA 1956 Thermoelasticity and irreversible thermodynamics *J. Appl. Phys.* 33, 1482
- Biot M.A., Willis D.G., The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation, *J. Appl. Mech.*, 24, (1957)
- Blinderman, M.S., and Jones, R.M., 2002, The Chinchilla IGCC Project to Date: UCG and Environment, 2002 *Gasification Technologies Conference*, San Francisco, USA, October 27-30, 2002.
- Blinderman, M.S., Saulov D.N., Klimenko A.Y., 2008, Forward and reverse combustion linking in underground coal gasification, *Energy* 33 446–454
- Bundschuh, J. 2010, *Introduction to the Numerical Modeling of Groundwater and Geothermal Systems: Fundamentals of Mass, Energy and Solute Transport in Poroelastic Rocks*, CRC Press
- Chauveteau G., Thiorriot C. (1967) Regimes d'écoulement en milieu poreux et limite de la loi de Darcy, *La Houille Blanche* 2, 141-148.
- Chen K., Yu L., 1996, Experimental study on long-tunnel large-section two-stage underground coal gasification *Mining Science and Technology* 313–316, Balkema
- Coussy O., Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a Lagrangian saturation concept *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2007;31:1675–1694
- Coussy O., (1995) *Mechanics of porous continua*, Wiley & Sons
- Coussy O. (2010) *Mechanics and Physics of Porous Solids*, John Wiley
- Cowin S.C., Bone Poroelasticity, *Journal of Biomechanics*, 1999, vol 32 issue 3 pp 217-238
- De Groot S.R., Mazur P. (1984), *Non Equilibrium Thermodynamics North-Holland Publishing Company*, Amsterdam
- Detournay, E. and Cheng, A.H.-D., Fundamentals of poroelasticity, Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method*, ed. C. Fairhurst, Pergamon Press, pp. 113-171, 1993.

- Derski W. (1975), *Zarys Mechaniki Ośrodków Ciągłych*, PWN, Warszawa (1975)
- Emad Moeendarbary, Léo Valon, Marco Fritzsche, Andrew R. Harris, Dale A. Moulding, Adrian J. Thrasher, Eleanor Stride, L. Mahadevan & Guillaume T. Charras, The cytoplasm of living cells behaves as a poroelastic material *Nature Materials* 12, 253–261 (2013)
- Ene H. Sanchez-Palencia E., Equations et phenomenes de surface pour l'écoulement dans un modele de milieu poreux, *J Mécanique* vol 14, 73-108, 1975
- Ergun S., 1952, Fluid flow through packed columns, *Chem. Eng. Prog.* 48, 89-94.
- Gaszyński, J. , 2007, Osadania warstwy gruntu nasyconej cieczą z uwzględnieniem pola temperatury, *Czasopismo Techniczne*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, ISSN 0011-4561
- Gaszyński, J, 2008, Mieszany problem początkowo-brzegowy w teorii termokonsolidacji. Zagadnienie początkowe, *Górnictwo i Geoinżynieria*, rok 33 zeszyt 1, 2009
- Gelhar L.W. (1987), Stochastic analysis of solute transport in saturated and unsaturated porous media, *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*, ed. J. Bear i Y. Corapcioglu, Martinus Nijhof Publishers, s 657-700.
- Gersewanow, N.M. *Osnovy dinamiki gruntowej massy* Moskwa-Leningrad 1937
- Hajdo S., Klich J., Polak K., 2011, Własności węgla niskogatunkowych w podziemnych zgazowaniu węgla, *Górnictwo i Geoinżynieria*, 3/2011
- Klimenko A.Y., 2009, Early Ideas in Underground Coal Gasification and Their Evolution, *Energies* 2009, 2, 456-476; doi:10.3390/en20200456
- Kreutz T.G., Larson E.D., Liu G., Williams R.H., 2008, Fischer-Tropsch Fuels from Coal and Biomass, *25th Annual International Pittsburgh Coal Conference*,
- Kröner E. (1986), Statistical Modeling, w *Modeling Small Deformations of Polycrystal*, chap. 8, J. Gittus, J. Zarka ed., Elsevier Appl Sci. Publ., London.
- Lee S., Speight J., Loyalka S. 2007, *Handbook of Alternative Fuel Technologies* CRC Press
- Liang C., Chaohu H., Jiansheng C., Jitinga X., 2011, A back analysis of the temperature field in the combustion volume space during underground coal gasification *Mining Science and Technology (China)* 21 (2011) 581–585

- Łydźba D, Constitutive equations of gas-coal medium *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol XIII, No 3-4, 51-62, 1991
- Łydźba D., *Zastosowania Asymptotycznej Homogenizacji w Mechanice Gruntów i Skał*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2002
- Łydźba D., Sobótka MK., State of Strangh in Massive Concrete Structure subjectet to Non-Mechanical Loads, *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol XXXVI, No 2, 37-43, 2014
- Mark, A.F.T., Huang L.D., Wang Q.Q. 1994, A biphasic poroelastic analysis of the flow dependent subcutaneous tissue pressure and compaction due to epidermal laedings – issues in presure sore. *ASME J. Biomech Engng.* 116:421-429
- Matheron G. (1967), *Éléments pour une théorie des milieux poreux* , Paris, Masson et Cie,
- Mei C. C., Auriault J.-L., 1991, The effect of weak inertia on flow through a porous medium, *J. Fluid Mech.* 222, 647-663.
- Morris J.P., Buscheck T.A., Hao Y. , 2009, Coupled Geomechanica Simulations of UCG Cavity Evolution *Int Pittsbourgh Coal Conference*
- Mow, V.C. Kwan M.K., Lai W.M., Holmes M.H., 1986, A filite deformation theory for nonlineary premeable soft hydrated biological tissues. In G.W. Schmid-Shonbein (ed) *Frontiers in Biomechanics* 153-179, New York, Springer – verlag.
- Norris A., 1992, On the correspondence between poroelasticity and thermoelasticity *J. Appl. Phys.* vol. 71, No. 3
- Nowacki W., (1970) *Teoria sprężystości*, PWN Warszawa (1970)
- Nur, A., Byerlee, J.D.: An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. *J. Geophys. Res.* **76**, 6414 (1971)
- Peña, A. 1996, *A theoretical study of brain biomechanics via the poroelastic theory and the finite element method*. PhD disertation, University of Cambridge
- Peña, A., Bolton M.D., Pickard J.D., 1998, Cellular poroelasticity: A theoretical model for soft tissue mechanics, *The Biot Conference on Poromechanics*, 1998, Louvain-la-Neuve, Belgium pp. 475-480
- Piętkowski R., 1957 *Mechanika gruntów*

- Prabu V., Jayanti S., Simulation of cavity formation in underground coal gasification using bore hole combustion experiments, *Energy* 36 (2011)
- Tiina Roose, Paolo A. Netti, Lance L. Munn, Yves Boucher, Rakesh K. Jain, Solid stress generated by spheroid growth estimated using a linear poroelasticity model. *Microvascular Research* Volume 66, Issue 3 , Pages 204–212, November 2003
- Rasoloarijaona M., Auriault J.-L. Nonlinear seepage flow through a rigid porous medium, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 13, 177-195.1996
- Royer P.,Auriault J.L., Strzelecki T., Macroscopic behaviour of gas flow with adsorption a fractured porous medium, *Mech. Res. Com.*, Vol. 23, no.1, 67-73, 1996
- Sanchez-Palencia, E: *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer Verlag, 1980
- Selfe S.J., Reddy B.V., Rosen M.A, Review of underground coal gasification technologies and carbon capture.*International Journal of Energy and Environmental Engineering* 2012 3:16
- Simon, B.R., Kaufmann M.V., McAfee M.A., Baldwin A.L., 1993, Finite element models for arterial wall mechanics, *ASME J. Biomech Engng* 115; 489-496
- Skempton, A.W. 1954. The pore pressure coefficients A and B, *Geotechnique*,4, 143-147.
- Skjetne E. (1995) *High-velocity flow in porous media: analytical, numerical, and experimental studies* (Thesis)
- Skjetne E., Auriault J.L. (1999) New insights on steady, non-linear flow in porous media, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18(1): 131-145
- Strzelecki, M., (2013) Quick sands effecton desert Lands –exemple of filtration stability loss, *Studia Geotechnica et mechanica*, Vol. XXXV, No.1
- Strzelecki M., (2016) *Model termo-filtracji w obszarze oddziaływania generatora zgazowania węgla*, rozprawa doktorska
- Strzelecki T., Bauer J. & Auriault J. L. Constitutive Equation of a Gas-Filled Two-Phase Medium, *Transport In Porous Media* vol 10: 197-202, 1993
- Strzelecki T. (red.) , Auriault J.L., BauerJ., Kostecki S., Puła W. (1996), *Mechanika ośrodków niejednorodnych, Teoria homogenizacji*. Wydawnictwo DWE Wrocław,

- Strzelecki T., 2006, Równania termokonsolidacji gruntów i skał, *Geotechnika i Budownictwo Specjalne*, XXIX, AGH, Kraków, 2006, 285-299
- Strzelecki T, Kostecki S, Żak S. (2008), *Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate*, DWE, Wrocław,
- Suarez-Arriga, MC, 2010, Thermo-poroelasticity in geothermics, formulated in four dimensions, *Geothermics*, Vol. 23, No.2
- Szymański, A., *Mechanika gruntów*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2007
- Terzaghi., K *Theoretical Soil Mechanics*, (1943), John Wiley and Sons, New York
- Uciechowska A., Strzelecki T., "The influence of the type of pore fluid in two-phase media on the form of consolidation equations", *Eurock 2013 Rock Mechanics for Resources, Energy and Environment*, Chapter 75, p. 491–495, CRC Press 2013, ISBN: 978-1-138-00080-3
- Uciechowska-Grakowicz A (2016) Druga postać związków konstytutywnych procesów nieizotermicznych ośrodków dwufazowych uzyskana przy użyciu potencjału Gibbsa. *Nauki techniczne i inżynierskie [Dokument elektroniczny]*. Cz. 6 / [red. nauk. Jacek Leśny, Jędrzej Nyćkowiak]. Poznań : Młodzi Naukowcy, 2016. s. 78-83.
- Verruijt A., (2015) *Theory and problems of poroelasticity*, Delft University of Technology
- Walker L.K., Blinerman M.S., Brun K, An IGCC Project at Chinchilla, Australia Based on Underground Coal Gasification (UCG) Paper to 2001 Gasification Technologies Conference, San Francisco, October 8-10 2001,
- Wilmański K., A few remarks on Biot's model and linear acoustics of poroelastic saturated materials *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26(6-7):509-536
- Wiłun, Z., Zarys geotechniki, WKŁ 1976
- Wu R.Y. *Coal gasification*. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press; 1988. p. 68e73
- Yang L.H., Zhang X., Liu S. Underground coal gasification using oxygen and steam. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects* 2009;31(20):1883e92
- Yang M., Taber L.A., 1991, The possible role of poroelasticity in the apparent viscoelastic behavior of passive cardiac muscle , *J Biomech* 24:587-597

Zaoui A.(1987), Approximate Statistical Modelling and Applications, dans Lecture Notes in Physics nr 272 *Homogenizations Techniques for Composite Media*, Springer-Verlag Berlin, strony 338 - 397.

Zimmermann, 2009, On the analogy between Poroelasticity and thermoelasticity, *Poromechanics IV*, red Hoe I. Ling, Andrew Smyth, Raimondo Betti, DEStech Publications, Inc, 2009

Spis rysunków

Rysunek 3.1. Jeden ze schematów przez Bettsa.	62
Rysunek 3.2 Schemat Bettsa z jednym szybem włączającym powietrze i wydobywającym gaz.	62
Rysunek 3.3. Schemat metody zgazowania w odwiertach.....	69
Rysunek 3.4. Schemat metody strumieniowej	70
Rysunek 3.5. Schemat podziału metod podziemnego zgazowania węgla	72
Rysunek 5.1. Wygenerowana przez program FlexPDE siatka elementów skończonych dla czasu $t=0$ oraz warunki brzegowe modelu.....	98
Rysunek 5.2. Warunek brzegowy dla temperatury w dolnej ściance próbki	99
Rysunek 5.3 Warunek początkowy dla przemieszczeń	100
Rysunek 5.4 Położenie punktów odniesienia dla których przedstawione zostaną wykresy	100
Rysunek 5.5 Przebieg temperatur w obu fazach dla obu modeli	104
Rysunek 5.6 Przebieg w czasie ilości ciepła transportowanego przez obie fazy	104
Rysunek 5.7 Rozkład prędkości filtracji dla $t=120s$ i $t=3000s$	105
Rysunek 5.8 Przemieszczenia w czasie $t=130s$ oraz $t=8000s$ dla wody	107
Rysunek 5.9 Rozkład dylatacji oraz prędkości dylatacji oraz naprężenia w płynie w czasie $t=120s$	108
Rysunek 5.10 Rozkład temperatury przy $t=3000s$ oraz przebieg temperatury w czasie w wybranych punktach próbki.....	109
Rysunek 5.11 Rozkład pionowej składowej prędkości filtracji w wybranych punktach próbki w przypadku wody	110
Rysunek 5.12 Przebieg w czasie współczynnika filtracji w wybranych punktach dla wody	110

Rysunek 5.13 Prędkość filtracji powietrza w wybranych punktach, zakres temperatur 10÷30°C.	111
Rysunek 5.14 Przebieg przemieszczeń pionowych w czasie w wybranych punktach próbki dla wody jako płynu porowego	111
Rysunek 5.15 Przebieg temperatur w obu fazach.....	113
Rysunek 5.16 Rozkład prędkości filtracji dla $t=120s$ i $t=8000s$	114
Rysunek 5.17 Przemieszczenia w czasie $t=130s$ oraz $t=8000s$ dla pary wodnej	115
Rysunek 5.18 Ilość ciepła transportowanego przez szkielet ośrodka.....	116
Rysunek 5.19 Prędkość filtracji powietrza w wybranych punktach, zakres temperatur 100÷120°C.	117
Rysunek 5.20 Rozkład pionowej składowej prędkości filtracji w wybranych punktach próbki w przypadku pary wodnej.....	117
Rysunek 5.21 Przebieg w czasie współczynnika filtracji w wybranych punktach	118
Rysunek 5.22 Przebieg przemieszczeń pionowych w czasie w wybranych punktach próbki	118
Rysunek 6.1 Wygenerowana siatka elementów skończonych określająca geometrię modelu (skala skażona 1:10).....	122
Rysunek 6.2 Przekrój przez rozpatrywany obszar – w środku zaznaczone położenie generatora zgazowania węgla.....	122
Rysunek 6.3 Wykres fazowy wody	124
Rysunek 6.4 Przebieg temperatury w wybranych punktach zgazowywanego obszaru ...	125
Rysunek 6.5 Ewolucja zmian temperatury wokół generatora zgazowania węgla	127
Rysunek 6.6 Rozkład gęstości płynu w przekroju poprzecznym	128
Rysunek 6.7 Przestrzenne usytuowanie obszaru występowania pary wodnej w czasie $t=1.95e8s$	129
Rysunek 6.8 Rozkład przemieszczeń w przekroju poprzecznym	130
Rysunek 6.9 a) Wykresy przemieszczeń pionowych w czasie, b) Pole wektorowe przemieszczeń w pobliżu generatora dla $t=2.1e8$, c) Pole wektorowe przemieszczenie w pobliżu generatora dla czasu $t=1e10s$	131
Rysunek 6.10 Pole wektorowe przemieszczeń	132
Rysunek 6.11 Rozkład współczynnika filtracji w pobliżu obszaru zgazowania węgla ...	133
Rysunek 6.12 Prędkość filtracji	134
Rysunek 6.13 Współczynnik przewodzenia ciepła	135
Rysunek 6.14 Strumień ciepła na tle pola temperatury	136

Streszczenie

W pracy przedstawiono model matematyczny termokonsolidacji ośrodka porowatego złożonego ze sprężystego szkieletu, którego pory wypełnione są płynem mogącym występować w dwóch stanach skupienia - ciekłym lub gazowym. Związki konstytutywne dla modelu, w którym w porach szkieletu występuje gaz opierają się na prawach Boyle'a-Mariotte'a w zakresie oddziaływań mechanicznych, oraz Gay-Lussaca w zakresie oddziaływań termicznych. W oparciu o prawa termodynamiki procesów nieodwracalnych stworzono dwa warianty modelu matematycznego termokonsolidacji, różniące się mechanizmem przewodzenia ciepła w ośrodku dwufazowym: model ośrodka jednofazowego z punktu widzenia przewodzenia ciepła, zawierający jedno równanie przewodzenia ciepła, oraz model, w którym ciepło przewodzone jest przez obie fazy, między którymi następuje również wymiana ciepła, zawierający dwa równania przewodzenia ciepła. W modelu tym chwilowa temperatura szkieletu i płynu porowego mogą być różne, termiczne sprzężenie faz określa współczynnik będący odpowiednikiem współczynnika sprzężenia dynamicznego w zagadnieniach rozchodzenia się fal w ośrodku porowatym. W przypadku założenia procesu izotermicznego, uzyskany model upraszcza się do modelu porosprężystości Biota. Uzyskanych modeli matematycznych użyto w modelach numerycznych odkształceń pod wpływem temperatury próbki gruntu wypełnionej cieczą lub gazem oraz oddziaływania na otoczenie procesu podziemnego zgazowania węgla. Wobec braku możliwości laboratoryjnego wyznaczenia współczynnika termicznego sprzężenia faz, w modelu konsolidacji próbki przedstawiono wyniki dla dwóch skrajnych przypadków: kiedy brak jest termicznego sprzężenia, oraz kiedy sprzężenie jest całkowite (temperatury w obu fazach są jednakowe). W przypadku modelu termokonsolidacji wskutek procesu podziemnego zgazowania węgla użyto modelu matematycznego zawierającego jedno równanie przewodzenia ciepła. W obrębie tego modelu występują jednocześnie trzy fazy - szkielet, oraz w zależności od temperatury i ciśnienia, woda lub para wodna, stanowi on przykład zastosowania uzyskanego modelu do celów inżynierskich.

Summary

This thesis proposes a mathematical model of the thermal consolidation of a porous medium consisting of an elastic skeleton, the pores of which are filled with fluid, which may occur in two states of matter: liquid and gaseous. Constitutive equations for the model, where pores of the skeleton are filled with gas, are based on Boyle-Mariotte's law within the range of mechanical interactions, and Gay-Lussac's law within the range of thermal interactions. According to irreversible thermodynamics, two variants of the mathematical model of thermal consolidation were obtained. These two models differ in the mechanism of heat conduction in the two-phase medium: one variant concerns a one-phase medium from the point of view of heat conduction and contains one heat conduction equation, while in the second variant heat is being conducted by both phases separately, with additional heat transfer between the phases, and is described by two heat conduction equations. In this model the transient temperature of the skeleton and the pore fluid may be different; the thermal coupling of phases is determined by a coefficient which is equivalent to the dynamic coupling coefficient in issues of the propagation of waves in the porous medium. In the case of isothermal process assumption, the obtained model simplifies to Biot's poroelasticity model. Obtained mathematical models were used in a numerical model of consolidation of a heated soil probe filled with liquid or gas, and a model of the impact on the environment of the process of underground coal gasification. Considering the lack of possibility to determine the coefficient of thermal coupling of phases in a laboratory, in the model of a soil probe results for two extreme cases were presented: with no thermal coupling and with full thermal coupling (with the temperatures being equal in both phases). In the case of the model of thermal consolidation resulting from underground coal gasification, a model containing one heat conduction equation was used. Three phases occur simultaneously within the model: the skeleton and—depending on temperature and pressure—water and water vapour. This model is an example of the use of obtained mathematical model for engineering purposes.

Załączniki

- **Załącznik nr 1: skrypt dla modelu próbki**

TITLE 'konsolidacja z temperatura' { the problem identification }

COORDINATES CARTESIAN3

VARIABLES !PRZEMIESZCZENIA Up /x/, Vp /y/, Wp /z/

Up

Vp

Wp

SIG

tp_s

tp_f

SELECT

 painted

 errlim =1e-2

PENWIDTH = 2

threads=8

 deltat=50

DEFINITIONS

! współczynnik sterujący beta {beta=0 oznacza para wodna ,beta=1 oznacza woda}

 beta=0

! Stale wartości odniesienia

 U0=1e-3

 S0=1e6

 tp0=1e4

!Stale materiałowe plynów

 alfa_g=1/(Tp_f*Tp0) !rozszerzalność gazu

 r_gaz=461.5 ! indywidualna stała gazowa J/kg/K (para wodna 461.5, CO2 188.9,
powietrze 287.05)

 Cs=673 ! stała sutherlanda (para 673, CO2 250, powietrze 122)

mipw0=8.53!*1e-6 !lepkość początkowa, powietrze, (para 8.53, CO2 13.75,
powietrze 17.21)

lambda_gaz0=16.2*1e-3 ! (para 16.2, CO2 14.7, powietrze 24.4)

cv_g=1970 !(para 1970, CO2 844, powietrze 1005)

!geometria

rp=0.02 {promień próbki}

WYS=0.076 {wysokość próbki}

X1=0 Y1=0

w=rp*0.1 {Skala powiększenia wycinka obszaru}

!Stale Biota-Darcy'ego [Pa] układ ciecz_cialo stale

fo=0.25 !porowatość f [bezw.]

!gaz

N=2.5e8

A_g=5.0e8

R_g=1e5

!moduł

odkształcenia objętościowego płynu

$Q_g = (1/fo - 1) * R_g$

!wpływ odkształcenia cieczy na

napężenie w szkielecie

$K_g = A_g + 2 * N / 3$

!moduł odkształcenia

objętościowego osrodka

!woda

R_w=1e7!2.15e9

A_w=5.0e8

$Q_w = (1/fo - 1) * R_w$

$K_w = A_w + 2 * N / 3$

$R = (1 - \beta) * R_g + \beta * R_w$

$A = (1 - \beta) * A_g + \beta * A_w$

$Q = (1 - \beta) * Q_g + \beta * Q_w$

$K = (1 - \beta) * K_g + \beta * K_w$

!rozszerzalności temperaturowe

alfa_c=69e-6 !rozszerzalnosc wody
alfa_f=(1-beta)*alfa_g+beta*alfa_c
alfa_s=5e-6 !rozszerzalnosc dla kaolinu

! parametry

sigma=-1e5*fo/S0 !cisnienie atmosferyczne
Tp_1=373/tp0 !temperatura poczatkowa
th_f=tp_f-tp_1
th_s=tp_s-tp_1
g=9.81

! Gestosc plynu

!woda
gw0=1e3 !gestosc wody w 277K
gw_T=gw0/(1+alfa_c*(tp_f*tp0-273))
gw_P=gw0/(1+(sig-siga)*fo*S0/(2.15e9))
gw=gw_T*gw_P/gw0
!gaz
gg=-SIG*S0/fo/r_gaz/Tp_f/Tp0

gf=(1-beta)*gg+beta*gw !gestosc plynu
gs=2.4e3 !gestosc szkieletu

ro1=gs*(1-fo)

ro2=gf*fo

ros=ro1+ro2

kwody=1.5e-8 !wspolczynnik filtracji

miwody=1.79*1e-3/(1+3.37*1e-2*(Tp_f*tp0-273)+2.2*1e-4*(Tp_f*tp0-273)^2) ! lepko?a
wody

! wzor sutherlanda

mipw=1e-6*(mipw0*(273+Cs)*(abs(Tp_f*tp0/273)^1.5))/(Cs+Tp_f*tp0)

!powietrze, dla pary wodnej stala=8.53

$$m_i = (1 - \beta) * m_{ipw} + \beta * m_{iwody}$$

$$k_{pw} = 1.79 * 1e-3 * k_{wody} / m_i$$

$$k_w = (1 - \beta) * k_{pw} + \beta * k_{wody}$$

$$K_f = k_w / f_o / g_f / g$$

$$h_1 = -(SIG * S_0 - \sigma_a * s_0) / g_f / g / f_o + z \quad !wyskosc\ hydrauliczna$$

!predkosc filtracji

$$v_x = -k_w * dx(h_1)$$

$$v_y = -k_w * dy(h_1)$$

$$v_z = -k_w * dz(h_1)$$

$$v_c = -k_w * grad(h_1)$$

!Czasy obliczen

$$T_1 = 1e-2 \quad T_2 = 1e-1 \quad T_3 = 1 \quad T_4 = 10 \quad T_5 = 100 \quad T_6 = 1000 \quad T_7 = 1e4 \quad T_8 = 1e5 \quad T_9 = 1e6 \quad T_{10} = 8.64e6$$

$$T_{11} = 1e7 \quad T_{12} = 1e8 \quad T_{13} = 1e9 \quad T_{14} = 1e10 \quad t_{15} = 1e10 + 10 \quad t_{16} = 1e10 + 100 \quad t_{17} = 1e10 + 1000$$

$$t_{18} = 1e10 + 1e4 \quad t_{19} = 1e10 + 1e5 \quad t_{20} = 1e10 + 1e6$$

!Zwiazki fizyczne i geometryczne

$$e_x = dx(U_p * U_0)$$

$$e_y = dy(V_p * U_0)$$

$$e_z = dz(W_p * U_0)$$

{ odkształcenie poziome wzdluz x,y,z }

$$e = e_x + e_y + e_z$$

{ dylatacja szkieletu }

$$g_{xy} = 0.5 * (dx(V_p * U_0) + dy(U_p * U_0)) \quad g_{xz} = 0.5 * (dx(W_p * U_0) + dz(U_p * U_0))$$

$$g_{yz} = 0.5 * (dy(W_p * U_0) + dz(V_p * U_0)) \quad \{ odkształcenie styczne \}$$

!przewodzenie ciepla

$$cv_s = 700 \quad !J/kg * K \quad \text{cieplo wlasciwe}$$

$$cv_w = 4150$$

$$cv_f = (1 - \beta) * cv_g + \beta * cv_w$$

$$cv = cv_f * f_o + cv_s * (1 - f_o)$$

$$\lambda_{ciecz} = 0.6 \quad !dla\ wody$$

$$\lambda_{gaz} = (\lambda_{gaz0} * (273 + C_s) * (abs(T_{p_f} * tp_0 / 273)^{1.3})) / (C_s + T_{p_f} * tp_0) \quad !wzor$$

$$\text{surtherlanda (powietrze, dla pary wodnej } \lambda_{0} = 16.2)$$

lambda_f=(lambda_gaz*(1-beta)+lambda_ciecz*beta)*fo !plyn

lambda_s=3*(1-fo) !szkielet

!cieplo

qxf=-lambda_f*dx(Tp_f*Tp0) qyf=-lambda_f*dy(Tp_f*Tp0) qzf=-
lambda_f*dz(Tp_f*Tp0)

qf=vector(qxf,qyf,qzf)

qxs=-lambda_s*dx(Tp_s*Tp0) qys=-lambda_s*dy(Tp_s*Tp0) qzs=-
lambda_s*dz(Tp_s*Tp0)

qs=vector(qxs,qys,qzs)

!odkształcenie plynu

teta_gaz=-((sig*s0-siga*s0)+Q*e-
3*alfa_s*Q*th_s*tp0+alfa_f*sig*s0*th_f*tp0)/(Q*e-sig*s0-3*Q*alfa_s*th_s*tp0)

teta_ciecz=(SIG*S0-siga*S0)/R-
Q*e/R+3*Q*alfa_s*(Th_s*tp0)/R+alfa_f*(Th_f*tp0)

teta=teta_gaz*(1-beta)+teta_ciecz*beta

Sx=2*N*ex+A*e+Q*teta-3*K*alfa_s*(th_s*tp0)-alfa_f*Q*(th_f*tp0)

Sy=2*N*ey+A*e+Q*teta-3*K*alfa_s*(th_s*tp0)-alfa_f*Q*(th_f*tp0)

Sz=2*N*ez+A*e+Q*teta-3*K*alfa_s*(th_s*tp0)-alfa_f*Q*(th_f*tp0)

Txy=2*N*gxy Txz=2*N*gxz

Tyz=2*N*gyz

c_s=ro1*cv_s

c_f=ro2*cv_f

c_fs=0!(c_s*lambda_f-c_f*lambda_s)/(lambda_s-lambda_f)

transfer("para2a.xfr", Up_1, Vp_1 , Wp_1 , SIG_1 , tp_s_1,tp_f_1)

!warunki poczatkowe

INITIAL VALUES Up=Up_1 Vp=Vp_1 Wp=Wp_1 SIG=SIG_1

tp_f=tp_1 tp_s=tp_1

EQUATIONS

$$Up: dx(Sx)+dy(Txy)+dz(Txz)+dx((SIG)*S0)=0$$

$$Vp: dx(Txy)+dy(Sy)+dz(Tyz)+dy((SIG)*S0)=0$$

$$Wp: dx(Txz)+dy(Tyz)+dz(Sz)+dz((SIG)*S0)-ros*g=0$$

$$SIG: div(grad(SIG))=dt(teta-e)/Kf/S0!$$

Tp_s:

$$div(grad(th_s)*lambda_s)=(tp_s)*3*K*alfa_s*dt(e)+(tp_s)*3*Q*alfa_s*dt(teta)+Tp_s/Tp_{_1}*(c_s*dt(th_s)+c_{fs}*dt(th_f))$$

Tp_f:

$$div(grad(th_f)*lambda_f)=(tp_f)*Q*alfa_f*dt(e)+(tp_f)*R*alfa_f*(dt(teta))+Tp_f/Tp_{_1}*(c_f*dt(th_f)+c_{fs}*dt(th_s))$$

EXTRUSION

SURFACE "Bottom" z=0

LAYER "Bottom soil"

SURFACE "Top" z=WYS

BOUNDARIES

SURFACE "Bottom" load(sig)=0 value(Up)=0 value(Vp)=0 Value(Wp)=0

value(tp_f)=tp_1+swage(t-110,0,20/tp0,10) value(tp_s)=tp_1+swage(t-110,0,20/tp0,10)

SURFACE "Top" value(SIG)=-1.013*P1*fo/S0 value(Up)=0 value(Vp)=0

load(Wp)=0 load(tp_f)=0 load(tp_s)=0

REGION 1

LAYER "Bottom soil"

start(X1,Y1-rp) natural(SIG) =0 load(Up)=0 load(Vp)=0

load(Wp)=0 load(tp_f)=0 load(tp_s)=0

arc(center=X1,Y1) angle 360

time 0 to 8000

MONITORS

for cycle=2

contour (tp_f*tp0) On x=0 as "temperatura plynu"

PLOTS

```

For t={T1,T2,T3,}t4,20,50,60,70,80,85,90,T5,105,
110,115,120,125,130,135,140,145,150,160,170,180,190,200,300,400,500,600,700,800,900
,1000,1500,2000,2500,3000,4000,5000,6000,7000,8000
grid(x+Up,y+Vp,z+Wp)
vector(qs) ON y=0 as "Przep3yw ciep3a szkielet" export format "#t#r,#i" file "qs2.txt"
vector(qf) ON y=0 as "Przep3yw ciep3a plyn" export format "#t#r,#i" file "qf2.txt"
history (tp_s*tp0-273,tp_f*tp0-273) at (0,0,WYS/2) as "Ewolucja w czasie temperatury
szkieletu i plynu" export format "#t#r,#i" file "temp2.txt"
history (vz) at {(0,0,0) ,} (0,0,Wys/4) , (0,0,WYS/2) , (0,0,3*WYS/4){ , (0,0,WYS)} as
"Ewolucja w czasie przedkosci vz plynu" export format "#t#r,#i" file "predkosc2.txt"
vtk(up*u0,vp*u0,wp*u0,sig*s0,tp_s*tp0,tp_f*tp0,sx,sz,e,teta,vx,vy,vz,vc,qxs,qys,qzs,qs,q
xf,qyf,qzf,qf,gf)
end

```

- **Załącznik nr 2: skrypt dla modelu procesu podziemnego zgazowania węgla**

```

TITLE 'zgazowanie'
COORDINATES CARTESIAN3
VARIABLES
    Up
    Vp
    Wp
    p
    tp

SELECT
    painted
    errlim =0.01
    ngrid=22
    threads=16

DEFINITIONS
! Stale wartosci odniesienia
    U0=1e-3
    p0=1e6

```

$$tp0=1e3$$

$$tt=1e6$$

! Przedziały czasów związanych ze zgazowaniem węgla brunatnego

$$ws=0.15$$

$$T0=1.5e8$$

$$T1=1.5e8+ws*1e8$$

$$T2=1.5e8+ws*2e8$$

$$T3=1.5e8+ws*3e8$$

$$T4=1.5e8+ws*4e8$$

$$T5=1.5e8+ws*5e8$$

!geometria

!współczynniki dla powierzchni 1 (strop w0) - piaskowiec

$$w1a0=8.8$$

$$w1a1=0.0123$$

$$w1a2=-0.013833333$$

$$w1a3=-4.56222E-05$$

$$w1a4=-0.00002$$

$$w1a5=2.46E-05$$

$$w1a6=5.66667E-08$$

$$w1a7=2.20667E-08$$

$$w1a8=-1.8E-11$$

$$w1a9=7.6E-09$$

$$w1a10=-9.86667E-09$$

$$w1a11=-1.80444E-11$$

$$w1a12=3.73333E-15$$

$$w1a13=1.02222E-12$$

$$w1a14=-6.66667E-15$$

$$w1a15=2.84444E-18$$

!powierzchnia 2 strop warstwy 2 - piasek.zwir

$$w2a0=26.5$$

$$w2a1=0.003233333$$

$$w2a2=0.0164$$

w2a3=0.000132467

w2a4=-0.0000148

w2a5=-3.1E-05

w2a6=-2.40133E-07

w2a7=-2.22467E-07

w2a8=4.656E-10

w2a9=1.02667E-08

w2a10=1.4E-08

w2a11=9.33333E-11

w2a12=-1.96533E-13

w2a13=9.26667E-11

w2a14=-2.07467E-13

w2a15=9.01333E-17

!powierzchnia 3 strop warstwy ilu

!powierzchnia 4 strop wegla

!wspolczynniki dla powierzchni 5 strop ilu

w5a0=62.7

w5a1=0.0382

w5a2=-0.031566667

w5a3=-1.30778E-05

w5a4=-5.86E-05

w5a5=6.92E-05

w5a6=-2.4E-09

w5a7=-1.98467E-07

w5a8=3.776E-10

w5a9=2.12E-08

w5a10=-3.37333E-08

w5a11=2.03111E-11

w5a12=-1.93333E-13

w5a13=1.38844E-10

w5a14=-2.496E-13

w5a15=1.19822E-16

!wspolczynniki dla powierzchni 6 strop piasku ilastego

w6a0=94.3

w6a1=0.023533333

w6a2=-0.0169

w6a3=-0.000644456

w6a4=-5.7E-05

w6a5=1E-06

w6a6=1.31673E-06

w6a7=1.20867E-06

w6a8=-2.4008E-09

w6a9=2.54667E-08

w6a10=4E-09

w6a11=-5.90578E-10

w6a12=1.06773E-12

w6a13=-5.32044E-10

w6a14=1.04827E-12

w6a15=-4.65422E-16

!wspolczynniki dla powierzchni 7 strop ilu II

w7a0=134.5

w7a1=-0.014333333

w7a2=0.1097

w7a3=0.000429078

w7a4=0.0000276

w7a5=-0.0002028

w7a6=-1.10507E-06

w7a7=-8.706E-07

w7a8=2.2904E-09

w7a9=-1.38667E-08

w7a10=9E-08

w7a11=5.11156E-10

w7a12=-1.0712E-12

w7a13=4.10756E-10

w7a14=-1.08853E-12

w7a15=5.12711E-16

!wspolczynniki dla powierzchni 8 (strop piasku)

w8a0=176.2

w8a1=-0.0832

w8a2=-0.012

w8a3=0.0006006

w8a4=0.000163

w8a5=3.44E-05

w8a6=-1.05053E-06

w8a7=-1.10073E-06

w8a8=1.8588E-09

w8a9=-7.4E-08

w8a10=-1.92E-08

w8a11=4.44533E-10

w8a12=-7.73867E-13

w8a13=5.11867E-10

w8a14=-8.51467E-13

w8a15=3.52E-16

!wspolczynniki dla powierzchni 9 (teren)

w9a0=198.7

w9a1=-0.021133333

w9a2=-0.007866667

w9a3=0.0003156

w9a4=0.0000326

w9a5=-8.2E-06

w9a6=-5.92667E-07

w9a7=-4.792E-07

w9a8=9.312E-10

w9a9=-1.34667E-08

w9a10=7.86667E-09

w9a11=2.56E-10

$$w9a12=-4E-13$$

$$w9a13=1.856E-10$$

$$w9a14=-3.71733E-13$$

$$w9a15=1.6E-16$$

!rownania dla warstw

$$z1=w1a0+w1a1*x+w1a2*y+w1a3*x*y+w1a4*x^2+w1a5*y^2+w1a6*x^2*y+w1a7*x*y^2+w1a8*x^2*y^2+w1a9*x^3+w1a10*y^3+w1a11*x^3*y+w1a12*x^3*y^2+w1a13*x*y^3+w1a14*x^2*y^3+w1a15*x^3*y^3$$

$$z2=w2a0+w2a1*x+w2a2*y+w2a3*x*y+w2a4*x^2+w2a5*y^2+w2a6*x^2*y+w2a7*x*y^2+w2a8*x^2*y^2+w2a9*x^3+w2a10*y^3+w2a11*x^3*y+w2a12*x^3*y^2+w2a13*x*y^3+w2a14*x^2*y^3+w2a15*x^3*y^3$$

$$z3=50$$

$$!z3=w3a0+w3a1*x+w3a2*y+w3a3*x*y+w3a4*x^2+w3a5*y^2+w3a6*x^2*y+w3a7*x*y^2+w3a8*x^2*y^2+w3a9*x^3+w3a10*y^3+w3a11*x^3*y+w3a12*x^3*y^2+w3a13*x*y^3+w3a14*x^2*y^3+w3a15*x^3*y^3$$

$$z4=53!w4a0+w4a1*x+w4a2*y+w4a3*x*y+w4a4*x^2+w4a5*y^2+w4a6*x^2*y+w4a7*x*y^2+w4a8*x^2*y^2+w4a9*x^3+w4a10*y^3+w4a11*x^3*y+w4a12*x^3*y^2+w4a13*x*y^3+w4a14*x^2*y^3+w4a15*x^3*y^3$$

$$z5=w5a0+w5a1*x+w5a2*y+w5a3*x*y+w5a4*x^2+w5a5*y^2+w5a6*x^2*y+w5a7*x*y^2+w5a8*x^2*y^2+w5a9*x^3+w5a10*y^3+w5a11*x^3*y+w5a12*x^3*y^2+w5a13*x*y^3+w5a14*x^2*y^3+w5a15*x^3*y^3$$

$$z6=w6a0+w6a1*x+w6a2*y+w6a3*x*y+w6a4*x^2+w6a5*y^2+w6a6*x^2*y+w6a7*x*y^2+w6a8*x^2*y^2+w6a9*x^3+w6a10*y^3+w6a11*x^3*y+w6a12*x^3*y^2+w6a13*x*y^3+w6a14*x^2*y^3+w6a15*x^3*y^3$$

$$z7=w7a0+w7a1*x+w7a2*y+w7a3*x*y+w7a4*x^2+w7a5*y^2+w7a6*x^2*y+w7a7*x*y^2+w7a8*x^2*y^2+w7a9*x^3+w7a10*y^3+w7a11*x^3*y+w7a12*x^3*y^2+w7a13*x*y^3+w7a14*x^2*y^3+w7a15*x^3*y^3$$

$$z8=w8a0+w8a1*x+w8a2*y+w8a3*x*y+w8a4*x^2+w8a5*y^2+w8a6*x^2*y+w8a7*x*y^2+w8a8*x^2*y^2+w8a9*x^3+w8a10*y^3+w8a11*x^3*y+w8a12*x^3*y^2+w8a13*x*y^3+w8a14*x^2*y^3+w8a15*x^3*y^3$$

!Porowatosc

fo

fo1=0.15 ! piaskowiec
fo2=0.28 !zwir
fo3=0.31 !il
fo4=0.2 !wegiel
fo5=0.4 !il
fo6=0.32 !Piasek
fo7=0.37 ! il
fo8=0.28 !il pylasty

! parametry

sig=-p*p0*fo

pa=1e5/p0

sig_a=-pa*p0*fo !cisnienie atmosferyczne

Tp_1=283/tp0+(5-(0.025*z))/Tp0 !temperatura poczatkowa

th=tp-tp_1

g=9.81! m/s²

mn=1e4

!rownanie rownowagi woda/para wodna

para=if abs(p)<22e6 then (373*40626/(40626-373*8.3146*ln(abs(p/pa)))) else 647

beta=if t>1e7 and tp>para/tp0 then 0 else 1

str=(1-beta)²+beta*5

N

N1=2.31E9

N2=3.90E6

N3=1.32E7

N4=8E8

N5=1.28E6

N6=1.30E6

N7=2.50E6

N8=3.30E6

A_g
wypelnionego gazem

! stala lamego lambda dla osrodka

$$A_g1=5e9$$

$$A_g2=1.3e8$$

$$A_g3=6.2e8$$

$$A_g4=2e9$$

$$A_g5=7.8e7$$

$$A_g6=1.15e8$$

$$A_g7=1.5e8$$

$$A_g8=1.3e8$$

A_w

$$A_w1=3.46E9$$

$$A_w2=2.40E7$$

$$A_w3=6.91E7$$

$$A_w4=8.70E8$$

$$A_w5=3.42E7$$

$$A_w6=3.00E7$$

$$A_w7=1.85E7$$

$$A_w8=1.50E7$$

Q_g=1e5 !wplyw odkształcenia cieczy na naprezenie w szkielecie

$$K_g=A_g+2*N/3$$

!modul odkształcenia

objetosciowego osrodka

R_w ! dV_c/dP

$$R_w1=2.21e9$$

$$R_w2=2.21e9$$

$$R_w3=2.21e9$$

$$R_w4=2.21e9$$

$$R_w5=2.21e9$$

$$R_w6=2.21e9$$

$$R_w7=2.21e9$$

$$R_w8=2.21e9$$

$$Q_w=1.76e7!(1/fo-1)*R_w$$

$$K_w=A_w+2*N/3$$

$$A=(1-beta)*A_g+beta*A_w$$

$$Q=(1-beta)*Q_g+beta*Q_w$$

$$K=(1-beta)*K_g+beta*K_w$$

!rozszerzalnosci temperaturowe

$$\text{alfa}_c=69e-6 \text{ !rozszerzalnosc wody}$$

$$\text{alfa}_g=1/(T_p*T_{p0}) !(3660.9+12.7*\text{sig}*s_0*fo)*10^{(-6)} \text{ !rozszerzalnosc gazu}$$

$$\text{alfa}_f=(1-beta)*\text{alfa}_g+beta*\text{alfa}_c$$

!szkielet

alfa_s

$$\text{alfa}_{s1}=11.6e-6 \text{ !rozszerzalnosc dla kaolinu}$$

$$\text{alfa}_{s2}=6e-6$$

$$\text{alfa}_{s3}=5.8e-6$$

$$\text{alfa}_{s4}=5e-6$$

$$\text{alfa}_{s5}=5.9e-6$$

$$\text{alfa}_{s6}=6e-6$$

$$\text{alfa}_{s7}=6.1e-6$$

$$\text{alfa}_{s8}=6e-6$$

! Gestosc plynu

 !woda

$$g_{w0}=1e3 \text{ !gestosc wody w 277K}$$

$$g_{wT}=g_{w0}/(1+\text{alfa}_c*(t_p*t_{p0}-273))$$

$$g_{wP}=g_{w0}/(1+(\text{sig}-\text{sig}_a)*fo/(2.15e9))$$

$$g_w=g_{wT}$$

 !gaz

$$r_{\text{gaz}}=461.5 \text{ ! indywidualna stala gazowa dla pary wodnej 461.5 J/kg/K)}$$

gg=p*p0/r_gaz/Tp/Tp0
gf0=(1-beta)*gg+beta*gw0
gf=(1-beta)*gg+beta*gw !gestosc plynu

gs

gs1=2.6e3
gs2=2.53e3
gs3=2.38e3
gs4=1.21e3
gs5=2.62e3
gs6=2.49e3
gs7=2.71e3
gs8=2.66e3

ro1=gs*(1-fo)

ro2=gf*fo

ros=ro1+ro2

! Filtracja wody

P1=1e5

P2=1.2e5

P3=1e6

kwody

!wspolczynnik filtracji

kwody1=5e-7

kwody2=3e-6

kwody3=3e-8

kwody4=5e-9

kwody5=6e-8

kwody6=1.2e-6

kwody7=7e-8

kwody8=5e-8

miwody=1.79*1e-3/(1+3.37*1e-2*(Tp*tp0-273)+2.2*1e-4*(Tp*tp0-273)^2) !

lepkod'z'wody

! wzor sutherlanda

$$Cs=673 \text{ !dla pary wodne } Cs=673$$

$mipw=(8.53*1e-6*(273+Cs)*(abs(Tp*tp0/273)^{1.5}))/((Cs+Tp*tp0))$!dla pary wodnej stala=8.53

$$mi=(1-beta)*mipw+beta*miwody$$

$$kpw=1.79*1e-3*kwody/mi$$

$$kw=(1-beta)*kpw+beta*kwody$$

$$Kf=kw/fo/gf/g$$

$$h1=p*p0/(gf0*g)+z \text{ !wyskosc hydrauliczna}$$

$$p_1=(pa*p0+gw*g*(184-z))/p0$$

!predkosc filtracji

$$vx=-kw*\sqrt{dx(h1)}$$

$$vy=-kw*\sqrt{dy(h1)}$$

$$vz=-kw*\sqrt{dz(h1)}$$

$$vc=\text{vector}(vx,vy,vz)$$

!Zwiazki fizyczne i geometryczne

$$ex=dx(Up*U0)$$

$$ey=dy(Vp*U0)$$

$$ez=dz(Wp*U0)$$

{odkształcenie poziome wzdłuż x,y,z}

$$e=ex+ey+ez$$

{dylatacja szkieletu}

$$gxy=0.5*(dx(Vp*U0)+dy(Up*U0)) \quad gxz=0.5*(dx(Wp*U0)+dz(Up*U0))$$

$$gyz=0.5*(dy(Wp*U0)+dz(Vp*U0)) \text{ {odkształcenie styczne}}$$

!przewodzenie ciepła

cv_s

!J/kg*K ciepło właściwe

$$cv_s1=1100$$

$$cv_s2=639$$

$$cv_s3=566$$

$$cv_s4=1250$$

$$cv_s5=481$$

$$cv_s6=889$$

$$cv_s7=514$$

$$cv_s8=612$$

cv_g=1970 !para wodna 1970

cv_w=4150

$$cv_f=(1-\beta)*cv_g+\beta*cv_w$$

$$cv=(cv_f*ro2+cv_s*ro1)$$

lambda_ciecz=0.6 !dla wody

$$\lambda_{gaz}=(16.2*10^{-3}*(273+T_s)*(abs(T_p*tp0/273)^{1.5}))/((C_s+T_p*tp0)) \text{ !wzor}$$

surtherlanda (dla pary wodnej lambda0=16.2)

$$\lambda_f=(\lambda_{gaz}*(1-\beta)+\lambda_{ciecz}*\beta)*fo \text{ !plyn}$$

lambda_s !szkielet

$$\lambda_{s1}=3.1$$

$$\lambda_{s2}=2.5$$

$$\lambda_{s3}=2.1$$

$$\lambda_{s4}=0.5$$

$$\lambda_{s5}=2.9$$

$$\lambda_{s6}=3.5$$

$$\lambda_{s7}=1.4$$

$$\lambda_{s8}=1.9$$

$$\lambda=\lambda_f+\lambda_s$$

!cieplo

$$q_x=-\lambda dx(T_p*tp0) \quad q_y=-\lambda dy(T_p*tp0) \quad q_z=-$$

$$\lambda dz(T_p*tp0)$$

$$qq=\text{vector}(q_x,q_y,q_z)$$

!odkształcenie plynu

$$\theta_{gaz}=(\sigma*fo+\theta*tp0*\sigma*\alpha_f-Q*fo*e+Q*\theta*tp0*fo*\alpha_s)/(\sigma+\sigma*fo-Q*fo*e+Q*\theta*tp0*fo*\alpha_s)$$

$$\theta_{ciecz}=(\sigma-\sigma)/R_w-Q*e/R_w+3*Q*\alpha_s*(\theta*tp0)/R_w+\alpha_f*(\theta*tp0)$$

$$\theta=\theta_{gaz}*(1-\beta)+\theta_{ciecz}*\beta$$

$$S_x=2*N*ex+A*e+Q*\theta-3*K*\alpha_s*(\theta*tp0)-\alpha_f*Q*(\theta*tp0)$$

$$S_y = 2 * N * e_y + A * e + Q * \text{teta} - 3 * K * \text{alfa}_s * (\text{th} * \text{tp}_0) - \text{alfa}_f * Q * (\text{th} * \text{tp}_0)$$

$$S_z = 2 * N * e_z + A * e + Q * \text{teta} - 3 * K * \text{alfa}_s * (\text{th} * \text{tp}_0) - \text{alfa}_f * Q * (\text{th} * \text{tp}_0)$$

{ Naprezenie normalne }

$$T_{xy} = 2 * N * g_{xy}$$

$$T_{xz} = 2 * N * g_{xz}$$

$$T_{yz} = 2 * N * g_{yz}$$

{ Naprezenie nienormalne }

$$R_g = p_a * p_0 / (1 + \text{teta}_g)$$

$$R = (1 - \text{beta}) * R_g + \text{beta} * R_w$$

transfer("zgazowanie0_01_1.dat",

SIG_0, Up_0, Wp_0, Vp_0, Tp_0, Sx_0, Sz_0, vx_0, vy_0, vz_0)

$$u_1 = (u_p - u_{p_0}) * u_0$$

$$u_2 = (v_p - v_{p_0}) * u_0$$

$$u_3 = (w_p - w_{p_0}) * u_0$$

$$v_1 = v_x - v_{x_0}$$

$$v_2 = v_y - v_{y_0}$$

$$v_3 = v_z - v_{z_0}$$

INITIAL VALUES Up=Up_0 Vp =Vp_0 Wp=Wp_0 p=p_1 tp=tp_1

EQUATIONS

$$\text{Up: } dx(S_x) + dy(T_{xy}) + dz(T_{xz}) + dx((\text{SIG})) = 0$$

$$\text{Vp: } dx(T_{xy}) + dy(S_y) + dz(T_{yz}) + dy((\text{SIG})) = 0$$

$$\text{Wp: } dx(T_{xz}) + dy(T_{yz}) + dz(S_z) + dz((\text{SIG})) - \text{ros} * g = 0$$

$$\text{p: } \text{div}(\text{grad}(\text{sig})) = dt(\text{teta} - e) / K_f! + \text{gamw} * dt(v_z)$$

Tp:

$$\text{div}(\text{grad}(\text{th}) * \text{lambda}) = \text{tp} * (3 * K * \text{alfa}_s + Q * \text{alfa}_f) * dt(e) + \text{tp} * (3 * Q * \text{alfa}_s + R * \text{alfa}_f) * dt(\text{teta}) + \text{tp} / \text{tp}_1 * \text{cv} * dt(\text{th})$$

EXTRUSION

SURFACE "Bottom" z=0

LAYER "Bottom soil"

surface "Strop warstwy1" z=z1

layer "Warstwa 2"

surface "Strop warstwy2" z=z2

```

        layer "Warstwa 3"
    surface "Strop warstwy3" z=z3
        layer "Warstwa 4"
    surface "Strop warstwy4" z=z4
        layer "Warstwa 5"
    surface "Strop warstwy5" z=z5
        layer "Warstwa 6"
    surface "Strop warstwy6" z=z6
        layer "Warstwa 7"
    surface "Strop warstwy7" z=z7
        layer "Warstwa 8"
SURFACE "Top" z=z8

```

BOUNDARIES

```

SURFACE "Bottom" value(p)=p_1      value(Up)=0  value(Vp)=0  Value(Wp)=0
value(tp)=tp_1  !sig_1=(sigma*s0-fo*gw0*g*(180-53))/S0
surface "Strop warstwy1" load(p)=0load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0 load(tp)=0
    surface "Strop warstwy2" load(p)=0load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0
load(tp)=0
    surface "Strop warstwy3" load(p)=0load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0
load(tp)=0
    surface "Strop warstwy4" load(p)=0load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0
load(tp)=0
    surface "Strop warstwy5" load(p)=0load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0
load(tp)=0
    surface "Strop warstwy6" load(p)=0load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0
load(tp)=0
    surface "Strop warstwy7" load(p)=0load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0
load(tp)=0
SURFACE "Top" value(p)=p_1  value(Up)=0  value(Vp)=0  load(Wp)=0
{value(Wp)=-0.02*t/1e9/U0}  value(tp)=tp_1

```

```

REGION 1    { For each material region }
  LAYER "Bottom soil"          N=N1 A_g=A_g1 R_w=R_w1 A_w=A_w1
Alfa_s=Alfa_s1 gs=gs1 kwody=kwody1 cv_s=cv_s1 lambda_s=lambda_s1 fo=fo1
  layer "Warstwa 2"           N=N2 A_g=A_g2 R_w=R_w2 A_w=A_w2
Alfa_s=Alfa_s2 gs=gs2 kwody=kwody2 cv_s=cv_s2 lambda_s=lambda_s2 fo=fo2
  layer "Warstwa 3"           N=N3 A_g=A_g3 R_w=R_w3 A_w=A_w3
Alfa_s=Alfa_s3 gs=gs3 kwody=kwody3 cv_s=cv_s3 lambda_s=lambda_s3 fo=fo3
  layer "Warstwa 4"           N=N4 A_g=A_g4 R_w=R_w4 A_w=A_w4
Alfa_s=Alfa_s4 gs=gs4 kwody=kwody4 cv_s=cv_s4 lambda_s=lambda_s4 fo=fo4
  layer "Warstwa 5"           N=N5 A_g=A_g5 R_w=R_w5 A_w=A_w5
Alfa_s=Alfa_s5 gs=gs5 kwody=kwody5 cv_s=cv_s5 lambda_s=lambda_s5 fo=fo5
  layer "Warstwa 6"           N=N6 A_g=A_g6 R_w=R_w6 A_w=A_w6
Alfa_s=Alfa_s6 gs=gs6 kwody=kwody6 cv_s=cv_s6 lambda_s=lambda_s6 fo=fo6
  layer "Warstwa 7"           N=N7 A_g=A_g7 R_w=R_w7 A_w=A_w7
Alfa_s=Alfa_s7 gs=gs7 kwody=kwody7 cv_s=cv_s7 lambda_s=lambda_s7 fo=fo7
  layer "Warstwa 8"           N=N8 A_g=A_g8 R_w=R_w8 A_w=A_w8
Alfa_s=Alfa_s8 gs=gs8 kwody=kwody8 cv_s=cv_s8 lambda_s=lambda_s8 fo=fo8
  start(0,0)  load(p)=0          value(Up)=0  value(Vp)=0  load(Wp)=0
value(tp)=tp_1
line to (1500,0) to (1500,1500) to (0,1500) to close

```

limited region 2

```

  surface "Strop warstwy3" value(p)=p_1 !
load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0  value(Tp)=800*swage(t-T0,0,1,tt)*swage(t-
T3,1,0,15*tt)/Tp0+Tp_1
  surface "Strop warstwy4" load(p)=0
load(Up)=0  load(Vp)=0  load(Wp)=0  value(Tp)=800*swage(t-T0,0,1,tt)*swage(t-
T3,1,0,15*tt)/Tp0+Tp_1
  layer "Warstwa 4" R_w=R_w4
A_w=A_w4-0.5*A_w4*swage(t-T0,0,1,tt)-0.49*A_w4*swage(t-T1,0,1,tt)
Alfa_s=Alfa_s4 gs=gs4 kwody=kwody4 cv_s=cv_s4 lambda_s=lambda_s4 fo=fo4
N=N4-0.5*N4*swage(t-T0,0,1,tt)-0.49*N4*swage(t-T1,0,1,tt)
A_g=A_g4-0.5*A_g4*swage(t-T0,0,1,tt)-0.49*A_g4*swage(t-T1,0,1,tt)

```

start (700,745) value(p)=p_1 load(U_p)=0 load(V_p)=0 load(W_p)=0 load(tp)=0 line to (730,745) to (730,755) to (700,755) to close

limited region 3

surface "Strop warstwy3" value(p)=p_1
load(U_p)=0 load(V_p)=0 load(W_p)=0 value(T_p)=800*swage(t-T1,0,1,tt)*swage(t-T4,1,0,15*tt)/Tp0+Tp_1

surface "Strop warstwy4" load(p)=0
load(U_p)=0 load(V_p)=0 load(W_p)=0 value(T_p)=800*swage(t-T1,0,1,tt)*swage(t-T4,1,0,15*tt)/Tp0+Tp_1

layer "Warstwa 4"
N=N4-0.5*N4*swage(t-T1,0,1,tt)-0.49*N4*swage(t-T2,0,1,tt)
A_g=A_{g4}-0.5*A_{g4}*swage(t-T1,0,1,tt)-0.49*A_{g4}*swage(t-T2,0,1,tt)
A_w=A_{w4}-0.5*A_{w4}*swage(t-T1,0,1,tt)-0.49*A_{w4}*swage(t-T2,0,1,tt)
R_w=R_{w4} Alfa_s=Alfa_{s4} gs=gs4 kwody=kwody4 cv_s=cv_{s4} lambda_s=lambda_{s4}
fo=fo4

start (730,745) value(p)=p_1 load(U_p)=0 load(V_p)=0 load(W_p)=0 load(tp)=0 line to (760,745) to (760,755) to (730,755) to close

limited region 4

surface "Strop warstwy3" value(p)=p_1
load(U_p)=0 load(V_p)=0 load(W_p)=0 value(T_p)=800*swage(t-T2,0,1,tt)*swage(t-T5,1,0,15*tt)/Tp0+Tp_1

surface "Strop warstwy4" load(p)=0
load(V_p)=0 load(W_p)=0 value(T_p)=800*swage(t-T2,0,1,tt)*swage(t-T5,1,0,15*tt)/Tp0+Tp_1

layer "Warstwa 4"
N=N4-0.5*N4*swage(t-T2,0,1,tt)-0.49*N4*swage(t-T3,0,1,tt)
R_w=R_{w4} Alfa_s=Alfa_{s4} gs=gs4 kwody=kwody4 cv_s=cv_{s4} lambda_s=lambda_{s4}
fo=fo4

A_g=A_{g4}-0.5*A_{g4}*swage(t-T2,0,1,tt)-0.49*A_{g4}*swage(t-T3,0,1,tt)
A_w=A_{w4}-0.5*A_{w4}*swage(t-T2,0,1,tt)-0.49*A_{w4}*swage(t-T3,0,1,tt)

start (760,745) value(p)=p_1 load(U_p)=0 load(V_p)=0 load(W_p)=0 load(tp)=0 line to (800,745) to (800,755) to (760,755) to close

time 0 to 1e10

MONITORS

for cycle=20000

contour (tp*tp0) On y=750 zoom(0,0,1500,200) as "temperatura"

PLOTS

for

t=0,1e8,T0,T1,T2,T3,T4,T5,5e8,1e9,1.1e9,1.2e9,1.3e9,1.4e9,1.5e9,2e9,3e9,4e9,5e9,1e10

history ((tp*tp0-273)) at (700,750,50),(730,750,50),(760,750,50),(800,750,50)

{window(1e9,1e10) }as "Ewolucja w czasie temperatury" export format "#t#r,#i" file "temp.txt"

history (A) at (715,750,51),(745,750,51),(780,750,51) as "Ewolucja w czasie współczynnika A" export format "#t#r,#i" file "histA.txt"

history(u3) at (750,750,170), (750,750,130), (750,750,110), (750,750,90), (750,750,70), (750,750,55) export format "#t#r,#i" file "przem-pion.txt"

vtk(tp*tp0,gf,kw,v1,v2,v3,lambda, qx,qy,qz,p*p0,sig, sx,sy,sz,u1,u2,u3,e,teta)

end