PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 174
Finanse – nowe wyzwania teorii i praktyki
Rynek finansowy
2011

Bartosz Kaszuba
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

PRAKTYCZNE PROBLEMY W TEORII PORTFELA[1]

Streszczenie: W pracy zostały opisane najważniejsze zagadnienia teorii portfela Markowitza. Główny nacisk położono na elementy problematyczne na podłożu statystycznym (związane z estymacją parametrów portfela) i praktycznym (związane z niespełnieniem założeń lub dodatkowymi ograniczeniami). W pracy wykazano, że wykorzystanie klasycznych estymatorów albo klasycznych zagadnień optymalizacyjnych naraża inwestora na duże ryzyko estymacji czy ryzyko modelu, co powoduje, że otrzymany portfel efektywny ma słabe właściwości praktyczne.

Słowa kluczowe: teoria portfela, zastosowanie teorii Markowitza, klasyczne metody estymacji.

1. Wstęp

Jednym z najważniejszych problemów w przypadku inwestycji w wiele aktywów jest określenie składu portfela. Gdy dla każdego składnika portfela zostanie określone ryzyko i oczekiwany dochód, należy ustalić, jaką część kapitału należy zainwestować w poszczególne aktywa, aby osiągnąć jak najniższe ryzyko i jak najwyższy dochód. Jeżeli dodatkowo poszczególne składniki nie są niezależne, przy określeniu udziałów powinien zostać uwzględniony stopień zależności pomiędzy poszczególnymi aktywami.

Rozwiązaniem powyższego problemu jest jednoczesne uwzględnienie miar ryzyka, dochodu i zależności pomiędzy aktywami, w momencie tworzenia portfela. Takie podejście zostało zaproponowane przez H. Markowitza w 1952 r., w pracy zatytułowanej *Portfolio Selection*, a następnie zostało rozwinięte siedem lat później w książce o tym samym tytule [Markowitz 1952, 1959]. W 1990 r. uhonorowano Markowitza Nagrodą Nobla[2], na co w dużym stopniu miała wpływ jego teoria zapoczątkowana w 1952 r. Niestety, rozwiązanie powyższego zagadnienia, chociaż

[1] Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.

[2] Wraz z Harrym Markowitzem Nagrodę Nobla za nowatorskie prace nad ekonomiczną teorią finansów i finansowaniem przedsiębiorstw otrzymali Merton Miller i William Sharpe.

teoretycznie może być poprawne, w praktyce może spowodować wiele problemów, których opis został przedstawiony w niniejszej pracy.

W części 2 opisano podstawowe parametry portfeli (ryzyko i stopę zwrotu), metody ich estymacji oraz podstawowe problemy związane z klasyczną estymacją. W części 3 opisano różne zagadnienia optymalizacji portfela wraz z opisem problemu w przypadku zastąpienia klasycznej metody estymacji innymi metodami. W części 4 przedstawiono inne miary służące do szacowania ryzyka wraz z opisem problemu stosowania momentów wyższych rzędów w teorii portfela. W dalszej części pracy opisano i zinterpretowano założenia w teorii portfela Markowitza (część 5) oraz dokonano ich weryfikacji w praktyce (część 6). W części 7 opisano dodatkowe elementy (ograniczenia) teorii portfela w praktyce.

2. Klasyczna estymacja stopy zwrotu i ryzyka portfela

W teorii portfela Markowitza stopy zwrotu aktywów (wchodzących w skład portfela) traktowane są jako zmienne losowe [Markowitz 1952, s. 81]. Jeżeli znane są rozkłady stóp zwrotu poszczególnych aktywów, to korzystając z rachunku prawdopodobieństwa, można wyznaczyć poszczególne parametry tych rozkładów – oczekiwaną stopę zwrotu i wariancję.

Jeżeli rozkład stóp zwrotu nie jest znany, to można zastosować teorię estymacji w celu oszacowania parametrów μ_i, σ_i oraz σ_i^2. Do oszacowania tych parametrów posłużą szeregi czasowe historycznych zrealizowanych stóp zwrotu poszczególnych aktywów wchodzących w skład portfela.

Przyjmując, że realizacjami próby losowej $\mathbf{R_i} = (R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{in})$ z rozkładu stóp zwrotu i-tego aktywa są zrealizowane stopy zwrotu $\mathbf{r_i} = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})$, wtedy parametr μ_i może być oszacowany w sposób następujący:

$$\hat{\mu}_i = \overline{r_i} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ti}. \tag{1}$$

Oszacowanie parametru σ_i^2 dane jest następującym wzorem:

$$\hat{\sigma}_i^2 = s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_{ti} - \hat{\mu}_i)^2. \tag{2}$$

Gdy stopy zwrotu mają rozkład normalny, to estymatory parametrów μ_i oraz σ_i^2, których oszacowania znajdują się we wzorach (1) i (2) są estymatorami nieobciążonymi z jednostajnie minimalną wariancją[3]. Tłumaczy to użycie mnożnika $\frac{1}{n-1}$ we wzorze (4) zamiast mnożnika $\frac{1}{n}$[4].

Parametr σ_i może być oszacowany jako pierwiastek wariancji próbkowej, jednak taki estymator nie jest estymatorem nieobciążonym (zob. np.: [Bartoszewicz 1989, s. 147; Shao 1999, s. 130]).

W analizie historycznych stóp zwrotu istotnym elementem jest więc dobór odpowiedniego estymatora. Estymatory, których realizacje zostały opisane we wzorach (1) i (2), są klasycznymi estymatorami wykorzystywanymi w teorii portfela.

W celu estymacji ryzyka i stopy zwrotu portfela, można posłużyć się estymatorami parametrów μ_{port}, σ_{port} oraz σ^2_{port}. Do oszacowania tych parametrów zostaną wykorzystane oszacowania estymatorów parametrów μ_i, σ_i oraz σ^2_i, opisane wzorami (1) i (2).

Do oszacowania parametru μ_{port} możemy posłużyć się następującym wzorem:

$$\hat{\mu}_{port} = \sum_{i=1}^{p} w_i \hat{\boldsymbol{\mu}}_i = \mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\mu}}, \tag{3}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\mu}}_p)$ są estymatorami stóp zwrotu składników portfela.

Po podstawieniu we wzorze (2) za r_{ti} wartości $r_{t,port} = \mathbf{wr_t}$, oszacowanie parametru σ^2_{port} dane jest następującym wzorem:

$$\hat{\sigma}^2_{port} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_{t,port} - \hat{\mu}_{port})^2 = \mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{w}, \tag{4}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ jest próbkową macierzą kowariancji. Ocena parametru σ_{port}, analogicznie jak wcześniej, może być wyznaczona jako $\sqrt{\hat{\sigma}^2_{port}}$.

Opisane estymatory parametrów rozkładu stóp zwrotu portfela mogą być zastąpione innymi estymatorami. Wybór estymatorów zależy m.in. od wyboru funkcji straty estymatora, metody estymacji lub awersji inwestora do ryzyka.

[3] Estymatory te są najlepszymi estymatorami w klasie estymatorów nieobciążonych, jednak w klasie wszystkich estymatorów, estymator, którego realizacja opisana jest wzorem (4), jest niedopuszczalny (w sensie statystycznym), ponieważ istnieje estymator o mniejszym ryzyku – takim estymatorem jest obciążony estymator, dany następującym wzorem:

$$S_i^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{t=1}^{n}(R_{ti} - \overline{R}_i)^2.$$

[4] Dla mnożnika$1/n$ estymator ten byłby estymatorem największej wiarogodności. Taki estymator wykorzystywany jest do pomiaru wariancji np. w pracy Markowitza [1959].

3. Portfele efektywne

Spośród wszystkich portfeli, jakie mogą zostać utworzone z poszczególnych składników, zgodnie z założeniami, inwestor wybierze portfele efektywne. **Portfelem efektywnym** nazywamy taki portfel, który spośród wszystkich portfeli o zadanej stopie zwrotu będzie miał najniższe ryzyko (mierzone wariancją, odchyleniem standardowym stopy zwrotu), natomiast spośród wszystkich portfeli o zadanym poziomie ryzyka będzie miał najwyższą stopę zwrotu.

Jeżeli znany jest wektor średnich rozkładu $\boldsymbol{\mu}$ oraz macierz kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$, to wyznaczenie portfeli efektywnych o zadanej stopie zwrotu μ_0 polega na rozwiązaniu następującego zagadnienia programowania matematycznego[5]:

$$\min_{w} \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}, \tag{5}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \geq \mu_0,$$
$$\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1.$$

Portfel, którego udziały otrzymano przez rozwiązanie powyższego zagadnienia[6], nazywany jest portfelem efektywnym (*mean-variance portfolio*). Powyższe zagadnienie wykorzystywane jest do znalezienia portfela o najniższym ryzyku, przy zadanej stopie zwrotu.

Innymi zagadnieniami optymalizacyjnymi mogą być: zagadnienie minimalizacji wariancji portfela, zagadnienie maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu, zagadnienie minimalizacji wyrażenia $\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}$, gdzie λ jest współczynnikiem awersji do ryzyka, czy zagadnienie maksymalizacji miernika Sharpe'a.

W powyższych przypadkach wyrażenie $\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$ może być równoważnie zapisane jako:

$$\sigma^2_{port} = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}. \tag{6}$$

Analogicznie można zapisać podobną równość dla średniej: $\mu_{port} = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}$. W praktyce nie jest znany rozkład stóp zwrotu składników portfela, dlatego w celu wyznaczenia portfeli efektywnych wykorzystuje się estymatory średniej $\hat{\mu}$ i wariancji $\hat{\sigma}^2$. Takimi estymatorami mogą być średnia i wariancja próbkowa, ale również inne estymatory opisane w dalszej części pracy. Można również wykorzystać estymatory

[5] Jeżeli estymatorem parametru $\boldsymbol{\Sigma}$ jest próbkowa macierz kowariancji, to zagadnienie (5) będzie zagadnieniem programowania kwadratowego.

[6] Rozwiązanie analityczne dla tego zagadnienia można znaleźć np. w: [Jajuga, Jajuga 2006, s. 219; Fabozzi i in. 2007, s. 28].

wektora średnich $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ i macierzy kowariancji $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, np. średnią próbkową oraz próbkową macierz kowariancji. Należy w tym przypadku mieć na uwadze, że mimo iż dla parametrów rozkładów prawdziwa jest równość (6), to w przypadku estymatorów podobna równość $\hat{\sigma}^2_{port} = \mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{w}$ jest jedynie prawdziwa dla wariancji próbkowej (np. [Maronna i in. 2006, s. 214] opisanej w części 3. Dlatego np. użycie M-estymatora ryzyka $\hat{\mu}_{odp}$ spowoduje wyznaczenie innego portfela niż użycie M-estymatora macierzy kowariancji $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{odp}$.

4. Inne miary ryzyka portfela

Poza średnią i wariancją, które są klasycznymi miarami ryzyka i stopy zwrotu, istnieją również inne miary. Wybór innych miar ryzyka będzie miał istotny wpływ na otrzymane udziały portfela optymalnego. Wśród takich miar możemy wyróżnić dobrze znane: odchylenie przeciętne czy odchylenie ćwiartkowe, które uwzględniają neutralną koncepcję ryzyka – analizowane są zarówno dodatnie, jak i ujemne odchylenia od średniej. W przypadku negatywnej koncepcji ryzyka uwzględniane są jedynie ujemne odchylenia od średniej, wtedy można posłużyć się takimi miarami, jak: semiwariancja, dolny moment cząstkowy, wartość zagrożona czy warunkowa wartość zagrożona.

Poza wymienionymi miarami możemy wyróżnić również skośność i kurtozę, które są momentami centralnymi rzędu 3 i 4. Obie miary mogą być wykorzystane w zagadnieniu optymalizacyjnym przy tworzeniu portfeli efektywnych, np. minimalizacja współczynnika skośności czy uwzględnienie w zagadnieniu optymalizacyjnym wszystkich 4 momentów[7]. Niestety, oba parametry wykorzystują potęgę 3 lub 4, co powoduje, że są jeszcze bardziej wrażliwe na obserwacje nietypowe niż klasyczne estymatory ryzyka. Badania Lohrego i in. [2007], w których porównywano portfele minimalizujące współczynnik skośności oraz odporny współczynnik skośności, wykazały, że zarówno klasyczny, jak i odporny estymator współczynnika skośności są wysoce niestabilne. Niestabilność współczynnika skośności oraz kurtozy można zobrazować następującym przykładem: dla dziennych stóp zwrotu indeksu WIG z okresu 1.10.1999 – 30.09.2010 (2274 obserwacji) wyliczono współczynnik skośności i kurtozę: 0 i 1,75 odpowiednio. Po usunięciu 1 obserwacji z dnia 24.11.2008 współczynnik skośności i kurtoza osiągnęły wartości –0,04 oraz 1,61 odpowiednio. Po usunięciu kolejnej obserwacji z dnia 29.10.2008 współczynnik skośności wyniósł –0,06, natomiast kurtoza 1,53. Jak można więc zauważyć, odrzucenie 2 z 2274 obserwacji (stanowiących 0,09% wszystkich obserwacji) powoduje dużą zmianę wartości współczynnika skośności i kurtozy (np. dla kurtozy nastąpiła zmiana o ok. 7%). W przypadku odchylenia standardowego odrzucenie 2 wymienionych obserwacji spowodowało spadek z wartości 0,0171 do 0,0169 (zmiana o ok. 1%).

[7] Szerzej zostało to opisane m.in. w: [Fabozzi i in. 2006].

Powyższe właściwości pokazują dużą wrażliwość estymatorów skośności i kurtozy, co powoduje, że tworzenie portfeli na podstawie tych miar (a nawet ich odpornych odpowiedników) obarczone jest dużym ryzykiem.

5. Założenia w teorii portfela Markowitza

Założenia w modelu Markowitza powiązane są ściśle z dwoma obszarami:
– statystycznym, dotyczącym zakładanego modelu oraz sposobu pomiaru ryzyka i stopy zwrotu.
– behawioralnym, dotyczącym zakładanego modelu zachowań inwestorów: postrzegania ryzyka, stopy zwrotu oraz wyboru optymalnej inwestycji.

Pierwszy z wymienionych obszarów zależy od wybranego modelu statystycznego i w zależności od wybranego podejścia może zawierać inne założenia. Drugi obszar określa przede wszystkim, w jaki sposób inwestorzy wybierają optymalną inwestycję oraz czym się kierują przy jej wyborze.

W obszarze statystycznym można wyróżnić trzy główne założenia odnośnie do zakładanego modelu:

1) stopa zwrotu portfela jest sumą zmiennych losowych,

2) rozkład stóp zwrotów aktywów oraz zależności pomiędzy składnikami portfela są niezmienne w czasie,

3) rozkład stóp zwrotu aktywów jest wielowymiarowym rozkładem normalnym.

Pierwsze założenie [Markowitz 1952, s. 81] umożliwia postrzeganie portfela jako zmiennej losowej o pewnym, nieznanym rozkładzie. To założenie umożliwiło zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa oraz metod statystycznych w teorii portfela. Drugie oznacza, że oczekiwana stopa zwrotu i wariancja aktywów nie zmieniają się w czasie. To założenie wynika z tego, że szereg czasowy z realizowanych stóp zwrotu traktowany jest jako próba losowa, zatem wszystkie obserwacje pochodzą z jednego rozkładu. Dodatkowo, ponieważ nie zmieniają się rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu, więc nie zmieniają się zależności pomiędzy nimi. Ostatnie natomiast wynika z faktu zastosowania estymatorów, które są efektywne przy założeniu, że rozkład próby jest normalny. W przypadku odstępstw od rozkładu normalnego estymatory opisane wzorami (3), (4), (6), (7) są nieefektywne i nie powinny być brane pod uwagę. Dlatego z założenia o normalności stóp zwrotu pojedynczych aktywów oraz całego portfela wynika założenie o wielowymiarowym rozkładzie normalnym aktywów wchodzących w skład portfela[8].

---

[8] Zakłada się, że rozkład stóp zwrotu portfela jest rozkładem normalnym, zatem dla każdego wektora udziałów $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)'$ zmienna losowa $R_{port} = \mathbf{w}'\mathbf{R} \in \Re^n$ ma rozkład normalny, zatem z definicji wektor losowy $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_n)'$ ma rozkład normalny w $\Re^n$ (wielowymiarowy rozkład normalny).

Kolejne cztery założenia dotyczą obszaru behawioralnego. W tym obszarze zostały wyodrębnione następujące założenia dotyczące zachowań inwestorów [Reilly, Brown 2006, s. 211]:

1) inwestorzy, wybierając aktywa, analizują rozkład prawdopodobieństwa stóp zwrotu w pewnym przedziale czasowym,

2) inwestorzy maksymalizują oczekiwaną użyteczność w jednym okresie, a ich krzywe użyteczności obrazują malejącą krańcową użyteczność zasobu,

3) decyzje podejmowane są jedyne w oparciu o oczekiwany zwrot i ryzyko (mierzone średnią oraz wariancją lub odchyleniem standardowym), zatem krzywe użyteczności inwestorów są jedynie funkcjami oczekiwanej stopy zwrotu i wariancji (lub odchylenia standardowego portfela),

4) na zadanym poziomie ryzyka inwestorzy wybierają inwestycje o wyższej stopie zwrotu, natomiast przy zadanej stopie zwrotu inwestorzy wybierają inwestycje o niższym ryzyku.

Pierwsze założenie wynika z tego, iż w teorii portfela Markowitza analizowane są jedynie rozkłady stóp zwrotu, a decyzje podejmowane są w oparciu o wyestymowane ryzyko oraz zwrot aktywów (założenie trzecie). Kolejne założenie oparte jest na teorii użyteczności i pokazuje, że wybierane portfele optymalne dla jednego inwestora niekoniecznie są optymalne dla innego, ponieważ mogą mieć inną użyteczność. Trzecie założenie określa, jakie charakterystyki portfela są brane do wyznaczania portfeli optymalnych, czyli które parametry rozkładu prawdopodobieństwa powinny być estymowane. Ostatnie założenie pozwala na wyznaczenie zbioru portfeli efektywnych, czyli najlepszych portfeli na zadanym poziomie ryzyka lub przy zadanej stopie zwrotu. Do powyższych założeń można dodać inne założenia, m.in.: brak kosztów transakcji lub podzielność składników portfela. Oba założenia mogą być uwzględnione przez odpowiednią modyfikację modelu, która nie wpływa na zmianę pozostałych założeń.

6. Weryfikacja założeń teorii portfela w praktyce

Założenie o rozkładzie stóp zwrotu aktywów. Estymatory parametrów położenia i skali wykorzystywane w teorii portfela Markowitza są nieobciążonymi estymatorami z jednostajnie minimalną wariancją lub estymatorami największej wiarygodności. Estymatory te są efektywne tylko wtedy, gdy rozkład próby jest rozkładem normalnym. Dodatkowo wadą stosowanych estymatorów jest ich duża wrażliwość, co sprawia, że w celu osiągnięcia dokładnych wyników należy dobrać wystarczająco dużą próbę. Dlatego niezbędne jest wykorzystanie innych metod estymacji, które przynoszą dobre rezultaty dla innych rozkładów niż rozkład normalny.

Badania nad normalnością rozkładu stóp zwrotu akcji były prowadzone już we wczesnych latach 60. XX w. m.in. przez Mandelbrota [1963] i Famę [1965], którzy pokazali, że rozkład Pareta dobrze przybliża rozkład stóp zwrotu. W kolejnych latach powstało wiele publikacji (m.in. [Praetz 1972; Officer 1972; Blattberg, Gonedes 1974; Kon 1984; Akgiray 1989; Palagyi, Mantegna 1999; Lisi 2007]), w których badano rozkłady stóp zwrotu i wykazano, że często są to rozkłady skośne z grubymi ogonami. Badania dotyczące rozkładów stóp zwrotu akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie były realizowane m.in. przez zespół prowadzony przez K. Jajugę w 2000 r. W wyniku prowadzonych badań stwierdzono, że rozkłady stóp zwrotu nie są zgodne z rozkładem normalnym i że większość spółek nie ma rozkładu symetrycznego. Wśród badanych spółek zaobserwowano również „grube ogony" rozkładów.

Analizując badania z ostatnich kilkudziesięciu lat, można wnioskować, że rozkłady stóp zwrotu nie są rozkładami normalnymi. Dotyczy to stóp zwrotu z akcji spółek zarówno zagranicznych, jak i polskich. Zatem klasyczne estymatory wykorzystywane w teorii portfela w praktyce nie powinny mieć zastosowania.

W przypadku gdy rozkład stóp zwrotu jest rozkładem zbliżonym do rozkładu normalnego, niezbędne jest określenie, czy badany rozkład jest symetryczny. Dla rozkładów niesymetrycznych błędem jest stosowanie miar ryzyka, takich jak odchylenie standardowe, wariancja lub absolutne odchylenie medianowe (MAD). Wynika to z tego, że ujemne odchylenia od średniej (postrzegane negatywnie przez inwestorów) i dodatnie odchylenia od średniej (postrzegane pozytywnie) w wymienionych miarach jednakowo zwiększają ich wielkość i w zależności od skośności badanego rozkładu większe ryzyko może być zarówno pozytywnym, jak i negatywnym zjawiskiem. Miarami, które teoretycznie lepiej niż odchylenie standardowe opisują rozkłady niesymetryczne, są miary uwzględniające jedynie negatywną koncepcję ryzyka (np. semiodchylenie) lub miary kwantylowe (VaR lub CVaR). Jednak w przypadku wykorzystania miar ryzyka innych niż wariancja zostaje naruszone założenie o tym, że decyzje inwestorów podejmowane są jedyne w oparciu o oczekiwany zwrot i ryzyko (mierzone wariancją lub odchyleniem standardowym).

Jeżeli natomiast rozkład stóp zwrotu jest normalny lub bliski rozkładowi normalnemu i symetryczny, lepszymi estymatorami są estymatory minimalizujące błąd średniokwadratowy kosztem obciążenia (*shrinkage estimators*)[9]. W efekcie pozwalają one na dokładniejsze oszacowanie macierzy dla małej ilości obserwacji *n*-wymiarowych, gdy *n* jest duże. Badania prowadzone w tym obszarze [Kaszuba 2009; Ledoit, Wolf, 2003] pokazują, że estymatory te dają lepsze wyniki niż klasyczne[10].

Założenie o stabilności rozkładów stóp zwrotu w czasie. To założenie wynika z zastosowania podejścia statystycznego w teorii portfela. W przypadku metod statystycznych bowiem wymiar czasu jest do pewnego stopnia ignorowany i główny nacisk położony jest na analizę struktury zbioru danych [Jajuga 2003]. W praktyce rozkłady stóp zwrotu nie są stabilne w czasie w tym sensie, że parametry rozkładu

---

[9] Jedynym założeniem dla tych estymatorów jest istnienie kolejnych momentów tych zmiennych losowych [Schäfer, Strimmer 2005].

[10] Przede wszystkim wtedy, gdy liczba składników portfela jest duża, a wykorzystywane szeregi czasowe stóp zwrotu są krótkie.

(średnia, wariancja) zmieniają się w czasie. Wynika to m.in. ze zmian prawnych, zmian rynkowych, a także z trendów występujących na rynku, które wpływają na zmianę oczekiwanej stopy zwrotu, oraz od stabilności sytuacji na rynkach finansowych, która wpływa na zmianę wariancji. Jeżeli zmiany w kolejnych przedziałach czasowych są nieistotne, to powyższe założenie można osłabić poprzez odpowiednio częstą estymację charakterystyk rozkładu populacji oraz przebudowę portfela na końcu każdego przedziału czasowego. W tym przypadku korzystanie z metod klasycznych, które wymagają dużej ilości obserwacji[11], uniemożliwia szybkie dostosowanie wag portfela do zmian rynkowych.

W celu kompletnego wyeliminowania powyższego założenia należałoby zmienić podejście statystyczne na stochastyczne.

Założenie, że decyzje podejmowane są jedyne w oparciu o oczekiwany zwrot i ryzyko (mierzone wariancją lub odchyleniem standardowym). Wcześniejsze dwa założenia wynikają bezpośrednio z zastosowania metod statystycznych w teorii portfela. Natomiast powyższe założenie określa, czym kierują się inwestorzy przy wyborze optymalnego portfela. Zakłada się, że inwestorzy szacują ryzyko na podstawie wariancji (lub odchylenia standardowego) stóp zwrotu, zatem analizowane rozkłady powinny być symetryczne (problem poruszony przy omawianiu pierwszego założenia), co niekoniecznie musi być spełnione w praktyce.

Oba parametry rozkładu stóp zwrotu (oczekiwana stopa zwrotu i wariancja) nie są znane, więc w celu podjęcia decyzji inwestycyjnych należy posłużyć się teorią estymacji, aby je oszacować. W przypadku szacowania obu parametrów jednocześnie estymatory klasyczne obarczone są dużym błędem, co powoduje, że portfele efektywne szacowane w oparciu o estymatory wariancji i średniej obarczone są jeszcze większym ryzykiem i w konsekwencji mają niską skuteczność poza próbą [Jagannathan, Ma 2003, s. 1652] (*out of sample*).

Jobson i Korkie [1980] wykazali, że klasyczne portfele obarczone są dużym błędem estymacji. Powoduje to znaczący wzrost błędu estymacji, co w konsekwencji może powodować, że taki portfel nie musi być bardziej efektywny niż portfel o równych udziałach. Michaud [1989], Black i Litterman [1992], Chopra i Ziemba [1993] pokazali, że poza próbą, klasyczne portfele nie posiadają dobrych właściwości, na co wpływ mają zarówno wrażliwość, jak i błąd estymacji portfela. To powoduje, że portfele efektywne w przypadku inwestycji długoterminowych na wiele okresów nie przynoszą dobrych efektów inwestycyjnych. W pracach [Jagannathan, Ma 2003; DeMiguel, Nogales 2009] w badaniach dotyczących porównania alternatywnych metod estymacji z klasycznymi nie porównywano portfeli efektywnych o zadanej średniej, a jedynie portfele o minimalnej wariancji. Przyczyną jest duża niestabilność średniej próbkowej, która osłabiłaby jakość otrzymanych wyników. Problemy

[11] W przypadku dużej ilości aktywów, dla których wyznaczane są udziały w portfelu, w celu zmniejszenia błędu estymacji klasycznej macierzy kowariancji, do jej wyznaczenia należy użyć dużej ilości zrealizowanych stóp zwrotu.

związane z wyznaczaniem portfeli efektywnych oraz błędami estymacji przy użyciu klasycznych metod kowariancji opisywane były również m.in. w pracach [Jorion 1986; Best, Grauer 1991; Wang 2005].

Koszty transakcyjne. W praktyce każdy zakup lub sprzedaż akcji obciążone są kosztami transakcyjnymi, więc każda przebudowa portfela powoduje poniesienie dodatkowych opłat. W przypadku portfela Markowitza utrzymanie wyznaczonych podczas budowy portfela udziałów poszczególnych aktywów wiąże się z przebudową tego portfela w każdym okresie, którego długość jest zgodna z okresem zrealizowanej stopy zwrotu[12]. Oznacza to, że jeżeli np. do wyznaczenia udziałów aktywów w portfelu korzystano z dziennych zrealizowanych stóp zwrotu, należy codziennie przebudowywać portfel w taki sposób, aby wcześniej wyznaczone udziały zostały utrzymane. Niestety, w praktyce każda przebudowa udziałów w portfelu wiąże się z kosztami transakcyjnymi zarówno przy zakupie, jak i przy sprzedaży aktywów portfela. Dodatkowo, jeżeli inwestor co pewien czas ponownie wyznacza udziały spółek w portfelu, ważne jest, aby te udziały były wyznaczone jak najdokładniej. Gdy udziały wyznaczone są w oparciu o estymatory wrażliwe na obserwacje odstające (np. klasyczne estymatory), to wyznaczane wagi w kolejnych okresach będą się zmieniać bardziej niż w przypadku wyznaczania wag przy użyciu np. estymatorów odpornych lub minimalizujących błąd średniokwadratowy. Stąd, przy porównywaniu alternatywnych metod wyznaczania portfela, ważne jest również uwzględnienie kosztów transakcyjnych.

7. Praktyczne wykorzystanie teorii portfela

W praktyce teoria portfela jest o wiele bardziej skomplikowana, na co wpływ mają ograniczenia składu portfela (inwestorzy instytucjonalni), poziom awersji do ryzyka inwestorów czy ograniczenia na danym rynku. Poniżej zostały opisane podstawowe ograniczenia dla teorii portfela w praktyce.

Krótka sprzedaż, jeżeli już jest możliwa na danym rynku, to ma pewne ograniczenia:

1) niezbędne jest wniesienie depozytu dla inwestycji, co do których krótka sprzedaż jest stosowana,

2) kwota, na jaką krótka sprzedaż ma być dokonana, jest ograniczona (np. brak możliwości dokonania krótkiej sprzedaży akcji za 100 mln zł).

Oba problemy powodują, że krótka sprzedaż jest jedynie przypadkiem teoretycznym.

Ograniczenia udziałów portfela stosuje się, aby uniknąć przypadku koncentracji udziałów portfela w pojedynczej akcji, segmencie czy rynku. Podobnie można

[12] Jeżeli stopy zwrotu aktywów wchodzących w skład portfela nie zmienią się jednocześnie o taką samą wartość w danym okresie, to w następnym okresie udziały spółek będą inne niż w poprzednim okresie. Dlatego niezbędna jest przebudowa portfela w taki sposób, aby udziały były równe tym z początku okresu.

narzucić ograniczenia na grupę składników portfela (np. w danej branży, sektorze, kraju).

Ograniczenia błędów replikacji (*tracking error*, TE) stosowane jest w celu minimalizacji różnic pomiędzy zarządzanym portfelem a portfelem benchmarkowym. Błąd replikacji mierzy się jako odchylenie standardowe różnic stóp zwrotu pomiędzy portfelem benchmarkowym a portfelem zarządzanym. Przyjęte zbyt niskie ograniczenie dla TE spowoduje mniejszą elastyczność doboru udziałów portfela, co w konsekwencji zmniejszy zbiór możliwych portfeli efektywnych. Wynika to z tego, że błąd replikacji nie uwzględnia ryzyka portfela.

Ograniczenie minimalnej wartości transakcji stosuje się, gdy chcemy wyeliminować nowe transakcje o niskiej wartości. Pozwoli to m.in. na uniknięcie niepotrzebnych kosztów transakcyjnych.

Ograniczenie ilości składników portfela wykorzystywane jest, gdy inwestor tworzy portfel odwzorowujący wybrany portfel benchmarkowy.

Inne ograniczenia w teorii portfela W teorii portfela, oprócz wyżej wymienionych, istnieją również inne, bardziej skomplikowane ograniczenia. Często są one problematyczne oraz trudne do zaimplementowania w środowiskach programistycznych. Więcej o praktycznych ograniczeniach w teorii portfela oraz algorytmach uwzględniających te ograniczenia można znaleźć m.in. w pracach: Fabozziego i in. [2007] – opis ograniczeń w teorii portfela oraz algorytmów, Michaud i Michaud [2008] – opis praktycznych problemów w teorii portfela, lub Changa i in. [2000] – przykład zastosowania wybranych ograniczeń oraz problemy.

8. Podsumowanie

W pracy zostały opisane najważniejsze zagadnienia teorii portfela Markowitza. Główny nacisk położono na elementy problematyczne na podłożu zarówno statystycznym (związane z estymacją parametrów portfela), jak i praktycznym (związane z niespełnieniem założeń czy dodatkowymi ograniczeniami).

W pracy wykazano, że wykorzystanie klasycznych estymatorów czy klasycznych zagadnień optymalizacyjnych naraża inwestora na duże ryzyko estymacji czy ryzyko modelu, co powoduje, że otrzymany portfel efektywny jest:

– wrażliwy – nawet jedna obserwacja odstająca wpływa znacząco na wybór udziałów w portfelu; dodatkowo, portfel jest wrażliwy na dane z próby, co przy cyklicznym przebudowywaniu portfela na podstawie próby z ostatnich T notowań, może powodować dużą zmianę udziałów poszczególnych aktywów w portfelu;
– obarczony dużym błędem estymacji – w przypadku portfeli z minimalną wariancją, portfel obarczony jest jedynie błędem estymacji macierzy kowariancji, jednak pozostałe portfele efektywne obarczone są dodatkowo błędem estymacji parametru położenia;
– przynosi słabe efekty poza próbą, co powoduje, że portfele efektywne w przypadku inwestycji długoterminowych na wiele okresów nie przynoszą dobrych efektów inwestycyjnych;

– cechuje się dużą zmiennością udziałów – poprzez dużą wrażliwość na obserwacje z próby, wyznaczane udziały poszczególnych aktywów mogą znacząco się zmieniać w kolejnych okresach;
– powoduje wzrost kosztów transakcyjnych – w związku z dużą zmiennością i wrażliwością portfela wyznaczane udziały cechują się dużą fluktuacją, co w konsekwencji przyczynia się do wzrostu kosztów transakcyjnych.

Niezbędne jest więc poszukiwanie innych metod, które w praktycznych zastosowaniach zmniejszą ryzyko modelu, poprawią dokładność estymacji oraz umożliwią dokładniejsze wyznaczenie portfeli efektywnych.

Literatura

Akgiray V., *Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: Evidence and forecasts*, „Journal of Business" 1989, vol. 62, no. 1, s. 55-80.

Bartoszewicz J., *Wykłady ze statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1989.

Best M.J., Grauer R.R., *On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results*, „Review of Financial Studies" 1991, vol. 4, s. 315-342.

Black F., Litterman R., *Global portfolio optimization*, „Financial Analysts Journal" 1992, vol. 48, s. 28-43.

Blattberg R., Gonedes N., *A comparison of the stable and Student distributions as statistical models for stock prices*, „Journal of Business" 1974, vol. 47, no. 2, s. 244-280.

Chang T.-J., Meade N., Beasley J.E., Sharaiha Y.M., *Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization*, „Computers and Operations Research" 2000, vol. 27, no. 13, s. 1271-1302.

Chopra V.K., Ziemba W.T., *The effect of errors in means, variances and covariances on optimal portfolio choice*, „Journal of Portfolio Management" 1993, vol. 19, s. 6-11.

DeMiguel V., Nogales F.J., *Portfolio selection with robust estimation*, „Operations Research" 2009, vol. 57, no. 3, s. 560-577.

Fabozzi F.J., Kolm P.N., Pachamanova D., Focardi S., *Robust Portfolio Optimization and Management*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2007.

Fama E.F., *The behavior of stock market prices*, „Journal of Business" 1965, vol. 38, s. 34-105.

Jagannathan R., Ma T., *Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps*, „Journal of Finance" 2003, vol. 58, no. 4, s. 1651-1684.

Jajuga K., *Metody statystyczne w finansach*, StatSoft Polska, 2003, http://www.statsoft.pl/czytelnia/finanse/pdf/jajuga.pdf.

Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe. Aktywa niefinansowe. Ryzyko finansowe. Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.

Jobson J.D., Korkie B.M., *Estimation for Markowitz efficient portfolios*, „Journal of American Statistical Association" 1980, vol. 75, s. 544-554.

Jorion P., *Bayes-Stein estimation for portfolio analysis*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis" 1986, vol. 21, s. 279-292.

Kaszuba B., *Odporne metody konstrukcji portfela wieloskładnikowego*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego nr 47, Taksonomia 16, UE, Wrocław 2009, s. 163-172.

Kon S., *Models of stock returns – a comparison*, „Journal of Finance" 1984, vol. 39, no. 1, s. 147-165.

Ledoit O., Wolf M., *Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection*, „Journal of Empirical Finance" 2003, vol. 10, s. 603-621.

Lisi F., *Testing asymmetry in financial time series*, „Quantitative Finance" 2007, vol. 7, s. 687-696.
Lohre H., Neumann T., Winterfeldt T., *Portfolio Construction with Downside Risk*, Working Paper, 2007, http://ssrn.com/abstract=1112982.
Mandelbrot B., *The variation in certain speculative prices*, „Journal of Business" 1963, vol. 36, no. 3, s. 394-419.
Markowitz H.M., *Portfolio selection*, „Journal of Finance" 1952, vol. 7, no. 1, s. 77-91.
Markowitz H.M., *Portfolio Selection*, Cowles Foundation Monograph 16, John Wiley & Sons, New York 1959.
Maronna R.A., Martin R., Yohai V., *Robust Statistics: Theory and Methods*, John Wiley, New York 2006.
Michaud R.O., *The Markowitz optimization enigma: Is "optimized" optimal?*, „Financial Analysts Journal" 1989, vol. 45, s. 31-42.
Michaud R.O., Michaud R.O., *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, Oxford University Press, New York 2008.
Officer R., *The distribution of stock returns*, „Journal of the American Statistical Association" 1972, vol. 67, no. 340, s. 807-812.
Palagyi Z., Mantegna R., *Empirical investigation of stock price dynamics in an emerging market*, „Physica A", vol. 269, s. 132-139.
Praetz P., *The distribution of share price changes*, „Journal of Business" 1972, vol. 45, no. 1, s. 49-55.
Reilly F.K., Brown K.C., *Investment analysis and portfolio management*, Dryden Press, 2006.
Schäfer J., Strimmer K., *A shrinkage approach to large-scale covariance matrix estimation and implications for functional genomics*, „Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology" 2005, vol. 4, s. 32.
Shao J., *Mathematical Statistics*, Springer, New York 1999.
Wang Z., *A shrinkage approach to model uncertainty and asset allocation*, „The Review of Financial Studies" 2005, vol. 18, no. 2, s. 673-705.

PRACTICAL PROBLEMS IN PORTFOLIO THEORY

Summary: This paper presents the most important issues of the Markowitz Portfolio Theory. Particular emphasis is placed on problematic elements on the statistical basis (related to the estimation of portfolio parameters), as well as on the practical basis (related to the failure to meet the assumptions or to additional constraints). The paper shows that the application of classic estimators or classic optimization problems exposes the investor to high estimation and model risk, which makes the obtained portfolio have poor practical values.