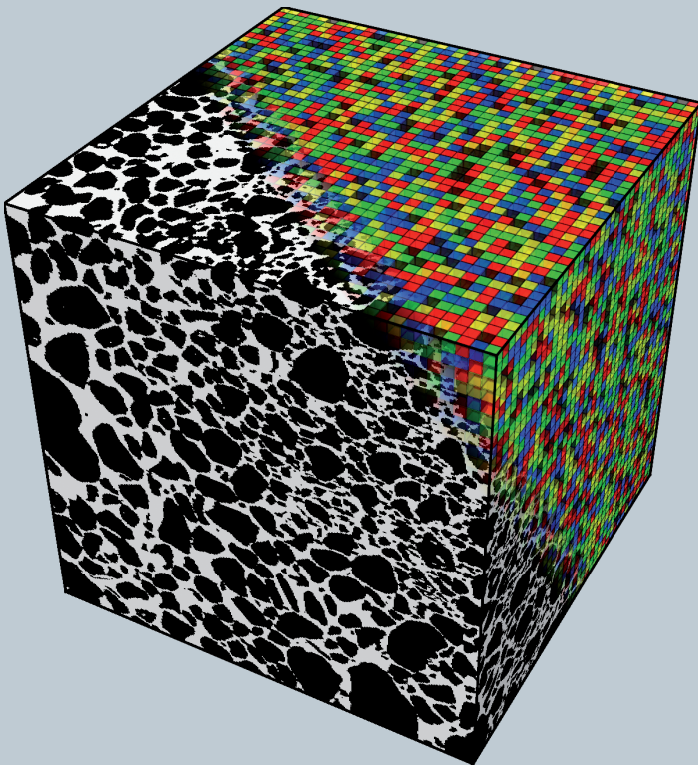


**Adrian Rózański**

**Analiza wieloskalowa  
charakterystyki cieplnej  
wielofazowego ośrodka gruntowego**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej



Adrian Róžański

**Analiza wieloskalowa  
charakterystyki cieplnej  
wielofazowego  
ośrodka gruntowego**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław 2018

## Recenzenci

Elżbieta STILGER-SZYDŁO  
Krzysztof TAJDUŚ

## Opracowanie redakcyjne i korekta

Hanna JUREK

## Projekt okładki

Marcin ZAWADZKI

Wszelkie prawa zastrzeżone. Niniejsza książka, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2018

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.edu.pl>;

e-mail: [oficwyd@pwr.edu.pl](mailto:oficwyd@pwr.edu.pl)

[zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl](mailto:zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl)

ISBN 978-83-7493-042-0

Druk i oprawa: beta-druk, [www.betadruk.pl](http://www.betadruk.pl)



## Spis treści

1. Wstęp .....	5
1.1. Wprowadzenie .....	5
1.2. Cel i zakres pracy .....	9
1.3. Wykaz ważniejszych oznaczeń .....	14
2. Czynniki wpływające na przewodność cieplną ośrodka gruntowego .....	17
2.1. Zawartość wody w przestrzeni porowej .....	19
2.2. Skład mineralogiczny .....	22
2.3. Porowatość oraz gęstość objętościowa szkieletu gruntowego .....	24
2.4. Uwagi .....	25
3. Istniejące modele teoretyczne i empiryczne .....	27
3.1. Przegląd modeli proponowanych w literaturze przedmiotu .....	27
3.1.1. Ograniczenia Wienera .....	27
3.1.2. Wzory empiryczne Kerstena .....	29
3.1.3. Model Mickleya .....	30
3.1.4. Model Gemanta .....	32
3.1.5. Model de Vriesa .....	34
3.1.6. Metoda Johansena wraz z późniejszymi jej modyfikacjami .....	35
3.1.7. Model Donazziego i innych .....	40
3.1.8. Model Goriego .....	40
3.1.9. Model Chena .....	43
3.1.10. Model Tonga i innych .....	43
3.1.11. Model Haigha .....	44
3.1.12. Model Lu i innych .....	46
3.2. Krytyczna ocena istniejących modeli .....	47
4. Homogenizacja – podstawowe zasady i techniki .....	53
4.1. Reprezentatywna Elementarna Objętość .....	56
4.2. Transformacja mikro–makro .....	60
4.3. Analityczne schematy aproksymacyjne .....	64
4.3.1. Ograniczenia Hashina–Shtrikmana .....	65
4.3.2. Zagadnienie pojedynczego wtrącenia .....	66
4.3.3. Schemat Mori–Tanaki .....	69
4.3.4. Schemat samouzgodnionego pola (ang. <i>Self-Consistent</i> ) .....	71
4.4. Obliczeniowa mikromechanika .....	72
4.4.1. Numeryczne określanie minimalnej wielkości REO .....	76
4.4.2. Numeryczne określanie makroskopowej przewodności cieplnej – sformułowanie problemu .....	79
5. Przewodność cieplna wybranych ośrodków gruntowych: pomiary laboratoryjne i wyniki .....	81
5.1. Charakterystyka badanych gruntów .....	81

5.2. Pomiar przewodności cieplnej z wykorzystaniem sondy igłowej .....	83
5.2.1. Podstawy teoretyczne .....	85
5.2.2. Zastosowanie sondy igłowej do określania przewodności cieplnej ośrodków niejednorodnych .....	90
5.2.3. Uwagi .....	93
5.3. Wyniki pomiarów laboratoryjnych .....	93
6. Przewodność cieplna szkieletu gruntowego .....	97
6.1. Analiza wrażliwości charakterystyki $\lambda-S_r$ na założoną wartość $\lambda_s$ .....	102
6.2. Lokalna zmienność przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego .....	106
6.3. Morfologia wokselowa: obliczeniowa mikromechanika .....	111
6.4. Morfologia polikrystaliczna: analityczna mikromechanika .....	127
6.5. Uwagi .....	136
7. Przewodność cieplna nasyconego ośrodka gruntowego .....	137
7.1. Morfologia wokselowa: obliczeniowa mikromechanika .....	137
7.2. Identyfikacja lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej dla morfologii wokselowej .....	145
7.2.1. Stochastyczna metoda optymalizacji: symulowane wyżarzanie .....	145
7.2.2. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego .....	150
7.3. Morfologia polikrystaliczna: analityczna mikromechanika .....	156
7.4. Identyfikacja lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej dla morfologii polikrystalicznej .....	162
7.4.1. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego .....	163
7.5. Uwagi .....	168
8. Przewodność cieplna częściowo nasyconego ośrodka gruntowego .....	171
8.1. Przykłady oszacowań dla ośrodka trójskładnikowego .....	173
8.2. Koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury .....	178
8.2.1. Określanie ekwiwalentnej mikrostruktury: zagadnienie odwrotne .....	182
8.2.2. Ekwiwalentna mikrostruktura dla piaskowca Fontainebleau .....	187
8.2.3. Ekwiwalentna mikrostruktura dla piasku średniego .....	191
8.3. Ekwiwalentna mikrostruktura oraz koncepcja „hierarchii zapełniania” .....	194
8.4. Uwagi .....	209
9. Wykorzystanie charakterystyki cieplnej gruntu do rekonstrukcji jego mikrostruktury .....	211
9.1. Uwagi .....	218
10. Zakończenie .....	221
Literatura .....	229
Streszczenie w języku angielskim .....	239

# 1. Wstęp

## 1.1. Wprowadzenie

Problematyka wykorzystania budowli lub poszczególnych elementów konstrukcyjnych do pozyskiwania energii cieplnej z ośrodka gruntowego jest od co najmniej kilkunastu lat szeroko badana, zarówno w aspekcie praktycznym, jak i naukowym (np. Brandl 2006; Laloui i in. 2006; Brandl i in. 2006; Mimouni i in. 2013). Szczególnie zainteresowanie tą tematyką dotyczy oczywiście krajów wysoko rozwiniętych, takich jak Japonia, Stany Zjednoczone, Szwajcaria czy Niemcy. W Polsce ta dziedzina budownictwa wciąż jest jeszcze mało rozpoznana, jednakże w obliczu narastających kosztów energii konwencjonalnej można spodziewać się w niedalekiej przyszłości wzrostu zainteresowania tą tematyką przez krajowe instytucje zajmujące się badaniami naukowymi, czy też praktycznymi wdrożeniami nowych technologii.

Przykładem konstrukcji, która łączy ze sobą klasyczne cechy posadowienia wraz z ideą pozyskiwania ciepła z ośrodka gruntowego są fundamenty energetyczne, w szczególności tzw. termopale. Do dzisiaj na świecie zrealizowano już wiele inwestycji, w których budowle posadowiono na dużej grupie pali, wśród których spora część została wykonana w technologii pali energetycznych. Wśród takich projektów wyróżnić można m.in. posadowienie (Mimouni i in. 2013):

- terminalu E lotniska w Zurychu zrealizowane na grupie 350 pali o średnicach od 0,9 do 1,5 m, z czego 300 pali to właśnie pale energetyczne,
- centrum biurowo-handlowego *One New Change* w Londynie, w ramach którego 219 pali funkcjonuje jako pale energetyczne, znacznie przyczyniając się do ogrzewania lub chłodzenia (w zależności od pory roku) niemal 52 tys. m<sup>2</sup> powierzchni biurowych i handlowych,
- wieżowca *Main Tower* we Frankfurcie nad Menem, gdzie ponad 100 pali wykonanych zostało w postaci termopali.

Jak wspomniano m.in. w pracy Rychlewskiego i in. (2014), duża popularność pali energetycznych wynika głównie z dwóch aspektów. Po pierwsze, zasada działania systemu pozyskiwania energii cieplnej z ośrodka gruntowego jest niemal identyczna z tą, którą wykorzystuje się w standardowych pompach ciepła. Po drugie, co ważniejsze,

koszt wyposażenia fundamentu palowego w instalację pozyskiwania energii cieplnej jest znikomy w porównaniu do całkowitego kosztu wykonania posadowienia. W literaturze tematu znaleźć można jeszcze inne przykłady podobnych konstrukcji. Są to m.in.: termoaktywne obudowy tuneli płytkich i głębokich (Brandl 2006), energetyczne ściany szczelinowe (Adam i Markiewicz 2009), czy wreszcie działające jako wymienniki ciepła termokotwy gruntowe lub skalne (Mimouni i in. 2013).

Niezależnie od tego, o jakiej konstrukcji mowa, zawsze gdy jest ona zlokalizowana w ośrodku gruntowym stanowiącym nośnik energii cieplnej, konieczne jest, w aspekcie prawidłowego jej zaprojektowania, poprawne rozpoznanie gruntu w zakresie jego charakterystyki termicznej (Różański 2017). Stąd też, równoległe do rozwoju technologii konstrukcji energetycznych, w ostatnich latach dużą uwagę skupiono na zintensyfikowaniu badań naukowych nad udoskonalaniem metod określania parametrów cieplnych ośrodka gruntowego (np. Côté i Konrad 2005a; 2005b; Lu i in. 2007; 2014; Haigh 2012; Różański i Stefaniuk 2016; He i in. 2017).

Wybrany aspektom dotyczącym teoretycznego opisu charakterystyki termicznej ośrodka gruntowego poświęcona jest również niniejsza monografia. Należy tutaj oczywiście podkreślić, że problem określania pełnej charakterystyki termicznej gruntu jest bardzo szeroki i złożony. Zawiera on m.in. analizy dotyczące możliwych mechanizmów wymiany ciepła oraz określania parametrów termicznych, w warunkach małych lub dużych gradientów temperatury, jak również zmienności tej charakterystyki pod wpływem działania dodatnich lub ujemnych temperatur. W tym opracowaniu autor dokonuje jednak świadomego zawężenia rozważań do zagadnień związanych z określaniem przewodności cieplnej, jako podstawowego parametru determinującego transport energii cieplnej w ośrodku gruntowym. W dalszej części tego podrozdziału wyjaśnia się powody, dla których dokonano ograniczenia dociekań jedynie do określania przewodnictwa cieplnego, jako wiodącego mechanizmu wymiany ciepła w gruncie. Podaje się również podstawowe założenia, które będą obowiązywać dla wszystkich analiz prowadzonych w ramach tej pracy. Jednocześnie wskazuje się na konieczność uwzględnienia w rozważaniach teoretycznych dyskretnej struktury wewnętrznej ośrodka gruntowego, zarówno w aspekcie jego morfologii oraz możliwej lokalnej zmienności przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego. Taką możliwość daje podejście wieloskalowe, w ramach którego analizuje się przewodność cieplną ośrodka gruntowego w niniejszej monografii.

Zasadniczo dla ośrodków porowatych można wyróżnić trzy podstawowe rodzaje transportu ciepła: przewodzenie przez szkielet lub ciecz, konwekcja w płynach oraz promieniowanie. Zazwyczaj wszystkie trzy rodzaje wymiany ciepła występują ze sobą łącznie, a ich powszechne wydzielanie z całościowego transportu ciepła wynika z faktu, iż każdy z osobna charakteryzuje się odmiennym mechanizmem przenoszenia energii cieplnej. Ilościowy udział w transporcie ciepła każdego z mechanizmów zależy od wielu czynników, m.in. charakterystycznej wielkości przestrzeni porowej lub ziaren tworzących szkielet, rozkładu temperatury w ośrodku, zawartości cieczy w przestrzeni porowej (Johansen 1975; Farouki 1981; 1982; Usowicz 2002).

W przypadku przepływu ciepła przez ośrodek gruntowy, największy udział w transporcie ciepła ma przewodzenie ciepła przez składniki mineralne (tworzące szkielet gruntowy) oraz wodę. Można przyjąć, że konwekcja wody lub powietrza oraz promieniowanie mają w większości przypadków pomijalnie mały udział ilościowy w całościowym transporcie ciepła. Udział konwekcji oraz promieniowania w transporcie ciepła przez ośrodek gruntowy jest dość szeroko omawiany w literaturze tematu. Za jedne z ważniejszych prac, w których rozważa się problem konwekcji i promieniowania w ośrodkach porowatych, należy uznać następujące pozycje literaturowe: Carslaw i Jaeger (1959), Martynov (1963), Johansen (1975), Farouki (1981), Gawin i in. (1996), Murashov i White (2000), Wu i in. (2004) oraz Tong i in. (2009; 2010).

W szczególności w pracach Johansena (1975) oraz Faroukiego (1981) wykazano, że w przypadku piasków procentowy udział mechanizmu promieniowania (rozumianego jako emisja fal elektromagnetycznych kosztem energii wewnętrznej ciała) w transporcie ciepła wynosi około 1% w warunkach temperatur atmosferycznych. Dla pozostałych rodzajów gruntów, w zależności od stopnia wilgotności oraz charakterystyki uziarnienia gruntu, maksymalny zaobserwowany udział mechanizmu promieniowania w transporcie energii cieplnej wyniósł 5%.

Martynov (1963), przeprowadzając wiele badań laboratoryjnych oraz pomiarów *in situ*, wskazał na fakt, iż udział konwekcji w transporcie ciepła znacząco wzrasta wraz ze wzrostem charakterystycznego wymiaru porów powyżej kilku milimetrów z jednoczesnym wzrostem temperatury w gruncie powyżej 30 [°C] oraz gradientem temperatury większym niż 1 [°C/cm]. Należy zauważyć, że w warunkach naturalnych gradient temperatury (w kierunku pionowym) w gruncie jest zazwyczaj wyraźnie mniejszy niż 1 [°C/cm], z reguły mieści się on w zakresie 0,01–0,1 [°C/cm] (Farouki 1981). Johansen (1975) wykazał, że w przypadku piasków oraz gruntów o ziarnach drobniejszych niż frakcja piaskowa udział konwekcji w całościowym transporcie ciepła jest w zasadzie pomijalny. Do podobnych wniosków doszedł w swojej rozprawie doktorskiej Yun (2005), który badając grunty o różnych uziarnieniach dowiódł, iż konwekcja może mieć znaczący ilościowy udział w transporcie ciepła dopiero wówczas, gdy średnica miarodajna ziaren  $d_{50}$  jest większa niż ~6 [mm].

Mając na uwadze fakt, iż konwekcja oraz promieniowanie, w większości przypadków, mają niewielki udział ilościowy w transporcie energii cieplnej przez ośrodek gruntowy, w pracy tej (jak zasygnalizowano już wcześniej) skupiono się na zagadnieniach związanych z transportem ciepła jedynie w postaci „czystego” mechanizmu przewodzenia. W rozważaniach pomija się zatem wszelkie zjawiska zmian fazowych (zamrażanie gruntu, parowanie wody) zachodzących w gruncie oraz nie uwzględnia się transportu ciepła w postaci konwekcji swobodnej wywołanej wysokim gradientem temperatury, jak również konwekcji wymuszonej, tj. przepływu cieczy wywołanego gradientem ciśnienia. We wszystkich rozważaniach zakłada się również, że grunt poddany jest działaniu temperatury pokojowej – ok. 20 °C.

W podanych założeniach przewodność cieplna gruntu, w szczególności jej zmienność ze względu na rodzaj gruntu, wynika głównie z morfologii mikrostruktury oraz składu mineralogicznego w odniesieniu do zmienności przewodności cieplnej w obrębie struktury mineralogicznej szkieletu gruntowego. Wpływy mikrostruktury na charakterystykę termiczną ośrodka gruntowego można zaobserwować, analizując np. wzrost wartości przewodności cieplnej w trakcie nasycania gruntu wodą. Charakterystyka ta różni się wyraźnie w zależności od tego, czy mamy do czynienia z gruntem drobno- czy gruboziarnistym. Jest to konsekwencją różnic w morfologii mikrostruktury gruntów drobno- i gruboziarnistych, w odniesieniu m.in. do kształtu i wielkości ziaren oraz struktury przestrzeni porowej (szczegółowo problem ten omawiono w rozdz. 2).

Większość istniejących w literaturze przedmiotu modeli wykorzystywanych do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego to modele empiryczne (np. Kersten 1949; Johansen 1975; Donazzi i in. 1979; Côté i Konrad 2005b; Lu i in. 2007; Chen 2008; Lu i in. 2014), których parametry określane są na podstawie wyników badań laboratoryjnych. Ich główną wadą jest brak uniwersalności, rozumiany jako możliwość aplikacji danego modelu do niemal każdego rodzaju gruntu. Zwykle zakres ich stosowalności jest bardzo ograniczony i sprowadza się do możliwości określenia przewodności cieplnej jedynie dla konkretnego rodzaju gruntu.

Istniejące modele teoretyczne (np. Mickley 1951; Gemant 1952; de Vries 1963; Gori 1983; Tong i in. 2009; Haigh 2012; He i in. 2017) z reguły bazują na bardzo prostych modelach geometrii ośrodka gruntowego, jako ośrodka wielofazowego. W konsekwencji modele te rzadko są w stanie poprawnie opisać złożoną charakterystykę termiczną gruntów częściowo nasyconych. Odnosi się to zwłaszcza do gruntów drobnoziarnistych, które charakteryzują się dość specyficzną zależnością przewodności cieplnej względem niewielkich zawartości wody w przestrzeni porowej. Ponadto brak jest w literaturze przedmiotu modeli, które opisywałyby zmienność współczynnika przewodności cieplnej już na poziomie szkieletu gruntowego – istniejące modele traktują szkielet gruntowy jako jednorodny, opisany stałym współczynnikiem przewodności cieplnej. Takie podejście skutkuje niejednokrotnie wyraźnym przeszacowaniem lub niedoszacowaniem (w zależności od podejścia oraz rodzaju gruntu) przewodności cieplnej gruntu (np. Różański i Stefaniuk 2016a; 2016b).

Wyszczególnione niedoskonałości istniejących modeli skłoniły autora do usystematyzowania wiedzy i stworzenia teoretycznego opisu charakterystyki przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w ramach analizy wieloskalowej, tj. z uwzględnieniem niejednorodności struktury oraz zmienności parametrów cieplnych składników gruntu w różnych skalach obserwacji. W tym celu proponuje się zastosowanie techniki homogenizacji, której głównym i zasadniczym zamierzeniem jest przeniesienie opisu matematycznego danego procesu fizycznego ze skali niejednorodności do skali makroskopowej (tj. skali zastosowań inżynierskich) oraz określenie tzw. parametrów zastępczych ośrodka ujednorodnionego (Strzelecki 1996; Torquato 2002).

W rozważaniach zawartych w tej pracy, w zależności od analizowanego problemu, wykorzystuje się dwa metodologicznie różne podejścia: tzw. obliczeniową oraz analityczną mikromechanikę. Podstawy teoretyczne dla obydwu stosowanych w pracy podejść przedstawiono w rozdziale 4. W obu przypadkach formułuje się i proponuje metodę rozwiązania kilku zagadnień bezpośrednich (wprost) oraz odwrotnych teorii homogenizacji, których nadrzędnym celem ma być udoskonalenie technik szacowania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. Uzyskane rezultaty za każdym razem weryfikuje się względem wyników badań zarówno własnych, jak i zaczerpniętych z literatury. Dzięki temu zawarte w pracy rozważania, a w szczególności uzyskane wyniki, są weryfikowane doświadczalnie i cechują się możliwością zastosowania w praktyce inżynierskiej. Szczegółowy cel i zakres pracy sformułowano w kolejnym podrozdziale.

## 1.2. Cel i zakres pracy

Głównym celem prezentowanej monografii jest zaadaptowanie wybranych technik homogenizacji do oceny makroskopowej przewodności cieplnej gruntu jako ośrodka wielofazowego. W szczególności rozważania dotyczą sformułowania technik obliczeniowych umożliwiających uzyskanie poprawnych predykcji przewodności cieplnej gruntu w różnych skalach obserwacji. Jest to realizowane przez sformułowanie i rozwiązanie wybranych zagadnień bezpośrednich (wprost) oraz odwrotnych w ramach teorii homogenizacji, przy czym dla większości analizowanych zagadnień rozwiązań poszukuje się w ujęciu dwóch metodologicznie różnych podejść, tj. obliczeniowej i analitycznej mikromechaniki. W szczególności w ramach niniejszej pracy:

- dokonuje się identyfikacji czynników, które w największym stopniu wpływają na wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego,
- przeprowadza się krytyczną ocenę stosowanych w literaturze tematu modeli empirycznych i teoretycznych wykorzystywanych do szacowania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego,
- formułuje się metody umożliwiające uzyskanie poprawnej predykcji przewodności cieplnej szkieletu gruntowego oraz nasyconego ośrodka gruntowego w ujęciu obliczeniowej i analitycznej mikromechaniki,
- formułuje się metodę określania przewodności cieplnej dla częściowo nasyconych ośrodków gruntowych z wykorzystaniem aparatu analitycznej mikromechaniki,
- wprowadza się metodę umożliwiającą identyfikację cyfrowej reprezentacji tzw. ekwiwalentnej mikrostruktury ośrodka gruntowego na podstawie sekwencji pomiarów przewodności cieplnej.

Materiał zawarty w pracy podzielono na dziesięć rozdziałów. W rozdziale 2 opisano fizyczną interpretację współczynnika przewodności cieplnej oraz przedstawiono

równania opisujące transport ciepła w ośrodku gruntowym w warunkach ustalonego i nieustalonego przepływu ciepła. Ponadto szczegółowo opisano czynniki mające istotny wpływ na wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. Są to między innymi: zawartość wody w przestrzeni porowej, skład mineralogiczny (w szczególności zawartość kwarcu), porowatość oraz gęstość objętościowa szkieletu gruntowego. Dodatkowo dokonano zestawienia tabelarycznego wartości parametrów termicznych składników tworzących ośrodek gruntowy oraz wartości przewodności cieplnych wybranych minerałów zawartych w szkielecie gruntowym. Prezentowane w tym rozdziale rozważania prowadzą do wniosku, że charakterystyka termiczna przewodności cieplnej ośrodka gruntowego zależy od rodzaju gruntu, a ten determinowany jest morfologią mikrostruktury, zarówno w odniesieniu do jej geometrii, jak również przestrzennej zmienności współczynnika przewodności cieplnej wynikającej ze struktury mineralogicznej szkieletu gruntowego.

W rozdziale 3 dokonuje się przeglądu dostępnych w literaturze przedmiotu modeli wykorzystywanych do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. Szczegółowo omówiono kilkanaście modeli, zarówno teoretycznych, jak i empirycznych. Dodatkowo w rozdziale tym przeprowadzono analizę krytyczną prezentowanych modeli. Dokonano oszacowania przewodności cieplnej dla dwóch rodzajów gruntów częściowo nasyconych z wykorzystaniem omawianych modeli. Wyniki porównano z rezultatami pomiarów laboratoryjnych zaczerpniętymi z literatury przedmiotu. Na tej podstawie dokonano zestawienia w formie tabelarycznej omawianych w pracy modeli, wskazując przy tym na ich zalety, wady oraz zakres stosowalności. Tabelę uzupełniono o uwagi własne autora. Całościowo informacje zawarte w podrozdziale 3.2 tworzą niejako „poradnik” do zastosowań w praktyce inżynierskiej, dający możliwość łatwego doboru odpowiedniego modelu obliczeniowego do konkretnej sytuacji obliczeniowej.

W rozdziale 4 omówiono podstawowe zasady, właściwości i techniki homogenizacji. Ze względu na to, iż grunt jest ośrodkiem o „nieuporządkowanej” mikrostrukturze, rozważania zawężono do technik homogenizacji stosowanych dla makroskopowo izotropowych ośrodków losowych. Jedyne w sposób bardzo poglądowy, w kilku miejscach, autor wskazał na różnice pomiędzy podejściem dedykowanym kompozytom o deterministycznej (periodycznej) i losowej mikrostrukturze. W podrozdziale 4.1 wprowadza się definicje oraz pokrótce omawia się sposoby określania tzw. Reprezentatywnej Elementarnej Objętości. W podrozdziale 4.2 przedstawiono klasyczny proces transformacji opisu matematycznego ze skali niejednorodności do skali makroskopowej, na przykładzie zagadnienia stacjonarnego przepływu ciepła. Podrozdziały 4.3 i 4.4 prezentują dwa metodologicznie różne podejścia służące określaniu parametrów makroskopowych mikroniejnorodnych ośrodków losowych. Pierwsze z omawianych podejść bazuje na schematach aproksymacji analitycznej, przy czym główną uwagę skupiono tutaj na dwóch schematach, tj. Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola. Drugie z rozważanych podejść to określanie parametrów makroskopowych w ujęciu



obliczeniowej mikromechaniki, a więc z wykorzystaniem metod numerycznych oraz dyskretnej (w formie obrazu cyfrowego) reprezentacji morfologii mikrostruktury. Szczególną uwagę skupiono na problemie określania minimalnej wielkości tzw. Reprezentatywnej Elementarnej Objętości w ujęciu technik bazujących na statystycznych miarach mikrostruktury oraz na matematycznym sformułowaniu zagadnienia brzegowego służącego określeniu makroskopowej przewodności cieplnej, wykorzystywanego w analizach zawartych w dalszej części pracy.

Fundamentalne wyniki w zakresie wieloskalowej analizy oraz badań laboratoryjnych przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, jak również dla praktyki inżynierskiej, przedstawiono w rozdziałach 5–9. W szczególności rozdział 5 poświęcony jest technice laboratoryjnego określania przewodności cieplnej gruntów z wykorzystaniem tzw. sondy igłowej. W pierwszej kolejności zaprezentowano podstawy teoretyczne metody, której idea bazuje na rozwiązaniu zagadnienia liniowego źródła ciepła umieszczonego w izotropowej półprzestrzeni charakteryzowanej stałym współczynnikiem dyfuzyjności cieplnej. Opisano w sposób szczegółowy procedurę określenia współczynnika przewodności cieplnej na podstawie odczytów z sondy, według standardów ASTM. Wskazano na możliwe błędy w interpretacjach w zależności od podejścia stosowanego do analizy odczytów wartości temperatury uzyskanych w trakcie badania. Przedstawiono również analizy dotyczące możliwości stosowania sondy igłowej do określania przewodności cieplnej ośrodków niejednorodnych. Na tej podstawie, oraz dodatkowo bazując na wieloletnim doświadczeniu autora w zakresie badań laboratoryjnych z wykorzystaniem sondy igłowej, sformułowano niejako wytyczne dotyczące przeprowadzania i interpretacji pomiarów w odniesieniu do ośrodków gruntowych. W podrozdziale 5.3 zaprezentowano wyniki pomiarów przewodności cieplnej dla wybranych gruntów uzyskane na podstawie badań przeprowadzonych przez autora. Rezultaty te są wykorzystywane w dalszej części pracy do weryfikacji proponowanych modeli teoretycznych oraz jako dane „wsadowe” do analizowanych w pracy zagadnień odwrotnych.

Rozdział 6 poświęcony jest problemowi określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ . W pierwszej kolejności przedstawiono istniejące w literaturze przedmiotu modele wykorzystywane do szacowania wartości tego parametru. Przeprowadzając dodatkowe analizy pokazano, że prawidłowe oszacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego ma kluczowe znaczenie w uzyskaniu poprawnych predykcji przewodności cieplnej gruntu jako ośrodka wielofazowego. Wskazano również na fakt, iż brak jest w literaturze uniwersalnego, a więc niezależnego od rodzaju gruntu, podejścia umożliwiającego poprawne określanie wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. To ostatnie stało się również motywacją do tego, aby sformułować zupełnie nowe podejście, które w efekcie ułatwia uzyskanie poprawnej predykcji przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Dokonano tego przez prowadzenie niezależnych analiz z wykorzystaniem aparatu obliczeniowej oraz analitycznej mikromechaniki. W obu podejściach wprowadzono pojęcie tzw.

lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w skali mikro, tj. losowych fluktuacji w obrębie szkieletu gruntowego. Na tej podstawie zmienność współczynnika  $\lambda$  w skali mikro została opisana za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa stowarzyszonych z głównymi frakcjami gruntowymi. W ramach obliczeniowej mikromechaniki zaproponowano trójwymiarowy model mikrostruktury opisujący zmienność („od punktu do punktu”) wartości przewodności cieplnej w skali mikro. Analizy prowadzone w ujęciu analitycznej mikromechaniki przeprowadzono z wykorzystaniem schematu samouzgodnionego pola. Poprawność predykcji uzyskanych z obu podejść została zweryfikowana w rozdziale 7, który dotyczy określania przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego. Dodatkowo w rozdziale 6 wykonano sekwencję kilkuset obliczeń numerycznych, na podstawie których stworzono dwa typy diagramów służące określaniu wartości parametru  $\lambda_s$ . Można tego dokonywać w sposób „dokładny”, tj. na podstawie procentowych zawartości frakcji gruntowych lub „zgrubny”, tj. jedynie na podstawie nazwy gruntu. Co warto podkreślić, drugi typ diagramu jest konsyistentny z trójkątem ISO krajowym według załącznika krajowego do normy PN-EN ISO 14688-2. Opracowanie diagramów pozwalających w prosty sposób określać wartości parametru  $\lambda_s$  jest, zdaniem autora, niezwykle ważnym osiągnięciem z perspektywy możliwych zastosowań w praktyce inżynierskiej.

Jak wspomniano już wcześniej, rozdział 7 dotyczy problemu określania przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego,  $\lambda^{\text{sat}}$ . Proponuje się metodologię określania wartości parametru  $\lambda^{\text{sat}}$  w ujęciu zarówno obliczeniowej, jak i analitycznej mikromechaniki. W tym drugim przypadku analizy prowadzi się, ponownie, w ramach schematu samouzgodnionego pola. Jednocześnie rozważania zawarte w tym rozdziale mają również na celu weryfikację poprawności założeń poczynionych w rozdziale 6, dotyczących uwzględniania w modelowaniu wieloskalowym lokalnej zmienności parametrów termicznych w obrębie szkieletu gruntowego. Wykonano liczne obliczenia, których wyniki porównano z rezultatami uzyskanymi w badaniach laboratoryjnych. Stwierdzono, że oba zaproponowane podejścia, tj. numeryczne i analityczne, prowadzą do bardzo dobrych predykcji wartości  $\lambda^{\text{sat}}$ . Uzyskanie satysfakcjonującej zgodności z wynikami badań laboratoryjnych dowodzi również poprawności założeń i analiz prezentowanych w poprzednim rozdziale. W celu uzyskania możliwie najlepszej predykcji przewodności cieplnej gruntu nasyconego rozwiązano również sekwencję zagadnień odwrotnych, którym efektem było zidentyfikowanie optymalnej charakterystyki lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$ . Wykazano, że w zależności od stosowanego podejścia zmienność ta powinna być charakteryzowana innymi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa. Wykazano również, że w przypadku modelowania za pomocą schematów analitycznych, oprócz identyfikacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa, konieczne jest także zidentyfikowanie najbardziej odpowiedniej mikrostruktury ośrodka zastępczego, tj. określenie optymalnych wartości parametrów kształtu, charakteryzujących geometrię poszczególnych składników nasyconego ośrodka gruntowego. Zostało to zrealizowane przez rozwiązanie zagadnienia odwrotnego z wykorzystaniem techniki sto-

chastycznej optymalizacji, tj. symulowanego wyżarzania. Uzyskane w tym rozdziale wyniki, zwłaszcza w zakresie optymalnych rozkładów prawdopodobieństwa oraz optymalnej morfologii mikrostruktury ośrodka zastępczego, stanowią, ponownie, oryginalne i ważne osiągnięcie autora, również z punktu widzenia zastosowań w praktyce inżynierskiej.

Celem analiz prowadzonych w rozdziale 8 jest sformułowanie metody umożliwiającej określanie przewodności cieplnej gruntów częściowo nasyconych. W pierwszym podrozdziale zaprezentowano przykłady oszacowań makroskopowej przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego w ramach schematów Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola. Wykazano, że największą trudnością w modelowaniu odpowiedzi makroskopowej ośrodka gruntowego, za pomocą metod aproksymacji analitycznej, jest przyjęcie poprawnej morfologii dla mikrostruktury zastępczej. Postuluje się, że pewnym rozwiązaniem problemu doboru odpowiedniej mikrostruktury zastępczej jest zastosowanie w schematach analitycznych koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury, wprowadzonej we wcześniejszej pracy autora (Łydźba i in. 2018). W celu zapoznania czytelnika z ideą ekwiwalentnej mikrostruktury w podrozdziale 8.2 przedstawiono matematyczne sformułowanie zagadnienia odwrotnego, którego rozwiązanie prowadzi do jej identyfikacji. Procedurę określania mikrostruktury ekwiwalentnej bazującą na metodzie symulowanego wyżarzania zobrazowano na dwóch przykładach zagadnień odwrotnych dla ośrodka gruntowego oraz skalnego. Główne analizy dotyczące charakterystyki przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego zawarto w podrozdziale 8.3. Rozważania prowadzi się z wykorzystaniem aparatu analitycznej mikromechaniki, w ujęciu schematu aproksymacyjnego Mori–Tanaki. Wykazano, że brak jest możliwości uzyskania poprawnej predykcji przewodności cieplnej gruntu, jeśli w schemacie Mori–Tanaki stosuje się koncepcję ekwiwalentnej mikrostruktury w takiej postaci, jaką pierwotnie sformułowano ją dla przypadku gruntów nasyconych. W rezultacie do modelowania charakterystyki przewodności cieplnej gruntów częściowo nasyconych proponuje się nowe podejście będące połączeniem pierwotnej koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury oraz tzw. hierarchii zapełniania. Wprowadzona w pracy idea „hierarchii zapełniania”, mówiąc bardzo ogólnie, determinuje przypisanie poszczególnych „rodzin” wtrąceń sferoidalnych do fazy ciekłej lub gazowej, w zależności od wartości stopnia wilgotności. Poprawność zaproponowanej metody zweryfikowano na przykładzie obliczeniowym, którego wyniki odniesiono do wartości uzyskanych za pomocą pomiarów laboratoryjnych. Wykazano, że koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury, w połączeniu z „hierarchią zapełniania”, prowadzi do poprawnego odwzorowania specyficznej charakterystyki termicznej gruntów drobnoziarnistych, zwłaszcza w zakresie małych wartości stopnia wilgotności.

Kolejnym oryginalnym osiągnięciem autora, prezentowanym w rozdziale 9, jest sformułowanie zagadnienia odwrotnego, które prowadzi do identyfikacji ekwiwalentnej mikrostruktury, tym razem jednak w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki. Ponownie

korzystając z techniki optymalizacji stochastycznej, rozwiązuje się zagadnienie odwrotne i identyfikuje się dyskretną reprezentację mikrostruktury ośrodka gruntowego (piasku średniego). Uzyskany obraz cyfrowy, zastosowany w zagadnieniu bezpośrednim obliczeniowej mikromechaniki, prowadzi do bardzo dobrej predykcji makroskopowej przewodności cieplnej. Ponadto wykazano, że otrzymany z procedury symulowanego wyżarzania obraz cyfrowy jest jakościowo porównywalny z rekonstrukcją otrzymaną na podstawie obrazowania próbki piasku średniego w tomografii komputerowej. Wydaje się więc, że zaproponowana w tej części pracy metodologia może być również podstawą do stworzenia techniki ułatwiającej rekonstrukcję rzeczywistej mikrostruktury ośrodka gruntowego.

Główne wnioski oraz uwagi końcowe, wynikające z przedstawionych w pracy rozważań, zawarto w rozdziale 10. Warto podkreślenia jest to, iż po każdym ważniejszym rozdziale lub ważniejszym (zdaniem autora) podrozdziale formułowano uwagi. Niejednokrotnie stanowią one wnioski płynące z zawartych w danym rozdziale lub podrozdziale analiz i rozważań. Wiele z nich stanowi podstawę do dociekań prezentowanych w kolejnych rozdziałach pracy.

Niektóre z prezentowanych w niniejszej monografii rozważań oraz wyników są efektem współpracy naukowej z prof. Dariuszem Łydźbą oraz mgr. inż. Damianem Stefaniukiem. W tym miejscu chciałbym wyrazić swoje podziękowanie tym osobom za liczne dyskusje, uwagi krytyczne oraz pomysły, które pomogły mi podczas tworzenia niniejszej pracy.

### 1.3. Wykaz ważniejszych oznaczeń

$\lambda$	– współczynnik przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda^{\text{dry}}$	– współczynnik przewodności cieplnej gruntu suchego, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda^{\text{sat}}$	– współczynnik przewodności cieplnej gruntu nasyconego, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda_{\text{p}}$	– współczynnik przewodności cieplnej powietrza, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda_{\text{w}}$	– współczynnik przewodności cieplnej wody, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda_{\text{s}}$	– współczynnik przewodności cieplnej szkieletu gruntowego
$\lambda_{\text{q}}$	– współczynnik przewodności cieplnej kwarcu, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda_{\text{o}}$	– współczynnik przewodności cieplnej wszystkich pozostałych (oprócz kwarcu) minerałów tworzących szkielet gruntowy, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda_{\text{m}}$	– współczynnik przewodności cieplnej danego minerału, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda_{\text{mo}}$	– współczynnik przewodności cieplnej materii organicznej, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda_{\text{f}}$	– współczynnik przewodności cieplnej płynu w pełni zajmującego przestrzeń porową gruntu, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\lambda^{\text{hom}}$	– efektywny/makroskopowy współczynnik przewodności cieplnej ośrodka mikroniejednorodnego, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

- $\lambda_s^{\text{hom}}$  – efektywny/makroskopowy współczynnik przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$   
 $\lambda^{\text{hom, sat}}$  – efektywny/makroskopowy współczynnik przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego,  $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$   
 $\lambda^{\text{hom, poz}}$  – pozorny parametr makroskopowy stosowany w technice obliczeniowej mikromechaniki,  $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$   
 $\lambda^{\text{zast}}$  – zastępcza przewodność cieplna mieszaniny woda–powietrze określona według dolnego lub górnego ograniczenia Hashina–Shtrikmana,  $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$   
 $K_e$  – bezwymiarowa przewodność cieplna, tzw. liczba Kerstena, –  
 $\mathbf{q}$  – wektor strumienia ciepła,  $\text{Wm}^{-2}$   
 $q$  – moc źródła ciepła,  $\text{Wm}^{-1}$   
 $T$  – temperatura, K lub  $^{\circ}\text{C}$   
 $t$  – czas, s  
 $C$  – ciepło właściwe,  $\text{kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$   
 $C_v$  – objętościowa pojemność cieplna,  $\text{J m}^{-3}\text{K}^{-1}$   
 $D$  – dyfuzyjność cieplna,  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$   
 $w$  – wilgotność gruntu, %  
 $S_r$  – stopień wilgotności, –  
 $\rho$  – gęstość objętościowa,  $\text{g cm}^{-3}$   
 $\rho_s$  – gęstość właściwa szkieletu gruntowego,  $\text{g cm}^{-3}$   
 $\rho_d$  – gęstość objętościowa szkieletu gruntowego,  $\text{g cm}^{-3}$   
 $n$  – porowatość gruntu, –  
 $S_t$  – powierzchnia właściwa,  $\text{m}^2 \text{g}^{-1}$   
 $S_a$  – oznaczenie frakcji piaskowej  
 $S_i$  – oznaczenie frakcji pyłowej  
 $Cl$  – oznaczenie frakcji iłowej  
 $\phi_i$  – udział frakcyjny składnika  $i$ , –  
 $\phi_q$  – udział frakcyjny kwarcu, –  
 $\phi_f$  – udział frakcyjny płynu w pełni zajmującego przestrzeń porową gruntu, –  
 $\phi_{Sa}$  – zawartość frakcji piaskowej, –/%  
 $\phi_{Si}$  – zawartość frakcji pyłowej, –/%  
 $\phi_{Cl}$  – zawartość frakcji iłowej, –/%  
 $\phi_{mo}$  – zawartość materii organicznej, –/%  
 $REO$  – Reprezentatywna Elementarna Objętość  
 $l_{\text{mikro}}$  – wymiar charakterystyczny dla skali niejednorodności  
 $l_{\text{makro}}$  – wymiar charakterystyczny dla skali makroskopowej  
 $P^{j,M}$  – operator lokalizacji dla składnika  $j$  zanurzonego w macierzy  $M$   
 $P^{j,\text{hom}}$  – operator lokalizacji dla składnika  $j$  zanurzonego w macierzy charakteryzowanej poszukiwanym parametrem efektywnym  $\lambda^{\text{hom}}$   
 $\theta_j$  – stosunek półosi sferoidy,  $R_3/R$ , dla składnika  $j$

- $\omega$  – określenie losowej realizacji mikrostruktury dla pojedynczej REO
- $N_p$  – liczebność próby, –
- $N_{\text{REO}}$  – liczba pikseli/wokseli w dowolnym kierunku obrazu cyfrowego reprezentującego geometrię REO, –
- $S_2^{(j)}$  – prawdopodobieństwo dwupunktowe dla składnika  $j$
- $l_c$  – długość korelacji
- $\sigma^2(x)$  – wariancja zmiennej losowej  $x$
- $f(\lambda)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa opisująca lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego
- $E$  – fikcyjna „energia” – funkcja celu w algorytmie optymalizacyjnym symulowanego wyżarzania
- $T^*$  – fikcyjna temperatura, tj. parametr kontrolny procesu optymalizacji
- $M(\theta)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa opisująca częstość występowania konkretnych „rodzin” wtrąceń sferoidalnych
- $M^{\text{eq}}(\theta)$  – ekwiwalentna mikrostruktura
- $MSE$  – błąd średniokwadratowy

## 2. Czynniki wpływające na przewodność cieplną ośrodka gruntowego

W konsekwencji założeń zawartych we wstępie parametrem opisującym zdolność gruntu, jako ośrodka wielofazowego, do transportu ciepła jest współczynnik przewodności cieplnej lub po prostu przewodność cieplna,  $\lambda$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]. W ogólności przewodność cieplną gruntu definiuje się jako ilość energii  $Q$  [J] przepływającej przez ośrodek gruntowy w jednostce czasu  $t$  [s] przez jednostkową powierzchnię  $A$  [ $\text{m}^2$ ], przy czym przepływ ten wywołany jest jednostkowym gradientem temperatury (grad  $T$ ) [ $\text{K/m}$ ], tj.:

$$\lambda = \frac{Q}{At(\text{grad } T)} \quad (2.1)$$

Przewodność cieplna gruntu jest parametrem determinującym przepływ ciepła przez ośrodek gruntowy w warunkach ustalonego przepływu ciepła. Wówczas strumień przepływającego ciepła,  $\mathbf{q}$  [ $\text{Wm}^{-2}$ ], będący wielkością wektorową, definiuje prawo Fouriera:

$$\mathbf{q} = -\lambda(\text{grad } T) \quad (2.2)$$

natomiast przepływ ciepła (bez dodatkowych źródeł ciepła) opisuje równanie bilansu ciepła, tj:

$$\text{div } \mathbf{q} = \text{div}[-\lambda(\text{grad } T)] = 0 \quad (2.3)$$

W przypadku nieustalonego, a więc zmiennego w czasie, przepływu ciepła przez ośrodek gruntowy zdolność gruntu do transportu ciepła zależy nie tylko od przewodności cieplnej, ale również od jego pojemności cieplnej. Proces ten opisuje następujące równanie:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}[\lambda(\text{grad } T)] = 0 \quad (2.4)$$

gdzie  $C_v$  jest tzw. objętościową pojemnością cieplną [ $J m^{-3}K^{-1}$ ]. Zdolność gruntu do wyrównywania się temperatur, innymi słowy szybkość transportu ciepła w czasie, w sposób ilościowy opisuje dyfuzyjność cieplna,  $D [m^2 s^{-1}]$ , która jest ilorazem przewodności cieplnej oraz objętościowej pojemności cieplnej gruntu, tj.:

$$D = \frac{\lambda}{C_v} \quad (2.5)$$

Im wyższa wartość dyfuzyjności cieplnej, tym coraz większa zdolność gruntu do szybszych zmian temperatury, a w konsekwencji do wyrównywania się temperatur w ośrodku gruntowym. Największy wpływ na zmiany dyfuzyjności cieplnej gruntu ma zawartość wody oraz zjawisko przemiany fazowej, tj. przejście wody w stan stały (zamarzanie gruntu). W szczególności zwiększając ilość wody w gruncie, począwszy od stanu suchego, przyrost przewodności cieplnej jest bardziej intensywny niż wzrost pojemności cieplnej; w konsekwencji obserwuje się wyraźny wzrost dyfuzyjności cieplnej. Po przekroczeniu pewnej charakterystycznej dla danego rodzaju gruntu wartości stopnia wilgotności, prędkość przyrostu przewodności cieplnej wyraźnie maleje, przy czym intensywność wzrostu pojemności cieplnej pozostaje przez cały czas na podobnym poziomie. Wobec tego maksymalną wartość dyfuzyjności cieplnej ośrodka gruntowego osiąga się przy charakterystycznej dla danego rodzaju gruntu ilości wody znajdującej się w przestrzeni porowej (Usovicz 2002).

Podobnie zachowuje się ośrodek gruntowy poddany działaniu ujemnych temperatur – grunt zamrożony charakteryzuje się wyraźnie wyższą dyfuzyjnością cieplną. Jest to konsekwencją dwóch właściwości; po pierwsze, przewodność cieplna gruntu zamrożonego jest wyraźnie większa niż gruntu niezamrożonego, a ponadto pojemność cieplna lodu jest mniejsza niż wody w stanie płynnym (wartości parametrów termicznych charakterystycznych składników gruntu zestawiono w tab. 2.1). Wobec tego, jeśli ośrodek gruntowy jest zamrożony, to charakteryzuje się on znacznie wyższą zdolnością do szybkich zmian temperatur, w porównaniu do gruntu niezamrożonego (np. Farouki 1981).

Jak wspomniano już wcześniej, w pracy nie rozważa się charakterystyki termicznej gruntów poddanych działaniu wysokich oraz niskich (ujemnych) temperatur. Innymi słowy, nie uwzględnia się wpływu temperatury na zmienność przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. W powyższych założeniach można zapisać charakterystyczną dla gruntu sekwencję wartości przewodności cieplnej dla składników oraz ośrodka gruntowego:

$$\lambda_p \leq \lambda^{dry} \leq \lambda_w \leq \lambda^{sat} \leq \lambda_s \quad (2.6)$$

gdzie  $\lambda^{dry}$  oraz  $\lambda^{sat}$  oznaczają przewodności cieplne ośrodka gruntowego, odpowiednio, w stanie suchym oraz w stanie pełnego nasycenia wodą. Ponadto indeksy dolne przy  $\lambda$  informują, iż przewodność cieplna odnosi się do poszczególnych składników tworzących ośrodek gruntowy, tj. p – powietrze, w – woda oraz s – szkielet gruntowy.



Tabela 2.1. Wartości parametrów termicznych składników obecnych w ośrodku gruntowym (dane pochodzą z prac: Wijk 1963 oraz Bejan i Kraus 2003).

Materiał/Składnik	Gęstość $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Ciepło właściwe $C$ [kJ kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Przewodność cieplna $\lambda$ [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Dyfuzyjność cieplna $D$ [10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s]
Woda (20 °C)	1,0	4,19	0,60	1,42
Powietrze (20 °C)	0,00125	1,00	0,025	0,21
Lód (0 °C)	0,917	2,04	2,25	12,0
Kwarc	2,65	0,73	7,69–8,40	43,0
Pozostałe minerały (wart. śr.)	2,65	0,73	2,90	15,0
Materia organiczna (wart. śr.)	1,30	1,93	0,25	1,0

W charakterystyce termicznej gruntu, jako ośrodka wielofazowego, ważna jest nie tylko sekwencja przewodności cieplnych (nierówność (2.6), ale również fakt, iż poszczególne składniki tworzące ośrodek gruntowy charakteryzują się znacznym kontrastem przewodności cieplnych (np. różnica około dwóch rzędów wielkości między przewodnością cieplną powietrza a średnią wartością przewodności cieplnej minerałów – zob. tab. 2.1). W konsekwencji przewodność cieplna gruntu suchego jest wyraźnie niższa niż przewodność gruntu w pełni nasyconego wodą (niejednokrotnie jest to różnica o jeden rząd wielkości). Jak wskazuje nierówność (2.6), wartość  $\lambda^{\text{dry}}$  znajduje się poniżej przewodności cieplnej wody, zwykle mieszcząc się w zakresie do 0,5 [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>]. Ze względu na fakt, iż w gruncie suchym transport ciepła odbywa się głównie przez kontakty międzyziarnowe, to wartość przewodności cieplnej gruntu w stanie suchym zależy w największym stopniu od gęstości (lub stowarzyszonej z nią porowatości), będącej miarą „upakowania” ziaren w przestrzeni (np. Côté i Konrad 2005b; Lu i in. 2007). Zwiększanie zawartości wody w przestrzeni porowej prowadzi do wzrostu przewodności cieplnej gruntu. W przypadku pełnego nasycenia przestrzeni porowej wodą, wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego mieści się między wartościami przewodności cieplnej wody oraz szkieletu gruntowego. W efekcie prowadzi to do wniosku, że czynnikiem mającym największy wpływ na wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego jest zawartość wody w przestrzeni porowej (np. Brandon i Mitchell 1989; Smits i in. 2010). Jednak, w wielu przypadkach skład mineralogiczny szkieletu gruntowego, porowatość gruntu, rozmiar ziaren, gęstość itp. są (lub mogą być) równie ważne (Mickley 1951; Johansen 1975; Farouki 1981; Abu-Hamdeh i Reeder 2000; Lipiec i in. 2007; Usowicz i in. 2013; Lu i Dong 2015; Różański i Stefaniuk 2016b).

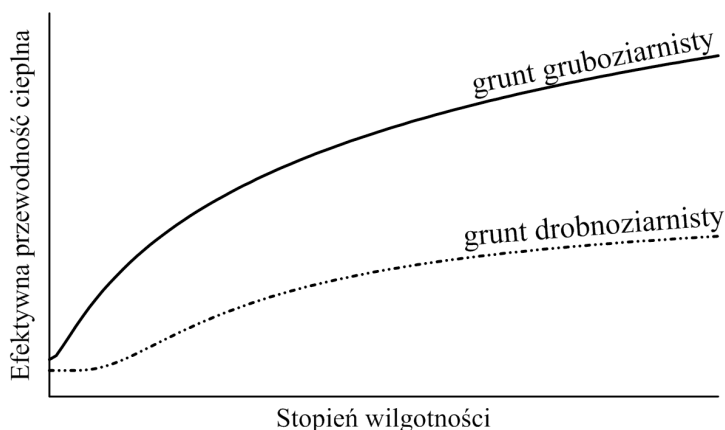
## 2.1. Zawartość wody w przestrzeni porowej

Zawartość wody w gruncie można charakteryzować za pomocą trzech różnych parametrów: wilgotności (wagowej) [%], wilgotności objętościowej [cm<sup>3</sup> cm<sup>-3</sup>] oraz stopnia wilgotności  $S_r$  [-]. Z reguły istniejące modele zarówno teoretyczne, jak i empi-

ryczne charakteryzują zawartość wody w przestrzeni porowej za pomocą stopnia wilgotności. Wobec tego dalsze rozważania w pracy prowadzi się, opisując ilość wody zawartej w porach gruntu, używając parametru  $S_r$ .

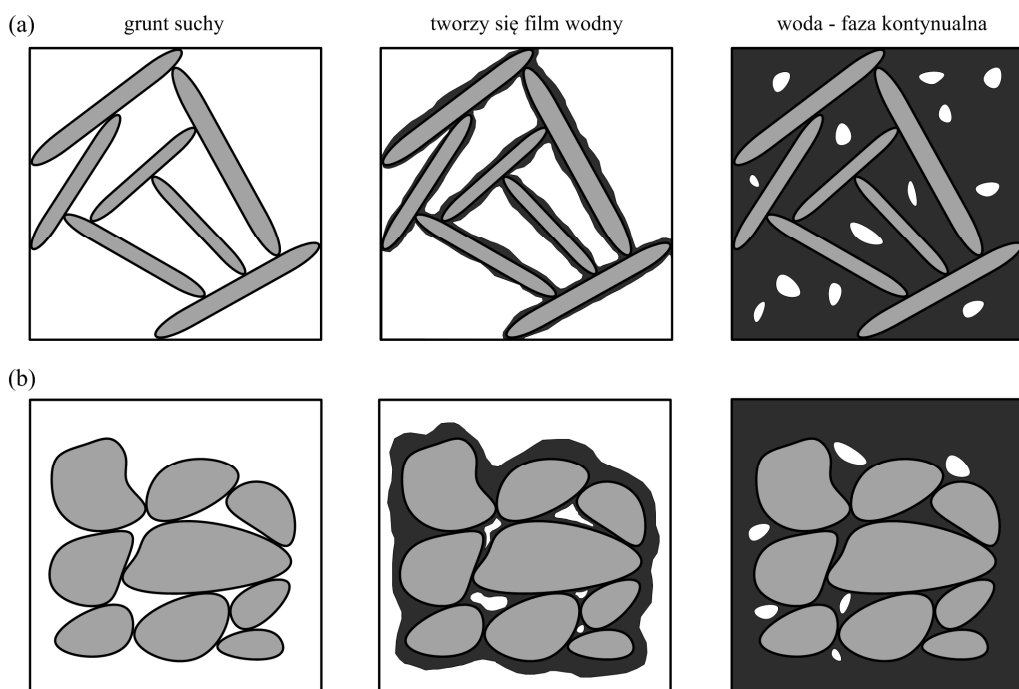
Jak wspomniano wcześniej, ilość wody nagromadzonej w przestrzeni porowej gruntu jest najważniejszym czynnikiem wpływającym na wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. Ze względu na fakt, iż przewodność cieplna wody jest około 24 razy wyższa niż przewodność powietrza, zwiększanie ilości wody zawartej w przestrzeni porowej prowadzi do wzrostu efektywnej przewodności gruntu. W rezultacie przewodność cieplna ośrodka gruntowego w stanie pełnego nasycenia może być nawet o jeden rząd wyższa niż przewodność gruntu suchego.

Dla bardzo małych wartości  $S_r$  molekuly wody są silnie adsorbowane do powierzchni ziaren, tworząc cienki film/powłokę otaczającą cząstki gruntu. W tym przedziale nasycenia, a więc od stanu suchego do niewielkich wartości  $S_r$ , zwiększanie ilości wody powoduje powiększanie grubości filmu wokół cząstek gruntu, a efektywna przewodność cieplna ośrodka gruntowego wzrasta stopniowo, ale nie znacząco (np. Lu i in. 2007). W miarę dalszego przyrostu  $S_r$ , zaczyna się proces tworzenia wodnych mostków termicznych pomiędzy punktami kontaktowymi ziaren; następuje gwałtowny wzrost efektywnej przewodności cieplnej gruntu (np. Sepaskhah i Boersma 1979; Farouki 1981; Tarnawski i Gori 2002; Lu i in. 2014). Proces szybkiego wzrostu wartości  $\lambda$  jest kontynuowany wraz z przyrostem  $S_r$ , aż do momentu, gdy większość cząstek gruntu zostanie ze sobą połączona wodnym mostkiem termicznym, a faza wodna staje się fazą kontynuowaną, w której zanurzone są pęcherzyki powietrza (niewielka ich ilość jest zawsze obecna w przestrzeni porowej gruntu, nawet przy „pełnym” nasyceniu). Dalsze nawadnianie gruntu powoduje już niewielki przyrost efektywnej przewodności cieplnej gruntu. Intensywność wzrostu przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, wraz ze zwiększaniem się ilości wody w porach, zależy od rodzaju gruntu. Typowe charakterystyki  $\lambda-S_r$  dla gruntów drobno- i gruboziarnistych przedstawiono na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Typowa zależność przewodności cieplnej gruntu od stopnia wilgotności

Należy zauważyć, że grunty gruboziarniste (np. piaski) charakteryzują się szybkim przyrostem przewodności cieplnej już od samego początku nasycania ich porów wodą. Odmienną charakterystykę termiczną wykazują grunty drobnoziarniste (np. ropy, gliny), gdzie wymagana jest znacznie większa ilość wody do osiągnięcia wyraźnego wzrostu przewodności cieplnej, począwszy od stanu suchego ( $S_r = 0$ ). Rozbieżność w „odpowiedzi” makroskopowej (jako funkcji stopnia wilgotności) gruntów drobno- i gruboziarnistych jest spowodowana różnicami w geometrii mikrostruktury, głównie w odniesieniu do wielkości oraz kształtu ziaren tworzących szkielet gruntowy. Powierzchnia cząstek gruntów drobnoziarnistych jest z reguły większa, co skutkuje tym, iż większa ilość wody potrzebna jest do utworzenia filmu wodnego wokół ziaren. Ponadto, ze względu na bardziej regularne kształty, szkielet gruntów drobnoziarnistych charakteryzuje się większą liczbą punktów kontaktowych, wokół których dochodzi do formowania się wodnych mostków termicznych. Koncepcję nasycania przestrzeni porowej gruntu, w zależności od jego uziarnienia, zaprezentowano na rys. 2.2 (Zhang i in. 2016).



Rys. 2.2. Charakterystyka nasycania przestrzeni porowej wodą: (a) typowy grunt drobnoziarnisty; (b) typowy grunt gruboziarnisty (za Zhang i in. 2016)

Ważnym zjawiskiem dotyczącym przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, przy ustalonej wartości  $S_r$ , jest tzw. efekt histerezy. Pomimo iż nie jest on poddawany

szczegółowej analizie w tej pracy, to opisując wpływ zawartości wody w przestrzeni porowej gruntu na jego przewodność cieplną, należy, zdaniem autora, wspomnieć o tym zjawisku. Efekt histerezy gruntu, w odniesieniu do przewodności cieplnej, charakteryzuje się tym, iż „odpowieź” makroskopowa (a więc efektywna przewodność cieplna ośrodka gruntowego  $\lambda$ ) dla ustalonej wartości stopnia wilgotności zależy od tego, czy dana wartość  $S_r$  osiągnięta została poprzez nawadnianie lub osuszanie gruntu (por. np. Winterkorn 1961; Farouki 1966; Hillel 1980; Bristow 1998; Rubio i in. 2011). Jest to konsekwencją tego, iż przestrzenny rozkład cieczy w porach gruntu jest silnie zależny od historii nasycania i osuszania gruntu (De Vries 1974). Jak pokazano np. w pracy Rubio i in. (2009), przewodność cieplna ośrodka gruntowego dla ustalonej wartości stopnia wilgotności może być wyższa, jeśli wartość  $S_r$  osiągnięta została przez osuszanie gruntu względem przewodności cieplnej gruntu, dla tej samej wartości  $S_r$ , ale uzyskanej przez nawadnianie.

Jak zobrazowano na rys. 2.1, grunty gruboziarniste charakteryzują się wyższą wartością przewodności cieplnej, w całym zakresie wartości stopnia wilgotności. Jest to głównie spowodowane przez odmienną strukturę mineralogiczną gruntów drobno- i gruboziarnistych. Szkielet gruntów gruboziarnistych tworzą z reguły minerały o wyższej przewodności cieplnej (głównie kwarc). Wpływ składu mineralogicznego na wartość efektywnej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego opisano w kolejnym podrozdziale.

## 2.2. Skład mineralogiczny

Fracja gruboziarnista gruntu zazwyczaj zbudowana jest z minerałów kwarcu i/lub minerałów z takich grup, jak plagioklasy (np. albit, oligoklaz) oraz pirokseny (np. augit). Ziarna szkieletu o frakcji drobnoziarnistej zazwyczaj utworzone są z minerałów ilastych (np. montmorylonit, kaolinit, illit) i/lub kalcytu, miki (np. biotyt, muskowit), kwarcu, skaleni (np. ortoklaz).

Poszczególne minerały tworzące szkielet gruntowy charakteryzują się różnicowanymi wartościami przewodności cieplnej (tab. 2.2). Spośród wszystkich minerałów obecnych w szkielecie gruntowym najwyższą wartość przewodności cieplnej wykazuje kwarc – w zależności od źródła (Côté i Konrad 2005b; Johansen 1975), jego przewodność cieplna znajduje się pomiędzy 7,69 a 8,40 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]. Obecnie najczęściej przyjmuje się wartość przewodności cieplnej kwarcu równą 7,70 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ] (por. np. Johansen 1975)). Wobec tego to właśnie zawartość minerałów kwarcowych ma największy wpływ na efektywną przewodność cieplną ośrodka gruntowego. Innymi słowy, im więcej minerałów kwarcowych w szkielecie gruntowym, tym przewodność cieplna szkieletu gruntowego, a w konsekwencji gruntu jako ośrodka wielofazowego jest coraz większa (Johansen 1975; Côté i Konrad 2005a; 2005b; Barry-Macaulay i in. 2013).

Należy zaznaczyć, iż kwarc charakteryzuje się silną anizotropią w zakresie przewodności cieplnej. Oznacza to, że w zależności od kierunku przepływu strumienia ciepła (równoległe lub prostopadle do osi głównych), efektywna przewodność cieplna kwarcu może się znacząco różnić. Ponadto różnica w przewodnościach,  $\lambda_{\parallel}$  oraz  $\lambda_{\perp}$ , jest silnie zależna również od temperatury – im wyższa temperatura, tym efekt anizotropii (w sensie różnicy pomiędzy wartościami  $\lambda_{\parallel}$  oraz  $\lambda_{\perp}$ ) zanika. Zakres wartości podany w tab. 2.2 odnosi się do wartości uśrednionych, zazwyczaj określonych jako ważona średnia geometryczna z przewodności na kierunku równoległym i prostopadłym do osi głównych (Farouki 1981).

Tabela 2.2. Typowe wartości przewodności cieplnej wybranych minerałów (dane pochodzą z prac: Horai 1971; Brigaud i Vasseur 1989; Bejan i Kraus 2003; oraz Côté i Konrad 2005b)

Minerał	$\rho_s$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\lambda_m$ [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
Kwarc	2,65	7,69–8,4
Dolomit	2,9	5,51
Chloryt	2,78	5,25
Magnetyt	5,15	5,1
Forsteryt	3,28	5,03
Anhydryt	2,98	4,76
Beryl	2,7	3,99
Augit	3,27	3,82
Kalcyt	2,71	3,59
Muskowit	2,85	3,48
Kaolinit	2,63	2,64
Ortoklaz	2,58	2,32
Biotyt	2,98	2,02
Oligoklaz	2,64	1,98
Albit	2,63	1,96
Illit	2,66	1,85
Bytownit	2,72	1,56
Labrador	2,7	1,53

Ze względu na wartości przewodności cieplnych poszczególnych minerałów tworzących charakterystyczne frakcje gruntowe, generalnie przyjmuje się, że prawdziwa jest następująca zależność (Tian i in. 2016):

$$\overline{\lambda_{Cl}} < \overline{\lambda_{Si}} < \overline{\lambda_{Sa}} \quad (2.7)$$

gdzie  $\overline{\lambda_{Cl}}$ ,  $\overline{\lambda_{Si}}$ ,  $\overline{\lambda_{Sa}}$  oznaczają uśrednione wartości przewodności cieplnych minerałów tworzących szkielet gruntowy, w odniesieniu do poszczególnych frakcji, odpowiednio, ilowej (Cl), pyłowej (Si) oraz piaskowej (Sa). W pracy, której autorami są Tian, Lu,

Horton i Ren (Tian i in. 2016), gdzie formułuje się model do określania przewodności cieplnej gruntów z uwzględnieniem możliwości zamarzania gruntu, sugeruje się, aby dla frakcji piaskowej przyjmować, wprost, wartość równą przewodności cieplnej kwarcu, tj.  $\overline{\lambda_{\text{Sa}}} = \lambda_{\text{q}} = 7,7$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]. W przypadku dwóch pozostałych frakcji (dla Cl na podstawie danych literaturowych, a dla Si na podstawie analizy odwrotnej) przyjęto następujące wartości średnie:  $\overline{\lambda_{\text{Cl}}} = 1,93$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ] oraz  $\overline{\lambda_{\text{Si}}} = 2,74$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ].

Analizując różne grunty poddane działaniu ujemnych i dodatnich temperatur, podobne wyniki przedstawiono w pracy (Purushothamaraj i Judge 1977). Uzyskano następujące przedziały wartości przewodności cieplnej (w jednostce [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]) dla poszczególnych frakcji:  $\lambda_{\text{Sa}} = 3,2\text{--}9,0$  (średnia 6,1),  $\lambda_{\text{Si}} = 2,4\text{--}5,9$  (średnia 4,15) oraz  $\lambda_{\text{Cl}} = 2,8\text{--}4,8$  (średnia 3,8). W sensie jakościowym uzyskane wartości są zgodne z sekwencją wartości przewodności cieplnych opisaną nierównością (2.7). Porównując, pod względem ilościowym, rezultaty uzyskane w pracy (Purushothamaraj i Judge 1977) oraz (Tian i in. 2016), zaobserwować można wyraźne różnice w wartościach średnich przewodności cieplnych poszczególnych frakcji; poza frakcją piaskową, w przypadku dwóch pozostałych, wartości uzyskane przez Purushothamaraja i Judge'a (1977) są wyższe od tych zaproponowanych w pracy, której autorami są Tian, Lu, Horton i Ren (Tian i in. 2016).

### 2.3. Porowatość oraz gęstość objętościowa szkieletu gruntowego

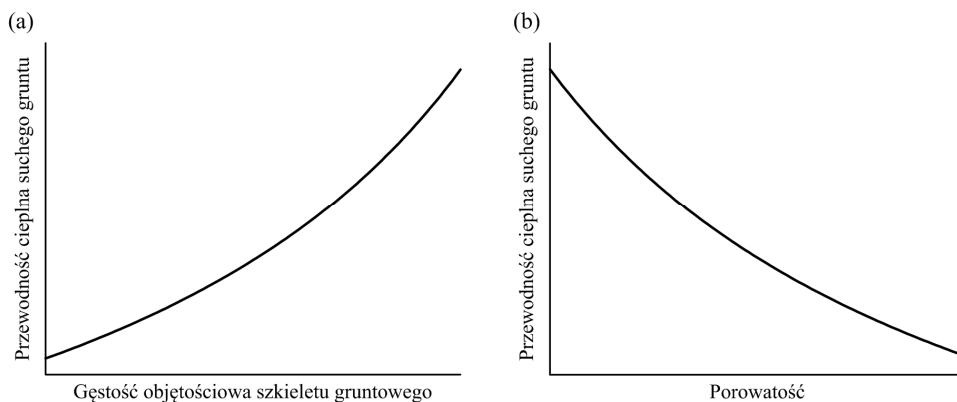
Porowatość gruntu ma dość znaczący wpływ na efektywną przewodność ośrodka gruntowego. Parametr ten jest oczywiście bezpośrednio związany z gęstością objętościową szkieletu gruntowego przez zależność:

$$\rho_d = (1 - n) \rho_s \quad (2.8)$$

gdzie  $n$  [–] oznacza porowatość gruntu, natomiast  $\rho_d$  [ $\text{g}/\text{cm}^3$ ] oraz  $\rho_s$  [ $\text{g}/\text{cm}^3$ ] oznaczają, odpowiednio, gęstość objętościową oraz właściwą szkieletu gruntowego. Zgodnie z zależnością (2.8), spadek porowatości gruntu powoduje jednoczesny wzrost gęstości objętościowej szkieletu gruntowego. Takiemu zjawisku towarzyszy wzrost efektywnej przewodności cieplej gruntu. Jest to głównie konsekwencją trzech czynników: (1) zwiększenie się liczby cząstek stałych (szkieletu gruntowego) w jednostkowej objętości gruntu; (2) zmniejszenie się ilości powietrza i/lub wody w jednostkowej objętości gruntu, (3) wyraźny wzrost liczby punktów kontaktowych między ziarnami.

Efekt wzrostu przewodności cieplnej gruntu, w wyniku spadku porowatości, jest szczególnie zauważalny w przypadku gruntów suchych. Wówczas przestrzeń porowa

gruntu w całości wypełniona jest powietrzem, a transport ciepła odbywa się praktycznie wyłącznie przez kontakty międzyziarnowe. Typowe charakterystyki zmienności przewodności cieplnej gruntu suchego w funkcji gęstości objętościowej szkieletu gruntowego oraz porowatości przedstawiono graficznie na rys. 2.3 – zależności zgodne z propozycją Johansena (1975). Nowsze badania również wskazują na dość wyraźny wpływ porowatości na przewodność cieplną suchego gruntu. W pracach (Côté i Konrad 2005b oraz Lu i in. 2007) zaproponowano nieco zmodyfikowane, względem propozycji Johansena (1975), wzory empiryczne do określenia wartości  $\lambda^{\text{dry}}$ . Problem ten szczegółowo omawia się w dalszej części pracy (pkt 3.1.6).



Rys. 2.3. Typowa charakterystyka zmienności przewodności cieplnej gruntu suchego w funkcji: (a) gęstości objętościowej szkieletu gruntowego oraz (b) porowatości (Johansen 1975)

## 2.4. Uwagi

W zależności (2.5), definiującej dyfuzyjność cieplną gruntu, występuje objętościowa pojemność cieplna, oznaczana symbolem  $C_v$ . Tymczasem, zestawiając parametry poszczególnych składników gruntu, w tab. 2.1 wyszczególniono wartości ciepła właściwego  $C$  (parametr ten określa ilość ciepła na jednostkę masy, wymaganą do zmiany temperatury gruntu o 1 [K]). Warto w tym miejscu wyjaśnić, że obie wielkości są ze sobą powiązane w taki sposób, że objętościowa pojemność cieplna jest iloczynem gęstości oraz ciepła właściwego:

$$C_v = \rho C \quad (2.9)$$

Jak wspomniano wcześniej, w pracy nie rozważa się wpływu temperatury na zmienność przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, a wszystkie rozważania prowadzi się po założeniu, że w gruncie panuje niemal stała temperatura (ok. 20 °C) cha-

rakteryzująca się pomijalnie małym gradientem. W celu pogłębienia wiedzy w zakresie wpływu temperatury na charakterystykę termiczną ośrodka gruntowego, autor odsyła czytelnika do następujących pozycji literaturowych: Farouki 1981; Campbell i in. 1994; Hiraiwa i Kasubuchi 2000; Lu i Ren 2009; Zhang i in. 2009; Liu i in. 2011; Smits i in. 2013.

Skład mineralogiczny (zwłaszcza ilościowy udział minerałów kwarcu), obok zawartości wody w przestrzeni porowej, jest najważniejszym czynnikiem mającym wpływ na efektywną przewodność cieplną ośrodka gruntowego. Jednakże rozpatrując grunt, jako ośrodek wielofazowy, można stwierdzić, że skład mineralogiczny wpływa bezpośrednio na przewodność cieplną fazy stałej, w konsekwencji oddziałując, w sposób pośredni, na przewodność cieplną gruntu. Wpływ składu mineralogicznego, a w szczególności zawartości kwarcu, na przewodność cieplną szkieletu gruntowego szerzej omawia się w rozdziale 6.

Materia organiczna charakteryzuje się relatywnie niską przewodnością cieplną (zob. tab. 2.1). W rezultacie, w odniesieniu do gruntów mineralnych, grunty organiczne cechuje wyraźnie niższa przewodność cieplna. Ponadto, jeśli grunty mineralne zawierają pewną znaczącą liczbę części organicznych, to, jak pokazano w pracy autora (Łydźba i in. 2017), podczas określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego powinno się uwzględniać tę informację o ośrodku gruntowym. W sytuacji, gdy wpływ części organicznej zostanie pominięty, przewodność cieplna szkieletu, a w konsekwencji gruntu jako ośrodka mikroniejednorodnego, może zostać zawyżona (Róžański i Stefaniuk 2016b). Szczegółowo problem ten również omawia się w rozdziale 6.

Jak pokazano w tym rozdziale, charakterystyka termiczna ośrodka gruntowego, głównie w odniesieniu do jego przewodności cieplnej, jest silnie zależna od rodzaju gruntu. Rodzaj gruntu determinuje natomiast morfologię mikrostruktury, zarówno w odniesieniu do jego geometrii, jak również przestrzennej zmienności współczynnika przewodności cieplnej wynikającej ze struktury mineralogicznej szkieletu gruntowego. Zostało to już zasygnalizowane we wstępie, jednakże autor chciałby to ponownie podkreślić, że wskazane tutaj właściwości ośrodka gruntowego stały się motywacją do podjęcia próby zastosowania technik homogenizacji (zarówno analitycznej, jak i obliczeniowej mikromechaniki) w celu uzyskania poprawnych predykcji przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w różnych stanach nasycenia. Szczegółowe rozważania dotyczące analizy wieloskalowej, w ujęciu schematów aproksymacji analitycznej oraz obliczeniowej mikromechaniki, zawarto w rozdziałach 6–9.



## 3. Istniejące modele teoretyczne i empiryczne

Rozważania zawarte w niniejszym rozdziale podzielono na dwie odrębne części. W pierwszej kolejności, w podrozdziale 3.1, dokonuje się przeglądu i szczegółowego omówienia istniejących modeli teoretycznych oraz empirycznych, wykorzystywanych do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. W podrozdziale 3.2 autor dokonuje krytycznej oceny stosowanych w literaturze tematu modeli empirycznych i teoretycznych. W efekcie dociekań zawartych w tym podrozdziale dokonano zestawienia w formie tabelarycznej omawianych w pracy modeli, wskazując przy tym na ich zalety, wady oraz możliwy zakres stosowalności. Ponadto tabelę uzupełniono o uwagi własne autora wynikające z przeprowadzonych analiz i porównań z wynikami badań doświadczalnych dostępnych w literaturze przedmiotu.

### 3.1. Przegląd modeli proponowanych w literaturze przedmiotu

#### 3.1.1. Ograniczenia Wienera

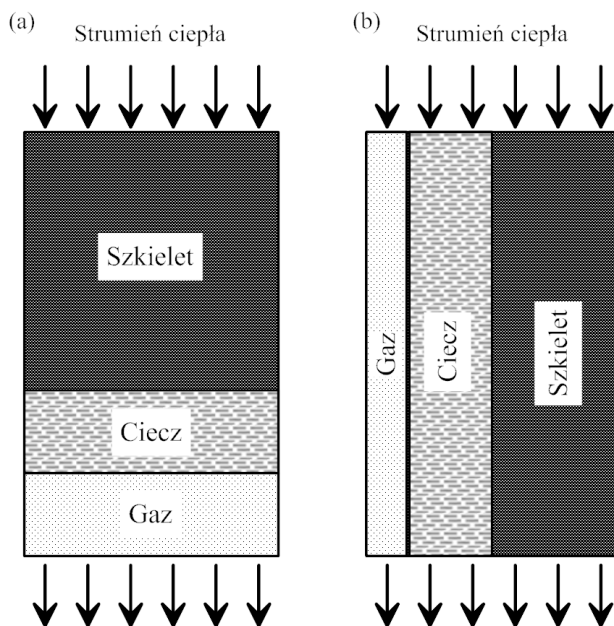
W 1912 roku Wiener (Wiener 1912) zaproponował górne oraz dolne ograniczenie dla przewodności cieplnej ośrodka porowatego składającego się z trzech odrębnych faz: ciała stałego (szkielet), cieczy oraz gazu (rys. 3.1).

Dolne ( $\lambda^L$ ) oraz górne ( $\lambda^U$ ) oszacowanie przewodności cieplnej uzyskuje się, odpowiednio, dla szeregowego oraz równoległego układu poszczególnych faz, względem kierunku przepływającego strumienia ciepła, tj.:

$$\lambda^L = \left( \sum_i \frac{\phi_i}{\lambda_i} \right)^{-1} \quad (3.1)$$

$$\lambda^U = \sum_i \phi_i \lambda_i \quad (3.2)$$

gdzie  $\phi_i$  oraz  $\lambda_i$  oznaczają, odpowiednio, udział frakcyjny oraz współczynnik przewodności cieplnej fazy  $i$ .

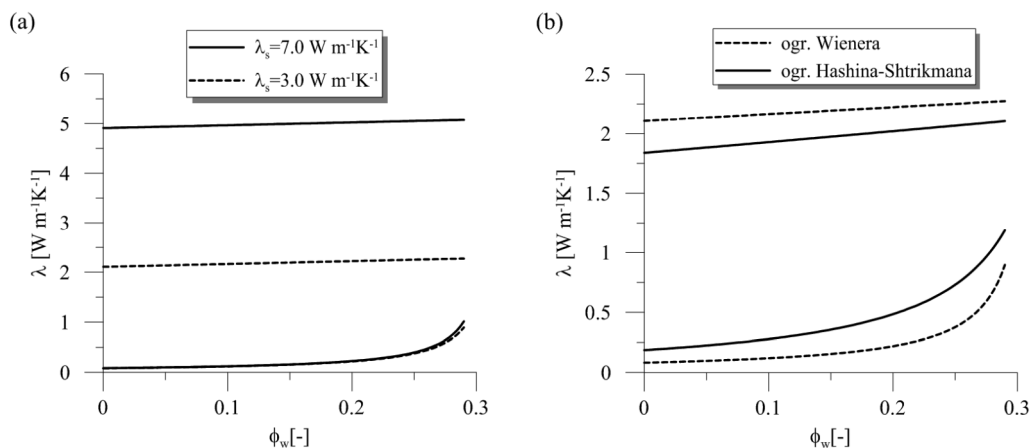


Rys. 3.1. Schemat modelu Wienera (1912):  
 (a) połączenie szeregowe – dolne ograniczenie;  
 (b) połączenie równoległe – górne ograniczenie

Zaproponowane w ten sposób ograniczenia należy traktować jedynie jako zgrubne oszacowanie przedziału możliwych wartości przewodności cieplnej ośrodka porowatego, w szczególności ośrodka gruntowego. Szerokość dopuszczalnego przedziału wartości przewodności cieplnej, wyznaczona na podstawie podanych zależności, silnie zależy od kontrastu pomiędzy przewodnościami cieplnymi poszczególnych składników – im wyższy kontrast pomiędzy parametrami poszczególnych składników, tym granice (3.1) oraz (3.2) są coraz bardziej odległe. Na rysunku 3.2.a przedstawiano ograniczenia Wienera w funkcji udziału frakcyjnego wody  $\phi_w$  dla dwóch różnych wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego  $\lambda_s$ , tj. 3,0 oraz 7,0 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ].

Tak przyjęte wartości  $\lambda_s$  są typowe dla gruntów, których szkielet zbudowany jest głównie z minerałów ilastych ( $3,0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) lub charakteryzuje się dużą zawartością minerałów kwarcowych ( $7,0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ). W obu przypadkach przyjęto, że porowatość gruntu wynosi 30%. Ponadto, ograniczenia Wienera są bardziej odległe od siebie aniżeli omawiane w dalszej części pracy (pkt 4.3.1) ograniczenia Hashina–Shtrikmana (Hashin i Shtrikman 1962; 1963), które dodatkowo zakładają makroskopową izotropię ośrodka gruntowego. Na rysunku 3.2.b przedstawiono porównanie przedziałów moż-

liwych wartości przewodności cieplnej ośrodka gruntowego uzyskanych za pomocą obu ograniczeń. Prezentowane wyniki odpowiadają gruntowi, którego przewodność cieplna szkieletu wynosi  $3,0 \text{ [W m}^{-1}\text{K}^{-1}]$ .



Rys. 3.2. (a) Ograniczenia Wienera dla dwóch różnych wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego oraz (b) porównanie ograniczeń Wienera i Hashina–Shtrikmana ( $\lambda_s = 3,0 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) w funkcji udziału frakcyjnego wody

### 3.1.2. Wzory empiryczne Kerstena

Na podstawie wyników pomiarów przewodności cieplnej 19 gruntów Kersten (1949) zaproponował równania empiryczne do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego na podstawie wilgotności  $w$  [%] oraz gęstości objętościowej szkieletu gruntowego  $\rho_d$  [g/cm<sup>3</sup>]. W przypadku gruntów drobnoziarnistych (pyły, gliny itp.) przewodność cieplną ośrodka gruntowego można szacować na podstawie zależności:

$$\lambda = 0,1442(0,9 \log w - 0,2)10^{0,6243\rho_d} \quad (3.3)$$

Analogiczne równanie dla gruntów gruboziarnistych przedstawia się następująco:

$$\lambda = 0,1442(0,7 \log w + 0,4)10^{0,6243\rho_d} \quad (3.4)$$

Johansen (1975) oraz Farouki (1981) krytycznie odnieśli się do modelu zaproponowanego przez Kerstena (1949), wskazując na jego słabe punkty, tj.:

- równania (3.3) oraz (3.4) nie mogą być stosowane do określania przewodności cieplnej gruntu suchego ( $\lambda^{\text{dry}}$ ),

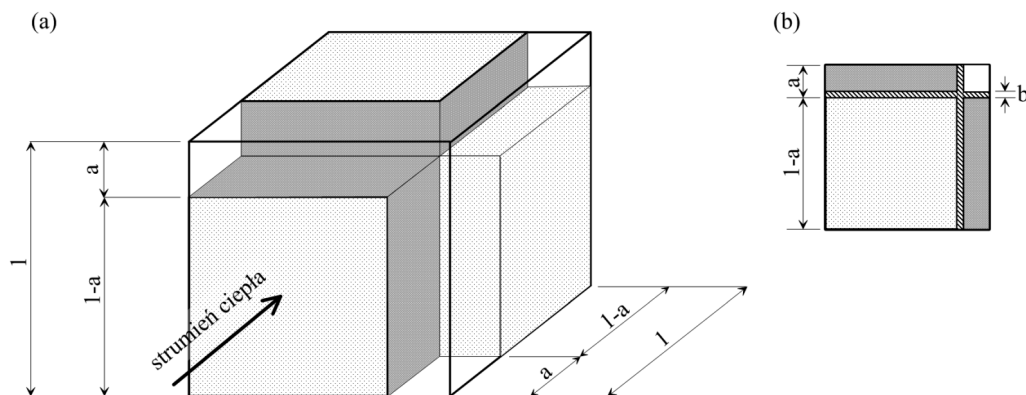
- stosując model Kerstena nie ma możliwości uwzględnienia w analizie zawartości kwarcu w szkielecie gruntowym; w konsekwencji model ten jest niewrażliwy na przewodność cieplną szkieletu gruntowego  $\lambda_s$ ,

- Johansen (1975), wykorzystując model średniej geometrycznej, wykazał, że równania (3.3) i (3.4) implikują zaniżone oraz zawyżone wartości  $\lambda_s$ , odpowiednio, dla gruntów piaszczystych oraz gruntów drobnoziarnistych; może to skutkować, np. niedoszacowaniem przewodności cieplnej piasków o dużej zawartości kwarcu lub znaczącym przeszacowaniem przewodności cieplnej dla gruntu, którego szkielet zbudowany jest głównie z minerałów ilastych,

- Kersten nie badał przewodności cieplnej gruntów w stanie pełnej saturacji; przewodność cieplna dla  $S_r = 1$  została określona na podstawie ekstrapolacji wyników, co może skutkować tym, iż równania (3.3) oraz (3.4) nie zapewnią dobrej predykcji przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia porów wodą.

### 3.1.3. Model Mickleya

W pracy Mickleya (1951) założono, że modelem elementarnej objętości gruntu jest jednostkowy sześcian z wyodrębnionymi „kanałami”, wypełnionymi powietrzem lub/i wodą (rys. 3.3).



Rys. 3.3. Jednostkowy sześcian rozpatrywany przez Mickleya (Farouki 1981):  
(a) widok izometryczny; (b) widok boczny przedstawiający warstwę wody

W przypadku gruntu suchego ( $S_r = 0$ ) po założeniu kierunku przepływu ciepła (rys. 3.3a), zaproponowany przez Mickleya układ warstw implikuje, że ciepło przepływa jednocześnie przez cztery wyodrębnione kolumny: (1) wypełniona powietrzem przestrzeń pomiędzy skrajnymi ścianami sześcianu o polu powierzchni przekroju  $a^2$  i jednostkowej długości, (2) szkielet gruntowy pomiędzy skrajnymi ścianami sześcia-

nu o polu powierzchni przekroju  $(1 - a)^2$  i jednostkowej długości oraz (3) i (4) dwie kolumny (powietrze oraz szkielet gruntowy) w połączeniu szeregowym, każda o polu powierzchni przekroju  $a(1 - a)$  i długości  $a$  oraz  $1 - a$ , odpowiednio, dla powietrza i szkieletu gruntowego. Dodając do siebie „udział” w transporcie ciepła każdej z kolumn, uzyskuje się następujący związek określający przewodność cieplną suchego ośrodka gruntowego:

$$\lambda^{\text{dry}} = \lambda_p a^2 + \lambda_s (1-a)^2 + \frac{\lambda_s \lambda_p (2a - 2a^2)}{\lambda_s a + \lambda_p (1-a)} \quad (3.5)$$

przy czym  $\lambda_p$  oznacza przewodność cieplną powietrza. Dla gruntu znajdującego się w stanie pełnego nasycenia ( $S_r = 1$ ), podczas określania przewodności cieplnej należy w zależności (3.5) zastąpić  $\lambda_p$  współczynnikiem przewodności cieplnej dla wody, tj.  $\lambda_w$ . Wówczas uzyskuje się następującą zależność do określania wartości  $\lambda^{\text{sat}}$ :

$$\lambda^{\text{sat}} = \lambda_w a^2 + \lambda_s (1-a)^2 + \frac{\lambda_s \lambda_w (2a - 2a^2)}{\lambda_s a + \lambda_w (1-a)} \quad (3.6)$$

W przypadku gruntów częściowo nasyconych model geometryczny zaproponowany przez Mickleya zakłada istnienie dodatkowych kolumn o szerokości  $b$ , w całości wypełnionych wodą (por. rys. 3.3b). Zauważmy, że woda zajmuje w tym przypadku część kanału wypełnionego powietrzem. Zakładając zatem, że pozostała szerokość kanału powietrza wynosi  $c = a - b$ , można pokazać, że przewodność cieplna częściowo nasyconego ośrodka gruntowego wyraża się następującym wzorem:

$$\lambda = \lambda_p c^2 + \lambda_s (1-a)^2 + \lambda_w (a-c)^2 + \frac{2\lambda_w \lambda_p c(a-c)}{\lambda_w c + \lambda_p (1-c)} + \frac{2\lambda_s \lambda_w \lambda_p c(1-a)}{\lambda_w \lambda_s c + \lambda_s \lambda_p (a-c) + \lambda_w \lambda_p (1-a)} + \frac{2\lambda_w \lambda_s (a-c)(1-a)}{\lambda_s a + \lambda_w (1-a)} \quad (3.7)$$

Obecne w podanych równaniach wielkości geometryczne  $a$  oraz  $c$  należy określać na podstawie porowatości gruntu  $n$  oraz stopnia nasycenia  $S_r$  przez rozwiązanie równań:

$$3a^2 - 2a^3 = n \quad (3.8)$$

oraz

$$3c^2 - 2c^3 = n(1 - S_r) \quad (3.9)$$

W pracach (Farouki 1982; Dong i in. 2015) wskazano na fakt, iż model Mickleya nie jest odpowiedni do szacowania przewodności cieplnej gruntów o relatywnie dużej

porowatości. Jednocześnie stosując wzór (3.5) lub (3.7), uzyskuje się słabe predykcje dla przypadku gruntów suchych lub zawierających małą ilość wody (Farouki 1981).

### 3.1.4. Model Gemanta

W 1952 roku Gemant (1952) zaproponował model teoretyczny do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego bazujący na wyidealizowanym kształcie ziarna – sześciian o boku  $a$ , którego trzy ściany tworzą „piramidy” o podstawie kwadratu. Gemant założył, że szkielet gruntowy uformowany jest z wyidealizowanych ziaren w taki sposób, że poszczególne cząstki stykają się ze sobą wierzchołkami „piramid”, a wokół punktów kontaktowych gromadzi się woda, tworząc tzw. mostki termiczne (rys. 3.4). Zakładając przepływ ciepła przez mostki termiczne, Gemant (1952) zaproponował następującą formułę do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\left[ \frac{(1-a)}{a} \right]^{\frac{4}{3}} \arctan \left[ \frac{\lambda_s - \lambda_w}{\lambda_w} \right]^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ \lambda_w (\lambda_s - \lambda_w) \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 - z_w}{\lambda_s a} f \left\{ \frac{b^2}{a} \right\} \quad (3.10)$$

W powyższej zależności  $\lambda_s$  i  $\lambda_w$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ] oznaczają, odpowiednio, przewodność cieplną szkieletu gruntowego oraz wody. Pozostałe wartości parametrów modelu należy wyznaczać, stosując następujące zależności:

$$a = 4,869 \sqrt{\rho_d} \quad (3.11)$$

$$h = 9,988 \times 10^{-3} \rho_d w - h_0 \quad (3.12)$$

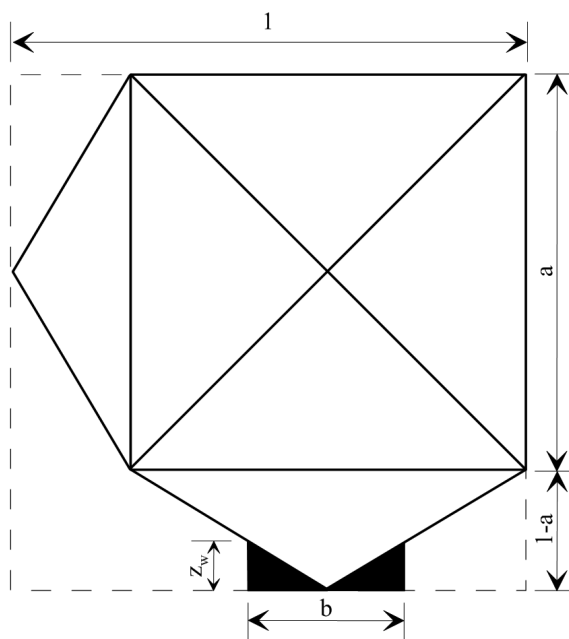
$$z_w = \left( \frac{1-a}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.13)$$

$$b^2 = \left[ \frac{a}{1-a} \right]^{\frac{2}{3}} \left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.14)$$

Równanie (3.12), w szczególności symbol  $h$  [–], określa ilość wody zgromadzonej wokół punktów kontaktowych. Wielkość ta zależy od wilgotności gruntu,  $w$  [%], oraz od ilości wody zaabsorbowanej w postaci cienkiego filmu wytworzonego na po-

wierzchniach ziarna,  $h_0$  [-]. Wartość  $h_0$  zależy od temperatury i należy ją odczytywać z odpowiedniego nomogramu, np. dla temperatury 20 °C wartość  $h_0$  wynosi około 0,01 (Farouki 1981). Analogicznie, tj. używając odrębnego nomogramu, określa się wartość bezwymiarowej funkcji  $f\{b^2/a\}$ . W celu ułatwienia korzystania z predykcji, określonej wzorem (3.10), we wcześniejszej pracy autora pokazano, że wartość tej funkcji można przybliżyć następującą zależnością (Różański i Stefaniuk 2016a):

$$f\left\{\frac{b^2}{a}\right\} = \frac{1}{0,976 + 0,2355 \ln\left(\frac{b^2}{a}\right)} \quad (3.15)$$



Rys. 3.4. Wyidealizowany model ziarna wg Gemanta (Farouki 1981)

Williams i Kaplar (1968) wskazali na słabą jakość oszacowania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego za pomocą wzoru (3.10). Zastosowali oni model Gemanta do gruntów rozważanych przez Kerstena (1949). Rozbieżność wyników sięgała w niektórych przypadkach ponad 100%. Błędy oszacowania wynikają głównie z faktu, iż Gemant proponował określać przewodność cieplną szkieletu gruntowego jedynie na podstawie udziału objętościowego frakcji ilowej. Zaproponowany przez Gemanta wzór może zaniżać przewodność szkieletu gruntowego  $\lambda_s$ , zwłaszcza w przypadku dużej zawartości kwarcu, a jednocześnie przeszacowywać ją dla gruntów, których szkielet składa się głównie z minerałów ilastych (Różański i Stefaniuk 2016a). W pracy

Faroukiego (Farouki 1982) uzyskano wyraźnie lepsze predykcje przewodności cieplnej dla gruntów Kerstena, stosując odpowiednio dobrane wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Problem określania wartości  $\lambda_s$  szerzej omówiono w rozdziale 6.

Należy również zwrócić uwagę na fakt, iż równania (3.10) nie można stosować do określania przewodności cieplnej gruntów suchych ( $S_r = 0$ ). Ponadto, ze względu na założony typ kontaktu międzyziarnowego, model Gemanta znacznie lepiej przewidyuje przewodność cieplną gruntów niespoistych (zwłaszcza gruntów piaszczystych), w porównaniu do możliwych predykcji uzyskiwanych dla gruntów spoistych (Gemant 1952; Farouki 1981, 1982).

### 3.1.5. Model de Vriesa

Model zaproponowany przez de Vriesa (de Vries 1963) bazuje na równaniu Maxwella określającym efektywną przewodność elektryczną mieszaniny sferycznych cząstek rozproszonych w ciągłym płynie (Eucken 1932). De Vries założył, że ośrodek gruntowy można zamodelować jako mieszaninę  $N$  cząstek o elipsoidalnych kształtach rozproszonych w ciągłej matrycy (będącej wodą lub powietrzem, w zależności od stopnia nasycenia gruntu). Wówczas przewodność cieplną ośrodka gruntowego określa się zgodnie z zależnością:

$$\lambda = \frac{\phi_0 \lambda_0 + \sum_{i=1}^N F_i \phi_i \lambda_i}{\phi_0 + \sum_{i=1}^N F_i \phi_i} \quad (3.16)$$

w której indeksy dolne 0 oraz  $i$  oznaczają, że dany parametr charakteryzuje, odpowiednio, ciągłą matrycę lub rozproszone w niej elipsoidalne wtrącenia. Obecne w równaniu (3.16) współczynniki wagowe  $F_i$  wyznacza się, stosując następującą zależność:

$$F_i = \frac{2}{3} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_i - \lambda_0}{\lambda_0} \right) g_a \right]^{-1} + \frac{1}{3} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_i - \lambda_0}{\lambda_0} \right) (1 - 2g_a) \right]^{-1} \quad (3.17)$$

gdzie  $g_a$  jest parametrem definiującym kształt elipsoidalnego wtrącenia. W swojej pracy de Vries (1963) proponował przyjmować wartość parametru  $g_a$  równą 0,125. Uzyskiwał wówczas dość dobrą zgodność pomiędzy wynikami pomiarów a predykcjami przewodności cieplnej dla gruntów w pełni nasyconych wodą. W przypadku gruntów suchych, predykcje uzyskiwane zgodnie z zależnością (3.17) okazały się znacznie zaniżone względem wyników uzyskanych z pomiarów; de Vries (1963) sugerował, aby oszacowane w ten sposób wartości przewodności cieplnej zwiąk-



sząć o 25%. Uzyskiwane rozbieżności mogą być konsekwencją tego, iż zaproponowany model bazuje na schemacie Maxwella (por. Łydźba 2011), który zakłada brak interakcji pomiędzy poszczególnymi składnikami zanurzonymi w ciągłej matrycy, tj. w wodzie lub w powietrzu.

Największą przeszkodą w efektywnym stosowaniu modelu de Vriesa jest fakt, iż każdy z minerałów tworzących szkielet gruntowy charakteryzuje się własną przewodnością cieplną (tab. 2.2) oraz odrębnym kształtem opisanym współczynnikiem  $g_a$ . Jak pokazano w pracach Tarnawskiego i Wagnera (1992; 1993), aby uzyskać dobrą predykcję przewodności cieplnej gruntów mineralnych, należy w równaniu (3.16) uwzględnić informację o przewodnościach cieplnych oraz kształtach co najmniej pięciu rodzajów minerałów, tj. kwarc, mika, skalenie, kalcyt oraz minerały ilaste.

Dodatkową trudność stanowi fakt, iż osobnej analizy wymagają wtrącenia opisujące przestrzeń porową wypełnioną powietrzem. W oryginalnym sformułowaniu de Vriesa założono, że wraz ze wzrostem udziału frakcyjnego powietrza,  $\phi_p$ , wartość współczynnika kształtu dla wtrąceń elipsoidalnych opisujących powietrze maleje liniowo, zgodnie z zależnością:

$$g_a = 0,333 - \left( \frac{\phi_p}{n} \right) (0,333 - 0,035) \quad (3.18)$$

Łatwo zauważyć, że współczynnik  $g_a$  osiąga wartość maksymalną wynoszącą 0,333, gdy  $\phi_p = 0$  oraz wartość minimalną 0,035, gdy  $\phi_p = n$ . Sugeruje się, że nie powinno się kontynuować obliczeń z wykorzystaniem równania (3.16) z założeniem ciągłości fazy płynnej (wody), jeśli udział frakcyjny wody jest mniejszy niż 0,03 lub 0,05–0,10, odpowiednio, dla gruntów grubo- i drobnoziarnistych.

Zaletą modelu de Vriesa jest możliwość określania przewodności cieplnej zamrożonych lub częściowo zamrożonych gruntów. Szacowanie przewodności cieplnej w takim przypadku jest ważne dla terenów, w których często dochodzi do przemarzania gruntu. Przewodność cieplna gruntów zamrożonych nie jest omawiana w tej pracy; zainteresowanych możliwością wykorzystania modelu de Vriesa do określania przewodności cieplnej takich gruntów odsyła się np. do prac Faroukiego (1981; 1982), Fuchsa i in. (1978) oraz Tiana i in. (2016).

### 3.1.6. Metoda Johansena wraz z późniejszymi jej modyfikacjami

Johansen (1975) zaproponował określanie przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego na podstawie przewodności cieplnych gruntu suchego oraz w stanie pełnego nasycenia wodą. W tym celu wprowadził znormalizowaną (bezwymiarową) przewodność cieplną, znaną również pod pojęciem liczby Kerstena (ang. *Kersten number*), zdefiniowaną następującą zależnością:

$$K_e = \frac{(\lambda - \lambda^{\text{dry}})}{(\lambda^{\text{sat}} - \lambda^{\text{dry}})} \quad (3.19)$$

Bazując na danych zawartych w pracy Kerstena (1949), Johansen zaproponował następujące wzory korelacyjne pomiędzy liczbą Kerstena,  $K_e$  a stopniem nasycenia  $S_r$ :

$$K_e \cong 0,7 \log S_r + 1,0 \quad (3.20)$$

oraz

$$K_e \cong \log S_r + 1,0 \quad (3.21)$$

Wzór (3.20) obowiązuje dla gruntów gruboziarnistych i jest ważny pod warunkiem, że  $S_r > 0,05$ . Zależność (3.21) należy stosować do określenia liczby Kerstena dla gruntów drobnoziarnistych, przy czym jest ona ważna dla wartości  $S_r$  większych niż 0,1.

Do określania przewodności cieplnej gruntów w stanie suchym zaproponowano następującą zależność empiryczną (Johansen 1975):

$$\lambda^{\text{dry}} = \frac{0,135\rho_d + 64,7}{2700 - 0,947\rho_d} \quad (3.22)$$

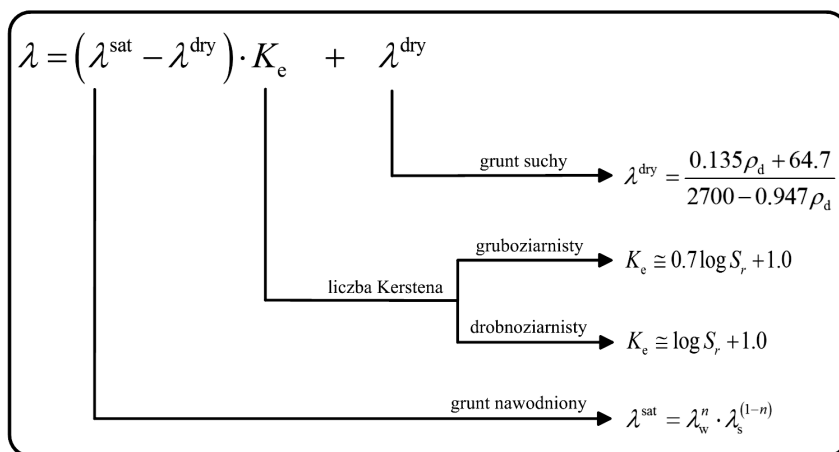
gdzie gęstość objętościową szkieletu gruntowego  $\rho_d$  należy przyjmować w jednostkach  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ . Jednocześnie we wzorze (3.22) przyjęto, że gęstość właściwa szkieletu gruntowego  $\rho_s$  wynosi  $2700 [\text{kg}/\text{m}^3]$ . Stosując zależność (3.22), należy spodziewać się możliwego rozrzutu wyników – względem wartości pomierzonych – na poziomie  $\pm 20\%$  (Johansen 1975; Farouki 1981).

Zgodnie z propozycją Johansena (1975), przewodność cieplną gruntu w stanie pełnego nasycenia wodą należy określać wg równania tzw. średniej geometrycznej, na podstawie porowatości oraz przewodności cieplnych szkieletu gruntowego i wody, tj.:

$$\lambda^{\text{sat}} = \lambda_w^n \lambda_s^{(1-n)} \quad (3.23)$$

Na diagramie (rys. 3.5) graficznie przedstawiono schemat postępowania podczas określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego z zastosowaniem metody Johansena. W odróżnieniu od oryginalnego schematu przedstawionego w pracy Johansena (1975), na rys. 3.5 pominięto wzory dotyczące wyznaczania liczby Kerstena oraz przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia dla gruntów zamrożonych (metoda Johansena w oryginalnym sformułowaniu zawiera również wzory do określania tych wielkości). Ponadto pomija się tutaj problem wyznaczania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego – szczegóły dotyczące tego zagadnienia, jak wspomniano już wcześniej, przedstawiono w rozdziale 6.

Metoda Johansena uznana jest w literaturze za zapewniającą jedną z lepszych predykcji przewodności cieplnej ośrodków gruntowych (Farouki 1981; Dong i in. 2015; Zhang i Wang 2017). Z powodzeniem może być stosowana do niemal wszystkich rodzajów gruntów, również gruntów zamrzniętych (Zhang i Wang 2017), pomimo iż zaproponowana ponad 40 lat temu metoda ta wciąż jest wykorzystywana w praktyce inżynierskiej. Ponadto od czasu jej sformułowania w 1975 r. była przedmiotem badań wielu naukowców i doczekała się kolejnych modyfikacji. Zmiany dotyczą głównie wprowadzenia nieco poprawionej (względem równań (3.20) oraz (3.21)) postaci funkcji opisującej zależność  $K_e - S_r$  oraz propozycji nowych związków określających przewodność cieplną gruntów w stanie suchym. W dalszej części tego punktu przedstawiono ważniejsze modyfikacje metody Johansena.



Rys. 3.5. Graficzna prezentacja procedury określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego zgodnie z metodą Johansena (Johansen 1975)

Côté i Konrad (2005a; 2005b) zaproponowali zmodyfikowaną postać funkcji opisującej zależność liczby Kerstena od stopnia wilgotności przez wprowadzenie dodatkowego parametru  $\kappa$  odzwierciedlającego rodzaj gruntu:

$$K_e = \frac{\kappa S_r}{1 + (\kappa - 1) S_r} \quad (3.24)$$

Wartość parametru  $\kappa$  należy przyjmować równą 4,60 dla żwirów i piasków grubych, 3,55 dla piasków średnich i drobnych, 1,90 dla gruntów pylastych i ilastych oraz 0,60 dla gruntów organicznych.

W pracy (Côté i Konrad 2005b) przeanalizowano również 220 wyników pomiarów przewodności cieplnej w celu sformułowania nowej zależności empirycznej do określania przewodności gruntu w stanie suchym. Zaproponowano wzór korelacyjny-

ny, w którym wartość  $\lambda^{\text{dry}}$  zależy nie tylko od porowatości (jak to było pierwotnie w sformułowaniu Johansena – zależność (3.22)), ale również od dwóch parametrów opisujących rodzaj gruntu oraz kształt ziaren, tj.:

$$\lambda^{\text{dry}} = \chi 10^{-\eta n} \quad (3.25)$$

Dopasowując krzywą opisaną równaniem (3.25) do wyników pomiarów, ustalono optymalne wartości parametrów  $\chi$  oraz  $\eta$ , w zależności od rodzaju gruntu:  $\chi = 0,75$  i  $\eta = 1,20$  dla gruntów mineralnych oraz  $\chi = 0,30$  i  $\eta = 0,87$  dla gruntów organicznych. Stosując zmodyfikowane podejście do określania przewodności cieplnej gruntów, Côté i Konrad (2005b) otrzymali w wielu przypadkach nieco lepsze predykcje względem oszacowań uzyskanych dla pierwotnego sformułowania Johansena (1975).

W pracy Lu i in. (2007) sformułowano jeszcze inną postać funkcji opisującej zależność  $K_e - S_r$ . Wprowadzono parametr  $\alpha$  będący odzwierciedleniem rodzaju gruntu i zaproponowano związek w postaci następującej funkcji eksponencjalnej:

$$K_e = \exp\left\{\alpha \left[1 - S_r^{(\alpha-1,33)}\right]\right\} \quad (3.26)$$

przy czym wartość parametru  $\alpha$  należy przyjmować, jako równą 0,96 lub 0,27, odpowiednio, dla gruntów grubo- i drobnoziarnistych. Dla rozważanych w pracy (Lu i in. 2007) gruntów stwierdzono również, że przewodność w stanie suchym jest liniowo zależna od porowatości:

$$\lambda^{\text{dry}} = 0,51 - 0,56n \quad (3.27)$$

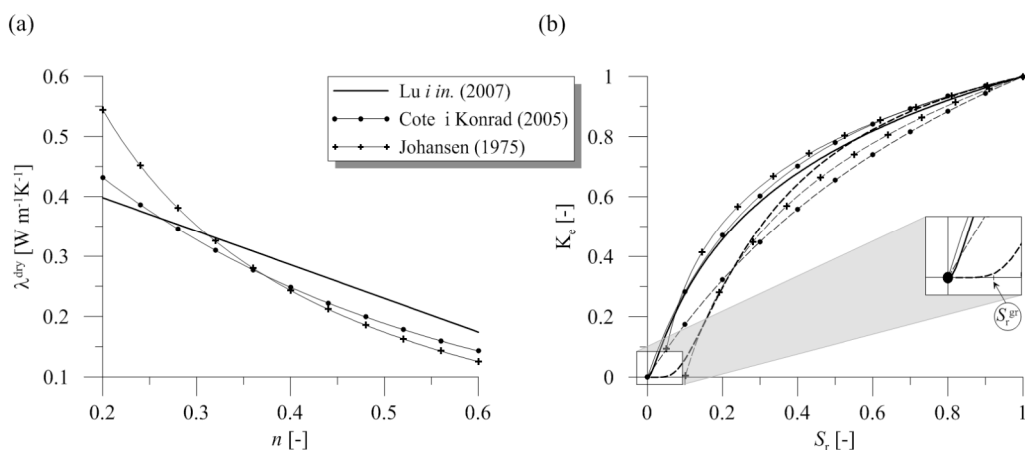
Na rysunku 3.6a przedstawiono zależność przewodności cieplnej gruntu w stanie suchym od porowatości (w zakresie wartości  $n$  0,2–0,6) dla modelu Johansena (wzór (3.22)) oraz jego późniejszych modyfikacji (wzory (3.25) oraz (3.27)). Wartość przewodności cieplnej określona na podstawie propozycji Lu i in. (2007), w przedziale porowatości od 0 do 0,3, jest wyraźnie poniżej oszacowania wynikającego z metody Johansena (1975) i jednocześnie jest bliska oszacowaniu wynikającemu z propozycji Côté i Konrada (2005b). Dla wartości porowatości powyżej 0,3, sytuacja jest odwrotna – wartość  $\lambda^{\text{dry}}$  określona wzorem (3.27) znajduje się powyżej dwóch pozostałych oszacowań (wzory (3.22) oraz (3.25)). Ponadto dla wspomnianego przedziału wartości porowatości ( $n$  większe od około 0,3), oszacowania Johansena (1975) oraz Côté i Konrada (2005b) dają zbliżone wyniki.

Na rysunku 3.6b zaprezentowano różnice wynikające z modyfikacji metody Johansena (1975) w kontekście zależności liczby Kerstena  $K_e$  od stopnia wilgotności gruntu  $S_r$ . Liniami ciągłymi oznaczono predykcje dla gruntów gruboziarnistych, natomiast liniami przerywanymi te uzyskane dla gruntów drobnoziarnistych. Względem oryginalnej zależności, zaproponowanej przez Johansena (1975), nowe propozycje wprowadzają możliwość określenia liczby Kerstena dla pełnego zakresu wartości  $S_r$ ,

ty. od 0 do 1. W przypadku gruntów gruboziarnistych (linie ciągłe) najwyższą wartość liczby Kerstena, niemal w pełnym zakresie wartości  $S_r$ , uzyskano stosując pierwotne podejście zaproponowane przez Johansena (1975). W przypadku gruntów drobnoziarnistych dla wartości  $S_r$  większych od około 0,2, najniższą wartość  $K_e$  otrzymano, stosując podejście Côté i Konrada (2005b). Niemal w całym zakresie wartości  $S_r$  oszacowanie liczby Kerstena, uzyskane ze wzoru zaproponowanego przez Lu i in. (2007), znajduje się między estymacjami określonymi na podstawie podejścia pierwotnego (Johansen, 1975) oraz jego modyfikacji zaproponowanej przez Côté i Konrada (2005b). Ponadto wydaje się, że propozycja Lu i in. (2007) najlepiej oddaje charakterystykę termiczną gruntów drobnoziarnistych – nagły przyrost wartości przewodności cieplnej następuje dopiero po przekroczeniu pewnej wartości stopnia wilgotności,  $S_r = S_r^{gr}$ . W przedziale  $0 \leq S_r \leq S_r^{gr}$  przyrost wartości liczby Kerstena (a w konsekwencji przewodności cieplnej ośrodka gruntowego) jest niemal niezauważalny (rys. 3.6b). Jest to konsekwencją omawianej wcześniej morfologii mikrostruktury (kształt oraz wielkość ziaren) gruntów drobnoziarnistych (por. np. Gangadhara i Singh 1999; Zhang i in. 2017).

Najnowszą propozycją zależności funkcyjnej pomiędzy liczbą Kerstena a stopniem wilgotności jest ta zaproponowana w pracy He i in. (2017):

$$K_e = \begin{cases} 0 & \text{dla } S_r = 0 \\ \frac{1}{A \exp \left[ (S_r n)^{-B} \right]} & \text{dla } S_r > 0 \end{cases} \quad (3.28)$$



Rys. 3.6. Graficzna prezentacja różnic wynikających z modyfikacji metody Johansena:

- przewodność cieplna gruntu w stanie suchym w funkcji porowatości;
- zależność liczby Kerstena od stopnia wilgotności

gdzie  $A$  oraz  $B$  są parametrami, których wartość określa się przez najlepsze dopasowanie zależności (3.28) do wyników pomiarów przewodności cieplnej. Skuteczność modelu została zweryfikowana na podstawie wyników badań dostępnych w literaturze (wykorzystano wyniki z prac Chena (2008) oraz Tarnawskiego i in. (2013; 2015)). Uzyskano bardzo dobrą jakość predykcji dla szerokiego zakresu stopnia wilgotności. W zależności od rodzaju gruntu wartości parametrów  $A$  oraz  $B$  znajdowały się w przedziale, odpowiednio, 0,2–0,35 oraz 0,15–0,6. Jednakże, brak informacji o tym, w jaki sposób należy określać wartości parametrów  $A$  oraz  $B$  powoduje, że model ten nie może być wykorzystywany w praktyce inżynierskiej. W konkluzji pracy (He i in. 2017) autorzy wspominają o tym, iż w najbliższej przyszłości podejmą próbę określenia zależności korelacyjnych umożliwiających wyznaczenie wartości parametrów modelu.

### 3.1.7. Model Donazziego i innych

Donazzi, Occhini i Seppi (Donazzi i in. 1979) badali charakterystykę cieplną oraz hydrologiczną gruntów w otoczeniu instalacji podziemnych. Bazując na wynikach badań laboratoryjnych, zaproponowali następujący wzór korelacyjny do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, tj.:

$$\lambda = \lambda_w^n \lambda_s^{(1-n)} \exp\left(-3,08n(1-S_r)^2\right) \quad (3.29)$$

Wzór (3.29) może być aplikowany do wszystkich rodzajów gruntów. Jego niewątpliwą zaletą jest prostota – do szacowania przewodności cieplnej konieczne jest jedynie wyznaczenie dwóch stosunkowo łatwo mierzalnych wartości, tj. porowatości oraz stopnia nasycenia porów wodą. Jak zauważyli Zhang i in. (2017), wzór empiryczny (3.29) ma słabą dokładność szacowania przewodności cieplnej dla relatywnie małej wartości stopnia wilgotności. Ponadto przebieg funkcji  $\lambda - S_r$  jest nieco inny (wypukłość) od tej obserwowanej w badaniach oraz uzyskiwanej za pomocą pozostałych modeli (Haigh 2012).

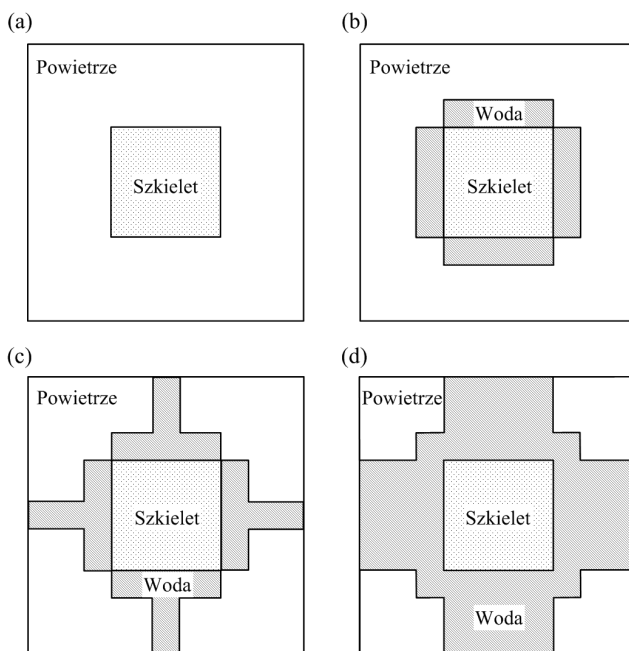
### 3.1.8. Model Goriego

Gori (1983) zaproponował teoretyczny model do określania przewodności cieplnej gruntów w różnych stanach nasycenia. Założył on, że grunt (jako ośrodek wielofazowy) składa się z periodycznych komórek sześciennych z „centralnie” umieszczonym szkieletem (ciało stałe) otoczonym powietrzem (grunt suchy) lub wodą (grunt nasycony) albo powietrzem i wodą jednocześnie (grunt częściowo nasycony). Geometrię reprezentatywnej komórki przedstawiono na rys. 3.7.

Rozważono cztery odrębne stany nasycenia przestrzeni porowej wodą, tj.:

- grunt suchy (rys. 3.7a),
- grunt o relatywnie niskiej wilgotności, utworzony cienki film wodny wokół ziarna (rys. 3.7b),
- grunt w stanie częściowego nasycenia, woda tworzy mostki termiczne (rys. 3.7c),
- grunt w stanie wysokiego nasycenia porów wodą lub w stanie pełnej saturacji (rys. 3.7d).

Pierwotnie model ten został sformułowany do przewidywania zmienności przewodności cieplnej wraz ze zmianą temperatury gruntu. W pracy Goriego i Corasaniti (2002) zastosowano ten model do predykcji przewodności cieplnej gruntów w wysokich temperaturach. Uzyskano bardzo dobrą zgodność z wynikami pomiarów dla zakresu temperatur 30–50 °C. Nieco słabsze predykcje otrzymano dla wartości temperatur około 70–90 °C. Ze względu na fakt, iż procedura obliczeń z wykorzystaniem tego modelu, w porównaniu do większości innych propozycji, jest stosunkowo trudna, zastosowanie tego modelu w praktyce inżynierskiej jest dość ograniczone. Ponadto dużą wadą modelu jest to, iż o ile samo sformułowanie wynika bezpośrednio z rozważań teoretycznych, to wartości wilgotności decydujące o geometrii komórki periodyczności (rys. 3.7) określano empirycznie w zależności od rodzaju gruntu.



Rys. 3.7. Schemat komórki periodyczności wg modelu Goriego (Gori 1983):

- (a) grunt suchy; (b) niska wilgotność – cienki film wokół ziarna;  
 (c) grunt częściowo nasycony – uformowane mostki wodne; (d) stan bliski pełnej saturacji

W sensie obliczeniowym względnie najprostsze wydaje się być określanie przewodności cieplnej gruntów w stanie suchym (rys. 3.7a). Predykcja ta zależy jedynie od porowatości gruntu oraz przewodności cieplnych powietrza i szkieletu gruntowego, dana jest następującą zależnością:

$$\frac{1}{\lambda^{\text{dry}}} = \frac{\psi - 1}{\lambda_p \psi} + \frac{\psi}{\lambda_p (\psi^2 - 1) + \lambda_s} \quad (3.30)$$

gdzie

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{n}{1-n}} \quad (3.31)$$

Jak pokazano w pracach (Tarnawski i in. 2000; Tarnawski i Gori 2002) zależność (3.30) może znacząco zaniżać przewodność cieplną gruntu suchego. Wiadomo jest, że ze względu na duży kontrast pomiędzy przewodnościami szkieletu gruntowego a powietrza, w gruncie znajdującym się w stanie suchym transport ciepła odbywa się głównie przez szkielet gruntowy. Możliwe niedoszacowanie wartości  $\lambda^{\text{dry}}$  jest zatem konsekwencją założonej geometrii komórki periodyczności (rys. 3.7) – szkielet gruntowy, w sąsiadujących ze sobą komórkach, nie ma bezpośredniego połączenia. Tarnawski i Gori (2002) wskazali na ten fakt, porównując predykcje uzyskane z wykorzystaniem relacji (3.30) do wyników pomiarów dostępnych w literaturze (wykorzystano dane z prac: de Vries 1963; Sepaskhah i Boersma 1979; Hopmans i Dane 1986; Campbell i in. 1994; Hiraiwa i Kasubuchi 2000).

W pracy (Gori i Corasaniti 2013) zaproponowano modyfikację oryginalnego sformułowania Goriego z 1983 roku przez przyjęcie zmodyfikowanej geometrii komórki periodyczności. Przyjęto, że grunt składa się z quasi-sferycznego ziarna (szkielet), który jest otoczony dwoma fazami, tj. powietrzem i wodą lub powietrzem i lodem (dla przypadku gruntów zamrożonych). Zaletą nowego modelu jest brak konieczności określania parametrów w sposób empiryczny – wartości poszczególnych stałych wynikają jedynie z rozważań teoretycznych. Z drugiej strony największą wadą jest brak możliwości szybkiego szacowania przewodności cieplnej – wymaga to numerycznego obliczania skomplikowanych całek (Gori i Corasaniti 2013).

Pomimo iż model Goriego (1983) nie jest dość często wykorzystywany w praktyce inżynierskiej do określania przewodności cieplnej gruntów, to na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat podlegał licznym modyfikacjom w celu szacowania przewodności cieplnej cegieł (Gori 1986), dwu- i trójfazowych ośrodków porowatych (Gori i in. 2001; Gori i Corasaniti 2003), materiałów piankowych o niskich gęstościach (Gori i Corasaniti 2001) oraz gruntów zalegających na Marsie (Gori i Corasaniti 2004, 2006).



### 3.1.9. Model Chena

Chen (2008) przeprowadził badania przewodności cieplnej piasków kwarcowych w różnych stanach nasycenia. Na tej podstawie sformułował równanie empiryczne przewodności cieplnej w funkcji porowatości oraz stopnia wilgotności:

$$\lambda = \lambda_w^n \lambda_s^{(1-n)} [(1-b)S_r + b]^{cn} \quad (3.32)$$

Na podstawie wyników pomiarów przewodności cieplnej dla czterech piasków kwarcowych określono parametry modelu jako:  $b = 0,0022$  oraz  $c = 0,78$ . Walidację równania (3.32) przeprowadzono na podstawie własnych pomiarów oraz danych dostępnych w literaturze. Uzyskane predykcje, w pełnym zakresie wartości stopnia wilgotności, okazały się lepsze niż te określone za pomocą modeli Johansena (1975) i Donazziego i in. (1979). Równanie (3.32) ma dobrą dokładność oszacowania gruntów piaszczystych z relatywnie wysoką zawartością kwarcu. W zasadzie, model ten nie ma zastosowania do innych rodzajów gruntów (Zhang i Wang 2017).

### 3.1.10. Model Tonga i innych

Bazując na ograniczeniach Wienera (1912) oraz Hashina-Shtrikmana (1963) w pracy Tonga i in. (2009) rozważano przewodność cieplną wieloskładnikowego ośrodka porowatego. Zaproponowano model, w którym na wartość przewodności cieplnej mają wpływ takie parametry, jak: skład mineralogiczny, temperatura, stopień wilgotności oraz porowatość. Zgodnie z propozycją Tonga i in. (2009), przewodność cieplną trójskładnikowego ośrodka porowatego (ciało stałe, woda, powietrze) określa następująca zależność:

$$\lambda = \eta_1(1-n)\lambda_s + (1-\eta_2) \left[ 1 - \eta_1(1-n)^2 \right] \left[ \frac{(1-n)(1-\eta_1)}{\lambda_s} + \frac{nS_r}{\lambda_w} + \frac{n(1-S_r)}{\lambda_p} \right]^{-1} + \eta_2 \left[ (1-n)(1-\eta_1)\lambda_s + nS_r\lambda_w + n(1-S_r)\lambda_p \right] \quad (3.33)$$

gdzie  $\eta_1$  jest współczynnikiem zależnym od porowatości,  $0 < \eta_1(\eta) < 1$ , natomiast wartość parametru  $\eta_2$  zależy od porowatości, stopnia nasycenia oraz temperatury,  $0 < \eta_2(n, S_r, T) < 1$ . Ograniczenia na wartości współczynników  $\eta_1$  oraz  $\eta_2$  są konsekwencją spełnienia przez wzór (3.33) ograniczeń Wienera (1912) określających dopuszczalny przedział przewodności cieplnej dla trójskładnikowego ośrodka porowatego (zob. pkt 3.1.1).

Za największą wadę modelu uznaje się trudność w określaniu wartości współczynników  $\eta_1$  oraz  $\eta_2$ . Wymaga to wykonania serii badań laboratoryjnych dla próbek materiału porowatego o zróżnicowanych porowatościach i stopniach wilgotności oraz

poddanych działaniu kilku różnych temperatur. W swojej rozprawie doktorskiej Tong (2010) określił wzory korelacyjne do wyznaczenia parametrów  $\eta_1$  oraz  $\eta_2$  dla zaprawy bentonitowej typu MX80 (Villar 2005):

$$\eta_1 = 0,0692n^{-0,7831} \quad (3.34)$$

oraz

$$\eta_2 = 0,59S_r^{1,487n-0,0404} \quad (3.35)$$

Jak wspomniano wcześniej, w oryginalnym sformułowaniu modelu parametr  $\eta_2$  jest również funkcją temperatury  $T$ . Ze względu na brak wyników pomiarów dla różnych temperatur, zależność (3.35) została określona bez uwzględnienia wpływu temperatury; w takim przypadku współczynnik  $\eta_2$  jest jedynie funkcją porowatości oraz stopnia wilgotności (Tong 2010).

### 3.1.11. Model Haigha

Na podstawie rozważań teoretycznych, Haigh (2012) zaproponował model do określania przewodności cieplnej gruntów piaszczystych w różnych stanach nasycenia wodą. Równanie opisujące przewodność cieplną zostało określone na podstawie założonej, uproszczonej geometrii mikrostruktury gruntu. Rozpatrywano jednowymiarowy przepływ ciepła pomiędzy dwoma identycznymi ziarnami o sferycznym kształcie i promieniu  $R$  (rys. 3.8). Założono, że ziarna umieszczone są w cylindrycznej komórce o promieniu  $R$  i długości  $R(1 + \xi)$  – kontakt między ziarnami jest tylko w przypadku, gdy  $\xi = 0$ .

Uzyskane przez Haigha (2012) równanie opisujące przewodność cieplną gruntu wyraża się następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_s} = & 2(1 + \xi)^2 \left\{ \frac{\alpha_w}{(1 - \alpha_w)^2} \ln \left[ \frac{(1 + \xi) + (\alpha_w - 1)x}{\xi + \alpha_w} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_p}{(1 - \alpha_p)^2} \ln \left[ \frac{(1 + \xi)}{(1 + \xi) + (\alpha_p - 1)x} \right] \right\} + \\ & + \frac{2(1 + \xi)}{(1 - \alpha_w)(1 - \alpha_p)} \left[ (\alpha_w - \alpha_p)x - (1 - \alpha_p)\alpha_w \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

gdzie  $\alpha_w = \lambda_w/\lambda_s$  oraz  $\alpha_p = \lambda_p/\lambda_s$ . Ponadto  $\xi$  oraz  $x$  są wielkościami zależnymi od porowatości oraz stopnia wilgotności i należy je określać zgodnie z wzorami:

$$\xi = \frac{3n-1}{3(1-n)} \quad (3.37)$$

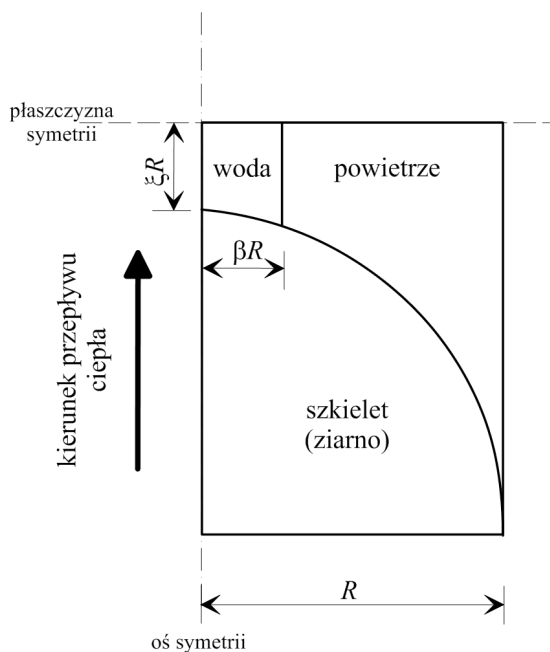
oraz

$$x = \left( \frac{1+\xi}{2} \right) (1 + \cos \vartheta - \sqrt{3} \sin \vartheta) \quad (3.38)$$

Obecny w równaniu (3.38) bezwymiarowy parametr  $\vartheta$  wyznacza się przez rozwiązanie równania:

$$\cos 3\vartheta = \frac{2(1+3\xi)(1-S_r) - (1+\xi)^3}{(1+\xi)^3} \quad (3.39)$$

Jakość oszacowania wynikającego ze wzoru (3.39) została zweryfikowana względem wyników pomiarów przewodności cieplnej dla gruntów piaszczystych rozważanych w pracy Chena (2008). Jakościowo predykcja okazała się satysfakcjonująca – w pełnym zakresie stopnia wilgotności przebieg funkcji  $\lambda-S_r$  dość dobrze oddaje charakterystykę uzyskaną na podstawie badań laboratoryjnych. Pod względem oceny ilościowej wzór (3.39), dla wszystkich rozważanych pomiarów, zaniżał wartość przewodności cieplnej mniej więcej o stały współczynnik, wynoszący około 1,58.



Rys. 3.8. Założona geometria modelu ośrodka trójfazowego (Haigh 2012)

Niestety podobnie jak model Chena (2008), tak i rozważany w tym punkcie model Haigha (2012) ma ograniczone zastosowanie – powinien być używany jedynie do predykcji przewodności cieplnej gruntów piaszczystych. Ponadto model ten ma dodatkowe ograniczenie w postaci minimalnej wartości porowatości. Wzór (3.39) jest ważny dla  $n \geq 1/3$  – poniżej tej wartości parametr  $\zeta$  przyjmuje wartości ujemne, niedopuszczalne ze względu na przyjętą geometrię elementarnej objętości gruntu.

### 3.1.12. Model Lu i innych

W pracy Lu i in. (2014) zaproponowano następującą zależność empiryczną do określania przewodności cieplnej gruntów, w różnych stanach nasycenia:

$$\lambda = \lambda^{\text{dry}} + \exp\left[\beta - (S_r n)^{-\alpha}\right] \quad S_r > 0 \quad (3.40)$$

Wartość przewodności cieplnej gruntu w stanie suchym  $\lambda^{\text{dry}}$  określa się na podstawie porowatości gruntu, zgodnie ze wzorem korelacyjnym (3.27) sformułowanym we wcześniejszej pracy autorów (Lu i in. 2007). Przez „wpisanie się” równaniem (3.40) w wyniki pomiarów przewodności cieplnej dla siedmiu gruntów w różnych stanach nasycenia określono wartości parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$ . Na tej podstawie wyznaczono zależności empiryczne do określania parametrów modelu, tj.

$$\alpha = 0,67\phi_{\text{Cl}} + 0,24 \quad (3.41)$$

$$\beta = 1,97\phi_{\text{Sa}} + 1,87\rho_d - 1,36\phi_{\text{Sa}}\rho_d - 0,95 \quad (3.42)$$

gdzie  $\phi_{\text{Cl}}$  oraz  $\phi_{\text{Sa}}$  oznaczają zawartości, odpowiednio, frakcji ilowej oraz piaskowej. Wartość gęstości objętościowej szkieletu gruntowego  $\rho_d$  należy przyjmować w jednostkach [ $\text{g}/\text{cm}^3$ ].

Predykcje uzyskane równaniem (3.40) oraz za pomocą wcześniejszej propozycji autorów (określającej przewodność cieplną zgodnie z metodą Johansena z wykorzystaniem zmodyfikowanej formuły (3.26) opisującej liczbę Kerstena (Lu i in. 2007)) są bardzo zbliżone. W zasadzie nowy model nie poprawia predykcji przewodności cieplnej względem sformułowania z 2007 roku (Lu i in. 2007). Zaletą nowego modelu jest jednak to, iż na wartość przewodności cieplnej wpływa również gęstość objętościowa szkieletu gruntowego (wzór (3.42)). Daje to możliwość szacowania przewodności cieplnej tych samych gruntów, ale w różnych stanach zagęszczenia.

### 3.2. Krytyczna ocena istniejących modeli

Na rysunku 3.9 przedstawiono predykcje uzyskane z zastosowaniem omawianych modeli dla przypadku gruntu gruboziarnistego, tj. piasku o zawartości frakcji piaskowej, pyłowej i iłowej, odpowiednio: 92%, 7% i 1%. Gęstość objętościowa szkieletu gruntowego oraz gęstość właściwa wynoszą, odpowiednio,  $\rho_d = 1,58$  [g/cm<sup>3</sup>] oraz  $\rho_s = 2,65$  [g/cm<sup>3</sup>]. Wyniki pomiarów przewodności cieplnej dla rozważanego gruntu, w różnych stanach nasycenia, pochodzą z pracy Lu, Rena, Gonga i Hortona (Lu i in. 2007). Wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego przyjęto analogicznie do pracy (Lu i in. 2007), tj.  $\lambda_s = 6,91$  [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>].

W analizie pominięto ograniczenia Wienera – ze względu na duży kontrast pomiędzy przewodnościami szkieletu gruntowego oraz powietrza i wody (zob. tab. 2.1), ograniczenia te są od siebie bardzo odległe. Na rysunku 3.9 nie przedstawiono również wyników dla modelu Goriego (1983), Tonga i in. (2009) oraz He i in. (2017). Wynika to z tego, iż brak jest dla tych modeli zależności, z których można określić wartości parametrów. Obserwując uzyskane predykcje przewodności cieplnej dla analizowanego piasku, można sformułować następujące wnioski.

Model Kerstena (1949) całkiem dobrze opisuje, w sposób jakościowy, zależność  $\lambda - S_r$ . Pod względem ilościowym wzór Kerstena zaniża wartości przewodności cieplnej dla relatywnie wysokich wartości  $S_r$  – jest to prawdopodobnie konsekwencją tego, iż, jak wspomniano wcześniej, Kersten nie badał gruntów w stanie pełnej saturacji, a przewodność cieplna dla  $S_r = 1$  została określona na podstawie ekstrapolacji wyników.

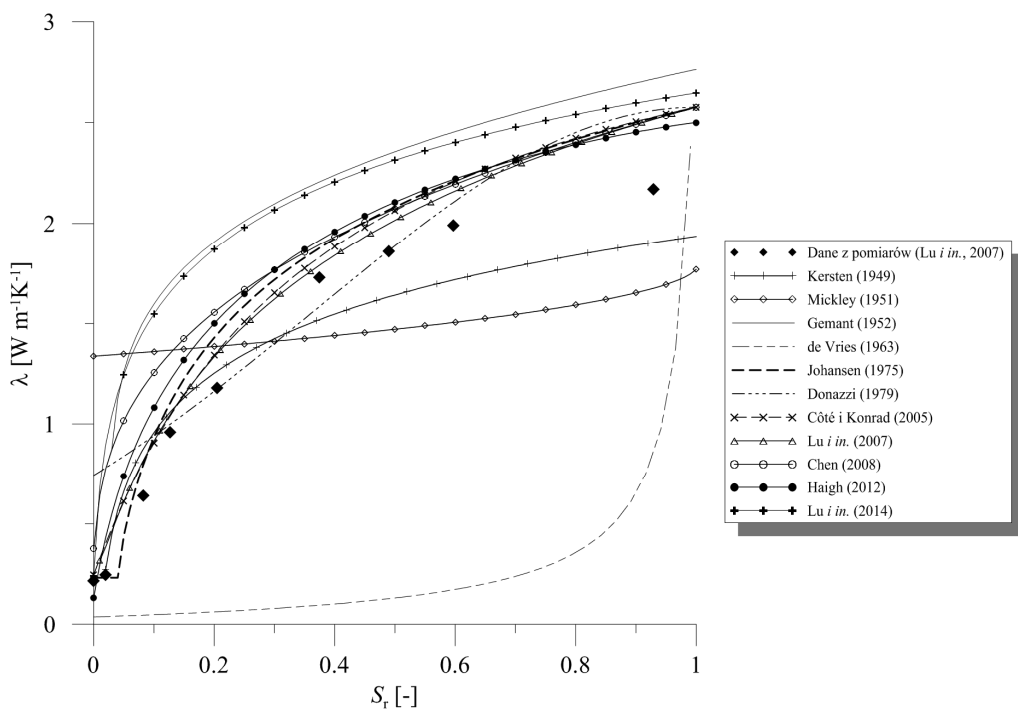
Modele Mickleya (1951) oraz de Vriesa (1963), a zwłaszcza ten drugi, nie oddają poprawnie, zarówno pod względem jakościowym oraz ilościowym charakterystyki termicznej analizowanego gruntu. W przypadku tego pierwszego modelu problemem może być relatywnie wysoka porowatość, około 40%. Model de Vriesa (1963), ze względu na założenia o braku oddziaływania pomiędzy cząsteczkami, wyraźnie nie doszacowuje przewodności cieplnej piasku dla małych wartości  $S_r$ . Ponadto w analizie założono, że szkielet gruntowy jest jednorodny i charakteryzuje się efektywnym współczynnikiem przewodności cieplnej  $\lambda_s$ ; jak wspomniano wcześniej, aby uzyskać lepszą jakość predykcji, należy w równaniu (3.16) uwzględnić niejednorodność szkieletu na podstawie składu mineralogicznego gruntu (por. Tarnawski i Wagner 1992; 1993).

Model Gemanta (1952), w całym zakresie stopnia wilgotności, przeszacowuje przewodność cieplną analizowanego gruntu. Jest to prawdopodobnie konsekwencją tego, iż w pierwotnym sformułowaniu Gemant zaproponował własny wzór do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, bazujący jedynie na podstawie zawartości frakcji iłowej. Należy zauważyć, że stosując oryginalną propozycję Gemanta, przewodność cieplna szkieletu gruntowego wynosiłaby 5,81 [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>], co

względem przyjętej do analizy wartości  $6,91 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$  spowodowałyby wyraźną poprawę predykcji  $\lambda - S_r$ .

Model Donazziego (1979) znacznie zawyża przewodność cieplną dla niskich wartości stopnia wilgotności. Ponadto wypukłość krzywej  $\lambda - S_r$  jest nie do końca zgodna z charakterystyką obserwowaną w badaniach. Modele Chena (2008) oraz Haigha (2012) reprezentują zbliżoną charakterystykę zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym. Warto tu jednak wspomnieć, że predykcje uzyskane za pomocą modelu Haigha (2012), zgodnie z sugestią autora modelu, zwiększono przez przemnożenie o stały współczynnik 1,58.

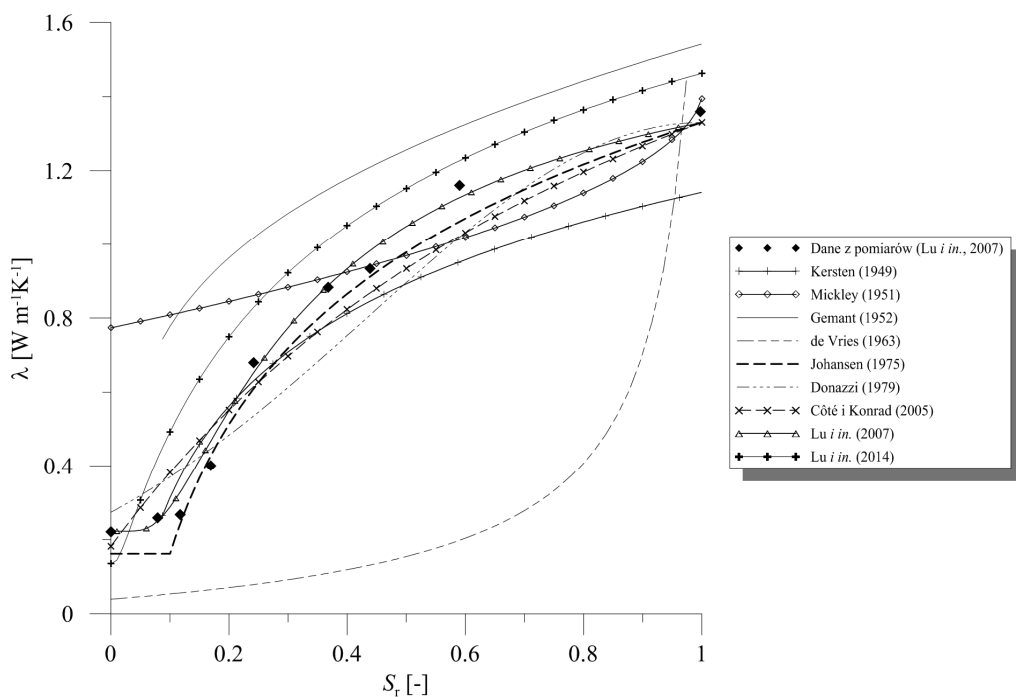
Zaskakująco słabą predykcję uzyskano, stosując model Lu i in. (2014). W zasadzie w całym zakresie przedziału stopnia wilgotności predykcja jest mocno zawyżona względem wyników badań. Może to być konsekwencją tego, iż wzory korelacyjne określające wartości parametrów  $\alpha$  (3.41) oraz  $\beta$  (3.42) wyznaczono na podstawie badań gruntów o relatywnie niskiej zawartości frakcji piaskowej (Lu i in. 2014); analizowany w pracy grunt charakteryzuje się wysoką zawartością frakcji piaskowej, na poziomie 92%.



Rys. 3.9. Predykcja przewodności cieplnej dla piasku, w różnych stanach nasycenia (wyrażonych stopniem wilgotności  $S_r$ ) oraz wyniki pomiarów (dane pomiarowe pochodzą z pracy Lu i in. 2007)

Zbliżone do siebie predykcje, zarówno jakościowo oraz ilościowo, uzyskano z zastosowaniem modeli Johansena (1975), Côté i Konrada (2005b) oraz Lu i in. (2007). Nie jest to zaskoczeniem, gdyż względem propozycji Johansena dwa pozostałe sformułowania wprowadzają jedynie nieznaczne modyfikacje względem oryginalnej zależności definiującej liczbę Kerstena (zob. pkt 3.1.6).

Podobną analizę przeprowadzono dla gruntu drobnoziarnistego, tj. łu o zawartości frakcji piaskowej, pyłowej i iłowej wynoszącej, odpowiednio: 32%, 38% i 30%; gęstość objętościowa szkieletu gruntowego  $\rho_d = 1,29$  [g/cm<sup>3</sup>] oraz gęstość właściwa  $\rho_s = 2,65$  [g/cm<sup>3</sup>]. Podobnie jak poprzednio, wyniki pomiarów przewodności cieplnej oraz przewodność cieplną szkieletu gruntowego ( $\lambda_s = 3,08$  [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>]) dla rozważanego gruntu przyjęto na podstawie pracy Lu i in. (2007). Na rysunku 3.10 zestawiono uzyskane predykcje oraz dane pomiarowe. W analizie pominięto te modele, które dedykowane są dla gruntów piaszczystych, tj. model Chena (2008) oraz model Haigha (2012).



Rys. 3.10. Predykcja przewodności cieplnej dla łu w różnych stanach nasycenia (wyrażonych stopniem wilgotności  $S_r$ ) oraz wyniki pomiarów (dane pomiarowe pochodzą z pracy Lu i in. 2007)

Ponownie największym zaskoczeniem jest bardzo słaba, zawyżona niemal w całym przedziale wartości  $S_r$ , predykcja uzyskana na podstawie modelu Lu i in. (2014). Można mieć zatem uzasadnione wątpliwości, czy wzory korelacyjne (3.41) oraz (3.42)

zostały odpowiednio dobrze skalibrowane dla szerokiego zakresu zawartości poszczególnych frakcji oraz gęstości objętościowej szkieletu gruntowego. Model Johansena (1975) bardzo dobrze wpisuje się w wyniki pomiarów laboratoryjnych, z wyjątkiem przewodności cieplnej odpowiadających małym wartościom  $S_r$  (zaniża również przewodność cieplną gruntu w stanie suchym). Model Côté i Konrada (2005b) zachowuje się analogicznie do tego, w jaki sposób modyfikuje liczbę Kerstena względem propozycji Johansena (por. rys. 3.6b). Model Lu i in. (2007) zdecydowanie najlepiej oddaje charakterystykę termiczną analizowanego gruntu drobnoziarnistego. Jest to konsekwencja wprowadzenia odpowiednio zdefiniowanej zależności  $K_e - S_r$  (wzór (3.26), por. rys. 3.6) – zostało to szerzej omówione w punkcie 3.1.6.

W opisie każdego z modeli, jak również w powyższej analizie, autor starał się wskazać najważniejsze aspekty dotyczące każdego modelu, wskazując na ich ograniczony zakres stosowalności oraz możliwe obniżenie jakości predykcji w szczególnych przypadkach. Jednakże, aby ułatwić czytelnikowi dobór odpowiedniego modelu do konkretnej sytuacji obliczeniowej, w tab. 3.1 zestawiono najważniejsze, zdaniem autora, wady oraz zalety wszystkich omawianych modeli wraz z uwagami dotyczącymi zakresu ich stosowalności.

Tabela 3.1. Zestawienie omawianych modeli opisujących przewodność cieplną gruntów

Model	Zalety	Wady	Uwagi
Wiener (1912)	Określenie dopuszczalnego przedziału możliwych wartości przewodności cieplnej ośrodków porowatych; prosta formuła	Bardzo zgrubne oszacowanie	W przypadku gruntów (zwłaszcza gruboziarnistych), ze względu na znaczny kontrast pomiędzy przewodnościami cieplnymi składników, granice te są od siebie bardzo odległe
Kersten (1949)	Prosta formuła; zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu	Wzory nie uwzględniają zawartości kwarcu (możliwe zaniżanie wartości przewodności cieplnej gruntów gruboziarnistych o dużej zawartości kwarcu)	Wzory empiryczne; nie można określać przewodności cieplnej w stanie suchym; Kersten nie badał przewodności cieplnej dla $S_r = 1$ (ekstrapolacja wyników)
Mickley (1951)	Zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu	Słaba predykcja w przypadku gruntów suchych lub o małej zawartości wody	Model teoretyczny; nie powinno się stosować do gruntów o relatywnie dużej porowatości
Gemant (1952)	Zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu	Skomplikowana formuła; konieczność korzystania z nomogramów	Model teoretyczny; nie stosuje się do gruntów w stanie suchym; możliwe zawyżanie wyników przewodności cieplnej, jeśli nie stosuje się formuły Gemanta do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego



de Vries (1963)	Możliwość określania przewodności cieplnej częściowo lub całkowicie zamrożonych gruntów; zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu	Konieczność założenia wartości współczynników kształtu $g_a$ ; słaba predykcja dla gruntów w stanie suchym (możliwa konieczność zwiększania wyników o ok. 20%); model ten słabo oddaje charakterystykę $\lambda - S_r$	Model teoretyczny; aby uzyskać dobre predykcje, w równaniu (3.16) należy uwzględnić informację o co najmniej pięciu minerałach; nie należy stosować modelu, jeśli udział frakcyjny wody jest mniejszy od 0,03 lub 0,05–0,10, odpowiednio, dla gruntów grubo- i drobnoziarnistych
Johansen (1975)	Możliwość określania przewodności cieplnej gruntów zamrożonych; zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu; relatywnie wysoka jakość predykcji	Możliwa niedokładność predykcji dla gruntów w stanie suchym (na poziomie ok. $\pm 20\%$ )	Wzory empiryczne, ważne dla $S_r > 0,05$ oraz $S_r > 0,1$ , odpowiednio, dla gruntów grubo- oraz drobnoziarnistych
Donazzi i in. (1979)	Prosta formuła; zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu	Słaba jakość predykcji dla gruntów o relatywnie małej zawartości wody	Wzór empiryczny; kształt krzywej $\lambda - S_r$ (wypukłość) nie do końca zgodny z tym, co uzyskuje się w badaniach oraz za pomocą większości pozostałych modeli
Gori (1983)	Zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu; możliwość określania przewodności cieplnej dla różnych wartości temperatur	Bardzo złożona formuła; możliwe zaniżanie przewodności cieplnej dla gruntów w stanie suchym	Model teoretyczny; niektóre parametry należy określać na podstawie badań
Côté i Konrad (2005b)	Zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu; uwzględnia się rodzaj gruntu oraz kształt ziaren	W przypadku gruntów drobnoziarnistych, dla niskich wartości stopnia wilgotności, przebieg krzywej $K_e - S_r$ nie do końca zgodny z powszechną wiedzą	Jest to modyfikacja metody Johansena (1975) w zakresie liczby Kerstena oraz przewodności cieplnej gruntu w stanie suchym
Lu i in. (2007)	Zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu; uwzględnia się rodzaj gruntu; bardzo dobre odwzorowanie charakterystyki termicznej gruntów drobnoziarnistych dla niskich wartości stopnia wilgotności	Nieznany wpływ rodzaju gruntu na przewodność cieplną gruntu w stanie suchym	Jest to modyfikacja metody Johansena w zakresie liczby Kerstena oraz przewodności cieplnej gruntu w stanie suchym
Chen (2008)	Prosta formuła; dobra jakość predykcji	Ograniczona stosowalność	Model empiryczny; stosuje się jedynie do piasków o dużej zawartości kwarcu
Tong i in. (2009)	W sposób kompleksowy uwzględnia wpływ wielu czynników na wartość przewodności cieplnej	Bardzo złożona formuła; trudność w określaniu wartości parametrów (konieczne wykonanie serii badań laboratoryjnych)	Model teoretyczny; brak zależności, z których można określać wartości parametrów modelu dla gruntów

Haigh (2012)	Duża dokładność predykcji	Złożona formuła; zaniżanie predykcji o stały współczynnik wynoszący około 1,58	Model teoretyczny; stosuje się jedynie do gruntów piaszczystych o porowatości wyższej niż 0,333
Lu i in. (2014)	Prosta formuła; zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu; uwzględnia się wpływ gęstości objętościowej szkieletu gruntowego	Dla analizowanych gruntów drobno- i gruboziarnistych model wyraźnie zawyżał wartość przewodności cieplnej niemal w całym przedziale wartości $S_r$ .	Model empiryczny; przewodność cieplną gruntu suchego należy określać stosując wzór zaproponowany we wcześniejszej pracy (Lu i in. 2007); możliwa słabsza predykcja dla gruntów o dużej zawartości frakcji piaskowej
He i in. (2017)	Prosta formuła; bardzo dobra jakość predykcji; zakres stosowalności: każdy rodzaj gruntu	Brak wzorów korelacyjnych do określania parametrów modelu – brak możliwości szybkiego szacowania przewodności cieplnej gruntów	Jest to modyfikacja metody Johansena w zakresie liczby Kerstena

## 4. Homogenizacja – podstawowe zasady i techniki

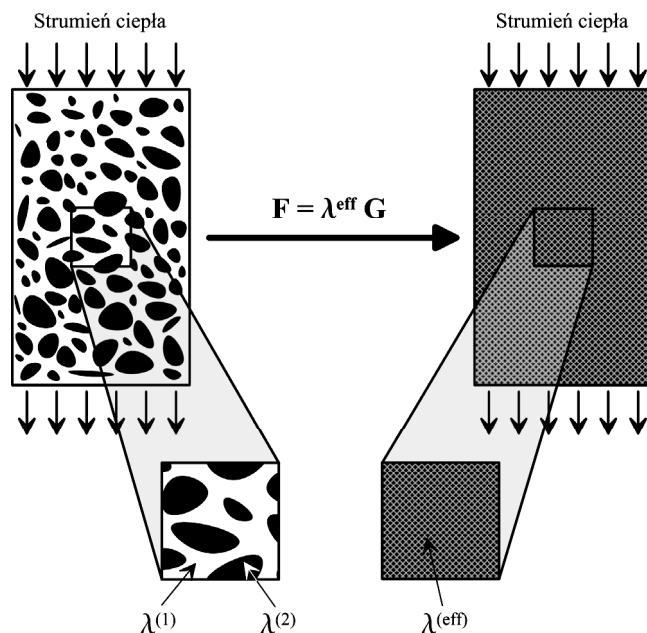
Jak powszechnie wiadomo, ośrodek jednorodny to taki, którego właściwości są jednakowe w każdym punkcie jego przestrzeni. Mówiąc bardziej szczegółowo, mianem materiału jednorodnego określa się taki, z którego nie da się w żaden sposób – np. przez zastosowanie obróbki mechanicznej – wydzielić różnych składników objętościowych. Przykładem takich materiałów są, np. papier, szkło lub metale.

W praktyce inżynierskiej, a więc w naturalnej skali obserwacji, dla większości materiałów przyjmuje się postulat o ich makroskopowej jednorodności. Jednakże, jeśli przyjrzeć się bliżej strukturze dowolnego materiału, to można dojść do wniosku, że w zasadzie niemal każdy materiał wykazuje pewną niejednorodność, w zależności od przyjętej skali obserwacji. Dla wielu ośrodków ich wyraźną niejednorodność zaobserwować można dopiero po przejściu do skali atomowej. Wobec tego to czy dany materiał uznaje się za jednorodny lub niejednorodny zależy od skali, w jakiej dokonuje się obserwacji.

Ponadto w zależności od tego, jaki materiał podlega analizie, to charakterystyczny wymiar niejednorodności dla danej skali obserwacji może przyjmować różne wartości i nie należy go stowarzyszać bezpośrednio ze skalą postrzeganą jako mikro (mezo, nano itd.) przez człowieka (Strzelecki i in.1996). I tak np. dla gruntów drobnoziarnistych, gdzie niejednorodność można stowarzyszyć ze skalą przestrzeni porowej, charakterystyczny wymiar wynosi około kilkudziesięciu mikrometrów. Tymczasem jeśli rozważa się np. podłoże gruntowe wzmocnione pionowymi kolumnami betonowymi, to wymiar niejednorodności może być określony w metrach. Wobec tego dla przejrzystości rozważań zawartych w tej pracy przyjęto następującą nomenklaturę dotyczącą skali obserwacji. Zawsze gdy mowa o skali mikro lub o skali makroskopowej, należy przez to rozumieć skalę niejednorodności, którą można stowarzyszyć z pewnym wymiarem charakterystycznym dla tej skali, oznaczanym symbolem  $l_{\text{mikro}}$ . Jeśli natomiast używa się pojęcia skala makro lub skala makroskopowa, to rozumie się przez to skalę zastosowań inżynierskich, a więc taką, w której dany materiał jest traktowany, jako ośrodek jednorodny, przy czym wielkość wymiarowa charakterystyczna dla skali jednorodności oznaczana będzie symbolem  $L_{\text{makro}}$ .

Opis matematyczny niemal wszystkich procesów fizycznych zachodzących w rzeczywistych materiałach (także w gruntach) również zależy od przyjętej skali observa-

cji. Jeśli dana objętość materiału, np. próbka gruntu, może być traktowana jako jednorodna, to wg Łydźby (2002) „opis takiego materiału w naturalnej skali obserwacji w ramach mechaniki ośrodka ciągłego jest zatem pewną aproksymacją, jak również każde przeprowadzone w tej skali eksperymentalne badanie konstytutywnego zachowania się ośrodka w rzeczywistości jest związkiem między uśrednionymi polami fizycznymi mierzonymi w czasie eksperymentu”. Jednocześnie należy tu podkreślić, że sformułowanie poprawnego opisu dla wielu procesów fizycznych w skali mikro, ze względu na złożoną geometrię mikrostruktury (dużo niejednorodności) jest zwykle zadaniem trudnym, a czasem wręcz niemożliwym do wykonania. Z tego powodu w ostatnich kilkudziesięciu latach obserwowany był silny rozwój technik homogenizacji, które prowadzą do określenia tzw. zastępczego (ekwiwalentnego) ośrodka makroskopowego, którego odpowiedź mechaniczna opisana jest pewnym uśrednionym parametrem makroskopowym (zamiennie nazywanym również parametrem efektywnym; por. np. Strzelecki i in. 1996 lub Łydźba 2002). W teorii homogenizacji zatem zawsze poszukuje się „średnich” właściwości fizycznych dla zastępczego ośrodka jednorodnego. Jeśli więc rozważa się np. zagadnienie przewodzenia ciepła, to wówczas poszukiwaną wielkością jest makroskopowa/efektywna przewodność cieplna ośrodka ekwiwalentnego  $\lambda^{\text{eff}}$ , która jest zdefiniowana przez makroskopowy związek konstytutywny, będący liniową zależnością pomiędzy uśrednionym strumieniem ciepła  $\mathbf{F}$  oraz uśrednionym gradientem temperatury  $\mathbf{G}$  (rys. 4.1).

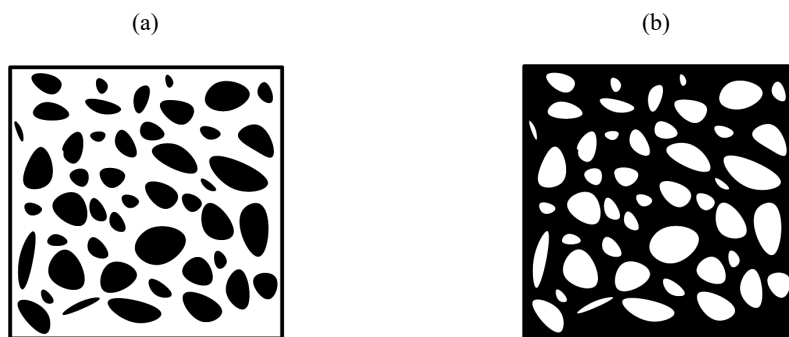


Rys. 4.1. Koncepcja ośrodka zastępczego opisanego efektywną przewodnością cieplną  $\lambda^{\text{eff}}$

Makroskopowa przewodność cieplna ośrodka mikroniejednorodnego,  $\lambda^{\text{eff}}$ , zależy od przewodności poszczególnych jego składników  $\lambda_j$ , ich udziałów frakcyjnych  $\phi_j$  oraz od morfologii mikrostruktury. Mówiąc bardzo ogólnie, można pokazać, że (Torquato 2002):

$$\lambda^{\text{eff}} = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n; \Psi) \quad (4.1)$$

gdzie  $\Psi$  oznacza nieskończony zbiór  $n$ -punktowych funkcji korelacyjnych, które charakteryzują mikrostrukturę ośrodka o „nieuporządkowanej” (losowej) strukturze w terminach rachunku prawdopodobieństwa (Brown 1955; Torquato 2002). Podaną zależność należy rozumieć w ten sposób, iż parametr efektywny może być zidentyfikowany w sposób „idealny”, tylko wówczas, gdy znane są parametry oraz udziały frakcyjne poszczególnych składników oraz wszystkie miary statystyczne wyższych rzędów aniżeli udziały frakcyjne. Innymi słowy, poprawna i jednoznaczna identyfikacja parametru efektywnego jest możliwa tylko wówczas, gdy znana jest pełna informacja statystyczna o rozważanym ośrodku. W praktyce, zwłaszcza w przypadku gruntów, informacja ta jest bardzo ograniczona – zazwyczaj znane są jedynie parametry poszczególnych składników oraz ich udziały frakcyjne. Oczywiście jest, że ograniczona informacja wpływa na jakość zidentyfikowanej odpowiedzi makroskopowej – łatwo zobrazować to następującym przykładem.



Rys. 4.2. Mikrostruktury o zamienionych składnikach i równym udziale frakcyjnym  $\phi = 0,5$

Rozważmy dwuskładnikowy ośrodek losowy o równym udziale frakcyjnym poszczególnych składników, tj.  $\phi = 0,5$  (rys. 4.2a). Załóżmy, że składnik oznaczony kolorem czarnym charakteryzuje się bardzo wysoką przewodnością cieplną, podczas gdy drugi składnik (biały) bardzo słabo przewodzi ciepło. Jednocześnie na rys. 4.2b przedstawiono tę samą mikrostrukturę, z tą różnicą, że składniki są względem siebie zamienione. Łatwo zauważyć, że ze względu na ciągłą matrycę, mikrostruktura przedstawiona na rys. 4.2b będzie cechować się znacznie wyższą przewodnością cieplną aniżeli mikrostruktura z rys. 4.2a, gdzie silnie przewodzące wtrącenia są izolowane przez słabo przewodzącą matrycę. Ten prosty przykład dowodzi, że parametry efektywne, w szczególności ich identyfikacja, za-

leży od informacji statystycznej o morfologii mikrostruktury zdecydowanie wykraczającej poza informację o udziałach frakcyjnych. Z reguły ważne są takie informacje, jak np.: kształt i orientacja w przestrzeni, sposób rozmieszczenia w przestrzeni, czy też stopień połączenia ze sobą poszczególnych składników ośrodka.

Opis makroskopowy, o którym wspomniano wcześniej, może być uzyskany metodą doświadczalną, tj. przez wykonanie eksperymentu bezpośrednio w skali makroskopowej lub też przez zastosowanie technik homogenizacji i dokonanie przejścia ze skali mikro do skali makro na drodze rozważań teoretycznych. W niniejszej pracy skupiono się głównie na tym drugim podejściu. Mówiąc bardzo ogólnie, proces przejścia ze skali niejednorodności do skali makroskopowej polega na uzyskaniu kompletnego opisu makroskopowego danego procesu fizycznego, wychodząc z jego opisu sformułowanego w skali mikro. Innymi słowy, wykorzystując techniki homogenizacji, tworzymy opis makroskopowy danego procesu fizycznego przez transformację do skali makroskopowej informacji dostępnej na poziomie niejednorodności. Na przykład jeśli w skali niejednorodności znane są: parametry składników, związki konstytutywne oraz równania zachowania, to w skali makro powinniśmy uzyskać ekwiwalentny opis zawierający: parametr efektywny, makroskopowy związek konstytutywny oraz makroskopowe równanie zachowania.

W zależności od zastosowanej techniki przejścia ze skali mikro do skali makro wyróżnić możemy następujące metody homogenizacji (podział wg Łydzby (2002)): metody uśredniania przestrzennego (np. Nigmatulin 1981), metody uśredniania wagowego (np. Gilbert 1990), metody homogenizacji dla ośrodków periodycznych/uporzędkowanych (np. Sanchez-Palencia 1980; Strzelecki i in. 1996), metody statystyczne (np. Torquato 2002; Kanit i in. 2003) oraz tzw. ciągła mikromechanika (np. Hill 1965; Hashin 1983; Łydzba 2002; 2011).

Wszystkie rozważania teoretyczne prezentowane w tej pracy przeprowadzono z zastosowaniem ostatniej spośród wymienionych technik, tj. ciągłej mikromechaniki (ang. *continuum micromechanics*). Mówiąc ogólnie, mianem ciągłej mikromechaniki określa się technikę, w której na poziomie niejednorodności stosuje się klasyczny aparat mechaniki ośrodka ciągłego, np. w celu prognozowania procesu przepływu ciepła przez ośrodek mikroniejnorodny. W niniejszej pracy wykorzystuje się metody ciągłej mikromechaniki w celu identyfikacji/prognozowania efektywnej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w różnych skalach obserwacji.

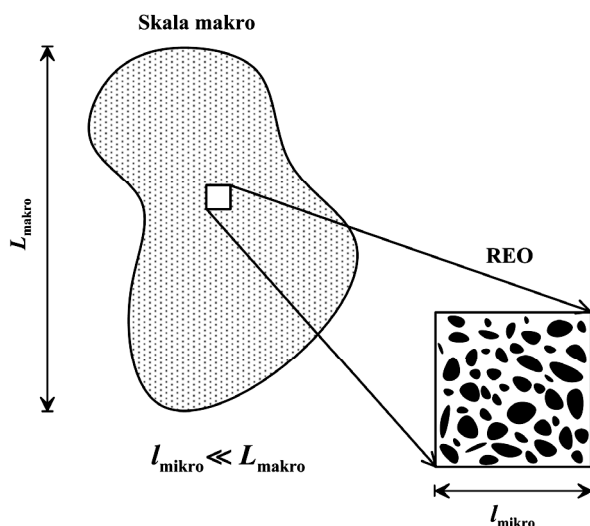
## 4.1. Reprezentatywna Elementarna Objętość

Podstawowym założeniem ciągłej mikromechaniki jest postulat o możliwości wyodrębnienia z ośrodka mikroniejnorodnego pewnej objętości materiału określanej mianem Reprezentatywnej Elementarnej Objętości (REO) (ang. RVE – *Representative Volume Element*). Jest to najmniejsza objętość materiału, która zawiera w sobie wy-

starczającą ilość informacji do tego, aby możliwe było na jej podstawie określenie właściwości ośrodka w skali makroskopowej. W przypadku gruntów, a więc ośrodków o „nieuporządkowanej” strukturze, oczywiste jest, że REO powinna być na tyle duża, aby zawierała w sobie wystarczająco dużo informacji o morfologii mikrostruktury, np. kształt ziaren tworzących szkielet, ich orientacja oraz układ w przestrzeni, stopień połączenia przestrzeni porowej itd. Jeśli tak jest, to wówczas tę objętość materiału można uznać za statystycznie reprezentatywną dla rozważanego ośrodka. Z drugiej strony należy mieć na uwadze, że objętość ta powinna być jednocześnie odpowiednio mała (w porównaniu do objętości rozważanego środka), tak aby ośrodek zastępczy mógł być zdefiniowany jako makroskopowo jednorodny (np. Torquato 2002). Implikuje to, że przeprowadzenie procesu homogenizacji jest możliwe wówczas, gdy skala niejednorodności oraz skala makroskopowa, są wyraźnie rozróżnialne w sensie charakterystycznego dla danej skali wymiaru. Proces homogenizacji jest zatem możliwy, jeśli spełniony jest warunek separacji skal (np. Geers i in. 2010):

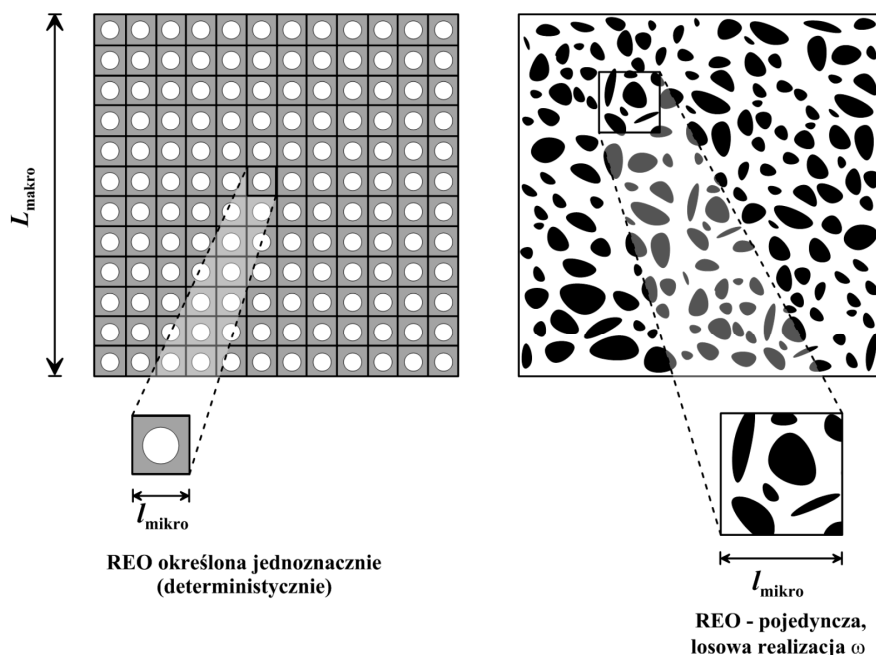
$$\frac{l_{\text{mikro}}}{L_{\text{makro}}} \ll 1 \quad (4.2)$$

gdzie  $l_{\text{mikro}}$  i  $L_{\text{makro}}$  rozumiane są tutaj jako charakterystyczne wymiary, odpowiednio, dla REO oraz dla rozważanego ośrodka w naturalnej (makroskopowej) skali obserwacji (rys. 4.3). Przyjmuje się, że proces homogenizacji jest możliwy, jeśli  $l_{\text{mikro}}/L_{\text{makro}} < 0,1$ . Należy również podkreślić, że w przypadku homogenizacji ośrodków o wielokrotnych skalach niejednorodności warunek (4.2) musi być spełniony niezależnie dla każdej ze skali obserwacji (por. np. Auriault i Boutin 1992; 1993).



Rys. 4.3. Graficzna prezentacja warunku separacji skali

Oczywiste jest, że dla ośrodków o deterministycznej mikrostrukturze, a więc dla tzw. ośrodków periodycznych, zdefiniowanie wielkości REO jest intuicyjne – jest to po prostu jednostkowa celka/komórka periodyczności (ang. *unit cell*) (rys. 4.4). Znacznie trudniejszym zadaniem jest określenie wielkości REO dla przypadku ośrodków o „nieuporządkowanej” strukturze wewnętrznej (np. grunty, skały, beton itp.). Wynika to z faktu losowego charakteru ich mikrostruktury, który ujawnia się np. przez „nieuporządkowane” ułożenie składników w przestrzeni lub fluktuacje parametrów mechanicznych. W takim przypadku wymiar REO określa się w terminach rachunku prawdopodobieństwa (np. Gusev 1997; Kanit i in. 2003; Stroeven i in. 2004; Gitman i in. 2007; Grufman i Ellyin 2007; Różański 2010; Łydzba i Różański 2014). Jak pokazano np. w pracy Kanit i in. (2003), dla ośrodków losowych wielkość REO jest zależna od typu rozważanego zagadnienia fizycznego (np. liniowa sprężystość, przewodnictwo ciepła itd.), kontrastu pomiędzy parametrami składników, ich udziału frakcyjnego, założonego błędu aproksymacji, a także liczby losowych realizacji  $\omega$  mikrostruktury REO, które należy przeanalizować w celu określenia makroskopowej odpowiedzi ośrodka. Ta ostatnia wielkość, tj. liczba losowych realizacji REO, silnie zależy od wartości założonego błędu dla aproksymacji parametru efektywnego oraz prawdopodobieństwa (poziom ufności), z jakim to oszacowanie ma być określone (Kanit i in. 2003).

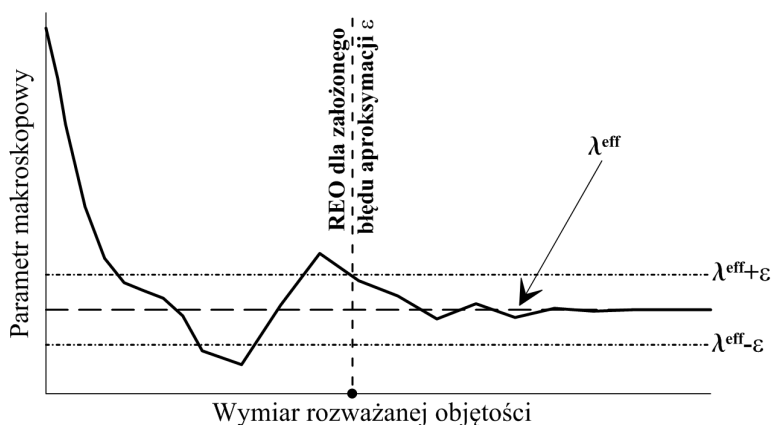


Rys. 4.4. Reprezentatywna Elementarna Objętość (REO) dla ośrodka periodycznego (z lewej) oraz losowego (z prawej)



Jak wspomniano już wcześniej, aby „idealnie” zidentyfikować parametry efektywne ośrodka losowego należałoby wybrać do analizy taką objętość materiału, która zawiera nieskończenie wiele informacji statystycznej o rozważanym ośrodku. Implikuje to, że analizie należałoby poddać nieskończenie dużą objętość materiału. Po pierwsze, takie podejście jest niemożliwe praktycznie do zrealizowania. Po drugie, nieskończenie duża objętość REO nie umożliwiłaby zdefiniowania makroskopowo jednorodnego ośrodka zastępczego. Zazwyczaj zakłada się więc, że oszacowania parametru efektywnego dokonuje się dla pewnej ograniczonej objętości ośrodka. W konsekwencji parametr makroskopowy określony jest z założonym błędem aproksymacji  $\varepsilon$ , względem „idealnego” parametru efektywnego.

Jedną z prostszych metod określania wielkości REO dla ośrodków o „nieuporządkowanej” mikrostrukturze polega na analizie zbieżności parametru makroskopowego do wartości asymptotycznej, reprezentującej wartość „idealnego” parametru efektywnego. Zbieżność ta realizowana jest przez sukcesywne wyznaczanie parametru makroskopowego, dla coraz to większych objętości ośrodka. Wówczas dla założonego błędu aproksymacji  $\varepsilon$  w prosty sposób można wyznaczyć minimalną objętość materiału, dla której parametr makroskopowy (oczywiście z pewnym prawdopodobieństwem) znajdzie się już pomiędzy wartościami  $(\lambda^{\text{eff}} - \varepsilon)$  oraz  $(\lambda^{\text{eff}} + \varepsilon)$  (por. rys. 4.5).



Rys. 4.5. Procedura określania minimalnej wielkości REO na podstawie zbieżności parametru makroskopowego do „idealnego” parametru efektywnego

Jak łatwo zauważyć, metoda ta jest jednak bardzo czasochłonna, gdyż wymaga rozwiązywania wielu zagadnień brzegowych sformułowanych za każdym razem dla innej, losowej realizacji mikrostruktury. Jest to powodem, dla którego w ostatnich kilkunastu latach zaczęły rozwijać się techniki numerycznego określania wielkości REO, uwzględniające statystyczne miary mikrostruktur. Przykładem tego jest praca (Kanit i in. 2003), w której autorzy wykorzystują do tego celu miarę określającą statystyczne fluktuacje procesu stochastycznego, tzw. *integral range* (Lantuéjoul 2002). Na jej

podstawie szacuje się wariancję rozważanego parametru makroskopowego w funkcji wymiaru analizowanej objętości ośrodka, a w konsekwencji identyfikuje się, w sensie statystycznym, minimalny wymiar REO. W późniejszej pracy, tj. (Kanit i in. 2006), dokonano aplikacji tej procedury do dwóch rzeczywistych materiałów z przemysłu spożywczego. Wyniki zaprezentowane w pracy (Kanit i in. 2006) jednoznacznie wskazują na dużą skuteczność metody. Jednak aby dokonać określenia minimalnej wielkości REO, wciąż wymagane jest wykonanie sekwencji obliczeń numerycznych w celu określenia parametru makroskopowego dla co najmniej 4–5 wybranych realizacji mikrostruktury o różnych wymiarach. Oznacza to, że w przypadku skomplikowanych geometrii rzeczywistych trójwymiarowych mikrostruktur może to wymagać stosowania skomplikowanych technik obliczeniowych, np. obliczeń równoległych (ang. *parallel computing*).

W niniejszej pracy do określania wielkości REO stosuje się procedurę numeryczną zaproponowaną w rozprawie doktorskiej autora (Róžański 2010), a rozwiniętą następnie we wspólnej pracy Łydźby i autora (Łydźba i Róžański 2014). Metoda ta jest niezwykle wydajna, w sensie czasu obliczeń, gdyż nie wymaga określania parametru makroskopowego. Minimalny wymiar REO określany jest tylko i wyłącznie na podstawie morfologii mikrostruktury. Opis metody przedstawiono w punkcie 4.4.1.

## 4.2. Transformacja mikro–makro

Jak wspomniano wcześniej, technika homogenizacji polega na uzyskaniu kompletnego opisu makroskopowego danego procesu fizycznego na podstawie jego opisu sformułowanego w skali niejednorodności. Proces transformacji mikro–makro oparty jest na operacji uśredniania. Jeśli zatem  $f(y^*)$  jest pewnym polem fizycznym opisu mikroskopowego, to zakłada się, że stowarzyszoną z nią wielkością, które opisuje to pole w skali makroskopowej jest jego uśredniona (po objętości REO) wartość (Łydźba 2002):

$$\langle f \rangle(y) = \int_{V_{\text{REO}}} f(y^*) \tau(y^* - y) dV, \quad (4.3)$$

gdzie  $\tau$  jest pewną funkcją wagi.

Jednymi z powszechnie stosowanych metod w mechanice ośrodków wielofazowych są metody wagowego i objętościowego uśredniania. Ich stosowanie do procesu transformacji mikro–makro prowadzi jednak do równań, w których występują, oprócz wielkości makroskopowych, również zmienne opisu mikroskopowego. Oznacza to, że uzyskany za ich pomocą opis nie może być traktowany jako opis makroskopowy. Zobrazowano to np. w pracy Łydźby (Łydźba 2002), gdzie procedurę uśredniania objętościowego zastosowano do transformacji opisu mikroskopowego przepływu lepkiej nieściślej ciecży Newtona przez nieodkształcalny ośrodek porowaty. Niemożność

uzyskania poprawnego opisu makroskopowego jest konsekwencją braku tzw. „hipotezy zamykającej” (ang. *closing hypothesis*) wprowadzanej najczęściej w postaci warunków brzegowych na granicy pomiędzy wydzielonym fragmentem materiału, tj. REO, a pozostałą częścią rozważanego ośrodka. W dalszej części prezentuje się klasyczny proces transformacji mikro–makro na przykładzie zagadnienia stacjonarnego przepływu ciepła przez ośrodek mikroniejnorodny.

Zakłada się zatem, że w skali mikro dla każdego ze składników z osobna opis procesu tworzą: związek konstytutywny w postaci prawa Fouriera:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \text{w } V_{\text{REO}} \quad (4.4)$$

oraz równanie bilansu ciepła, tj.:

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0, \quad \text{w } V_{\text{REO}} \quad (4.5)$$

Oznaczenia stosowane w podanych zależnościach odpowiadają nomenklaturze wprowadzonej w rozdziale 2, tj.:  $q_i$  oznacza składową wektora strumienia ciepła na kierunku  $x_i$ ,  $T$  jest polem temperatury, natomiast  $\lambda$  to przewodność cieplna danego składnika. Zakłada się, że strumień ciepła jest ciągły na kontakcie pomiędzy składnikami ośrodka. Podstawiając związek konstytutywny (4.4) do równania zachowania ciepła oraz zakładając dodatkowo „hipotezę zamykającą”, tj. warunki brzegowe na granicy pomiędzy REO a resztą materiału ( $\partial V_{\text{REO}}$ ), można sformułować następujące zagadnienie brzegowe:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \lambda \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\rangle + \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right] = 0, & \text{w } V_{\text{REO}} \\ \text{warunki brzegowe,} & \text{na } \partial V_{\text{REO}} \end{cases} \quad (4.6)$$

gdzie  $\tilde{T}$  jest tzw. członem korekcyjnym (lub po prostu korektorem); jego obecność w równaniu (4.6) jest bezpośrednią konsekwencją niejednorodności struktury na poziomie mikro. Dodatkowo w równaniu (4.6)  $\langle \partial T / \partial x_i \rangle$  jest makroskopowym gradientem temperatury, przy czym symbol  $\langle \dots \rangle$  oznacza operator uśredniania objętościowego, które w sensie matematycznym jest szczególnym przypadkiem uśredniania wagowego. Odpowiada to sytuacji, gdy funkcja wagi  $\tau$  jest stała w całym obszarze uśredniania, a jej wartość wynosi  $1/V_{\text{REO}}$ .

Wyszczególnione w zagadnieniu (4.6) warunki brzegowe zakłada się zazwyczaj w postaci przypisania konkretnej wartości dla korektora lub jego gradientu<sup>1</sup>. Przypisu-

---

<sup>1</sup> W przypadku ośrodków o periodycznej strukturze, intuicyjne jest np. postulowanie periodyczności korektora na brzegu  $\partial V_{\text{REO}}$ . Założenie o periodycznych fluktuacjach pola temperatury implikuje, że korektor osiąga te same wartości w dwóch punktach na przeciwległych brzegach obszaru  $\partial V_{\text{REO}}$ .

jąc na przykład zerową wartość korektora na brzegu REO oraz mając na uwadze fakt, iż zagadnienie brzegowe (4.6) ma liniową formę, można pokazać, że pole korektorowe  $\tilde{T}$  zależy liniowo od gradientu makroskopowego, tj.

$$\tilde{T} = \chi_i \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\rangle \quad (4.7)$$

gdzie  $\chi_j$  jest rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (4.6) odpowiadającym makroskopowemu wymuszeniu w postaci jednostkowego gradientu temperatury na kierunku  $x_j$  (przy czym pozostałe jego składowe są równe zero). Wówczas związek pomiędzy polem temperatury w skali mikro a jej odpowiednikiem w skali makro można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} = P_{ij} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\rangle \quad (4.8)$$

gdzie  $P_{ij}$  jest tzw. operatorem lokalizacji, wyrażonym zależnością:

$$P_{ij} = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.9)$$

W równaniu (4.9)  $\delta_{ij}$  oznacza symbol Kroneckera. Zależność (4.9) wyraża makroskopowy strumień ciepła, jako funkcję makroskopowego gradientu temperatury, tj.:

$$\langle q_i \rangle = -\lambda_{ij}^{\text{eff}} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\rangle \quad (4.10)$$

gdzie

$$\lambda_{ij}^{\text{eff}} = \langle \lambda P_{ij} \rangle \quad (4.11)$$

Równanie (4.10) jest makroskopowym związkiem konstytutywnym opisującym przepływ ciepła przez ośrodek zastępczy, który jest jednorodny w skali makroskopowej, przy czym jego przewodność cieplna charakteryzowana jest efektywnym (makroskopowym) tensorem, zdefiniowanym zależnością (4.11). Wobec tego przedstawiony proces transformacji/przenoszenia opisu ze skali mikro do skali makro można uznać za poprawnie przeprowadzony.

Zauważmy, że operator lokalizacji (4.9) zależy bezpośrednio od rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.6). Wobec tego oczywiste jest, że wartości poszczególnych jego składowych, a w konsekwencji również wartości składowych efektywnego tensora przewodności cieplnej, zależą od przyjętych warunków brzegowych. Jak pisze Suquet

(1987), powinny być one sformułowane w taki sposób, aby odzwierciedlały najlepiej jak to możliwe rzeczywisty stan REO w obszarze rozważanego ośrodka. Najbardziej powszechnie stosowanymi warunkami brzegowymi, dla zagadnienia stacjonarnego przepływu ciepła, są warunki w postaci jednorodnego gradientu temperatury, jednorodnego strumienia ciepła lub wspomniane wcześniej warunki periodyczności. Zgodnie z rozważaniami zawartymi w pracach (Suquet 1987; Sab 1992) można zapisać następującą „hierarchię” dla wartości makroskopowej przewodności cieplnej, w zależności od przyjętych warunków brzegowych:

$$\left(\lambda^{\text{eff}}\right)_{\text{jedn. str.}} \leq \left(\lambda^{\text{eff}}\right)_{\text{period.}} \leq \left(\lambda^{\text{eff}}\right)_{\text{jedn. grad.}} \quad (4.12)$$

Podana sekwencja wartości oznacza, że jeżeli makroskopową przewodność cieplną wyznacza się dla coraz to większej objętości materiału (zwiększając obszar REO), to w zależności od rodzaju przyjętych warunków brzegowych, istnieje następująca zależność – makroskopowa przewodność cieplna zbiega asymptotycznie do „idealnego” parametru efektywnego „od góry” lub „od dołu”, jeśli przyjmie się warunek brzegowy w postaci, odpowiednio, jednorodnego gradientu temperatury lub jednorodnego strumienia ciepła. W przypadku stosowania warunków periodyczności parametr makroskopowy zbiega do parametru efektywnego „od góry”, przy czym zbieżność ta jest wyraźnie szybsza niż w przypadku warunku brzegowego w postaci jednorodnego gradientu temperatury (por. np. Kanit i in. 2003). Oczywiście jest również, że różnice pomiędzy wartościami  $(\lambda^{\text{eff}})_{\text{jedn. str.}}$  oraz  $(\lambda^{\text{eff}})_{\text{jedn. grad.}}$  są tym większe, im mniejszy jest wymiar REO. Wynika to z faktu, że dla małych objętości REO warunki brzegowe silnie wpływają na rozwiązanie zagadnienia brzegowego (4.6). Z drugiej strony, dla odpowiednio dużych objętości REO (w teorii, dla nieskończenie dużego obszaru) wpływ warunków brzegowych, co oczywiste, zanika i określone parametry makroskopowe są zbieżne z „idealnym” parametrem efektywnym, niezależnie od przyjętych warunków brzegowych.

W zależności od techniki użytej do określenia parametru makroskopowego (4.11) w aparacie ciągłej mikromechaniki wyróżnić można dwa, metodologicznie różne, podejścia, tj.: analityczne schematy aproksymacyjne (omawiane np. w pracach: Hill 1965; Mori i Tanaka 1973; Hashin 1983; Christensen 1990; Kachanov 1992; Łydźba 2002; Sevostianov i Kachanov 2014) oraz obliczeniową mikromechanikę (omawiana np. w pracach: Sab 1992; Kanit i in. 2003; 2006; Zohdi i Wriggers 2008; Dalaq i in. 2013; Łydźba i Różański 2014).

W niniejszej pracy, w celu określania charakterystyki przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w różnych skalach obserwacji wykorzystuje się oba wymienione podejścia. W podrozdziale 4.3 szczegółowo przedstawiono wykorzystywane w pracy analityczne schematy aproksymacyjne. W rozdziale poświęconym obliczeniowej mikromechanice skupiono się na problemie wyznaczania minimalnego wymiaru REO (pkt 4.4.1), jak również na technice numerycznego określania makroskopowej prze-

wodności cieplnej bazującej na szacowaniu odpowiedzi makroskopowej w postaci estymatora Monte-Carlo (pkt 4.4.2).

### 4.3. Analityczne schematy aproksymacyjne

W przypadku ośrodków z deterministyczną (periodyczną) mikrostrukturą problem określania parametrów makroskopowych sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.6) sformułowanego w obrębie jednostkowej komórki periodyczności (rys. 4.4). Wówczas jeśli znana jest informacja o geometrii mikrostruktury, parametrach poszczególnych składników, jak również o ich udziałach frakcyjnych, to parametr efektywny – np. makroskopową przewodność cieplną – można określić w sposób jednoznaczny. Inaczej jest, jak już wspomniano wcześniej, w przypadku ośrodków losowych, takich jak np. grunty, dla których parametr efektywny może być zidentyfikowany w sposób „idealny” (rozumiany w sensie jednoznaczności i poprawności rozwiązania), tylko wówczas, gdy znana jest pełna informacja statystyczna o morfologii mikrostruktury. Ze względu na fakt, iż w praktyce informacja ta jest zazwyczaj ograniczona, to w przypadku ośrodków o „nieuporządkowanej” strukturze, zwykle dokonuje się szacowania lub określania przedziału możliwych wartości parametru makroskopowego. Ponadto oczywiste jest, że w zależności od tego czy mamy do czynienia z ośrodkami o uporządkowanej lub losowej mikrostrukturze, to metody wykorzystywane do określania parametrów efektywnych zdecydowanie różnią się od siebie. W niniejszej pracy skupiono się na schematach analitycznych sformułowanych dla ośrodków o „nieuporządkowanej” mikrostrukturze. W tym przypadku większość istniejących schematów aproksymacyjnych bazuje na rozwiązaniu pojedynczego wtrącenia zanurzonego w nieskończonym, jednorodnym ośrodku ciągłym (Eshelby 1957).

W dalszej części tego podrozdziału omawia się wybrane schematy analityczne, w szczególności skupiając się na schematach wykorzystywanych w tej książce do określania makroskopowej przewodności cieplnej gruntu. Są to schematy: Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola<sup>2</sup>. Metody te bazują na rozwiązaniu zagadnienia pojedynczego wtrącenia w nieskończonym, jednorodnym ośrodku ciągłym. Stąd w punkcie 4.3.2 przedstawiono krótki opis tego zagadnienia. Rozważania te poprzedzone są omówieniem ograniczeń Hashina–Shtrikmanna, które, jak wspomniano już wcześniej, są sobie wyraźnie bliższe, aniżeli prezentowane w punkcie 3.1.1 granice Wienera.

---

<sup>2</sup> Schemat ten, oryginalnie nazwany jako ang. „*Self-Consistent*”, konsekwentnie w dalszej części pracy określa się mianem schematu lub metody samouzgodnionego pola. To polskie nazewnictwo zostało wprowadzone przez Łydzbę w 2002 roku (Łydzba 2002).

### 4.3.1. Ograniczenia Hashina–Shtrikmana

W punkcie 3.1.1 przedstawiono najprostsze możliwe ograniczenia dla makroskopowej przewodności cieplnej – granice Wienera. W przypadku tych ograniczeń jedyną dostępną wiedzą o ośrodku mikroniejnorodnym jest informacja o jego przewodnościach cieplnych oraz udziałach frakcyjnych poszczególnych składników. Jak wspomniano już wcześniej, ze względu na niewielką ilość informacji, ograniczenia Wienera należy traktować jedynie jako zgrubne oszacowanie przedziału możliwych wartości przewodności cieplnej ośrodka mikroniejnorodnego.

Bardziej „wyrafinowane” ograniczenia dla ośrodka mikroniejnorodnego zaproponowano w pracy Hashina i Shtrikmana (1963). Ograniczenia te, poza udziałami frakcyjnymi i parametrami poszczególnych składników, uwzględniają dodatkowo założenie o makroskopowej izotropii materiału;  $d$ -wymiarowe ograniczenia Hashina–Shtrikmana, dla materiału składającego się z  $N$  składników, charakteryzujących się przewodnościami cieplnymi oraz udziałami frakcyjnymi, odpowiednio,  $\lambda_j$  oraz  $\phi_j$ , przedstawia następująca zależność:

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{eff}} &\geq \left( \sum_{j=1}^N \phi_j \left( (d-1)\lambda_{\min} + \lambda_j \right)^{-1} \right)^{-1} - (d-1)\lambda_{\min} \\ \lambda^{\text{eff}} &\leq \left( \sum_{j=1}^N \phi_j \left( (d-1)\lambda_{\max} + \lambda_j \right)^{-1} \right)^{-1} - (d-1)\lambda_{\max} \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie  $\lambda_{\min}$  oraz  $\lambda_{\max}$  oznaczają, odpowiednio, najmniejszą oraz największą przewodność cieplną spośród wszystkich  $N$  składników. Należy podkreślić, że jak udowodnił np. Milton (1981c), granice (4.13) są „realizowalne”. Oznacza to, że do każdej uzyskanej z zależności (4.13) wartości parametru makroskopowego można „utworzyć” odpowiadający ośrodek cechujący się dokładnie tym konkretnym, założonym parametrem makroskopowym.

Na rysunku 3.2.b przedstawiono porównanie przedziałów możliwych wartości przewodności cieplnej ośrodka gruntowego uzyskanych za pomocą ograniczeń Wienera oraz Hashina–Shtrikmana (przewodność cieplna szkieletu gruntowego wynosi  $3,0 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$ ; porowatość  $n = 0,3$ ). Wyraźnie widać, że uwzględnienie w ograniczeniach (4.13) dodatkowej informacji o ośrodku w postaci założenia o jego makroskopowej izotropii powoduje, że granice te są sobie wyraźnie bliższe w odniesieniu do ograniczeń Wienera (równ. (3.1) oraz (3.2)).

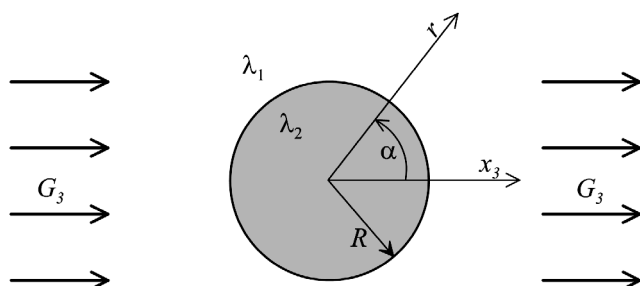
Należy wyraźnie podkreślić, że w przypadku ośrodka makroskopowo-izotropowego, ograniczenia Hashina–Shtrikmana są najwęższymi możliwymi granicami wyrażonymi jedynie w terminach udziałów frakcyjnych poszczególnych składników. Istnieją oczywiście „węższe” i bardziej złożone ograniczenia (również dla przypadku makroskopowo

anizotropowych ośrodków) aniżeli te określone zależnością (4.13), przy czym są one wyrażone w terminach miar statystycznych mikrostruktur wyższego rzędu niż udziały frakcyjne (por. np. Willis 1977; Milton 1981a; 1981b; Torquato i Stell 1985; Sen i Torquato 1989). Zazwyczaj jest to informacja, która nie jest znana, albowiem najczęściej dostępną informacją o ośrodku gruntowym jest ta dotycząca wartości parametrów termicznych poszczególnych faz oraz ich udziałów frakcyjnych. Powszechne zatem stosowanie w praktyce inżynierskiej bardziej złożonych granic jest mocno ograniczone.

### 4.3.2. Zagadnienie pojedynczego wtrącenia

Jak wspomniano wcześniej, rozwiązanie zagadnienia pojedynczego wtrącenia zanurzonego w nieskończonym, jednorodnym ośrodku ciągłym jest podstawą wielu analitycznych schematów aproksymacyjnych. Zagadnienie to, jak i poszukiwanie jego rozwiązania, jest dobrze rozpoznane i szeroko omawiane w literaturze przedmiotu (np. Berryman 1997; Torquato 2002; Milton 2002). Dlatego też w niniejszej pracy przedstawiono jedynie ogólne sformułowanie problemu i zaprezentowano w sposób bardzo poglądowy rozwiązanie w postaci określenia tzw. współczynnika polaryzowalności. Szczegółowe wyprowadzenia dla zagadnień opisanych równaniem Laplace'a znaleźć można np. w pracy Torquato (2002), gdzie rozważa się zagadnienie przepływu ciepła lub w pracy Łydźby (2011), w której analizowany jest problem dyfuzji molekularnej.

Rozważmy zatem proces stacjonarnego przepływu ciepła przez nieskończony, jednorodny ośrodek ciągły<sup>3</sup>, w którym zanurzone jest sferyczne wtrącenie o promieniu  $R$  (rys. 4.6). Do zdefiniowania geometrii zadania skorzystano ze sferycznego układu współrzędnych z początkiem układu w środku sfery. Zakłada się, że zarówno matryca, jak i wtrącenie są izotropowe i charakteryzują się następującymi przewodnościami cieplnymi, odpowiednio,  $\lambda_1$  oraz  $\lambda_2$ .



Rys. 4.6. Geometria i przyjęty układ współrzędnych dla zagadnienia sferycznego wtrącenia zanurzonego w nieskończonej matrycy

<sup>3</sup> W dalszej części rozważań nieskończony ośrodek ciągły nazywany będzie zamiennie matrycą, natomiast wtrącenie inkluzją.



Oczywiste jest, że w całym obszarze, zarówno w ciągłej matrycy, jak i we wtrąceniu, pole temperatury musi spełniać równanie Laplace'a:

$$\Delta T(r, \alpha) = 0 \quad (4.14)$$

co przy założeniu sferycznego układu współrzędnych prowadzi do następującego równania różniczkowego:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) = 0 \quad (4.15)$$

Rozważane zagadnienie brzegowe (rys. 4.6) uzupełnione jest warunkiem brzegowym i warunkami ciągłości pola temperatury oraz strumienia ciepła na powierzchni wtrącenia. W szczególności, jako warunek brzegowy, przyjmuje się, że w nieskończoności (tj. dla  $r \rightarrow \infty$ ) działa gradient temperatury, którego jedynie składowa na kierunku  $x_3$  ma stałą, niezerową wartość  $G_3$ , natomiast pozostałe składowe są równe zeru. W konsekwencji, jak pokazano np. w pracy Torquato (2002), otrzymujemy następującą postać rozwiązania zagadnienia brzegowego:

$$T(r, \alpha) = \begin{cases} G_3 r \cos \alpha + \beta_2^1 G_3 r \left( \frac{R}{r} \right)^3 \cos \alpha, & \text{dla } r \geq R \\ G_3 r \cos \alpha + \beta_2^1 G_3 r \cos \alpha, & \text{dla } r \leq R \end{cases} \quad (4.16)$$

w którym  $\beta_2^1$  jest tzw. współczynnikiem polaryzowalności<sup>4</sup>, który zdefiniowany jest jako:

$$\beta_2^1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \quad (4.17)$$

Należy w tym miejscu zauważyć, że lokalny gradient temperatury jest jednorodny w obrębie wtrącenia i, zgodnie z wprowadzonym wcześniej pojęciem operatora lokalizacji (4.8), jest on liniowo zależny od przyłożonego w nieskończoności wektora gradientu temperatury  $G_j$ , tj.:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = P_{ij}^{2,1} G_j \quad (4.18)$$

---

<sup>4</sup> Ang. *polarizability coefficient* – nazewnictwo stosowane przez analogię do polaryzowalności elektrycznej i magnetycznej (por. np. Torquato 2002).

gdzie operator lokalizacji  $P_{ij}^{2,1}$  jest izotropowym tensorem drugiego rzędu, którego poszczególne składowe zależą od przewodności cieplnych zarówno matrycy, jak i wtrącenia:

$$P_{ij}^{2,1} = (1 + \beta_2^1) \delta_{ij} \quad (4.19)$$

Współczynnik polaryzowalności (4.17) jest kluczowym parametrem wykorzystywanym podczas określania właściwości efektywnych, np. za pomocą schematu Maxwella, w którym zakłada się, że jeden ze składników tworzy matrycę, w której zanurzone są wtrącenia o kształcie sferycznym. Bardziej zaawansowane schematy, np. Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola, umożliwiają również wykorzystanie elipsoidalnych kształtów wtrąceń. Oczywiście jest, że wartości składowych tensora lokalizacji zależą nie tylko od parametrów przewodności cieplnych poszczególnych składników, ale również od geometrii wtrąceń. Zobrazowano to np. w pracy Torquato (2002), gdzie przedstawiono pełne rozwiązanie zagadnienia pojedynczego, elipsoidalnego wtrącenia zanurzonego w nieskończonej matrycy. Dla tak zdefiniowanej geometrii inkluzji ( $d$ -wymiarowe wtrącenie elipsoidalne) można pokazać, że wartości główne tensora lokalizacji są określone następującą zależnością:

$$P_i^{2,1} = \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, d \quad (4.20)$$

W wyrażeniu (4.20)  $A_i^*$  oznacza składowe symetrycznego tensora depolaryzowalności dla  $d$ -wymiarowej elipsoidy. Są one określone przez odpowiednie całki eliptyczne, tj.:

$$A_i^* = \frac{1}{2} \left( \prod_{j=1}^d R_j \right) \int_0^\infty \frac{dt}{(t + R_i^2) \sqrt{\prod_{j=1}^d (t + R_j^2)}}, \quad i = 1, \dots, d \quad (4.21)$$

gdzie  $R_i$  oznacza długość półosi elipsy w kierunku osi  $x_i$ . Ważną cechą charakterystyczną dla podanej reprezentacji jest to, iż wartości główne tensora depolaryzowalności są dodatnie i sumują się do jedności<sup>5</sup>, tj.  $\sum_{i=1}^d A_i^* = 1$ .

Uśrednienie tensora lokalizacji po wszystkich możliwych orientacjach elipsoidalnego wtrącenia prowadzi do tensora izotropowego

---

<sup>5</sup> Warunek ten dla  $d$ -wymiarowej sfery, po dodatkowym uwzględnieniu symetrii w odniesieniu do geometrii, implikuje, że:  $A_i^* = 1/d$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

$$P_{ij}^{2,1} = P^{2,1} \delta_{ij} \quad (4.22)$$

którego wartości własne wynoszą:

$$P^{2,1} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \right)^{-1} \quad (4.23)$$

Wartości skalara (4.23) dla szczególnych przypadków wtrąceń elipsoidalnych podano w pracy Łydźby (2011). I tak np. dla inkluzji w kształcie „igiełek” ( $R_1 = R_2$ ,  $R_3/R_1 \rightarrow \infty$ ) mamy:

$$P^{2,1} = \frac{5\lambda_1 + \lambda_2}{3(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (4.24)$$

Dla wtrąceń w kształcie „dysków” ( $R_1 = R_2$ ,  $R_3/R_1 \rightarrow 0$ ) wartości własne tensora lokalizacji wynoszą

$$P^{2,1} = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3\lambda_2} \quad (4.25)$$

### 4.3.3. Schemat Mori–Tanaki

W przypadku ośrodków losowych, w których jeden ze składników „dominuje” (w sensie udziału frakcyjnego) nad pozostałymi w taki sposób, że tworzy on matrycę ośrodka, w której rozmieszczone są pozostałe składniki, wówczas do oszacowania efektywnej przewodności cieplnej ośrodka bardzo często stosuje się schemat Mori–Tanaki. Pierwotnie schemat ten został sformułowany dla szacowania parametrów makroskopowych sprężystości (Mori i Tanaka 1973). Rozwiązania innych zagadnień, w szczególności opisanych równaniem Laplace’a, można znaleźć np. w pracach Łydźby (2011) oraz Torquato (2002).

Podstawowym założeniem schematu Mori–Tanaki jest niewielki udział frakcyjny wtrąceń, w odniesieniu do udziału frakcyjnego matrycy. W rezultacie najlepsze oszacowania parametrów makroskopowych uzyskuje się w przypadkach relatywnie małych udziałów frakcyjnych wtrąceń w kompozycie<sup>6</sup>. Określanie parametrów efektywnych polega na rozwiązaniu, omawianego w poprzednim punkcie, zagadnienia

---

<sup>6</sup> Przez pojęcie kompozytu rozumie się tutaj ośrodek o strukturze mikroniejednorodnej, złożony z co najmniej dwóch składników (faz) o różnych właściwościach. W tym sensie, mianem kompozytu określać można również ośrodek gruntowy, składający się w ogólnym przypadku z 3 składników: ciało stałe, woda, powietrze.

pojedynczego wtrącenia zanurzonego w nieskończonym ośrodku ciągłym. W schemacie tym przyjmuje się, że kompozyt umieszczony jest w nieskończonym ośrodku o przewodności cieplnej równej przewodności matrycy, a więc wartości, która z założenia jest znana. Schemat ten, w pewnym sensie, stanowi rozwinięcie powszechnie stosowanego schematu Maxwella (1873), w którym zakłada się, że kompozyt tworzy matryca i zanurzone w niej sferyczne wtrącenia. W przypadku schematu Mori–Tanaki nie zakłada się *a priori* geometrii inkluzji, tzn. kształty inne niż sferyczne (np. elipsoidalne) również mogą być stosowane. Powszechnie znany jest fakt, iż jeśli w schemacie Mori–Tanaki założy się sferyczny kształt wtrąceń, to oszacowanie uzyskane z tego schematu jest tożsame z rezultatem uzyskanym na podstawie schematu Maxwella (np. Milton 2002).

W dalszym ciągu rozważane jest zagadnienie przepływu ciepła przez losowy, niejednorodny ośrodek składający się z  $N$  składników charakteryzujących się przewodnościami cieplnymi oraz udziałami frakcyjnymi, odpowiednio,  $\lambda_j$  oraz  $\phi_j$ . Dodatkowo, zakładając brak uprzywilejowanych kierunków w mikrostrukturze, a więc przypadek, w którym rozkład składników w przestrzeni jest losowy, można pokazać, że dla całego kompozytu musi być spełnione następujące równanie (np. Torquato 2002):

$$\sum_{j=1}^N \phi_j (\lambda_j - \lambda^{\text{hom}}) P^{j,M} = 0 \quad (4.26)$$

W równaniu (4.26), symbolem  $\lambda^{\text{hom}}$  oznaczono makroskopową (poszukiwaną) przewodność cieplną ośrodka, natomiast  $P^{j,M}$  jest operatorem lokalizacji zdefiniowanym na podstawie zależności (4.23):

$$P^{j,M} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_j - \lambda_M}{\lambda_M} \right)^{-1} \quad (4.27)$$

przy czym indeksem  $M$  wyróżniono składnik, który tworzy matrycę ośrodka. Zauważmy, że dla składnika będącego matrycą, operator (4.27) przyjmuje wartość 1. Ponadto jawna postać równania (4.26) umożliwia zdefiniowanie makroskopowej przewodności cieplnej w następujący sposób:

$$\lambda^{\text{hom}} = \left( \sum_{j=1}^N \phi_j \lambda_j P^{j,M} \right) \left( \sum_{j=1}^N \phi_j P^{j,M} \right)^{-1} \quad (4.28)$$

Należy tu nadmienić, że parametr makroskopowy określony zgodnie z zależnością (4.28), po założeniu, że mikrostrukturę ośrodka tworzą tylko wtrącenia sferyczne, jest zbieżny z ograniczeniami Hashina–Shtrikmana (4.13) – w przypadku, gdy wtrącenia charakteryzują się wyższą (niższą) przewodnością cieplną niż matryca,

oszacowanie to jest zgodne z dolnym (górnym) ograniczeniem Hashina–Shtrikmana. Jak zauważył np. Norris (1989), oszacowanie uzyskane na podstawie schematu Mori–Tanaki (4.28) znajduje się zawsze pomiędzy granicami Hashina–Shtrikmana, jeśli kompozyt składa się z dwóch składników ( $N = 2$ ). W niektórych przypadkach, gdy  $N \geq 3$  oraz gdy w kompozycie występują wtrącenia inne niż sferyczne, oszacowanie (4.28) może znajdować się poza ograniczeniami Hashina–Shtrikmana. W tym sensie schemat Mori–Tanaki jest „nierealizowalny” (Norris 1989).

#### 4.3.4. Schemat samouzgodnionego pola (ang. *Self-Consistent*)

Podobnie jak omawiany wcześniej schemat Mori–Tanaki, tak również metoda samouzgodnionego pola, pierwotnie, została sformułowana w celu szacowania parametrów efektywnych sprężystości. W odróżnieniu od schematu Mori–Tanaki, w którym przyjmuje się geometrię mikrostruktury typu matryca–wtrącenie, w schemacie samouzgodnionego pola zakłada się polikrystaliczną strukturę kompozytu. Implikuje to, że schemat ten jest „niewrażliwy” na zamianę składników; np. dla dwuskładnikowego kompozytu zamiana przewodności cieplnych ( $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ ) lub udziałów frakcyjnych ( $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ ) pomiędzy składnikami ośrodka nie zmienia oszacowania efektywnej przewodności cieplnej ośrodka<sup>7</sup>.

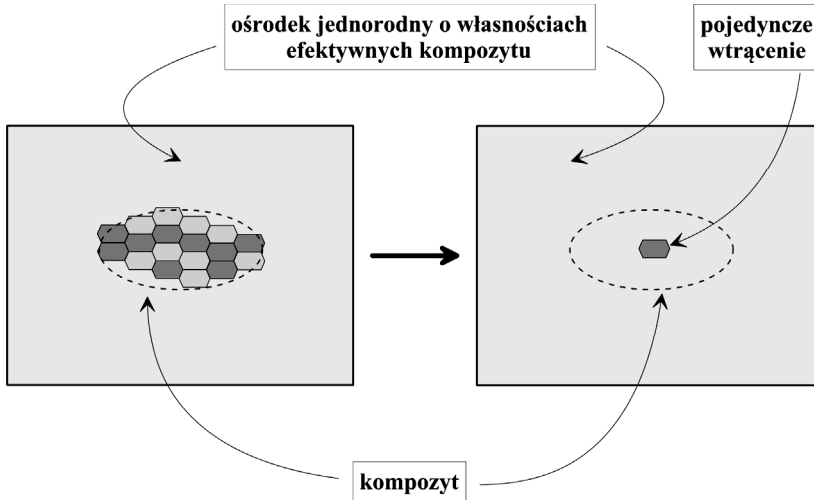
W schemacie samouzgodnionego pola kompozyt jest zanurzany w ośrodku jednorodnym charakteryzowanym przewodnością cieplną równą efektywnej przewodności kompozytu (a więc wartości, która jest poszukiwana – inaczej niż np. w schemacie Mori–Tanaki). Następnie, jak pisze Łydźba (2002), „skomplikowane oddziaływania między dowolnym elementem kompozytu a pozostałymi jego elementami zastępuje się oddziaływaniem między tym elementem a „ujednorodnionym kompozytem”, stanowiącym kontynuację ośrodka, w którym kompozyt jest zanurzony”, co implikuje, że wartość gradientu temperatury w pojedynczym, wyodrębnionym z kompozytu wtrąceniu, może być przybliżona rozwiązaniem pojedynczej inkluzji zanurzonej w nieskończonym jednorodnym ośrodku ciągłym (por. rys. 4.7).

Podobnie jak w przypadku schematu Mori–Tanaki, rozważając  $N$ -składnikowy ośrodek, dla którego zakłada się jego makroskopową izotropię, można pokazać, że prawdziwe jest następujące równanie (np. Milton 2002):

$$\sum_{j=1}^N \phi_j (\lambda_j - \lambda^{\text{hom}}) P^{j,\text{hom}} = 0 \quad (4.29)$$

---

<sup>7</sup> Ze względu na ten fakt schemat ten, jak i wynikające z niego oszacowanie parametru makroskopowego, dość często określane są mianem „aproxymacji symetrycznej” (ang. *symmetric Self-Consistent approximation*) (Torquato 2002).



Rys. 4.7. Modelowanie oddziaływań między ziarnami w metodzie samouzgodnionego pola (Łydźba 2002)

Zauważmy, że tym razem operator lokalizacji:

$$P^{j,\text{hom}} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_j - \lambda^{\text{hom}}}{\lambda^{\text{hom}}} \right)^{-1} \quad (4.30)$$

jest funkcją poszukiwanej wartości efektywnej przewodności cieplnej ośrodka,  $\lambda^{\text{hom}}$ . Oznacza to, że, w odróżnieniu od metody Mori–Tanaki, schemat samouzgodnionego pola jest schematem niejawnym, w tym sensie, że określenie wartości  $\lambda^{\text{hom}}$  wymaga rozwiązania niejawnego równania (4.29) – najczęściej stosuje się w tym celu metody iteracyjne.

Warto w tym miejscu podkreślić, że schemat samouzgodnionego pola jest schematem „realizowalnym” (Norris 1989). Oznacza to, że do każdej uzyskanej z rozwiązania równania (4.29) wartości makroskopowej przewodności cieplnej można stworzyć ośrodek cechujący się dokładnie tym parametrem makroskopowym. Jednocześnie „realizowalność” schematu gwarantuje, że wyniki uzyskane za jego pomocą znajdują się pomiędzy ograniczeniami Hashina–Shtrikmana.

## 4.4. Obliczeniowa mikromechanika

Wykorzystanie metod numerycznych do rozwiązywania zagadnienia brzegowego (4.6) daje możliwość określenia parametrów makroskopowych dla zrekonstruowa-

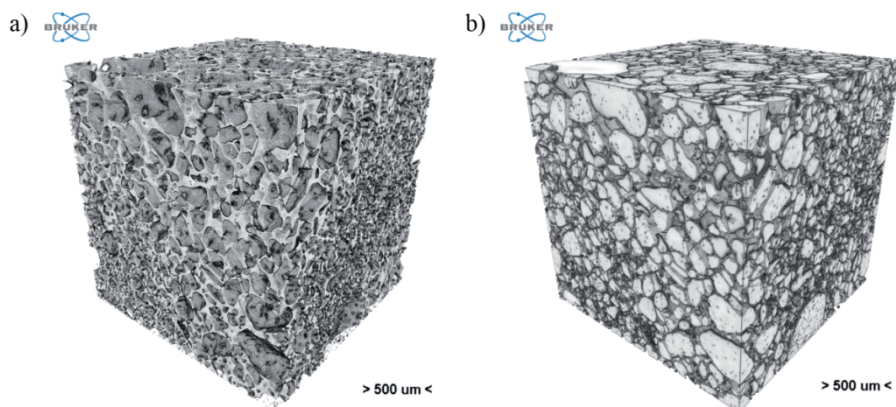
nych mikrostruktur rzeczywistych ośrodków niejednorodnych. Identyfikacja geometrii ośrodka może być przeprowadzona bezpośrednio przez matematyczną rekonstrukcję (np. bazującą na informacji o skończonej liczbie funkcji korelacyjnych opisujących geometrię mikrostruktury w terminach rachunku prawdopodobieństwa) lub pośrednio, gdzie krokiem poprzedzającym rekonstrukcję mikrostruktury jest wykorzystanie nieinwazyjnych technik obrazowania, takich jak tomografia komputerowa, mikroskopy elektronowe, obrazowanie rezonansu magnetycznego itp.

Niezależnie od tego, która z technik zostanie wykorzystana do identyfikacji geometrii mikrostruktury, zazwyczaj jest ona przedstawiana w postaci obrazu cyfrowego, np. za pomocą odcieni szarości (ang. *greyscale*). Wówczas obraz składa się tylko z jednego kanału barwnego – czarnego i jego odcieni. Jeden piksel obrazu kodowany jest na ośmiu bitach i dlatego może być jednym z 256 rozmaitych odcieni szarości, od bieli do czerni. W przypadku ośrodków dwuskładnikowych obraz może zostać w prosty sposób zredukowany do obrazu binarnego przez operację progowania (ang. *thresholding*). Wówczas obraz składa się z samych zer bądź jedynek, którym przypisuje się jeden z dwóch kolorów, np. czarny lub biały<sup>8</sup>. Na rysunku 4.8 przedstawiono wynik obrazowania 3D mikrostruktury piasku średniego uzyskany za pomocą mikrotomografii rentgenowskiej (ang. *microCT*). Na rysunku 4.9 przedstawiono natomiast binarny obraz mikrostruktury piaskowca Fontainebleau uzyskany na drodze bezpośredniej rekonstrukcji matematycznej bazującej na funkcji korelacyjnej drugiego rzędu (tzw. prawdopodobieństwie dwupunktowym). W tym przypadku białe piksele obrazują przestrzeń porową, natomiast czarne to szkielet materiału skalnego.

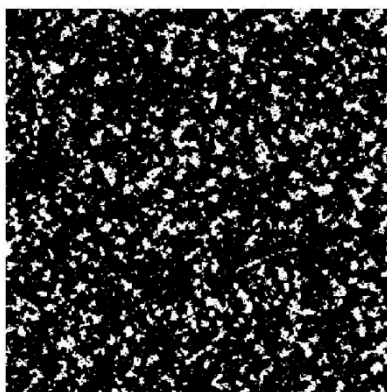
Obrazy mikrostruktur zaprezentowane na rys. 4.8 i 4.9 zostaną wykorzystane w dalszej części pracy, w analizach dotyczących identyfikacji tzw. ekwiwalentnej mikrostruktury. Jednocześnie w tym miejscu mikrostruktury te przedstawiono w celu zobrazowania złożoności i poziomu skomplikowania geometrii mikrostruktur rzeczywistych ośrodków, takich jak grunty czy skały. Jeśli przyjąć, że przedstawione na rys. 4.8 i 4.9 obrazy mogą być uznane jako Reprezentatywne Elementarne Objętości (REO – omawiane wcześniej w podrozdziale 4.1), odpowiednio dla piasku średniego oraz piaskowca Fontainebleau, to nietrudno sobie wyobrazić, jak dużym wyzwaniem jest zastosowanie metod numerycznych do określenia na ich podstawie parametrów makroskopowych. Wynika to z faktu, iż jeśli chcąc rozpatrywać tylko jedną losową realizację REO, to ze względu na złożoność geometrii, jej wymiar powinien być względnie duży. Innymi słowy, obrazy 2D lub 3D powinny zawierać dużą liczbę, odpowiednio, pikseli lub wokseli. Taką pojedynczą realizację REO, która zapewnia wystarczająco dobry opis makroskopowej odpowiedzi ośrodka rzeczywistego określa się zwyczajowo mianem tzw. Deterministycznej Reprezentatywnej Elementarnej Objętości (DREO, ang. *Deterministic Representative Volume Element*) (por. np. Khdir i in. 2013).

---

<sup>8</sup> Procedura binaryzacji może być również stosowana do materiałów wieloskładnikowych, np. w celu wyodrębnienia z obrazu jednego, wybranego składnika kompozytu.



Rys. 4.8. Trójwymiarowy obraz mikrostruktury piasku średniego: (a) przestrzeń porowa; (b) szkielet

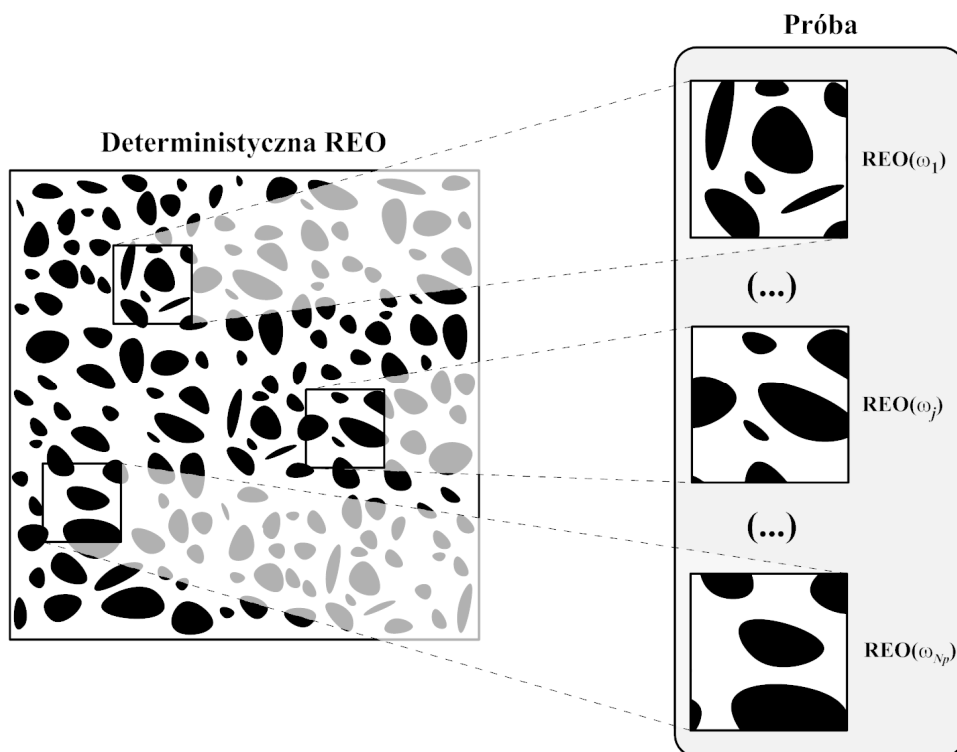


Rys. 4.9. Obraz mikrostruktury piaskowca Fontainebleau uzyskany metodą bezpośredniej rekonstrukcji matematycznej (Róžański 2010)

W przypadku skomplikowanych geometrii rzeczywistych mikrostruktur 3D zastosowanie metod numerycznych (np. Metody Elementów Skończonych, MES) do rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.6) prowadzi do konieczności użycia bardzo dużej mocy obliczeniowej z jednocześnie długim czasem obliczeń (np. Kanił i in. 2003; 2006; Róžański i Stefaniuk 2016b). Jednym z możliwych podejść, które w pewnym sensie zwiększa moc obliczeniową, jest np. zastosowanie obliczeń równoległych (np. Kanił i in. 2003). Innym podejściem, stosowanym w analizach prezentowanych w niniejszej pracy, jest prowadzenie obliczeń na sekwencji losowych realizacji REO, których wymiar (w sensie liczby pikseli/wokseli) jest znacząco mniejszy od wymiaru DREO (Huet 1990; Hazanov i Huet 1994; Kanił i in. 2003, 2006; Róžański 2010; Ostoja-Starzewski i Ranganathan 2014; Łydzba i Róžański 2014). W takim podejściu, parametr makroskopowy dla ośrodka niejednorodnego



określa się jako wartość średnią obliczoną po wszystkich rozpatrywanych losowych realizacjach  $REO(\omega_j)$  – symbolem  $\omega_j$  oznacza się tutaj losową realizację mikrostruktury w obrębie pojedynczej Reprezentatywnej Elementarnej Objętości (rys. 4.4). W ujęciu teorii rachunku prawdopodobieństwa taką realizację należy rozumieć jako pojedyncze zdarzenie elementarne. W dalszej części pracy zbiór rozpatrywanych realizacji REO określamy mianem próby (rys. 4.10). Ponadto zakłada się, że wszystkie losowe realizacje REO mają ten sam skończony wymiar, powiedzmy  $\Omega_{REO}$ , który jest wyraźnie mniejszy niż wymiar DREO ( $\Omega_{DREO}$ ). Każda realizacja  $REO(\omega_j)$  może być uzyskana albo przez losowe wybranie z obszaru DREO mniejszej objętości ośrodka (tak jak to pokazano na rys. 4.10), albo przez wygenerowanie mikrostruktury zadaniem procesem stochastycznym. Statystycznie oba podejścia są równoważne (Torquato 2002).



Rys. 4.10. Graficzna prezentacja koncepcji próby zawierającej skończoną liczbę losowych realizacji REO (Łydźba i Różański 2014)

Z zachowaniem powyższych założeń, jak pokazano np. w pracach Kanita i in. (2003) lub Łydźby i Różańskiego (2014), makroskopową przewodność cieplną ośrodka mikroniejednorodnego można określać jako:

$$\lambda^{\text{hom}} = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \lambda^{\text{hom, poz}}(\omega_j) \quad (4.31)$$

przy czym  $N_p$  oznacza liczebność próby (jest to liczba uwzględnionych w rozważaniach losowych realizacji REO), natomiast  $\lambda^{\text{hom, poz}}(\omega_j)$  jest tzw. pozornym (ang. *apparent*) parametrem makroskopowym, wyznaczonym przez rozwiązanie zagadnienia brzegowego (4.6) sformułowanego dla losowej realizacji REO( $\omega_j$ ).

Przy takim określaniu makroskopowej przewodności cieplnej istotne są dwa zagadnienia, które należy uprzednio rozważyć i rozwiązać. Po pierwsze, wymiar REO ( $\Omega_{\text{REO}}$ ) nie może być dowolny. Jak pokazano np. w pracy Kanita i in. (2003) istnieje pewien minimalny wymiar REO, poniżej którego oszacowanie parametru makroskopowego wzorem (4.31) powoduje, że tak określony parametr znacznie odbiega od „idealnego” parametru efektywnego. Kluczowe jest zatem, przed przystąpieniem do obliczeń numerycznych, określenie minimalnego wymiaru REO. Stosowane w tej pracy procedury określania wymiaru REO przedstawiono w punkcie 4.4.1. Drugim problemem jest wyznaczenie liczebności próby,  $N_p$ , a więc liczby losowych realizacji, które należy uwzględnić w procesie obliczeniowym. Iteracyjną procedurę określania liczebności próby przedstawiono w punkcie 4.4.2.

#### 4.4.1. Numeryczne określanie minimalnej wielkości REO

W analizach numerycznych przeprowadzanych w niniejszej pracy przyjmuje się, że geometria mikrostruktury REO przedstawiana jest w postaci obrazów cyfrowych. Zakłada się, że liczba wokseli (lub pikseli) jest identyczna ze wszystkimi trzema (lub dwoma) prostopadłymi do siebie kierunkami przestrzennymi. Implikuje to, że każda pojedyncza realizacja REO( $\omega$ ) ma kształt sześcianu (lub kwadratu). Wobec tego wymiar REO można rozumieć, jako liczbę wokseli (lub pikseli) zawartych w całym obrazie cyfrowym, tj.:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{REO}} &= (N_{\text{REO}})^3, \text{ dla obrazów cyfrowych 3D} \\ \Omega_{\text{REO}} &= (N_{\text{REO}})^2, \text{ dla obrazów cyfrowych 2D} \end{aligned} \quad (4.32)$$

gdzie  $N_{\text{REO}}$  oznacza liczbę wokseli (lub pikseli) w dowolnym kierunku obrazu cyfrowego.

Jak wspomniano już wcześniej, podczas określania wielkości REO wyróżnia się w zasadzie dwa podejścia. Pierwsze, w którym konieczne jest wykonanie sekwencji obliczeń numerycznych w celu analizy zbieżności parametru makroskopowego do wartości asymptotycznej, reprezentującej wartość „idealnego” parametru efektywnego (rys. 4.5). I drugie, w którym wielkość REO określa się, wykorzystując do tego celu statystyczne miary mikrostruktury, które charakteryzują geometrię ośrodka w termi-

nach rachunku prawdopodobieństwa. To ostatnie podejście, zwyczajowo, stosuje się jedynie w przypadku ośrodków dwuskładnikowych. Ograniczenie to wynika z tego, iż dla wieloskładnikowych kompozytów dość problematyczne jest zarówno samo określanie miar mikrostruktur, jak również analityczne sformułowanie warunku na minimalny wymiar REO. W analizach prowadzonych w tej pracy wykorzystuje się oba podejścia.

W szczególności w przypadku symulacji numerycznych, prezentowanych np. w rozdziale 6, a więc tych dotyczących określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, minimalny wymiar REO (liczbę wokseli) określano pierwszą z wymienionych technik. Wynika to z tego, iż w analizach tych zakłada się wieloskładnikową strukturę szkieletu gruntowego. W przypadku rozważań dotyczących gruntu w pełni nasyconego (rozd. 7), a więc ośrodka, którego mikrostrukturę tworzą dwa składniki, tj. szkielet gruntowy i woda, zastosowano metodę zaproponowaną w pracy autora (Łydźba i Różański 2014). Mówiąc bardzo ogólnie, metoda ta do określenia minimalnego wymiaru REO wykorzystuje zmodyfikowaną funkcję prawdopodobieństwa dwupunktowego, reprezentującą statystyczną miarę mikrostruktury ze względu na jej geometrię oraz parametry przewodności cieplnej poszczególnych jej składników. Dalej przedstawiono jedynie ostateczny warunek na minimalny wymiar REO. W celu zapoznania się ze szczegółowym sformułowaniem metody, autor odsyła czytelnika do pracy Łydźby i Różańskiego (2014).

Rozważmy zatem dwuskładnikowy ośrodek niejednorodny, którego składniki są izotropowe i cechują się przewodnościami cieplnymi  $\lambda_1$  oraz  $\lambda_2$ . Udziały frakcyjne poszczególnych składników ośrodka oznaczymy, jako  $\phi_1$  oraz  $\phi_2$ . Stosując warunek zaproponowany we wcześniejszej pracy autora (Łydźba i Różański 2014), najmniejszy możliwy wymiar REO,  $N_{\text{REO}}^{\min}$ , można określić jako minimalną liczbę wokseli/pikseli, dla której spełniony jest następujący warunek:

$$\forall N_{\text{REO}} \geq N_{\text{REO}}^{\min} \Rightarrow \left( \frac{\eta(\Theta) - 1}{\phi + (1 - \phi)\eta(\Theta)} \right)^2 g(N_{\text{REO}}) \leq \varepsilon \quad (4.33)$$

gdzie  $\phi = \max\{\phi_1, \phi_2\}$ ,  $\eta(\Theta) = \min\{\Theta, 1/\Theta\}$ , przy czym  $\Theta$  jest parametrem opisującym kontrast pomiędzy przewodnościami cieplnymi składników, tj.  $\Theta = \lambda_1/\lambda_2$ . Ponadto  $\varepsilon$  jest założonym błędem aproksymacji. Oczywiście jest, że im mniejsza wartość  $\varepsilon$ , tym większy minimalny wymiar REO. Z reguły przyjmuje się relatywnie małe wartości błędu, np. 1–5% (Różański 2010; Łydźba i Różański 2014). Obecna w równaniu (4.33) funkcja  $g(N_{\text{REO}})$  jest wariancją tzw. lokalnego udziału frakcyjnego (ang. *local volume fraction*). Mówiąc bardzo ogólnie, funkcja ta opisuje „zanikanie” wariancji udziału frakcyjnego wraz ze wzrostem wymiaru  $N_{\text{REO}}$ . Z reguły funkcja ta nie jest znana *a priori* – istnieją jednak pewne mikrostruktury, dla których ze względu na stosunkowo prosty proces stochastyczny stosowany do ich generacji, daje się opisać wariancję lokalnego udziału frakcyjnego w sposób analityczny. Przykładem takiej mikro-

struktury jest np. losowa szachownica (ang. *random checkerboard*). Jak pokazano w pracy Torquato (2002), w ogólnym przypadku wartości funkcji  $g(N_{\text{REO}})$  określa się na podstawie funkcji prawdopodobieństwa dwupunktowego. Dla zagadnienia 3D można pokazać, że (Torquato 2002):

$$g = \frac{8}{N_{\text{REO}}^6} \int_0^{N_{\text{REO}}} \int_0^{N_{\text{REO}}} \int_0^{N_{\text{REO}}} \left( S_2^{(1)} \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right) - \phi_1^2 \right) (N_{\text{REO}} - x_1)(N_{\text{REO}} - x_2)(N_{\text{REO}} - x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4.34)$$

przy czym  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) definiuje lokalny układ współrzędnych dla REO, natomiast  $S_2^{(j)}$  to statystyczna miara mikrostruktury, tzw. prawdopodobieństwo dwupunktowe dla składnika  $j$ .

W przypadku statystycznie jednorodnych i izotropowych ośrodków losowych, prawdopodobieństwo dwupunktowe dla składnika  $j$  oznacza prawdopodobieństwo, że dwa końce odcinka (a więc dwa punkty) o długości  $r$  znajdą się w składniku  $j$ , jeśli odcinek ten zostanie losowo „umieszczony” w ośrodku. Funkcja prawdopodobieństwa dwupunktowego dla składnika  $j$  osiąga maksymalną wartość,  $\phi_j$  (udział fakcyjny składnika  $j$  w kompozycie), w  $r = 0$  i zwykle „zbiega” do asymptotycznej wartości,  $\phi_j^2$ , dla  $r \rightarrow \infty$ , czyli:

$$\lim_{r \rightarrow 0} S_2^{(j)}(r) = \phi_j \quad \text{oraz} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} S_2^{(j)}(r) = \phi_j^2 \quad (4.35)$$

Najmniejsza odległość  $r$ , dla której wartość wyrażenia  $S_2^{(j)}(r) - \phi_j^2$  jest już pomijalnie mała, to tzw. zasięg kowariancji (Kanit i in. 2003; ang. *range of covariance*) lub tzw. długość korelacji (Torquato 2002; ang. *correlation length*), czyli minimalna odległość między dwoma geometrycznie nieskorelowanymi punktami mikrostruktury. Dla każdej zatem odległości  $r$  większej niż długość korelacji,  $l_c$ , prawdziwa jest następująca zależność:

$$\forall r \geq l_c(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{S_2^{(j)}(r) - \phi_j^2}{\phi_j^2} \right| \leq \varepsilon_{l_c} \quad (4.36)$$

W przypadku ośrodków dwuskładnikowych, dla których zakłada się ich statystyczną izotropię, wystarczające jest określenie funkcji prawdopodobieństwa dwupunktowego jedynie dla jednego ze składników. Funkcja ta, dla drugiego z nich, może być wyznaczona w prosty sposób, korzystając z następujących zależności:

$$\begin{aligned} S_2^{(1)}(r) &= \phi_1 - \frac{1}{2} S_2^{(12)}(r) \\ S_2^{(2)}(r) &= \phi_2 - \frac{1}{2} S_2^{(12)}(r) \\ S_2^{(1)}(r) + S_2^{(12)}(r) + S_2^{(2)}(r) &= 1 \end{aligned} \quad (4.37)$$

gdzie  $S_2^{(12)}$  oznacza prawdopodobieństwo, że oba końce odcinka o długości  $r$  znajdują się w obu składnikach jednocześnie. Funkcję prawdopodobieństwa dwupunktowego można określać, stosując różne techniki, np.: symulacje Monte Carlo (MC), szybką transformatę Fouriera lub metody dedykowane specjalnie dla obrazów binarnych (np. Yeong i Torquato 1998a).

Podsumowując, stosowana w niniejszej pracy metoda określania minimalnej wielkości REO, dla ośrodków dwuskładnikowych, wymaga:

- określenia funkcji prawdopodobieństwa dwupunktowego dla jednego ze składników kompozytu,
- wyznaczenia wariancji lokalnego udziału frakcyjnego  $g(N_{\text{REO}})$  zdefiniowanej zależnością (4.34) – w pracy autora (Łydźba i Róžański 2011) jako skuteczne narzędzie, proponuje się w tym celu metodę całkowania Monte Carlo,
- założenia błędu aproksymacji  $\varepsilon$  i określenia minimalnej liczby pikseli lub wokseli,  $N_{\text{REO}}^{\min}$ , korzystając z zależności (4.33).

#### 4.4.2. Numeryczne określanie makroskopowej przewodności cieplnej – sformułowanie problemu

W symulacjach numerycznych, w których rozwiązuje się zagadnienie brzegowe (4.6), zakłada się periodyczne warunki brzegowe. Wynika to z tego, iż, jak wspomniano już wcześniej, przyjęcie „periodyczności” pola korektorowego na brzegach REO prowadzi do najszybszej zbieżności odpowiedzi makroskopowej do „idealnego” parametru efektywnego (szerzej zostało to omówione w podrozdz. 4.2). W konsekwencji gwarantuje to możliwie najkrótszy czas obliczeń potrzebny do wyznaczenia parametru makroskopowego.

W szczególności, zagadnienie brzegowe (4.6) dla losowej realizacji REO( $\omega_j$ ), po założeniu periodycznych warunków brzegowych, można przedstawić jako (np. Łydźba i Róžański 2014):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} q_i^k = 0, & \text{w } V_{\text{REO}} \\ q_i^k = -\lambda(\mathbf{x}, \omega_j) \frac{\partial T^k}{\partial x_i}, & \text{w } V_{\text{REO}} \\ T^k(\mathbf{x}, \omega_j) = \delta_{ki} x_i + \tilde{T}^k(\mathbf{x}, \omega_j), & \text{w } V_{\text{REO}} \\ \tilde{T}^k - \text{periodyczny, } q_i^k e_i - \text{antyperiodyczny na } \partial V_{\text{REO}} \end{cases} \quad (4.38)$$

gdzie  $q_i^k$  oznacza składową wektora strumienia ciepła,  $T^k(\mathbf{x}, \omega_j)$  jest polem temperatury,  $\tilde{T}^k(\mathbf{x}, \omega_j)$  to tzw. człon korekcyjny,  $\lambda(\mathbf{x}, \omega_j)$  jest współczynnikiem przewodności cieplnej,  $\delta_{ij}$  to symbol Kroneckera, natomiast  $e_i$  jest składową jednostkowego wektora nor-

malnego. Indeks górny  $k$  oznacza, że zagadnienie brzegowe odpowiada wymuszeniu w postaci jednostkowego makroskopowego gradientu temperatury działającego na kierunku  $x_k$ . Założone periodyczne warunki brzegowe implikują, że korektor  $\tilde{T}^k$  osiąga te same wartości w dwóch punktach na przeciwległych brzegach obszaru  $\partial V_{\text{REO}}$ , podczas gdy strumień  $q_i^k e_i$  przyjmuje w tych punktach wartości przeciwne. Tak sformułowane zagadnienie brzegowe umożliwia znalezienie rozwiązania z dokładnością co do stałej wartości temperatury. Uśrednienie objętościowe strumienia ciepła prowadzi do oszacowania „pozornego” parametru makroskopowego dla losowej realizacji  $\text{REO}(\omega_j)$ , tj.:

$$\lambda^{\text{hom, poz}}(\omega_j) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{V_{\text{REO}}} \int_{V_{\text{REO}}} (q_1^1 + q_2^2 + q_3^3) d\mathbf{x} \right) \quad (4.39)$$

przy czym taka uproszczona forma obowiązuje po założeniu makroskopowej izotropii ośrodka.

Ostatecznie makroskopowa przewodność cieplna ośrodka określona jest równaniem (4.31). Liczebność próby, tj.  $N_p$ , określana jest metodą sformułowaną w poprzednich pracach autora, tj. (Różański 2010) oraz (Łydźba i Różański 2014). Mówiąc bardzo ogólnie, warunek na minimalną liczbę losowych realizacji REO, jaką należy uwzględnić podczas określania parametru makroskopowego wynika z Centralnego Twierdzenia Granicznego (Feller 1961). Jeśli założy się, że estymator (4.31) może odbiegać od parametru makroskopowego o pewien błąd względny, powiedzmy  $\varepsilon_\lambda$ , z zadaniem prawdopodobieństwem równym  $1 - \kappa$ , to liczebność próby musi spełniać następujący warunek (zob. np. Różański 2010):

$$N_p \geq \frac{\sigma^2}{\left(\lambda^{\text{hom}} \varepsilon_\lambda\right)^2} \left( \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\kappa}{2} \right) \right)^2 \quad (4.40)$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego,  $\kappa$  jest założonym poziomem istotności, natomiast  $\sigma^2$  jest wariancją zmiennej losowej  $\lambda^{\text{hom}}$ .

Generalnie wariancja  $\sigma^2$  oraz wartość średnia (4.31) nie są *a priori* znane, dlatego też proces poszukiwania minimalnej liczby  $N_p$  jest procesem iteracyjnym. Po rozwiązaniu zatem zagadnienia brzegowego dla kolejnej realizacji  $\text{REO}(\omega_j)$  określa się wartość estymatora (4.31), a następnie wariancję  $\sigma^2$ , korzystając z następującej zależności:

$$\sigma^2(N_p) = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \left( \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \lambda^{\text{hom, poz}}(\omega_j) - \lambda^{\text{hom, poz}}(\omega_j) \right)^2 \quad (4.41)$$

Iteracyjna procedura określania parametru makroskopowego na podstawie zależności (4.31) zostaje zatrzymana wówczas, gdy spełniony jest warunek (4.40).

## 5. Przewodność cieplna wybranych ośrodków gruntowych: pomiary laboratoryjne i wyniki

W analizach zawartych w dalszych rozdziałach niniejszej monografii korzysta się z wyników badań przewodności cieplnej, nie tylko tych zaczerpniętych z literatury tematu, ale przede wszystkim pochodzących z własnych pomiarów autora. W trakcie tych badań określano przewodność cieplną gruntów drobnoziarnistych znajdujących się w stanie pełnego nasycenia. Dlatego też uznano za stosowne przybliżenie czytelnikowi charakterystyki badanych gruntów (podrozdz. 5.1), omówienie podstaw teoretycznych stosowanej metody pomiarowej, tj. testu sondą igłową (podrozdz. 5.2) oraz dokonanie zestawienia tabelarycznego uzyskanych rezultatów (podrozdz. 5.3).

### 5.1. Charakterystyka badanych gruntów

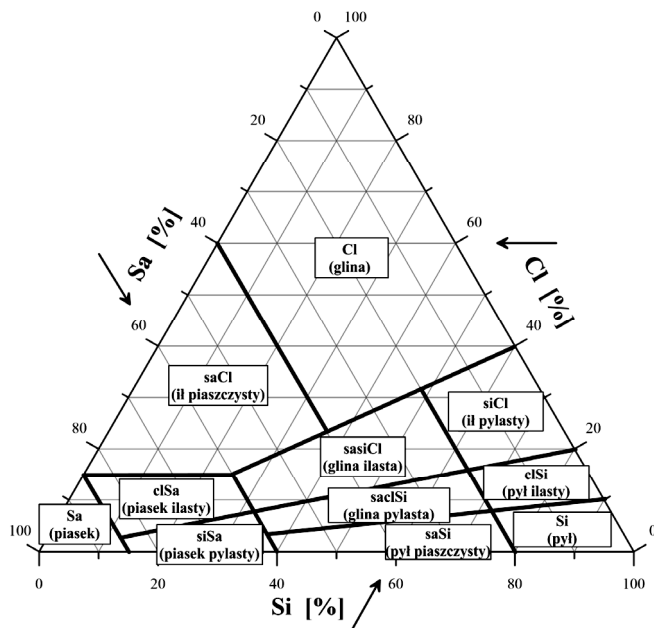
Badania własne autora dotyczyły określania przewodności cieplnej dla 17 próbek gruntów drobnoziarnistych znajdujących się w stanie pełnego nasycenia. Na podstawie analizy makroskopowej wyszczególniono takie grunty, jak: ił (14 próbek), pył (1 próbka) oraz ił pylasty (2 próbki).

Charakterystyki analizowanych gruntów dokonano przez zestawienie wybranych cech oraz wartości parametrów fizycznych (tab. 5.1), takich jak: nazwa gruntu, zawartość poszczególnych frakcji gruntowych (piaskowa –  $\phi_{sa}$  [%], pyłowa –  $\phi_{si}$  [%], iłowa –  $\phi_{ci}$  [%]), zawartość materii organicznej ( $\phi_{no}$  [%]), porowatość ( $n$  [-]), gęstość objętościowa szkieletu gruntowego ( $\rho_d$  [ $\text{g cm}^{-3}$ ]), gęstość właściwa szkieletu gruntowego ( $\rho_s$  [ $\text{g cm}^{-3}$ ]) oraz powierzchnia właściwa ( $S_t$  [ $\text{m}^2 \text{g}^{-1}$ ]).

Rodzaj gruntu ustalono, posługując się trójkątem ISO „krajowym” proponowanym wg załącznika krajowego do normy PN-EN ISO 14688-2 (Gołębiewska i Wudzka 2006). Jednak nazwy gruntu podane w tab. 5.1 odpowiadają tym obowiązującym wcześniej i występującym np. w normie PN-B/81-03020. Na rysunku 5.1 przedstawiono trójkąt ISO „krajowy” do rozpoznawania rodzaju gruntu według zawartości frakcji. Zauważmy, że na wykresie tym występują zarówno nazwy skrótowe (zgodne z PN-EN ISO 14688-2), jak i ich odpowiedniki, zgodne z nazewnictwem stosowanym w normie PN-B/81-03020 (nazwy te podano w nawiasach).

Tabela 5.1. Nazwa oraz wybrane parametry fizyczne dla gruntów drobnoziarnistych analizowanych przez autora (Źródło: Raport Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, seria SPR nr 2: Łyżbza i in. 2013b)

Lp.	Nazwa gruntu	$\phi_{Sa}$ [%]	$\phi_{Si}$ [%]	$\phi_{Cl}$ [%]	$\phi_{mo}$ [%]	$n$ [-]	$\rho_d$ [g cm <sup>-3</sup> ]	$\rho_s$ [g cm <sup>-3</sup> ]	$S_t$ [m <sup>2</sup> g <sup>-1</sup> ]
1	ił pylasty	6	58	36	0,25	0,36	1,66	2,61	93,0
2	ił	12	45	43	0,42	0,24	1,97	2,58	101,7
3	ił	12	49	39	4,52	0,29	1,88	2,65	127,3
4	ił	0	46	54	2,15	0,37	1,61	2,56	148,5
5	ił pylasty	6	58	36	3,62	0,42	1,52	2,63	103,9
6	ił	6	24	70	0,18	0,38	1,62	2,61	90,7
7	ił	5	37	58	0,35	0,35	1,73	2,67	102,3
8	ił	2	57	41	0,05	0,31	1,80	2,62	88,5
9	ił	4	50	46	1,20	0,26	1,97	2,68	121,9
10	ił	27	32	41	0,08	0,34	1,75	2,63	57,0
11	ił	5	37	58	0,38	0,42	1,51	2,60	129,3
12	pył	1	92	7	0,05	0,43	1,51	2,63	59,6
13	ił	36	28	36	0,23	0,27	1,93	2,63	90,4
14	ił	4	42	54	1,65	0,27	1,94	2,65	132,6
15	ił	1	57	42	0,10	0,50	1,32	2,61	84,1
16	ił	7	33	60	0,05	0,36	1,68	2,61	102,3
17	ił	21	40	39	0,65	0,29	1,85	2,60	64,9



Rys. 5.1. Trójkąt ISO „krajowy” do rozpoznawania rodzaju gruntu wg zawartości frakcji (Gołębiewska i Wudzka 2006)



Wszystkie wykorzystywane w dalszej części pracy wyniki badań przewodności cieplnej ośrodków gruntowych zarówno omawiane tutaj badania własne (dotyczące gruntów drobnoziarnistych znajdujących się w stanie pełnej saturacji), jak i dane pochodzące z literatury (wyniki pomiarów przewodności cieplnej dla gruntów częściowo oraz w pełni nasyconych) uzyskano za pomocą testów sondą igłową. Wobec tego, jak wspomniano już wcześniej, autor uznał za konieczne przybliżenie czytelnikowi podstaw teoretycznych oraz sposobu przeprowadzania badania za pomocą sondy igłowej. Podstawy teoretyczne oraz wytyczne dotyczące przeprowadzania badania i interpretacji wyników przedstawiono w kolejnym podrozdziale.

## 5.2. Pomiar przewodności cieplnej z wykorzystaniem sondy igłowej

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat obserwowany był silny rozwój metod pomiarowych w zakresie określania parametrów termicznych ośrodka gruntowego. W konsekwencji dostępne dziś metody pomiarowe umożliwiają określanie parametrów termicznych gruntu, w szczególności przewodności cieplnej, zarówno za pomocą metod *in situ*, jak i technik laboratoryjnych. Niezależnie od tego, w jakich warunkach (w terenie lub w laboratorium) dokonywany jest pomiar, aby możliwe było określenie przewodności cieplnej gruntu, wymagane jest zainicjowanie przepływu ciepła przez ośrodek gruntowy (lub próbkę gruntu) przez wyindukowanie gradientu temperatury o odpowiedniej intensywności.

Najbardziej ogólny podział technik pomiarowych odnosi się do warunków, w których następuje pomiar. Wyróżnia się metody ustalonego (ang. *steady state*) oraz nieustalonego (ang. *transient*) przepływu ciepła. W przypadku tych pierwszych określenie przewodności cieplnej wymaga znacznie dłuższego czasu badania. Wynika to z faktu, iż pomiaru przewodności cieplnej gruntu dokonuje się wówczas, gdy w gruncie mamy już do czynienia z ustalonym, a więc niezmiennym w czasie, przepływem ciepła. Metody pomiarowe *in situ* zazwyczaj zaliczają się do tej właśnie grupy technik pomiarowych. Najbardziej rozpowszechnionymi metodami pomiaru przewodności cieplnej gruntu *in situ* są: metoda sferycznego próbnika (Mochlinski 1964), metoda pomiaru strumienia ciepła (van Wijk i Bruijn 1964; Schwerdtfeger 1970) oraz test odpowiedzi termicznej (Mogensen 1983; Austin 1998; Gehlin 1998). Przeprowadzenie badań przewodności cieplnej gruntu w warunkach polowych wymaga zazwyczaj znacznego nakładu finansowego oraz długiego czasu pomiaru (Sanner i in. 2005).

Alternatywą dla badań terenowych są, znacznie tańsze i łatwiejsze do przeprowadzenia, laboratoryjne techniki pomiarowe. Podobnie, jak w przypadku wspomnianych badań terenowych, laboratoryjne metody przepływu ciepła ustalonego wymagają dłu-

giego czasu do określenia przewodności cieplnej (niejednokrotnie może to być nawet kilka lub kilkanaście godzin). Ponadto do przeprowadzenia testu wymagane jest skonstruowanie specjalnie izolowanej komory w taki sposób, aby przepływ ciepła przez grunt odbywał się tylko w jednym kierunku; wówczas współczynnik  $\lambda$  określa się, korzystając bezpośrednio z prawa Fouriera (np. Low i in. 2013). Długi czas pomiaru oraz relatywnie wysoki gradient temperatury, w przypadku metod przepływu ustalonego, ma również swoje konsekwencje w określaniu i interpretacji współczynnika przewodności cieplnej – jego wartość może zostać zaburzona przez możliwość wystąpienia mechanizmu konwekcji wody.

Ze względu na wymienione wady metod bazujących na ustalonym przepływie ciepła w ostatnim czasie dużą popularność zyskały laboratoryjne metody przepływu nieustalonego. Cechują się one krótkim czasem badania (ok. kilku minut) oraz niewielkim wzrostem temperatury badanej próbki, co powoduje, że wpływ konwekcji na pomierzoną wartość przewodności cieplnej w zasadzie w większości przypadków jest pomijalny. Jednocześnie dokładność predykcji pozostaje na podobnym poziomie, jak w przypadku metod ustalonego przepływu ciepła (Farouki 1981). Współczynnik przewodności cieplnej gruntu określa się na podstawie odczytów temperatury uzyskanych w odpowiednio krótkich interwałach czasowych, a rejestracja wartości temperatury odbywa się przez wprowadzoną do próbki gruntu niewielkich rozmiarów sondę igłową. Metoda nieustalonego przepływu ciepła z wykorzystaniem sondy igłowej jest w ostatnich czasach najbardziej popularną laboratoryjną metodą wyznaczania przewodności cieplnej ośrodków gruntowych (np. Nicolas i in. 1993; Hanson i in. 2000; Lu i in. 2007; Różański i Sobótka 2013).

Test sondą igłową (ang. *needle probe*) – potocznie nazywaną również igłą termiczną – jest niezwykle skuteczną i szybką metodą określania wartości przewodności cieplnej gruntu. W celu przeprowadzenia badania umieszcza się w próbce gruntu cylindryczną sondę igłową – ze względu na jej niewielkie rozmiary (średnica ok. 2,5 mm oraz długość ok. 10 cm) czynność ta zwykle nie powoduje naruszenia wewnętrznej struktury gruntu. Zazwyczaj sondę udaje się umieścić w próbce ręcznie, przez wciskanie, bez wykonywania dodatkowych czynności. W niektórych przypadkach (np. grunt o bardzo zwartej strukturze; grunt po obróbce termicznej w wysokich temperaturach) konieczne może być nawiercenie otworu pilotażowego, zanim sonda zostanie umieszczona w gruncie. Wówczas, aby polepszyć kontakt pomiędzy igłą a badanym gruntem, stosuje się również pastę termoprzewodzącą (np. Różański i Stefaniuk 2016a). Wewnątrz sondy znajduje się element podgrzewający (źródło ciepła dostarczające energię cieplną o stałym przyroście) oraz czujnik temperatury. Prędkość przyrostu temperatury zależy bezpośrednio od przewodności cieplnej gruntu otaczającego sondę igłową. Zwykle w trakcie badania temperatura wokół sondy wzrasta o nie więcej niż 1–2 °C. Określenia współczynnika  $\lambda$  dokonuje się przez dopasowanie modelu analitycznego do danych uzyskanych w trakcie badania, tj. wartości temperatury zarejestrowanych w poszczególnych chwilach czasowych.

### 5.2.1. Podstawy teoretyczne

Modelem teoretycznym, na którym bazuje idea pomiaru sondą igłową, jest rozwiązanie zagadnienia liniowego źródła ciepła umieszczonego w izotropowej i jednorodnej półprzestrzeni o dyfuzyjności cieplnej  $D$ . Dla takiego medium ciepło płynie od źródła zgodnie z ogólnym równaniem Fouriera. W przypadku współrzędnych cylindrycznych, których przyjęcie jest bardziej adekwatne ze względu na kołowy przekrój igły, równanie to można przedstawić w następującej postaci:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5.1)$$

gdzie  $T$  jest polem temperatury,  $t$  oznacza czas, natomiast  $r$  jest odległością od źródła ciepła w kierunku promieniowym. Zakładając, że ciepło dostarczane jest od chwili początkowej  $t = 0$ , ze stałym przyrostem  $q$  [ $\text{Wm}^{-1}$ ] na jednostkę długości igły, to wzrost temperatury ośrodka otaczającego źródło ciepła można opisać następującą zależnością (Carslaw i Jaeger 1959):

$$\Delta T = -\frac{q}{4\pi\lambda} \text{Ei} \left( -\frac{r^2}{4Dt} \right) \quad (5.2)$$

W powyższej zależności symbol Ei oznacza funkcję całkowo-wykładniczą:

$$-\text{Ei}(-\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (5.3)$$

którą można aproksymować szeregiem (por. np. Abramowitz i Stegun 1972):

$$-\text{Ei}(-\alpha) = -\gamma - \ln \alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{kk!} \quad (5.4)$$

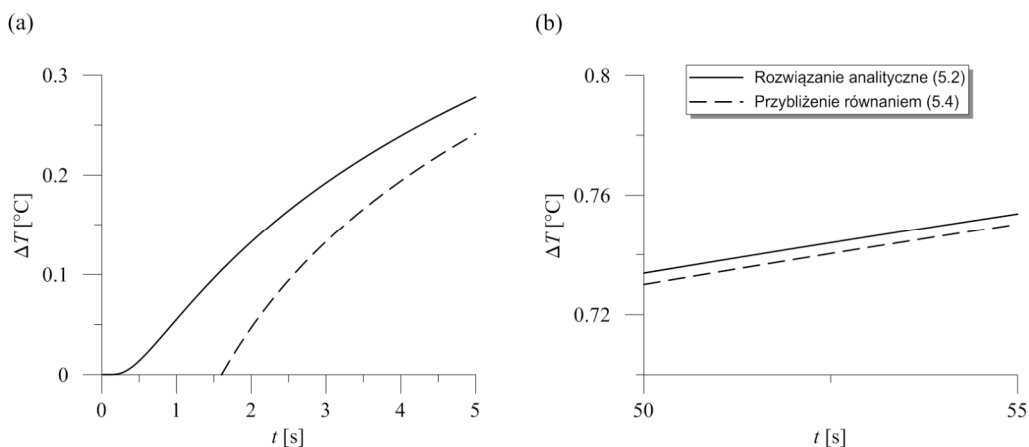
W równaniu (5.4), greckim symbolem  $\gamma$  oznaczono tzw. stałą Eulera, której wartość, w przybliżeniu, wynosi 0,5772... Argument funkcji wykładniczej (5.4) wynika bezpośrednio z zależności (5.2), tj.  $\alpha = r^2/(4Dt)$ .

Zauważmy, że dla dużych wartości  $t$  – z założeniem, że promień  $r$  jest mały, a dyfuzyjność cieplna  $D$  nie zmienia się w czasie – wartość współczynnika  $\alpha$  maleje. Wówczas człony występujące w równaniu (5.4) poza  $\ln \alpha$  stają się pomijalnie małe. W rezultacie przyrost temperatury  $\Delta T$  staje się liniowo zależny od  $\ln t$ ; równanie (5.4) może być więc przybliżone następującym wyrażeniem:

$$\Delta T \approx \frac{q}{4\pi\lambda} \ln t + C \quad (5.5)$$

gdzie  $C$  jest stałą.

Na rysunku 5.2 przedstawiono przyrost temperatury  $\Delta T$  dla dwóch różnych przedziałów czasowych: (a) 0–5 [s] oraz (b) 50–55 [s]. Wyniki odpowiadają typowym wartościom parametrów cieplnych gruntów oraz standardowej charakterystyce sondy igłowej, tj.  $D = 0,4$  [mm<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>],  $\lambda = 1,5$  [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>],  $r = 1,2$  [mm] oraz  $q = 4,0$  [Wm<sup>-1</sup>]. Linią ciągłą zaprezentowano rozwiązanie analityczne dane zależnością (5.2), natomiast linią przerywaną przedstawiono jego przybliżenie uzyskane z wykorzystaniem aproksymacji (5.4), przy czym pominięto tu wszystkie człony poza  $\ln \alpha$ .



Rys. 5.2. Przyrost temperatury  $\Delta T$  dla dwóch różnych przedziałów czasowych: (a) 0–5 [s]; (b) 50–55 [s]. Linia ciągła – rozwiązanie analityczne (5.2), linia przerywana – przybliżenie równaniem (5.4)

Wyraźnie widać, że w przedziale czasowym 0–5 [s] przybliżenie (5.4) dość słabo aproksymuje rozwiązanie analityczne. Jednakże dla większych chwil czasowych (50–55 [s]), różnica pomiędzy aproksymacją (5.4) a rozwiązaniem analitycznym (5.2) jest już pomijalnie mała. W trakcie rzeczywistego badania czas nagrzewania igły (dostarczania energii cieplnej przez źródło ciepła) wynosi zazwyczaj około 2–3 min., co w konsekwencji podanych analiz upoważnia do stosowania zależności aproksymacyjnej (5.4).

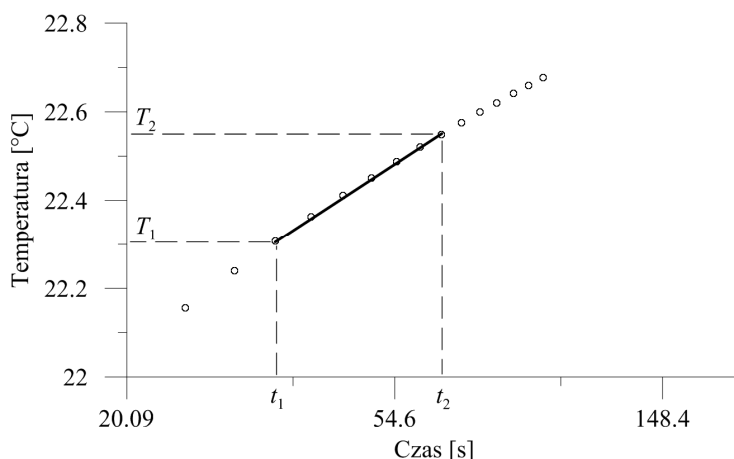
Wobec tego, w celu określenia współczynnika przewodności cieplnej, wartości temperatury w funkcji czasu należy przedstawić na wykresie półlogarytmicznym ( $T - \ln t$ ). Następnie należy wybrać tę część wykresu, w której zmienność temperatury względem  $\ln t$  jest liniowa – założmy, że odpowiada to przedziałowi czasowemu  $t_1 - t_2$ . Odczytując wartości temperatury dla wskazanych chwil czasowych ( $T_1$  oraz  $T_2$ ), współczynnik przewodności cieplnej określa się z następującej zależności (procedurę zobrazowano graficznie na rys. 5.3):

$$\lambda = \frac{q}{4\pi S} \quad (5.6)$$

w której parametr  $S$ , będący nachyleniem krzywej  $T - \ln t$ , określa się oczywiście jako:

$$S = \frac{T_2 - T_1}{\ln t_2 - \ln t_1} \quad (5.7)$$

Warto tu nadmienić, że opisany sposób określania współczynnika przewodności cieplnej został uregulowany i odpowiada procedurom zawartym w następujących normach: IEEE 442 (1981) oraz ASTM D5334-00 (2000).



Rys. 5.3. Procedura określania współczynnika przewodności cieplnej zgodna z normami IEEE 442 (1981) oraz ASTM D5334-00 (2000).

Punktami oznaczono rzeczywiste dane pomiarowe uzyskane w trakcie badania gruntu spoistego (iłu) – badania własne autora

Nowsza wersja normy ASTM D5334-08 (2008) wprowadziła ważną zmianę dotyczącą sposobu określania współczynnika przewodności cieplnej. Od 2008 roku do określenia wartości  $\lambda$  sugeruje się wykorzystanie odczytów temperatury pochodzących zarówno z fazy grzania (wówczas, gdy źródło ciepła jest włączone) oraz z fazy chłodzenia (gdy źródło ciepła jest wyłączone). Taki sposób określania współczynnika przewodności cieplnej uznany jest za bardziej precyzyjny i większość aktualnie obecnych na rynku urządzeń odpowiada wymaganiam stawianym w normie ASTM z 2008 roku. Dalej opisano sposób określania współczynnika przewodności cieplnej według zaleceń normy ASTM D5334-08 (2008).

Jeśli czas, w którym źródło ciepła jest włączone, oznaczymy przez  $t_{grz}$ , to zgodnie z rozwiązaniem analitycznym przedstawionym w pracy (Carslaw i Jaeger 1959), spadek temperatury  $\Delta T$  określa następujące równanie:

$$\Delta T = \frac{q}{4\pi\lambda} \left[ -\text{Ei} \left( -\frac{r^2}{4Dt} \right) + \text{Ei} \left( -\frac{r^2}{4D(t-t_{\text{grz}})} \right) \right] \quad (5.8)$$

Cały przebieg badania zatem można analitycznie opisać za pomocą równań (5.2) oraz (5.8), przy czym obowiązują one w następujących przedziałach czasowych, odpowiednio,  $0 < t \leq t_{\text{grz}}$  oraz  $t > t_{\text{grz}}$ . Zauważmy, że podobnie jak to było w przypadku równania (5.2), wyrażenie (5.8) również zawiera funkcję całkowo-wykładniczą, Ei. Możliwe jest zatem, dla odpowiednio długich czasów, aproksymowanie zależności (5.8) równaniem:

$$\Delta T \approx \frac{q}{4\pi\lambda} \ln \left( \frac{t}{t-t_{\text{grz}}} \right) + C, \quad t > t_{\text{grz}} \quad (5.9)$$

Wówczas uproszczona procedura określania współczynnika przewodności cieplnej wygląda następująco (ASTM D5334-08, 2008). Na wykresie półlogarytmicznym należy przedstawić odczyty temperatury zarejestrowane w poszczególnych chwilach czasowych zarówno dla fazy grzania, jak i chłodzenia. Dla obu przypadków należy wyznaczyć tę część krzywej, gdzie przebieg zmienności temperatury względem  $\ln[t/(t-t_{\text{grz}})]$  jest liniowy. Następnie, stosując zależność (5.7), wyznacza się nachylenia obu krzywych, tj.  $S_{\text{grz}}$  – dla fazy grzania oraz  $S_{\text{chl}}$  – dla fazy chłodzenia. Ponownie wartość współczynnika przewodności cieplnej określa się z zależności (5.6), przy czym  $S$  oznacza tym razem wartość średnią, określoną w następujący sposób:  $S = (S_{\text{grz}} + S_{\text{chl}})/2$ .

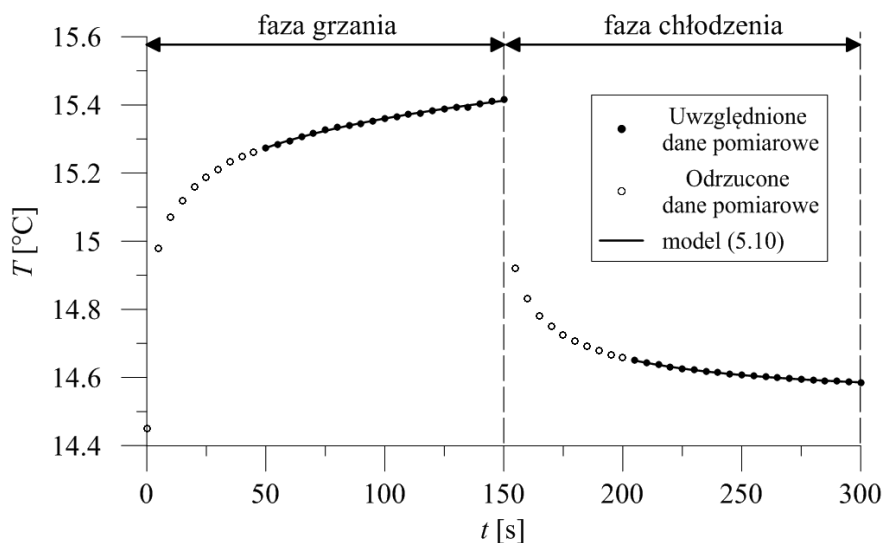
Opisany sposób określania wartości  $\lambda$  określany jest mianem uproszczonego. W większości obecnie dostępnych na rynku urządzeń wyznaczanie współczynnika  $\lambda$  polega jednak na pełnej analizie polegającej na znalezieniu najlepszego dopasowania założonego modelu teoretycznego do danych pomiarowych pochodzących zarówno z fazy grzania, jak i chłodzenia. Poniżej zaprezentowano model teoretyczny stosowany np. w mierniku KD2Pro (2011) firmy Decagon Devices:

$$T = \begin{cases} m_0 + m_2 t + m_3 \ln t, & \text{dla } 0 < t \leq t_{\text{grz}} \\ m_1 + m_2 t + m_3 \ln \left( \frac{t}{t-t_{\text{grz}}} \right), & \text{dla } t > t_{\text{grz}} \end{cases} \quad (5.10)$$

Parametry  $m_0 - m_3$  określa się, stosując wybraną technikę regresji nieliniowej. Należy tu zwrócić uwagę, że względem równań (5.2) oraz (5.8) zależność (5.10) zawiera dodatkowy człon,  $m_2 t$ , który ma za zadanie uwzględnienie możliwości wystąpienia zjawiska dryftu termicznego, a więc zmiany napięcia referencyjnego wywołanej wahaniami temperatury. Ostatecznie współczynnik przewodności cieplnej wyznacza się, analogicznie do (5.6), jako:

$$\lambda = \frac{q}{4\pi m_3} \quad (5.11)$$

Ze względu na fakt, iż najlepszą aproksymację funkcji całkowo-wykładniczej uzyskuje się dla relatywnie długich czasów, norma ASTM D5334-08 (2008) zaleca, aby część początkowych wyników – zarówno z fazy grzania, jak i chłodzenia – odrzucać i nie uwzględniać w procedurze określania współczynnika  $\lambda$ . W efekcie 1/3 początkowych odczytów temperatury z obu faz jest zazwyczaj pomijana. Procedurę określania współczynnika przewodności cieplnej graficznie zobrazowano na rys. 5.4 (ponownie przedstawione na wykresie odczyty wartości temperatury pochodzą z badań własnych autora).



Rys. 5.4. Procedura określania współczynnika przewodności cieplnej zgodnie z normą ASTM D5334-08 (2008)

Niezależnie od tego, jakie podejście stosuje się do określania współczynnika przewodności cieplnej, należy mieć na uwadze, że rzeczywista sonda różni się od wyidealizowanego liniowego źródła ciepła – używana w badaniach igła jest cylindrycznym źródłem ciepła o skończonej długości, promieniu oraz pojemności cieplnej. Wobec tego, aby możliwe było opisanie rzeczywistego pomiaru rozwiązaniem analitycznym (5.2), spełniony powinien być warunek odnośnie do stosunku długości igły,  $L_{ig}$ , do jej promienia,  $R_{ig}$ , (np. Farouki 1981), tj.

$$\frac{L_{ig}}{R_{ig}} \geq 25 \quad (5.12)$$

Ponadto bardzo ważnym aspektem odnośnie do pomiaru laboratoryjnego igłą termiczną jest również wymiar (w przekroju prostopadłym do zanurzonej igły) próbki gruntowej. Promień próbki badanego materiału,  $R_{pr}$ , powinien być na tyle duży, aby ilość ciepła dochodząca do brzegu obszaru była pomijalnie mała w odniesieniu do ilości ciepła dostarczanego przez źródło ciepła w trakcie badania. Ideałem jest oczywiście zapewnienie takiego obszaru, aby rozchodzące się w próbce ciepło w ogóle nie docierało do brzegu. Zgodnie z najnowszą wersją normy ASTM, tj. D5334-14 (2014), minimalny promień badanej próbki gruntowej powinien wynosić co najmniej 25 [mm]. Jest to wielkość porównywalna z wartością wynikającą z warunku zaproponowanego np. w pracy Wechslera (1966):

$$\exp\left(-\frac{R_{pr}^2}{4Dt}\right) \leq 0,02 \quad (5.13)$$

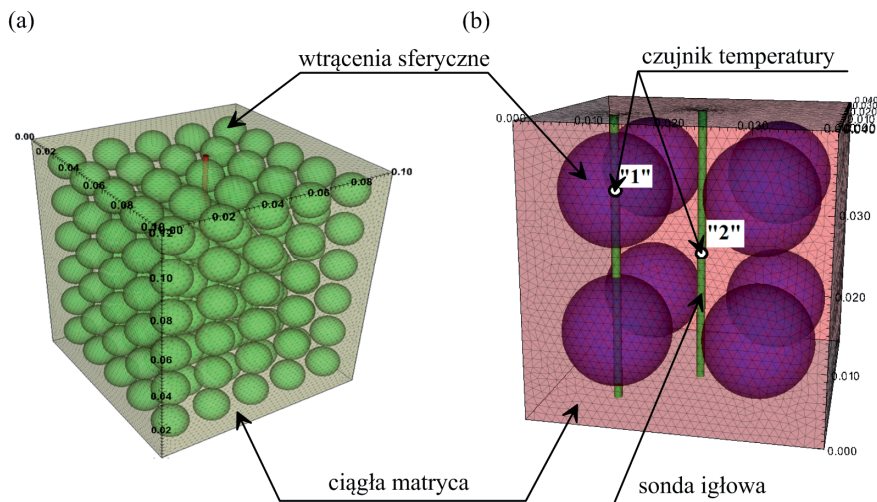
Zauważmy, że minimalny promień próbki wynikający z powyższej nierówności zależy od dyfuzyjności cieplnej gruntu oraz czasu badania; np. w przypadku gruntu o dyfuzyjności cieplnej  $D = 0,4$  [mm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>] – dla którego wyniki prezentowano np. na rys. 5.2 – oraz czasu badania  $t = 150$  s, minimalny wymiar próbki określony z zależności (5.13) wynosi 30 [mm].

### 5.2.2. Zastosowanie sondy igłowej do określania przewodności cieplnej ośrodków niejednorodnych

Wpływ niejednorodności materiału – choć nie bezpośrednio w kontekście ośrodka gruntowego – na możliwy rozrzut wyników uzyskanych za pomocą sondy igłowej przebadano we wcześniejszej pracy autora (Łydźba i in. 2014). Przeprowadzono tam dwuskalową analizę w ramach obliczeniowej mikromechaniki, której celem było sprawdzenie wpływu lokalizacji sondy igłowej na uzyskiwany w trakcie badania wynik przewodności cieplnej. Rozważano wirtualny kompozyt o morfologii matryca-wtrącenie. Założono dla tego materiału strukturę periodyczną, tj. wtrącenia o kształtach sferycznych miały ustaloną, periodycznie powtarzającą się lokalizację (rys. 5.5a). Analizowano dwa przypadki w odniesieniu do:

- **parametrów przewodności cieplnej inkluzji:** (a) wtrącenia mają wyraźnie wyższy współczynnik przewodności cieplnej niż matryca oraz (b) sytuacja odwrotna, tj. sferyczne wtrącenia, w porównaniu do ciągłej matrycy, słabo przewodzą ciepło,
- **lokalizacji czujnika temperatury umieszczonego w sondzie igłowej:** („1”) igła termiczna „przechodzi” przez wtrącenia, a czujnik temperatury znajduje się w środku sferycznej inkluzji, („2”) sonda w całości umieszczona jest w matrycy, a rejestrator temperatury znajduje się w możliwie największej odległości od wtrąceń sferycznych; rozpatrywane lokalizacje igły przedstawiono na rys. 5.5b.



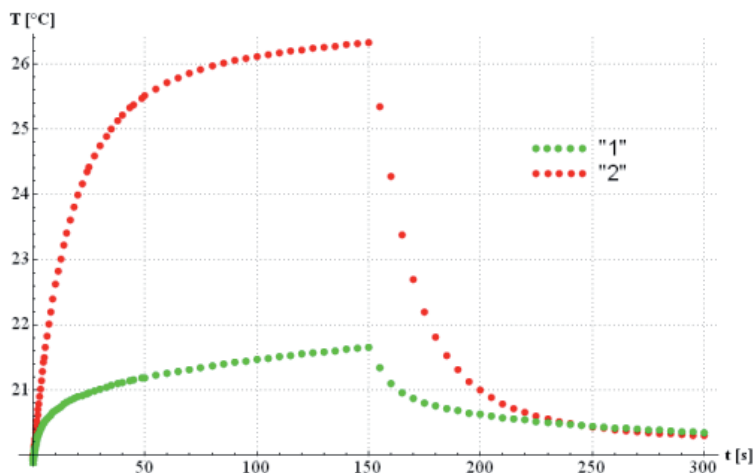


Rys. 5.5. (a) Analizowany kompozyt o strukturze periodycznej oraz (b) rozpatrywane lokalizacje sondy igłowej (Łydźba i in. 2014)

Na podstawie analiz numerycznych przeprowadzonych w omawianej pracy (Łydźba i in. 2014) wykazano m.in., że uzyskiwany w trakcie badania rozkład temperatury jest zależny od lokalizacji czujnika, co silnie wpływa na określaną wartość przewodności cieplnej materiału. W celu zobrazowania tego problemu, na rys. 5.6 przedstawiono pochodzące z symulacji numerycznych odczyty temperatury dla dwóch rozpatrywanych lokalizacji czujnika („1” oraz „2”). Wyniki te odpowiadają przypadkowi (b), co oznacza, że wtrącenia sferyczne, w odniesieniu do matrycy, słabo przewodzą ciepło. W szczególności dla inkluzji przyjęto współczynnik przewodności cieplnej równy  $0,038 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$ , podczas gdy ciągła matryca charakteryzowana jest przewodnością cieplną wynoszącą  $1,0 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$ . Udział frakcyjny wtrąceń w całej objętości próbek wynosił 25%.

Dla obu rozpatrywanych lokalizacji rejestratora temperatury określono współczynniki przewodności cieplnej zgodnie z procedurą zaprezentowaną na rys. 5.4, przy czym modelem teoretycznym używanym do „wpisania się” w odczyty temperatury było równanie (5.10). Dla przypadku, gdy czujnik temperatury znajdował się w środku sferycznej inkluzji („1”), określony współczynnik przewodności cieplnej wynosił  $0,398 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$ . Dla drugiej lokalizacji wyznaczono wartość przewodności cieplnej równą  $0,751 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$ . Jednocześnie dla REO, zdefiniowanej w postaci pojedynczej komórki periodyczności, rozwiązano zagadnienie brzegowe (4.6) i określono efektywny współczynnik przewodności cieplnej kompozytu jako równy  $0,682 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$ . Uzyskane rezultaty wskazują jednoznacznie, że w przypadku materiałów o wyraźnie niejednorodnej mikrostrukturze (zarówno w odniesieniu do geometrii, jak i kontrastu pomiędzy przewodnościami składników) wyznaczona w badaniu sondą igłową war-

tość parametru  $\lambda$  jest bardzo wrażliwa na lokalizację sondy, a przede wszystkim umiejscowienie czujnika temperatury. Co najważniejsze, w takim przypadku nie powinno się określać współczynnika przewodności cieplnej, bazując tylko na jednym pomiarze, tj. dla konkretnej, pojedynczej lokalizacji igły termicznej.



Rys. 5.6. Wartości temperatury zarejestrowane w różnych chwilach czasowych w zależności od lokalizacji czujnika temperatury (Łydźba i in. 2014)

Zauważmy, że analizy prowadzone we wcześniejszej pracy autora (Łydźba i in. 2014), ze względu na dość ekstremalne lokalizacje czujnika (np. umiejscowienie go w środku pojedynczej inkluzji) oraz geometrii mikrostruktury należy traktować raczej jako rozważania teoretyczne. W praktyce dla rzeczywistego ośrodka gruntowego, dość trudno wyobrazić sobie sytuację, która odpowiadałaby przypadkom umiejscowienia sondy igłowej, jak te pokazane na rys. 5.5b. Z wielu badań przeprowadzonych przez autora (kilkaset pomiarów dla różnych rodzajów gruntów, w różnych stanach nasycenia oraz przed i po „obróbce termicznej”) wynika, że badanie przewodności cieplnej gruntów za pomocą sondy igłowej charakteryzuje się dużą powtarzalnością wyników. Dla większości przypadków w zasadzie nie obserwowano takiego rozrzutu wyników, który wymuszałby konieczność przeprowadzenia pewnej serii pomiarów oraz estymowania współczynnika  $\lambda$  jako wartości średniej, określonej z kolejnych odczytów. Sugeruje się jednak, aby każdorazowo dokonywać około 2–3 pomiarów dla różnych lokalizacji sondy igłowej w obrębie próbki, w celu weryfikacji powtarzalności wyników. Pomiarów w poszczególnych lokalizacjach igły termicznej należy dokonywać oczywiście w taki sposób, aby badania przeprowadzane były niezależnie, przy czym niezależność rozumie się tutaj w taki sposób, że poszczególnych pomiarów dokonuje się w miejscach na tyle odległych od siebie, że pola temperatury z poszczególnych

badania, w zasadzie, nie będą się „nachodziły”. Odstępy pomiędzy punktami, w których dokonuje się pomiarów powinny być zatem odległe o min. 50 [mm] (wg ASTM, tj. D5334-14) lub  $D_{pr} = 2R_{pr}$ , gdzie  $R_{pr}$  wynika z warunku (5.13).

W przypadku gdy grunt jest bardzo niejednorodny, np. zawiera dużo frakcji kamienistej, wówczas uzyskane wyniki pomiaru, w zależności od lokalizacji sondy, mogą charakteryzować się nieco większym rozrzutem. W takim przypadku zaleca się wykonanie większej liczby pomiarów i określenie wartości współczynnika  $\lambda$ , jako średniej ze wszystkich uzyskanych odczytów, pochodzących z odrębnych lokalizacji igły termicznej w obrębie próbki. Jak pokazano w pracy Łydzby i in. (2014), liczbę pomiarów można określać np. na podstawie Centralnego Twierdzenia Granicznego (Feller 1961).

### 5.2.3. Uwagi

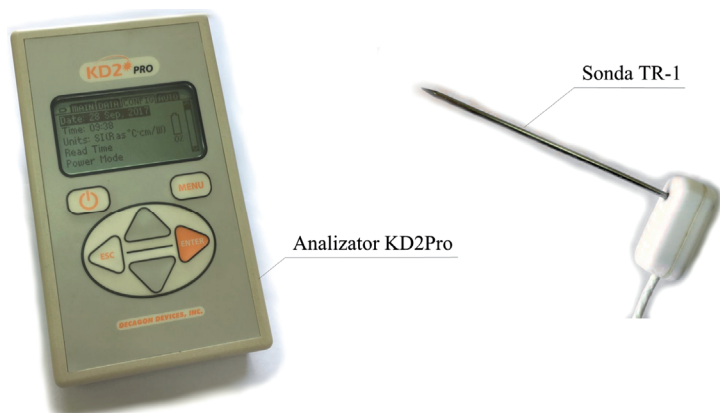
Jak wspomniano wcześniej, obecnie większość dostępnych na rynku urządzeń pomiarowych dokonuje pomiaru i interpretacji wyników zgodnie z najnowszymi wersjami normy ASTM, tj. D5334-08 (2008) oraz D5334-14 (2014). W rezultacie w trakcie analizy wyników uwzględnia się odczyty temperatury pochodzące zarówno z fazy grzania, jak i chłodzenia. Taki sposób interpretacji jest obecnie uznany za najbardziej odpowiedni. Należy jednak podkreślić, iż w zależności od stosowanego podejścia – np. uwzględnienie wyłącznie części wyników pochodzącej z fazy grzania lub jednoczesne uwzględnienie wyników z obu faz – może prowadzić do wyraźnych różnic w uzyskanych rezultatach. W pracy autora (Różański i Sobótka 2013) przebadano i dokonano interpretacji wyników badań przewodności cieplnej gruntów ilastych, stosując dwa różne podejścia, tj. zgodne z normą ASTM z 2000 roku (uwzględnia się tylko odczyty z fazy grzania, a wartość  $\lambda$  określa się z zależności (5.5)–(5.7)) oraz według zaleceń normy ASTM z 2008 roku (analizuje się odczyty z obu faz, a współczynnik przewodności cieplnej gruntu wyznacza się, stosując zależności (5.10) i (5.11)). Dla analizowanych dziesięciu próbek gruntów ilastych znajdujących się w stanie pełnego nasycenia wodą uzyskano względne różnice w oszacowaniu, sięgające od 3 do 27%.

## 5.3. Wyniki pomiarów laboratoryjnych

Procedurę określania współczynnika przewodności cieplnej, zgodnie z normą ASTM D5334-08 (rys. 5.4), zastosowano np. w mierniku KD2Pro (2011), za pomocą którego uzyskane zostały wszystkie wykorzystane w pracy, pochodzące z badań własnych autora, pomiary przewodności cieplnej. Analizator wraz z sondą TR–1 służącą do badania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego przedstawiono na rys. 5.7. Zakres badania współczynnika przewodności cieplnej dla sondy TR–1 wynosi od 0,1 do 4,0 [ $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$ ].

Jego dokładność to  $\pm 10\%$  w zakresie  $0,2\text{--}4,0$  [ $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$ ] oraz  $\pm 0,02$  [ $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$ ] dla pomiarów w przedziale  $0,1\text{--}0,2$  [ $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]. Pełen proces wyznaczania współczynnika przewodności cieplnej z wykorzystaniem rejestratora KD2Pro można przedstawić w następujących krokach:

- podłączyć przewód sondy igłowej TR-1 do rejestratora KD2Pro (rys. 5.7),
- sondę TR-1 wprowadzić (w całości) w grunt i odczekać około 15 minut, aby doprowadzić do stanu równowagi przez wyrównanie się temperatur próbki oraz sondy,
- przez przepływ prądu o stałym natężeniu, podgrzewać przez 150 sekund sondę igłową TR-1 (zmiana temperatury nie powinna być większą niż 10K w czasie 1000 s),
- przez cały czas trwania badania, tj. 300 s (150 s – faza grzania i kolejne 150 s – faza chłodzenia), rejestrować wartości temperatury w czasie (zwykle jest to 60 odczytów),
- wyłączyć urządzenie rejestrujące KD2Pro,
- sporządzić wykres temperatury w funkcji czasu na podstawie uzyskanych z badania pomiarów (np. rys. 5.4),
- odrzucając 1/3 początkowych odczytów i stosując wybraną technikę regresji nieliniowej, określić wartości parametrów modelu (równ. (5.10)):  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$ ; w ramach niniejszego opracowania autor stosował własny program stworzony w środowisku Wolfram Mathematica (Mathematica, 2009), bazujący na algorytmie Marquardta (Marquardt 1963),
- dokonać oszacowania wartości przewodności cieplnej ośrodka gruntowego,  $\lambda$ , według zależności (5.11).



Rys. 5.7. Analizator KD2Pro wraz z sondą TR-1 służącą do pomiarów przewodności cieplnej gruntów

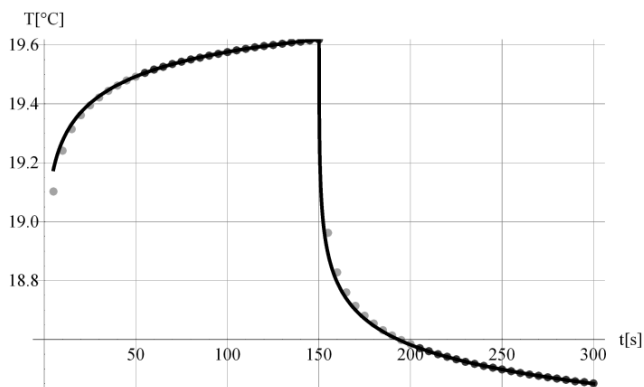
Jak wspomniano wcześniej, badania własne autora dotyczyły określania przewodności cieplnej dla gruntów drobnoziarnistych znajdujących się w stanie pełnego nasycenia. W tabeli 5.1 zestawiono podstawowe parametry rozważanych gruntów. Wyniki analizy, w zakresie określania przewodności cieplnej,  $\lambda^{\text{sat}}$ , przedstawiono w tab. 5.2

(numeracja gruntów jest tożsama z tą, którą użyto w tab. 5.1), gdzie dla każdego z gruntów zaprezentowano wartości parametrów modelu (5.10), moc źródła ciepła  $q$ , oraz określoną na podstawie zależności (5.11) wartość przewodności cieplnej  $\lambda^{\text{sat}}$ .

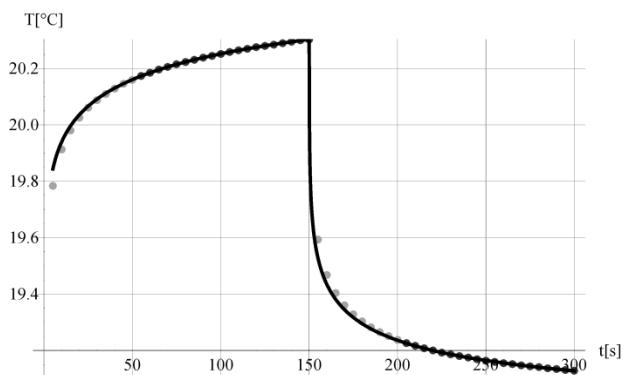
Tabela 5.2. Wyniki analizy dotyczącej określania przewodności cieplnej  $\lambda^{\text{sat}}$

Lp.	Nazwa gruntu	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$q$ [Wm <sup>-1</sup> ]	$\lambda^{\text{sat}}$ [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
1	ił pylasty	18,948	18,4478	-0,000324061	0,143453	3,420	1,897
2	ił	19,4977	18,9388	-0,000409135	0,128327	4,040	2,505
3	ił	19,9671	19,3269	-0,000184756	0,175558	3,980	1,804
4	ił	18,6437	18,165	-0,0000589729	0,184187	3,800	1,642
5	ił pylasty	19,6577	19,2486	0,0000141927	0,208821	3,920	1,494
6	ił	20,5166	19,7967	-0,000175938	0,172156	3,850	1,780
7	ił	19,7609	18,8434	-0,00010759	0,165864	4,050	1,943
8	ił	19,6193	19,0645	-0,000112451	0,139896	3,920	2,230
9	ił	19,4925	18,9655	-0,000115117	0,146845	3,880	2,103
10	ił	19,7453	19,0688	0,000028718	0,12767	3,730	2,325
11	ił	18,6512	18,0227	-0,000128653	0,155849	3,370	1,721
12	pył	19,4644	18,9934	-0,000124902	0,159357	3,960	1,977
13	ił	17,9696	17,5343	-0,000438902	0,0996554	3,270	2,611
14	ił	18,1827	17,7578	-0,000374298	0,125188	3,300	2,098
15	ił	18,6495	18,2098	-0,000318254	0,193283	3,460	1,425
16	ił	18,3097	17,8551	-0,000134054	0,117117	3,160	2,147
17	ił	18,2217	17,5967	-0,000229684	0,100989	3,240	2,553

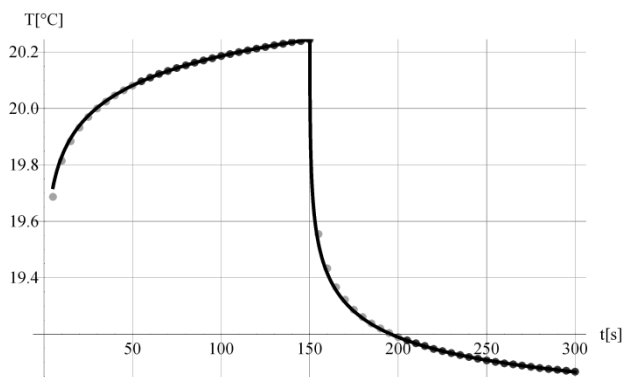
Dla czterech wybranych gruntów, na rys. 5.8–5.11, zaprezentowano zarejestrowane w trakcie badania wartości temperatury oraz ich aproksymację modelem teoretycznym (5.10). Wybrane grunty wyróżniono w tab. 5.2 kolorem szarym.



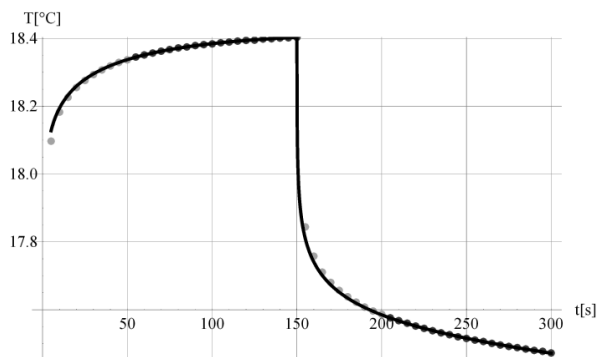
Rys. 5.8. Wartości temperatury zarejestrowane w trakcie badania oraz aproksymacja danych pomiarowych modelem (5.10): ił pylasty – grunt nr 1



Rys. 5.9. Wartości temperatury zarejestrowane w trakcie badania oraz aproksymacja danych pomiarowych modelem (5.10): ił – grunt nr 8



Rys. 5.10. Wartości temperatury zarejestrowane w trakcie badania oraz aproksymacja danych pomiarowych modelem (5.10): pył – grunt nr 12



Rys. 5.11. Wartości temperatury zarejestrowane w trakcie badania oraz aproksymacja danych pomiarowych modelem (5.10): ił – grunt nr 13

## 6. Przewodność cieplna szkieletu gruntowego

W niniejszym rozdziale w pierwszej kolejności dokonuje się krótkiego przeglądu dostępnych w literaturze metod szacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ . Następnie przeprowadza się analizę wrażliwości, obrazującą wpływ przyjętej wartości  $\lambda_s$  na oszacowanie przewodności cieplnej gruntu w pełnym zakresie stopnia wilgotności,  $S_r$ . Prezentowane rezultaty dotyczą określania charakterystyki  $\lambda$ - $S_r$  (oraz porównania wyników z pomiarami laboratoryjnymi) dla sześciu gruntów, trzech grubo- i trzech drobnoziarnistych. Na tej podstawie stwierdza się, że w literaturze tematu brak jest uniwersalnego podejścia umożliwiającego poprawne oszacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, przy czym przez pojęcie „uniwersalnego podejścia” rozumie się takie, które zapewnia prawidłową predykcję wartości  $\lambda_s$ , niezależnie od rodzaju gruntu, dla którego to oszacowanie jest dokonywane. W dalszej części rozdziału podejmuje się więc próbę stworzenia nowego, uniwersalnego modelu służącego do poprawnego szacowania wartości  $\lambda_s$ . Dokonuje się tego, stosując dwa metodologicznie różne podejścia, tj. obliczeniową oraz analityczną mikromechanikę.

Jak zostało to pokazane w rozdziale 3, poza wzorami empirycznymi Kerstena (1949) oraz Lu i in. (2014), wszystkie pozostałe modele traktują szkielet gruntowy jako ośrodek jednorodny, opisany „zastępczym” współczynnikiem przewodności cieplnej,  $\lambda_s$ . W konsekwencji informacja o przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, jako parametru „wsadowego” dla modeli teoretycznych lub empirycznych, może mieć kluczowe znaczenie dla poprawnej predykcji przewodności cieplnej gruntów, w pełnym zakresie wartości stopnia wilgotności,  $S_r$ .

Podstawową trudnością w określaniu wartości  $\lambda_s$  jest fakt, iż w odróżnieniu od standardowych parametrów charakteryzujących dany grunt, takich jak np. porowatość, gęstość itp., przewodności cieplnej szkieletu gruntowego nie można wyznaczyć w badaniach laboratoryjnych. Zwykle wartość  $\lambda_s$  szacuje się na podstawie istniejących wzorów wyrażających wartość przewodności cieplnej szkieletu w funkcji charakterystycznych cech gruntu, takich jak np. skład mineralogiczny, zawartość poszczególnych frakcji gruntowych, zawartość minerałów kwarcowych itp. Dalej przedstawiono dostępne w literaturze tematu metody szacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego.

Gemant (1952) zaproponował liniową zależność pomiędzy przewodnością cieplną szkieletu gruntowego a zawartością frakcji ilowej, zgodnie ze wzorem:

$$\lambda_s = -3,3\phi_{Cl} + 5,84 \quad (6.1)$$

gdzie  $\phi_{Cl}$  oznacza zawartość (udział) frakcji ilowej w całej objętości ziaren tworzących szkielet gruntowy. Farouki (1981) wskazał na fakt, iż zależność (6.1) może znacząco zaniżyć przewodność cieplną szkieletu dla gruntów o dużej zawartości minerałów kwarcowych, zwłaszcza dla piasków kwarcowych. Wynika to z faktu, iż równanie (6.1), jako oszacowanie zgrubne, nie uwzględnia zawartości minerałów kwarcowych, charakteryzujących się największą przewodnością cieplną spośród wszystkich minerałów tworzących szkielet gruntowy (por. tab. 2.2).

Dobre oszacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego można uzyskać na podstawie znajomości składu mineralogicznego gruntu. Wówczas jeśli znane są przewodności cieplne poszczególnych minerałów (typowe wartości przewodności cieplnej dla wybranych minerałów zestawiono w tab. 2.2) oraz ich udziały frakcyjne, wartość  $\lambda_s$  określa się, stosując równanie tzw. średniej geometrycznej:

$$\lambda_s = \prod_j \lambda_{m_j}^{\phi_j} \quad (6.2)$$

gdzie  $\lambda_m$  oznacza przewodność cieplną danego minerału, natomiast  $\phi$  jest jego udziałem frakcyjnym. Oczywiście jest, że równanie (6.2) obowiązuje dla warunku, że  $\sum \phi_j = 1$ .

Woodside i Messmer (1961), Sass i in. (1971) oraz Côté i Konrad (2005a) z powodzeniem określali przewodność cieplną szkieletu dla różnych typów skał z wykorzystaniem zależności (6.2). W przypadku ośrodków gruntowych bardzo dobre predykcje przewodności cieplnej uzyskano dla gruntów rozważanych w pracach Côté i Konrada (2005b) oraz Tarnawskiego i in. (2015).

Niewątpliwą wadą takiego podejścia jest to, iż w celu określenia wartości  $\lambda_s$ , konieczne jest wyznaczenie pełnej informacji o składzie mineralogicznym rozważanego gruntu. Przeprowadzając klasyczne rozpoznanie gruntu, zazwyczaj nie wykonuje się badania mającego na celu określenia składu mineralogicznego. Skutkuje to tym, iż w zastosowaniach inżynierskich w zasadzie nie ma możliwości wykorzystania zależności (6.2). W przypadku gdy rozpoznanie składu mineralogicznego określone jest jedynie w zakresie informacji o zawartości kwarcu, wówczas można skorzystać z uproszczonej względem zależności (6.2) propozycji wprowadzonej przez Johansena (1975) – przewodność cieplną szkieletu gruntowego określa się na podstawie relacji:

$$\lambda_s = \lambda_q^{\phi_q} \lambda_o^{1-\phi_q} \quad (6.3)$$

gdzie  $\phi_q$  jest udziałem frakcyjnym kwarcu, natomiast  $\lambda_q$  oraz  $\lambda_o$  oznaczają przewodność cieplną, odpowiednio, kwarcu oraz pozostałych minerałów zawartych w szkielecie gruntowym. Zgodnie z propozycją Johansena (1975), tę pierwszą wielkość należy przyjmować jako równą 7,70 [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>], natomiast wartość przewodności cieplnej



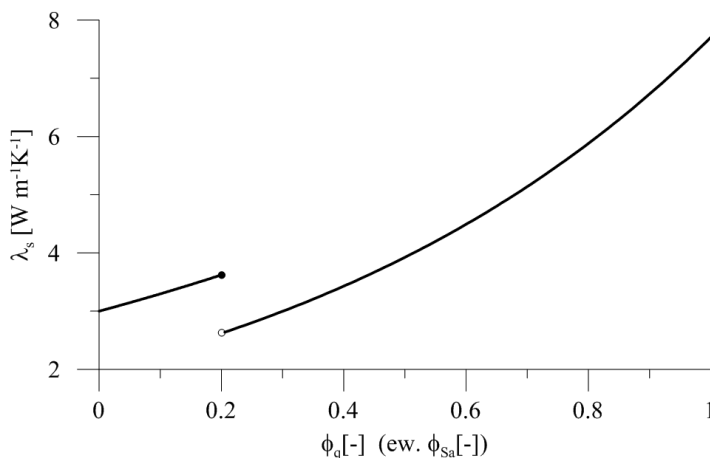
pozostałych (oprócz kwarcu) minerałów tworzących szkielet gruntowy określa się na podstawie zawartości kwarcu, tj.:

$$\lambda_o = \begin{cases} 2,0 \text{ [W m}^{-1}\text{K}^{-1}], & \phi_q > 0,2 \\ 3,0 \text{ [W m}^{-1}\text{K}^{-1}], & \phi_q \leq 0,2 \end{cases} \quad (6.4)$$

Bardzo często, gdy zawartość kwarcu nie jest znana, zakłada się, że jego udział frakcyjny jest tożsamy z zawartością frakcji piaskowej (np. Peters-Lidard i in. 1998; Lu i in. 2007; Tian i in. 2016). Wówczas zależność (6.3), uwzględniając warunek (6.4), można przedstawić jako:

$$\lambda_s = \begin{cases} \lambda_q^{\phi_{sa}} 2,0^{1-\phi_{sa}}, & \phi_{sa} > 0,2 \\ \lambda_q^{\phi_{sa}} 3,0^{1-\phi_{sa}}, & \phi_{sa} \leq 0,2 \end{cases} \quad (6.5)$$

Za największą wadę równania (6.3) (lub (6.5)) należy uznać nieciągły charakter przebiegu funkcji  $\lambda_s - \phi_q$  (lub  $\lambda_s - \phi_{sa}$ ). W punkcie  $\phi_q = 0,2$  (lub  $\phi_{sa} = 0,2$ ) równanie to wykazuje skok wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Na możliwe zaniżanie wartości  $\lambda_s$  w obszarze pośrednich (ale większych od 0,2) wartości  $\phi_q$  (lub  $\phi_{sa}$ ) wskazywano już we wcześniejszej pracy autora (Różański i Stefaniuk 2016b). Na rysunku 6.1 zobrazowano charakterystykę zależności (6.3) (ew. (6.5), jeśli przyjmie się wspomniane założenie o równoważności zawartości kwarcu i frakcji piaskowej).



Rys. 6.1. Przewodność cieplna szkieletu gruntowego w funkcji zawartości kwarcu (ew. frakcji piaskowej) według równania (6.3) (ew. (6.5))

W pracy autora (Różański i Stefaniuk 2016a) zaproponowano, na podstawie analizy odwrotnej, wzór korelacyjny określający przewodność cieplną szkieletu gruntowe-

go w funkcji wewnętrznej informacji mikrostrukturalnej, mianowicie powierzchni właściwej. Zależność ta wyrażona jest w postaci funkcji potęgowej:

$$\lambda_s = a_1 a_2^{S_i} + a_3 \quad (6.6)$$

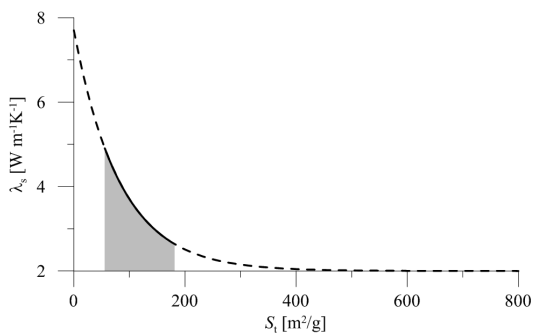
gdzie  $S_i$  [ $\text{m}^2 \text{g}^{-1}$ ] oznacza powierzchnię właściwą, natomiast  $a_1$ ,  $a_2$  oraz  $a_3$  są parametrami modelu. Bazując na wynikach samodzielnie zrealizowanych pomiarów przewodności cieplnej dla trzydziestu czterech próbek gruntów ilastych, znajdujących się w stanie pełnej saturacji, określono następujące wartości parametrów modelu:  $a_1 = 5,7$ ,  $a_2 = 0,988$ ,  $a_3 = 2,0$ . Wartości powierzchni właściwej, określonej za pomocą metody sorpcji błękitu metylenowego (PN-88/B-04481; Myślińska 2006; Koszela-Marek 2014) zaczerpnięto z raportów Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki<sup>9</sup> Politechniki Wrocławskiej (Łydźba i in. 2013a, 2013b oraz 2014).

Interpretacja fizyczna wzoru (6.6) jest zbliżona do tej, którą postulował Gemant (1952) podczas ustalania swojej zależności (6.1) do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Powszechnie znany jest fakt, iż spośród wszystkich frakcji gruntowych, to ziarna frakcji iłowej cechują się najmniejszą (w porównaniu do frakcji piaskowej i pyłowej) przewodnością cieplną (zob. nierówność (2.7)). Im więcej zatem frakcji iłowej w gruncie, tym przewodność cieplna szkieletu gruntowego powinna maleć. Z drugiej strony, mimo że minerały ilaste mają relatywnie małe wymiary, ich kształt jest zazwyczaj spłaszczony i dlatego ich „wkład” do całkowitej wartości powierzchni właściwej gruntu jest największy (Hillel 1998; Mitchell i Soga 2005). Wobec tego im większa powierzchnia właściwa gruntu, tym więcej w gruncie minerałów ilastych, a więc tym mniejsza przewodność cieplna szkieletu gruntowego. Przebieg funkcji (6.6) zaprezentowano na rys. 6.2. Ponadto kolorem szarym zaznaczono przedział wartości powierzchni właściwej, jakimi charakteryzowały się badane grunty, tj. 55,8–171,7 [ $\text{m}^2 \text{g}^{-1}$ ].

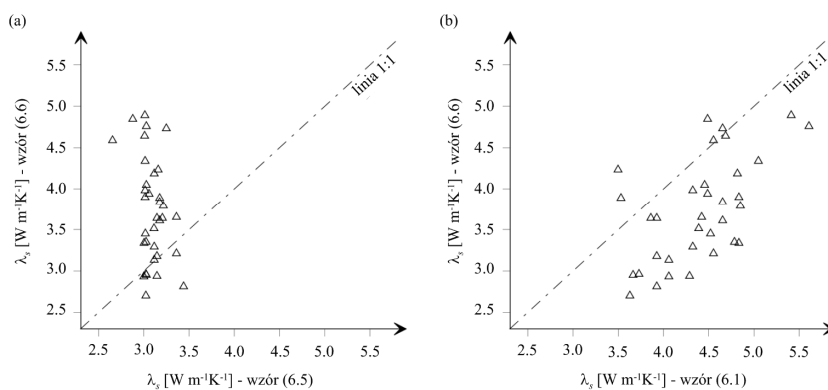
Na rysunku 6.3a oraz 6.3b przedstawiono porównanie wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego uzyskanych na podstawie zależności (6.6) względem, odpowiednio, propozycji Johansena oraz modelu Gemanta, dla wszystkich gruntów ilastych rozważanych w pracy (Różański i Stefaniuk 2016a). Wyraźnie widać, iż wartości uzyskane z wykorzystaniem równania (6.6), generalnie, są zdecydowanie wyższe od predykcji wynikającej z metody Johansena (6.5) i nieco niższe w porównaniu do podejścia Gemanta (6.1). Konsekwencją powyższego jest oczywiście możliwy rozrzut wyników w zakresie oszacowania makroskopowej przewodności cieplnej gruntu, w zależności od tego, jakie podejście zastosuje się do określenia wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Porównanie predykcji przewodności cieplnej gruntów w stanie pełnej saturacji,  $\lambda^{\text{sat}}$ , względem wartości pomierzonych dla trzech opisanych technik określania  $\lambda_s$ , zaprezentowano na rys. 6.4.

---

<sup>9</sup> 1 stycznia 2015 roku Instytut Geotechniki i Hydrotechniki został przekształcony w Katedrę Geotechniki, Hydrotechniki, Budownictwa Podziemnego i Wodnego.



Rys. 6.2. Przewodność cieplna szkieletu gruntowego w funkcji powierzchni właściwej (wzór (6.6))

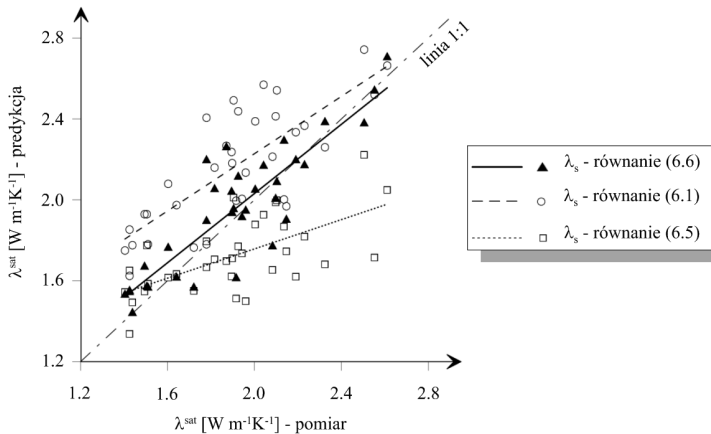


Rys. 6.3. Porównanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego określonej na podstawie zależności (6.6) oraz: (a) propozycji Johansena; (b) metody Gemanta (Różański i Stefaniuk 2016a)

Jak stwierdzono w pracy autora (Różański i Stefaniuk 2016a), dla rozważanych gruntów ilastych, najlepsze oszacowanie przewodności cieplnej w stanie pełnej saturacji uzyskano, stosując zależność (6.6). W pracy tej jako miary oceny jakości dopasowania przyjęto średni błąd kwadratowy wartości średniej, błąd odchylenia od średniej oraz nachylenie linii trendu<sup>10</sup> (więcej informacji o rachunku błędów można znaleźć, np. w pracy Hänsela i Krajewskiego (1968)). Należy tu jednak podkreślić, że wzór empiryczny (6.6) został określony jedynie na podstawie badań przewodności cieplnej gruntów ilastych. Wobec tego, dla innych rodzajów gruntów (charakteryzujących się szerszym przedziałem warto-

<sup>10</sup> Autor świadomie nie przytacza tutaj konkretnych wartości dotyczących jakości dopasowania. Liczba analiz zawartych w pracy (Różański i Stefaniuk 2016a) jest na tyle duża, że ich bezpośrednie „przeniesienie” do treści monografii wydaje się bezcelowe. Najważniejszą informacją wynikającą z analiz zawartych w pracy (Różański i Stefaniuk 2016a) jest ta, iż wzór (6.6) prowadzi do najlepszego oszacowania przewodności cieplnej gruntów ilastych w stanie pełnej saturacji.

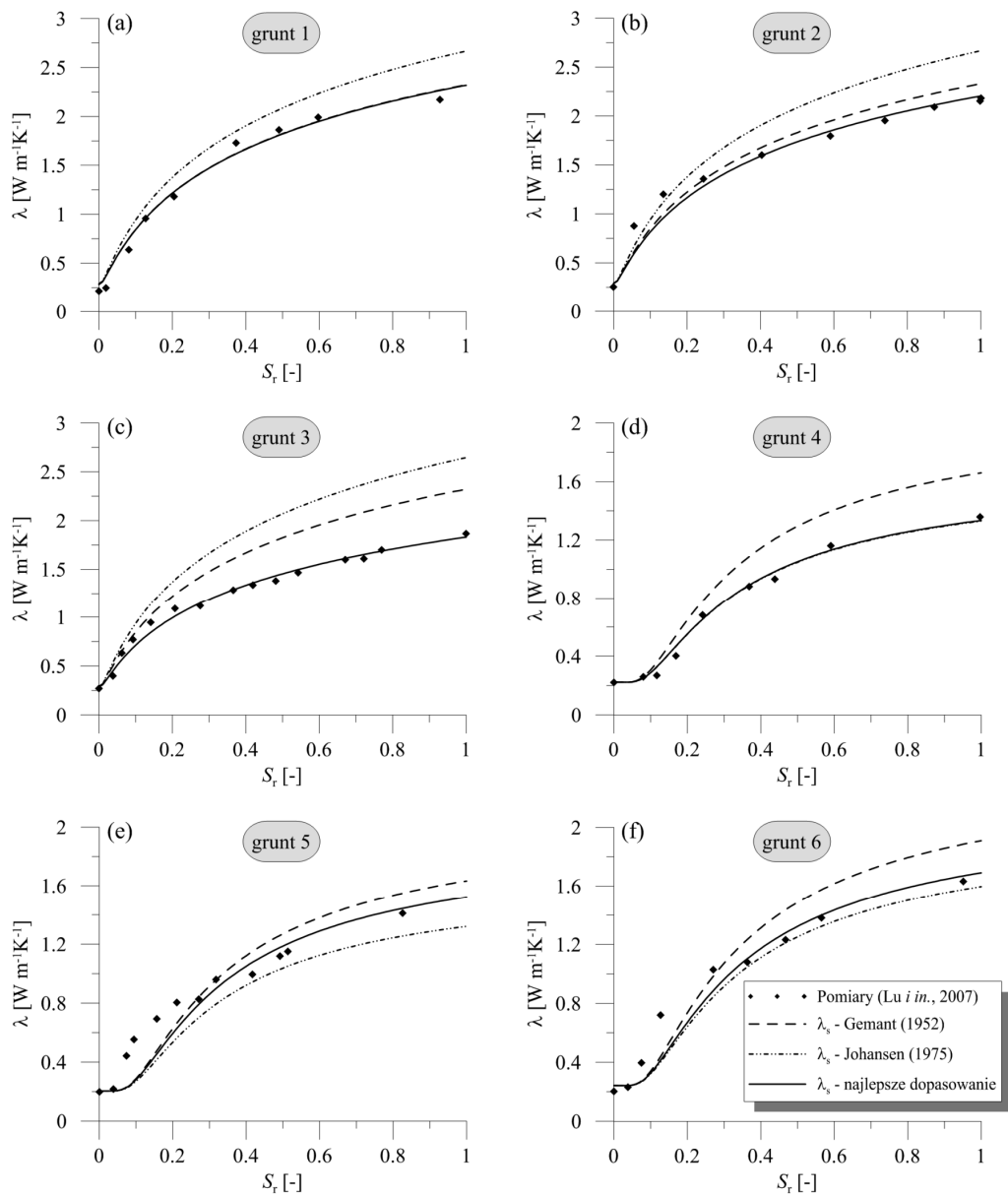
ści powierzchni właściwej oraz inną charakterystyką w zakresie podziału na frakcje grun-  
towe) zależność (6.6) ma raczej wątpliwe zastosowanie.



Rys. 6.4. Predykcja przewodności cieplnej nasyconych gruntów ilastych  
względem wartości pomierzonych (Róžański i Stefaniuk 2016a)

## 6.1. Analiza wrażliwości charakterystyki $\lambda$ - $S_r$ na założoną wartość $\lambda_s$

Jak wspomniano wcześniej, ze względu na fakt, iż przewodność cieplna szkieletu gruntowego jest parametrem „wsadowym” większości istniejących w literaturze, i omawianych w podrozdziale 3.1 modeli, jej odpowiednie oszacowanie może być kluczowe do uzyskania poprawnych predykcji przewodności cieplnej gruntu jako ośrodka wielofazowego. W celu zobrazowania wpływu przyjętej wartości  $\lambda_s$  na oszacowanie przewodności cieplnej gruntu, w pełnym zakresie stopnia wilgotności, dokonuje się predykcji  $\lambda$ - $S_r$  zgodnie z modelem Lu i in. (2007), dla sześciu gruntów (po trzy grubo- i drobnoziarniste). Ponownie wyniki pomiarów przewodności cieplnej zaczerpnięto z pracy Lu i in. (2007). Dla każdego z sześciu rozważanych gruntów wykonano oddzielne obliczenia, przyjmując dwie różne wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, tj. zgodnie z metodą Gemanta (6.1) oraz według zmodyfikowanej propozycji Johansena (6.5) – dla analizowanych gruntów brak jest informacji o zawartości kwarcu, stąd przyjęto, że  $\phi_q = \phi_{\text{sa}}$ . Ze względu na brak informacji o powierzchni właściwej gruntów, w analizie pominięto równanie empiryczne (6.6). Wyniki zestawiono graficznie na rys. 6.5. Dodatkowo na podstawie analizy odwrotnej określono również wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego zapewniającą najlepsze dopasowanie modelu do wyników badań laboratoryjnych (wartość „optymalna”). Predykcję z uwzględnieniem „optymalnej” wartości  $\lambda_s$  oznaczono na poniższych wykresach linią ciągłą.



Rys. 6.5. Wyniki pomiarów dla gruntów w różnych stanach nasycenia (dane z pracy Lu i in. 2007) oraz predykcja przewodności cieplnej według modelu Lu i in. (2007) dla trzech różnych wartości  $\lambda_s$ : (a), (b) oraz (c) grunt gruboziarnisty – piasek; (d) grunt drobnoziarnisty – il; (e) oraz (f) grunt drobnoziarnisty – glina pylasta

Wartości przewodności cieplnych szkieletu gruntowego uzyskane dla każdego z sześciu rozważanych gruntów zestawiono w tab. 6.1.

Jednocześnie w celu ilościowego porównania otrzymanych rezultatów, w zależności od metody przyjętej do określania wartości  $\lambda_s$ , w tab. 6.1 zestawiono dla każdego przypadku wartość błędu średniokwadratowego,  $MSE(\lambda_s)$ , określoną według następującej zależności:

$$MSE(\lambda_s) = \frac{\sum_{i=1}^{N_g} (\lambda_i^{\text{pred}}(\lambda_s) - \lambda_i^{\text{pom}})^2}{N_g} \quad (6.7)$$

gdzie  $\lambda^{\text{pred}}(\lambda_s)$  oznacza predykcję przewodności cieplnej gruntu dla danego stanu nasycenia, w zależności od przyjętej wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ , natomiast  $\lambda^{\text{pom}}$  jest pomierzoną wartością przewodności cieplnej gruntu. Wartości błędu średniokwadratowego podano w nawiasach okrągłych.

W dalszym ciągu przyjrzymy się bardziej szczegółowo uzyskanym rezultatom. Obserwując wyniki (przede wszystkim charakterystyki  $\lambda-S_r$  prezentowane na rys. 6.5), wyraźnie widać, że wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego istotnie wpływa na predykcję przewodności cieplnej gruntów, zwłaszcza dla wyższych wartości stopnia wilgotności. Wynika to z faktu, iż przewodność cieplna w stanie pełnej saturacji,  $\lambda^{\text{sat}}$  określana jest jako średnia geometryczna z przewodności cieplnych szkieletu gruntowego i wody (równanie (3.23)). Wartość przewodności cieplnej gruntu w stanie suchym,  $\lambda^{\text{dry}}$ , jak wspomniano już wcześniej, zależy głównie od wielkości przestrzeni porowej – można zauważyć, że dla rozważanych gruntów równanie (3.27) poprawnie szacuje wartość  $\lambda^{\text{dry}}$ .

Tabela 6.1. Oszacowane wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego dla rozważanych gruntów<sup>11</sup> oraz wartości błędu średniokwadratowego (6.7) – w nawiasach

Oznaczenie	Nazwa gruntu	Przewodność cieplna szkieletu gruntowego $\lambda_s$ [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ] oraz wartości błędu średniokwadratowego, $MSE$ [ $(\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1})^2$ ]		
		Gemant (1952)	Johansen (1975)	Najlepsze dopasowanie
Grunt 1	Piasek	5,81 (0,0070)	6,91 (0,0291)	5,79 (0,0069)
Grunt 2	Piasek	5,68 (0,0237)	7,10 (0,1278)	5,18 (0,0155)
Grunt 3	Piasek	5,64 (0,1018)	7,00 (0,2764)	3,81 (0,0025)
Grunt 4	Il	4,85 (0,0333)	3,08 (0,0016)	3,10 (0,0015)
Grunt 5	Gлина pylasta	5,48 (0,0226)	3,43 (0,0297)	4,69 (0,0194)
Grunt 6	Gлина pylasta	5,54 (0,0294)	3,92 (0,0177)	4,38 (0,0149)

<sup>11</sup> W tabeli 6.1 podano (przetłumaczone z j. angielskiego) nazwy gruntów zgodne z oryginalnym nazewnictwem stosowanym w pracy Lu i in. (2007).

Ponadto niezwykle trudno jest ocenić, które z analizowanych tutaj podejść do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego jest tym „najbardziej odpowiednim” – zdaniem autora, sformułowanie wniosków natury ogólnej jest zadaniem niełatwym. Rozpatrując jednak uzyskane wyniki, w odniesieniu do konkretnego rodzaju gruntu, można stwierdzić, że:

1. W przypadku gruntów gruboziarnistych (grunty 1–3) metoda Johansena znacząco zawyża przewodność cieplną szkieletu gruntowego, w konsekwencji przeszacowując niemal w całym zakresie  $S_r$  wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. Prawdopodobnie jest to konsekwencją uproszczenia pierwotnej formuły wprowadzonej przez Johansena i zastąpienia zawartości kwarcu udziałem frakcji piaskowej. Jest to jednak założenie przyjmowane niemal zawsze w przypadku, gdy brak jest rozpoznania składu mineralogicznego gruntu (choćby w zakresie zawartości kwarcu).

2. Wzór Gemanta (1952) również zawyża (choć w znacznie mniejszym stopniu w odniesieniu do metody Johansena) przewodność cieplną szkieletu gruntowego dla wszystkich gruntów gruboziarnistych. Dla gruntu 1 oraz 2 predykcja jest porównywalna z tą uzyskaną dla wartości  $\lambda_s$  wynikającej z najlepszego dopasowania modelu do wyników pomiarów.

3. W przypadku gruntów drobnoziarnistych wzór Gemanta, podobnie jak dla piasków, przeszacowuje wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. W ogólności zawyżanie wartości  $\lambda_s$  dla gruntów 4–6 jest bardziej wyraźne niż w przypadku gruntów gruboziarnistych (grunty 1–3). Wykorzystanie uproszczonej metody Johansena prowadzi do niższych, względem uzyskanych z najlepszego dopasowania do wyników badań, wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego; w szczególności, dla gruntów 4 oraz 6 predykcja wyników jest bardzo dobra.

4. Uproszczona metoda Johansena (6.5) wydaje się bardziej odpowiednia dla gruntów drobnoziarnistych, podczas gdy wzór Gemanta (6.1) dostarcza lepszych predykcji dla gruntów gruboziarnistych<sup>12</sup>.

Podsumowując, żadne z wykorzystywanych w praktyce podejść do określenia przewodności cieplnej szkieletu gruntowego nie może zostać określone mianem uniwersalnego, a więc takiego, które dobrze szacuje wartość  $\lambda_s$ , niezależnie od rodzaju gruntu. Wynika to z faktu, iż po pierwsze, każda z metod wykorzystuje do szacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego zupełnie odrębną informację o ośrodku gruntowym, a po drugie, informacja o gruncie wykorzystywana w każdym z podejść wydaje się po prostu niewystarczająca do tego, aby zapewnić dobrą predykcję wartości  $\lambda_s$ , niezależnie od rodzaju gruntu.

---

<sup>12</sup> Należy podkreślić, że w przypadku gruntów zawierających dużą ilość kwarcu (lub wręcz piasków kwarcowych), podejście Gemanta z pewnością nie będzie dobrze estymować wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego – zostało to zauważone, np. w pracy (Farouki 1981).

## 6.2. Lokalna zmienność przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego

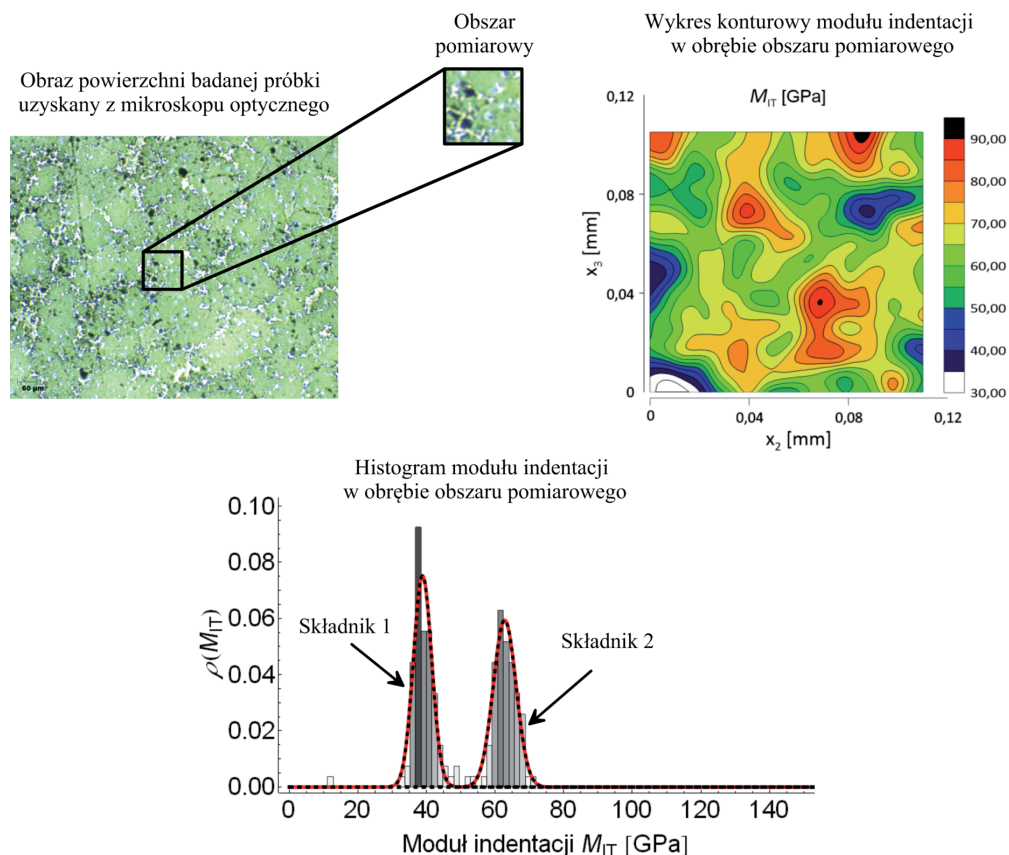
Dalsze rozważania rozpoczniemy od przypomnienia tego, że w zależności od skali obserwacji, praktycznie każdy materiał może charakteryzować się mniej lub bardziej wyraźną niejednorodnością jego struktury wewnętrznej. W konsekwencji może to powodować, na poszczególnych poziomach obserwacji, pewne fluktuacje parametrów mechanicznych stowarzyszonych bezpośrednio z morfologią mikrostruktury, a więc przestrzennym ułożeniem poszczególnych składników ośrodka.

Określenia zmienności parametrów mechanicznych w różnych skalach obserwacji dokonywać można technikami laboratoryjnymi, umożliwiającymi wykonywanie pomiarów w skali mikro lub nano. Klasycznym przykładem takiego badania jest technika nanoindentacji. Mówiąc bardzo ogólnie, standardowy test nanoindentacji polega na wciskaniu sztywnego wglębnika o znanej geometrii oraz znanych parametrach mechanicznych w badany materiał. Wykonanie sekwencji testów nanoindentacji, dla różnych pozycji wglębnika (zwykle testy wykonuje się na uprzednio zdefiniowanej siatce pomiarowej dostarcza informacji o tzw. mechanicznej morfologii (ang. *mechanical morphology*) mikrostruktury rozumianej tu jako przestrzenny rozkład parametrów mechanicznych, takich jak np. nanotwardość czy moduł indentacji (lub bezpośrednio wynikający z niego moduł sprężystości), w rozważanym ośrodku (Constantinides i in. 2003; Oliver i Pharr 2004).

Na rysunku 6.6 zaprezentowano przykładowe wyniki testów nanoindentacji przeprowadzonych przez autora dla materiału mikrostrukturalnego. Analizowano materiał skalny w postaci łupka. W szczególności na rysunku tym przedstawiono: obraz powierzchni badanej próbki skalnej uzyskany za pomocą mikroskopu optycznego, wyodrębniony obszar pomiarowy, w którym dokonywano testów nanoindentacji na uprzednio zdefiniowanej siatce pomiarowej, wykres konturowy modułu indentacji  $M_{IT}$  [GPa] oraz histogram wszystkich uzyskanych wartości modułu indentacji.

Obserwując wyniki przedstawione na rys. 6.6 można zauważyć, że w skali mikro badany materiał gruntowo-skalny charakteryzuje się istotnymi fluktuacjami modułu indentacji. Zwróćmy również uwagę na fakt, iż histogram wartości  $M_{IT}$  wykazuje charakter bimodalny, co jednoznacznie sugeruje, że w badanej mikrostrukturze można wyodrębnić dwa oddzielne składniki (wydzielenia poszczególnych składników z mikrostruktury dokonuje się technikami segmentacji – por. np. Bobko i Ulm (2008)). Ponadto zauważmy, że nawet w obrębie poszczególnych składników, tj. 1 lub 2, istnieje wyraźny rozrzut wartości modułu indentacji. Podobne rezultaty dla innych materiałów takich, jak np. kompozyty z matrycą cementową czy beton można znaleźć np. w pracach (Constantinides i in. 2003; Sorelli i in. 2008). Zobrazowaną tutaj fluktuację wartości parametrów mechanicznych w skali mikro w dalszej części pracy określać się będzie mianem „lokalnej zmienności” lub równoważnie „lokalnej fluktuacji”.





Rys. 6.6. Wyniki testów nanoindentacji dla materiału skalnego

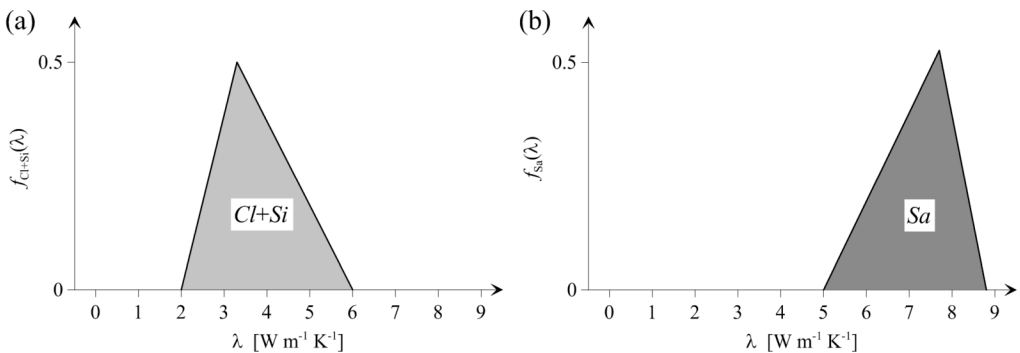
Prezentowane wcześniej rozważania dotyczą oczywiście przypadku lokalnej zmienności parametrów mechanicznych wyznaczonych w teście nanoindentacji. Jednakże, ze względu na omawianą w rozdziale 2 złożoną strukturę mineralogiczną ośrodka gruntowego, uzasadnione wydaje się założenie, iż w skali mikro szkielet gruntowy jest ośrodkiem silnie niejednorodnym, którego przewodność cieplna również wykazuje lokalne fluktuacje, tj. zmienia się „od punktu do punktu”. Takie założenie jest oczywiście konsekwencją tego, iż, jak wspomniano wcześniej, szkielet gruntowy utworzony jest z różnych minerałów, które charakteryzują się zróżnicowanymi wartościami przewodności cieplnej (tab. 2.2), a ponadto nawet w obrębie poszczególnych minerałów istnieje pewna fluktuacja wartości przewodności cieplnej (w tab. 2.2 zestawiono bowiem typowe/uśrednione wartości przewodności cieplnej).

W konsekwencji naturalne wydaje się traktowanie przewodności cieplnej na tym poziomie obserwacji (skala mikro), jako zmiennej losowej opisaną pewną funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Zakłada się przy tym (podobnie, jak to proponuje się np. w pracy

Tiana i in. (2016)), że informacja o przewodnościach cieplnych poszczególnych minerałów może być wprost stowarzyszona z przewodnościami cieplnymi poszczególnych frakcji gruntowych – wiadomo np., że w sensie wartości średnich minerały tworzące frakcję piaskową cechują się najwyższą wartością przewodności cieplnej (por. nierówność (2.7)).

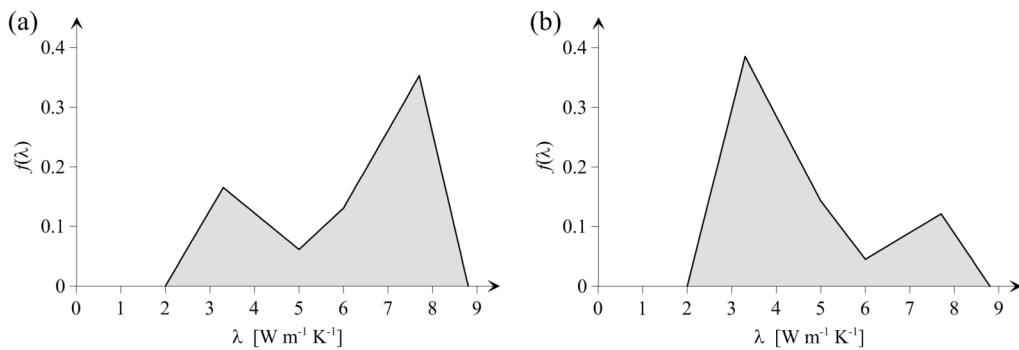
Ze względu na dostępne w literaturze dane dotyczące wartości przewodności cieplnej poszczególnych minerałów oraz frakcji gruntowych (podrozdz. 2.2) sensowne wydaje się przyjęcie gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, która jest „rozpięta” na pewnym ograniczonym przedziale, tak aby dla każdej frakcji gruntowej możliwe było uwzględnienie minimalnej i maksymalnej wartości współczynnika przewodności cieplnej. Analogicznie do prac autora (Różański i Stefaniuk 2016b; Łydzba i in. 2017), przyjmuje się więc, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\lambda$ , w zakresie poszczególnych frakcji gruntowych, można opisać ciągłym rozkładem trójkątnym. Ze względu na fakt, iż frakcja pyłowa i ilowa charakteryzują się zbliżonymi wartościami średnimi przewodności cieplnej (np. Tian i in. 2016) dla obu frakcji, proponuje się przyjęcie jednego, wspólnego trójkątnego rozkładu prawdopodobieństwa.

W szczególności rozkład współczynnika przewodności cieplnej frakcji piaskowej opisuje funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f_{Sa}(\lambda)$  taka, że największa i najmniejsza przewidywana wartość zmiennej losowej wynosi, odpowiednio, 5,0 oraz 8,8 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ] natomiast najbardziej prawdopodobna wartość zmiennej losowej to 7,7 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]. Analogicznie dla frakcji pyłowej i ilowej przyjęto, że rozkład współczynnika przewodności cieplnej charakteryzuje funkcja gęstości prawdopodobieństwa,  $f_{Cl+Si}(\lambda)$ , która „rozpięta” jest na przedziale 2,0–6,0 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], przy czym najbardziej prawdopodobna wartość zmiennej losowej wynosi 3,3 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa, przyjęte dla poszczególnych frakcji gruntowych, przedstawiono graficznie na rys. 6.7.

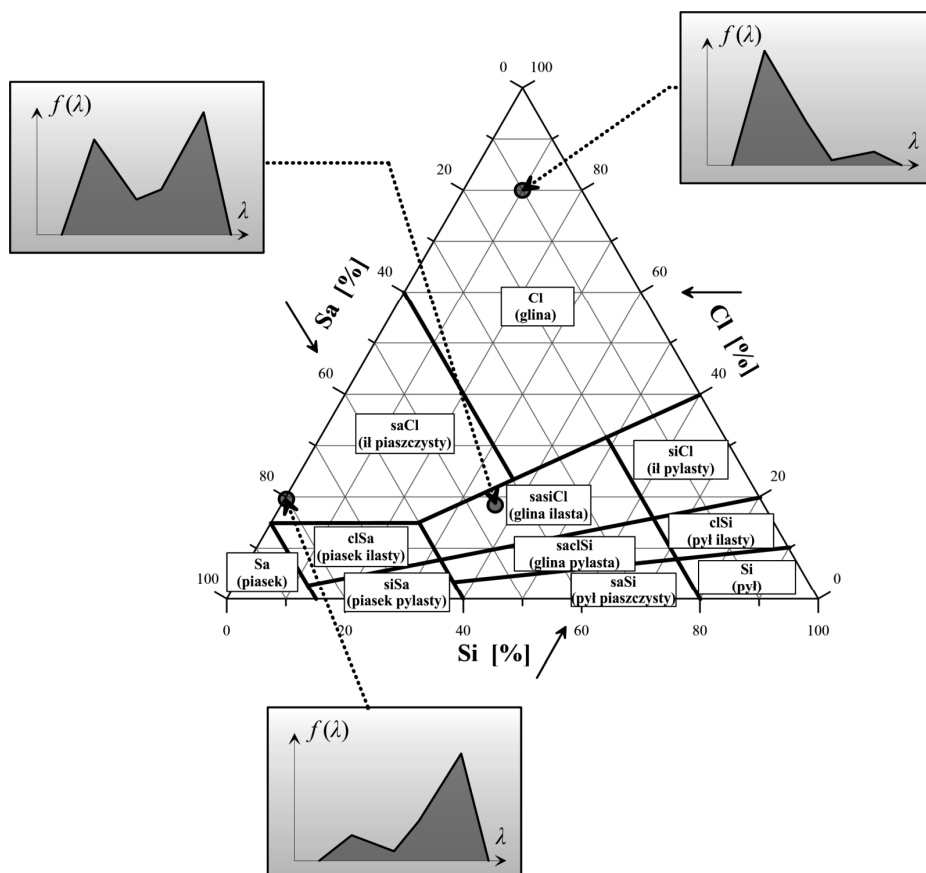


Rys. 6.7. Przyjęte w rozważaniach funkcje gęstości prawdopodobieństwa opisujące lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej w zakresie frakcji: (a) ilowej i pyłowej; (b) piaskowej

Wykorzystując informację o udziałach objętościowych poszczególnych frakcji, tj.  $\phi_{Sa}$  oraz  $\phi_{Cl+Si} = 1 - \phi_{Sa}$ , w prosty sposób można przedstawić funkcję gęstości prawdopodobieństwa lokalnego współczynnika przewodności cieplnej dla całego gruntu, jako:



Rys. 6.8. Przykładowe gęstości rozkładu prawdopodobieństwa,  $f(\lambda)$ , dla dwóch zawartości frakcji piaskowej: (a)  $\phi_{sa} = 67\%$ ; (b)  $\phi_{sa} = 23\%$



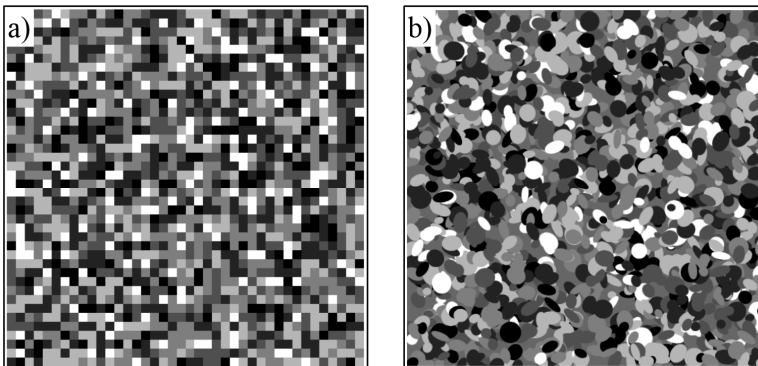
Rys. 6.9. Schematyczna prezentacja koncepcji stowarzyszenia tekstury gruntu z gęstością prawdopodobieństwa lokalnego współczynnika przewodności cieplnej szkieletu gruntowego  $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = \phi_{Sa} f_{Sa}(\lambda) + (1 - \phi_{Sa}) f_{Cl+Si}(\lambda) \quad (6.8)$$

Przykładowe funkcje  $f(\lambda)$ , dla dwóch różnych udziałów frakcyjnych  $\phi_{Sa}$ , zaprezentowano na rys. 6.8.

Takie podejście ułatwia stowarzyszyć teksturę ośrodka gruntowego, reprezentowaną np. przez trójkąt ISO „krajowy” do rozpoznawania rodzaju gruntu (zob. rys. 5.1), z gęstością prawdopodobieństwa lokalnego współczynnika przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Schematycznie zostało to przedstawione na rys. 6.9. Tekstura ośrodka, tzn. jej reprezentacja w postaci gęstości prawdopodobieństwa lokalnej przewodności cieplnej, uzupełniona o informację o morfologii mikrostruktury umożliwia natomiast, wykorzystując metody mikromechaniki, skuteczną ocenę makroskopowej przewodności cieplnej dowolnego ośrodka gruntowego. Oznacza to więc, że z każdym rodzajem gruntu stowarzyszona jest zarówno gęstość prawdopodobieństwa  $f(\lambda)$ , jak również morfologia mikrostruktury.

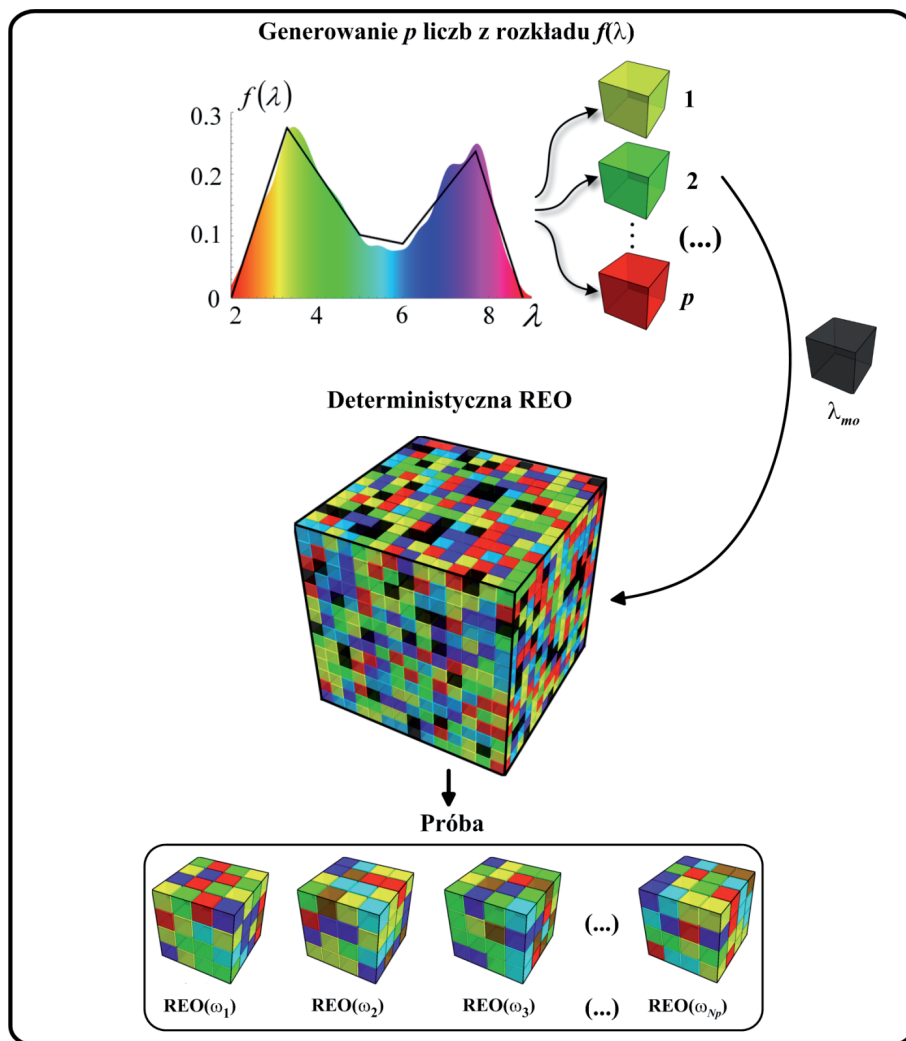
W dalszej części rozdziału dokonuje się aplikacji postulowanej tutaj lokalnej fluktuacji współczynnika przewodności cieplnej do prezentowanych w rozdziale 4 technik homogenizacji w celu stworzenia uniwersalnego modelu umożliwiającego efektywne szacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego niezależnie od rodzaju gruntu. W rozważaniach, jak wspomniano, wykorzystuje się dwa metodologicznie różne podejścia, tj. obliczeniową i analityczną mikromechanikę, przy czym z każdym z tych podejść, co naturalne, stowarzyszona jest odmienna morfologia mikrostruktury ośrodka gruntowego. W przypadku obliczeniowej mikromechaniki stosować się będzie dyskretną reprezentację mikrostruktury w postaci obrazu cyfrowego – przykład takiej mikrostruktury zaprezentowano na rys. 6.10a. Analiza w ujęciu analitycznej mikromechaniki zakładać będzie natomiast polikrystaliczną (ziarnową) strukturę ośrodka gruntowego – rys. 6.10b. Szczegółowo zostało to omówione w kolejnych podrozdziałach.



Rys. 6.10. Morfologia mikrostruktury stosowana w podejściu bazującym na:  
(a) obliczeniowej mikromechanice; (b) analitycznej mikromechanice

### 6.3. Morfologia wokselowa: obliczeniowa mikromechanika

Określenie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego z uwzględnieniem postulowanej wcześniej lokalnej zmienności przewodności cieplnej wymaga przyjęcia odpowiedniej domeny obliczeniowej (obszaru zagadnienia). Przyjmuje się, że DREO jest



Rys. 6.11. Graficzna prezentacja procesu obliczeniowego stosowanego do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego

trójwymiarowym obrazem cyfrowym, w którym przewodność cieplna każdego z wokseli generowana jest w sposób niezależny, jako liczba losowa z rozkładu zdefiniowanego funkcją (6.8)<sup>13</sup>. Stosuje się więc trójwymiarową reprezentację „płaskiej” mikrostruktury zaprezentowanej schematycznie na rys. 6.10a. W analizie uwzględnia się również obecność w szkielecie gruntowym części organicznej. W konsekwencji domena obszaru uzupełniona jest również o woksela odpowiadające przewodności cieplnej materii organicznej,  $\lambda_{mo}$ , przy czym jej wartość jest deterministyczna (zadana zgodnie z tab. 2.1). Procedurę tworzenia geometrii DREO przedstawiano graficznie na rys. 6.11. W rezultacie opisanego procesu generacji mikrostruktury oczywiste jest, że przewodność cieplna dowolnego, losowo wybranego, woksela jest niezależna od wszystkich pozostałych wokseli. Wobec tego procedura ta tworzy, w pewnym sensie, pole losowe współczynnika przewodności cieplnej z długością korelacji zbiegającą do zera (np. Vanmarcke 1977).

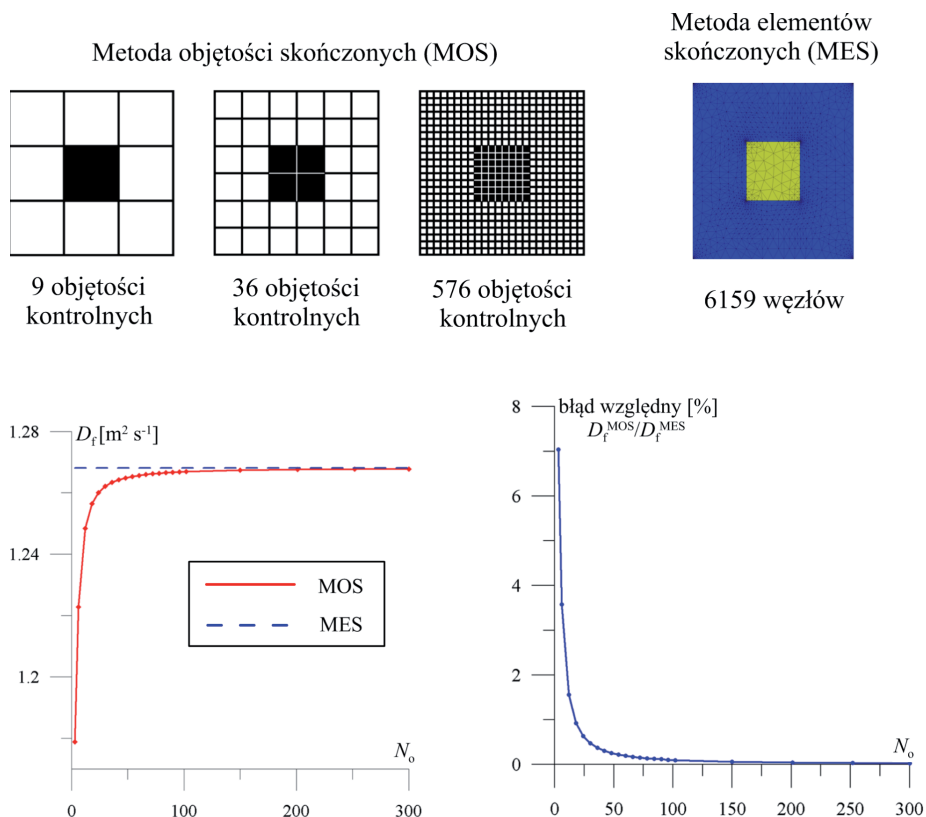
W dalszej części, w celu określenia wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, zastosowano procedurę numeryczną opisaną w podrozdziale 4.4. W procesie obliczeniowym, pojedynczą realizację  $REO(\omega_j)$  tworzone przez losowe wybranie pewnej „podobjętości” z obszaru DREO. Minimalną wielkość  $REO(\omega_j)$  określono z warunku zbieżności parametru makroskopowego (por. rys. 4.5). Na tej podstawie przyjęto, że każda pojedyncza realizacja  $REO(\omega_j)$  jest sześciennym obrazem cyfrowym składającym się z 1000 wokseli ( $N_{REO} = 10$ ). Dla każdej realizacji  $\omega_j$  rozwiązywano, niezależnie, zagadnienie brzegowe (4.38) w celu określenia tzw. „pozornego” parametru makroskopowego opisującego przewodność cieplną szkieletu gruntowego stowarzyszoną z analizowaną realizacją  $REO(\omega_j)$  – zbiór  $N_p$  niezależnych realizacji  $REO(\omega_j)$  tworzy próbę (rys. 6.11). Ostatecznie, makroskopową wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s^{hom}$ , określono, stosując estymator (4.31), przy czym liczebność próby oszacowano zgodnie z warunkiem (4.40), zakładając, że zarówno  $\kappa$ , jak i  $\varepsilon_\lambda$  wynoszą 1%.

Warto odnotować fakt, iż zagadnienie brzegowe (4.38) rozwiązywano, wykorzystując autorskie oprogramowanie stworzone w języku programowania C++. Program ten bazuje na metodzie objętości skończonych (MOS)<sup>14</sup> i jest rozwinięciem aplikacji, która została opracowana w ramach pracy doktorskiej autora (Różański 2010). Oryginalnie program służył określeniu makroskopowych parametrów transportu (współczynnik dyfuzji lub przewodności cieplnej) dla dwuwymiarowych binarnych obrazów cyfrowych (np. takich, jak przedstawiona na rys. 4.9 mikrostruktura piaskowca Fontainebleau). W ramach dalszych prac aplikacja została przystosowana do określania makroskopowej przewodności cieplnej dla zagadnień trójwymiarowych uwzględnia-

<sup>13</sup> Do generowania liczb losowych z danego rozkładu, dla którego dystrybuanta dana jest w sposób analityczny, wykorzystano metodę odwracania dystrybuanty (np. Janke 2002).

<sup>14</sup> Metoda objętości skończonych została szeroko omówiona np. w pracy (Eymard i in. 2018).

jących lokalne fluktuacje współczynnika przewodności cieplnej. Rozwiązywanie powstałego układu równań liniowych wykonywane jest iteracyjną metodą sprzężonych gradientów (np. Kincaid i Cheney 2005), przy czym w celu skrócenia czasu obliczeń oraz racjonalnego zarządzania pamięcią, w macierzy współczynników uwzględnia się jedynie te współczynniki, których wartości są niezerowe. Aby zapoznać się ze szczegółami stosowanej procedury numerycznej, autor odsyła czytelnika do swojej rozprawy doktorskiej (Różański 2010), w której przedstawiono pełne sformułowanie rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.38) dla trójwymiarowych struktur wokselowych.



Rys. 6.12. Porównanie wyników uzyskanych autorskim kodem bazującym na MOS oraz komercyjnym oprogramowaniem wykorzystującym MES (Różański 2010)

Wykorzystywane tutaj autorskie oprogramowanie zostało zweryfikowane na wielu przykładach obliczeniowych, w których rozwiązywano zagadnienie brzegowe (4.38) dla różnego rodzaju cyfrowych reprezentacji mikrostruktur o „nieuporządkowanej” lub deterministycznej geometrii. Za każdym razem wyniki symulacji weryfikowano względem

znanych rozwiązań analitycznych lub wyników uzyskanych z komercyjnych oprogramowań bazujących na metodzie elementów skończonych (MES). Na rysunku 6.12 przedstawiono porównanie wyników uzyskanych z wykorzystaniem własnej aplikacji bazującej na MOS z rezultatami uzyskanymi komercyjnym oprogramowaniem wykorzystującym metodę elementów skończonych (FlexPDE, 2005). Prezentowane wyniki dotyczą zagadnienia dyfuzji molekularnej (które oczywiście w sensie matematycznym opisane jest identycznym równaniem różniczkowym z zagadnieniem przepływu ciepła) dla deterministycznej mikrostruktury, dla której kontrast pomiędzy współczynnikami dyfuzji wynosił 100.

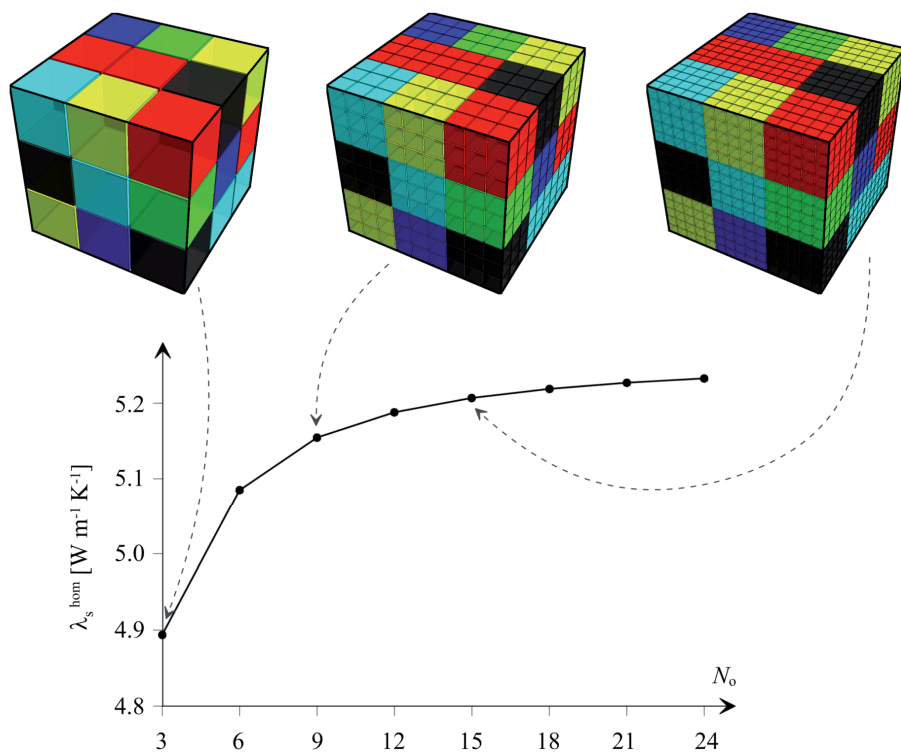
Analizy prowadzono z uwzględnieniem wpływu dyskretyzacji obszaru zadania (w sensie podziału na objętości kontrolne) na uzyskiwaną wartość makroskopowego współczynnika dyfuzji  $D_f$ . W MES wartość makroskopowego współczynnika dyfuzji określono dla standardowego podziału na elementy wykonanego przez oprogramowanie FlexPDE (6159 węzłów). Porównanie wyników przedstawiono na dwóch wykresach na rys. 6.12. Wykres z lewej strony przedstawia wartość makroskopowego współczynnika dyfuzji w funkcji liczby objętości kontrolnych,  $N_o$ , w jednym wierszu/kolumnie. Niebieską linią przerywaną zaznaczono rozwiązanie uzyskane za pomocą komercyjnego oprogramowania w ujęciu MES. Na wykresie z prawej strony zaprezentowano wartość błędu względnego pomiędzy oszacowaniem wynikającym z MOS i MES, ponownie w funkcji liczby objętości kontrolnych,  $N_o$ . Jak łatwo zauważyć, im większa liczba objętości kontrolnych wykorzystana do dyskretyzacji obrazu cyfrowego mikrostruktury, tym lepsza zgodność pomiędzy wynikami uzyskanymi z obu metod numerycznych. W tym konkretnym prezentowanym tu przykładzie obliczeniowym wykazano, że dla dyskretyzacji pojedynczego piksela 36 objętościami kontrolnymi ( $N_o = 18$ ) błąd względny pomiędzy wynikami z obu podejść jest poniżej 1%.

Prezentowane wyniki potwierdzają, że w celu uzyskania poprawnej wartości parametru makroskopowego istotny jest dobór liczby objętości kontrolnych, które dyskretyzują pojedynczy piksel (lub woksel w 3D) cyfrowej reprezentacji mikrostruktury. W pracy (Różański 2010) autor rozpatrywał zdecydowanie więcej przykładów numerycznych, na podstawie których wykazał, że liczba objętości kontrolnych konieczna do uzyskania poprawnego oszacowania właściwości makroskopowej w największym stopniu zależy od morfologii mikrostruktury oraz od kontrastu pomiędzy parametrami poszczególnych składników tworzących ośrodek. Powoduje to, że każdy rozważany przypadek wymaga wykonania wstępnych analiz zbieżności i na ich podstawie dobrania odpowiedniej dyskretyzacji obrazu cyfrowego.

Analogicznie postępuje się także w rozważanym w niniejszym rozdziale zagadnieniu określania makroskopowej przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Powróćmy więc ponownie do procesu obliczeniowego prezentowanego na rys. 6.11. Dla proponowanej domeny obliczeniowej wykonano wstępne obliczenia numeryczne do analizy zachowania się makroskopowej przewodności cieplnej szkieletu gruntowego  $\lambda_s^{\text{hom}}$ ,



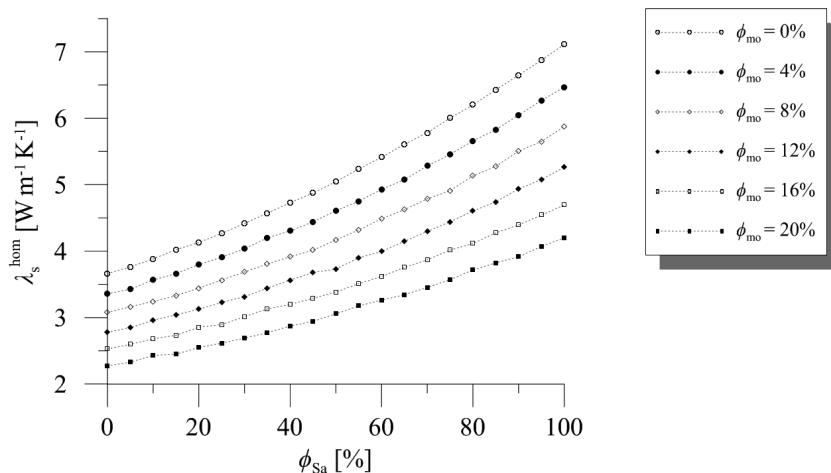
względem dyskretyzacji pojedynczego woksela objętościami kontrolnymi. Rozważono sekwencję losowych realizacji REO, przy czym przyjęto, że pojedyncza realizacja składa się z 27 wokseli ( $3 \times 3 \times 3$ ). Przykład takiej realizacji przedstawiono na rys. 6.13. Na tym samym rysunku przedstawiono również zależność makroskopowej przewodności cieplnej,  $\lambda_s^{\text{hom}}$ , w funkcji liczby objętości kontrolnych,  $N_o$ . Ponownie można zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby objętości kontrolnych dyskretyzujących cyfrową reprezentację REO wartość parametru makroskopowego stabilizuje się, przy czym stabilizacja wyniku jest relatywnie szybka. Relatywnie szybka zbieżność jest konsekwencją niewielkiego kontrastu pomiędzy składnikami mikrostruktury oraz niewielkiego udziału frakcyjnego wokseli materii organicznej, które z jednej strony cechują się względnie dużym kontrastem względem pozostałych wokseli, ale ich udział frakcyjny w domenie zadania jest jednak stosunkowo mały. Wykonano również dodatkowe analizy, w których sprawdzano zbieżność wartości  $\lambda_s^{\text{hom}}$  względem zwiększania się liczby wokseli w pojedynczej realizacji REO. Uzyskane wyniki wskazują, że im większy wymiar REO, tym zbieżność parametru makroskopowego w funkcji



Rys. 6.13. Rozpatrywana w analizie losowa realizacja REO oraz jej dyskretyzacja za pomocą objętości kontrolnych. Zbieżność makroskopowej przewodności cieplnej w zależności od liczby objętości kontrolnych  $N_o$

liczby objętości kontrolnych jest jeszcze bardziej wyraźna. Ostatecznie wstępne symulacje numeryczne wykazały, że dla określonego wcześniej wymiaru REO, tj.  $N_{\text{REO}} = 10$  (domena składa się więc z 1000 wokseli) satysfakcjonującą zbieżność wyników uzyskuje się już w przypadku, gdy pojedynczy woksel dyskretyzowany jest przez 8 objętości kontrolnych. W rezultacie wszystkie prezentowane dalej wyniki obliczeń wykonywano po założeniu, że domena obliczeniowa losowej realizacji REO składa się z 8000 objętości kontrolnych.

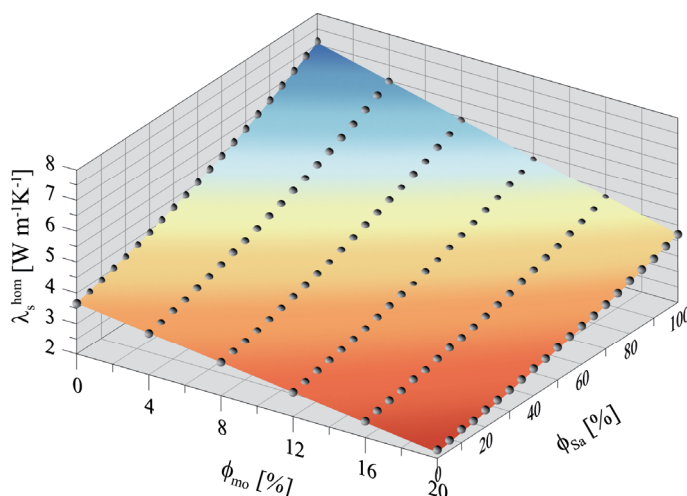
Jak wspomniano we wstępie do tego rozdziału, głównym celem prowadzonych analiz jest stworzenie uniwersalnego modelu do poprawnego szacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Aby to zrealizować, wykonano sekwencję obliczeń numerycznych (zgodnie z opisaną wcześniej procedurą obliczeniową) dla różnych zawartości frakcji piaskowej,  $\phi_{\text{Sa}}$  (0–100%, co 5%), oraz różnych zawartości części organicznych  $\phi_{\text{mo}}$  (0–20%, co 4%). Uzyskane w symulacjach numerycznych wartości  $\lambda_s^{\text{hom}}$  w funkcji zawartości frakcji piaskowej, dla różnych udziałów frakcyjnych materii organicznej, przedstawiono na rys. 6.14. Można zauważyć, że niezależnie od zawartości materii organicznej, wraz z powiększaniem się procentowej zawartości frakcji piaskowej, przewodność cieplna szkieletu gruntowego wzrasta. Ponadto dla ustalonej procentowej zawartości  $\phi_{\text{Sa}}$  obserwuje się również istotny wpływ udziału frakcyjnego materii organicznej na wartość  $\lambda_s^{\text{hom}}$  – im więcej materii organicznej w szkielecie gruntowym, tym niższa jego przewodność cieplna.



Rys. 6.14. Uzyskane w symulacjach numerycznych wartości  $\lambda_s^{\text{hom}}$  w funkcji zawartości frakcji piaskowej dla różnych udziałów frakcyjnych materii organicznej

Porównując otrzymane w symulacjach numerycznych wyniki (rys. 6.14) z zakresami wartości sugerowanymi np. w pracach Faroukiego (1981) lub Côté i Konrada (2005b), tj. 2–7,7 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], można stwierdzić, że uzyskano bardzo „rozsądne”

wartości przewodności cieplnych szkieletu gruntowego. W szczególności maksymalną wartość  $\lambda_s^{\text{hom}} = 7,11 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$  otrzymano dla przypadku braku materii organicznej i maksymalnej zawartości frakcji piaskowej ( $\phi_{\text{Sa}} = 100\%$ ). Wraz z obniżaniem zawartości frakcji piaskowej i wraz ze zwiększaniem udziału materii organicznej wartość przewodności cieplnej szkieletu maleje i osiąga wartość minimalną,  $\lambda_s^{\text{hom}} = 2,27 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$ , dla  $\phi_{\text{Sa}} = 0\%$  oraz  $\phi_{\text{mo}} = 20\%$ .



Rys. 6.15. Przewodność cieplna szkieletu gruntowego (zależność (6.9)) w funkcji zawartości frakcji piaskowej oraz materii organicznej

W dalszej kolejności podejmuje się próbę opisaną wszystkich uzyskanych z obliczeń numerycznych wyników prostą zależnością analityczną, umożliwiającą efektywne szacowanie wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego jedynie na podstawie informacji o zawartościach frakcji piaskowej i części organicznych. Sekwencję uzyskanych wyników, tj. wartości  $\lambda_s^{\text{hom}}$  w funkcji  $\phi_{\text{Sa}}$  i  $\phi_{\text{mo}}$ <sup>15</sup>, proponuje się aproksymować 4-parametrową, nieliniową funkcją daną następującą zależnością:

$$\lambda_s^{\text{hom}} = \frac{a + b\phi_{\text{mo}}}{1 + c\phi_{\text{Sa}} + d\phi_{\text{Sa}}^2} \quad (6.9)$$

gdzie wartości parametrów  $a = 3,67$ ,  $b = -0,074$ ,  $c = -0,006$  oraz  $d = 1,2 \times 10^{-5}$  określono stosując metodę regresji nieliniowej z zastosowaniem kompromisu Marquardt (Marquardt 1963). Na rysunku 6.15 przedstawiono zależność przewodności cieplnej

<sup>15</sup> Zawartość frakcji piaskowej oraz materii organicznej ( $\phi_{\text{Sa}}$ ,  $\phi_{\text{mo}}$ ) należy w tym przypadku przyjmować jako wyrażone w procentach.

szkieletu gruntowego w funkcji zawartości frakcji piaskowej oraz materii organicznej, zgodnie z równaniem (6.9). Ponadto czarnymi kropkami oznaczono wyniki symulacji numerycznych – zwróćmy uwagę, że są to te same rezultaty, które przedstawiono wcześniej na rys. 6.14.

Zauważmy, że zastosowanie zależności (6.9) umożliwia względnie łatwe i szybkie oszacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, do określenia bowiem wartości  $\lambda_s$  konieczna jest jedynie informacja o zawartości frakcji piaskowej oraz materii organicznej. Należy podkreślić, że określając wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, zgodnie z zależnością (6.9), dla udziałów frakcyjnych  $\phi_{sa}$  oraz  $\phi_{mo}$  należy używać wartości wyrażone w procentach.

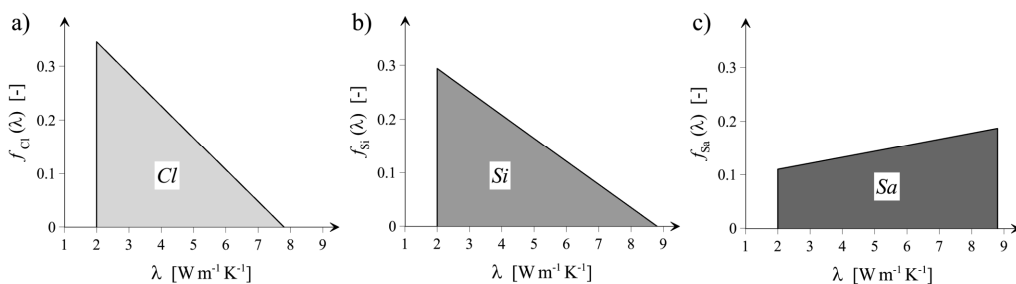
Jak sygnalizowano już wcześniej, podstawowym problemem w analizie dotyczącej określania wartości  $\lambda_s$  jest brak wyników badań laboratoryjnych w odniesieniu do przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Przewodność cieplna szkieletu gruntowego jest bowiem parametrem, którego w zasadzie nie można wyznaczyć w badaniach laboratoryjnych. W rezultacie nie ma możliwości bezpośredniego zweryfikowania poprawności uzyskanych w tym rozdziale wyników. Weryfikację poprawności oszacowania  $\lambda_s$  proponuje się więc dokonać w sposób pośredni, tj. przez porównanie predykcji makroskopowej przewodności cieplnej gruntu z wynikami badań laboratoryjnych odpowiadających zadanej wartości stopnia wilgotności. Zauważmy ponownie, że dla poprawnego odwzorowania charakterystyki  $\lambda$ - $S_r$  kluczowe jest odpowiednie oszacowanie wartości przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia,  $\lambda^{sat}$  (por. rys. 6.5). Wobec tego, oceny zaproponowanego tutaj podejścia dokonuje się przez porównanie predykcji  $\lambda^{sat}$  (określonych na podstawie analizy dwuskalowej z uwzględnieniem wyników uzyskanych w niniejszym podrozdziale) z wynikami badań laboratoryjnych dla gruntów w stanie pełnego nasycenia. Jest to szczegółowo omawiane w kolejnym rozdziale, który wprost dotyczy określania przewodności cieplnej gruntów nasyconych.

Jak zostanie to pokazane w rozdziale 7, zastosowanie zaproponowanego w tym podrozdziale podejścia do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego prowadzi do bardzo dobrych predykcji makroskopowej przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego,  $\lambda^{sat}$ . Jednakże, zdaniem autora, pomimo uzyskania satysfakcjonujących wyników założenia poczynione w podrozdziale 6.2, dotyczące lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego, wymagają dalszych analiz. Po pierwsze, ze względu na fakt, iż uziarnienie gruntu zazwyczaj opisywane jest na podstawie zawartości trzech głównych frakcji gruntowych, to konieczne wydaje się przyjęcie trzech oddzielnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa opisujących zmienność współczynnika przewodności cieplnej w obrębie frakcji iłowej, pyłowej i piaskowej. Po drugie, funkcje gęstości prawdopodobieństwa,  $f_{cl+si}$  oraz  $f_{sa}$ , zostały przyjęte *a priori*, w zasadzie jedynie na podstawie stowarzyszenia przewodności cieplnych minerałów z poszczególnymi frakcjami gruntowymi. Nie ma jednak pewności, że tak przyjęte rozkłady (rys. 6.7) są optymalnymi, w tym sensie, że istnieje duże prawdopodobieństwo, że można znaleźć inne rozkłady, które w kon-

sekwencji zapewnią lepszą predykcję makroskopowej przewodności cieplnej nasyconego gruntu.

W rozdziale 7 formułuje się więc zagadnienie odwrotne, które na podstawie wyników laboratoryjnych dotyczących przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia prowadzi do zidentyfikowania optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla trzech głównych frakcji gruntowych. Szczegóły dotyczące rozwiązania tego zagadnienia odwrotnego prezentuje się więc w kolejnym rozdziale. Jednakże w tym miejscu, aby możliwe było zakończenie dociekań dotyczących określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego w ramach obliczeniowej mikromechaniki korzysta się ze zidentyfikowanych w rozdziale 7 optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa – zestawiono je na rys. 6.16. Zauważmy, że funkcje te dość istotnie różnią się od założonych *a priori* funkcji gęstości prawdopodobieństwa zaprezentowanych na rys. 6.7. Ponadto funkcje te prowadzą do możliwie najlepszej predykcji wyników pomiarów laboratoryjnych.

Uzyskanie satysfakcjonujących wyników w zakresie predykcji wartości  $\lambda^{\text{sat}}$  skłoniło autora do stworzenia, w ramach niniejszej pracy, dwóch typów diagramów umożliwiających efektywne i szybkie oszacowanie wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ . Szczegóły przeprowadzonych analiz prezentuje się w kolejnym punkcie. Wyniki te, zdaniem autora, są niezwykle istotne dla praktyki inżynierskiej.



Rys. 6.16. Ciągłe funkcje gęstości prawdopodobieństwa uzyskane na podstawie analizy odwrotnej omawianej w rozdziale 7: (a) frakcja ilowa; (b) frakcja pyłowa; (c) frakcja piaszkowa

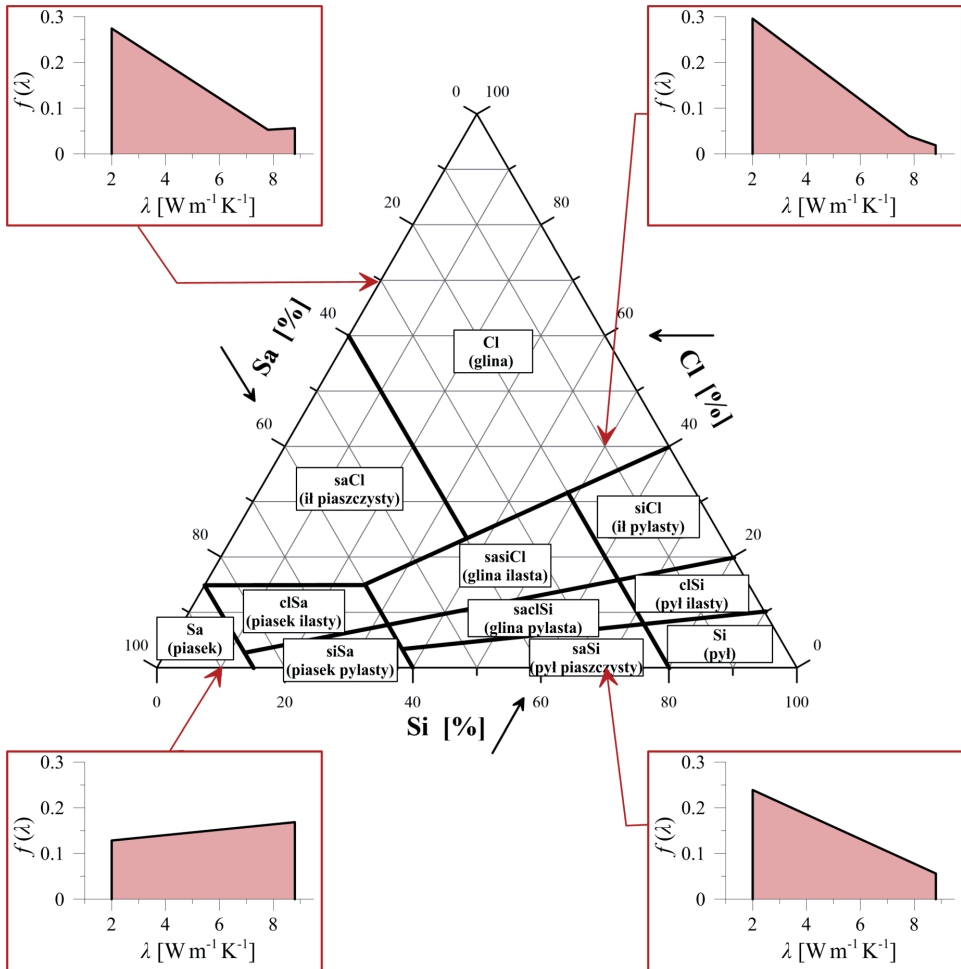
Pierwszy z proponowanych diagramów ułatwia określić dokładną wartość  $\lambda_s$  na podstawie informacji o procentowej zawartości poszczególnych frakcji gruntowych, tj. ilowej (Cl), pyłowej (Si) i piaszkowej (Sa). Drugi rodzaj diagramu umożliwia oszacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego jedynie na podstawie znajomości nazwy gruntu. Diagram ten, jako wykres trójkątny, jest konsystentny z trójkątem ISO „krajowym” zaproponowanym wg załącznika krajowego do normy PN-EN ISO 14688-2 (rys. 6.17).

Aby możliwe było stworzenie diagramów, konieczne było przeprowadzenie sekwencji kilkuset symulacji numerycznych zgodnie z procedurą zaproponowaną w roz-

dziale 6.3 (rys. 6.11). Przyjęto przy tym, że lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej opisuje funkcja gęstości prawdopodobieństwa,  $f(\lambda)$ , dana następującą zależnością:

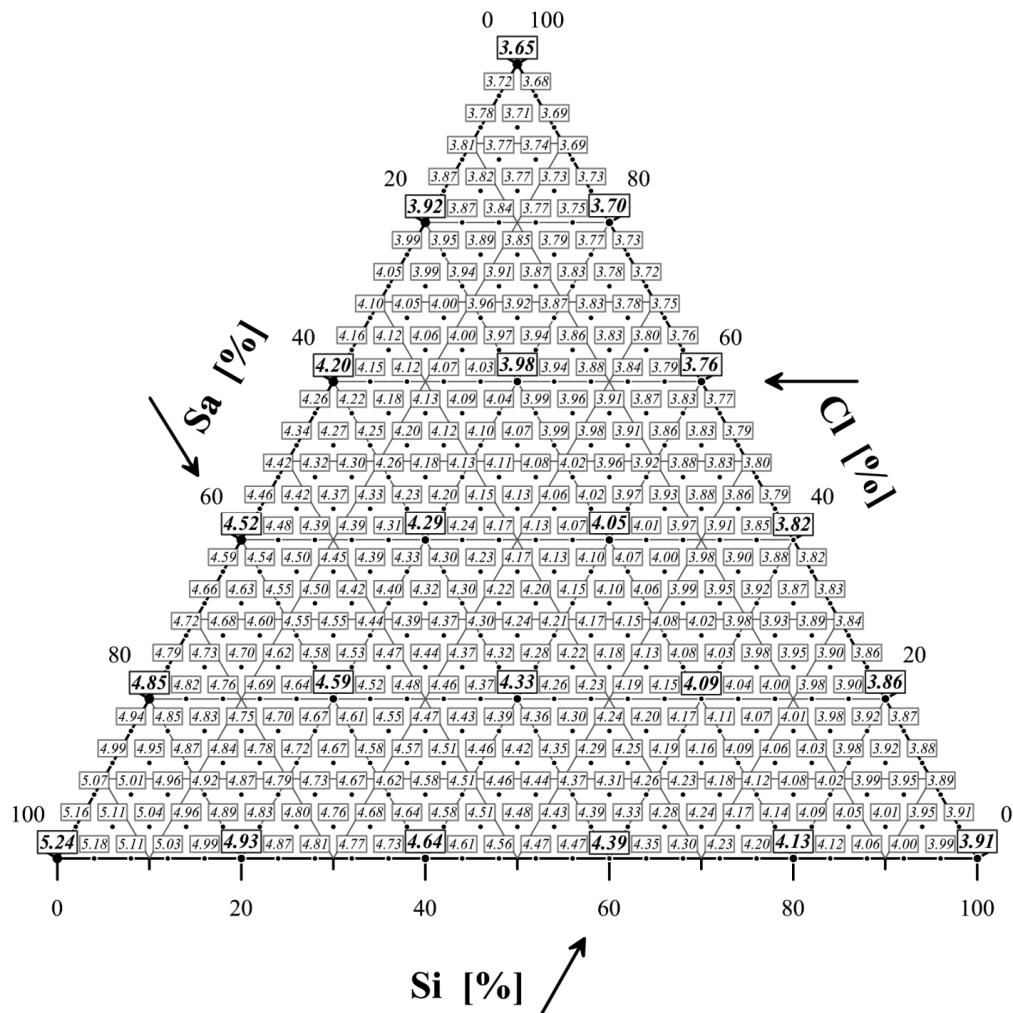
$$f(\lambda) = \phi_{Sa} f_{Sa}(\lambda) + \phi_{Si} f_{Si}(\lambda) + \phi_{Cl} f_{Cl}(\lambda) \quad (6.10)$$

przy czym jako „składowe” funkcje gęstości prawdopodobieństwa  $f_{Sa}$ ,  $f_{Si}$  oraz  $f_{Cl}$  zastosowano oczywiście te, które zidentyfikowano jako optymalne, tj. zgodnie z rys. 6.16. Przykładowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa,  $f(\lambda)$ , w zależności od uziarnienia (tekstury) gruntu, zaprezentowano na rys. 6.17.



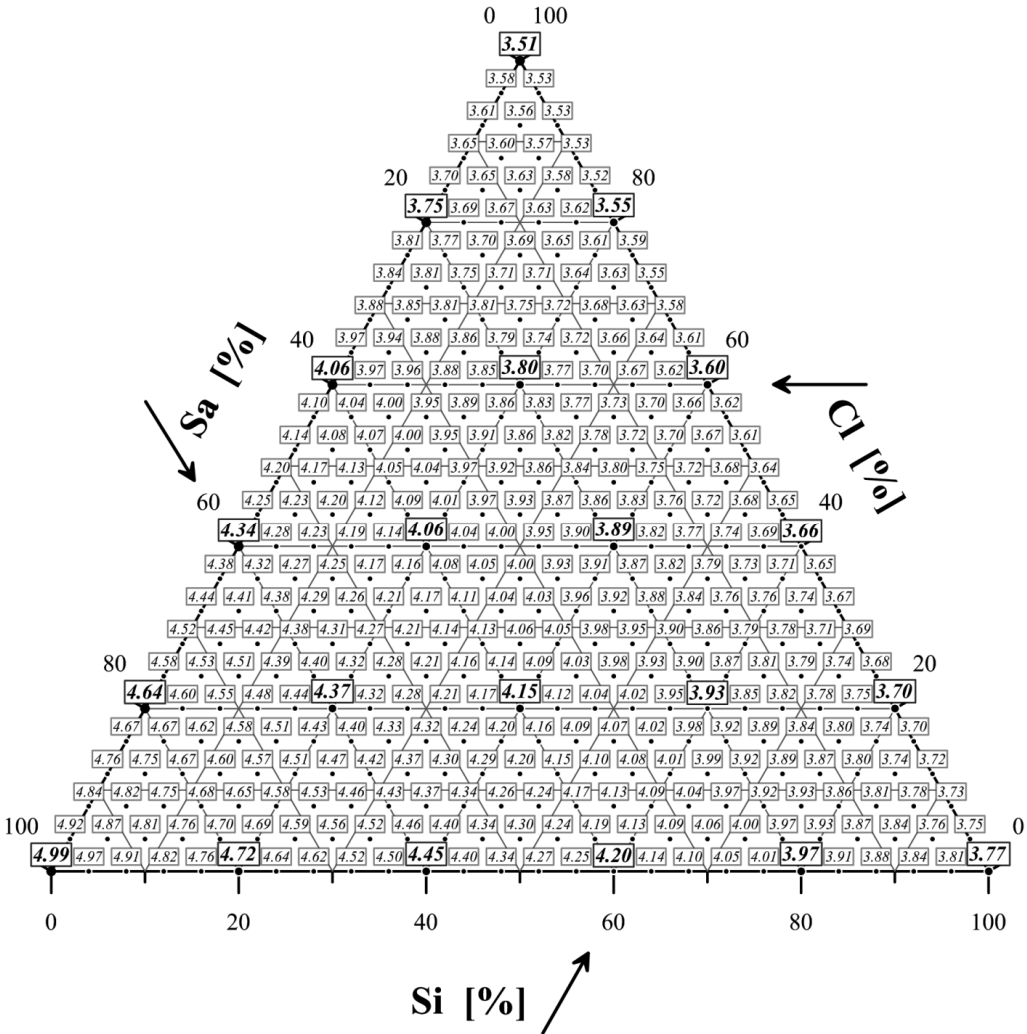
Rys. 6.17. Przykładowe optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa w zależności od uziarnienia gruntu: obliczeniowa mikromechanika

Wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego określono dla sekwencji różnych zawartości frakcji gruntowych. Wszystkie uzyskane rezultaty przedstawiono w formie wykresu (diagramu) trójkątnego, gdzie na poszczególnych osiach występują procentowe zawartości frakcji gruntowych. Obliczenia numeryczne zrealizowano dla czterech różnych zawartości materii organicznej ( $\phi_{mo}$ ), tj. 0, 2, 4 oraz 6%. Szczegółowe diagramy do określania wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], przedstawiono w na rys. 6.18–6.21.



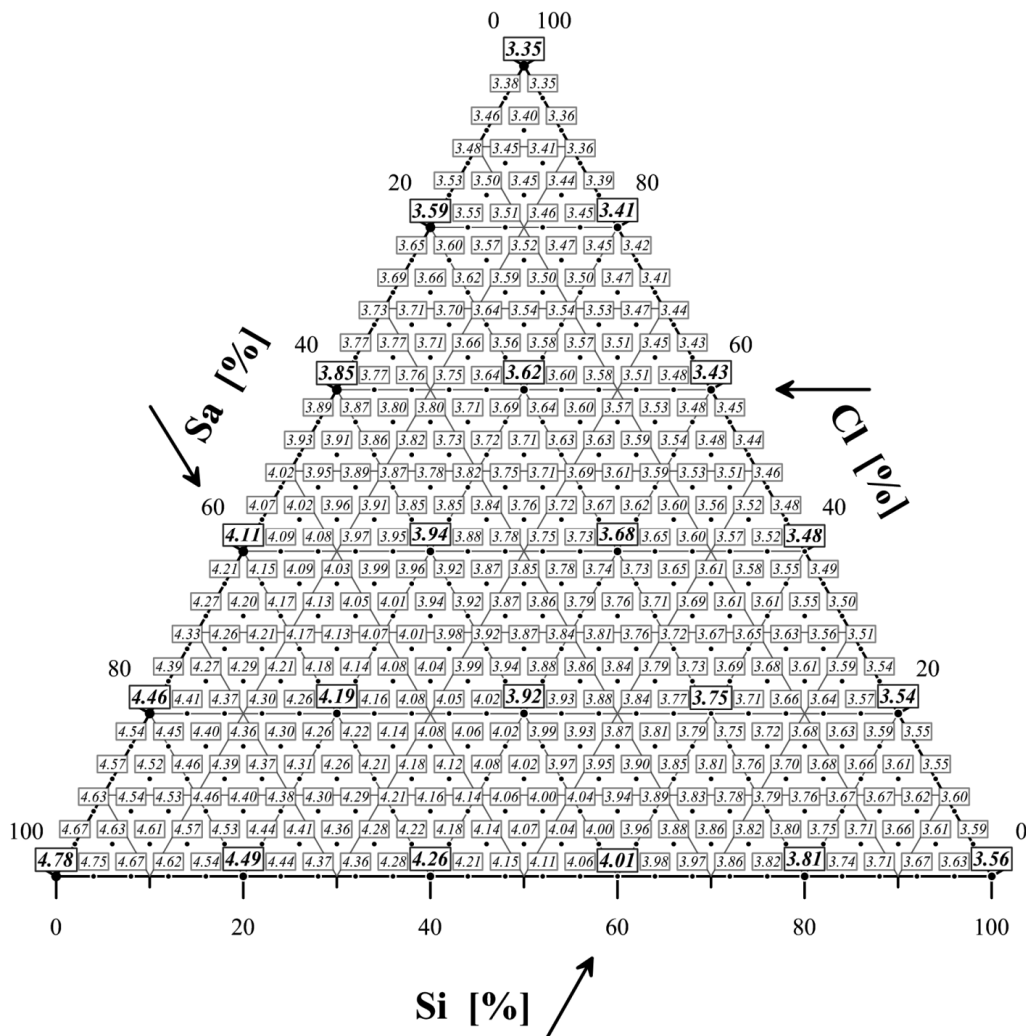
Rys. 6.18. Szczegółowy diagram do „dokładnego” określania wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], według zawartości frakcji gruntowych; zawartość materii organicznej  $\phi_{mo} = 0\%$

Jednocześnie na podstawie uzyskanych wyników stworzono wykresy trójkątne, które są spójne z trójkątem ISO „krajowym” do rozpoznawania gruntu wg zawartości frakcji. W tym celu wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, które zawierały się w odpowiednich obszarach (wskazanych rodzajem gruntu) były uśredniane i dla danego gruntu na „nowym” wykresie przypisano tylko jedną wartość



Rys. 6.19. Szczegółowy diagram do „dokładnego” określania wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], według zawartości frakcji gruntowych; zawartość materii organicznej  $\phi_{\text{mo}} = 2\%$

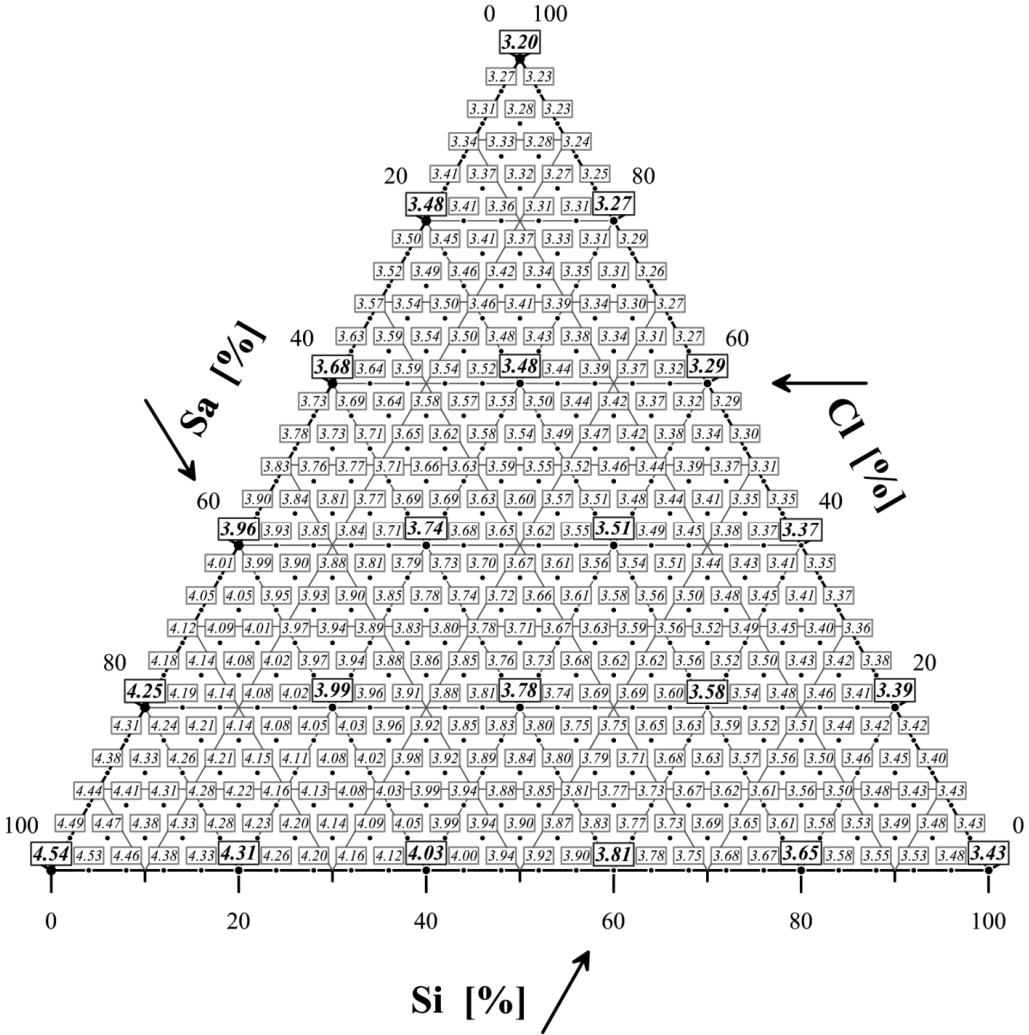




Rys. 6.20. Szczegółowy diagram do „dokładnego” określania wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], według zawartości frakcji gruntowych; zawartość materii organicznej  $\phi_{\text{mo}} = 4\%$

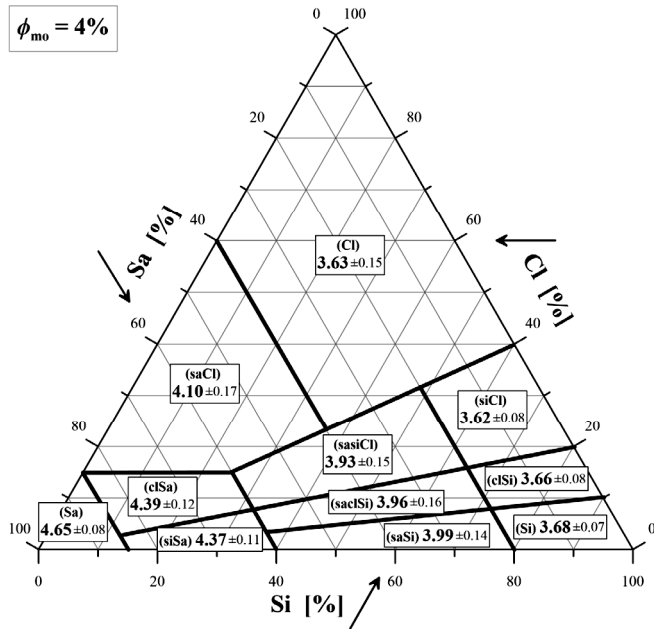
przewodności, tj. wartość średnią wraz z odchyleniem standardowym. Diagramy te określają średnią wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego jedynie na podstawie rodzaju (nazwy) gruntu. Dla wszystkich czterech przypadków, dotyczących zawartości materii organicznej, zaprezentowano je na rys. 6.22–6.25. Warto tu nadmienić, że stosowane na tych diagramach skrócone nazwy gruntów odpowiadają opisowym nazwom obowiązującym wcześniej i występującym np. w normie PN-B/81-03020, tj.:

Cl → *il*, saCl → *il piaszczysty*, clSa → *piasek ilasty*, Sa → *piasek*, siSa → *piasek pylasty*, saclSi → *glina pylasta*, saSi → *pył piaszczysty*, Si → *pył*, clSi → *pył ilasty*, siCl → *il pylasty*, sasiCl → *glina ilasta*.

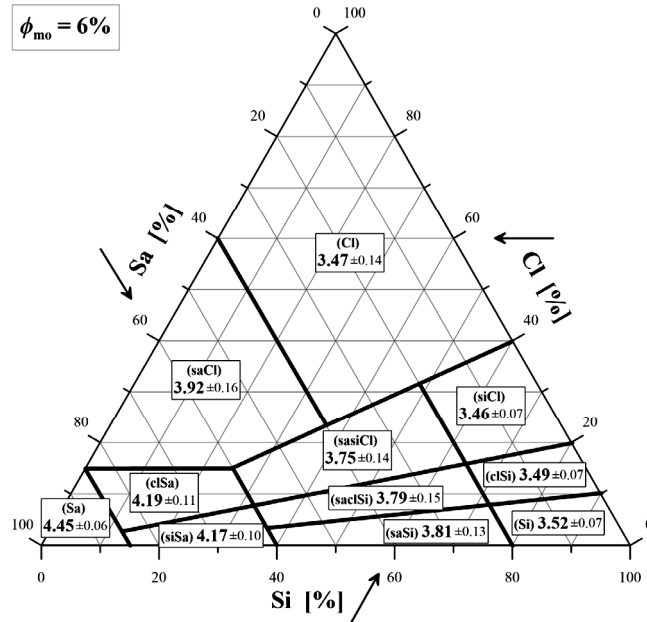


Rys. 6.21. Szczegółowy diagram do „dokładnego” określenia wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], według zawartości frakcji gruntowych; zawartość materii organicznej  $\phi_{\text{mo}} = 6\%$





Rys. 6.24. Diagram do określania średniej wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$  [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>], według nazwy gruntu; zawartość materii organicznej  $\phi_{mo} = 4\%$



Rys. 6.25. Diagram do określania średniej wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$  [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>], według nazwy gruntu; zawartość materii organicznej  $\phi_{mo} = 6\%$

## 6.4. Morfologia polikrystaliczna: analityczna mikromechanika

W podrozdziale 4.3 szczegółowo omówiono dwa najbardziej popularne schematy aproksymacji analitycznej, tj. schemat Mori–Tanaki oraz schemat samouzdognionego pola. Ten pierwszy wykorzystywany jest do modelowania kompozytów, w których jeden ze składników „dominuje” nad pozostałymi komponentami, co implikuje, że mikrostrukturę ośrodka charakteryzuje morfologia typu matryca-wtrącenie. W schemacie samouzdognionego pola zakłada się natomiast polikrystaliczną strukturę kompozytu. Oznacza to m.in., że zamiana składników ośrodka nie powoduje zmiany makroskopowej odpowiedzi materiału.

Jeśli więc ponownie przywołać założenie o lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w skali mikro (podrozdz. 6.2), wywołanej złożoną strukturą mineralogiczną szkieletu gruntowego, to, zdaniem autora, do szacowania przewodności cieplnej na tym poziomie obserwacji zdecydowanie bardziej odpowiednim podejściem jest to wykorzystujące schemat samouzdognionego pola. Wynika to z tego, iż w złożonej strukturze mineralogicznej szkieletu gruntowego raczej trudno wyróżnić jest jeden składnik/minerał tworzący matrycę. Wydaje się więc, że przyjęcie założenia o polikrystalicznej (ziarowej) strukturze szkieletu gruntowego w skali mikro (zob. rys. 6.10b) jest jak najbardziej uzasadnione. W konsekwencji wszystkie rozważania zawarte w niniejszym podrozdziale prowadzi się w ramach modelowania zgodnego ze schematem samouzdognionego pola, co odpowiada zastosowaniu typu morfologii mikrostruktury, którą schematycznie przedstawiono na rys. 6.10b.

Zauważmy, że oryginalne sformułowanie schematu samouzdognionego pola (4.29) zostało uzyskane z założeniem, że poszczególne składniki tworzące ośrodek charakteryzują się deterministycznymi wartościami przewodności cieplnych. W celu uwzględnienia w schemacie samouzdognionego pola postulowanej w podrozdziale 6.2 lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej, należy to sformułowanie odpowiednio zmodyfikować. Zakładając ponownie, że w skali mikro szkielet gruntowy tworzą trzy składniki, tj. (1) frakcja pyłowa i ilowa, których lokalną zmienność przewodności cieplnej opisuje wspólna gęstość prawdopodobieństwa  $f_{Cl+Si}$  (rys. 6.7a), (2) frakcja piaszkowa, w obrębie której losowe fluktuacje przewodności cieplnej charakteryzowane są gęstością prawdopodobieństwa,  $f_{Sa}$  (rys. 6.7b) oraz (3) materia organiczna, której przewodność cieplna,  $\lambda_{mo}$ , jest wartością deterministyczną, to makroskopową przewodność cieplną szkieletu gruntowego można wyrazić jako:

$$\lambda_s^{hom} = \frac{(1 - \phi_{mo}) \left[ \phi_{Cl+Si} \int_{\lambda_{Cl+Si}^{min}}^{\lambda_{Cl+Si}^{max}} \lambda P^{Cl+Si,hom} f_{Cl+Si} d\lambda + \phi_{Sa} \int_{\lambda_{Sa}^{min}}^{\lambda_{Sa}^{max}} \lambda P^{Sa,hom} f_{Sa} d\lambda \right] + \phi_{mo} \lambda_{mo} P^{mo,hom}}{(1 - \phi_{mo}) \left[ \phi_{Cl+Si} \int_{\lambda_{Cl+Si}^{min}}^{\lambda_{Cl+Si}^{max}} P^{Cl+Si,hom} f_{Cl+Si} d\lambda + \phi_{Sa} \int_{\lambda_{Sa}^{min}}^{\lambda_{Sa}^{max}} P^{Sa,hom} f_{Sa} d\lambda \right] + \phi_{mo} P^{mo,hom}} \quad (6.11)$$

gdzie  $\phi_{\text{Cl+Si}}$  jest zawartością ziaren tworzących frakcje ilową i pyłową, natomiast  $\lambda^{\min}$  oraz  $\lambda^{\max}$  to najmniejsze i największe przewidywane wartości zmiennej losowej (indeks dolny przy  $\lambda$  wskazuje składnik). Operatory lokalizacji dla poszczególnych składników szkieletu gruntowego oblicza się na podstawie zależności (4.30), tj.:

$$P^{j,\text{hom}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_j - \lambda_s^{\text{hom}}}{\lambda_s^{\text{hom}}} \right)^{-1} \quad (6.12)$$

przy czym określając wartość operatora lokalizacji dla konkretnego składnika, indeks „j” obecny w równaniu (6.12) należy oczywiście zamienić na oznaczenie analizowanego komponentu, tj.: „Cl+Si”, „Sa” lub „mo”.

Zauważmy, że operator lokalizacji (6.12) jest funkcją wartości składowych tensora depolaryzowalności,  $A_i^*$ , które, zgodnie z wyrażeniem (4.21), zależą od kształtu wtrąceń elipsoidalnych opisujących poszczególne składniki szkieletu gruntowego. W dalszych rozważaniach zakłada się, że wszystkie składniki modelowane są za pomocą wtrąceń sferoidalnych charakteryzowanych parametrem  $\theta$  wyrażającym stosunek półosi elipsoidy, tj.:

$$R_1 = R_2 = R, \quad \theta = \frac{R_3}{R} \quad (6.13)$$

co implikuje, że jeśli np.  $\theta \rightarrow \infty$  lub  $\theta \rightarrow 0$ , to wtrącenie przyjmuje kształty, odpowiednio, „igiełek” lub „dysków” (por. rozważania z punktu 4.3.2). Oczywiście jest, że dla  $\theta = 1$ , wtrącenia mają kształt sferyczny. Ze względu na fakt, iż w najbardziej ogólnym przypadku, każdy ze składników szkieletu gruntowego może być modelowany inną „rodziną” wtrąceń charakteryzowaną odrębnym parametrem  $\theta$ , w dalszej części analiz wprowadza się rozróżnienie przez zastosowanie indeksów dolnych, tj.  $\theta_{\text{Cl+Si}}$ ,  $\theta_{\text{Sa}}$  oraz  $\theta_{\text{mo}}$  wyrażają stosunki półosi (zgodnie z zależnością (6.13)) dla wtrąceń sferoidalnych opisujących odpowiednie, wyróżnione wcześniej, komponenty szkieletu gruntowego.

Zostało to już zasygnalizowane w podrozdziale 4.3, natomiast należy to silnie podkreślić jeszcze raz, iż schemat samouzgodnionego pola jest schematem niejawnym. Zauważmy bowiem, że ze względu na reprezentację (6.12), operatory lokalizacji są funkcją poszukiwanej wartości makroskopowej odpowiedzi ośrodka niejednorodnego, w tym przypadku makroskopowej przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s^{\text{hom}}$ . W konsekwencji, rozwiązanie niejawnego równania (6.11) poszukuje się zazwyczaj metodami iteracyjnymi. Wszystkie prezentowane w tym podrozdziale wyniki zostały uzyskane z zastosowaniem iteracyjnej procedury poszukiwania rozwiązań równań nieliniowych, tj. metody Newtona. Oznacza to, że kolejne przybliżenia rozwiązań dane są następującym wzorem rekurencyjnym (np. Kincaid i Cheney 2005):

$$\lambda_s^{\text{hom}}[i+1] = \lambda_s^{\text{hom}}[i] - \frac{g(\lambda_s^{\text{hom}}[i])}{g'(\lambda_s^{\text{hom}}[i])}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

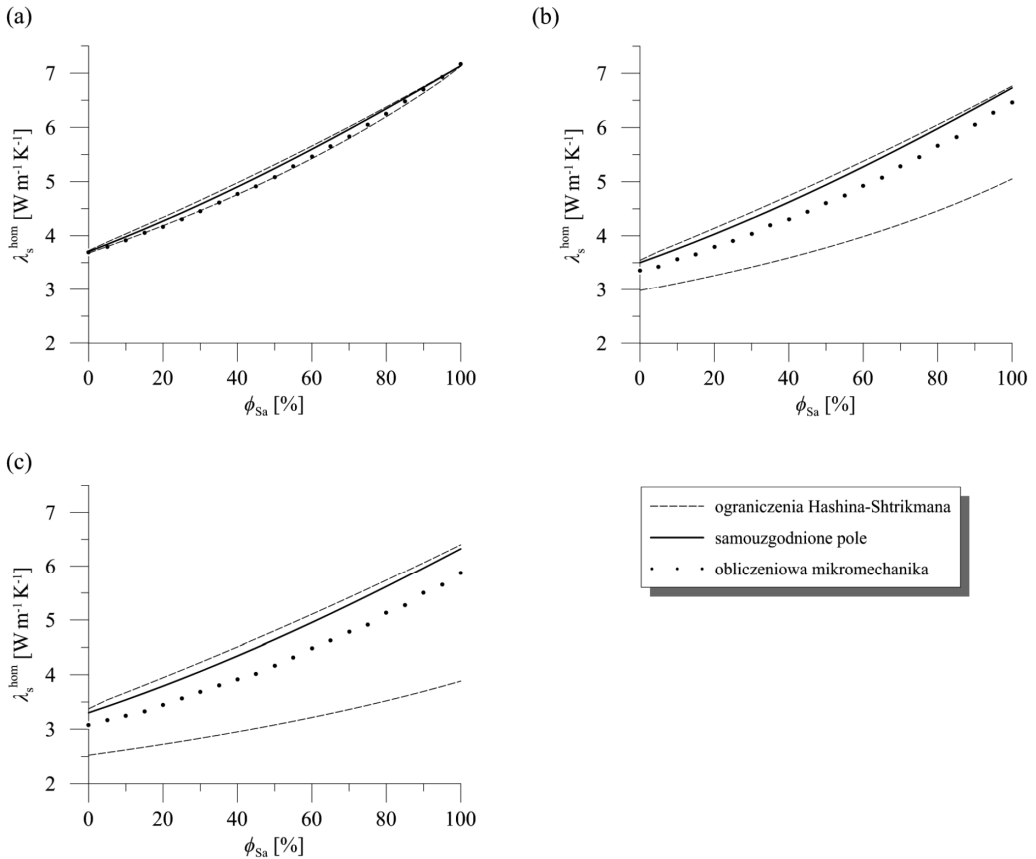
gdzie  $[i]$  oznacza w tym przypadku numer iteracji natomiast  $g$  jest funkcją charakteryzowaną jako różnica lewej i prawej strony równania (6.11). W ogólnym przypadku równanie

$$g(\lambda_s^{\text{hom}}) = 0 \quad (6.15)$$

może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Wynika to z faktu, iż pochodna funkcji  $g$  zmienia znak w analizowanym przedziale możliwych wartości  $\lambda_s^{\text{hom}}$ . Ponadto możliwe są również, nieakceptowalne z punktu widzenia fizyki, rozwiązania w postaci ujemnych wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. W celu zidentyfikowania poprawnej wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, liczne analizy przeprowadzone przez autora wykazały, że jako wartość początkową, tj.  $\lambda_s^{\text{hom}}[i=0]$ , należy przyjmować najwyższą z dopuszczalnych wartości dla  $\lambda_s^{\text{hom}}$ . Zaleca się, aby proces iteracyjny rozpoczynać od przyjęcia wartości początkowej przewodności cieplnej szkieletu gruntowego równej tej, która wynika np. z górnego oszacowania Hashina–Shtrikmana. Na podstawie licznych obliczeń wykonanych przez autora w środowisku Wolfram Mathematica (Mathematica, 2009) okazało się, że takie podejście gwarantuje poprawne określenie wartości  $\lambda_s^{\text{hom}}$ , przy czym zbieżność rozwiązania okazuje się bardzo szybka. W zasadzie po 5–6 iteracjach algorytm zostawał zatrzymywany ze względu na fakt, iż kolejne przybliżenia (6.14) nie powodowały już istotnych zmian rozwiązania.

Powróćmy ponownie do zainicjowanych rozważań, których celem jest określenie makroskopowej przewodności cieplnej szkieletu gruntowego z uwzględnieniem lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$  w obrębie szkieletu gruntowego. Załóżmy, że wszystkie składniki tworzące szkielet gruntowy, wyróżnione w sformułowaniu (6.11), modelowane są jako inkluzje sferyczne, tj.  $\theta_{\text{Cl+Si}} = \theta_{\text{Sa}} = \theta_{\text{mo}} = 1$ . Na rysunku 6.26 przedstawiono predykcję makroskopowej przewodności cieplnej szkieletu gruntowego (określoną w ramach modelowania schematem samouzgodnionego pola) w funkcji procentowej zawartości frakcji piaskowej w szkielecie gruntowym (pogrubiona linia ciągła). Prezentowane wyniki zostały uzyskane dla przypadku, gdy w szkielecie gruntowym brak jest części organicznych (rys. 6.26a) oraz gdy zawiera on pewną frakcję materii organicznej, tj. 4% – rys. 6.26b oraz 8% – rys. 6.26c. Dla porównania wyników na każdym z wykresów przedstawiono również rezultaty uzyskane w ramach modelowania z wykorzystaniem obliczeniowej mikromechaniki. Na wykresach oznaczono je za pomocą dyskretnych punktów – zauważmy, że są to te same wyniki, które prezentowano już wcześniej, np. na rys. 6.14. Ponadto aby weryfikować poprawność uzyskanych wyników, na wszystkich wykresach dodatkowo naniesiono ograniczenia

Hashina–Shtrikmana. Granice te uzyskano przez uwzględnienie lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$  w schemacie Mori–Tanaki (zakładając, że wtrącenia mają kształt sferyczny) oraz skorzystaniu ze wspomnianych wcześniej (pkt 4.3.3) zbieżności oszacowania makroskopowej odpowiedzi kompozytu z dolnym i górnym ograniczeniem Hashina–Shtrikmana w zależności od wzajemnego stosunku przewodności cieplnej matrycy i zanurzonych w niej wtrąceń<sup>16</sup>.



Rys. 6.26. Wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego w funkcji procentowej zawartości frakcji piaskowej dla trzech różnych zawartości materii organicznej: (a)  $\phi_{\text{mo}} = 0\%$ ; (b)  $\phi_{\text{mo}} = 4\%$ ; (c)  $\phi_{\text{mo}} = 8\%$

Obserwując wyniki zaprezentowane na rys. 6.26, można stwierdzić, że w przypadku braku materii organicznej w szkielecie gruntowym w zasadzie relatywnie dobre oszacowanie wartości  $\lambda_s^{\text{hom}}$  uzyskuje się na podstawie ograniczeń Hashina–Shtrikmana. Wów-

<sup>16</sup> Szczegóły znaleźć można we wcześniejszej pracy autora: Łydzba i in. 2017.



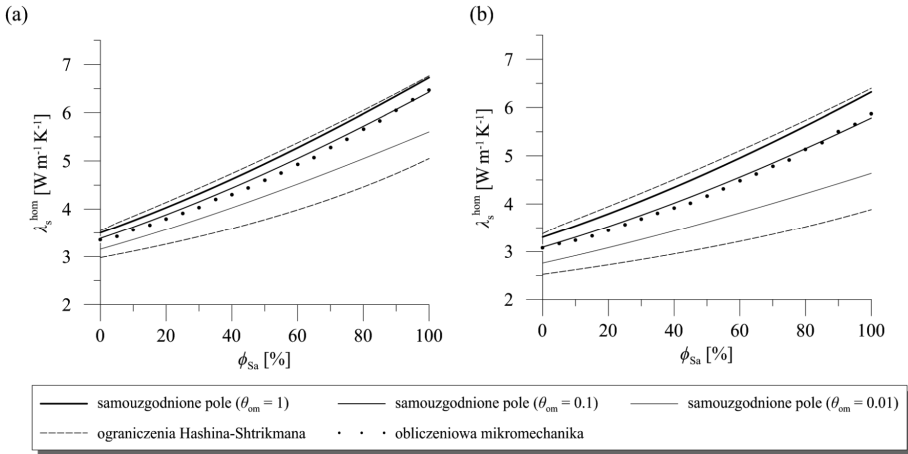
czas granice te są sobie bliskie w całym zakresie wartości  $\phi_{\text{Sa}}$ . Jest to oczywiście konsekwencją relatywnie niskiego kontrastu pomiędzy przewodnościami cieplnymi składników tworzących szkielet gruntowy. Zauważmy, że w przypadku braku części organicznych w szkielecie gruntowym (tj. dla  $\phi_{\text{mo}} = 0\%$ ) maksymalny kontrast parametrów termicznych wynosi:  $\lambda_{\text{Sa}}^{\text{max}} / \lambda_{\text{Cl+Si}}^{\text{min}} = 8,8 / 2,0 = 4,4$ . W przypadku gdy szkielet gruntowy charakteryzuje się pewną zawartością materii organicznej (4% – rys. 6.26b oraz 8% – rys. 6.26c), to ograniczenia stają się coraz bardziej odległe i wówczas konieczne i uzasadnione jest stosowanie proponowanego w tym rozdziale podejścia obliczeniowej lub analitycznej mikromechaniki, w celu oszacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego.

Zauważmy ponadto, że niezależnie od tego czy szkielet gruntowy zawiera materię organiczną, czy też nie, oszacowanie uzyskane z wykorzystaniem schematu samouzgodnionego pola znajduje się wyraźnie powyżej predykcji otrzymanej z modelowania w ramach obliczeniowej mikromechaniki. W zasadzie wyniki otrzymane z zastosowaniem schematu samouzgodnionego pola są bliskie górnemu oszacowaniu Hashina–Shtrikmana. Jest to konsekwencją poczynionego wcześniej założenia, że wszystkie składniki modelowane są za pomocą wtrąceń sferycznych ( $\theta_{\text{Cl+Si}} = \theta_{\text{Sa}} = \theta_{\text{mo}} = 1$ ).

W celu zobrazowania, jak kształt poszczególnych składników wpływa na predykcję przewodności cieplnej przyjmijmy w pierwszej kolejności, że materia organiczna charakteryzowana jest odmiennymi kształtami niż sferyczne, np.  $\theta_{\text{om}} = 0,1$  lub  $\theta_{\text{om}} = 0,01$ . Kształty pozostałych składników (tj. „Cl + Si” oraz „Sa”) pozostają niezmiennione; wciąż modelowane są jako sfery. Wyniki predykcji  $\lambda_{\text{s}}^{\text{hom}}$  względem procentowej zawartości frakcji piaskowej zestawiono na rys. 6.27. Rezultaty prezentuje się oczywiście jedynie dla przypadku, gdy w szkielecie gruntowym obecna jest materia organiczna (4% – rys. 6.27a, 8% – rys. 6.27b). Dla ułatwienia porównywania wyników na wykresie tym zestawiono także rezultaty z wcześniejszej analizy, gdzie wszystkie składniki modelowane były jako sfery (najgrubsza linia ciągła).

Prezentowane na rysunku 6.27 wyniki wskazują, że im mniejsza wartość parametru  $\theta_{\text{om}}$  (przypomnijmy, że malejąca wartość parametru  $\theta$  powoduje, iż kształt ziaren staje się coraz bardziej „spłaszczony”; dla  $\theta$  bliskiego zeru wtrącenia przyjmują kształt „dysków”), tym niższa wartość  $\lambda_{\text{s}}^{\text{hom}}$ . Zbliżanie się predykcji samouzgodnionego pola do dolnego ograniczenia Hashina–Shtrikmana, wraz z obniżaniem się wartości parametru  $\theta_{\text{om}}$ , wynika z faktu, iż najslabiej przewodzący składnik szkieletu gruntowego (przypomnijmy, że zgodnie z tab. 2.1  $\lambda_{\text{mo}} = 0,25$  [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>]) modelowany jest kształtem zbliżonym do „dysków”. Zauważmy ponadto, że najlepszą zgodność pomiędzy predykcją wynikającą z obliczeniowej i analitycznej mikromechaniki uzyskano dla przypadku, gdy ziarna części organicznej modelowane są wtrąceniami sferoidalnymi

o parametrze  $\theta_{om} = 0,1$ . Jest to zauważalne dla obu analizowanych tutaj zawartości materii organicznej.

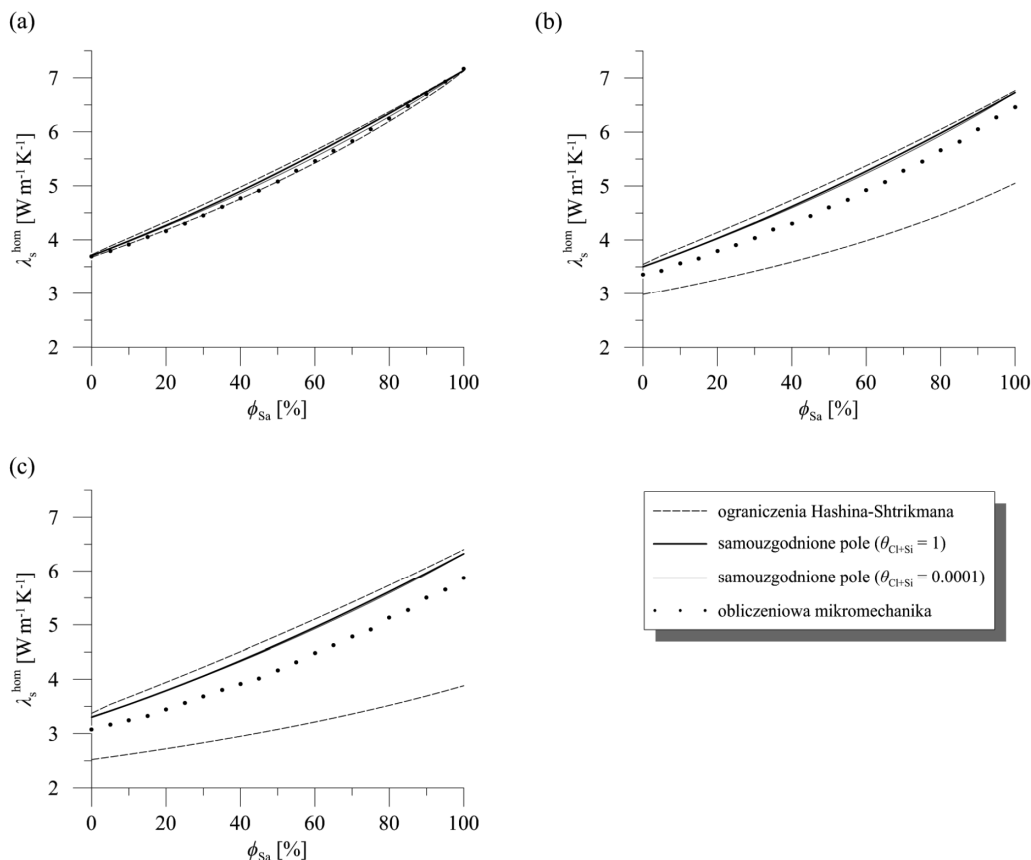


Rys. 6.27. Wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego w funkcji procentowej zawartości frakcji piaskowej dla różnych wartości parametru  $\theta_{om}$ : (a)  $\phi_{mo} = 4\%$ ; (b)  $\phi_{mo} = 8\%$

W dalszym ciągu wykonajmy podobną analizę jak dla materii organicznej, tym razem zmieniając jednak parametr  $\theta$  dla składnika reprezentującego frakcję iłową i pyłową, tj.  $\theta_{Cl+Si}$ . Załóżmy więc, że oprócz „Cl + Si” wszystkie pozostałe składniki mają kształt sferyczny, tj.  $\theta_{sa} = \theta_{om} = 1$ . Wstępne analizy wykazały, że obniżanie wartości parametru  $\theta_{Cl+Si}$  w zasadzie nie powoduje istotnych zmian w predykcji przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s^{hom}$ . W konsekwencji, aby możliwe było porównanie rezultatów, prezentuje się tu wyniki tylko dla dwóch „skrajnych” przypadków, tj. gdy  $\theta_{Cl+Si} = 1$  (kształt sferyczny) oraz  $\theta_{Cl+Si} = 0,0001$  (kształt zbliżony do „dysku”). Oszacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego w funkcji procentowej zawartości frakcji piaskowej dla dwóch wspomnianych wartości parametru  $\theta_{Cl+Si}$  zaprezentowano na rys. 6.28.

Wyraźnie widać, że przyjęcie nawet tak niskiej wartości parametru opisującego kształt ziaren frakcji iłowej i pyłowej,  $\theta_{Cl+Si} = 0,0001$ , praktycznie nie zmienia predykcji względem oszacowania uzyskanego po założeniu, że wszystkie składniki są modelowane kształtami sferycznymi. Co więcej, największą różnicę (choć wciąż bardzo niewielką) w predykcji można zaobserwować dla przypadku braku materii organicznej w szkielecie gruntowym (rys. 6.28a). Wzrost procentowej zawartości materii organicznej powoduje, że oszacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego uzyskane dla  $\theta_{Cl+Si} = 0,0001$  oraz  $\theta_{Cl+Si} = 1$  są w zasadzie nierozróżnialne (rys. 6.28b oraz 6.28c).

Taka charakterystyka predykcji uzyskanej ze schematu samouzgodnionego pola wynika z dwóch aspektów. Po pierwsze, w przypadku braku materii organicznej w szkielecie gruntowym teoretycznie najslabiej przewodzącym składnikiem jest frakcja iłowa

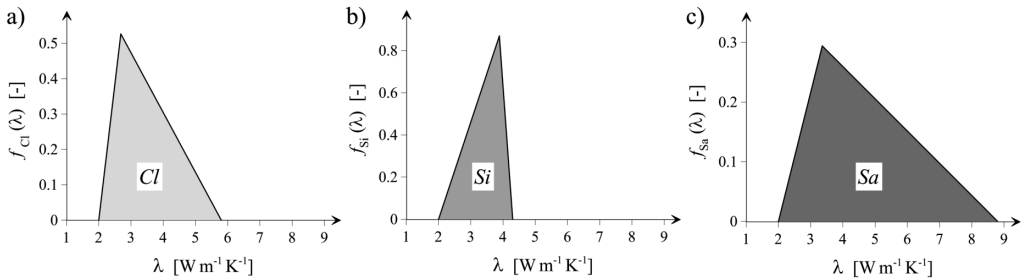


Rys. 6.28. Wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego w funkcji procentowej zawartości frakcji piaskowej dla dwóch różnych wartości parametru  $\theta_{Cl+Si}$ : (a)  $\phi_{mo} = 0\%$ ; (b)  $\phi_{mo} = 4\%$ ; (c)  $\phi_{mo} = 8\%$

i pyłowa (por. funkcje gęstości prawdopodobieństwa z rys. 6.7). Stąd też przyjęcie niskiej wartości dla parametru  $\theta_{Cl+Si}$  powoduje obniżanie się predykcji  $\lambda_s^{hom}$ , jednakże ze względu na fakt, iż w tym przypadku ograniczenia Hashina–Shtrikmana są sobie bardzo bliskie, to zakres możliwego obniżenia wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego jest bardzo ograniczony. Po drugie, dla większych udziałów frakcyjnych części organicznej ograniczenia Hashina–Shtrikmana są wyraźnie bardziej odległe (jest to konsekwencją wzrostu kontrastu pomiędzy przewodnościami cieplnymi poszczególnych składników tworzących szkielet gruntowy; zauważmy, że maksymalny kontrast parametrów termicznych w tym przypadku wynosi  $\lambda_{Sa}^{max}/\lambda_{mo} = 8,8/0,25 = 35,2$ ), jednakże dominującym składnikiem jest ten, który cechuje się najniższą przewodnością cieplną, czyli materia organiczna. Jak pokazano we wcześniejszych analizach, przyjęcie dla materii organicznej sferycznego

kształtu ziarna ( $\theta_{om} = 1$ ) powoduje, iż predykcja samouzgodnionego pola dąży do górnego ograniczenia Hashina–Shtrikmana (por. wyniki zaprezentowane na przykład na rys. 6.26b i c). W efekcie im większa zawartość materii organicznej, tym wpływ obniżania wartości  $\theta_{Cl+Si}$  na zmianę predykcji przewodności cieplnej szkieletu gruntowego staje się mniej zauważalny.

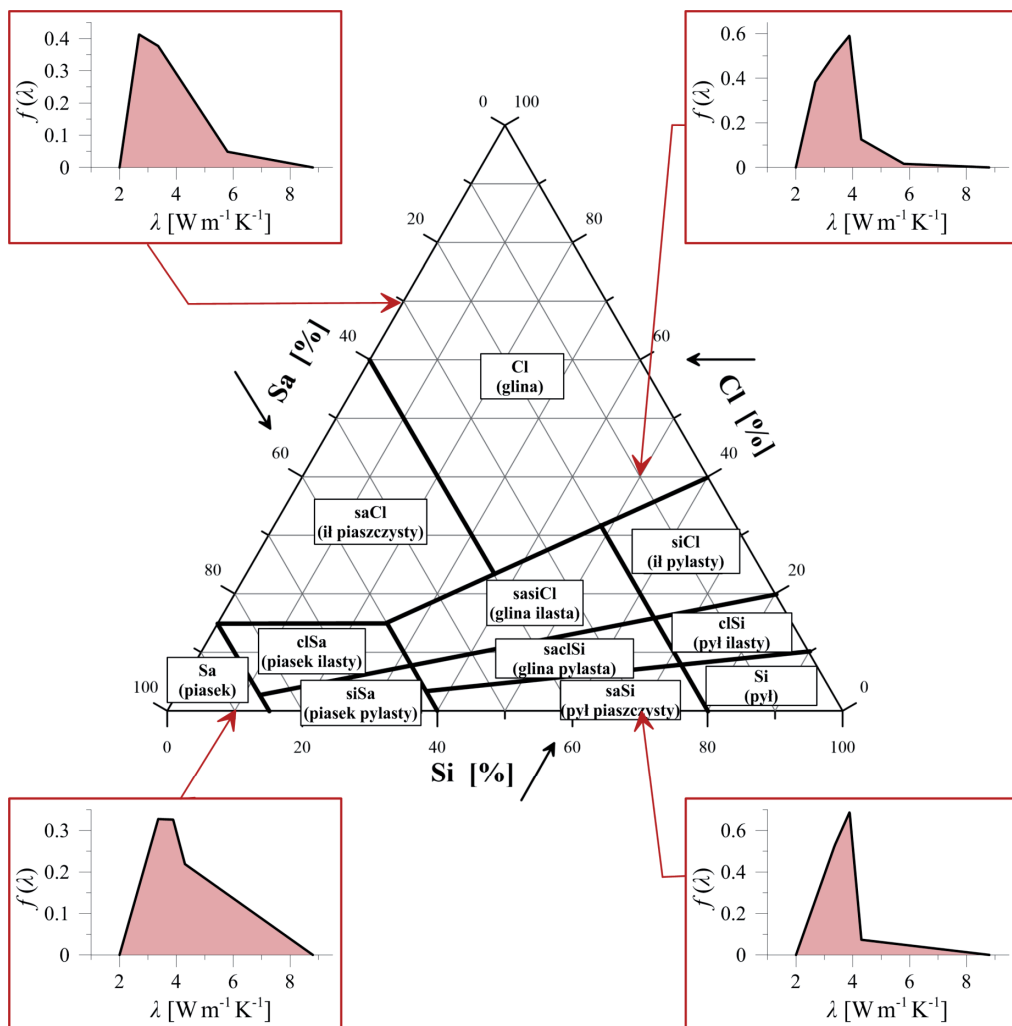
Przedstawione w niniejszym podrozdziale analizy dowodzą, że zastosowanie analitycznej mikromechaniki, w szczególności schematu samouzgodnionego pola, prowadzi do podobnych predykcji przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, jak te uzyskane z zastosowaniem obliczeniowej mikromechaniki. Największą zgodność rezultatów otrzymano w przypadku, gdy dla materii organicznej przyjęto, że kształt cząstek charakteryzowany jest stosunkiem półosi elipsoidy wynoszącym  $\theta_{mo} = 0,1$ . Analogicznie do przypadku wyników otrzymanych w ramach modelowania w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki, ostateczną weryfikację poprawności oszacowania  $\lambda_s$  proponuje się dokonać przez porównanie predykcji makroskopowej przewodności cieplnej gruntu (uzyskanej ze schematu samouzgodnionego pola) z wynikami badań laboratoryjnych dla gruntów w stanie pełnego nasycenia. Jest to szczegółowo omawiane w kolejnym rozdziale, który, jak wspomniano już wcześniej, dotyczy określania przewodności cieplnej gruntów nasyconych.



Rys. 6.29. Ciągłe funkcje gęstości prawdopodobieństwa uzyskane na podstawie analizy odwrotnej omawianej w rozdziale 7: (a) frakcja ilowa; (b) frakcja pyłowa; (c) frakcja piaskowa

Ponadto, jak zostanie to pokazane w rozdziale 7, zastosowanie schematu samouzgodnionego pola do predykcji makroskopowej przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego,  $\lambda^{\text{sat}}$ , prowadzi również do satysfakcjonującej zgodności z rezultatami pomiarów laboratoryjnych. Jednakże zgodność ta jest zapewniona pod warunkiem, że w aproksymacji wykorzystana się optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla trzech głównych frakcji gruntowych. Analogicznie zatem do przypadku obliczeniowej mikromechaniki, w kolejnym rozdziale formułuje się i rozwiązuje zagadnienie odwrotne, które na podstawie wyników laboratoryjnych dotyczących przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia prowadzi do wyznaczenia optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $f_{Cl}$ ,  $f_{Si}$ , oraz  $f_{Sa}$ . W niniejszym podrozdziale na rys. 6.29 prezentuje się ostateczny wynik anali-

zy odwrotnej w postaci zidentyfikowanych funkcji gęstości prawdopodobieństwa, charakteryzujących lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego w ujęciu schematu samouzgodnionego pola.



Rys. 6.30. Przykładowe optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa w zależności od uziarnienia gruntu: analityczna mikromechanika

Zauważmy, że funkcje gęstości prawdopodobieństwa wyznaczone w ramach analitycznej mikromechaniki (modelowanie schematem samouzgodnionego pola) różnią się istotnie od optymalnych funkcji zidentyfikowanych w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki (por. z rys. 6.16). Różnice te są zauważalne nie tylko w zakresie funkcji gęstości prawdopodobieństwa

bieństwa dla poszczególnych frakcji gruntowych (jak na rys. 6.29), ale także gdy porówna się funkcje  $f(\lambda)$  określone na podstawie zależności (6.10). Dla czterech wybranych gruntów funkcje  $f(\lambda)$  przedstawiono na rys. 6.30 – są to te same grunty, co na rys. 6.17.

## 6.5. Uwagi

Różnice w przebiegu optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa uzyskanych z obu analiz, tj. obliczeniowej i analitycznej mikromechaniki, wynikają głównie z rozbieżności w zakresie morfologii mikrostruktury wykorzystywanych w tych podejściach. W obliczeniach numerycznych zakłada się geometrię domeny obliczeniowej w postaci trójwymiarowego obrazu cyfrowego, w którym przewodność cieplna każdego z wokseli generowana jest w sposób niezależny (od wartości przypisanych do wszystkich pozostałych wokseli), jako liczba losowa z rozkładu zdefiniowanego funkcją (6.10). W przypadku schematów analitycznych, w szczególności rozważanego tutaj schematu samouzgodnionego pola, stosuje się mikrostruktury utworzone przez cząstki o zadanych kształtach elipsoidalnych, przy czym kształt charakteryzowany jest parametrem  $\theta$ , wyrażającym stosunek półosi elipsoidy, zgodnie z zależnością (6.13).

Ponadto proces identyfikacji optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa znacząco się różni w zależności od stosowanego podejścia. Zauważmy, że w przypadku obliczeniowej mikromechaniki, geometria mikrostruktury (jej morfologia) są zakładane *a priori*. W konsekwencji rozwiązanie zagadnienia odwrotnego ma na celu jedynie identyfikację optymalnej charakterystyki lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego. Tymczasem, jak zostanie to pokazane w rozdziale 7, w przypadku analitycznej mikromechaniki, w celu uzyskania poprawnej predykcji wartości  $\lambda^{\text{sat}}$ , oprócz identyfikacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $f_{\text{Cl}}$ ,  $f_{\text{Si}}$ , oraz  $f_{\text{Sa}}$ , konieczny jest również dobór optymalnej mikrostruktury ośrodka w zakresie identyfikacji parametrów  $\theta$  dla wybranych składników tworzących ośrodek gruntowy.

Dwa rodzaje diagramów trójkątnych (rys. 6.18–6.25) umożliwiające określenie wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ , na podstawie uziarnienia lub nazwy gruntu określono jedynie w ramach analizy prowadzonej w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki. Wynika to z faktu, iż, zdaniem autora, wyniki uzyskane w zakresie podejścia numerycznego nieco lepiej opisują lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego. Szerzej zostanie to omówione w rozdziale 7, gdzie wykazuje się, że zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym, funkcje  $f_{\text{Cl}}$ ,  $f_{\text{Si}}$ , oraz  $f_{\text{Sa}}$ , określone na podstawie obliczeniowej mikromechaniki charakteryzują się lepszą zgodnością z powszechną wiedzą w zakresie hierarchii oraz konkretnych wartości dla uśrednionych w obrębie frakcji współczynników przewodności cieplnej.

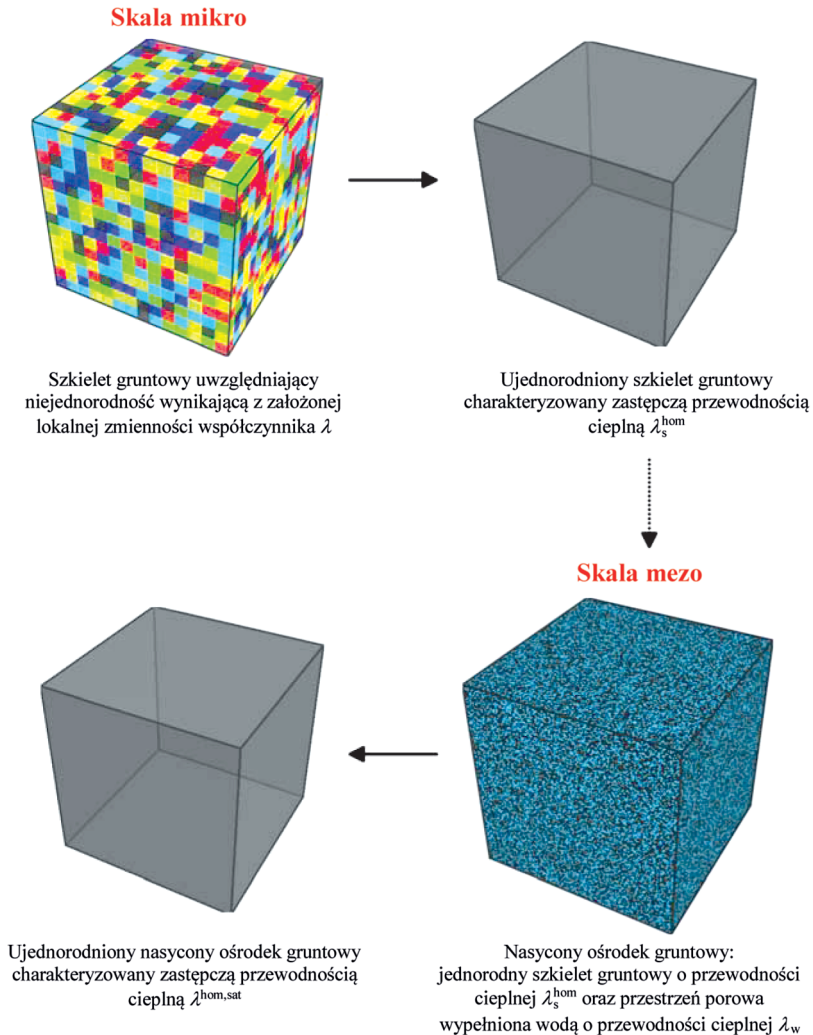
## **7. Przewodność cieplna nasyconego ośrodka gruntowego**

Głównym celem analiz prowadzonych w tym rozdziale jest zaproponowanie metodologii określania przewodności cieplnej gruntów w stanie pełnego nasycenia wodą,  $\lambda^{\text{sat}}$ . Podobnie jak w przypadku dociekań dotyczących określania przewodności szkieletu gruntowego, tak i w tym przypadku rozważania prowadzi się, korzystając z dwóch odrębnych podejść w ramach szeroko rozumianej mikromechaniki. Ponownie więc wykorzystuje się obliczeniową i analityczną mikromechanikę. W szczególności dokonuje się predykcji wartości  $\lambda^{\text{sat}}$  w ramach analizy dwuskalowej uwzględniającej rozważania prowadzone w skali mikro (rozd. 6) i w skali mezo. Otrzymane rezultaty porównuje się z wynikami pomiarów uzyskanych w trakcie badań laboratoryjnych. Bazę danych stanowią wyniki pomiarów własnych autora (podrozdz. 5.3) uzupełnione o dane zaczerpnięte z literatury przedmiotu. Dodatkowo formułuje się zagadnienia odwrotne, które na podstawie wyników pomiarów laboratoryjnych dotyczących przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia prowadzą do zidentyfikowania lokalnych zmienności współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego. Rezultaty w postaci optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa przedstawiono już w poprzednim rozdziale, gdzie omawiano problem lokalnej zmienności parametrów w skali mikro oraz metody określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. W niniejszym rozdziale przedstawia się szczegóły dotyczące rozwiązania sformułowanych zagadnień odwrotnych.

### **7.1. Morfologia wokselowa: obliczeniowa mikromechanika**

Rozważania prowadzone w niniejszym podrozdziale są niejako kontynuacją analiz zawartych w podrozdziale 6.3. Wówczas dociekania dotyczyły określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ , z uwzględnieniem lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$  w skali mikro. W rezultacie wykazano, że jeśli znana jest informacja o zawar-

tości poszczególnych frakcji gruntowych oraz materii organicznej, to wykorzystując zaproponowane podejście obliczeniowej mikromechaniki można dokonać predykcji wartości  $\lambda_s$ . Jednakże ze względu na fakt, iż przewodność cieplna szkieletu gruntowego jest parametrem, którego nie można określić w badaniach laboratoryjnych, konieczna jest weryfikacja poprawności jego oszacowania, np. względem makroskopo-wej przewodności cieplnej gruntu nasyconego,  $\lambda^{\text{sat}}$ . Dalej formułuje się więc metodę określania wartości  $\lambda^{\text{sat}}$  w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki.



Rys. 7.1. Koncepcja analizy dwuskalowej wykorzystanej do określania przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w stanie pełnego nasycenia



Oszacowania wartości przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ , dokonuje się w innej skali obserwacji, tj. w skali mezo, gdzie ośrodek gruntowy jest dwuskładnikowym kompozytem, w którym wyróżnia się jednorodny szkielet gruntowy oraz przestrzeń porową wypełnioną wodą. Zakłada się przy tym, że przewodność cieplna szkieletu gruntowego określona jest na podstawie analizy prowadzonej w skali mikro, a więc charakteryzowana jest zastępczym parametrem  $\lambda_s^{\text{hom}}$ . W rezultacie określenie makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ , wymaga analizy dwuskalowej, której koncepcję zobrazowano graficznie na rys. 7.1.

Podobnie jak w rozważaniach w skali mikro (podrozdz. 6.3), tak i tym razem makroskopową przewodność cieplną gruntu w stanie pełnego nasycenia,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  określa się, stosując estymator (4.31). Geometria DREO tworzona jest w analogiczny sposób, do przypadku określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, z tą różnicą, że do wokseli przypisuje się deterministyczne, a nie jak poprzednio, losowe wartości współczynnika przewodności cieplnej (Łydźba i in. 2017). Dla jednorodnego szkieletu gruntowego, w zależności od udziału frakcji piaskowej i zawartości materii organicznej, przypisuje się wartości,  $\lambda_s^{\text{hom}}$ , uzyskane z zależności (6.9). Wobec tego zastępcza przewodność cieplna szkieletu gruntowego,  $\lambda_s^{\text{hom}}$ , jest funkcją lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$  określonej gęstościami prawdopodobieństwa pokazanymi na rys. 6.7. Woksele reprezentujące przestrzeń porową wypełnioną wodą charakteryzują się współczynnikiem przewodności cieplnej wody,  $\lambda_w$ , zgodnie z tab. 2.1. Graficzną prezentację procesu obliczeniowego stosowanego w skali mezo przedstawiono na rys. 7.2.

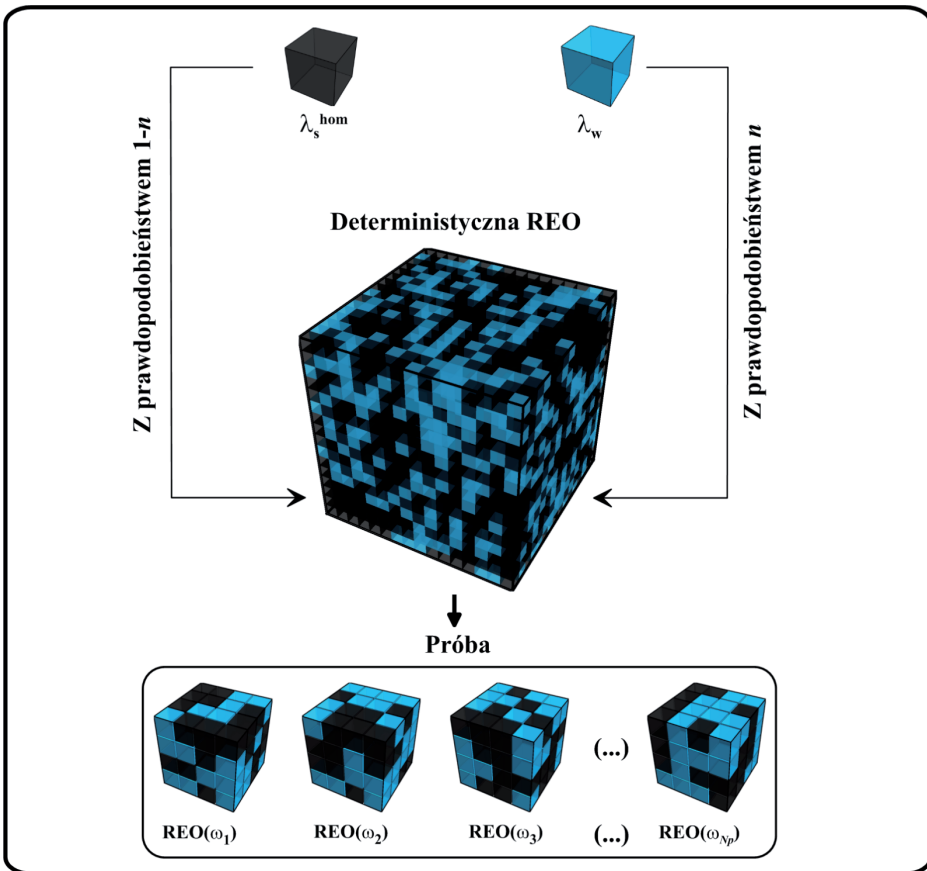
Utworzona w opisany sposób geometria DREO (dwuskładnikowa o deterministycznych parametrach) zwyczajowo określana jest mianem trójwymiarowej losowej szachownicy (ang. *3D random checkerboard*). Przy założonej wartości porowatości gruntu,  $n$ , geometria DREO generowana jest procesem stochastycznym Bernoulliego – woksele reprezentujące fazę wodną pojawiają się z prawdopodobieństwem równym porowatości gruntu,  $n$  (rys. 7.2). Jak pokazano w pracy doktorskiej autora (Różański 2010) dla takiej geometrii mikrostruktury, wariancja lokalnego udziału frakcyjnego (wyrażona w sposób ogólny równaniem (4.34)) dana jest następującą zależnością analityczną:

$$g = \frac{n(1-n)}{N_{\text{REO}}^3} \quad (7.1)$$

Zauważmy, że znajomość analitycznej formuły określającej wariancję lokalnego udziału frakcyjnego oraz dodatkowo fakt, iż grunt nasycony (w skali mezo) jest ośrodkiem dwuskładnikowym, umożliwiają w łatwy sposób wyznaczenie minimalnej wielkości REO z wykorzystaniem metody sformułowanej we wcześniejszych pracach autora (Różański 2010; Łydźba i Różański 2014) i omówionej w punkcie 4.4.1. W konsekwencji stosuje się w tym celu warunek (4.33), który po uwzględnieniu zależności (7.1), można wyrazić w następującej postaci:

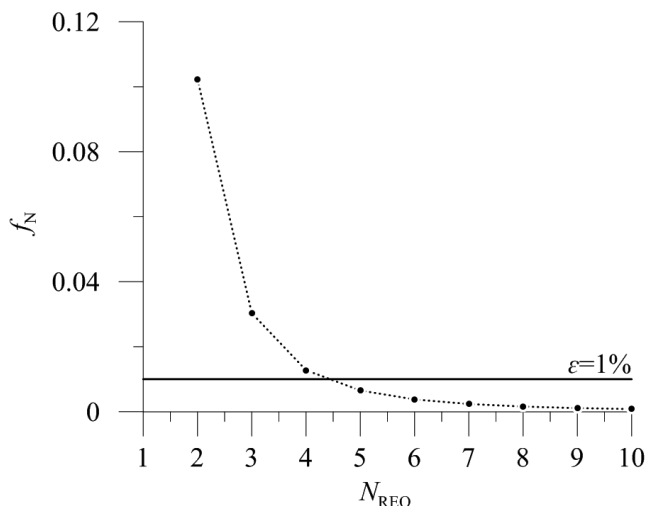
$$\forall N_{\text{REO}} \geq N_{\text{REO}}^{\text{min}} \Rightarrow f_N(N_{\text{REO}}) = \left( \frac{\eta(\Theta) - 1}{\varphi + (1 - \varphi)\eta(\Theta)} \right)^2 \frac{n(1 - n)}{N_{\text{REO}}^3} \leq \varepsilon \quad (7.2)$$

gdzie dla rozważanego tutaj zagadnienia gruntu nasyconego mamy, że:  $\varphi = \max\{n, 1 - n\}$  oraz  $\eta(\Theta) = \min\{\Theta, 1/\Theta\}$ , przy czym  $\Theta$  jest parametrem opisującym kontrast pomiędzy przewodnościami cieplnymi składników, tj.  $\Theta = \lambda_s^{\text{hom}} / \lambda_w$ . Oczywiście jest, że wartości parametrów  $\varphi$  oraz  $\eta$  zależą od rozważanego w konkretnej sytuacji gruntu, w szczególności od porowatości oraz zawartości poszczególnych frakcji gruntowych i części organicznych. Analizie poddaje się tutaj 32 grunty charakteryzujące się różnymi zawartościami poszczególnych frakcji, materii organicznej oraz wartościami porowatości. Jednakże w celu określenia minimalnej wielkości REO, która będzie



Rys. 7.2. Graficzna prezentacja procesu obliczeniowego stosowanego do określania makroskopowej przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego

odpowiednia dla wszystkich analizowanych przypadków, wykonano wstępne analizy i wybrano ten grunt, dla którego wielkość  $N_{\text{REO}}^{\text{min}}$  była tą największą spośród wszystkich wartości. Dla tego przypadku na rys. 7.3 przedstawiono dyskretne wartości funkcji  $f_N$  (7.2) w zależności od wielkości REO wyrażonej liczbą wokseli w danym wierszu/kolumnie,  $N_{\text{REO}}$ . Zakładając w warunku (7.2) błąd aproksymacji  $\varepsilon = 1\%$  można zauważyć, że minimalny wymiar Reprezentatywnej Elementarnej Objętości wynosi  $N_{\text{REO}}^{\text{min}} = 5$ .



Rys. 7.3. Wartość funkcji  $f_N$  (7.2) względem wielkości reprezentatywnej elementarnej objętości  $N_{\text{REO}}$

Poszczególne realizacje  $\text{REO}(\omega_j)$  tworzone przez losowe wybieranie „podobności” (zawierającej  $5 \times 5 \times 5 = 125$  wokseli) z obszaru DREO. Analogicznie do przypadku obliczeń w skali mikro, tak i tym razem dla każdej realizacji  $\omega_j$  rozwiązywano, niezależnie, zagadnienie brzegowe (4.38) w celu określenia tzw. „pozornego” parametru makroskopowego opisującego przewodność cieplną gruntu stowarzyszoną z analizowaną realizacją  $\text{REO}(\omega_j)$  – zbiór  $N_p$  niezależnych realizacji  $\text{REO}(\omega_j)$  tworzy próbę (rys. 7.2). Ostatecznie makroskopową wartość przewodności cieplnej gruntu nasyconego,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ , określono, stosując estymator (4.31), przy czym liczebność próby oszacowano zgodnie z warunkiem (4.40), zakładając, że zarówno  $\kappa$ , jak i  $\varepsilon_\lambda$  wynoszą 1%.

Analogicznie do przypadku określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, zagadnienie brzegowe (4.38), dla każdej pojedynczej realizacji  $\text{REO}(\omega_j)$  rozwiązywano, wykorzystując autorskie oprogramowanie bazujące na metodzie objętości skończonych (Różański 2010). Należy w tym miejscu podkreślić, że przed wykonaniem obliczeń finalnych przeprowadzono sekwencję symulacji wstępnych w celu doboru liczby objętości kontrolnych, które dyskretyzują pojedynczy woxsel. Na tej pod-

stawie przyjęto, że satysfakcjonującą zgodność wyników uzyskuje się w przypadku, gdy pojedynczy woksel dyskretyzowany jest przez 27 objętości kontrolnych. Ze względu na fakt, iż minimalny wymiar REO wynosi 125 wokseli, ostatecznie domena obliczeniowa każdej losowej realizacji REO składa się z 3375 objętości kontrolnych.

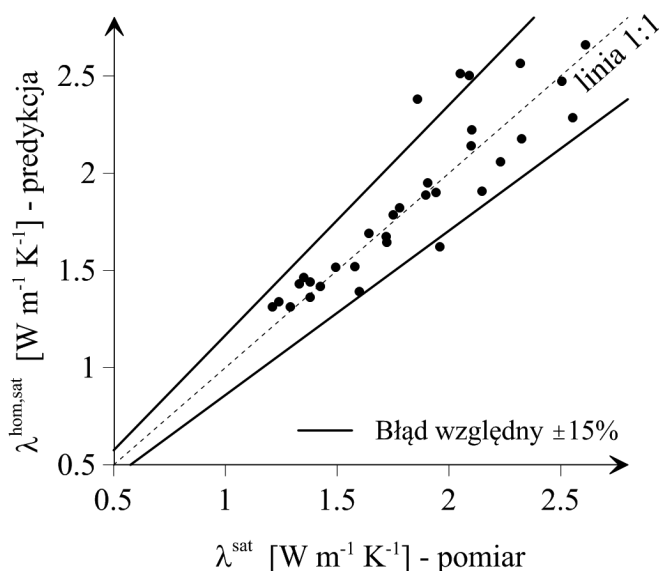
Tabela 7.1<sup>17</sup>. Dane dotyczące analizowanych gruntów oraz wyniki symulacji numerycznych (1–17: badania własne, 18–32: Lu i in. (2007; 2011; 2013) oraz Ochsner i in. (2001))

Lp.	$\phi_{Sa}$ [%]	$\phi_{Si}$ [%]	$\phi_{Cl}$ [%]	$\phi_{mo}$ [%]	$n$ [-]	$\lambda_s^{hom}$ [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\lambda^{hom,sat}$ [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
1	6	58	36	0,25	0,36	<b>3,76</b>	<b>1,89</b>
2	12	45	43	0,42	0,24	<b>3,87</b>	<b>2,47</b>
3	12	49	39	4,52	0,29	<b>3,22</b>	<b>1,95</b>
4	0	46	54	2,15	0,37	<b>3,34</b>	<b>1,69</b>
5	6	58	36	3,62	0,42	<b>3,23</b>	<b>1,52</b>
6	6	24	70	0,18	0,38	<b>3,76</b>	<b>1,82</b>
7	5	37	58	0,35	0,35	<b>3,70</b>	<b>1,90</b>
8	2	57	41	0,05	0,31	<b>3,70</b>	<b>2,06</b>
9	4	50	46	1,20	0,26	<b>3,56</b>	<b>2,22</b>
10	27	32	41	0,08	0,34	<b>4,33</b>	<b>2,18</b>
11	5	37	58	0,38	0,42	<b>3,70</b>	<b>1,64</b>
12	1	92	7	0,05	0,43	<b>3,67</b>	<b>1,62</b>
13	36	28	36	0,23	0,27	<b>4,57</b>	<b>2,66</b>
14	4	42	54	1,65	0,27	<b>3,50</b>	<b>2,14</b>
15	1	57	42	0,10	0,50	<b>3,67</b>	<b>1,42</b>
16	7	33	60	0,05	0,36	<b>3,80</b>	<b>1,91</b>
17	21	40	39	0,65	0,29	<b>4,07</b>	<b>2,28</b>
18	94	1	5	0,09	0,40	<b>6,79</b>	<b>2,56</b>
19	67	21	12	0,86	0,48	<b>5,43</b>	<b>1,79</b>
20	40	49	11	0,49	0,51	<b>4,64</b>	<b>1,52</b>
21	27	51	22	1,19	0,50	<b>4,11</b>	<b>1,44</b>
22	19	54	27	0,39	0,51	<b>4,04</b>	<b>1,43</b>
23	8	60	32	3,02	0,51	<b>3,36</b>	<b>1,31</b>
24	32	38	30	0,27	0,51	<b>4,43</b>	<b>1,46</b>
25	93	1	6	0,07	0,40	<b>6,76</b>	<b>2,51</b>
26	92	7	1	0,60	0,40	<b>6,54</b>	<b>2,50</b>
27	50	41	9	0,25	0,48	<b>4,99</b>	<b>1,68</b>
28	11	70	19	0,84	0,51	<b>3,77</b>	<b>1,39</b>
29	7	50	43	2,09	0,51	<b>3,51</b>	<b>1,34</b>
30	94	1	5	0,09	0,43	<b>6,80</b>	<b>2,38</b>
31	23	64	13	0,90	0,56	<b>4,09</b>	<b>1,31</b>
32	12	56	32	1,10	0,53	<b>3,75</b>	<b>1,36</b>

<sup>17</sup> Pozycja 1–17 to grunty, dla których autor samodzielnie wykonał badania przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia wodą (por. tab 5.1 i 5.2).

Jak wspomniano już wcześniej, analizuje się 32 grunty charakteryzujące się różnymi zawartościami poszczególnych frakcji, materii organicznej oraz wartościami porowatości; 17 spośród 32 wymienionych gruntów to te, dla których badania przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia autor wykonał samodzielnie, stosując do tego celu analizator KD2Pro wraz z sondą igłową TR-1 (stosowaną technikę oraz wyniki badań szczegółowo opisano w rozdziale 5). Dane dotyczące pozostałych 15 gruntów pochodzą z następujących prac: Lu i in. (2007, 2011, 2013) oraz Ochsner i in. (2001). W tabeli 7.1 przedstawiono charakterystykę uziarnienia, procentowy udział materii organicznej oraz wartości porowatości dla wszystkich analizowanych gruntów.

W dwóch skrajnych kolumnach tab. 7.1, wyróżnionych kolorem szarym, zestawiono wyniki symulacji numerycznych w zakresie szacowania przewodności cieplnej: szkieletu gruntowego,  $\lambda_s^{\text{hom}}$  (wartość ta wynika oczywiście z analizy w skali mikro), oraz nasyconego ośrodka gruntowego  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  (rezultat dociekań prowadzonych w skali mezo z uwzględnieniem informacji o lokalnej zmienności przewodności cieplnej, która jest konsekwencją analiz w skali mikro). W dalszych analizach dokonuje się porównania rezultatów uzyskanych z analizy dwuskalowej prowadzonej w ramach obliczeniowej mikromechaniki (rys. 7.1) z wynikami badań przewodności cieplnej gruntów w stanie pełnego nasycenia – rezultaty zestawiono na rys. 7.4. Na wykresie tym ciągłe linie oznaczają granice błędu względnego,  $\pm 15\%$ , natomiast linia przerywana (1:1) to linia idealnego „wpasowania” predykcji wynikającej z symulacji numerycznych do wyniku uzyskanego w trakcie pomiaru laboratoryjnego.



Rys. 7.4. Predykcja przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego (analiza dwuskalowa) względem wartości pomierzonych

Można zaobserwować, że duża część oszacowań znajduje się w granicach kilkuprocentowego błędu względnego. Ponadto, oprócz czterech przypadków, wszystkie pozostałe predykcje, jak widać na rys. 7.4, znajdują się w granicach 15% błędu względnego. Wobec tego sformułowaną w tym rozdziale procedurę numeryczną (w ramach analizy dwuskalowej) należy uznać za zapewniającą bardzo dobre oszacowanie makroskopowej przewodności cieplnej gruntu w stanie pełnego nasycenia. Ponadto duża zgodność predykcji z wynikami badań laboratoryjnych oznacza również, że zaproponowane w poprzednim rozdziale podejście do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego również jest poprawne i zapewnia dobre oszacowanie wartości parametru  $\lambda_s$ . Innymi słowy, rezultaty uzyskane w tym podrozdziale dowodzą poprawności przyjętych w skali mikro założeń o lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego.

Przyjrzyjmy się jednak jeszcze raz wspomnianym wcześniej czterem przypadkom, dla których względny błąd oszacowania jest nieco większy niż 15%. Spośród tych czterech gruntów trzy charakteryzują się ponad 90% zawartością frakcji piaskowej. Dla tych gruntów, obliczona w sposób numeryczny przewodność cieplna przeszacowuje wyniki pomiarowe. Grunt, dla którego przewodność cieplna jest wyraźnie niedoszacowana, charakteryzuje się dużą zawartością frakcji pyłowej (grunt nr 12 w tab. 7.1).

Podane rozważania mogą być konsekwencją następujących założeń przyjętych w analizie dotyczącej przewodności cieplnej szkieletu gruntowego (skala mikro). Po pierwsze, zastosowano wspólny rozkład prawdopodobieństwa dla frakcji pyłowej i ilowej (rys. 6.7). W rzeczywistości średnie wartości przewodności cieplnej minerałów tworzących te frakcje faktycznie są do siebie zbliżone, choć pewne różnice są zauważalne i, jak wspomniano w podrozdziale 2.2, były wskazywane np. w pracach Tiana i in. (2016) oraz Purushothamaraja i Judge'a (1977). Wydaje się zatem, że lepszym podejściem z pewnością byłoby zastosowanie oddzielnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla tych frakcji. Po drugie, dla frakcji piaskowej największe i najmniejsze przewidywane wartości zmiennej losowej, tj. współczynnika przewodności cieplnej, przyjęto w zasadzie jedynie na podstawie informacji o przewodności cieplnej kwarcu. W niektórych przypadkach może to prowadzić do niewielkiego przeszacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, a to w konsekwencji do przeszacowania wartości przewodności gruntu nasyconego.

W konsekwencji, jak zostało to już wspomniane w podrozdziale 6.3, autor uznał za stosowne prowadzenie dalszych dociekań w celu identyfikacji optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla trzech głównych frakcji gruntowych na podstawie wyników laboratoryjnych dotyczących przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia wodą. Zidentyfikowane na podstawie analizy odwrotnej optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa zaprezentowano już na rys. 6.16. Posłużyły one również do stworzenia diagramów trójkątnych umożliwiających szybkie i łatwe określanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ . Jednakże szczegóły dotyczące sformułowania oraz rozwiązania zagadnienia odwrotnego, które umożliwiają identyfikację

optymalnej charakterystyki lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w skali mikro prezentuje się w kolejnym podrozdziale.

## 7.2. Identyfikacja lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej dla morfologii wokselowej

Wszystkie wcześniejsze rozważania dotyczące określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego oraz nasyconego ośrodka gruntowego skupiały się na rozwiązywaniu zagadnień bezpośrednich teorii homogenizacji. W zagadnieniach tych zakładaliśmy lub znaleźliśmy parametry struktury zarówno w odniesieniu do jej geometrii, jak również przestrzennej zmienności współczynnika przewodności cieplnej (przede wszystkim zakładaliśmy *a priori* postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa opisujących lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej w skali mikro). Poszukiwanym parametrem za każdym razem była zastępcza przewodność cieplna dla ujednorodnionego ośrodka gruntowego,  $\lambda_s^{\text{hom}}$  lub  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ .

W analizach prowadzonych w tym podrozdziale formułuje się i rozwiązuje zagadnienie odwrotne teorii homogenizacji. Zakłada się więc, że znana jest odpowiedź makroskopowa nasyconego ośrodka gruntowego (uzyskana na drodze pomiarów laboratoryjnych), a poszukuje się optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa charakteryzujących lokalną zmienność przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego. Postuluje się przy tym, że zmienność ta opisana jest przez trzy odrębne funkcje gęstości prawdopodobieństwa stowarzyszone z trzema głównymi frakcjami gruntowymi,  $f_{\text{Sa}}$  dla frakcji piaskowej,  $f_{\text{Si}}$  dla frakcji pyłowej oraz  $f_{\text{Cl}}$  dla frakcji ilowej. Dla całego zatem ośrodka gruntowego, łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa dana jest zależnością (6.10).

Analizowane w niniejszym podrozdziale zagadnienie odwrotne rozwiązywane jest za pomocą stochastycznej metody optymalizacji, tzw. symulowanego wyżarzania (ang. *simulated annealing*). Dlatego też przed przystąpieniem do rozwiązania omawianego zagadnienia odwrotnego, w pierwszej kolejności, w punkcie 7.2.1. omawia się technikę optymalizacji bazującą na symulowanym wyżarzaniu. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego, którego celem jest identyfikacja lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego prezentuje się w punkcie 7.2.2.

### 7.2.1. Stochastyczna metoda optymalizacji: symulowane wyżarzanie

Mówiąc bardzo ogólnie, symulowane wyżarzanie jest pewnym rodzajem algorytmu heurystycznego, w którym przeszukuje się zbiór potencjalnych rozwiązań proble-

mu (przy czym rozwiązania te pojawiają się z pewnym, kontrolowanym w trakcie procesu, prawdopodobieństwem) w celu wyszukania możliwie najlepszego rozwiązania. Metoda ta została sformułowana niezależnie w dwóch pracach, tj.: Kirkpatrick i in. (1983) oraz Černý (1985). Skuteczność algorytmu symulowanego wyżarzania w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych została potwierdzona w wielu pracach dotyczących, np. rekonstrukcji mikrostruktur ośrodków mikroniejednorodnych (np. Rintoul i Torquato 1997; Yeong i Torquato 1998a, 1998b; Manwart i Hilfer 1999; Talukdar i Torsaeter 2002; Čapek i in. 2009) lub optymalizacji kształtu konstrukcji inżynierskich (np. Anagnostou i in. 1992; Shim i Manoochehri 1997; Sonmez 2007; Sobótka i in. 2013; Sobótka i Łydźba 2014).

Zarówno nazwa, jak i sposób działania algorytmu wynikają z analogii do pewnych zjawisk fizycznych – mowa tu np. o wyżarzaniu stali, a więc procesie obróbki cieplnej polegającym na nagrzaniu materiału do określonej temperatury, przetrzymaniu w tej temperaturze, a następnie na powolnym w pełni kontrolowanym schładzaniu. Kluczowe w całym procesie wyżarzania (jak również w procesie optymalizacji bazującej na symulowanym wyżarzaniu) jest dobór odpowiedniej prędkości schładzania – zbyt szybki spadek temperatury powoduje, że cząsteczki ciała mogą nie zostać ułożone w sposób optymalny. Innymi słowy, może wówczas dojść do chaotycznego rozłożenia się cząstek. Z drugiej strony, przy stopniowym, powolnym schładzaniu cząsteczki oddając energię znajdują bardziej „regularne” położenia, tworząc przy tym równomierne struktury. Prawdopodobieństwo wystąpienia danego stanu energetycznego zwykle opisuje się, stosując współczynnik prawdopodobieństwa Boltzmanna, tj.:

$$P(E) \propto \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \quad (7.3)$$

gdzie  $E$  oznacza energię układu,  $k_B$  jest stałą Boltzmanna, a  $T$  jest temperaturą. Zależność (7.3) jest również podstawą algorytmu optymalizacji opartego na symulowanym wyżarzaniu.

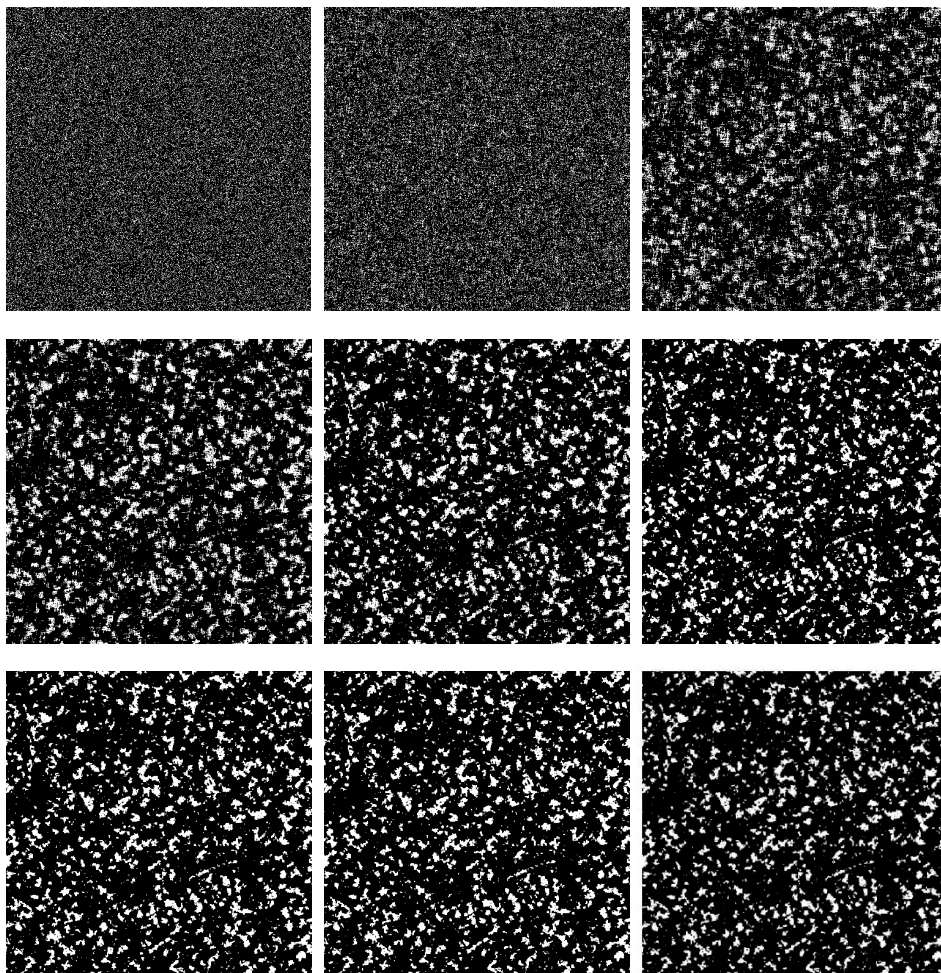
Aby zobrazować charakter i działanie metody symulowanego wyżarzania, autor zdecydował się zaprezentować aplikację tej metody do konkretnego zagadnienia odwrotnego. Wobec tego w dalszej części rozwiązuje się za pomocą stochastycznej optymalizacji problem rekonstrukcji mikrostruktury niejednorodnego ośrodka dwuskładnikowego. Celem rozważanego tutaj zagadnienia jest znalezienie takiej geometrii mikrostruktury (jej binarnego obrazu cyfrowego), która charakteryzuje się zadaną funkcją prawdopodobieństwa dwupunktowego<sup>18</sup>, powiedzmy  $S_2^{\text{cel}}(r)$ . Innymi słowy, dążymy do tego, aby znaleźć takie ułożenie (konfigurację) białych i czarnych pikseli, dla którego funkcja prawdopodobieństwa dwupunktowego jest zgodna z zadaną funkcją  $S_2^{\text{cel}}(r)$ .

---

<sup>18</sup> Funkcję prawdopodobieństwa dwupunktowego omówiono już wcześniej w punkcie 4.4.1.



Ze względu na fakt, iż metoda symulowanego wyżarzania jest algorytmem iteracyjnym, zapoczątkowanie procesu optymalizacji wymaga zdefiniowania pewnej konfiguracji początkowej. Załóżmy, że początkowe ułożenie pikseli odpowiada dwuwymiarowej losowej szachownicy – piksele, biały lub czarny, pojawiają się zatem niezależnie z zadanym prawdopodobieństwem, odpowiednio,  $p$  oraz  $1 - p$ . Początkową konfigurację mikrostruktury przedstawia obraz cyfrowy w lewej, górnej części rys. 7.5.



Rys. 7.5. Wybrane konfiguracje pikseli uzyskane w ramach rekonstrukcji mikrostruktury piaskowca Fontainebleau algorytmem symulowanego wyżarzania

W dowolnym kroku iteracyjnym możemy zdefiniować fikcyjną „energię”  $E^{19}$ , jako (np. Torquato 2002):

$$E = \sum_r \left( S_2(r) - S_2^{\text{cel}}(r) \right)^2 \quad (7.4)$$

przy czym  $S_2(r)$  jest funkcją prawdopodobieństwa dwupunktowego określoną w aktualnym kroku iteracyjnym. Ewolucja obrazu cyfrowego mikrostruktury w celu osiągnięcia funkcji  $S_2^{\text{cel}}(r)$  (a więc minimalizacji „energii” (7.4)) odbywa się przez zamianę składników w dwóch losowo wybranych pikselach. Taka zamiana ma na celu zachowanie zadanego udziału frakcyjnego poszczególnych składników. Jednocześnie powoduje ona zmianę „energii”, tj.  $E \rightarrow E^*$ . Możliwe jest zatem określenie różnicy „energii” jako:

$$\Delta E = E^* - E. \quad (7.5)$$

Nowa konfiguracja pikseli jest akceptowana z pewnym prawdopodobieństwem bazującym na prawie akceptacji wprowadzonym przez Metropolisa i in. (1953):

$$P(\Delta E) = \begin{cases} 1, & \Delta E \leq 0 \\ \exp\left(\frac{-\Delta E}{T^*}\right), & \Delta E > 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Zauważmy zatem, że zgodnie z zależnością (7.6), jeśli różnica „energii”,  $\Delta E \leq 0$ , to nowa konfiguracja akceptowana jest bezwarunkowo. Innymi słowy, konfiguracje nie powodujące zmiany „energii” lub obniżające „energię” są zawsze akceptowane i stanowią „punkt startowy” dla kolejnej iteracji. Co jednak ważne, algorytm symulowanego wyżarzania, ze względu na prawo akceptacji (7.6), również akceptuje konfiguracje „gorsze”, a więc takie, dla których „energia” jest wyższa niż w poprzednim kroku. Dzięki temu algorytm ten potrafi w określonych warunkach wyjść ze znalezionego minimum lokalnego i w kolejnych iteracjach podążać w kierunku rozwiązania optymalnego.

Wartością prawdopodobieństwa, z jakim akceptowane są konfiguracje „gorsze”, steruje się za pomocą fikcyjnej temperatury  $T^*$  (nawiązującej do prawdopodobieństwa wystąpienia danego stanu energetycznego opisanego zależnością (7.3)) stanowiącej tu niejako rolę parametru kontrolnego. Zauważmy, że dla bardzo małych wartości temperatur ( $T^* \rightarrow 0$ ) prawo akceptacji (7.6) staje się „zero-jedynkowe”, co implikuje, że ak-

---

<sup>19</sup> Fikcyjną „energię” należy oczywiście rozumieć jako klasyczną funkcję celu w standardowej procedurze optymalizacji. W literaturze przedmiotu, ze względu na opisany wcześniej sposób działania algorytmu, zazwyczaj używa się jednak określenia „energia”, jako nawiązanie do stanu energetycznego układu cząstek. W niniejszej pracy utrzymuje się to nazewnictwo.

ceptowane są tylko przypadki, gdy  $\Delta E \leq 0$ . Dla odpowiednio wysokich wartości  $T^*$  prawdopodobieństwo wyboru konfiguracji „gorszej” jest dużo większe.

Kluczowy w całym procesie optymalizacji jest zatem odpowiednio dobrany schemat obniżania wartości parametru  $T^*$ . I tutaj właśnie pojawia się bezpośrednie nawiązanie do omawianego wcześniej procesu wyżarzania stali. W algorytmie symulowanego wyżarzania również należy rozpoczynać poszukiwanie rozwiązania od wysokich wartości parametru  $T^*$ , tak aby algorytm mógł z dużym prawdopodobieństwem wybierać konfiguracje „gorsze”. W kolejnych iteracjach fikcyjna temperatura  $T^*$  powinna być relatywnie wolno obniżana. Dla każdej wartości  $T^*$  algorytm powinien wykonać taką liczbę iteracji, która doprowadza do stanów quasi-równowagowych. Innymi słowy, obniżenie wartości fikcyjnej temperatury  $T^*$  powinno odbyć się dopiero wówczas, gdy kolejne zmiany konfiguracji nie powodują już znaczących zmian wartości „energii”. Pod koniec całego procesu optymalizacji wartość  $T^*$  powinna być na tyle mała, że prawdopodobieństwo akceptacji „gorszej” konfiguracji jest bliskie zeru. Zwyczajowo obniżanie wartości fikcyjnej temperatury odbywa się według prostej zależności:

$$T_{i+1}^* = \alpha T_i^* \quad (7.7)$$

gdzie wartość parametru  $\alpha$  zawiera się najczęściej pomiędzy 0,8 a 0,95.

Oprócz doboru odpowiedniego schematu obniżania wartości  $T^*$ , niezwykle ważne są jeszcze dwa inne aspekty. Po pierwsze, wybór początkowej wartości parametru kontrolnego, tj.  $T_0^*$ . Najczęściej wykonuje się wstępne symulacje, a wartość  $T_0^*$  ustala się tak, aby prawdopodobieństwo akceptacji „gorszych” konfiguracji, na początku procesu optymalizacji, było wysokie, np. około 90%. Po drugie, należy również ustalić kryterium zatrzymania procesu optymalizacji. W tym przypadku stosuje się najczęściej jedną z trzech technik. Są to: określenie maksymalnej liczby iteracji, zatrzymanie algorytmu, gdy kolejne kroki nie powodują już poprawy rozwiązania, albo wreszcie zatrzymanie algorytmu w momencie, gdy liczba zaakceptowanych konfiguracji, spośród wszystkich rozważanych ostatnio, spadła poniżej założonej wartości.

Powróćmy zatem do rozważanego przez nas zagadnienia optymalizacyjnego, w którym dążymy do określenia takiej konfiguracji pikseli w binarnym obrazie cyfrowym, która zapewni zadaną funkcję prawdopodobieństwa dwupunktowego  $S_2^{\text{cel}}(r)$  (analityczną postać funkcji  $S_2^{\text{cel}}(r)$  zaczerpnięto z pracy Jiao i in. (2008)). Na rysunku 7.5, oprócz wspomnianej już konfiguracji początkowej (lewy, górny obraz), przedstawiono również obrazy cyfrowe dla kilku wybranych iteracji, wykonanych zgodnie z opisanym algorytmem symulowanego wyżarzania. Ostatni obraz, zlokalizowany w prawej, dolnej części rys. 7.5 jest tym, który uznano za optymalny. Jest to obraz cyfrowy przedstawiający zrekonstruowaną mikrostrukturę piaskowca Fontainebleau, który prezentowano już wcześniej w podrozdziale 4.4 (rys. 4.9). Białe piksele odpowiadają przestrzeni porowej, natomiast czarne charakteryzują szkielet materiału skalnego. Finalną konfigurację pikseli

osiągnięto po 83 iteracjach, w których fikcyjną temperaturę obniżano zgodnie z zależnością (7.7), przy czym przyjęto, że  $\alpha = 0,8$ . W ramach każdej iteracji (a więc ustalonej wartości  $T^*$ ) wykonywano 10 000 kroków, tj. zmian konfiguracji obrazu cyfrowego, polegającej na zamianie składników w dwóch losowo wybranych pikselach.

W dalszej części pracy algorytm symulowanego wyżarzania wykorzystuje się do rozwiązywania złożonych zagadnień odwrotnych w ramach obliczeniowej oraz analitycznej mikromechaniki. Za każdym razem, stosownie do rozważanego zagadnienia, dokonuje się „dedykowanych” zmian opisanego algorytmu. W szczególności dotyczy to zdefiniowania „energii”, doboru odpowiednich wartości parametrów kontrolnych, wyboru kryterium zatrzymania algorytmu czy też, co najważniejsze, sposobu tworzenia kolejnych konfiguracji w celu ewolucji algorytmu do konfiguracji optymalnej.

### 7.2.2. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego

W celu identyfikacji optymalnej charakterystyki lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego formułuje się następujące zagadnienie odwrotne. Jeśli dla pewnej grupy gruntów (przypomnijmy, że w prezentowanych w tej monografii analizach dysponuje się bazą 32 gruntów) na podstawie pomiarów laboratoryjnych, znane są:

- wartość przewodności cieplnej wyznaczona w stanie pełnego nasycenia ( $\lambda^{\text{sat}}$ ),
- zawartość poszczególnych frakcji gruntowych ( $\phi_{\text{Sa}}$ ,  $\phi_{\text{Si}}$ ,  $\phi_{\text{Cl}}$ ),
- zawartość materii organicznej ( $\phi_{\text{mo}}$ ),
- porowatość ( $n$ ),

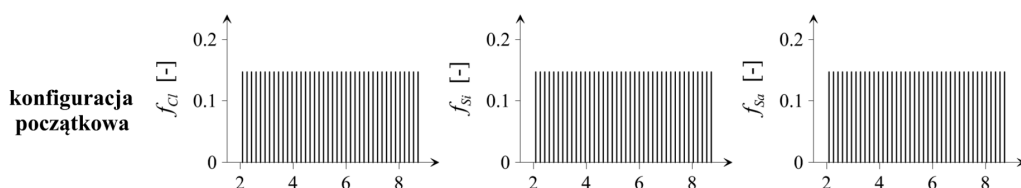
to celem jest zidentyfikowanie optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $f_{\text{Sa}}$ ,  $f_{\text{Si}}$  oraz  $f_{\text{Cl}}$ , tj. takich, które zapewniają możliwie najlepszą predykcję przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ , przy czym predykcja ta uzyskana jest na podstawie analizy dwuskalowej w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki (rys. 7.1).

Sformułowane zagadnienie odwrotne rozwiązuje się, wykorzystując omawianą w poprzednim punkcie metodę symulowanego wyżarzania. W dowolnym zatem kroku iteracyjnym definiuje się fikcyjną „energię” jako (por. ze sformułowaniem (7.4)):

$$E = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \left( \lambda_i^{\text{hom,sat}} - \lambda_i^{\text{sat}} \right)^2 \quad (7.8)$$

gdzie  $N_g$  oznacza liczbę gruntów przyjętych do analizy (rozważa się wszystkie grunty zestawione w tab. 7.1, zatem  $N_g = 32$ ),  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  oznacza numerycznie określoną przewodność cieplną gruntu w stanie pełnego nasycenia (jest to wynik analizy dwuskalowej prezentowanej na rys. 7.1), natomiast  $\lambda^{\text{sat}}$  jest pomierzoną wartością przewodności cieplnej gruntu nasyconego.

Jako konfigurację początkową w metodzie symulowanego wyżarzania przyjmijmy, że zmienność współczynnika przewodności cieplnej, dla każdej z trzech frakcji grun-  
towych, opisana jest rozkładem równomiernym (w ten sposób nie wyróżnia się żadnego ze składników; ponadto każda wartość zmiennej losowej  $\lambda$  jest tak samo prawdopodobna). Założmy dodatkowo, że wszystkie funkcje gęstości prawdopodobieństwa „rozpięte” są na takim samym przedziale, tj. od  $\lambda_{\min} = 2,0$  do  $\lambda_{\max} = 8,8$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]. Należy podkreślić, że w procedurze numerycznej stosuje się dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa – dla każdej gęstości prawdopodobieństwa, przedział  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$  dzieli się na 40 odcinków, każdy o tej samej długości  $\Delta$ . W rezultacie każdemu z przedziałów przypisuje się dyskretną wartość prawdopodobieństwa równą  $f\Delta$ . Konfiguracje początkowe, które służą do określenia początkowej „energii” (7.8), przedstawiono na rys. 7.6.



Rys. 7.6. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa przyjęte jako początkowe w algorytmie symulowanego wyżarzania

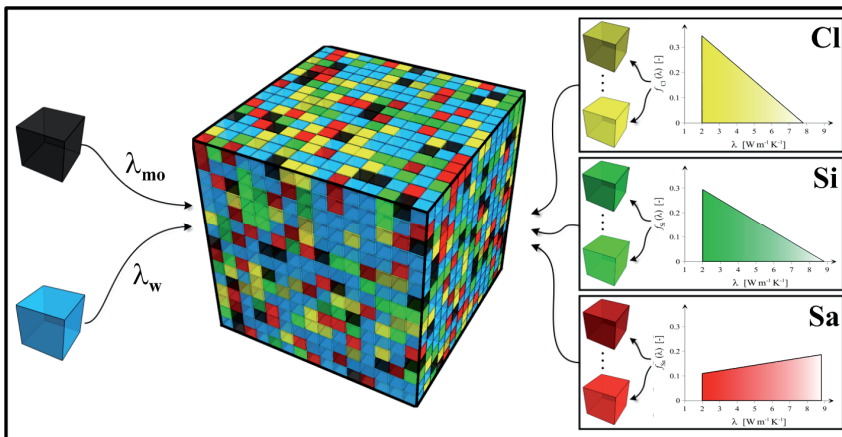
Ewolucja funkcji  $f_{Sa}$ ,  $f_{Si}$  oraz  $f_{Ci}$ , w celu minimalizacji „energii” (7.8), odbywa się poprzez zamianę wartości prawdopodobieństwa dla dwóch losowo wybranych przedziałów. W szczególności, dla dowolnego rozkładu, losuje się dwie wartości z przedziału  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ , powiedzmy, że są to liczby  $\lambda_1$  oraz  $\lambda_2$ . Następnie, dyskretne wartości prawdopodobieństwa, tj.  $f(\lambda_1)\Delta$  oraz  $f(\lambda_2)\Delta$ , zostają odpowiednio zmodyfikowane – jedna z nich zostaje zwiększona, podczas gdy druga pomniejszona o stałą wartość wynoszącą  $5 \cdot 10^{-3}$  początkowej wartości prawdopodobieństwa. Taka zamiana powoduje, iż zachowany zostaje warunek, któremu podlegają poszukiwane funkcje – jako gęstości prawdopodobieństwa suma wszystkich dyskretnych prawdopodobieństw musi wynosić 1. Ponadto za każdym razem sprawdza się czy modyfikacja konfiguracji nie powoduje, że dane prawdopodobieństwo przyjmuje wartości ujemne – takie zmiany są automatycznie odrzucane.

W dalszej kolejności, po dokonaniu zmiany konfiguracji (a więc dla zmodyfikowanych funkcji gęstości prawdopodobieństwa), oblicza się dla wszystkich 32 grun-  
tów, makroskopową przewodność cieplną gruntu,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ . W konsekwencji umożliwia to określenie nowej wartości „energii”  $E^*$  zgodnie z (7.8) oraz różnicę pomiędzy aktualną i poprzednią konfiguracją,  $\Delta E$  (7.5). Aktualna konfiguracja jest zatwierdzana lub odrzucana zgodnie z prawem akceptacji (7.6).

W tym momencie ujawnia się pewna wada metody symulowanego wyżarzania. W ogólności bowiem jest to metoda, której zbieżność do rozwiązania optymalnego jest

relatywnie wolna. Zauważmy, że w rozważanym tutaj zagadnieniu dla każdej nowej konfiguracji, aby określić energię (7.8), konieczne jest wyznaczenie wartości  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  dla wszystkich 32 gruntów. Jeśli więc znalezienie rozwiązania optymalnego wymaga dziesiątek tysięcy iteracji (a tak jest właśnie w tym przypadku), to czas potrzebny do wykonania obliczeń za pomocą „standardowego” komputera PC osiąga ekstremalnie duże wartości. Wobec tego, w dalszych rozważaniach proponuje się zastosować pewne uproszczenia, które nie wpłyną istotnie na wynik końcowy, ale spowodują bardzo wyraźne skrócenie czasu obliczeń. Dalej po krótko prezentuje się stosowane w analizie uproszczenia.

Jak zobrazowano to na rysunku 7.1, ogólnie określenie wartości  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  wymaga niejako dwóch kroków obliczeniowych, tj. w pierwszej kolejności, w skali mikro dokonuje się ujednorodnienia szkieletu gruntowego, a następnie w drugim kroku wykonuje się obliczenia numeryczne w skali mezo. Powoduje, to że za każdym razem określenie wartości  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  dla konkretnego gruntu wymaga zdefiniowania dwóch odrębnych domen obliczeniowych (w skali mikro i w skali mezo) oraz dwukrotnego rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.38). Tymczasem we wcześniejszej pracy autora (Łydźba i in. 2017) pokazano, że równie dobre oszacowanie wartości  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  można uzyskać wtedy, gdy obliczenia wykona się w jednym kroku, tworząc jedną wspólną domenę obliczeniową. Takie podejście jest odpowiednie, gdy w skali mezo nie istnieje separacja skal, tzn. wielkości niejednorodności występujących w szkielecie gruntowym są tego samego rzędu, co wielkość porów. Wówczas procedurę homogenizacji przeprowadza się dla jednej domeny obliczeniowej, bezpośrednio w skali mezo. W domenie tej występują jednocześnie woksele reprezentujące losowe wartości przewodności cieplnej wygenerowane z trzech funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $f_{Cl}$ ,  $f_{Si}$ , i  $f_{Sa}$  oraz woksele, którym przypisuje się deterministyczne wartości przewodności cieplnej reprezentujące materię organiczną oraz wodę. Proces tworzenia takiej domeny obliczeniowej przedstawiono graficznie na rys. 7.7.



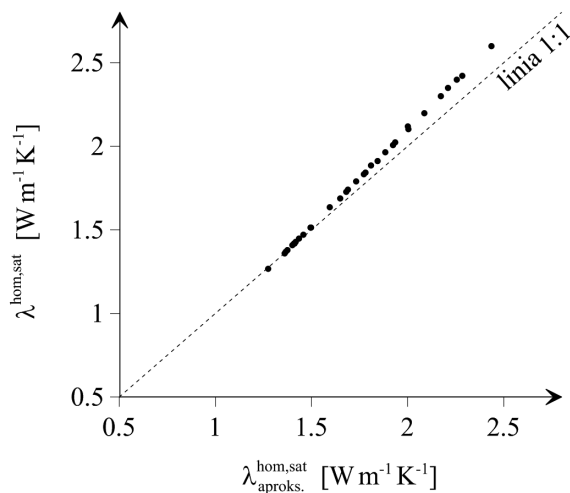
Rys. 7.7. Graficzna prezentacja procedury tworzenia domeny obliczeniowej w przypadku homogenizacji jednokrokowej

Jak wykazano w pracy autora (Łydźba i in., 2017) względny błąd oszacowania  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  według podejścia przedstawionego na rys. 7.7 w stosunku do predykcji wynikającej z homogenizacji dwukrokowej (rys. 7.1) wynosi maksymalnie około 3%. Wobec tego uzasadnione jest więc założenie o możliwości określania  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  z zastosowaniem procedury przedstawionej na rys. 7.7. W konsekwencji powoduje to wyraźne skrócenie czasu obliczeń koniecznych do zakończenia procesu symulowanego wyżarzania. Wciąż jednak, ze względu na dużą liczbę gruntów rozważanych w zagadnieniu odwrotnym, czas obliczeń według wstępnych symulacji przeprowadzonych przez autora okazuje się relatywnie długi.

Wobec tego proponuje się więc zastosowanie kolejnego uproszczenia. Tym razem korzysta się z wyników uzyskanych w innej pracy autora (Stefaniuk i in. 2016), gdzie zaproponowano wzór analityczny, który bardzo dobrze przybliża numerycznie określoną wartość  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ . Zależność ta, po założeniu dyskretnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa (opisujących zmienność  $\lambda$  w obrębie poszczególnych frakcji gruntowych), dana jest w następującej postaci:

$$\lambda_{\text{aprosk.}}^{\text{hom,sat}} = \left\{ \left[ \left( \prod_k \lambda_k^{f_{\text{Cl}}(\lambda_k)\Delta} \right)^{\phi_{\text{Cl}}} \left( \prod_k \lambda_k^{f_{\text{Si}}(\lambda_k)\Delta} \right)^{\phi_{\text{Si}}} \left( \prod_k \lambda_k^{f_{\text{Sa}}(\lambda_k)\Delta} \right)^{\phi_{\text{Sa}}} \right]^{1-\phi_{\text{mo}}} \lambda_{\text{mo}}^{\phi_{\text{mo}}} \right\}^{1-n} \lambda_{\text{w}}^n \quad (7.9)$$

gdzie  $\lambda_k$  oznacza oczywiście dyskretną wartość współczynnika przewodności cieplnej z przedziału  $[\lambda_{\text{min}}; \lambda_{\text{max}}]$ .



Rys. 7.8. Numerycznie określona wartość przewodności cieplnej  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  względem wartości określonych za pomocą wzoru aproksymacyjnego (7.9)

Na rysunku 7.8 zaprezentowano porównanie wartości makroskopowej przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia wodą uzyskanych za pomocą rozwiązania numerycznego oraz wzoru analitycznego (7.9). Wyraźnie widać, że jakość aproksymacji

pogarsza się wraz ze wzrostem wartości makroskopowej przewodności cieplnej, przy czym objawia się to w taki sposób, że wzór (7.9) nie doszacowuje wartości  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ . Jednak różnica pomiędzy wartościami określonymi w sposób numeryczny oraz analityczny jest na tyle mała, że zdaniem autora, upoważnia to w procedurze optymalizacyjnej do skorzystania z prostej formuły analitycznej w zamian za wykonywanie skomplikowanych i czasochłonnych obliczeń numerycznych.

W rezultacie podanych uproszczeń aktualna konfiguracja jest zatwierdzana/odrzucała zgodnie z prawem akceptacji (7.6), przy czym fikcyjną „energię” określa się jako:

$$E = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \left( \lambda_{\text{aprosks.},i}^{\text{hom,sat}} - \lambda_i^{\text{sat}} \right)^2 \quad (7.10)$$

Wraz z postępującymi iteracjami algorytmu, fikcyjną temperaturę  $T^*$  obniża się zgodnie z zależnością (7.7), przy czym przyjęto, że wartość współczynnika  $\alpha$  wynosi 0,9. W ramach każdej iteracji (a więc ustalonej wartości  $T^*$ ) wykonuje się 1000 kroków, tj. zmian konfiguracji funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Początkową wartość fikcyjnej temperatury, tj.  $T_0^*$ , określono tak, aby prawdopodobieństwo akceptacji „gorszych” konfiguracji na początku procesu optymalizacji wynosiło około 90%. W dalszym ciągu przyjrzymy się rezultatom uzyskanym z wykorzystaniem algorytmu stochastycznej optymalizacji.

Pierwszy oraz drugi wiersz na rys. 7.9 przedstawia konfiguracje uzyskane po, odpowiednio, 10 oraz 20 iteracjach algorytmu (zauważmy, że np. 10 iteracji oznacza tak naprawdę, że przeprowadzono 10 000 zmian konfiguracji). W ostatnim wierszu na rys. 7.9 zestawiono rozkłady funkcji  $f_{\text{Sa}}$ ,  $f_{\text{Si}}$  oraz  $f_{\text{Cl}}$  zidentyfikowane jako optymalne. Kryterium zatrzymania przyjęto, w taki sposób, że algorytm zatrzymywano wówczas, gdy następujące po sobie 3 kolejne iteracje nie powodowały już „wyraźnej” poprawy rozwiązania. Optymalne rozkłady funkcji gęstości prawdopodobieństwa otrzymano po 50 iteracjach.

W dalszej kolejności zidentyfikowane rozkłady dyskretne aproksymowano ciągłymi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa. Uzyskane analityczne formuły dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa są następujące:

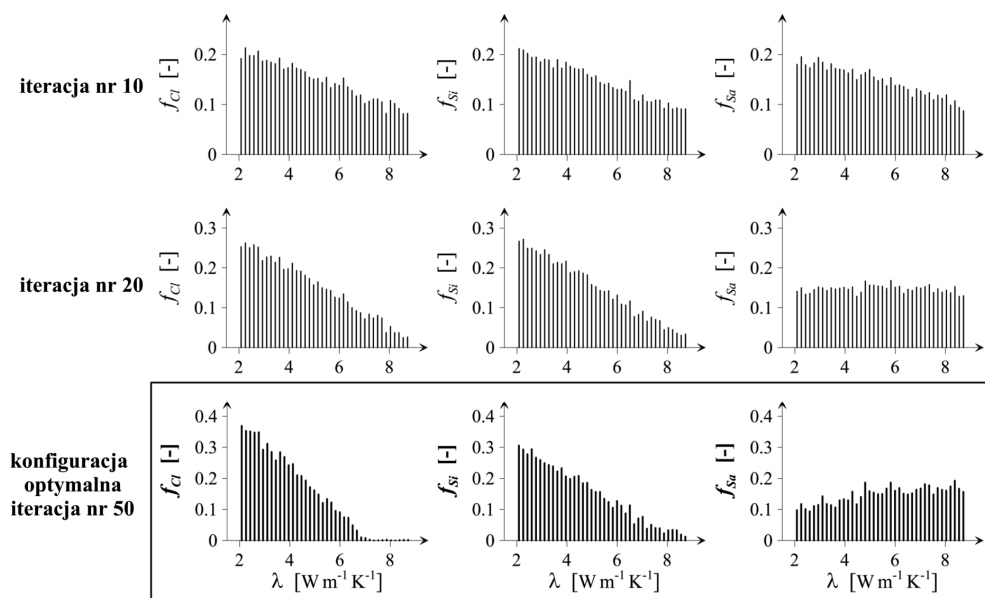
$$f_{\text{Cl}}(\lambda) = \begin{cases} -5,945 \times 10^{-2} \lambda + 4,637 \times 10^{-1} & \text{dla } \lambda \in [2; 7,8] \\ 0 & \text{dla } \lambda \notin [2; 7,8] \end{cases}$$

$$f_{\text{Si}}(\lambda) = \begin{cases} -4,325 \times 10^{-2} \lambda + 3,806 \times 10^{-1} & \text{dla } \lambda \in [2; 8,8] \\ 0 & \text{dla } \lambda \notin [2; 8,8] \end{cases} \quad (7.11)$$

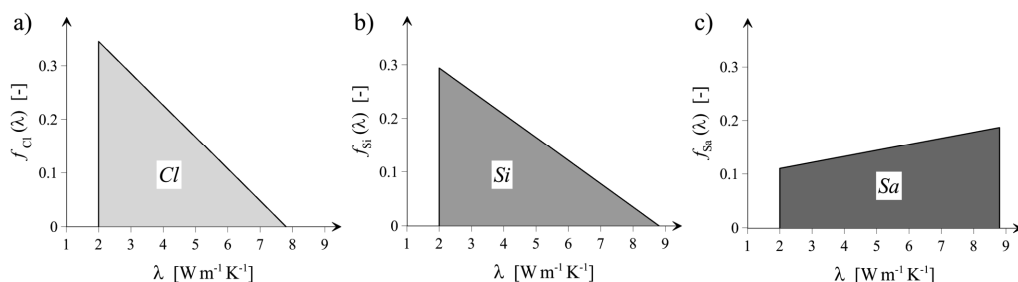
$$f_{\text{Sa}}(\lambda) = \begin{cases} 1,136 \times 10^{-2} \lambda + 8,727 \times 10^{-2} & \text{dla } \lambda \in [2; 8,8] \\ 0 & \text{dla } \lambda \notin [2; 8,8] \end{cases}$$



Funkcje te, dla poszczególnych frakcji gruntowych, przedstawiono już na rys. 6.16, jednakże w celu ułatwienia czytelnikowi śledzenia rozważań prowadzonych w tym rozdziale, przedstawiono je ponownie na rys. 7.10. Łatwo zauważyć, że dla frakcji ilowej (Cl) i pyłowej (Si) przebiegi funkcji są do siebie bardzo zbliżone. W efekcie wartości oczekiwane przewodności cieplnych wynikające z tych rozkładów również są na podobnym poziomie. Jednakże dla funkcji  $f_{Cl}$  gęstość w większym stopniu koncentruje się w dolnych zakresach wartości współczynnika przewodności cieplnej, co prawdopodobnie skutkuje tym, iż wartość oczekiwana współczynnika przewodności cieplnej jest jednak nieco niższa niż dla frakcji pyłowej. Zidentyfikowany rozkład dla frakcji piaskowej,  $f_{Sa}$ , wyraźnie odbiega od dwóch pozostałych, przypominając swoim kształtem rozkład równomierny.



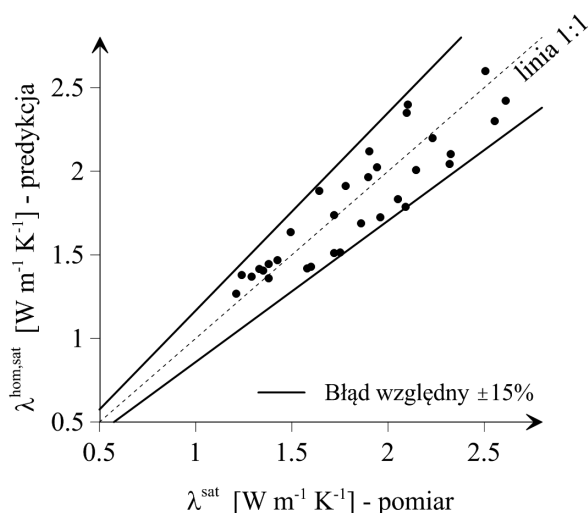
Rys. 7.9. Ewolucja funkcji gęstości prawdopodobieństwa (dla poszczególnych frakcji gruntowych) uzyskanych na podstawie algorytmu symulowanego wyżarzania



Rys. 7.10. Ciągłe funkcje gęstości prawdopodobieństwa uzyskane na podstawie zidentyfikowanych rozkładów dyskretnych: (a) frakcja ilowa; (b) frakcja pyłowa; (c) frakcja piaskowa

Zrekonstruowane w opisany wcześniej sposób rozkłady prawdopodobieństwa (rys. 7.10) wykorzystano następnie w celu określenia predykcji makroskopowej przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia. Finalnie skorzystano oczywiście z rozwiązania numerycznego w ramach modelowania dwuskalowego, zgodne z koncepcją zaprezentowaną na rys. 7.1. Porównanie predykcji  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  względem wartości pomierzonych  $\lambda^{\text{sat}}$  przedstawiono na rys. 7.11.

Można zauważyć, że, wykorzystując optymalne rozkłady prawdopodobieństwa (7.11), uzyskuje się poprawę predykcji makroskopowej przewodności cieplnej gruntu w stanie pełnego nasycenia względem wyników uzyskanych dla pierwotnej propozycji, w której *a priori* zakładano postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa (por. rys. 7.4). Przez poprawę predykcji rozumie się tutaj lepszą zgodność pomiędzy wynikami pomiarów a rezultatami uzyskanymi z symulacji numerycznych – zauważmy, że optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa zapewniają, że wszystkie predykcje znajdują się w granicach 15% błędu względnego (rys. 7.11).



Rys. 7.11. Predykcja przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego (analiza dwuskalowa) względem wartości pomierzonych – rezultaty uzyskane z wykorzystaniem zidentyfikowanych optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa (7.11)

### 7.3. Morfologia polikrystaliczna: analityczna mikromechanika

Podobnie, jak w przypadku prezentowanych analiz, rozważania prowadzone w niniejszym podrozdziale są kontynuacją dociekań zawartych w podrozdziale 6.4, doty-

czących określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ , z uwzględnieniem lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$  w skali mikro. Weryfikacji zaproponowanej tam procedury określania wartości  $\lambda_s$  dokonuje się przez porównanie predykcji wynikającej z modelowania w ramach schematu samouzgodnionego pola z wynikami badań dla gruntów w stanie pełnego nasycenia. Poniżej formułuje się więc metodę określania wartości  $\lambda^{\text{sat}}$  w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki.

Ponownie założmy więc, że w skali mikro szkielet gruntowy utworzony jest z trzech składników: (1) frakcja pyłowa i ilowa, dla których lokalną zmienność przewodności cieplnej opisuje gęstość prawdopodobieństwa  $f_{\text{Cl+Si}}$  (rys. 6.7a), (2) frakcja piaszkowa, w obrębie której fluktuacje przewodności cieplnej charakteryzowane są gęstością prawdopodobieństwa,  $f_{\text{Sa}}$  (rys. 6.7b) oraz (3) materia organiczna o ustalonej/deterministycznej przewodności cieplnej  $\lambda_{\text{mo}}$ . Podobnie, jak wcześniej, przyjmijmy założenie, że każdy ze składników szkieletu gruntowego modelowany jest inną „rodziną” wtrąceń charakteryzowaną odrębnym parametrem  $\theta$  (zgodnie z zależnością (6.13)), tj.  $\theta_{\text{Cl+Si}}$ ,  $\theta_{\text{Sa}}$  oraz  $\theta_{\text{mo}}$ . Dodatkowo mikrostrukturę nasyconego ośrodka gruntowego uzupełnia się o składnik (4) reprezentujący wodę zawartą w przestrzeni porowej. Przewodność cieplna wody charakteryzowana jest parametrem  $\lambda_w$ , a jej wartość przyjmuje się zgodnie z tab. 2.1. W rezultacie wartość makroskopowej przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego w ujęciu schematu samouzgodnionego pola można wyrazić następującą zależnością (por. np. z (6.11)):

$$\lambda^{\text{hom,sat}} = \frac{(1-n)\left\{(1-\phi_{\text{mo}})\left[\phi_{\text{Cl+Si}}C_{\text{Cl+Si}}^{\lambda} + \phi_{\text{Sa}}C_{\text{Sa}}^{\lambda}\right] + \phi_{\text{mo}}\lambda_{\text{mo}}P^{\text{mo,hom}}\right\} + n\lambda_w P^{\text{w,hom}}}{(1-n)\left\{(1-\phi_{\text{mo}})\left[\phi_{\text{Cl+Si}}C_{\text{Cl+Si}} + \phi_{\text{Sa}}C_{\text{Sa}}\right] + \phi_{\text{mo}}P^{\text{mo,hom}}\right\} + nP^{\text{w,hom}}} \quad (7.12)$$

W wyrażeniu (7.12), w celu uproszczenia zapisu, zastosowano następujące zależności:

$$C_{\text{Cl+Si}}^{\lambda} = \int_{\lambda_{\text{Cl+Si}}^{\text{min}}}^{\lambda_{\text{Cl+Si}}^{\text{max}}} \lambda P^{\text{Cl+Si,hom}} f_{\text{Cl+Si}} d\lambda, \quad C_{\text{Cl+Si}} = \int_{\lambda_{\text{Cl+Si}}^{\text{min}}}^{\lambda_{\text{Cl+Si}}^{\text{max}}} P^{\text{Cl+Si,hom}} f_{\text{Cl+Si}} d\lambda \quad (7.13)$$

oraz

$$C_{\text{Sa}}^{\lambda} = \int_{\lambda_{\text{Sa}}^{\text{min}}}^{\lambda_{\text{Sa}}^{\text{max}}} \lambda P^{\text{Sa,hom}} f_{\text{Sa}} d\lambda, \quad C_{\text{Sa}} = \int_{\lambda_{\text{Sa}}^{\text{min}}}^{\lambda_{\text{Sa}}^{\text{max}}} P^{\text{Sa,hom}} f_{\text{Sa}} d\lambda \quad (7.14)$$

Ponadto obecne w równaniu (7.12) operatory lokalizacji dla poszczególnych składników określa się na podstawie zależności (4.30), tj:

$$P^{j,\text{hom}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_j - \lambda^{\text{hom,sat}}}{\lambda^{\text{hom,sat}}} \right)^{-1} \quad (7.15)$$

gdzie, podobnie jak w analizach prowadzonych w podrozdziale 6.4, określając wartość operatora lokalizacji dla konkretnego składnika, indeks  $j$ , obecny w równaniu (7.15), należy oczywiście zamienić na oznaczenie analizowanego komponentu, tj.: „Cl+Si”, „Sa”, „mo” lub „w”. Jednocześnie w dalszych analizach zakłada się, że wtrącenia charakteryzujące wodę, w szczególności ich geometria, opisane są parametrem kształtu  $\theta_w$  (zależn. (6.13)).

Ze względu na omawianą już wcześniej charakterystykę schematu samouzgodnionego pola, ponownie wszystkie prezentowane w tym podrozdziale wyniki zostały uzyskane z zastosowaniem metody Newtona. W konsekwencji kolejne przybliżenia rozwiązania dane są następującym wzorem rekurencyjnym (por. z zależn. (6.14)):

$$\lambda^{\text{hom,sat}} [i+1] = \lambda^{\text{hom,sat}} [i] - \frac{g(\lambda^{\text{hom,sat}} [i])}{g'(\lambda^{\text{hom,sat}} [i])}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.16)$$

gdzie  $[i]$  oznacza numer kolejnej iteracji, natomiast funkcja  $g$  wyrażona jest jako różnica lewej i prawej strony równania (7.12), tj.:

$$\begin{aligned} g(\lambda^{\text{hom,sat}} [i]) &= \\ &= \lambda^{\text{hom,sat}} [i] - \frac{(1-n)\left\{(1-\phi_{\text{mo}})\left[\phi_{\text{Cl+Si}} C_{\text{Cl+Si}}^\lambda + \phi_{\text{Sa}} C_{\text{Sa}}^\lambda\right] + \phi_{\text{mo}} \lambda_{\text{mo}} P^{\text{mo,hom}}\right\} + n\lambda_w P^{\text{w,hom}}}{(1-n)\left\{(1-\phi_{\text{mo}})\left[\phi_{\text{Cl+Si}} C_{\text{Cl+Si}} + \phi_{\text{Sa}} C_{\text{Sa}}\right] + \phi_{\text{mo}} P^{\text{mo,hom}}\right\} + nP^{\text{w,hom}}} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Analogicznie do określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, tak i w analizach dotyczących makroskopowej przewodności cieplnej gruntu nasyconego, w ogólnym przypadku równanie

$$g(\lambda^{\text{hom,sat}}) = 0 \quad (7.18)$$

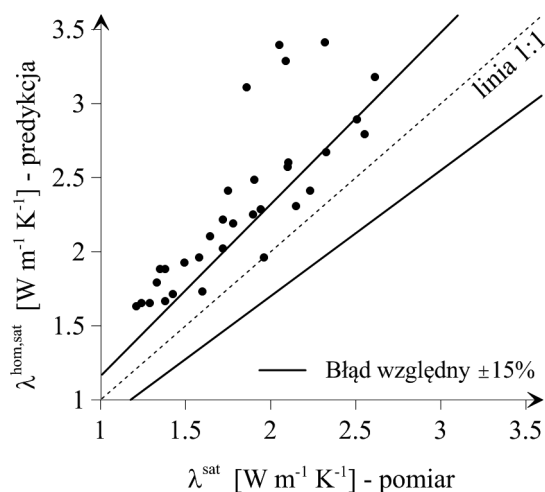
może mieć więcej niż jedno rozwiązanie, przy czym możliwe są również nieakceptowalne fizycznie rozwiązania w postaci ujemnych wartości przewodności cieplnej. Ponownie wstępne analizy wykazały, że w celu zidentyfikowania poprawnej wartości przewodności cieplnej,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ , proces iteracyjny należy rozpoczynać od założenia możliwie najwyższej wartości początkowej,  $\lambda^{\text{hom,sat}} [i = 0]$ , np. równej górnemu ograniczeniu Hashina–Shtrikmana. Przyjęcie takiej wartości początkowej gwarantuje uzyskanie poprawnego rozwiązania, przy czym zbieżność ponownie jest bardzo szybka – kilka iteracji okazywało się wystarczające do uzyskania poprawnej predykcji wartości  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ .

Zaproponowaną procedurę stosuje się do 32 analizowanych już wcześniej gruntów – zestawiono je w tab. 7.1. W pierwszej kolejności dokonuje się predykcji przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego, zakładając, że morfologia mikrostruktury

ry utworzona jest z cząstek sferycznych, tzn. dla wszystkich składników (od (1) do (4)) przyjmuje się, że wartość parametru  $\theta$  wynosi 1. Porównanie wartości uzyskanych z modelowania schematem samouzgodnionego pola względem wyników pomiarów laboratoryjnych przedstawiono na rys. 7.12.

Obserwując otrzymane rezultaty wyraźnie widać, że zaproponowany w pierwszym podejściu typ morfologii mikrostruktury, w którym wszystkie składniki modelowane są wtrąceniami sferycznymi ( $\theta = 1$ ), nie jest odpowiedni dla rozważanego tutaj przypadku nasyconego ośrodka gruntowego. W zasadzie dla wszystkich 32 gruntów predykcja uzyskana przez schemat samouzgodnionego pola przeszacowuje wyniki pomiarów laboratoryjnych.

Aby wykazać istotny wpływ morfologii mikrostruktury na oszacowanie makroskopowej przewodności cieplnej gruntu w stanie pełnego nasycenia wodą, w dalszej części rozdziału prezentuje się wyniki analiz, w których uziemia się parametr kształtu,  $\theta$ , dla poszczególnych składników tworzących analizowany ośrodek. Rezultaty przedstawiono graficznie na rys. 7.13 i 7.14. W szczególności, na każdym z tych rysunków w punkcie (a) przedstawia się predykcję prezentowaną już wcześniej, tj. gdy wszystkie składniki modelowane są jako sfery (są to te same rezultaty co na rys. 7.12). Pozostałe trzy wykresy, tj. (b), (c) oraz (d), odpowiadają przypadkowi, gdy jednemu ze składników przypisuje się inną wartość parametru  $\theta$ , podczas gdy pozostałe składniki mikrostruktury wciąż zachowują kształt sferyczny ( $\theta = 1$ ). Rozważono dwie różne wartości parametru  $\theta$ , tj. 0,1 (rys. 7.13) oraz 0,01 (rys. 7.14). W szczególności na rys. 7.13 i 7.14 w punktach (b), (c) i (d) uziemia się parametr kształtu, odpowiednio, dla wody ( $\theta_w$ ), frakcji iłowej i pyłowej ( $\theta_{Cl+Si}$ ) oraz materii organicznej ( $\theta_{mo}$ ).

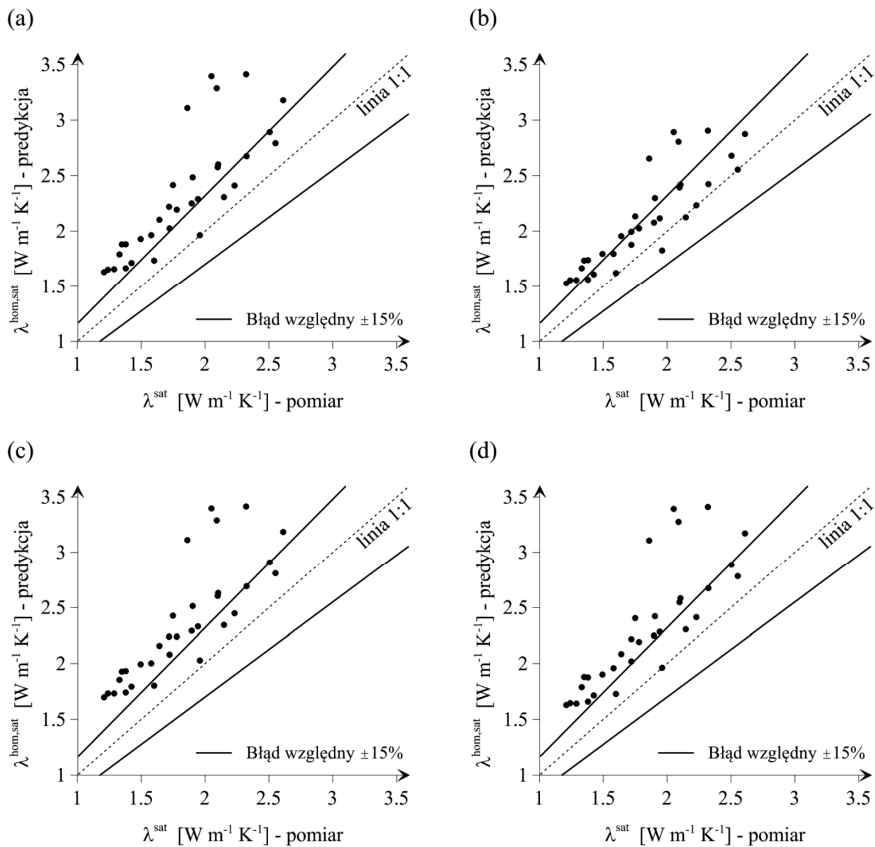


Rys. 7.12. Predykcja przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego (schemat samouzgodnionego pola) względem wartości pomierzonych

Jednocześnie w celu ułatwienia porównywania otrzymanych rezultatów w tab. 7.2 zestawiono dla każdego przypadku wartość błędu średniokwadratowego,  $MSE$ , określoną według następującej zależności:

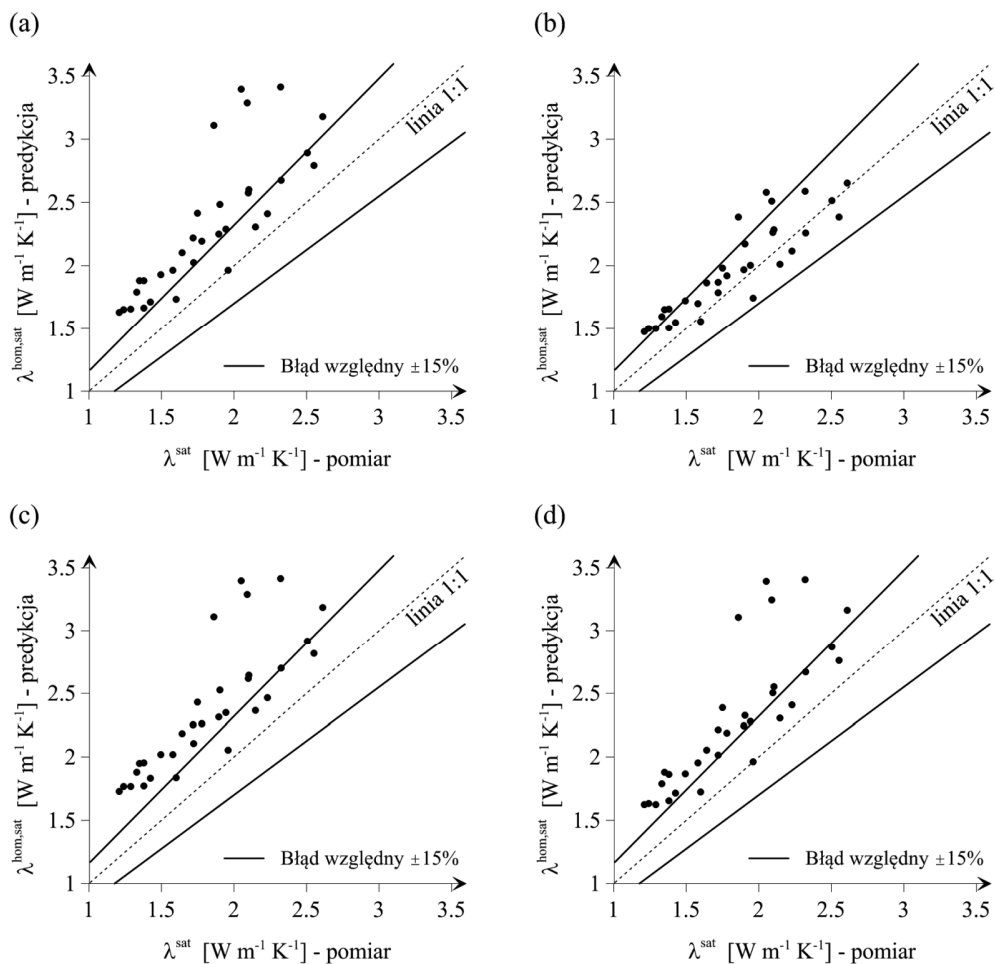
$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{N_g} (\lambda_i^{\text{hom,sat}} - \lambda_i^{\text{sat}})^2}{N_g} \quad (7.19)$$

gdzie  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  oraz  $\lambda^{\text{sat}}$  oznaczają wartości przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego określone, odpowiednio, schematem samouzgodnionego pola (predykcja) oraz na podstawie badań laboratoryjnych (pomiar). W tabeli tej w ostatniej kolumnie podano również informację o tym, na którym z rysunków zawarte są wyniki dotyczące konkretnego przypadku.



Rys. 7.13. Predykcja przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego (schemat samouzgodnionego pola) względem wartości pomierzonych:

(a) wszystkie składniki modelowane jako sfery; (b)  $\theta_w = 0,1$ ; (c)  $\theta_{\text{Cl+Si}} = 0,1$ ; (d)  $\theta_{\text{mo}} = 0,1$



Rys. 7.14. Predykcja przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego (schemat samouzgodnionego pola) względem wartości pomierzonych:  
 (a) wszystkie składniki modelowane jako sfery; (b)  $\theta_w = 0,01$ ; (c)  $\theta_{\text{Cl+Si}} = 0,01$ ; (d)  $\theta_{\text{mo}} = 0,01$

Przeprowadzona w niniejszym rozdziale analiza wskazuje, że rodzaj mikrostruktury wykorzystanej w schemacie samouzgodnionego pola istotnie wpływa na predykcję wartości makroskopowej przewodności cieplnej gruntu nasyconego,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$ . Zauważmy, że największy wpływ na jakość predykcji ma zmiana parametru  $\theta$  opisującego kształt wtrąceń elipsoidalnych charakteryzujących wodę (patrz rys. 7.13 i 7.14 oraz tab. 7.2). Istotne jest jednak to, iż całkiem dobrą zgodność predykcji samouzgodnionego pola z wynikami pomiarów laboratoryjnych uzyskano dla przypadku, gdy parametr  $\theta_w = 0,01$  (podczas, gdy pozostałe składniki mikrostruktury charakteryzowane są parametrem  $\theta = 1$ ). Przypadek ten zaznaczono w tab. 7.2 kolorem szarym.

Tabela 7.2. Wartość błędu średniokwadratowego w zależności od przyjętej morfologii mikrostruktury charakteryzowanej parametrem  $\theta$

$\theta_{Cl+Si}$	$\theta_{Sa}$	$\theta_{mo}$	$\theta_w$	$MSE$ ( $Wm^{-1}K^{-1}$ ) <sup>2</sup>	Rysunek
1	1	1	1	0,334	7.12a, 7.13a
1	1	1	0,1	0,124	7.12b
0,1	1	1	1	0,364	7.12c
1	1	0,1	1	0,325	7.12d
1	1	1	0,01	0,054	7.13b
0,01	1	1	1	0,380	7.13c
1	1	0,01	1	0,312	7.13d

W konsekwencji prezentowanych analiz można stwierdzić, że poprawne modelowanie makroskopowej przewodności cieplnej gruntu nasyconego, w ujęciu analitycznej mikromechaniki, z pewnością jest możliwe (potwierdzają to chociażby satysfakcjonujące wyniki uzyskane w przypadku, gdy parametr  $\theta_w = 0,01$  (rys. 7.13b)). Wymaga to jednak dodatkowych analiz w celu wyznaczenia optymalnej charakterystyki lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego oraz doboru optymalnej morfologii mikrostruktury ośrodka zastępczego (wartości parametrów  $\theta$  dla poszczególnych składników gruntu). Takie analizy prowadzi się w kolejnym podrozdziale.

## 7.4. Identyfikacja lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej dla morfologii polikrystalicznej

Analogicznie do przypadku identyfikacji lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$  w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki, zakłada się, że znana jest odpowiedź makroskopowa nasyconego ośrodka gruntowego (wynik pomiarów laboratoryjnych,  $\lambda^{sat}$ ), a poszukuje się optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa charakteryzujących lokalną zmienność przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego. Ponownie przyjmuje się więc, że lokalna fluktuacja wartości  $\lambda$  opisana jest przez trzy odrębne funkcje gęstości prawdopodobieństwa stowarzyszone z trzema głównymi frakcjami gruntowymi,  $f_{Sa}$  dla frakcji piaskowej,  $f_{Si}$  dla frakcji pyłowej oraz  $f_{Cl}$  dla frakcji ilowej. W efekcie dla całego ośrodka gruntowego łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa dana jest zależnością (6.10).

Zauważmy, że rozwiązywane tutaj zagadnienie odwrotne znacząco różni się jednak od tego, które sformułowano w przypadku obliczeniowej mikromechaniki. Wówczas geometria w sensie morfologii mikrostruktury była zakładana *a priori*, a poszukiwanymi były tylko i wyłącznie optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa  $f_{Sa}$ ,



$f_{Si}$  oraz  $f_{Cl}$ . W przypadku analitycznej mikromechaniki, jak wykazano w poprzednim podrozdziale, w celu uzyskania poprawnej predykcji przewodności cieplnej  $\lambda^{sat}$  konieczny jest również dobór optymalnej morfologii ośrodka zastępczego, tj. wyznaczenie optymalnych wartości parametrów  $\theta$  dla składników ośrodka. W konsekwencji, celem formułowanego i rozwiązywanego tutaj zagadnienia odwrotnego jest jednoczesna identyfikacja optymalnej charakterystyki lokalnej zmienności przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego oraz optymalnej morfologii mikrostruktury.

Zidentyfikowane na podstawie analizy odwrotnej optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa w ramach modelowania schematem samouzgodnionego pola zaprezentowano już na rys. 6.29. Jednakże szczegóły dotyczące sformułowania oraz rozwiązania zagadnienia odwrotnego, które w rezultacie prowadzi do identyfikacji optymalnej charakterystyki lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w skali mikro, prezentuje się w kolejnym podrozdziale

### 7.4.1. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego

W dalszej części podrozdziału formułuje się i rozwiązuje następujące zagadnienie odwrotne. Jeśli dla pewnej grupy gruntów (przypomnijmy, że w prezentowanych w tej monografii analizach dysponuje się bazą 32 gruntów) na podstawie pomiarów laboratoryjnych, znane są:

- wartość przewodności cieplnej wyznaczona w stanie pełnego nasycenia ( $\lambda^{sat}$ ),
- zawartość poszczególnych frakcji gruntowych ( $\phi_{Sa}$ ,  $\phi_{Si}$ ,  $\phi_{Cl}$ ),
- zawartość materii organicznej ( $\phi_{mo}$ ),
- porowatość ( $n$ ),

to celem jest zidentyfikowanie:

- optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $f_{Cl}$ ,  $f_{Si}$ ,  $f_{Sa}$ ,
- optymalnych wartości współczynników opisujących kształty wtrąceń, z których utworzona jest mikrostruktura ośrodka zastępczego, tj.  $\theta_{Cl}$ ,  $\theta_{mo}$ ,  $\theta_w$ ,

tj. takich, które zapewniają możliwie najlepszą predykcję przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego,  $\lambda^{hom,sat}$ , przy czym predykcja ta uzyskana jest na podstawie schematu samouzgodnionego pola według następującej zależności:

$$\lambda^{hom,sat} = \frac{(1-n)\left\{(1-\phi_{mo})\left[\phi_{Cl}C_{Cl}^{\lambda} + \phi_{Si}C_{Si}^{\lambda} + \phi_{Sa}C_{Sa}^{\lambda}\right] + \phi_{mo}\lambda_{mo}P^{mo,hom}\right\} + n\lambda_w P^{w,hom}}{(1-n)\left\{(1-\phi_{mo})\left[\phi_{Cl}C_{Cl} + \phi_{Si}C_{Si} + \phi_{Sa}C_{Sa}\right] + \phi_{mo}P^{mo,hom}\right\} + nP^{w,hom}} \quad (7.20)$$

gdzie

$$C_{Cl}^{\lambda} = \int_{\lambda_{Cl}^{min}}^{\lambda_{Cl}^{max}} \lambda P^{Cl,hom} f_{Cl} d\lambda, \quad C_{Cl} = \int_{\lambda_{Cl}^{min}}^{\lambda_{Cl}^{max}} P^{Cl,hom} f_{Cl} d\lambda \quad (7.21)$$

oraz

$$C_{Si}^\lambda = \int_{\lambda_{Si}^{\min}}^{\lambda_{Si}^{\max}} \lambda P^{Si, \text{hom}} f_{Si} d\lambda, \quad C_{Si} = \int_{\lambda_{Si}^{\min}}^{\lambda_{Si}^{\max}} P^{Si, \text{hom}} f_{Si} d\lambda \quad (7.22)$$

Ponadto współczynniki  $C_{Sa}^\lambda$  oraz  $C_{Sa}$  określa się zgodnie z zależnością (7.14), natomiast operatory lokalizacji według równania (7.15). Ponownie, w celu określenia wartości operatora lokalizacji dla konkretnego składnika, indeks  $j$ , obecny w równaniu (7.15), należy zamienić na oznaczenie analizowanego komponentu, tj.: „Cl”, „Si”, „Sa”, „mo” lub „w”.

Zauważmy, że w sformułowanym zagadnieniu odwrotnym nie poszukuje się współczynników kształtu dla frakcji piaskowej oraz pyłowej. Podobnie, jak w analizach dotyczących przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, zakłada się, że ziarna tworzące te frakcje mają dość regularne kształty, w konsekwencji czego przyjmuje się, że cząstki w obrębie tych frakcji modelowane są kształtami sferycznymi, tj.  $\theta_{Si} = \theta_{Sa} = 1$ . Zwróćmy jednak uwagę na fakt, iż pomimo tego, że w zagadnieniu odwrotnym poszukuje się jedynie trzech parametrów mikrostruktury ( $\theta_{Cl}$ ,  $\theta_{mo}$ ,  $\theta_w$ ), to rozwiązywane tu zagadnienie jest zdecydowanie trudniejsze w porównaniu do rozważanego w punkcie 7.2.2 ze względu na fakt, iż wymaga ono jednoczesnej optymalizacji lokalnej zmienności  $\lambda$  oraz morfologii mikrostruktury zastępczej. O ile identyfikacja mikrostruktury zastępczej sprowadza się po prostu do wyznaczenia optymalnych wartości parametrów  $\theta_{Cl}$ ,  $\theta_{mo}$ ,  $\theta_w$ , to określenie lokalnej zmienności współczynnika  $\lambda$  wymaga dodatkowego wyjaśnienia.

Jak już sygnalizowano wcześniej, przyjmuje się, że zmienność współczynnika przewodności cieplnej w obrębie każdej z trzech frakcji gruntowych charakteryzowana jest oddzielną funkcją gęstości prawdopodobieństwa, tj.  $f_{Cl}$ ,  $f_{Si}$  oraz  $f_{Sa}$ . Ponadto w dalszych analizach zakłada się, że zmienna losowa,  $\lambda$ , opisana jest ciągłym rozkładem trójkątnym. W konsekwencji, dla danej frakcji gruntowej (identyfikowanej indeksem dolnym  $j$ ) przyjmuje się, że (Feller 1961):

$$f_j(\lambda) = \begin{cases} \frac{2(\lambda - \lambda_{j, \min})}{(\lambda_{j, \max} - \lambda_{j, \min})(\lambda_{j, p} - \lambda_{j, \min})}, & \lambda_{j, \min} \leq \lambda \leq \lambda_{j, p} \\ \frac{2(\lambda_{j, \max} - \lambda)}{(\lambda_{j, \max} - \lambda_{j, \min})(\lambda_{j, \max} - \lambda_{j, p})}, & \lambda_{j, p} \leq \lambda \leq \lambda_{j, \max} \end{cases} \quad (7.23)$$

gdzie  $\lambda_{j, p}$  oznaczają najbardziej prawdopodobną wartość zmiennej losowej  $\lambda$ .

Wobec tego identyfikacja funkcji gęstości  $f_{Cl}$ ,  $f_{Si}$  oraz  $f_{Sa}$  wymaga wyznaczenia optymalnych wartości parametrów rozkładu trójkątnego,  $\lambda_{j, \min}$ ,  $\lambda_{j, \max}$  oraz  $\lambda_{j, p}$  dla każdej z trzech frakcji gruntowych. W konsekwencji identyfikacja optymalnej lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej oraz optymalnej morfologii mikro-

struktury wymaga wyznaczenia aż 12 parametrów, tj.:  $\lambda_{Cl,min}$ ,  $\lambda_{Cl,max}$ ,  $\lambda_{Cl,p}$ ,  $\lambda_{Si,min}$ ,  $\lambda_{Si,max}$ ,  $\lambda_{Si,p}$ ,  $\lambda_{Sa,min}$ ,  $\lambda_{Sa,max}$ ,  $\lambda_{Sa,p}$ ,  $\theta_{Cl}$ ,  $\theta_{mo}$ , oraz  $\theta_w$ .

Tak duża liczba parametrów skłoniła autora do przeprowadzenia wstępnych analiz w zakresie wrażliwości predykcji makroskopowej przewodności cieplnej  $\lambda^{hom,sat}$  na zmienność wybranych parametrów rozkładu trójkątnego. Analizy te oraz rozważania zawarte w poprzednim podrozdziale prowadzą do wniosku, że z procesu optymalizacyjnego można „wyłączyć” trzy parametry,  $\lambda_{Cl,min}$ ,  $\lambda_{Si,min}$  oraz  $\lambda_{Sa,max}$ , przyjmując dla nich następujące wartości, odpowiednio: 2,0, 2,0 oraz 8,8 [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ]. Zauważmy, że są to wartości zgodne z tymi, które zakładano w rozważaniach prowadzonych w ramach obliczeniowej mikromechaniki (podrozdz. 7.2). Ostatecznie rozwiązanie zagadnienia odwrotnego wymaga identyfikacji dziewięciu parametrów – sześciu dotyczących lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej ( $\lambda_{Cl,max}$ ,  $\lambda_{Cl,p}$ ,  $\lambda_{Si,max}$ ,  $\lambda_{Si,p}$ ,  $\lambda_{Sa,min}$ ,  $\lambda_{Sa,p}$ ) oraz trzech dotyczących morfologii mikrostruktury zastępczej ( $\theta_{Cl}$ ,  $\theta_{mo}$  oraz  $\theta_w$ ).

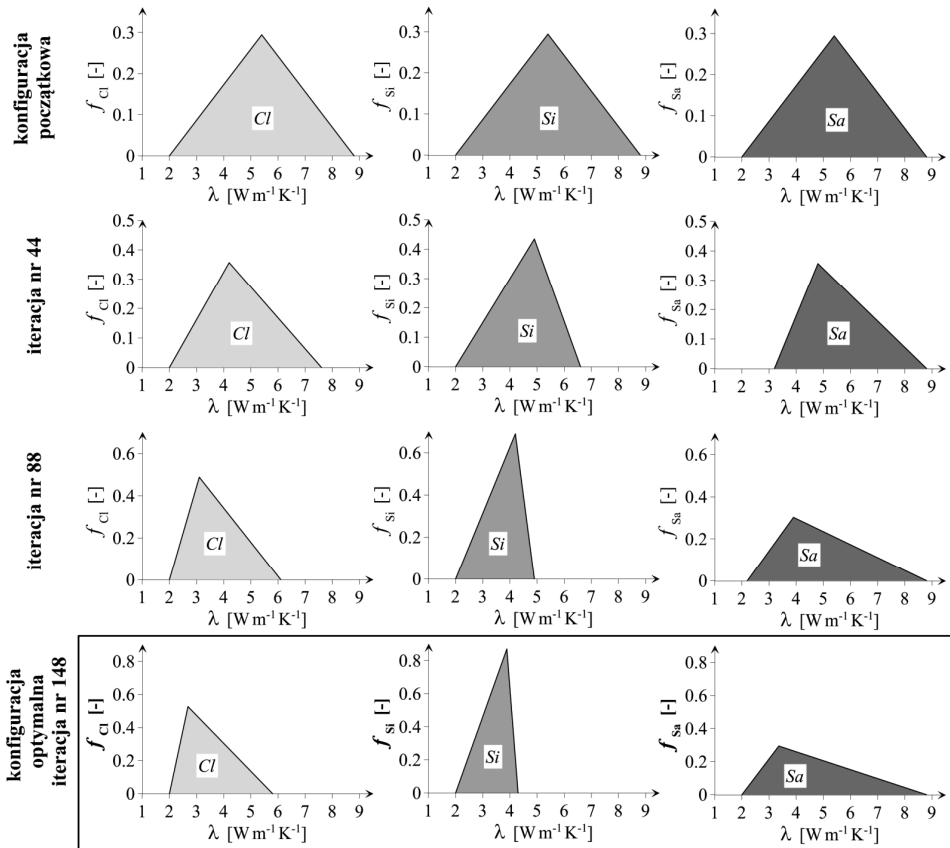
Sformułowane wcześniej zagadnienie odwrotne, podobnie jak w przypadku obliczeniowej mikromechaniki, rozwiązuje się, wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania. Wobec tego w dowolnym kroku iteracyjnym definiuje się fikcyjną „energię”, jako:

$$E = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} (\lambda_i^{hom,sat} - \lambda_i^{sat})^2 \quad (7.24)$$

gdzie  $N_g$  oznacza liczbę gruntów przyjętych do analizy (tak jak wcześniej, rozważa się wszystkie grunty zestawione w tab. 7.1, czyli  $N_g = 32$ ),  $\lambda^{hom,sat}$  oznacza przewodność cieplną gruntu w stanie pełnego nasycenia określoną zgodnie z zależnością (7.20), natomiast  $\lambda^{sat}$  jest pomierzoną wartością przewodności cieplnej gruntu nasyczonego.

Metoda symulowanego wyżarzania wymaga oczywiście założenia konfiguracji początkowej. Przyjmuje się więc następujące startowe wartości parametrów:  $\lambda_{Cl,max} = \lambda_{Si,max} = 8,8$  [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ],  $\lambda_{Cl,p} = \lambda_{Si,p} = \lambda_{Sa,p} = 5,4$  [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ],  $\lambda_{Sa,min} = 2,0$  [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ] oraz  $\theta_{Cl} = \theta_{mo} = \theta_w = 0,5$ . Konfiguracje początkowe w zakresie funkcji  $f(\lambda)$ , które służą do określenia początkowej wartości „energii” (7.24), przedstawiono w pierwszym wierszu na rys. 7.15. Ewolucja funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz morfologii mikrostruktury, w celu minimalizacji „energii” (7.24), odbywa się przez losowe zmiany wartości poszukiwanych parametrów. Dla poszczególnych parametrów przyjmuje się więc dyskretne wartości z następujących przedziałów:  $\lambda_{Cl,max}$  i  $\lambda_{Si,max}$  3,0–8,8 [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ];  $\lambda_{Sa,min}$  2,0–6,0 [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ];  $\theta_{Cl}$ ,  $\theta_{mo}$ ,  $\theta_w$   $10^{-4}$ –1,0. Jednocześnie zakłada się, że najbardziej prawdopodobne wartości zmiennej losowej,  $\lambda_{j,p}$ , dla poszczególnych rozkładów, mogą zmieniać się w przedziale ograniczonym przez minimalną i maksymalną wartość zmiennej losowej  $\lambda$ , tj. od  $\lambda_{j,min}$  do  $\lambda_{j,max}$ . Po każdej zmianie konfiguracji (a więc dla zmodyfikowanych funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz zmienionej morfologii mikrostruktury) oblicza się dla wszystkich 32 gruntów makroskopową przewod-

ność cieplną gruntu,  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  według zależności (7.20). W konsekwencji umożliwia określenie nowej wartości „energii”  $E^*$ , zgodnie z (7.24), oraz różnicy pomiędzy aktualną i poprzednią konfiguracją,  $\Delta E$  (zależn. (7.15)). Aktualna konfiguracja jest zatwierdzana lub odrzucana zgodnie z prawem akceptacji (7.6). Podobnie jak wcześniej, wraz z postępującymi iteracjami algorytmu, fikcyjną temperaturę  $T^*$  obniża się zgodnie z zależnością (7.7), przy czym przyjęto, że wartość współczynnika  $\alpha$  wynosi 0,95. W ramach każdej iteracji wykonuje się 1000 kroków. Początkową wartość parametru  $T_0^*$  określono tak, aby prawdopodobieństwo akceptacji „gorszych” konfiguracji na początku procesu optymalizacji wynosiło około 90%.



Rys. 7.15. Ewolucja funkcji gęstości prawdopodobieństwa (dla poszczególnych frakcji grunтовых) uzyskanych na podstawie algorytmu symulowanego wyżarzania (analityczna mikromechanika)

W drugim i trzecim wierszu na rys. 7.15 przedstawiono funkcje uzyskane po, odpowiednio, 44 oraz 88 iteracjach algorytmu (zauważmy, że np. 44 iteracje oznacza tak naprawdę, że przeprowadzono 44 000 zmian konfiguracji). W ostatnim wierszu

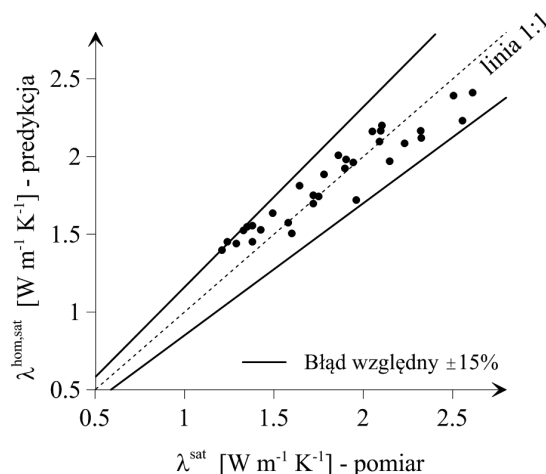
szu na rys. 7.15 zestawiono rozkłady funkcji  $f_{Cl}$ ,  $f_{Si}$  oraz  $f_{Sa}$  zidentyfikowane jako optymalne. Kryterium zatrzymania przyjęto, w taki sposób, że algorytm zatrzymywano wówczas, gdy następujące po sobie trzy kolejne iteracje nie powodowały już „wyraźnej” poprawy rozwiązania w zakresie funkcji  $f(\lambda)$  oraz parametrów  $\theta$ . Optymalne rozkłady funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz parametrów kształtu otrzymano po 148 iteracjach algorytmu symulowanego wyżarzania. W tabelach 7.3 i 7.4 zestawiono optymalne wartości dla wszystkich parametrów, również tych, które „wyłączono” z procedury optymalizacji (zaznaczono je kolorem szarym).

Tabela 7.3. Optymalne wartości parametrów opisujących lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej [ $W m^{-1} K^{-1}$ ]

$\lambda_{Cl,min}$	$\lambda_{Cl,p}$	$\lambda_{Cl,max}$	$\lambda_{Si,min}$	$\lambda_{Si,p}$	$\lambda_{Si,max}$	$\lambda_{Sa,min}$	$\lambda_{Sa,p}$	$\lambda_{Sa,max}$
2,0	2,68	5,8	2,0	3,89	4,3	2,0	3,36	8,8

Tabela 7.4. Optymalne wartości parametrów opisujących morfologię mikrostruktury zastępczej

$\theta_{Cl}$	$\theta_{Si}$	$\theta_{Sa}$	$\theta_{mo}$	$\theta_w$
1,0	1,0	1,0	0,0008	0,1



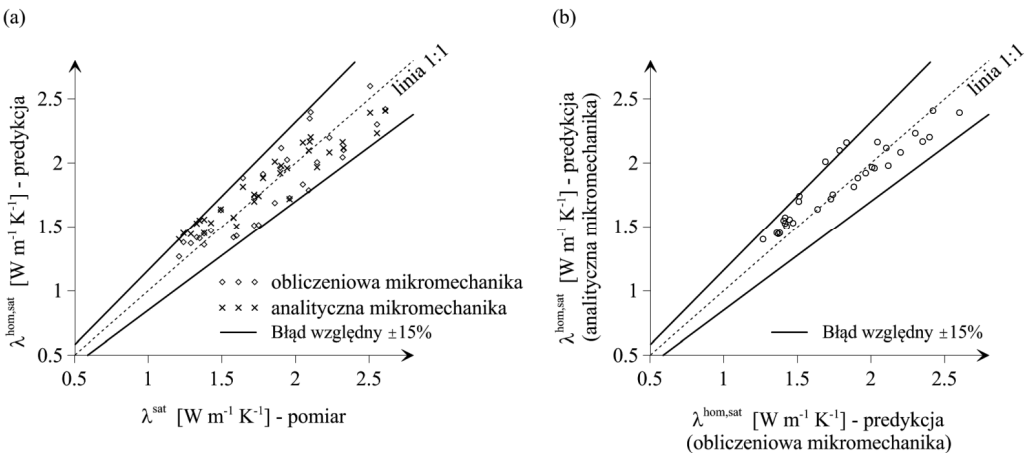
Rys. 7.16. Predykcja przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego (schemat samouzgodnionego pola) względem wartości pomierzonych – rezultaty uzyskane z wykorzystaniem optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz optymalnej morfologii mikrostruktury

Zidentyfikowane w opisany wcześniej sposób optymalne wartości parametrów (tab. 7.3 i 7.4) wykorzystano następnie do określenia predykcji makroskopowej przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia, korzystając ze schematu samo-

uzgodnionego pola (zależn. (7.20)). Porównanie predykcji  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  względem wartości pomierzonych,  $\lambda^{\text{sat}}$ , przedstawiono na rys. 7.16. Można zauważyć, że wykorzystując optymalne rozkłady prawdopodobieństwa oraz optymalną morfologię mikrostruktury, uzyskuje się bardzo dobre oszacowanie przewodności cieplnej gruntu w stanie pełnego nasycenia wodą. Jak widać, niemal wszystkie predykcje znajdują się w granicach 15% błędu względnego (rys. 7.16). Wartość błędu średniokwadratowego wynosi w tym przypadku  $MSE = 0,0215 [\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]^2$ . Jest to zdecydowana poprawa względem najlepszej predykcji uzyskanej we wcześniejszych analizach – por. np. z wynikami przedstawionymi na rys. 7.13b (oraz w tab. 7.2).

## 7.5. Uwagi

Uzyskane w tym rozdziale wyniki wymagają, zdaniem autora, dodatkowego omówienia i dyskusji. Jak wykazano na podstawie przeprowadzonych analiz, oba podejścia (obliczeniowa i analityczna mikromechanika), choć metodologicznie różne, zapewniają bardzo dobrą predykcję przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego. Najlepszą predykcję uzyskano oczywiście w przypadku, gdy zastosowano zidentyfikowane jako optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa opisujące lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego. W przypadku schematu samouzgodnionego pola identyfikacji wymagała również morfologia mikrostruktury zastępczej (w podejściu bazującym na obliczeniowej mikromechanice, geometria mikrostruktury zakładana była *a priori*).



Rys. 7.17. (a) Predykcja przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego uzyskana z obu podejść względem wartości pomierzonych; (b) porównanie predykcji wynikającej ze schematu samouzgodnionego pola z wartościami uzyskanymi w ramach obliczeniowej mikromechaniki

Porównanie wyników uzyskanych z modelowania w ramach analitycznej i obliczeniowej mikromechaniki zaprezentowano na rys. 7.17. Przede wszystkim w punkcie (a) przedstawiono wyniki uzyskane z obu podejść w odniesieniu do wartości pomierzonych, natomiast w punkcie (b) rezultaty uzyskane z analitycznej i obliczeniowej mikromechaniki porównuje się wprost ze sobą. Warto nadmienić, że jakość predykcji oceniana na podstawie wartości błędu średniokwadratowego (zależność (7.19)) wynosi dla analitycznej i obliczeniowej mikromechaniki, odpowiednio,  $MSE = 0,0215 [\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]^2$  oraz  $MSE = 0,0183 [\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]^2$ . W tym sensie podejście bazujące na obliczeniowej mikromechanice zapewnia nieco lepszą jakość oszacowania makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego.

Zidentyfikowane na podstawie rozwiązań zagadnień odwrotnych funkcje gęstości prawdopodobieństwa, jak wspomniano już wcześniej, różnią się od siebie w zależności od wykorzystanego podejścia. Jest to głównie konsekwencją stosowania w tych podejściach odmiennych morfologii mikrostruktury dla nasyconego ośrodka gruntowego. Ze względu na fakt, iż gęstości prawdopodobieństwa w obu przypadkach dane są w postaci analitycznej (obliczeniowa mikromechanika: zależność (7.11); analityczna mikromechanika: zależność (7.23) wraz z parametrami wg tab. 7.3) można w dość łatwy sposób określić wartości oczekiwane współczynnika przewodności cieplnej dla poszczególnych frakcji (indeksowanych symbolem  $j$ ) i porównać je z danymi literaturowymi.

Korzystając z zależności:

$$\overline{\lambda_j} = \int_{\lambda_{j,\min}}^{\lambda_{j,\max}} \lambda f_j(\lambda) d\lambda \quad (7.25)$$

określono następujące wartości oczekiwane współczynników przewodności cieplnych w obrębie poszczególnych frakcji gruntowych, tj.:

- $\overline{\lambda_{cl}} = 3,93$ ,  $\overline{\lambda_{si}} = 4,27$  oraz  $\overline{\lambda_{sa}} = 5,75 [\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$  dla rozkładów optymalnych uzyskanych w podejściu bazującym na obliczeniowej mikromechanice (rys. 7.10),

- $\overline{\lambda_{cl}} = 3,49$ ,  $\overline{\lambda_{si}} = 3,40$  oraz  $\overline{\lambda_{sa}} = 4,72 [\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$  dla rozkładów optymalnych uzyskanych w ramach modelowania schematem samouzgodnionego pola (analityczna mikromechanika) (rys. 7.15).

Zwróćmy uwagę na to, iż w przypadku obliczeniowej mikromechaniki zrekonstruowane rozkłady, zwłaszcza odpowiadające im wartości oczekiwane, spełniają hierarchię wartości daną zależnością (2.7). Tak więc w sensie jakościowym uzyskane wyniki są zgodne z powszechnie przyjmowaną hierarchią dla uśrednionych przewodności cieplnych poszczególnych frakcji gruntowych. Co więcej, również pod względem ilościowym otrzymane wartości oczekiwane są porównywalne do uzyskanych np. w pracy Purushothamaraja i Judge'a (1977) wartości średnich, tj.  $\overline{\lambda_{cl}} = 3,80$ ,  $\overline{\lambda_{si}} = 4,15$  oraz

$\overline{\lambda_{sa}} = 6,10$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]. W przypadku modelowania schematem samouzgodnionego pola uzyskane wartości oczekiwane, po pierwsze, nie spełniają hierarchii (2.7) (zwróćmy bowiem uwagę na fakt, iż w tym przypadku  $\overline{\lambda_{si}} \leq \overline{\lambda_{cl}}$ , a po drugie, wartości te bardziej odbiegają od danych literaturowych prezentowanych w pracy Purushothamaraja i Judge'a (1977). W rezultacie, zdaniem autora, wyniki uzyskane w zakresie podejścia numerycznego nieco lepiej opisują lokalną zmienność współczynnika przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego w tym sensie, że wykazują lepszą zgodność z powszechną wiedzą w zakresie hierarchii oraz konkretnych wartości dla uśrednionych, w obrębie frakcji, współczynników przewodności cieplnej.

Ostatnim aspektem, który wymaga pewnego komentarza jest optymalna morfologia mikrostruktury zastępczej określona w ramach modelowania schematem samouzgodnionego pola. Należy to wyraźnie podkreślić, iż optymalną mikrostrukturę (stworzoną z cząstek elipsoidalnych o parametrach  $\theta$  zestawionych w tab. 7.4) należy traktować jako pewną wirtualną/zastępczą morfologię, która w ogólnym przypadku nie powinna być utożsamiana z geometrią mikrostruktury rzeczywistego ośrodka, tj. nasyconego ośrodka gruntowego. Łatwo to zobrazować, jeśli przyjrzymy się np. optymalnym wartościom parametrów  $\theta$  uzyskanych dla frakcji ilowej,  $\theta_{cl}$ , oraz materii organicznej,  $\theta_{mo}$ . Rozwiązanie optymalne uzyskano dla przypadku, gdy cząstki frakcji ilowej modelowane są sferami ( $\theta_{cl} = 1$ ), podczas gdy optymalny kształt dla cząstek materii organicznej jest zbliżony do „dysków” ( $\theta_{mo} = 0,0008$ ). W rzeczywistości to jednak cząstki frakcji ilowej charakteryzują się spłaszczonym kształtem. W pracach Grima (1953), Christensena i Wu (1964) pisze się wprost o tym, że cząstki ilaste mają kształt zbliżony do wypukłego nieregularnego heksaedru (ang. *convex irregular hexahedron*) i zazwyczaj są charakteryzowane średnicą  $d$  oraz grubością  $h$ , których wartości zależą od minerałów tworzących daną cząstkę ilastą. W pracy Derskiego i in. (1988) zestawiono przykładowe wartości tych parametrów, tj. illit:  $d = 0,1-0,3$  [ $\mu\text{m}$ ] oraz  $h = 0,003$  [ $\mu\text{m}$ ], kaolinit:  $d = 0,3-4,0$  [ $\mu\text{m}$ ] oraz  $h = 0,05-2,0$  [ $\mu\text{m}$ ], montmorylonit  $d = 0,1-0,3$  [ $\mu\text{m}$ ] oraz  $h = 0,001$  [ $\mu\text{m}$ ].

Podsumowując, jedyną cechą wspólną pomiędzy zastępczą a rzeczywistą mikrostrukturą jest to, że ta pierwsza, zastosowana w schemacie samouzgodnionego pola, ma zapewniać poprawną predykcję przewodności cieplnej dla rzeczywistego ośrodka gruntowego. W tym sensie taki zastępczy ośrodek bardzo często określany jest mianem mikrostruktury ekwiwalentnej (np. Kachanov i Sevostianov 2005), gdzie przez pojęcie „ekwiwalenty” rozumie się tu równoważność w zakresie predykcji makroskopo-owej odpowiedzi ośrodka zastępczego i rzeczywistego. Szerzej problem ekwiwalentnej mikrostruktury omawiany jest w kolejnym rozdziale, gdzie dokonuje się predykcji przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego w ujęciu analitycznej mikromechaniki.



## 8. Przewodność cieplna częściowo nasyconego ośrodka gruntowego

W rozdziale 6 niniejszej monografii wykazano, że uzyskanie poprawnej predykcji przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w różnych stanach nasycenia jest silnie zależne od właściwego oszacowania wartości przewodności cieplnej gruntu nasyconego,  $\lambda^{\text{sat}}$ . Z drugiej strony, poprawne określenie wartości  $\lambda^{\text{sat}}$  istotnie zależy od jakości oszacowania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ . Stąd też zagadnieniami dotyczącymi określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego i nasyconego ośrodka gruntowego poświęcono aż dwa rozdziały tej książki, tj. rozdział 6 i 7.

Jednak analiza krytyczna modeli teoretycznych i empirycznych, przeprowadzona w rozdziale 3, dowiodła, że większość istniejących modeli, nawet jeśli odpowiednio oszacowane są wartości  $\lambda^{\text{sat}}$  i  $\lambda^{\text{dry}20}$ , nie jest w stanie poprawnie odwzorować typowej dla gruntów (zwłaszcza tych drobnoziarnistych) charakterystyki  $\lambda-S_r$ . W zasadzie, jedynie model zaproponowany przez Lu i in. (2007) dość dobrze oddaje charakterystykę termiczną gruntów drobnoziarnistych (zależność  $\lambda-S_r$ ), przede wszystkim, w zakresie małych wartości stopnia wilgotności. Należy jednak mieć na uwadze fakt, iż predykcja uzyskana z tego modelu porównywana była z wynikami badań laboratoryjnych pochodzącymi z tej samej pracy (Lu i in. 2007), a więc z wynikami, względem których kalibrowano parametry tego modelu. Brak jest więc potwierdzenia poprawności predykcji tego modelu względem wyników laboratoryjnych pochodzących z innych źródeł.

W niniejszym rozdziale prezentuje się rozważania, których celem jest sformułowanie techniki umożliwiającej poprawne określanie przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego w ujęciu szeroko rozumianego aparatu mikromechaniki. Wymaga to jednak znacznego rozszerzenia sformułowań proponowanych wcześniej, zwłaszcza w odniesieniu do geometrii mikrostruktury gruntu. Zauważmy bowiem, że proponowane we wcześniejszych analizach (rozd. 6 i 7) modele morfologii

---

<sup>20</sup> We wcześniejszych rozważaniach zasygnalizowano już, że wartość przewodności cieplnej gruntu suchego,  $\lambda^{\text{dry}}$ , zależy głównie od wielkości przestrzeni porowej i istniejące modele empiryczne (np. wzór (3.27)) dostarczają relatywnie dobrej predykcji wartości tego parametru.

mikrostruktury ośrodka gruntowego, a więc jej dyskretna reprezentacja w postaci mikrostruktury wokselowej czy też polikrystaliczna/ziarnowa morfologia mikrostruktury są zbyt „ubogie” do uzyskania poprawnej charakterystyki cieplnej gruntu częściowo nasyconego. Wynika to z tego, iż jak pisano już w rozdziale 2, sukcesywne nawadnianie gruntu powoduje niejako ewolucję mikrostruktury ośrodka gruntowego. W konsekwencji morfologia mikrostruktury gruntu jest nie tylko funkcją rodzaju gruntu (grubo- lub drobnoziarnistego), ale przede wszystkim jest funkcją stopnia wilgotności.

Dociekania prowadzone w tym rozdziale świadomie zawęża się do analiz, w których stosuje się jedynie aparat analitycznej mikromechaniki, rezygnując tym samym z podejścia bazującego na obliczeniowej mikromechanice. Jest to konsekwencją tego, iż grunt częściowo nasycony jest ośrodkiem, w którym jednocześnie występują trzy fazy, tj. ciało stałe (szkielet gruntowy<sup>21</sup>), powietrze i woda. Oznacza to, że w porównaniu do wcześniejszych dociekań dotyczących określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego i gruntu nasyconego, w tym przypadku mamy do czynienia ze znacznie większym kontrastem pomiędzy parametrami termicznymi składników, co powoduje, iż wyniki obliczeń numerycznych obarczone są większym błędem, a ich zbieżność jest wyraźnie gorsza. Zdaniem autora, bardziej uzasadnione jest więc, dla przypadku częściowo nasyconego ośrodka gruntowego, skorzystanie z technik aproksymacji analitycznej. Nie oznacza to jednak, że określanie przewodności cieplnej gruntu częściowo nasyconego, w ramach analitycznej mikromechaniki, jest zadaniem łatwym. Przeciwnie, jak zostanie pokazane w tym rozdziale, poprawne odwzorowanie charakterystyki termicznej, rozumianej tu jako zależność  $\lambda-S_r$ , wymaga istotnych modyfikacji oryginalnych sformułowań schematów Mori–Tanaki i samouzgodnionego pola.

Rozważania rozpoczyna się od przeprowadzenia analiz, w których prezentuje się zastosowanie oryginalnych sformułowań schematów Mori–Tanaki i samouzgodnionego pola do szacowania przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego. Rozpatruje się trzy oddzielne przykłady obliczeniowe w celu zobrazowania wpływu takich elementów, jak: kształt wtrąceń, udział frakcyjny składników oraz przewodność cieplna szkieletu gruntowego na wartość makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. Na podstawie uzyskanych rezultatów stwierdza się, że największą trudnością w określaniu makroskopowej przewodności cieplnej gruntu, jako ośrodka wielofazowego, za pomocą analitycznych schematów aproksymacyjnych jest przyjęcie poprawnego założenia dotyczącego geometrii poszczególnych składników tworzących ośrodek, tj. morfologii ośrodka zastępczego. W celu omięcia tej niedogodności proponuje się zastosowanie w schematach aproksymacji analitycznej koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury, wprowadzonej przez Kachanova i Sevostia-

---

<sup>21</sup> W rozważaniach prezentowanych w tym rozdziale zakłada się, że szkielet gruntowy jest jednorodny i jest określony współczynnikiem przewodności cieplnej  $\lambda_s$ , który określać można na podstawie techniki obliczeniowej i analitycznej mikromechaniki sformułowanych w rozdziale 6.

nova (2005), a istotnie zmodyfikowanej w innej pracy autora (Łydźba i in. 2018). Analizy zawarte w dalszej części rozdziału prowadzą jednak do wniosku, iż nie jest możliwe uzyskanie poprawnej charakterystyki  $\lambda-S_r$ , nawet z zastosowaniem koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury. Jest to efektem m.in. tego, iż pierwotnie idea ekwiwalentnej mikrostruktury została wprowadzona dla nasyconego ośrodka porowatego, a więc dwufazowego medium (Kachanov i Sevostianov 2005; Łydźba i in. 2018), przez co koncepcja ta nie uwzględnia ewolucji mikrostruktury wywołanej sukcesywnym nawadnianiem gruntu.

W rezultacie w niniejszej monografii proponuje się inne podejście, które istotnie modyfikuje pierwotną ideę ekwiwalentnej mikrostruktury, przez wprowadzenie tzw. hierarchii zapełniania, która ułatwia stowarzyszyć morfologię mikrostruktury ośrodka gruntowego ze stopniem wilgotności,  $S_r$ . Innymi słowy, zaproponowane w tym rozdziale podejście uwzględnia ewolucję mikrostruktury spowodowaną sukcesywnym zapełnianiem przestrzeni porowej gruntu przez cząstki wody. W konsekwencji takie podejście prowadzi do poprawnego odwzorowania charakterystyki termicznej gruntu, tj. zależności makroskopowej przewodności cieplnej gruntu od stopnia wilgotności  $S_r$ .

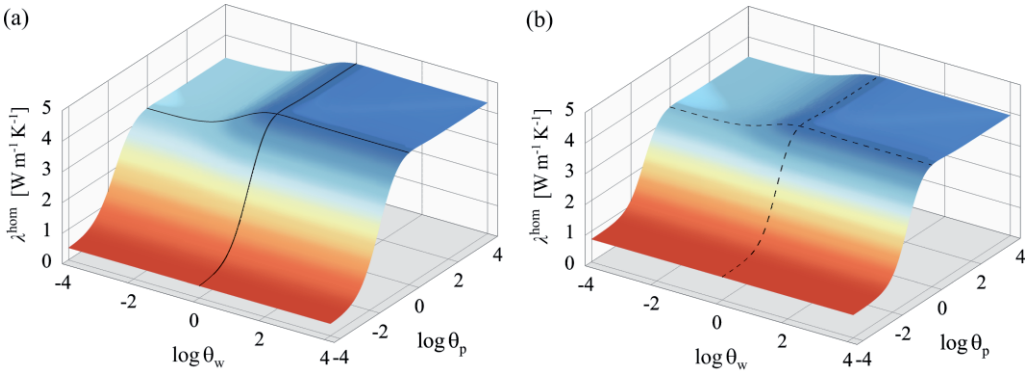
## 8.1. Przykłady oszacowań dla ośrodka trójskładnikowego

Pierwszy z trzech rozważanych przykładów obliczeniowych dotyczy analizy wpływu kształtu wtrąceń opisujących poszczególne składniki gruntu, jako ośrodka wielofazowego, na wartość jego makroskopowej przewodności cieplnej,  $\lambda^{\text{hom}}$ . Podobnie jak wcześniej kształt inkluzji charakteryzowany jest parametrem  $\theta$ , wyrażającym stosunek półosi elipsoidy,  $R_3/R$  – zob. zależność (6.13). Dla rozróżnienia składników zakłada się, że kształty wtrąceń opisujących wodę oraz powietrze opisują parametry, odpowiednio,  $\theta_w$  oraz  $\theta_p$ . Przyjmijmy, że przestrzeń porowa zajęta jest przez wodę i powietrze w równych proporcjach, tj.  $\phi_w = \phi_p = 0,15$ . W rezultacie porowatość gruntu wynosi  $n = 0,3$ . Załóżmy ponadto, że przewodność cieplna szkieletu gruntowego wynosi  $\lambda_s = 7,0 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$ .

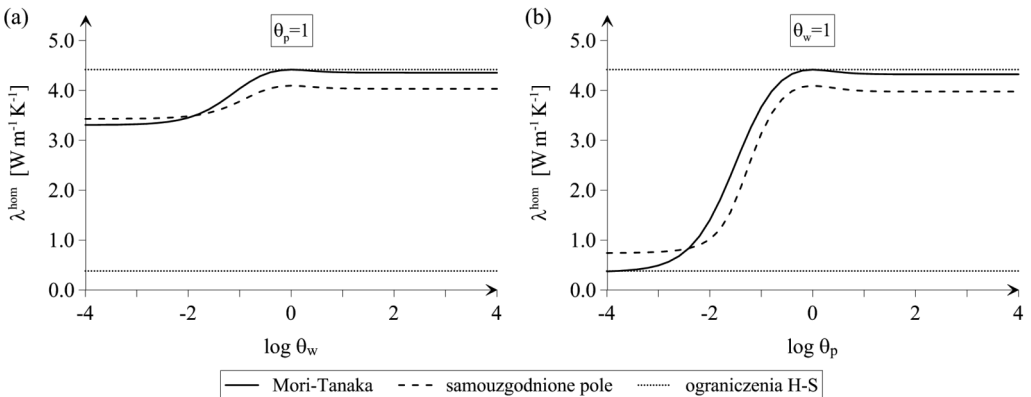
Na rysunkach 8.1a oraz 8.1b przedstawiono oszacowania wartości  $\lambda^{\text{hom}}$  uzyskane za pomocą schematu, odpowiednio, Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola<sup>22</sup>, w funkcji parametrów opisujących kształty wtrąceń,  $\theta_w$  i  $\theta_p$ . Uzyskane wyniki pokazują, że założenie kształtu elipsoid opisujących fazę wodną i powietrzną – tak naprawdę przyjęcie wartości parametru  $\theta$  – ma istotny wpływ na wartość makroskopowej prze-

<sup>22</sup> W analizie prowadzonej w ujęciu schematu samouzgodnionego pola przyjmuje się, że macryca (szkielet gruntowy) utworzona jest z wtrąceń sferycznych. Analogicznie postępuje się w przypadku pozostałych rozważanych tutaj przykładów obliczeniowych.

wodności cieplnej,  $\lambda^{\text{hom}}$ . Wpływ ten jest bardziej wyraźny dla przypadku modelowania fazy gazowej – jest to oczywiście efekt większego kontrastu pomiędzy przewodnością cieplną szkieletu gruntowego a powietrza (por. wartości zebrane w tab. 2.1).



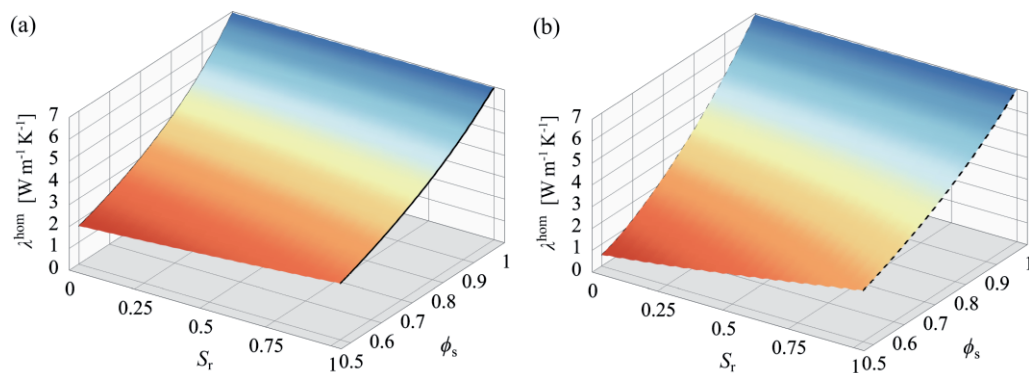
Rys. 8.1. Wpływ kształtu wtrąceń opisujących wodę  $\theta_w$  i powietrze  $\theta_p$  na wartość makroskopowej przewodności cieplnej  $\lambda^{\text{hom}}$ : (a) schemat Mori-Tanaki; (b) schemat samouzgodnionego pola



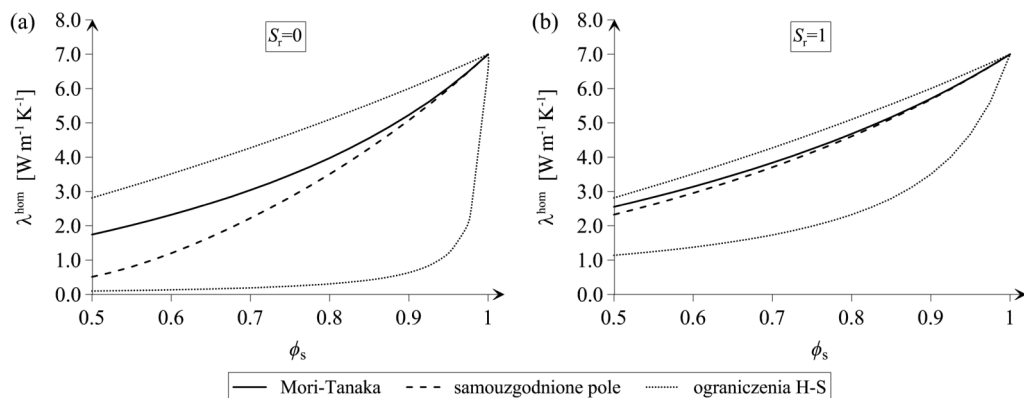
Rys. 8.2. Wpływ kształtu wtrąceń opisujących wodę  $\theta_w$  i powietrze  $\theta_p$  na wartość makroskopowej przewodności cieplnej  $\lambda^{\text{hom}}$  po założeniu, że (a)  $\theta_p = 1$ ; (b)  $\theta_w = 1$

W celu lepszego zobrazowania uzyskanych rezultatów, na rys. 8.2 przedstawiono te same wyniki (zależność parametru makroskopowego,  $\lambda^{\text{hom}}$ , od kształtu wtręcenia,  $\theta$ ), z założeniem, że jeden ze składników, woda lub powietrze, ma kształt sferyczny. W szczególności wykresy na rys. 8.2a i 8.2b uzyskano bezpośrednio z wyników zaprezentowanych na rys. 8.1 po założeniu, że  $\theta_p = 1$  i  $\theta_w = 1$  (zostało to również oznaczone na rys. 8.1 odpowiednimi liniami, tj. ciągłą dla schematu Mori-Tanaki i przerywaną dla schematu samouzgodnionego pola). Ponownie można zauważyć, że znacznie bardziej wyraźny wpływ zmienności  $\theta$  na wartość  $\lambda^{\text{hom}}$  obserwuje się dla

przypadku, gdy zmienia się wartość parametru  $\theta_p$ , a więc kształtu wtrącenia dla fazy gazowej. Jak widać na rys. 8.2b, dla ustalonej wartości parametru  $\theta_w = 1$  (woda opisana jest wtrąceniami sferycznymi) zmienność  $\theta_p$  w zakresie od  $10^{-4}$  do  $10^0$  implikuje, że makroskopowa wartość przewodności cieplnej gruntu,  $\lambda^{\text{hom}}$ , określona schematem Mori–Tanaki, zmienia się w zakresie wyznaczonym przez dolne i górne ograniczenie Hashina–Shtrikmana. Taka charakterystyka jest efektem tego, iż spośród wszystkich trzech składników tworzących grunt częściowo nasycony (szkielet, woda, powietrze) to właśnie powietrze jest tym, który najslabiej przewodzi ciepło.



Rys. 8.3. Wpływ udziałów frakcyjnych poszczególnych składników ośrodka gruntowego na wartość  $\lambda^{\text{hom}}$ : (a) schemat Mori–Tanaki; (b) schemat samouzgodnionego pola



Rys. 8.4. Wpływ udziałów frakcyjnych poszczególnych składników ośrodka gruntowego na wartość  $\lambda^{\text{hom}}$ : (a) grunt suchy ( $S_r = 0$ ); (b) grunt w pełni nawodniony ( $S_r = 1$ )

W kolejnym przykładzie obliczeniowym analizuje się wpływ udziałów frakcyjnych poszczególnych składników ośrodka gruntowego na wartość  $\lambda^{\text{hom}}$ . Tym razem przyjmijmy, że zarówno woda, jak i powietrze charakteryzowane są takim samym

kształtem wtrącenia elipsoidalnego, tj.  $\theta_p = \theta_w = 0,1$ . Wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego jest identyczna z przykładem rozważanym wcześniej ( $\lambda_s = 7,0$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]). Porowatość, wyrażona jako  $n = 1 - \phi_s$ , zmienia się w przedziale 0–50%, przy czym zawartość wody w przestrzeni porowej gruntu charakteryzowana jest stopniem wilgotności  $S_r$ . Wyniki analiz w postaci zależności  $\lambda^{\text{hom}}$  od stopnia wilgotności  $S_r$  oraz udziału frakcyjnego szkieletu gruntowego  $\phi_s$  zestawiono na rys. 8.3. Jednocześnie na rys. 8.4 przedstawiono te same rezultaty, w dwóch skrajnych przypadkach: grunt suchy ( $S_r = 0$ ) oraz grunt w pełni nawodniony ( $S_r = 1$ ).

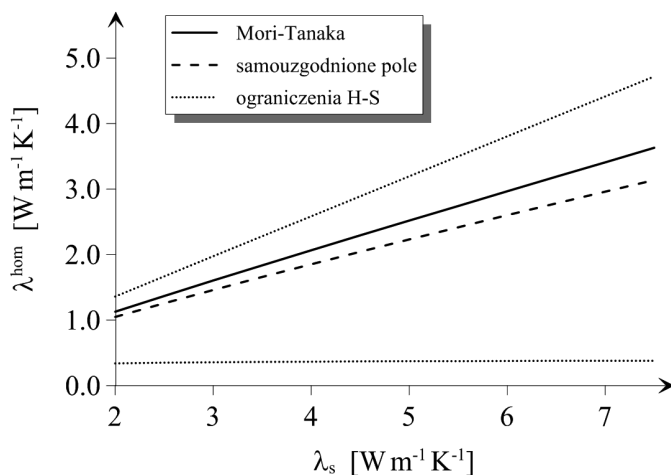
Na podstawie zaprezentowanych wyników (rys. 8.3 i 8.4) widać, że im większa porowatość (dla malejącej wartości udziału frakcyjnego szkieletu  $\phi_s$ ) gruntu, tym oszacowania uzyskane z obu schematów zaczynają się wyraźnie różnić. Efekt ten jest oczywiście najbardziej widoczny dla przypadku gruntu suchego ( $S_r = 0$ ). Jest to konsekwencją tego, iż w takim przypadku ośrodek trójskładnikowy „redukuje się” niejako do kompozytu dwuskładnikowego (szkielet gruntowy i powietrze) o największym możliwym kontrakcie parametrów termicznych (przewodności cieplnych) składników. Analogiczny efekt, co oczywiste, obserwuje się również w przypadku ograniczeń Hashina–Shtrikmana; granice te są sobie najbardziej odległe (bliskie), gdy  $S_r = 0$  (gdy  $S_r = 1$ ).

Ostatni z rozważanych przykładów obliczeniowych dotyczy wpływu wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ , na makroskopową przewodność cieplną gruntu częściowo nasyconego. Przypomnijmy, że w rozdziale 6 wskazano na fakt, iż przewodność cieplna szkieletu gruntowego, a w zasadzie jej odpowiednie oszacowanie, ma kluczowe znaczenie w uzyskaniu poprawnej predykcji makroskopowej przewodności cieplnej gruntu, jako ośrodka wielofazowego. Jak pokazano na podstawie prostych obliczeń, większość istniejących modeli jest bardzo wrażliwych na przyjęcie odpowiedniej wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. W niniejszym przykładzie analizuje się więc wrażliwość schematów Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola na założoną wartość parametru  $\lambda_s$ . Ponownie do rozważań przyjmuje się grunt częściowo nasycony o następujących parametrach:  $n = 0,3$ ,  $\phi_w = \phi_p = 0,15$ . W obu schematach zakłada się, że zarówno woda, jak i powietrze charakteryzowane są takim samym kształtem wtrącenia elipsoidalnego:  $\theta_p = \theta_w = 0,1$ . Analizy prowadzi się z założeniem, że przewodność cieplna szkieletu gruntowego zmienia się w zakresie 2,0–7,0 [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ].

Uzyskane predykcje makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego,  $\lambda^{\text{hom}}$ , w funkcji przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ , przedstawiono na rys. 8.5. Obserwując otrzymane rezultaty, można stwierdzić, że podobnie jak w przypadku omawianych w rozdziale 3 modeli teoretycznych i empirycznych, tak i w przypadku analitycznych schematów aproksymacyjnych, makroskopowa przewodność cieplna gruntu,  $\lambda^{\text{hom}}$ , silnie zależy od założonej wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego. Ponownie można zauważyć, że oszacowania uzyskane na podstawie schematów Mori–Tanaki i samouzgodnionego pola są sobie tym bliższe, im niższa jest wartość przewodności cieplnej szkieletu gruntowego – jest to

oczywiście konsekwencją zmniejszającego się kontrastu pomiędzy przewodnościami cieplnymi składników tworzących ośrodek gruntowy. Zauważmy, że analogiczną charakterystykę, co oczywiste, wykazują ograniczenia Hashina–Shtrikmana.

Atrakcyjność wykorzystywanych tutaj schematów analitycznych jest głównie konsekwencją ich matematycznej „prostoty”, która jest bezpośrednim rezultatem uproszczeń dotyczących modelowania oddziaływań pomiędzy wtrąceniami. Ponadto efektywność obliczeniowa schematów analitycznych wynika również z zakładanych w nich relatywnie prostych modeli mikrostruktury (ośrodka zastępczego) w odniesieniu do rzeczywistej morfologii mikrostruktury. Jednakże to proste podejście w odniesieniu do modelowania mikrostruktury, które prowadzi do atrakcyjności metod aproksymacji analitycznej, z drugiej strony jest główną wadą tych metod – niejednokrotnie tak uproszczone modelowanie np. przestrzeni porowej ośrodka gruntowego, która w modelu utworzona jest np. ze sferycznych wtrąceń, nie przystaje w sensie geometrycznym do mikrostruktury rzeczywistego ośrodka porowatego.



Rys. 8.5. Zależność makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego,  $\lambda^{\text{hom}}$ , od wartości przewodności cieplnej szkieletu w ujęciu schematów Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola

Zdaniem autora, największą trudnością w określaniu makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego (jako ośrodka wielofazowego) za pomocą metod aproksymacji analitycznej jest przyjęcie odpowiedniego założenia dotyczącego geometrii poszczególnych składników tworzących ośrodek. Dużą wrażliwość oszacowań na wartość parametru  $\theta$ , definiującego kształty wtrąceń elipsoidalnych, wykazano w pierwszym przykładzie obliczeniowym, którego wyniki zaprezentowano na rys. 8.1 i 8.2. Co jednak najważniejsze, w zasadzie, w literaturze przedmiotu nie istnieją żadne wytyczne jasno wskazujące, aby w konkretnych sytuacjach, dotyczących rzeczywistych materiałów, zakładać dla składników kompozytu konkretne „rodziny” wtrąceń, charaktery-

zowane wartością parametru  $\theta$ . Z reguły wartości parametrów  $\theta$ , dla poszczególnych składników kompozytu zakłada się *a priori*, bazując zazwyczaj po prostu na doświadczeniu i przekonaniu osoby dokonującej predykcji.

Dodatkowo, jak zostało już wspomniane wcześniej, w przypadku częściowo nasyconego ośrodka gruntowego jego morfologia jest również funkcją ilości wody zawartej w przestrzeni porowej gruntu. Wraz ze wzrostem ilości wody wypełniającej pory ośrodka przestrzenne „ułożenie faz” ulega bowiem ewolucji. Przy małych wartościach stopnia wilgotności,  $S_r$ , faza gazowa jest ciągła, natomiast faza ciekła utworzona jest z niewielkich „kropel” wody. Dla stopnia wilgotności bliskiego jedności, sytuacja się odwraca, tj. faza ciekła staje się ciągła, natomiast faza gazowa składa się z odseparowanych od siebie pęcherzyków powietrza (rys. 2.2). Morfologia mikrostruktury zatem częściowo nasyconego ośrodka gruntowego jest, w ogólnym przypadku, funkcją stopnia wilgotności.

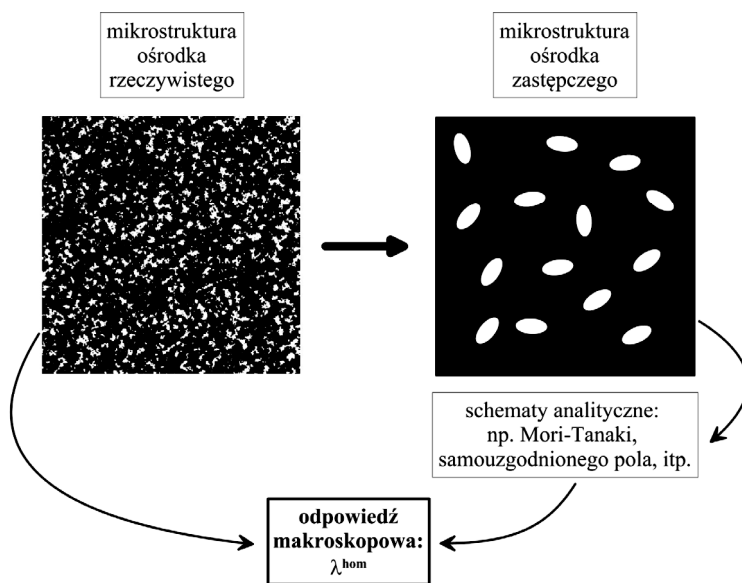
Pewnym „antidotum” na wspomniane problemy dotyczące określania geometrii składników tworzących ośrodek wieloskładnikowy jest koncepcja tzw. ekwiwalentnej mikrostruktury, która uwzględniona w schematach aproksymacyjnych, w pewnym sensie, „relaksuje” problem przez zastosowanie nieskończonej liczby „rodzin” dla wtrąceń zanurzonych w ciągłej matrycy (szkielecie gruntowym). Jak już wzmiankowano, pojęcie ekwiwalentnej mikrostruktury zostało wprowadzone przez Kachanov i Sevostianov w 2005 roku w celu predykcji przewodności cieplnej nasyconych ośrodków porowatych. Sformułowanie, które prezentuje się w kolejnym podrozdziale pochodzi z wcześniejszej pracy autora (Łydźba i in. 2018) i stanowi istotną modyfikację oryginalnego sformułowania proponowanego w pracy (Kachanov i Sevostianov 2005). Po zaznajomieniu czytelnika z ideą ekwiwalentnej mikrostruktury oraz procedurą jej wyznaczania prezentuje się dwa przykłady obliczeniowe, w których określa się ekwiwalentną mikrostrukturę dla rzeczywistego ośrodka gruntowego (piasek średni) oraz dla cyfrowej reprezentacji mikrostruktury piaskowca Fontainebleau.

## 8.2. Koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury

Mówiąc bardzo ogólnie, idea ekwiwalentnej mikrostruktury polega na zastąpieniu mikrostruktury ośrodka rzeczywistego pewną wirtualną mikrostrukturą (której geometria, w najbardziej ogólnym przypadku, może być całkowicie inna niż geometria ośrodka rzeczywistego), przy czym zamiana ta ma zapewniać to, iż odpowiedź makroskopowa zastępczego medium ma być tożsama z odpowiedzią ośrodka rzeczywistego (Kachanov i Sevostianov 2005). Innymi słowy, wirtualna mikrostruktura ma być ekwiwalentna/równoważna pod względem makroskopowej odpowiedzi z rozważanym ośrodkiem rzeczywistym. Morfologia mikrostruktury ekwiwalentnej, w zasadzie, powinna być możliwie jak najprostsza, tak aby możliwe było jej zastosowanie w schematach analitycznych, jak np. Mori–Tanaki czy samouzgodnionego pola (Łydźba i in. 2018).



Ogólną ideę zastąpienia ośrodka rzeczywistego wirtualnym medium, dla przypadku makroskopowej przewodności cieplnej, przedstawiono na rys. 8.6. Na rysunku tym z lewej strony pokazano mikrostrukturę ośrodka rzeczywistego, która charakteryzuje się pewną makroskopową przewodnością cieplną, powiedzmy  $\lambda^{\text{hom}}$ . Zastępcza mikrostruktura to makroskopowo izotropowy kompozyt o morfologii „matryca-wtrącenie” (mikrostruktura z prawej strony na rys. 8.6), przy czym wtrącenia tworzy tutaj jedna „rodzina” inkluzji elipsoidalnych o ustalonym stosunku półosi,  $\theta$ . Wobec tego, mówiąc bardziej precyzyjnie, koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury polega na zastąpieniu „mieszaniny” dowolnych wtrąceń (w ogólności charakteryzujących się bardzo złożoną geometrią) losowo rozmieszczonymi inkluzjami o regularnych kształtach (np. elipsoidy), dla których możliwe jest zastosowanie schematów aproksymacji analitycznej, przy czym zamiana ta ma zachowywać makroskopową odpowiedź ośrodka rzeczywistego.



Rys. 8.6. Koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury

Identyfikację ekwiwalentnej mikrostruktury przeprowadza się przez rozwiązanie odpowiednio sformułowanego zagadnienia odwrotnego (np. Kachanov i Sevostianov 2005 lub Łydźba i in. 2018). Zauważmy, że zadanie to różni się zasadniczo od klasycznego zagadnienia odwrotnego teorii homogenizacji polegającego na rekonstrukcji mikrostruktury ośrodka rzeczywistego na podstawie znajomości jego odpowiedzi makroskopowej. Celem rozwiązania zagadnienia odwrotnego, w którym wyznacza się mikrostrukturę ekwiwalentną, nie jest bowiem rekonstrukcja morfologii ośrodka rzeczywistego, lecz identyfikacja pewnej wirtualnej/zastępczej mikrostruktury, która ma być ekwiwalentna pod względem predykcji makroskopowej przewodności cieplnej (co zobrazowano na rys. 8.6).

Pomiędzy wspomnianymi zagadnieniami odwrotnymi istnieje jeszcze jedna zasadnicza różnica. W przypadku klasycznego zagadnienia odwrotnego teorii homogenizacji, w którym poszukuje się morfologii ośrodka rzeczywistego, pojawia się problem braku jednoznaczności rozwiązania. Oczywiście jest bowiem, że dla jednej wartości  $\lambda^{\text{hom}}$  istnieje tak naprawdę nieskończenie wiele mikrostruktur, które zapewniają dokładnie tę jedną, znaną odpowiedź makroskopową,  $\lambda^{\text{hom}}$ . Jednoznaczność zagadnienia odwrotnego, w którym identyfikuje się mikrostrukturę ekwiwalentną, zapewnia się przez uzupełnienie go o dodatkowe warunki w postaci założenia struktury – w sensie typu morfologii – poszukiwanej mikrostruktury zastępczej. Wówczas w ogólnym przypadku, jak wskazali Sevostianov i Kachanov (2015), rozwiązanie zagadnienia odwrotnego sprowadza się do wyznaczenia tzw. parametru koncentracji (ang. *concentration parameter*), który jest jawnym argumentem funkcji charakteryzującej makroskopową przewodność cieplną ośrodka, tj.  $\lambda^{\text{hom}} = f(\text{„parametr koncentracji”})$ . Zakładając na przykład, że ekwiwalentną mikrostrukturę tworzy ciągła matryca z zanurzonymi w niej wtrąceniami sferycznymi (jest to właśnie dodatkowe uwarunkowanie rozwiązania zagadnienia odwrotnego), zagadnienie odwrotne w ujęciu schematu Mori–Tanaki, sprowadza się po prostu do określenia udziału frakcyjnego wtrąceń,  $\phi = \phi^*$ , który jest tu rozumiany właśnie jako parametr koncentracji. Podobne zagadnienie zostało sformułowane i rozwiązane przez Kachanova i Sevostianova (2005), którzy udowodnili, że jakakolwiek izotropowa „mieszanina” dowolnych niejednorodności jest ekwiwalentna, w sensie makroskopowej przewodności cieplnej, do losowo rozmieszczonych (w ciągłej matrycy) wtrąceń sferycznych o udziale frakcyjnym,  $\phi = \phi^*$ .

Oczywiście jest, że taka ekwiwalentna mikrostruktura, charakteryzowana parametrem koncentracji  $\phi^*$ , obowiązuje dla jednej, konkretnej wartości makroskopowej przewodności cieplnej,  $\lambda^{\text{hom}}$ . Aby to lepiej zobrazować, rozważmy rzeczywisty ośrodek porowaty, którego przestrzeń porowa w pełni zajmowana jest (jeden pod drugim) płynami o różnych przewodnościach cieplnych, np.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , itd. Za każdym razem, gdy przestrzeń porowa jest w pełni wypełniona, wyznaczamy (np. przez pomiar laboratoryjny) makroskopową przewodność cieplną. Uzyskujemy zatem pewien zbiór odpowiedzi makroskopowych, tj.  $\lambda^{\text{hom},1}, \lambda^{\text{hom},2}, \dots$ , itd. Rozwiązując opisane zagadnienie odwrotne dla każdego przypadku makroskopowej przewodności cieplnej, otrzymane ekwiwalentne mikrostruktury, a mianowicie udziały frakcyjne wtrąceń sferycznych, będą za każdym razem inne. Tak naprawdę uzyskamy sekwencję parametrów koncentracji:  $\phi^{*,1}, \phi^{*,2}, \dots$ , itd. Tak określona zatem wirtualna mikrostruktura nie może być traktowana jako ekwiwalentna w „ogólnym” sensie, a raczej jako mikrostruktura dedykowana konkretnej odpowiedzi makroskopowej. Ponadto zauważmy, że jako zwykły parametr dopasowania, wartość  $\phi^*$ , w ogólnym przypadku, nie jest zgodna z porowatością ośrodka rzeczywistego. Innymi słowy taka zamiana rzeczywistego ośrodka na wirtualną mieszaninę wtrąceń sferycznych, w ogólności, nie zachowuje udziału frakcyjnego ośrodka rzeczywistego (Kachanov i Sevostianov 2005).

W pracy Sevostianova i Kachanova (2012) pokazano, że w trakcie zamiany ośrodka rzeczywistego na ekwiwalentny oryginalny udział frakcyjny wtrąceń może być zachowany, jeśli wykorzystana jest inna wartość parametru koncentracji, mianowicie tzw. uśredniony kształt (ang. *average shape*). Mówiąc bardziej precyzyjnie ta zmodyfikowana koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury polega na zastąpieniu niejednorodności ośrodka oryginalnego przez jedną rodzinę wtrąceń sferoidalnych, reprezentujących określony kształt opisany uśrednionym parametrem  $\theta = \theta^*$ . „Uśredniony kształt”, a więc wartość parametru  $\theta^*$ , określana jest ponownie przez rozwiązanie zagadnienia odwrotnego. Wiadomą w tym przypadku jest oczywiście znana przewodność cieplna ośrodka rzeczywistego oraz założenie o tym, że mikrostruktura medium zastępczego dana jest w postaci ciągłej matrycy, w której zanurzone są losowo rozmieszczone i identyczne wtrącenia sferoidalne (np. mikrostruktura z prawej strony rys. 8.6) charakteryzowane określonym parametrem kształtu,  $\theta^*$ . Sevostianov i Kachanov (2012) wykazali, że jakakolwiek „mieszanina” dowolnych niejednorodności – charakteryzujących się izotropową przewodnością cieplną – może zostać zastąpiona właśnie przez losowo rozmieszczone wtrącenia sferoidalne o identycznych udziałach frakcyjnych i stosunku pól  $\theta = \theta^*$ , przy czym zamiana ta zachowuje oryginalną wartość udziału frakcyjnego wtrąceń w ośrodku rzeczywistym. Zauważmy jednak, że podobnie jak parametr koncentracji  $\phi^*$ , tak również „uśredniony kształt”  $\theta^*$ , nie może być traktowany jako ekwiwalentna mikrostruktura w „ogólnym” sensie – zmiana odpowiedzi makroskopowej ośrodka rzeczywistego (np. gdy zmienia się przewodność cieplna składników ośrodka rzeczywistego), w ogólnym przypadku, może powodować konieczność określenia nowej wartości parametru  $\theta^*$ .

Ta niedoskonałość istniejących w literaturze koncepcji ekwiwalentnych mikrostruktur stała się motywacją do podjęcia próby zidentyfikowania takiego ośrodka zastępczego, którego mikrostruktura nie będzie się zmieniała, jeśli zmianie ulegnie np. przewodność cieplna płynu wypełniającego przestrzeń porową ośrodka rzeczywistego. We wcześniejszej pracy autora (Łydzba i in. 2018) zaproponowano koncepcję ekwiwalentnej mikrostruktury rozumianej właśnie w takim „ogólnym” sensie. Innymi słowy, dla kolejnych sekwencji przewodności cieplnych płynu wypełniającego przestrzeń porową, tj.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , a w konsekwencji dla odpowiadających im makroskopowych przewodności cieplnych, tj.  $\lambda^{\text{hom},1}, \lambda^{\text{hom},2}, \dots$ , postulowano, że istnieje jeden ośrodek zastępczy, który jest ekwiwalentny/równoważny pod względem sekwencji makroskopowych odpowiedzi z rozważanym ośrodkiem rzeczywistym. Tak zidentyfikowana mikrostruktura ekwiwalentna jest więc niezmiennicza ze względu na parametry termiczne – przewodności cieplne – składników tworzących ośrodek rzeczywisty.

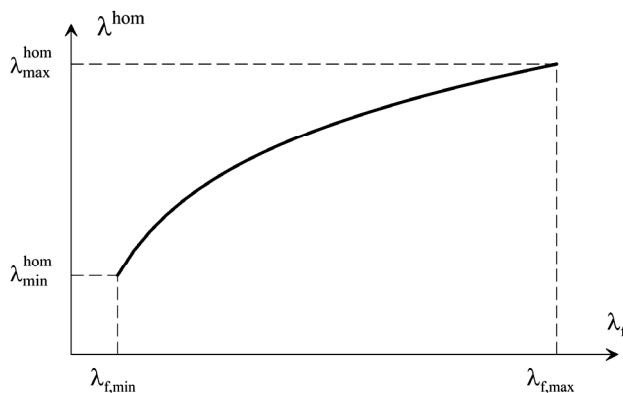
Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego, którego efektem jest identyfikacja takiej właśnie mikrostruktury, przedstawia się w punkcie 8.2.1, przy czym w prezentacji skupiono się na najważniejszych aspektach dotyczących proponowanej

koncepcji ośrodka zastępczego – szczegóły znaleźć można we wspomnianej pracy Łydźby i in. (2018). W punktach 8.2.2 i 8.2.3 prezentuje się przykłady obliczeniowe, w których wyznacza się ekwiwalentną mikrostrukturę dla dwóch mikrostruktur: piasku średniego oraz piaskowca Fontainebleau.

### 8.2.1. Określanie ekwiwalentnej mikrostruktury: zagadnienie odwrotne

Rozważaniom poddaje się ośrodek porowaty, którego szkielet charakteryzuje się przewodnością cieplną  $\lambda_s$ , natomiast przestrzeń porowa jest w pełni wypełniona płynem o przewodności cieplnej  $\lambda_f$ . Oznaczmy porowatość ośrodka jako  $n = \phi_f$ . Wówczas oczywiste jest, że udział frakcyjny szkieletu wynosi  $\phi_s = 1 - \phi_f$ . Dla takiego ośrodka dążymy do zidentyfikowania mikrostruktury ekwiwalentnej rozumianej w „ogólnym” sensie, a więc takiej, która zapewni dobrą predykcję jego przewodności cieplnej (w ujęciu schematów aproksymacji analitycznej, np. schematu Mori–Tanaki itp.) niezależnie od przewodności cieplnej płynu wypełniającego jego przestrzeń porową,  $\lambda_f$ . Innymi słowy, ośrodek zastępczy ma zapewniać dobrą predykcję nie tylko dla jednej, wybranej wartości  $\lambda^{\text{hom}}$ , ale dla funkcji makroskopowej przewodności cieplnej  $\lambda^{\text{hom}}(\lambda_f)$ , której „przebieg” definiuje mikrostruktura oraz parametry termiczne ośrodka rzeczywistego – przykład typowej charakterystyki  $\lambda^{\text{hom}}-\lambda_f$  dla ośrodka porowatego przedstawiono na rys. 8.7.

Z rozważań przedstawionych we wstępie do tego podrozdziału wynika jasno, że ekwiwalentna mikrostruktura nie może być zdefiniowana, w ogólnym przypadku, jedną „rodziną” wtrąceń. Wydaje się więc, że aby możliwe było zapewnienie dobrej predykcji przewodności cieplnej ośrodka rzeczywistego, niezależnie od przewodności cieplnej płynu wypełniającego jego przestrzeń porową, ośrodek zastępczy powinien charakteryzować się bardziej złożoną mikrostrukturą. W dalszym ciągu (analogicznie do pracy Sevostianova i Kachanova (2012)) postuluje się, że morfologia ekwiwalentnej mikrostruktury dana jest w postaci ciągłej matrycy z zanurzonymi w niej sferoidalnymi wtrąceniami (zauważmy, że dla inkluzji sferoidalnych parametr  $\theta$  znajduje się w przedziale 0–1). Jednakże, aby ośrodek zastępczy miał większą „swobodę” dopasowania się do szerszego zakresu makroskopowych przewodności cieplnych (chcemy bowiem, aby zapewniał on poprawną predykcję funkcji makroskopowej odpowiedzi  $\lambda^{\text{hom}}(\lambda_f)$  – rys. 8.7), postuluje się, że przestrzeń porową stanowi nieskończona liczba „rodzin” wtrąceń sferoidalnych, których częstość występowania charakteryzowana jest ciągłą funkcją gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$  – rys. 8.8. Opierając się na schematach aproksymacji analitycznej można powiedzieć, że zastosowanie nieskończonej liczby „rodzin” wtrąceń, w odróżnieniu od stosowania skończonej liczby typów inkluzji, prowadzi do „zrelaksowania” problemu przez dodanie do niego dodatkowych „stopni swobody”.

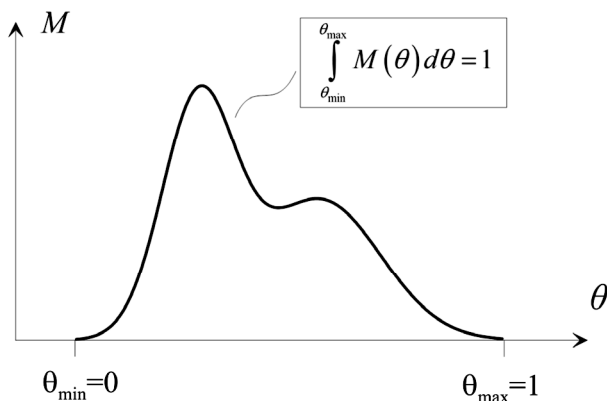


Rys. 8.7. Przykład funkcji makroskopowej przewodności cieplnej dla ośrodka porowatego

Zauważmy zatem, że w odróżnieniu od powszechnie stosowanych w literaturze koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury, gdzie poszukuje się po prostu jednej konkretnej wartości parametru, np.  $\phi^*$  lub  $\bar{\theta}$ , tym razem rozwiązanie zagadnienia odwrotnego polega na zidentyfikowaniu funkcji  $M(\theta)$ , która opisuje częstość występowania wtrąceń o zadanym stosunku półośi. W ujęciu matematycznym rozwiązanie takiego zagadnienia odwrotnego wydaje się znacznie trudniejsze.

W rezultacie w celu identyfikacji funkcji  $M(\theta)$  formułuje się następujące zagadnienie odwrotne. Jeśli dla rzeczywistego ośrodka porowatego (np. gruntu) dane są:

- ciągła lub dyskretna postać funkcji makroskopowej przewodności cieplnej (rys. 8.7), przy czym dyskretna postać tej funkcji jest po prostu sekwencją następujących wartości:  $\{\lambda^{\text{hom}}(\lambda_{f,1}); \lambda^{\text{hom}}(\lambda_{f,2}), \dots\}$ ,
- przewodność cieplna szkieletu  $\lambda_s$ ,
- porowatość  $n = \phi_f$ ,



Rys. 8.8. Przykład funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\theta$

to celem jest zidentyfikowanie optymalnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , tj. takiej, która wykorzystana w schematach aproksymacyjnych, np. Mori–Tanaki lub samouzgodnionego pola zapewni możliwie najlepszą predykcję funkcji makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka rzeczywistego,  $\lambda^{\text{hom}}(\lambda_f)$ . Jeżeli taka funkcja istnieje i, dodatkowo, jeśli spełnia powyższe wymagania, to będzie ona określana mianem funkcji mikrostruktury ekwiwalentnej lub po prostu mikrostrukturą ekwiwalentną; w dalszej części pracy będzie ona oznaczana symbolem  $M^{\text{eq}}(\theta)$ . Dalej przedstawiono sformułowanie matematyczne rozważanego zagadnienia odwrotnego.

Zauważmy, że zastosowanie ciągłej funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , powoduje, że klasyczne sformułowania schematów Mori–Tanaki (4.28) oraz samouzgodnionego pola (4.29) muszą zostać odpowiednio zmodyfikowane. Dla przypadku, gdy przestrzeń porowa ośrodka wypełniona jest płynem o znanej przewodności cieplnej,  $\lambda_f$ , można pokazać, że makroskopowa przewodność cieplna, w ujęciu schematu Mori–Tanaki, wyraża się następującą zależnością:

$$\lambda^{\text{hom}}(\lambda_f) = \frac{\phi_f \lambda_f \int_0^1 P^{\text{f},\text{M}}(\lambda_f, \theta) M(\theta) d\theta + (1 - \phi_f) \lambda_s P^{\text{s},\text{M}}}{\phi_f \int_0^1 P^{\text{f},\text{M}}(\lambda_f, \theta) M(\theta) d\theta + (1 - \phi_f) P^{\text{s},\text{M}}} \quad (8.1)$$

gdzie zgodnie z zależnością (4.27) operatory lokalizacji  $P^{\text{f},\text{M}}$  oraz  $P^{\text{s},\text{M}}$  wynoszą:

$$P^{\text{f},\text{M}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_f - \lambda_s}{\lambda_s} \right)^{-1} \quad (8.2)$$

oraz

$$P^{\text{s},\text{M}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_s - \lambda_s}{\lambda_s} \right)^{-1} = 1 \quad (8.3)$$

W przypadku schematu samouzgodnionego pola można pokazać, że

$$\lambda^{\text{hom}}(\lambda_f) = \frac{\phi_f \lambda_f \int_0^1 P^{\text{f},\text{hom}}(\lambda_f, \theta) M(\theta) d\theta + (1 - \phi_f) \lambda_s P^{\text{s},\text{hom}}(\lambda_s)}{\phi_f \int_0^1 P^{\text{f},\text{hom}}(\lambda_f, \theta) M(\theta) d\theta + (1 - \phi_f) P^{\text{s},\text{hom}}(\lambda_s)} \quad (8.4)$$

gdzie, zgodnie z zależnością (4.30), operatory lokalizacji  $P^{\text{f},\text{hom}}$  i  $P^{\text{s},\text{hom}}$  wynoszą, odpowiednio:

$$P^{\text{f},\text{hom}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_f - \lambda^{\text{hom}}}{\lambda^{\text{hom}}} \right)^{-1} \quad (8.5)$$

oraz

$$P^{s,\text{hom}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_s - \lambda^{\text{hom}}}{\lambda^{\text{hom}}} \right)^{-1} \quad (8.6)$$

Jak wspomniano już wcześniej, schemat samouzgodnionego pola wymaga założenia dotyczącego geometrii wtrąceń, z których utworzona jest macierz osrodka. Podobnie jak w prezentowanych wcześniej przykładach oszacowań dla osrodków trójskładnikowych (podrozdz. 8.1), przyjmuje się, że macierz zbudowana jest z wtrąceń sferycznych ( $\theta = 1$ ). Implikuje to, że operator lokalizacji (8.6) ostatecznie wyrażony jest zależnością:

$$P^{s,\text{hom}} = \frac{3\lambda^{\text{hom}}}{2\lambda^{\text{hom}} + \lambda_s} \quad (8.7)$$

Wykonując dalsze przekształcenia algebraiczne, łatwo pokazać, że sformułowania schematów Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola można wyrazić za pomocą równania całkowego:

$$\int_0^1 P^{f,*}(\lambda_f, \theta) M(\theta) d\theta = g(\phi_f, \lambda_f, \lambda_s, \lambda^{\text{hom}}(\lambda_f), P^{s,*}) \quad (8.8)$$

gdzie

$$g = \frac{1 - \phi_f}{\phi_f} \frac{\lambda_s - \lambda^{\text{hom}}(\lambda_f)}{\lambda^{\text{hom}}(\lambda_f) - \lambda_f} P^{s,*} \quad (8.9)$$

Jak widać, oba schematy aproksymacyjne sprowadzają się w zasadzie do jednego wspólnego równania całkowego. Aby taka reprezentacja było możliwa, w poprzednim równaniu, w oznaczeniach operatorów lokalizacji, wprowadzono indeks górny „\*„. Należy to rozumieć w taki sposób, że w przypadku schematu Mori–Tanaki indeks górny „\*„ należy zamienić na „ $M$ ” i wówczas dla operatorów lokalizacji obowiązują zależności (8.2) i (8.3). Dla schematu samouzgodnionego pola symbol „\*„ zamienia się w oznaczenie „hom” i wówczas odpowiednie operatory lokalizacji należy określać zgodnie z zależnościami (8.5) i (8.7).

Zauważmy, że sformułowanie obu schematów wyrażone zależnością (8.8) jest równaniem całkowym Fredholma pierwszego rodzaju (np. Kress i in. 1989). W ujęciu zatem matematycznym rozwiązanie sformułowanego wcześniej zagadnienia odwrotnego (pod kątem obu schematów aproksymacyjnych) polega na zidentyfikowaniu optymalnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $M(\theta)$  po założeniu, że dane jest jądro równania całkowego, tj.  $P^{f,*}(\lambda_f, \theta)$  oraz znana jest funkcja  $g$  wyrażona zależnością (8.9).

Jeśli zidentyfikowana funkcja spełnia (z pewnym założonym błędem) równanie (8.8), to będzie ona określana mianem funkcji mikrostruktury ekwiwalentnej lub po prostu mikrostrukturą ekwiwalentną,  $M^{eq}(\theta)$ .

Warto tu nadmienić, że powyższe zagadnienie odwrotne jest dodatkowo uwarunkowane. Po pierwsze, nakłada się warunek, iż ośrodek zastępczy ma zachowywać oryginalny udział frakcyjny medium, dla którego poszukuje się mikrostruktury ekwiwalentnej. Po drugie, ze względu na to, iż  $M(\theta)$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa, musi ona spełniać wynikające z tego uwarunkowania, tj.:

$$\int_0^1 M(\theta) d\theta = 1 \quad (8.10)$$

oraz

$$\forall_{\theta \in [0,1]} M(\theta) \geq 0 \quad (8.11)$$

Podobnie jak poprzednio rozważane zagadnienia odwrotne, tak i zagadnienie identyfikacji ekwiwalentnej mikrostruktury proponuje się rozwiązywać metodą symulowanego wyżarzania. Ze względu na fakt, iż funkcja makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka rzeczywistego (rys. 8.7) zazwyczaj dana jest w postaci dyskretnej (jako sekwencja pomiarów laboratoryjnych, dla różnych „wypełnień” przestrzeni porowej), w dalszym ciągu przedstawia się dyskretne sformułowanie procedury identyfikacji funkcji  $M^{eq}(\theta)$ . Stosuje się zatem dyskretną funkcję gęstości prawdopodobieństwa, co uzyskuje się przez podział przedziału możliwych wartości  $\theta$  (tj.  $[0, 1]$ ) na  $N_\theta$  odcinków, każdy o długości  $\Delta_k$ , tj.  $[\theta_k - \Delta_k/2, \theta_k + \Delta_k/2]$ . Każdemu odcinkowi przypisuje się stałą wartość prawdopodobieństwa, równą  $M(\theta_k)\Delta_k$ . Analogicznie postępujemy z funkcją makroskopowej przewodności cieplnej – przedział  $[\lambda_{f,\min}, \lambda_{f,\max}]$  przedstawia się w postaci  $N_\lambda$  „węzłów”, a każdemu z nich przypisuje się wartość przewodności cieplnej płynu wypełniającego przestrzeń porową,  $\lambda_f$  ( $f = 1, 2, \dots, N_\lambda$ ). Wobec tego w dowolnym kroku iteracyjnym metody symulowanego wyżarzania definiuje się fikcyjną „energię” jako:

$$E = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{f=1}^{N_\lambda} \left( \frac{\sum_{k=1}^{N_\theta} P^{f,*}(\lambda_f, \theta_k) M(\theta_k) \Delta_k - g(\phi_f, \lambda_f, \lambda_s, \lambda^{\text{hom}}(\lambda_f), P^{s,*})}{g(\phi_f, \lambda_f, \lambda_s, \lambda^{\text{hom}}(\lambda_f), P^{s,*})} \right)^2 \quad (8.12)$$

Poprzednie sformułowanie jest oczywiście konsekwencją postaci rozwiązywanego równania całkowego i jest po prostu kwadratem różnicy lewej i prawej strony równania (8.8). Obecność w równaniu współczynnika  $1/g^2$  wynika z konieczności zapewnienia tego samego rzędu błędu względnego dla wszystkich wartości węzłowych  $\lambda_f$  (Łydźba i in. 2018).



Za konfigurację początkową przyjmuje się, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , jest zgodna z rozkładem równomiernym. Oznacza to, że na początku procesu optymalizacji każda wartość parametru  $\theta$  z zakresu 0 do 1 jest równoprawdopodobna. Ewolucja funkcji  $M(\theta)$ , w celu minimalizacji „energii” (8.12), odbywa się poprzez zamianę wartości prawdopodobieństwa dla dwóch losowo wybranych przedziałów. Polega to na wylosowaniu dwóch wartości „węzłowych”, powiedzmy  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Następnie odpowiadające im wartości prawdopodobieństwa, tj.  $M(\theta_1)\Delta_1$  oraz  $M(\theta_2)\Delta_2$  zostają w odpowiedni sposób zmodyfikowane – jedna z nich zostaje zwiększona, podczas gdy druga pomniejszona o stałą wartość wynoszącą  $1 \times 10^{-3}$  początkowej wartości prawdopodobieństwa. Za każdym razem sprawdza się czy taka modyfikacja aktualnej konfiguracji nie powoduje, że dane prawdopodobieństwo przyjmuje wartości ujemne – takie zmiany są automatycznie odrzucane. W konsekwencji procedura zmiany konfiguracji zachowuje warunki (8.10) i (8.11), które dla przypadku dyskretnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa opisują następujące zależności:

$$\sum_{k=1}^{N_0} M(\theta_k) \Delta_k = 1 \quad \text{oraz} \quad \forall_{\theta_k} M(\theta_k) \Delta_k \geq 0 \quad (8.13)$$

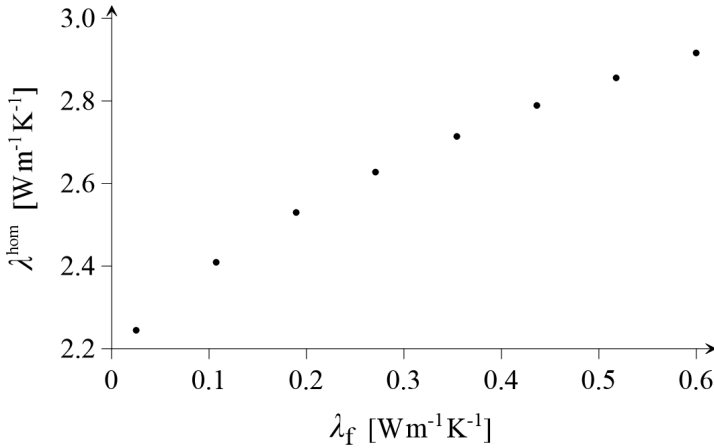
Zgodnie z algorytmem symulowanego wyżarzania, po każdej zmianie konfiguracji oblicza się nową wartość „energii”,  $E^*$ , zgodnie z równaniem (8.12) oraz różnicę pomiędzy aktualną i poprzednią konfiguracją,  $\Delta E$  – zależność (7.5). Aktualna konfiguracja jest zatwierdzana lub odrzucana zgodnie z prawem akceptacji (7.6).

## 8.2.2. Ekwiwalentna mikrostruktura dla piaskowca Fontainebleau

Celem wyznaczenia ekwiwalentnej mikrostruktury dla cyfrowego obrazu mikrostruktury piaskowca Fontainebleau (rys. 7.5), w pierwszej kolejności, wyznacza się funkcję makroskopowej przewodności cieplnej. Przyjmijmy, że przestrzeń porowa (białe piksele) wypełniana jest (jeden po drugim) ośmioma<sup>23</sup> płynami ( $N_\lambda = 8$ ) charakteryzującymi się różnymi przewodnościami cieplnymi,  $\lambda_\ell$ . Za każdym razem wartość makroskopowej przewodności cieplnej wyznacza się na podstawie obliczeń numerycznych przeprowadzonych z wykorzystaniem autorskiego programu bazującego na metodzie objętości skończonych<sup>24</sup>. Uzyskaną na drodze symulacji numerycznych, dyskretną postać funkcji makroskopowej przewodności cieplnej dla piaskowca Fontainebleau przedstawiono na rys. 8.9.

<sup>23</sup> W pracy Łydźby i in. (2018) wykazano, że osiem wartości jest wystarczającą informacją dla poprawnej identyfikacji ekwiwalentnej mikrostruktury w ujęciu schematów aproksymacji analitycznej.

<sup>24</sup> Program i metoda rozwiązywania zostały szerzej omówione w podrozdziale 6.3.



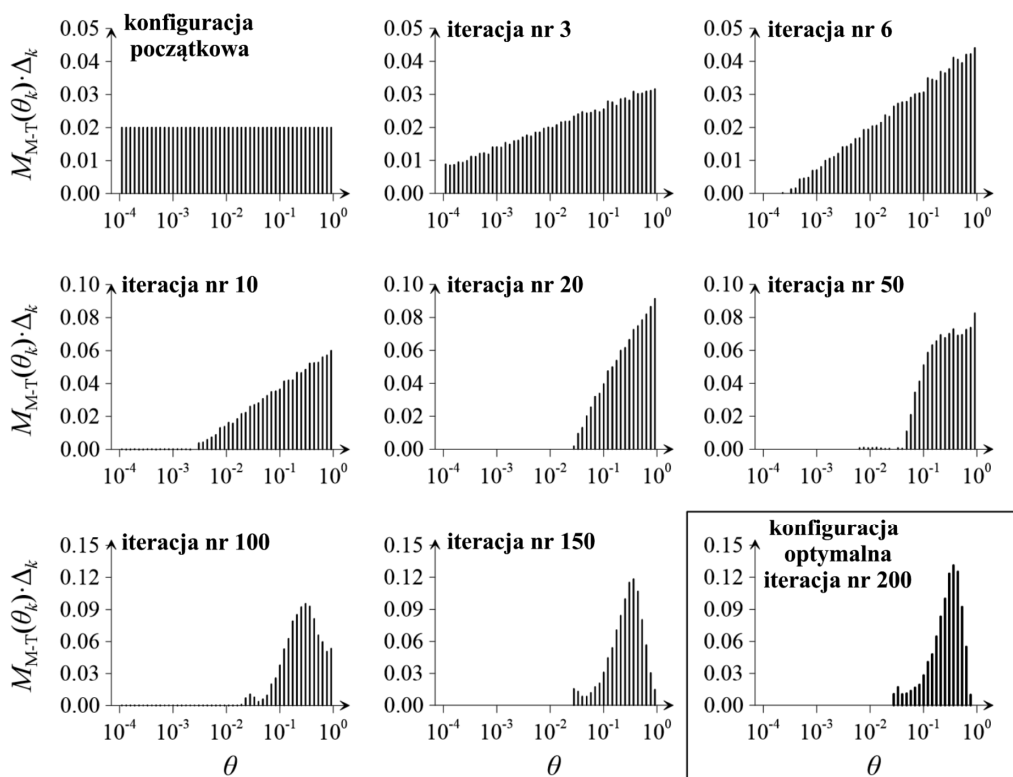
Rys. 8.9. Dyskretna funkcja makroskopowej przewodności cieplnej dla zrekonstruowanej mikrostruktury piaskowca Fontainebleau

Minimalna i maksymalna wartość przewodności cieplnej płynu wypełniającego przestrzeń porową,  $\lambda_f$ , odpowiada przewodności cieplnej, odpowiednio, powietrza oraz wody (wartości przyjęto na podstawie tab. 2.1). W analizie zakłada się, że wartość przewodności cieplnej szkieletu wynosi  $4,0$  [Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>]. Ponieważ zamiana ośrodka rzeczywistego, a więc mikrostruktury piaskowca na ośrodek ekwiwalentny, z założenia zachowuje udział frakcyjny przestrzeni porowej, to ta informacja uzupełnia zbiór danych rozwiązywanego zagadnienia odwrotnego – porowatość zrekonstruowanej mikrostruktury piaskowca Fontainebleau wynosi  $\phi_f = 0,175$ .

W algorytmie symulowanego wyżarzania, opisanym w poprzednim punkcie, przyjmuje się dyskretną postać poszukiwanej funkcji  $M(\theta)$ . Analogiczne postępowanie stosuje się w analizowanym tutaj przykładzie – dziedziną funkcji  $M(\theta)$  została podzielona na  $N_\theta = 50$  odcinków. Wraz z postępującymi iteracjami algorytmu, fikcyjną temperaturę  $T^*$  obniża się zgodnie z zależnością (7.7), przy czym, podobnie jak we wcześniej rozważanych zagadnieniach odwrotnych, przyjęto, że wartość współczynnika  $\alpha$  wynosi  $0,9$ . W ramach każdej iteracji wykonuje się  $10\,000$  kroków, tj. zmian konfiguracji funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ . Początkową wartość fikcyjnej temperatury,  $T_0^*$ , określono tak, aby prawdopodobieństwo akceptacji „gorszych” konfiguracji, na początku procesu optymalizacji, było na poziomie  $80\text{--}90\%$ .

Zagadnienie odwrotne rozwiązano w ujęciu obu rozważanych w pracy schematów aproksymacyjnych, tj. Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa odpowiadające obu schematom odróżniono przez zastosowanie indeksów dolnych, M–T oraz S–C, odpowiednio, dla schematu Mori–Tanaki oraz schematu samouzgodnionego pola. Wyniki w postaci ewolucji funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , zestawiono na rys. 8.10 oraz 8.11.

W obu przypadkach, w lewym górnym narożniku prezentuje się konfigurację początkową, a więc równomierny rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej  $\theta$ . W prawym dolnym narożniku (w ramce) wyróżniono optymalną konfigurację, czyli mikrostrukturę zidentyfikowaną jako ekwiwalentną. Kryterium zatrzymania przyjęto w taki sposób, że algorytm zatrzymywano wówczas, gdy następujące po sobie 3 kolejne iteracje nie powodowały już „wyraźnej” poprawy rozwiązania. Zarówno w przypadku schematu Mori–Tanaki, jak i samouzdgnionego pola, konfiguracje optymalne uzyskano po 200 iteracjach.

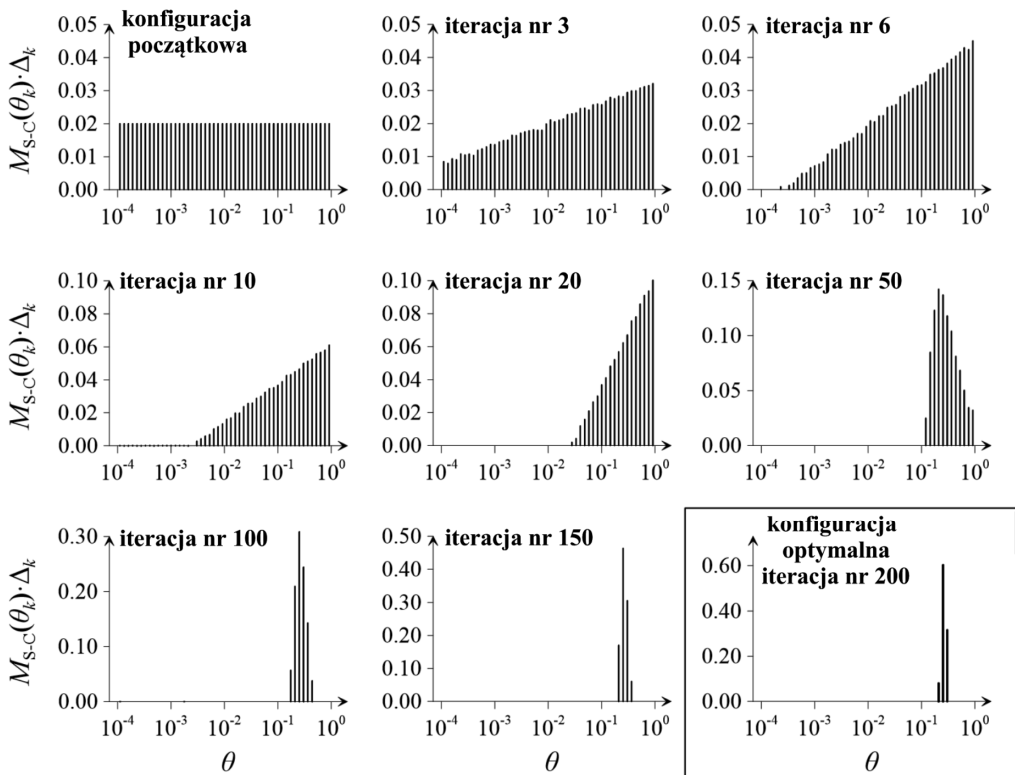


Rys. 8.10. Ewolucja funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $M_{M-T}(\theta)$  (w ujęciu schematu aproksymacyjnego Mori–Tanaki) uzyskana na podstawie algorytm symulowanego wyżarzania: piaskowiec Fontainebleau

Obserwując wyniki można zauważyć, że w zależności od przyjętego schematu aproksymacyjnego, zidentyfikowane mikrostruktury ekwiwalentne wyraźnie się od siebie różnią. Postać ekwiwalentnej mikrostruktury jest zatem zależna od stosowanego schematu aproksymacyjnego. Optymalna funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla przypadku schematu Mori–Tanaki (rys. 8.10) ma wyraźnie bardziej „losowy” charakter, w porównaniu do mikrostruktury ekwiwalentnej zidentyfikowanej w ramach schematu samouzdgnionego pola

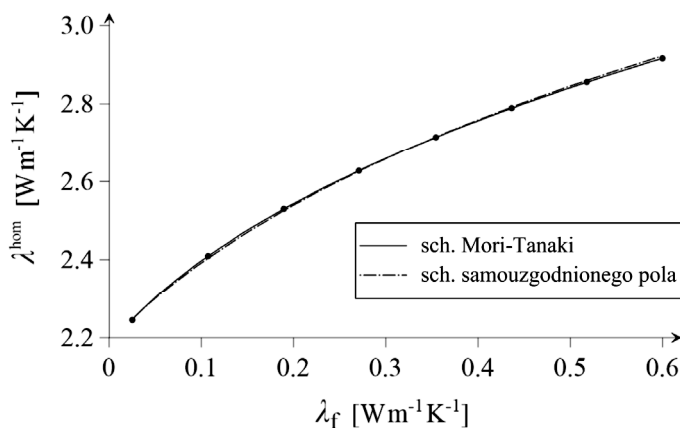
(rys. 8.11). W zasadzie, w przypadku schematu samouzgodnionego pola, funkcja  $M_{S-C}(\theta)$  dąży do wyodrębnienia pojedynczej „rodziny” wtrąceń o jednej konkretnej wartości parametru  $\theta$ . Jest to zbieżne z analizami, które prowadzono np. w rozdziale 7, gdzie przez rozwiązanie zagadnienia odwrotnego (uzyskane w zupełnie odmienny sposób niż tutaj) wykazano, że poszczególne składniki nasyconego ośrodka gruntowego mogą być charakteryzowane pojedynczymi „rodzinami” wtrąceń o optymalnych wartościach parametrów kształtu (zob. tab. 7.4). Takie podejście zapewniało wówczas bardzo dobrą zgodność predykcji oraz pomiarów przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego,  $\lambda^{\text{sat}}$ .

Funkcje gęstości prawdopodobieństwa, zidentyfikowane przez algorytm symulowanego wyżarzania jako optymalne, wykorzystuje się następnie w schematach Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola w celu dokonania predykcji makroskopowej przewodności cieplnej dla piaskowca Fontainebleau. Innymi słowy, w ten sposób dokonuje się weryfikacji, czy zidentyfikowane mikrostruktury ekwiwalentne faktycznie zapewniają dobrą predykcję funkcji odpowiedzi makroskopowej przedstawionej na rys. 8.9.



Rys. 8.11. Ewolucja funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $M_{S-C}(\theta)$  (w ujęciu schematu samouzgodnionego pola) uzyskana na podstawie algorytmu symulowanego wyżarzania: piaskowiec Fontainebleau

Wyniki zestawiono na jednym wspólnym wykresie na rys. 8.12. Dyskretne punkty odpowiadają oczywiście oryginalnej funkcji odpowiedzi makroskopowej; są to zatem te same dane, które prezentuje rys. 8.9. Liniami, ciągłą oraz przerywaną, przedstawiono predykcje uzyskane z wykorzystaniem zidentyfikowanych mikrostruktur ekwiwalentnych, odpowiednio, dla schematu Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola. Jak można zauważyć w przypadku obu schematów aproksymacyjnych, wirtualne/zastępcze mikrostruktury zapewniają niemal perfekcyjną zgodność z oryginalną funkcją makroskopowej przewodności cieplnej piaskowca Fontainebleau. Są to więc mikrostruktury ekwiwalentne rozumiane w „ogólnym” sensie, w jakim zdefiniowano je w poprzednim punkcie. Oznacza to, że są niezmiennicze względem przewodności cieplnej płynu wypełniającego przestrzeń porową ośrodka.



Rys. 8.12. Predykcja funkcji makroskopowej przewodności cieplnej z wykorzystaniem mikrostruktur ekwiwalentnych – piaskowiec Fontainebleau

Poniżej, w kolejnym punkcie, wykorzystując analogiczne podejście jak dla cyfrowego obrazu mikrostruktury piaskowca Fontainebleau, dokonuje się identyfikacji ekwiwalentnej mikrostruktury dla rzeczywistego ośrodka gruntowego, tj. piasku średniego. Funkcję makroskopowej przewodności cieplnej, w tym przypadku, określa się na podstawie sekwencji pomiarów laboratoryjnych. Podobnie, jak w przypadku piaskowca Fontainebleau, zastępcze/wirtualne mikrostruktury identyfikuje się w ujęciu obu schematów analitycznych, tj. Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola.

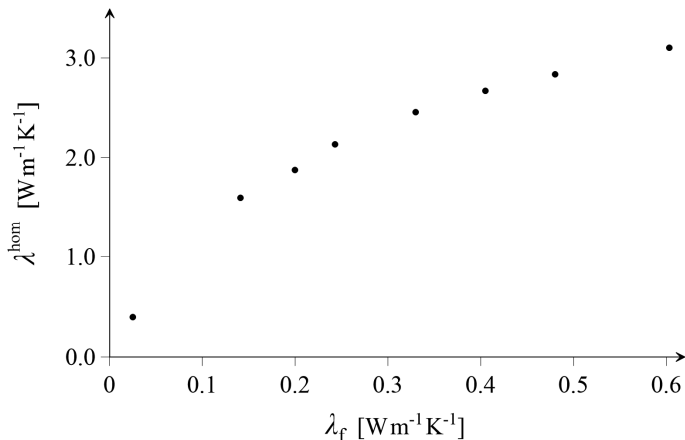
### 8.2.3. Ekwiwalentna mikrostruktura dla piasku średniego

Prezentowane w tym punkcie wyniki w zakresie identyfikacji ekwiwalentnej mikrostruktury dla piasku średniego pochodzą z wcześniejszej pracy autora (Łydźby i in. (2018)), stąd też omawia się je w sposób bardzo skrótowy. W celu bardziej szczegó-

lowego zapoznania się z aspektami rozważanego problemu, autor odsyła czytelnika do wspomnianej pracy.

Mikrostrukturę rozważanego w tym punkcie ośrodka gruntowego zaprezentowano na rys. 4.8. Zauważmy, że w odróżnieniu od rozważanego wcześniej przykładu tym razem, aby określić funkcję makroskopowej przewodności cieplnej, należy przeprowadzić serię pomiarów laboratoryjnych przewodności cieplnej w stanie pełnego nasycenia płynami o różniących się przewodnościach cieplnych. W rezultacie wykonano sekwencję ośmiu pomiarów makroskopowej przewodności cieplnej, przy czym za każdym razem przestrzeń porowa gruntu zajmowana była w całości przez inny płyn. Pomiar laboratoryjny<sup>25</sup> przeprowadzono z użyciem testu sondy igłowej (metodę szczegółowo opisano w rozdz. 5). Uzyskaną na drodze identyfikacji laboratoryjnej dyskretną postać funkcji odpowiedzi makroskopowej przedstawiono na rys. 8.13. Najniższa oraz najwyższa wartość  $\lambda^{\text{hom}}$  odpowiadają oczywiście przypadkowi gruntu suchego (przestrzeń porowa zajmowana w całości przez powietrze) oraz nasyconego wodą. Pośrednie wartości funkcji makroskopowej przewodności cieplnej uzyskano, stosując „wypełniacz” przestrzeni porowej, np. roztwory glikolu monoetylenowego, olej silnikowy 5W-30 itp. (Łydźba i in. (2018)).

W celu uzupełnienia zagadnienia odwrotnego o niezbędną informację, dotyczącą porowatości gruntu, wykonano również badanie laboratoryjne, aby wyznaczyć tę cechę fizyczną – porowatość piasku określono jako równą  $\phi_f = 0,318$ .



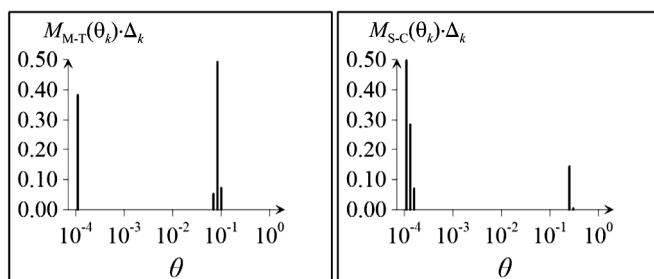
Rys. 8.13. Dyskretna funkcja makroskopowej przewodności cieplnej dla rozważanego piasku średniego (Łydźba i in. 2018)

<sup>25</sup> Badania laboratoryjne zostały przeprowadzone w znacznej części przez mgr. inż. Damiana Stefaniuka, w którego przewodzie doktorskim pełnił funkcję promotora pomocniczego. W niniejszej monografii prezentuje się jedynie same wyniki, natomiast warunki i opis eksperymentu opisane są szczegółowo w jego rozprawie doktorskiej.

Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego, a więc identyfikację mikrostruktury ekwiwalentnej, dokonano wykorzystując ponownie algorytm symulowanego wyżarzania. Przyjęto identyczne parametry kontrolne algorytmu symulowanego wyżarzania z przypadkiem rozważanego wcześniej przykładu dotyczącego piaskowca Fontainebleau. Na rysunku 8.14 zaprezentowano optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , a więc te, dla których osiągnięto minimum energii (8.12). Ponownie w przypadku obu schematów, konfiguracje optymalne uzyskano po 200 iteracjach algorytmu (Łydźba i in. (2018)).

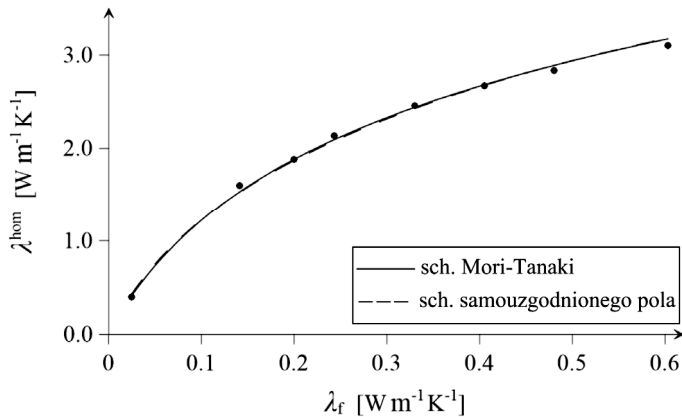
Jak można zauważyć, obie uzyskane funkcje (rys. 8.14) w zasadzie „zbiegają” do dwóch dyskretnych „rodzin” wtrąceń. Gęstość prawdopodobieństwa w obu przypadkach koncentruje się wokół dwóch wartości  $\theta$ ; pierwsza z „rodzin” wtrąceń charakteryzowana jest wartością  $\theta$  około  $10^{-4}$ , druga to, zależnie od schematu, nieco poniżej oraz powyżej wartości  $\theta = 10^{-1}$ , odpowiednio, dla schematu Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola. Jednak, pomimo iż obie funkcje wskazują na podobne „rodziny” wtrąceń, to w ogólności uzyskane funkcje wyraźnie różnią się od siebie pod względem ilościowym. Podobnie jak to było w przypadku piaskowca Fontainebleau, tak i dla rzeczywistego ośrodka gruntowego (piasku średniego) postać ekwiwalentnej mikrostruktury jest zależna od stosowanego schematu aproksymacyjnego.

Należy w tym miejscu zauważyć, że stosując koncepcję ekwiwalentnej mikrostruktury zaproponowaną w pracy Sevostianova i Kachanova (2012) istnieje oczywiście możliwość zastąpienia dwóch dyskretnych „rodzin” wtrąceń (charakteryzowanych odrębnymi wartościami parametru  $\theta$ ) jednym „uśrednionym kształtem”,  $\theta^*$ . Taka zamiana zapewni jednak, że ośrodek zastępczy będzie stanowił „ekwiwalent” ośrodka rzeczywistego tylko względem jednej odpowiedzi makroskopowej, np. gdy przestrzeń porowa zajęta jest przez powietrze lub wodę, lub inny płyn. Każda zamiana składnika, który wypełnia pory ośrodka spowoduje konieczność wyznaczenia nowej wartości „uśrednionego kształtu”,  $\theta^*$ . W tym sensie prezentowana tutaj koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury jest unikatowa względem idei proponowanych w literaturze przedmiotu. Określona w sposób prezentowany tutaj mikrostruktura ekwiwalentna jest bowiem niezmiennicza względem parametrów cieplnych składników ośrodka rzeczywistego.



Rys. 8.14. Uzyskane mikrostruktury ekwiwalentne dla rozważanego piasku średniego. Z lewej: schemat Mori–Tanaki; z prawej: schemat samouzgodnionego pola (Łydźba i in. 2018)

W dalszej kolejności zidentyfikowane rozkłady (rys. 8.14) wykorzystano w schematach Mori–Tanaki oraz samouzgdnionego pola w celu dokonania predykcji pomierzonych wartości przewodności cieplnej piasku średniego. Wyniki pomiarów (dyskretne punkty zaprezentowane już wcześniej na rys. 8.13) wraz z oszacowaniami na podstawie schematów analitycznych Mori–Tanaki i samouzgdnionego pola przedstawiono na rys. 8.15.



Rys. 8.15. Predykcja funkcji makroskopowej przewodności cieplnej z wykorzystaniem mikrostruktur ekwiwalentnych – piasek średni (Łydźba i in. 2018)

Ponownie uzyskano niemal idealną predykcję funkcji makroskopowej przewodności cieplnej. Zidentyfikowane funkcje gęstości prawdopodobieństwa są zatem ekwiwalentnymi mikrostrukturami, które wykorzystane w schematach analitycznych zapewniają bardzo dobre oszacowanie makroskopowej odpowiedzi rzeczywistego ośrodka gruntowego, niezależnie od przewodności cieplnej medium wypełniającego jego przestrzeń porową.

### 8.3. Ekwiwalentna mikrostruktura oraz koncepcja „hierarchii zapelniania”

Przypomnijmy, że głównym celem analiz prowadzonych w tym rozdziale jest sformułowanie metody umożliwiającej określanie przewodności cieplnej gruntów częściowo nasyconych. Przykłady obliczeniowe prezentowane na początku rozdziału (podrozdz. 8.1) wskazały, że określanie makroskopowej przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego za pomocą metod aproksymacji analitycznej jest zadaniem trudnym, przy czym największych problemów nastęrcza przyjęcie od-



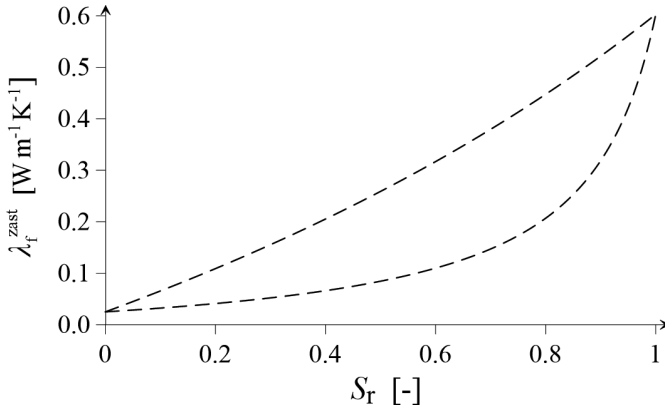
powiedniej morfologii mikrostruktury ośrodka zastępczego. Wynika to z trzech aspektów. Po pierwsze, jak wspomniano wcześniej, w literaturze przedmiotu nie istnieją żadne wytyczne dotyczące przyjmowania wartości parametrów  $\theta$  dla składników tworzących mikrostrukturę zastępczą. Po drugie, morfologia mikrostruktury gruntu zmienia się (ewoluuje) wraz ze wzrostem zawartości wody w przestrzeni porowej. Po trzecie, morfologia ośrodka zastępczego w ogólnym przypadku nie powinna być utożsamiana z geometrią ośrodka rzeczywistego – wykazały to na przykład rozważania prezentowane w podrozdziale 7.4, gdzie na podstawie analizy odwrotnej wykazano, że optymalny kształt cząstek frakcji ilowej charakteryzowany jest wartością parametru kształtu  $\theta = 1$  (wtrącenia sferyczne).

Za rozwiązanie problemu doboru odpowiedniej geometrii mikrostruktury dla ośrodka zastępczego proponuje się w ostatnim czasie wykorzystanie koncepcji mikrostruktury ekwiwalentnej, którą zaprezentowano (wraz z przykładami obliczeniowymi) w poprzednim podrozdziale 8.2. Zauważmy jednak, że pierwotnie wszystkie proponowane w literaturze sformułowania zagadnień odwrotnych dotyczące identyfikacji mikrostruktur ekwiwalentnych dotyczą w pełni nasyconych materiałów porowatych, a więc ośrodków dwufazowych (Kachanov i Sevostianov 2005; Sevostianov i Kachanov 2012; Łydzba i in. 2018). Jednak w niniejszym podrozdziale podejmuje się próbę aplikacji koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury w ujęciu schematów analitycznych, do przypadku gruntów częściowo nasyconych, a więc ośrodków, w najbardziej ogólnym przypadku, składającym się z trzech faz – ciało stałe, ciecz i gaz. Tym razem rozważania zawęża się do jednego ze schematów aproksymacji analitycznej, tj. schematu Mori–Tanaki.

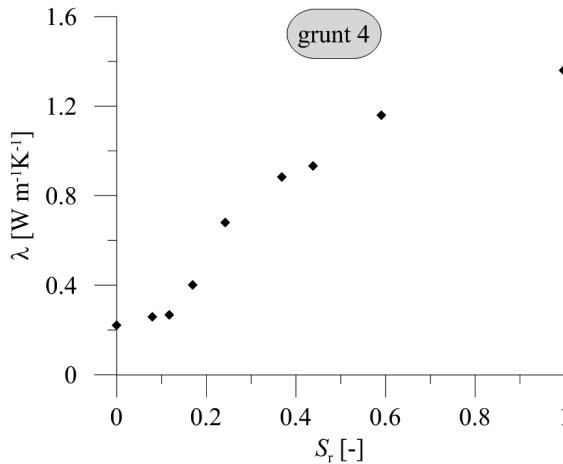
W konsekwencji powyższego, w pierwszej kolejności dokonajmy więc zamiany trójskładnikowego ośrodka gruntowego (grunt częściowo nasycony) na ośrodek dwuskładnikowy i następnie spróbujmy zastosować, wprost, technikę z podrozdziału 8.2, sformułowaną oczywiście dla gruntów nasyconych. Taką zamianę wykonajmy poprzez zastosowanie analizy dwuskalowej.

W pierwszej kolejności dokonuje się zatem ujednorodnienia mieszaniny woda–powietrze, w funkcji zawartości wody, wyrażonej stopniem wilgotności,  $S_r$ . Wówczas, takiemu ujednorodnionemu ośrodkowi przypisuje się zastępczą przewodność cieplną, powiedzmy  $\lambda_f^{\text{zast}}$ . Następnie grunt rozpatruje się już jako kompozyt dwuskładnikowy składający się ze szkieletu gruntowego o przewodności cieplnej  $\lambda_s$  oraz przestrzeni porowej w pełni wypełnionej przez mieszaninę woda–powietrze charakteryzowaną zastępczym parametrem  $\lambda_f^{\text{zast}}(S_r)$ . Do określenia parametru zastępczego mieszaniny woda–powietrze proponuje się dwa oddzielne podejścia, tj. oszacowanie wartości  $\lambda_f^{\text{zast}}(S_r)$  na podstawie dolnego oraz górnego ograniczenia Hashina–Shtrikmana. Zakładając, że parametrem opisującym zawartość wody (w objętości całej mieszaniny) jest stopień wilgotności  $S_r$  oraz że dla  $S_r = 0$  i  $S_r = 1$  przewodność cieplna mieszaniny woda–powietrze równa jest przewodności cieplnej, odpowiednio, powietrza ( $\lambda_p$ ) oraz wody ( $\lambda_w$ ), wartość parametru zastępczego,  $\lambda_f^{\text{zast}}(S_r)$ , określa się zgodnie

z wyrażeniem (4.13). Wyniki zestawiono na rys. 8.16, gdzie w sposób funkcyjny przedstawiono zależność wartości  $\lambda_f^{\text{zast}}$  od stopnia wilgotności,  $S_r$ . W dalszej kolejności weryfikuje się poprawność założenia o możliwości zastąpienia gruntu częściowo nasyconego ośrodkiem dwuskładnikowym i bezpośrednim zastosowaniu do takiego medium koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury przedstawionej w podrozdziale 8.2.



Rys. 8.16. Wartość zastępczej przewodności cieplnej mieszaniny woda–powietrze w funkcji stopnia wilgotności  $S_r$



Rys. 8.17. Wyniki pomiarów przewodności cieplnej w zależności od stopnia wilgotności  $S_r$  – dane z pracy Lu i in. (2007)

Jak wspomniano już wcześniej, istniejące modele teoretyczne zwykle mają trudności z poprawnym opisem charakterystyki  $\lambda$ – $S_r$  dla gruntów drobnoziarnistych, zwłaszcza

cza dla relatywnie niskich wartości stopnia wilgotności (szerzej problem ten omówiono w podrozdz. 3.2). Dlatego do analizy prowadzonej w tym rozdziale wybrano właśnie ten trudniejszy przypadek, a więc grunt drobnoziarnisty, w celu zweryfikowania czy zaproponowane podejście jest w stanie odtworzyć poprawną charakterystykę termiczną gruntu.

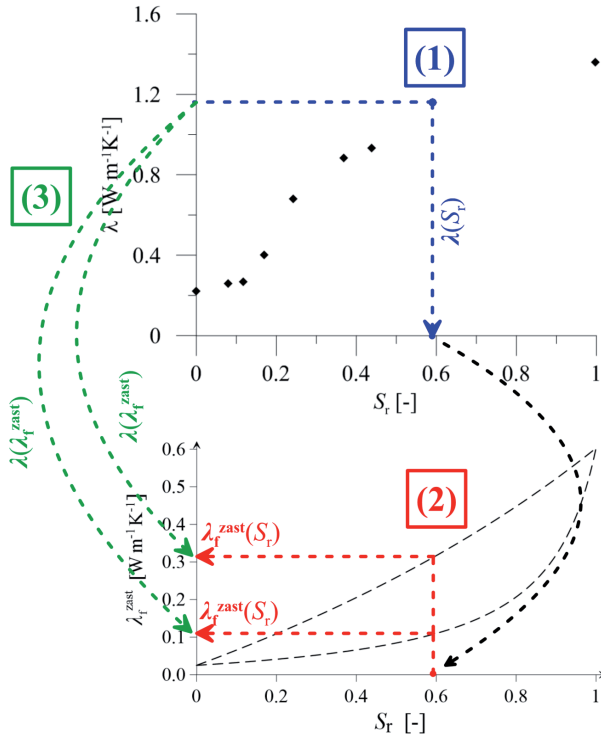
Analizie poddaje się więc ił, który rozważano już wcześniej w rozdziale dotyczącym problemu określania przewodności cieplnej szkieletu gruntowego – jest to „grunt 4”. Aby ułatwić czytelnikowi śledzenie rozważań zawartych w tym podrozdziale, wyniki pomiarów przewodności cieplnej w zależności od stopnia nasycenia przestrzeni porowej wodą (dla „gruntu 4”), pomimo iż były już one prezentowane na rys. 6.5d przedstawiono ponownie na rys. 8.17. Są to dane literaturowe i pochodzą one z pracy Lu i in. (2007).

Zauważmy, że aby możliwe było bezpośrednie zastosowanie koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury do rozważanego tutaj ośrodka gruntowego, w pierwszej kolejności należy dane pomiarowe zestawione w formie  $\lambda-S_r$  (rys. 8.17) przetransformować do układu  $\lambda-\lambda_f^{\text{zast}}$ , zgodnie z założeniami podanymi powyżej. Wobec tego dla konkretnej wartości  $S_r$ , dla której dysponujemy pomierzoną wartością przewodności cieplnej ośrodka gruntowego,  $\lambda$ , dokonuje się następującego przekształcenia:  $S_r \rightarrow \lambda_f^{\text{zast}}$ , przy czym transformacja ta jest zgodna z dolnym lub górnym ograniczeniem Hashina–Shtrikmana (rys. 8.16). Celem tej transformacji jest stworzenie funkcji makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka nasyczonego – dążymy więc do uzyskania dyskretnej zależności,  $\lambda-\lambda_f^{\text{zast}}$ .

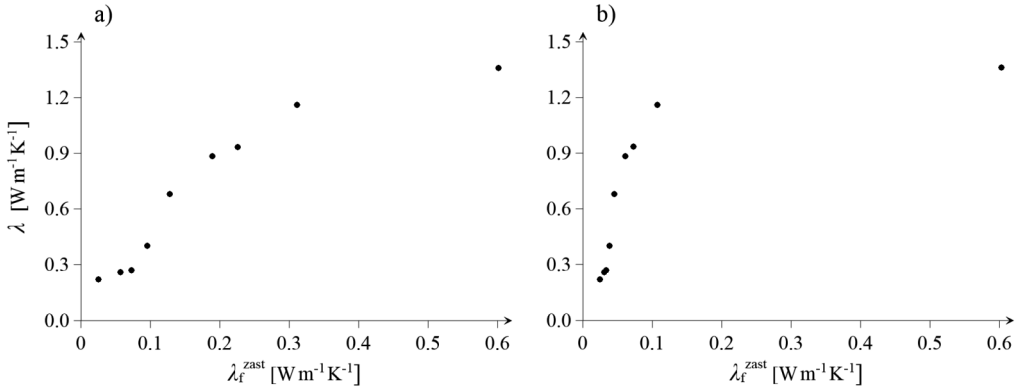
Zauważmy, że ze względu na fakt, iż dla jednej wartości  $S_r$  proponuje się dwa odrębne parametry zastępcze mieszaniny woda–powietrze, tj. odpowiadające dolnemu lub górnemu ograniczeniu Hashina–Shtrikmana, w konsekwencji takiego przekształcenia uzyskujemy dwie funkcje makroskopowej przewodności cieplnej dla rozważanego ośrodka gruntowego. Procedurę transformacji, dla jednej wybranej wartości  $S_r$ , zobrazowano graficznie na rys. 8.18. Ponadto rys. 8.19 przedstawia wszystkie dane pomiarowe (z rys. 8.17) przetransformowane do układu  $\lambda-\lambda_f^{\text{zast}}$ . W szczególności rys. 8.19a i 8.19b odpowiadają zastępczej przewodności cieplnej mieszaniny woda–powietrze określonej według, odpowiednio, górnego i dolnego ograniczenia Hashina–Shtrikmana.

Dla tak zdefiniowanego dwufazowego ośrodka gruntowego możliwe jest zastosowanie, wprost, koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury przedstawionej w poprzednim podrozdziale. Rozwiązuje się więc następujące zagadnienie odwrotne, w którym danymi są:

- funkcja makroskopowej przewodności cieplnej (rys. 8.19), przy czym dyskretna postać tej funkcji jest po prostu sekwencją następujących wartości:  $\lambda(\lambda_f^{\text{zast}})$ ,
- przewodność cieplna szkieletu gruntowego:  $\lambda_s = 3,079 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$  (Lu i in. 2007),
- porowatość  $n = \phi_f = 0,513$  (Lu i in. 2007),



Rys. 8.18. Procedura stosowana do transformacji danych pomiarowych



Rys. 8.19. Wyniki pomiarów przewodności cieplnej w zależności od zastępczej przewodności cieplnej mieszaniny woda–powietrze, określonej zgodnie z: (a) górnym; (b) dolnym, ograniczeniem Hashina–Shtrikmana – oryginalne dane pomiarowe pochodzą z pracy Lu i in. (2007)

a poszukuje się optymalnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , tj. takiej, która wykorzystana w schemacie aproksymacyjnym Mori–Tanaki zapewni możliwie naj-

lepszą predykcję funkcji makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, zgodnie z zależnością (por. z równaniem (8.1)):

$$\lambda^{\text{hom}}(\lambda_f^{\text{zast}}) = \frac{\phi_f \lambda_f^{\text{zast}} \int_0^1 P^{f,M}(\lambda_f^{\text{zast}}, \theta) M(\theta) d\theta + (1 - \phi_f) \lambda_s P^{s,M}}{\phi_f \int_0^1 P^{f,M}(\lambda_f^{\text{zast}}, \theta) M(\theta) d\theta + (1 - \phi_f) P^{s,M}} \quad (8.14)$$

W poprzednim równaniu operator lokalizacji  $P^{s,M}$  dany jest niezmiennie zależnością (8.3), natomiast  $P^{f,M}$  należy określać zgodnie z następującym wyrażeniem:

$$P^{f,M} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_f^{\text{zast}} - \lambda_s}{\lambda_s} \right)^{-1} \quad (8.15)$$

Jeżeli taka optymalna funkcja istnieje i, dodatkowo, jeśli spełnia ona powyższe wymagania, to funkcja taka może być oczywiście określana mianem mikrostruktury ekwiwalentnej, oznaczanej już wcześniej symbolem  $M^{\text{eq}}(\theta)$ .

Podobnie jak dla przypadku piasku średniego i piaskowca Fontainebleau, zagadnienie odwrotne rozwiązuje się z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania i procedury numerycznej opisanej w punkcie 8.2.1. Wykorzystując fakt, iż oryginalne sformułowanie schematu Mori–Tanaki (8.14), jak pokazano już wcześniej, można zapisać w postaci równania całkowego Fredholma I rodzaju (por. zależność (8.8)), tj.

$$\int_0^1 P^{f,M}(\lambda_f^{\text{zast}}, \theta) M(\theta) d\theta = g(\phi_f, \lambda_f^{\text{zast}}, \lambda_s, \lambda^{\text{hom}}(\lambda_f^{\text{zast}}), P^{s,M}) \quad (8.16)$$

gdzie

$$g = \frac{1 - \phi_f}{\phi_f} \frac{\lambda_s - \lambda(\lambda_f^{\text{zast}})}{\lambda(\lambda_f^{\text{zast}}) - \lambda_f^{\text{zast}}} P^{s,M} \quad (8.17)$$

to w dowolnym kroku iteracyjnym fikcyjną „energię” definiuje się oczywiście w sposób analogiczny do reprezentacji (8.12):

$$E = \frac{1}{N_{S_r}} \sum_{f=1}^{N_{S_r}} \left( \frac{\sum_{k=1}^{N_\theta} P^{f,M}(\lambda_f^{\text{zast}}, \theta_k) M(\theta_k) \Delta_k - g(\phi_f, \lambda_f^{\text{zast}}, \lambda_s, \lambda^{\text{hom}}(\lambda_f^{\text{zast}}), P^{s,M})}{g(\phi_f, \lambda_f^{\text{zast}}, \lambda_s, \lambda^{\text{hom}}(\lambda_f^{\text{zast}}), P^{s,M})} \right)^2 \quad (8.18)$$

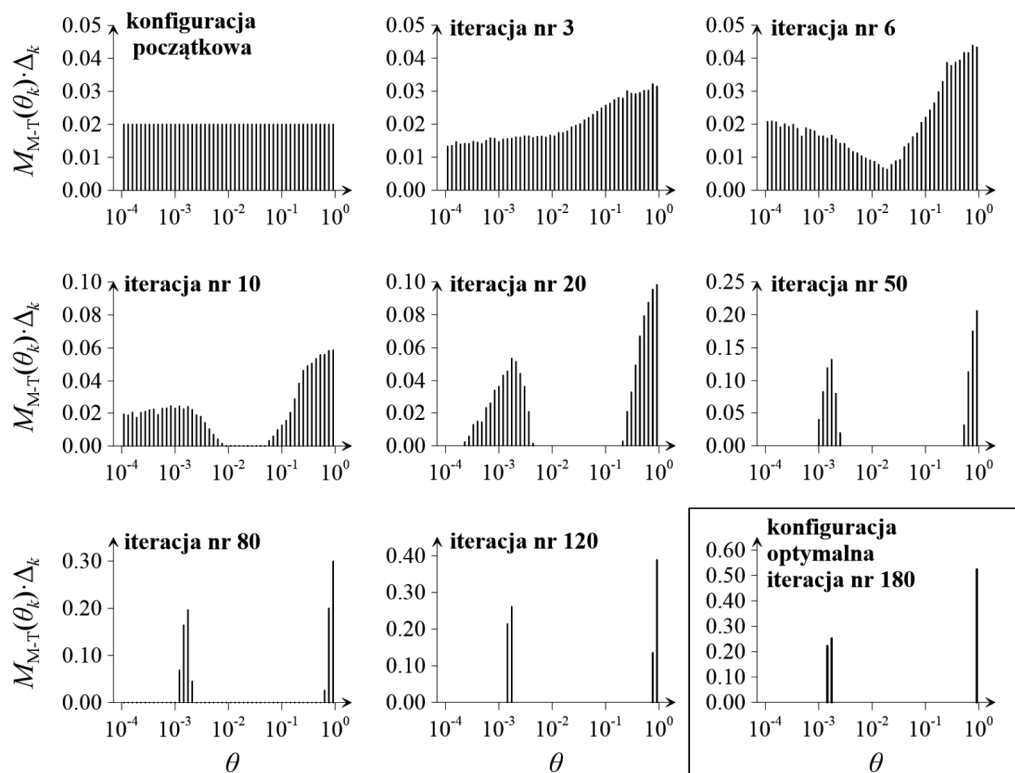
W zależności (8.18) symbolem  $N_{S_r}$  oznaczono liczbę pomiarów – zauważmy, że dla analizowanego tutaj gruntu liczba pomierzonych wartości przewodności cieplnej wynosi  $N_{S_r} = 9$ . Dla algorytmu symulowanego wyżarzania przyjmuje się identyczne parametry kontrolne, jak w przypadku określania mikrostruktury ekwiwalentnej dla piaskowca Fontainebleau oraz piasku średniego (por. rozważania zawarte w punktach 8.2.2 i 8.2.3).

Uzyskane rezultaty w postaci ewolucji funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , zestawiono na rys. 8.20 i 8.21, przy czym pierwszy (drugi) z dwóch rysunków prezentuje wyniki dla przypadku zastępczego parametru mieszaniny woda–powietrze określonego według górnego (dolnego) ograniczenia Hashina–Shtrikmana. Na obu rysunkach, podobnie jak wcześniej, w lewym górnym narożniku prezentuje się konfigurację początkową, a więc równomierny rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej  $\theta$ . W prawym dolnym narożniku (w ramce) wyróżniono funkcje zidentyfikowane jako optymalne. Kryterium zatrzymania przyjęto w taki sposób, że algorytm zatrzymywano wówczas, gdy następujące po sobie 3 kolejne iteracje nie powodowały już „wyraźnej” poprawy rozwiązania; konfiguracje optymalne uzyskano po około 200 iteracjach. Zauważmy, że w obu przypadkach (rys. 8.20 i 8.21) funkcja  $M(\theta)$  „zbiega” do rozkładu bimodalnego, wskazując na mikrostrukturę w postaci dwóch dyskretnych „rodzin” wtrąceń. Jednak, w zależności od tego, w jaki sposób określono zastępczy parametr dla mieszaniny woda–powietrze, uzyskane funkcje gęstości prawdopodobieństwa wyraźnie różnią się od siebie.

Zidentyfikowane jako optymalne funkcje gęstości prawdopodobieństwa  $M(\theta)$  wykorzystuje się następnie w zagadnieniu bezpośrednim, w ujęciu schematu Mori–Tanaki, i wyznacza się predykcję makroskopowej przewodności cieplnej rozważanego gruntu, zgodnie z zależnością (8.14). Wyniki prezentuje się na rys. 8.22 i 8.23 w dwóch różnych formach. Na pierwszym z dwóch wspomnianych rysunków wyniki przedstawiono jako zależność pomiędzy  $\lambda^{\text{hom}}$  a wartością zastępczej przewodności cieplnej mieszaniny woda–powietrze,  $\lambda_f^{\text{zast}}$ . Natomiast na rys. 8.23 zaprezentowano predykcję makroskopowej przewodności cieplnej gruntu,  $\lambda^{\text{hom}}$ , w funkcji stopnia wilgotności  $S_r$ . Co oczywiste, na każdym z rysunków wykorzystano odpowiednie dane pomiarowe, tj. przetransformowane zgodnie z rys. 8.18 lub oryginalne dane pochodzące z pracy Lu i in. (2007) – rys. 8.17.

Na podstawie uzyskanych rezultatów, widać wyraźnie, że zaproponowane podejście, polegające na zamianie ośrodka częściowo nasyconego na kompozyt dwuskładnikowy, nie zapewnia poprawnej predykcji przewodności cieplnej gruntu częściowo nasyconego. Jest to obserwowane dla zastępczej przewodności mieszaniny woda–powietrze określonej zarówno na podstawie dolnego, jak i górnego oszacowania Hashina–Shtrikmana. Porównując oba podejścia wydaje się, że nieco lepszą predykcję  $\lambda^{\text{hom}}(S_r)$  uzyskano, stosując górne ograniczenie Hashina–Shtrikmana (rys. 8.22a oraz 8.23a). Jednak, jak pokazano na rozważanym przykładzie, takie podejście nie jest w stanie dobrze oddać specyficznej charakterystyki gruntów drobnoziarnistych dla relatywnie niskich wartości stopnia wilgotności,  $S_r$ .

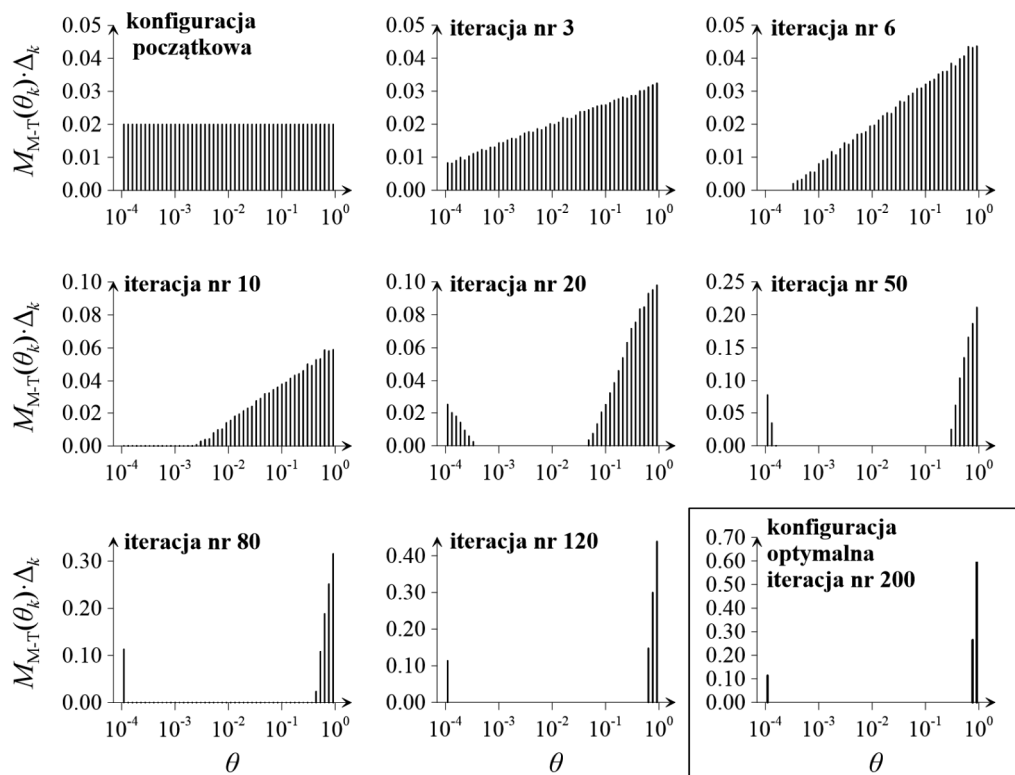
W konsekwencji zidentyfikowane funkcje gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , (rys. 8.20 i 8.21) są jedynie mikrostrukturami „optymalnymi” w tym sensie, że zapewniają one minimum „energii” (8.18). Jednakże funkcje te, zastosowane w zagadnieniu bezpośrednim w schemacie Mori–Tanaki, nie oddają poprawnie charakterystyki



Rys. 8.20. Ewolucja funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $M(\theta)$  uzyskana na podstawie algorytmu symulowanego wyżarzania w ujęciu schematu Mori–Tanaki. Zastępcza przewodność cieplna mieszaniny woda–powietrze określona zgodnie z górnym ograniczeniem Hashina–Shtrikmana

makroskopowej przewodności cieplnej gruntu względem zawartości wody. W efekcie nie można określać ich mianem mikrostruktur ekwiwalentnych. Wydaje się zatem, że nie ma możliwości zastosowania w sposób bezpośredni koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury, pierwotnie sformułowanej dla gruntów nasyconych, do przypadku częściowo nasyconego ośrodka gruntowego. Jest to spowodowane tym, iż takie podejście nie uwzględnia ewolucji mikrostruktury spowodowanej sukcesywnym nawadnianiem ośrodka gruntowego. W dalszej części rozdziału proponuje się więc modyfikację oryginalnego sformułowania przez uwzględnianie w rozważaniach wszystkich trzech składników gruntu częściowo nasyconego oraz wprowadzenie koncepcji tzw. „hierarchii zapełniania”.

Przed dalszymi analizami powróćmy jednak na chwilę do rozważań dotyczących wpływu zawartości wody w przestrzeni porowej na przewodność cieplną gruntu. Sukcesywne nawadnianie gruntów, co oczywiste, prowadzi do wzrostu makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego. Ponadto dla relatywnie małych wartości

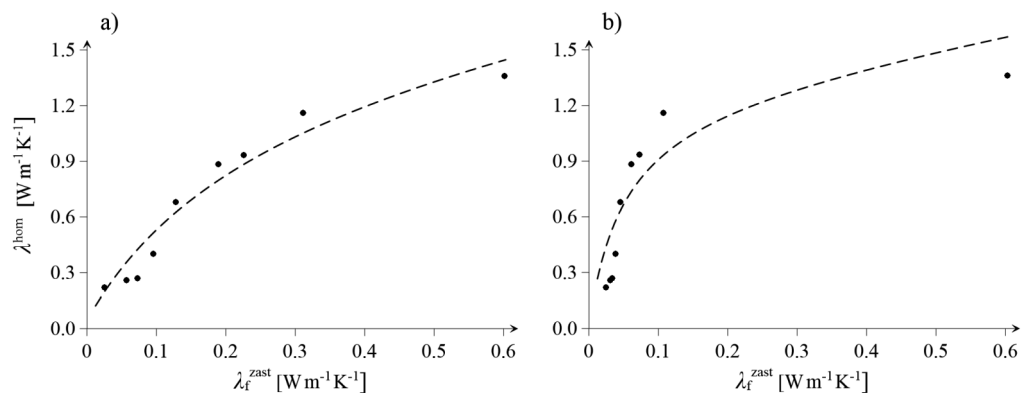


Rys. 8.21. Ewolucja funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $M(\theta)$  uzyskana na podstawie algorytmu symulowanego wyżarzania w ujęciu schematu Mori–Tanaki. Zastępcza przewodność cieplna mieszaniny woda–powietrze określona zgodnie z dolnym ograniczeniem Hashina–Shtrikmana

stopnia wilgotności, grunty drobno- i gruboziarniste wykazują różną charakterystykę  $\lambda-S_r$ , ze względu na różnice w morfologii mikrostruktury. Niezależnie jednak od rodzaju gruntu, jak wskazano w podrozdziale 2.1, w pierwszej kolejności faza wodna przez adsorbowanie molekuł wody do powierzchni ziaren, tworzy wokół nich cienki film/powłokę (rys. 2.2). Wydaje się zatem, że „odwzorowanie” specyficznej charakterystyki termicznej gruntów za pomocą schematu Mori–Tanaki (8.20) mogłoby być możliwe pod warunkiem, że proces przypisania poszczególnych „rodzin” wtrąceń do fazy wodnej i gazowej będzie dodatkowo uwarunkowany. Innymi słowy, dla niskich wartości stopnia wilgotności, naturalne wydaje się, że faza wodna powinna być modelowana za pomocą wtrąceń sferoidalnych o niewielkich wartościach parametru  $\theta$  (spłaszczone wtrącenia, kształtem przypominające „dyski”). Jednocześnie wraz ze wzrostem wartości  $S_r$ , kolejne „rodziny” wtrąceń (o coraz wyższym stosunku półosi  $\theta$ ) powinny być „zajmowane” przez fazę wodną aż do pełnego nasycenia, gdzie wszystkie możliwe „rodziny” wtrąceń zostaną przypisane jedynie fazie wodnej. W celu zrealizowania



tę (a więc uwzględnienia ewolucji mikrostruktury gruntu) proponuje się więc wprowadzenie do schematu Mori–Tanaki dodatkowego uwarunkowania wynikającego z procesu przypisywania poszczególnych „rodzin” wtrąceń dla fazy wodnej i gazowej, w zależności od wartości stopnia wilgotności,  $S_r$ . Taki kontrolowany proces zajmowania poszczególnych rodzin wtrąceń przez fazę wodną i gazową określać się będzie, w dalszej części pracy, mianem „hierarchii zapełniania”.



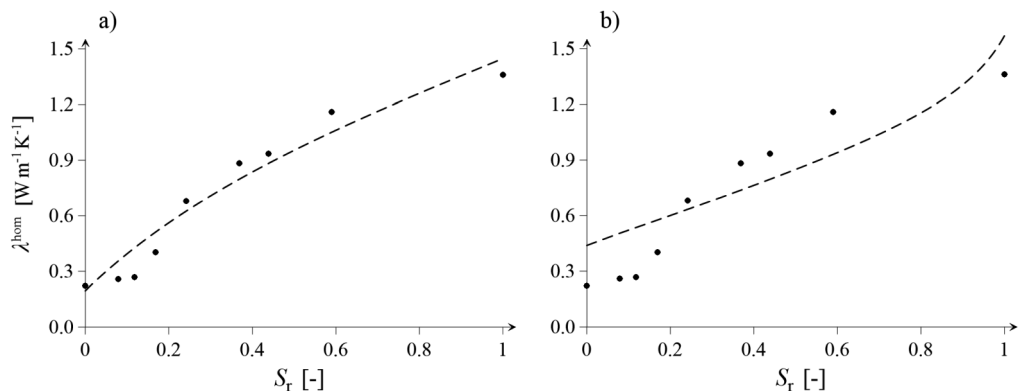
Rys. 8.22. Predykcja makroskopowej przewodności cieplnej gruntu w funkcji zastępczej przewodności cieplnej mieszaniny woda–powietrze, określonej zgodnie z: (a) górnym; (b) dolnym, ograniczeniem Hashina–Shtrikmana

Mówiąc bardziej szczegółowo, proponowana idea wprowadzenia do schematu Mori–Tanaki kontrolowanej kinetyki zajmowania poszczególnych „rodzin” wtrąceń przez wodę i powietrze polega na tym, aby dla ustalonej wartości stopnia wilgotności, powiedzmy  $S_r^*$ , wyznaczyć odpowiadającą jej wartość stosunku półosi wtrąceń sferoidalnych,  $\theta_{S_r}$ , taką, która spełniać będzie następującą zależność:

$$S_r^* = \int_0^{\theta_{S_r}} M(\theta) d\theta \quad (8.19)$$

Wówczas fazę wodną charakteryzują wszystkie rodziny wtrąceń opisane parametrem kształtu,  $\theta_w$ , zawierającym się w przedziale od 0 do  $\theta_{S_r}$ . Jednocześnie faza gazowa, a więc powietrze znajdujące się w przestrzeni porowej, opisuje wtrącenia sferoidalne o stosunku półosi  $\theta_p$ , którego wartości znajdują się w zakresie od  $\theta_{S_r}$  do 1.

Proponowaną w niniejszej monografii koncepcję „hierarchii zapełniania” zobrazowano również graficznie na rys. 8.24. Na wykresie tym pole obszaru zacieniowanego, którego granicę wyznacza parametr  $\theta_{S_r}$ , równe jest oczywiście wartości  $S_r^*$ . Ponadto obszar ten wyznacza tę część funkcji gęstości prawdopodobieństwa, która przypisana jest fazie wodnej. Zakres od  $\theta_{S_r}$  do 1 odpowiada oczywiście „rodzinom” wtrąceń



Rys. 8.23. Predykcja makroskopowej przewodności cieplnej gruntu w funkcji stopnia wilgotności. Zastępcza przewodność cieplna mieszaniny woda–powietrze, określona zgodnie z: (a) górnym; (b) dolnym, ograniczeniem Hashina–Shtrikmana

zajmowanym przez powietrze. Zauważmy, że wraz ze wzrostem wartości stopnia wilgotności, „front”, którego granicę za każdym razem wyznacza parametr  $\theta_{Sr}$ , przesuwa się w stronę wartości maksymalnej, tj.  $\theta = 1$ , sterując przy tym procesem zajmowania poszczególnych „rodzin” wtrąceń (ewolucją mikrostruktury) przez wodę i powietrze.

W dalszym ciągu dokonuje się aplikacji sformułowanej powyżej koncepcji „hierarchii zapełniania” do schematu Mori–Tanaki. W odróżnieniu od podejścia weryfikowanego powyżej (w którym dokonywano zamiany ośrodka trójskładnikowego na dwuskładnikowy), tym razem częściowo nasycony ośrodek gruntowy traktuje się już jako kompozyt trójskładnikowy, którego poszczególne fazy charakteryzują się następującymi przewodnościami cieplnymi, tj. szkielet –  $\lambda_s$ , woda –  $\lambda_w$  oraz powietrze –  $\lambda_p$ .

Zakłada się oczywiście, że w schemacie aproksymacyjnym Mori–Tanaki wtrącenia sferoidalne opisujące zarówno fazę wodną, jak i gazową, charakteryzowane są jedną, wspólną funkcją gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ . Uwzględniając zatem wcześniejsze rozważania, można pokazać, że makroskopowa przewodność cieplna częściowo nasyconego ośrodka gruntowego, w funkcji stopnia wilgotności  $S_r$ , daje się wyrazić, jako (por. np. zależności (4.28) oraz (8.14)):

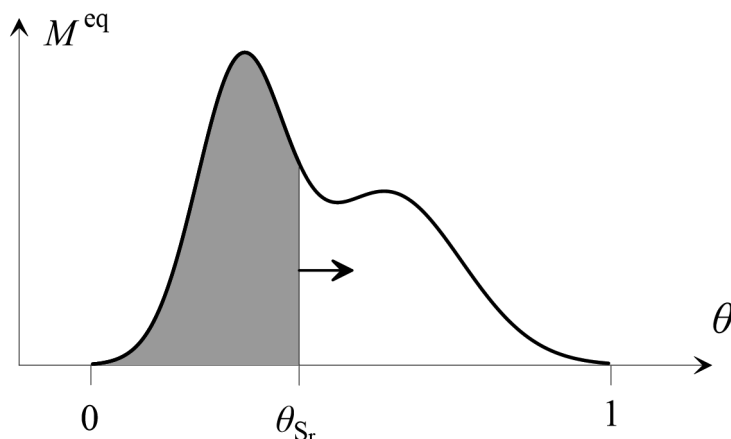
$$\lambda^{\text{hom}}(S_r) = \frac{n\lambda_w \int_0^{\theta_{Sr}} P^{w,M} M(\theta) d\theta + n\lambda_p \int_{\theta_{Sr}}^1 P^{p,M} M(\theta) d\theta + (1-n)\lambda_s}{n \int_0^{\theta_{Sr}} P^{w,M} M(\theta) d\theta + n \int_{\theta_{Sr}}^1 P^{p,M} M(\theta) d\theta + (1-n)} \quad (8.20)$$

Zależność (8.20) uzyskano oczywiście z wykorzystaniem relacji (8.3). Ponadto, zgodnie z zależnością (4.27) operatory lokalizacji dla wody,  $P^{w,M}$  oraz powietrza,  $P^{p,M}$ , wynoszą, odpowiednio:

$$P^{w,M} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_w - \lambda_s}{\lambda_s} \right)^{-1} \quad (8.21)$$

oraz

$$P^{p,M} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( 1 + A_i^* \frac{\lambda_p - \lambda_s}{\lambda_s} \right)^{-1} \quad (8.22)$$



Rys. 8.24. Koncepcja „hierarchii zapełniania” – przypisanie na podstawie wartości  $S_r$  poszczególnych rodzin wtrąceń do fazy wodnej lub gazowej

Przeprowadźmy teraz weryfikację, czy zaproponowane podejście jest w stanie właściwie odzwierciedlić charakterystykę przewodności cieplnej częściowo nasyconego gruntu. W analizie ponownie wykorzystuje się „grunt 4”, dla którego pomierzone wartości przewodności cieplnej prezentuje rys. 8.17. Naszym celem jest więc zidentyfikowanie ekwiwalentnej mikrostruktury,  $M(\theta)$ , tym razem jednak dla trójskładnikowego ośrodka gruntowego z założeniem obowiązywania „hierarchii zapełniania”.

Rozwiązuje się więc następujące zagadnienie odwrotne, w którym dane są (Lu i in. 2007):

- uzyskane z badań laboratoryjnych wartości przewodności cieplnej gruntu w różnych stanach nasycenia; jest to oczywiście sekwencja pomiarów  $\lambda$  dla różnych wartości  $S_r$  (rys. 8.17),

- przewodność cieplna szkieletu gruntowego:  $\lambda_s = 3,079 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$  (Lu i in. 2007),

- porowatość  $n = \phi_r = 0,513$  (Lu i in. 2007),

a celem jest identyfikacja optymalnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ , tj. takiej, która wykorzystana w schemacie aproksymacyjnym Mori–Tanaki, z uwzględ-

nieniem „hierarchii zapełniania” (rys. 8.24), zapewni możliwie najlepszą predykcję wartości,  $\lambda(S_r)$ , zgodnie z zależnością (8.20).

Analogicznie, jak poprzednio, zagadnienie to rozwiązuje się, wykorzystując metodę stochastycznej optymalizacji (symulowane wyżarzanie) oraz procedurę numeryczną, którą wykorzystywano już we wcześniejszych przykładach, gdzie identyfikowano mikrostruktury ekwiwalentne. Przyjmuje się więc, że fikcyjna „energia” dana jest następującą zależnością:

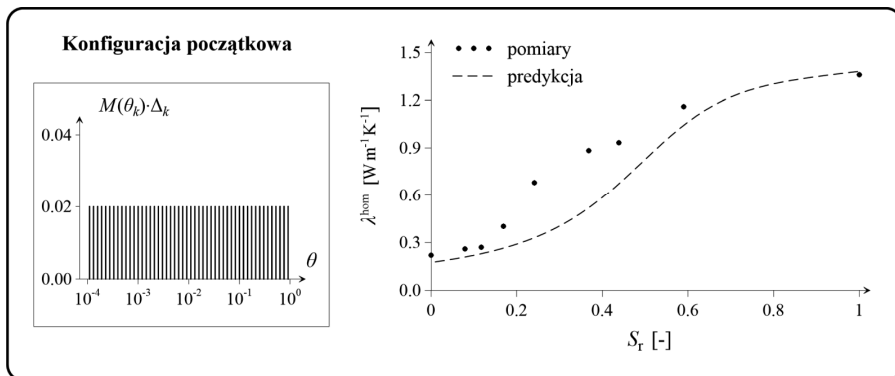
$$E = \frac{1}{N_{Sr}} \sum_{i=1}^{N_{Sr}} \left( \frac{\lambda^{\text{hom}}(S_{r,i}) - \lambda(S_{r,i})}{\lambda(S_{r,i})} \right)^2 \quad (8.23)$$

gdzie indeks dolny  $i$  wskazuje numer pomiaru w taki sposób, że: 1 – grunt suchy, 2, ..., 8 – pośrednie stany nasycenia wodą, 9 – grunt w pełni nasycony wodą (zgodnie z rys. 8.17). Symbol  $N_{Sr}$  oznacza, ponownie, liczbę pomiarów (dla analizowanego gruntu,  $N_{Sr} = 9$ ),  $\lambda^{\text{hom}}(S_{r,i})$  to predykcja makroskopowej przewodności cieplnej gruntu wyznaczona według zależności (8.20), natomiast  $\lambda(S_{r,i})$  jest pomierzoną wartością przewodności cieplnej gruntu.

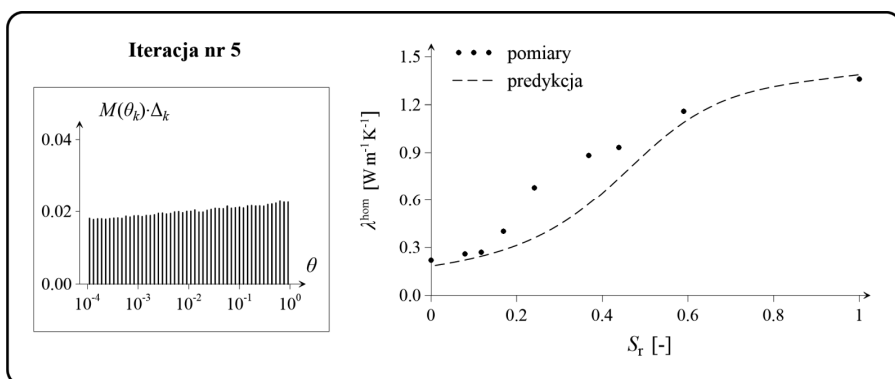
Należy podkreślić, że uwzględnienie w schemacie Mori–Tanaki „hierarchii zapełniania” wymaga wprowadzenia pewnej modyfikacji do algorytmu poszukiwania rozwiązania optymalnego. Zauważmy bowiem, że w trakcie procesu symulowanego wyżarzania w każdym kroku zmienia się postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa,  $M(\theta)$ . Implikuje to, iż za każdym razem (po każdej zmianie konfiguracji) należy wyznaczyć sekwencję nowych wartości parametru  $\theta_{Sr,i}$  odpowiadających założonym (narzuconym niejako przez wykorzystywane dane pomiarowe) wartościom stopnia wilgotności  $S_{r,i}$ , zgodnie z zależnością (8.19). Wszystkie pozostałe parametry kontrolne algorytmu optymalizacyjnego przyjęto identycznie z przypadkiem rozwiązywanych wcześniej zagadnień odwrotnych (por. np. zadania z punktów 8.2.2 i 8.2.3).

Dla analizowanego zagadnienia odwrotnego wykonano w sumie 80 iteracji, przy czym każda iteracja (dla ustalonej wartości fikcyjnej temperatury  $T^*$ ) składała się z 10 000 kroków. W konsekwencji optymalną funkcję gęstości prawdopodobieństwa,  $M^{\text{eq}}(\theta)$ , określono po wykonaniu 800 000 pętli algorytmu symulowanego wyżarzania. Uzyskane wyniki, dla wybranych iteracji algorytmu symulowanego wyżarzania, zestawiono na rys. 8.25–8.30. Za każdym razem przedstawia się przebieg funkcji  $M(\theta)$  (z lewej strony) oraz odpowiadającą jej predykcję przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w funkcji stopnia wilgotności,  $S_r$ , określoną zgodnie z zależnością (8.20). Dodatkowo, za pomocą dyskretnych punktów oznaczono wyniki pomiarów laboratoryjnych.

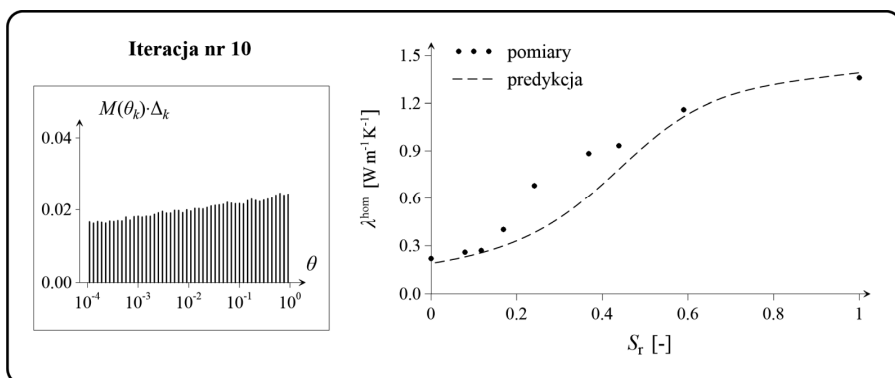
W szczególności na rys. 8.25 przedstawiono konfigurację początkową, tj. równomierny rozkład zmiennej losowej  $\theta$ ; rys. 8.26–8.29 odpowiadają wynikom uzyskanym po, odpowiednio, 5, 10, 30 oraz 50 iteracjach. Konfigurację, która zatrzymała proces symulowanego wyżarzania, a więc funkcję  $M^{\text{eq}}(\theta)$  zidentyfikowaną jako optymalną



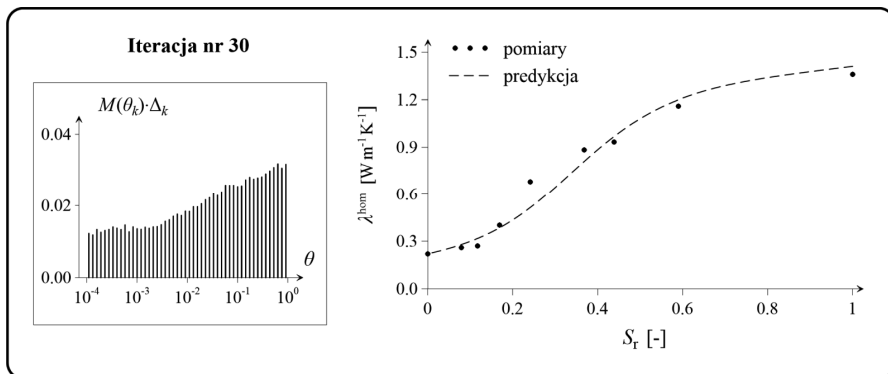
Rys. 8.25. Konfiguracja początkowa funkcji  $M(\theta)$  oraz odpowiadająca jej predykcja makroskopowej przewodności cieplnej „gruntu 4” w funkcji stopnia wilgotności,  $S_r$



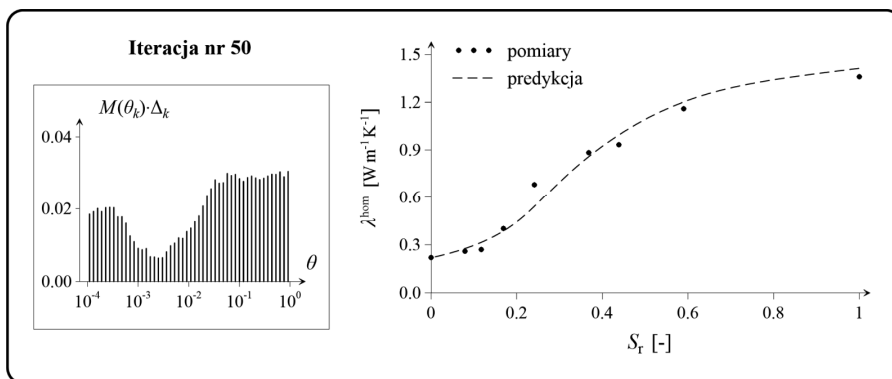
Rys. 8.26. Postać funkcji  $M(\theta)$  uzyskana po 5 iteracjach oraz odpowiadająca jej predykcja makroskopowej przewodności cieplnej „gruntu 4” w funkcji stopnia wilgotności,  $S_r$



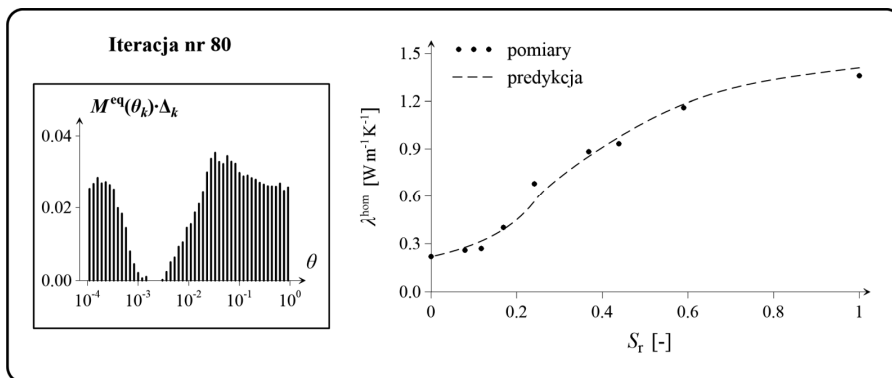
Rys. 8.27. Postać funkcji  $M(\theta)$  uzyskana po 10 iteracjach oraz odpowiadająca jej predykcja makroskopowej przewodności cieplnej „gruntu 4” w funkcji stopnia wilgotności,  $S_r$



Rys. 8.28. Postać funkcji  $M(\theta)$  uzyskana po 30 iteracjach oraz odpowiadająca jej predykcja makroskopowej przewodności cieplnej „gruntu 4” w funkcji stopnia wilgotności,  $S_r$



Rys. 8.29. Postać funkcji  $M(\theta)$  uzyskana po 50 iteracjach oraz odpowiadająca jej predykcja makroskopowej przewodności cieplnej „gruntu 4” w funkcji stopnia wilgotności,  $S_r$



Rys. 8.30. Konfiguracja optymalna funkcji  $M(\theta)$  oraz predykcja makroskopowej przewodności cieplnej „gruntu 4” w funkcji stopnia wilgotności,  $S_r$

przedstawiano na rys. 8.30. Obserwując wyniki, można zauważyć, że wraz z kolejnymi iteracjami algorytmu następowała wyraźna ewolucja funkcji  $M(\theta)$  oraz polepszała się jakość predykcji wyników pomiarowych.

Ponadto zidentyfikowana jako optymalna funkcja gęstości prawdopodobieństwa,  $M^{eq}(\theta)$ , ma zdecydowanie bimodalny charakter, pomimo że konfiguracja początkowa zakładała rozkład równomierny dla zmiennej losowej  $\theta$ . Funkcja ta, zastosowana w schemacie Mori–Tanaki (zależn. (8.20)), zapewnia bardzo dobrą predykcję makroskopowej przewodności cieplnej rozważanego ośrodka gruntowego, co zobrazowano predykcją  $\lambda(S_r)$  przedstawioną na rys. 8.30.

Co jednak najważniejsze, z całą pewnością można stwierdzić, że niezwykle trudna do odtworzenia specyficzna charakterystyka  $\lambda-S_r$  dla relatywnie niewielkich wartości  $S_r$ , została tu bardzo dobrze odwzorowana. W tym kontekście zidentyfikowana jako optymalna funkcja  $M^{eq}(\theta)$  może być określana również mianem mikrostruktury ekwiwalentnej. Jak zostało jednak pokazane w tym rozdziale, zidentyfikowanie mikrostruktury ekwiwalentnej dla przypadku gruntu częściowo nasyconego, możliwe było dopiero po uwzględnieniu w schemacie Mori–Tanaki zaproponowanej w ramach niniejszej monografii koncepcji „hierarchii zapełniania”, która uwzględnia ewolucję mikrostruktury gruntu wywołaną jego sukcesywnym nawadnianiem.

## 8.4. Uwagi

Wydaje się, że zaproponowana koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury wraz z „hierarchią zapełniania” może posłużyć, jako efektywne narzędzie umożliwiające uzyskanie dobrej predykcji makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w różnych stanach nasycenia. Co istotne w tym podejściu dla danego gruntu ekwiwalentna mikrostruktura pozostaje niezmiennicza względem zmiany wartości stopnia wilgotności. Innymi słowy, dla całego zakresu możliwych wartości  $S_r$  istnieje jedna ekwiwalentna mikrostruktura, która zastosowana w schemacie Mori–Tanaki prowadzi do bardzo dobrego oszacowania wartości przewodności cieplnej dla dowolnego stopnia wilgotności. Predykcja makroskopowej przewodności cieplnej, lub inaczej charakterystyka  $\lambda-S_r$ , determinowana jest natomiast uwarunkowaniem wynikającym z „hierarchii zapełniania”, która „steruje” ewolucją morfologii mikrostruktury ośrodka zastępczego.

Podane rozważania umożliwiają, zdaniem autora, stworzenie w ramach dalszych prac naukowych dla częściowo nasyconych ośrodków gruntowych swoistej bazy ekwiwalentnych mikrostruktur do praktycznych zastosowań w schematach aproksymacji analitycznej. Dysponując bazą pomiarów przewodności cieplnej dla wielu gruntów (różniących się np. uziarnieniem) w różnych stanach nasycenia, można pokusić się o rozwiązanie sekwencji zagadnień odwrotnych (analogicznych do tego, które zapre-

zentowano tutaj na przykładzie „gruntu 4”) i tym samym wyznaczenie ekwiwalentnych mikrostruktur, które byłyby stowarzyszone z zawartością poszczególnych frakcji gruntowych. Finalnie umożliwiłoby to stworzenie analogicznych do podrozdziału 6.3 diagramów trójkątnych, gdzie, oprócz sugerowanej wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, przypisano by dedykowane danemu gruntowi funkcje gęstości prawdopodobieństwa,  $M^{eq}(\theta)$ , dla poszczególnych schematów analitycznych, np. schematu Mori–Tanaki lub samouzgodnionego pola. Takie zadanie z pewnością będzie obiektem dociekań autora w najbliższej przyszłości.

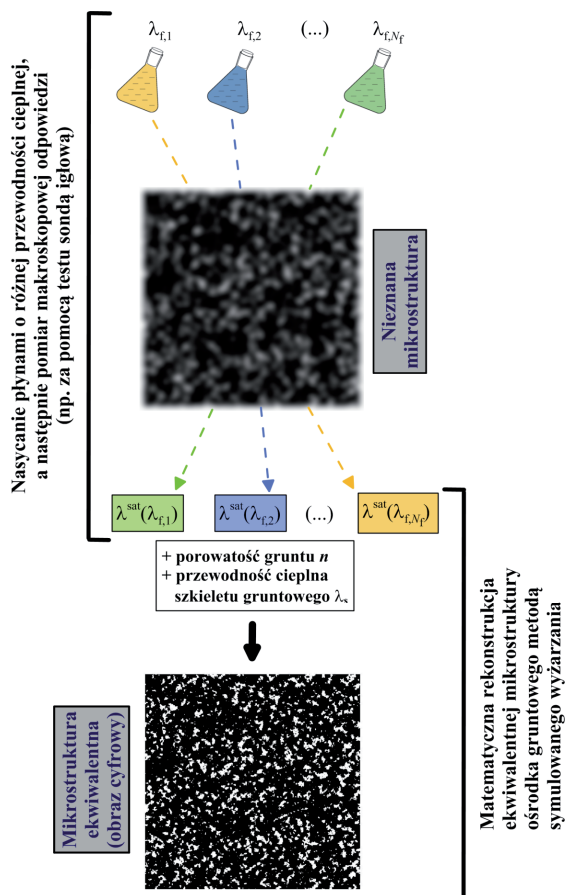


## 9. Wykorzystanie charakterystyki cieplnej gruntu do rekonstrukcji jego mikrostruktury

We wstępie do niniejszej monografii wskazano na to, iż poprawne rozpoznanie charakterystyki termicznej gruntu jest konieczne w aspekcie prawidłowego projektowania konstrukcji, dla których otaczający je ośrodek gruntowy stanowi nośnik energii cieplnej. Problemowi określania charakterystyki przewodności cieplnej, w różnych skalach obserwacji, poświęcono większość rozważań zawartych w rozdziałach 5–8. Jednocześnie, w poprzednim rozdziale, wykazano już, że znajomość tej charakterystyki, uwzględniona w zagadnieniu odwrotnym jako znana informacja o ośrodku gruntowym, umożliwia identyfikację ekwiwalentnej mikrostruktury (morfologii ośrodka zastępczego) w ujęciu analitycznej mikromechaniki. Satysfakcjonujące wyniki uzyskane w poprzednim rozdziale, w zakresie identyfikacji ekwiwalentnej mikrostruktury w ramach schematów aproksymacji analitycznej, skłoniły więc autora do podjęcia próby stworzenia procedury umożliwiającej rekonstrukcję ekwiwalentnej mikrostruktury w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki. Innymi słowy, postuluje się, że znajomość charakterystyki cieplnej gruntu (jeśli charakterystyka ta zostanie odpowiednio „zrealizowana”) może być wykorzystana do identyfikacji mikrostruktury tego ośrodka, analogicznie do przypadku mikrotomografii komputerowej. Proponowany w tym rozdziale algorytm postępowania jest oczywiście zbliżony do tego, w którym określano mikrostrukturę ekwiwalentną dla schematów analitycznych, z tą różnicą, że tym razem dokonuje się matematycznej rekonstrukcji obrazu cyfrowego, będącego dyskretną reprezentacją ekwiwalentnej mikrostruktury nasyconego ośrodka gruntowego. Koncepcję takiej rekonstrukcji, w sposób graficzny, przedstawiono na rys. 9.1.

Podobnie jak w przypadku identyfikacji ekwiwalentnej mikrostruktury w ujęciu schematów analitycznych, tak i tym razem, w celu numerycznej rekonstrukcji obrazu mikrostruktury konieczne jest sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego. Jeśli zatem dla gruntu znane są:

- dyskretna postać funkcji makroskopowej przewodności cieplnej (np. rys. 8.13), uzyskana przez sekwencyjne nasywanie ośrodka gruntowego płynami o różnych przewodnościach cieplnych (liczbę wykorzystanych płynów oznaczmy, jako  $N_f$ ),



Rys. 9.1. Koncepcja rekonstrukcji ekwiwalentnej mikrostruktury ośrodka gruntowego w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki

- przewodność cieplna szkieletu gruntowego  $\lambda_s$  (określona na przykład na podstawie diagramów trójkątnych zawartych w rozdziale 6),

- porowatość  $n$ ,

to celem jest zidentyfikowanie cyfrowego obrazu mikrostruktury, który zastosowany w aparacie obliczeniowej mikromechaniki, tj. zgodnie z procedurą opisaną w podrozdziale 7.1, zapewni satysfakcjonującą predykcję funkcji makroskopowej przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego.

Zauważmy, że pod względem poszukiwanego rozwiązania zagadnienie to jest bardzo zbliżone do tego, które zaprezentowano już wcześniej, w punkcie 7.2.1. Wówczas poszukiwano takiego ułożenia białych i czarnych pikseli, dla których określona funkcja prawdopodobieństwa dwupunktowego była zgodna z założoną funkcją,  $S_2^{\text{cel}}(r)$ . Rekonstrukcję mikrostruktury dokonywano zatem na podstawie założonej informacji statystycznej

o geometrii mikrostruktury. W zagadnieniu rozważanym obecnie zakłada się, że geometrię mikrostruktury ekwiwalentnej można zrekonstruować na podstawie znajomości charakterystyki cieplnej gruntu, tj. funkcji makroskopowej przewodności cieplnej.

W dalszych analizach zawartych w tym rozdziale formułuje się i rozwiązuje zagadnienie odwrotne, którego celem jest wyznaczenie ekwiwalentnej mikrostruktury (w postaci obrazu cyfrowego) dla rozważanego już wcześniej ośrodka gruntowego, tj. piasku średniego (rys. 4.8). W zagadnieniu odwrotnym zatem za dane traktuje się: dyskretne wartości funkcji makroskopowej odpowiedzi (rys. 8.13), uzyskane na podstawie pomiarów sondą igłową oraz porowatość gruntu, która wynosi  $n = 0,318$ .

Ponownie do rozwiązania zagadnienia odwrotnego proponuje się wykorzystać algorytm symulowanego wyżarzania. Wobec tego, w dowolnym kroku iteracyjnym definiuje się fikcyjną „energię” wyrażoną następującą zależnością:

$$E = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \left( \lambda_i^{\text{hom,sat}} - \lambda_i^{\text{sat}} \right)^2 \quad (9.1)$$

gdzie  $\lambda^{\text{hom,sat}}$  oznacza numerycznie określoną przewodność cieplną gruntu w stanie pełnego nasycenia (każdorazowo dokonuje się tego przez rozwiązanie zagadnienia brzegowego (4.38) z wykorzystaniem autorskiego programu bazującego na metodzie objętości skończonych<sup>26</sup>), natomiast  $\lambda^{\text{sat}}$  jest pomierzoną wartością przewodności cieplnej gruntu nasyconego. Parametr  $N_f$  definiuje liczbę pomiarów, która w rozważanym przypadku wynosi 8.

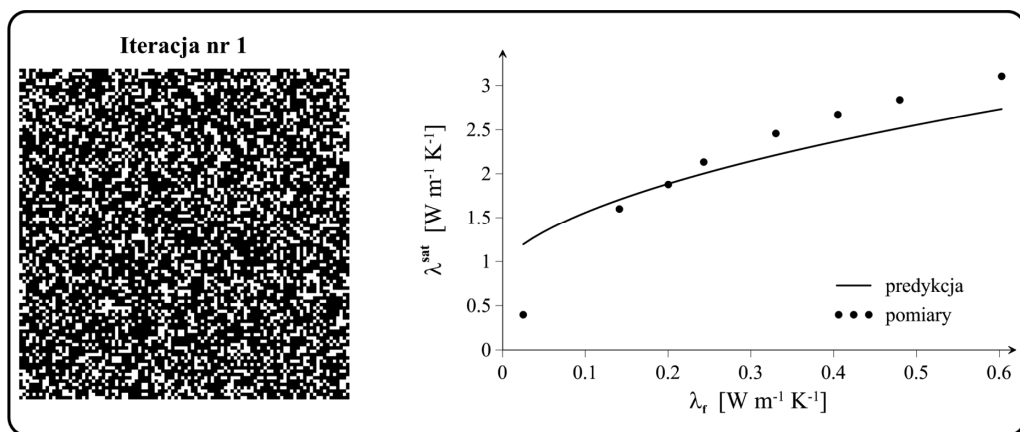
Przyjmuje się, że konfigurację początkową rozpoczynającą proces optymalizacji, a więc „startowe” ułożenie pikseli odpowiada losowej szachownicy (por. z analizami zawartymi w punkcie 7.2.1), przy czym liczba białych pikseli (charakteryzujących przestrzeń porową gruntu) dobrana jest w taki sposób, aby zachowywała wartość porowatości rzeczywistego ośrodka gruntowego. Oznacza to, że procentowy udział liczby białych pikseli w odniesieniu do wszystkich pikseli (białych i czarnych) obrazu cyfrowego musi być równy porowatości gruntu,  $n$ , tj. 31,8%. Konfigurację początkową w postaci dwuwymiarowego obrazu binarnego losowej szachownicy zaprezentowano z lewej strony na rys. 9.2.

Ponadto z prawej strony rys. 9.2 przedstawiono funkcję makroskopowej przewodności cieplnej, czyli wartość  $\lambda^{\text{sat}}$  w zależności od wartości przewodności cieplnej płynu wypełniającego przestrzeń porową gruntu,  $\lambda_f$ . Punktami oznaczono pomiary laboratoryjne (są to oczywiście te same dane, które prezentowano na rys. 8.13), natomiast linia ciągła reprezentuje numerycznie określoną wartość przewodności cieplnej gruntu nasyconego. Jak można zauważyć, dla startowej konfiguracji pikseli (losowa szachownica) trudno mówić o zgodności predykcji z wynikami badań laboratoryjnych.

<sup>26</sup> Program i metoda rozwiązywania zostały szerzej omówione w podrozdziale 6.3.

Konieczne są zatem modyfikacje (ewolucja) obrazu cyfrowego w celu znalezienia rozwiązania optymalnego.

Ewolucji obrazu cyfrowego dokonuje się w sposób analogiczny do tego, który zaproponowano w przykładzie z podrozdziału 7.2. Losowo wybiera się dwa piksele z obrazu cyfrowego, reprezentujące szkielet oraz przestrzeń porową. Następnie piksele te zamieniają się kolorami, biały na czarny, i odwrotnie. Zauważmy, że taka zamiana zachowuje oczywiście zadaną porowatość ośrodka gruntowego. W dalszej kolejności, nowa konfiguracja pikseli akceptowana jest zgodnie z prawem akceptacji (7.6)<sup>27</sup>, przy czym wartość parametru  $T^*$  obniżana jest według zależności (7.7). W analizie stosuje się ponadto następujące parametry kontrolne algorytmu symulowanego wyżarzania: wartość współczynnika, który decyduje o szybkości obniżania fikcyjnej temperatury  $T^*$  przyjęto, ponownie, jako  $\alpha = 0,9$ ; w ramach każdej iteracji (stałej wartości  $T^*$ ) wykonano 500 kroków; początkową wartość fikcyjnej temperatury,  $T_0^*$ , dobrano na podstawie próbnych symulacji i wyznaczono w taki sposób, aby na początku procesu optymalizacji prawdopodobieństwo akceptacji „gorszych” konfiguracji było na poziomie 80–90%. Wybrane wyniki w postaci obrazów cyfrowych oraz predykcji makroskopowej odpowiedzi ośrodka zaprezentowano na rys. 9.2–9.4.



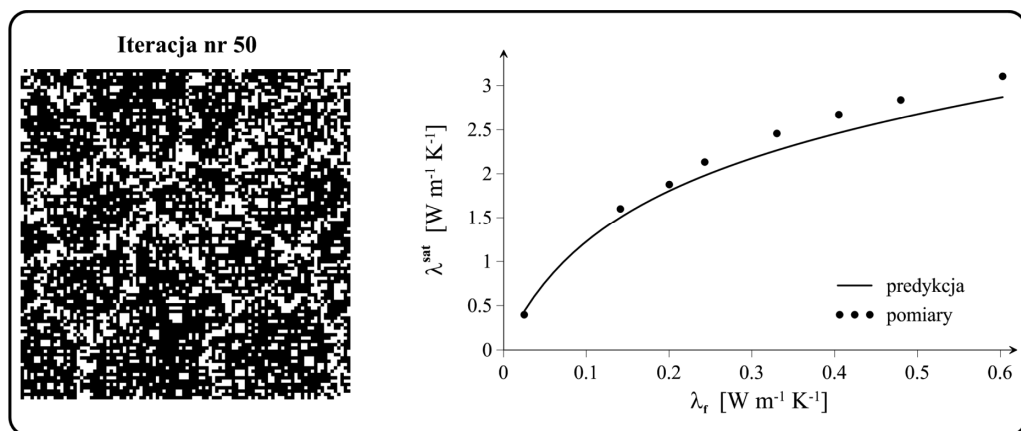
Rys. 9.2. Konfiguracja początkowa oraz odpowiadająca jej funkcja makroskopowej przewodności cieplnej piasku średniego

Na rysunku 9.3 przedstawiono cyfrowy obraz mikrostruktury uzyskany po 50 iteracjach algorytmu symulowanego wyżarzania oraz odpowiadającą tej mikrostrukturze predykcję makroskopowej przewodności cieplnej. Wyraźnie widać, że czarne piksele

<sup>27</sup> Wymaga to każdorazowo rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.38) dla nowej konfiguracji i określenia wartości  $\lambda^{hom,sat}$  dla wszystkich ośmiu przypadków, odpowiadających liczbie płynów wypełniających przestrzeń porową.

(reprezentujące szkielet gruntowy) zaczynają tworzyć większe klastry, które odpowiadają strukturze ziarnowej rozważanego piasku średniego. Ponadto predykcja pomierzonej przewodności cieplnej piasku jest już wyraźnie lepsza w porównaniu do oszacowania wynikającego z konfiguracji początkowej (rys. 9.2). W zasadzie dla gruntu suchego oraz dla niskich wartości  $\lambda_f$  rozwiązanie numeryczne bardzo dobrze przybliża wyniki pomiarów laboratoryjnych.

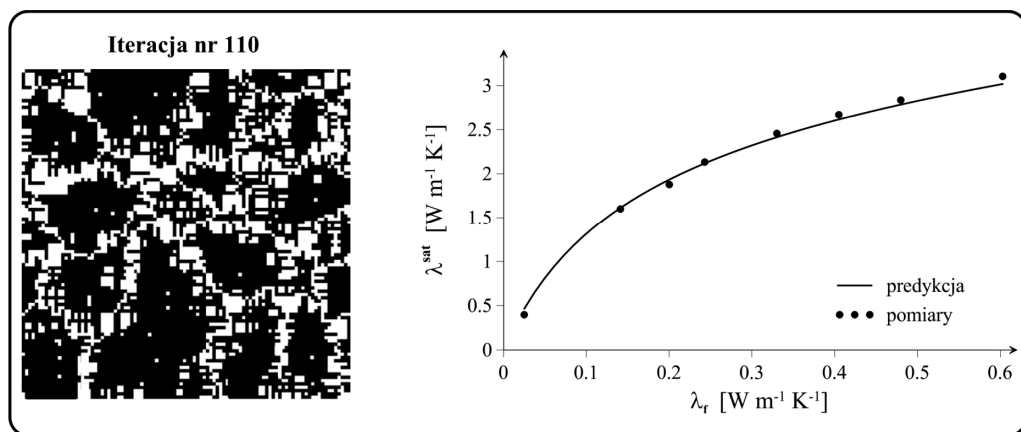
Konfigurację, która zatrzymała algorytm symulowanego wyżarzania, przedstawia rys. 9.4. Podobnie, jak w poprzednio rozwiązywanych zagadnieniach odwrotnych, przerwanie algorytmu nastąpiło wówczas, gdy następujące po sobie 3 kolejne iteracje nie spowodowały już „wyraźnej” poprawy rozwiązania. W przypadku rozważanego piasku średniego proces optymalizacji zakończył się po wykonaniu 110 iteracji. Można zauważyć, że prezentowana na rys. 9.4 mikrostruktura zidentyfikowana jako optymalna (dla tej mikrostruktury osiągnięto bowiem minimum „energii” (9.1)) przedstawia już bardzo wyraźną strukturę ziarnową – czarne piksele tworzą ziarna o zróżnicowanych wymiarach i nieregularnych kształtach. Zauważmy, że zidentyfikowana w ten sposób mikrostruktura zapewnia również bardzo dobrą predykcję pomierzonych wartości przewodności cieplnej. Zgodność wartości określonych w sposób numeryczny z wynikami pomiarów obserwuje się już w całym zakresie wartości przewodności cieplnej płynu wypełniającego przestrzeń porową,  $\lambda_f$ . W rezultacie można stwierdzić, że zrekonstruowany obraz cyfrowy przedstawia ekwiwalentną mikrostrukturę dla rozważanego ośrodka gruntowego, tj. piasku średniego.



Rys. 9.3. Mikrostruktura uzyskana po 50 iteracjach oraz odpowiadająca jej funkcja makroskopowej przewodności cieplnej piasku średniego

Jak pamiętamy z wcześniejszych rozważań, zidentyfikowane w ramach analitycznej mikromechaniki mikrostruktury ekwiwalentne reprezentowały pewne wirtualne/zastępcze mikrostruktury ośrodka rzeczywistego, których w ogólnym przypad-

ku nie powinno się utożsamiać z morfologią ośrodka rzeczywistego. Jest go głównie konsekwencją tego, iż mikrostruktury zastępcze powinny być na tyle nieskomplikowane, aby możliwe było ich zastosowanie w schematach aproksymacji analitycznej, np. w schemacie Mori–Tanaki lub samouzgodnionego pola. Z reguły ich morfologia zakładana jest w postaci ciągłej matrycy z zanurzonymi w niej wtrąceniami elipsoidalnymi. Zauważmy, że w zagadnieniu analizowanym w tym rozdziale nie narzuca się typu morfologii mikrostruktury ekwiwalentnej, a zakłada się jedynie, że ma być ona zrekonstruowana w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki, a więc jest ona reprezentowana w postaci binarnego obrazu cyfrowego. Istnieje więc wyraźnie większa dowolność w zakresie uzyskania optymalnej morfologii mikrostruktury w porównaniu do koncepcji ośrodka zastępczego w ujęciu analitycznej mikromechaniki. W sposób naturalny zatem nasuwa się pytanie czy zidentyfikowana mikrostruktura (rys. 9.4) może być również traktowana jako rekonstrukcja rzeczywistej mikrostruktury dla rozważanego tu piasku średniego?

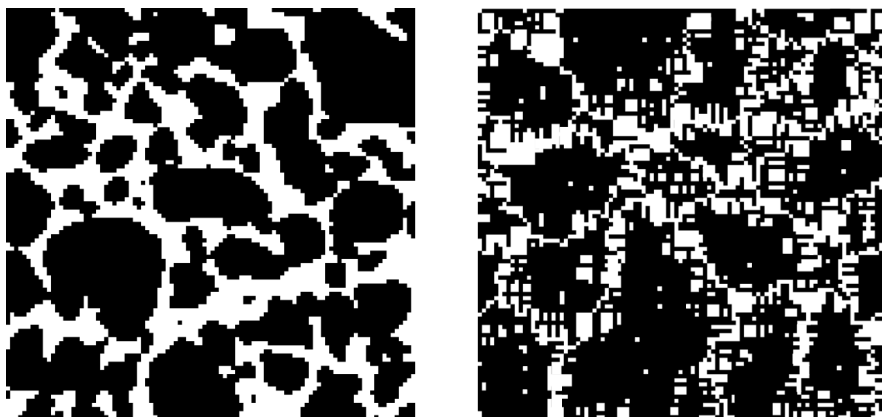


Rys. 9.4. Zrekonstruowana mikrostruktura ekwiwalentna dla piasku średniego oraz odpowiadająca jej funkcja makroskopowej przewodności cieplnej

Zdaniem autora, udzielenie jednoznacznej odpowiedzi na tak postawione pytanie jest dość trudne. Zauważmy, że z jednej strony uzyskana mikrostruktura minimalizuje „energię” (9.1), a więc zapewnia bardzo dobrą predykcję makroskopowej przewodności cieplnej. Wobec tego podstawowy cel optymalizacji został zrealizowany, a w konsekwencji zidentyfikowana mikrostruktura jest ekwiwalentną mikrostrukturą w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki. Z drugiej zaś strony nie ma pewności, że tak określona mikrostruktura jest zgodna, w sensie szeroko rozumianej morfologii, z rzeczywistą mikrostrukturą piasku średniego. Sensowne wydaje się w tym miejscu, przynajmniej jakościowe porównanie zidentyfikowanej mikrostruktury ekwiwalentnej z rekonstrukcją uzyskaną z obrazowania w mikrotomografii komputerowej. W tym celu na rys. 9.5

zestawiono oba obrazy cyfrowe. W szczególności z lewej strony zaprezentowano rekonstrukcję uzyskaną na podstawie obrazowania w mikrotomografii komputerowej, natomiast z prawej strony przedstawiono ekwiwalentną mikrostrukturę piasku średniego zidentyfikowaną w ramach rozwiązywanego w pracy zagadnienia odwrotnego.

Należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, że autor świadomie używa określeń „rekonstrukcja” lub „zrekonstruowana mikrostruktura” również w odniesieniu do obrazowania w mikrotomografii komputerowej. Dość powszechnie używa się bowiem, w odniesieniu do obrazów uzyskanych w tomografie, stwierdzenia sugerującego jakoby uzyskane w ten sposób obrazy przedstawiały faktycznie rzeczywisty obraz mikrostruktury skanowanych materiałów. Jest to, zdaniem autora, błędna interpretacja. Zauważmy bowiem, że obrazowanie w mikrotomografii komputerowej także bazuje na matematycznej rekonstrukcji, wobec czego uzyskane z tomografii komputerowej obrazy mikrostruktur są również pewną interpretacją rzeczywistej morfologii, a jakość tej interpretacji zależy oczywiście od wielu czynników.



Rys. 9.5. Zrekonstruowana mikrostruktura piasku średniego. Z lewej: obrazowanie uzyskane w mikrotomografii komputerowej. Z prawej: mikrostruktura ekwiwalentna określona na podstawie algorytmu zaproponowanego w niniejszej pracy

W przypadku mikrotomografii komputerowej rekonstrukcji trójwymiarowej mikrostruktury badanego materiału dokonuje się na podstawie serii zdjęć rentgenowskich (projekcji) wykonanych w wysokiej rozdzielczości. Projekcje te uzyskuje się na podstawie rejestracji natężenia promieniowania pochłoniętego przez próbkę, które zależy m.in. od gęstości badanego materiału. Ostatecznie trójwymiarowy obraz mikrostruktury otrzymuje się z wykorzystaniem jednego z dostępnych algorytmów matematycznej rekonstrukcji<sup>28</sup>. Warto również podkreślić, że uzyskane projekcje są zależne od zasto-

<sup>28</sup> Rekonstrukcje obrazów prezentowanych w niniejszej pracy wykonywane były z użyciem programu NRecon, bazującym na algorytmie Feldkampa (Feldkamp i in. 1984).

sowanych parametrów skanowania, m.in.: napięcia lampy, rozdzielczości, czasu ekspozycji, kąta obrotu, zastosowanych filtrów. Ponadto finalny obraz binarny mikrostruktury uzyskuje się przez dodatkowe zastosowanie filtrów graficznych, procedury segmentacji itd. Wszystko to sprowadza się do stwierdzenia, iż ostateczny obraz mikrostruktury jest pewną subiektywną oceną i zdecydowanie zależy od doświadczenia, wiedzy i przekonań osoby obsługującej urządzenie skanujące.

Wracając jednak do porównania obu uzyskanych rekonstrukcji (rys. 9.5), z pewnością można stwierdzić, że w sensie jakościowym oba obrazy są do siebie bardzo podobne. W obu przypadkach zidentyfikowana została wyraźna struktura ziarnowa badanego ośrodka gruntowego, a wielkości ziaren są porównywalne. Oczywiście jest, że w przypadku obrazu uzyskanego ze skanowania w mikrotomografii komputerowej struktura przestrzeni porowej ma zdecydowanie bardziej „wygładzony” przebieg. Jest to konsekwencją, m.in. przeprowadzonej procedury segmentacji oraz zastosowania filtrów graficznych. Obraz cyfrowy uzyskany na podstawie procedury sformułowanej w tej pracy nie został poddany żadnej dodatkowej obróbce graficznej – jest to „oryginalna” konfiguracja pikseli uzyskana wprost z rekonstrukcji bazującej na algorytmie symulowanego wyżarzania. Możliwe jest oczywiście przeprowadzenie dalszej obróbki cyfrowej uzyskanej mikrostruktury w celu lepszego odzwierciedlenia struktury porowej i odtworzenia bardziej regularnych kształtów ziaren. Techniki przetwarzania i analizy obrazu cyfrowego nie są jednak tematem tej pracy i dlatego nie są tutaj szerzej omawiane; po więcej szczegółów w tym zakresie autor odsyła czytelnika np. do książki Korohody i Tadeusiewicza (1997).

## 9.1. Uwagi

Zdaniem autora, zaproponowana w niniejszym rozdziale koncepcja rekonstrukcji ekwiwalentnej mikrostruktury ośrodka gruntowego, opierająca się na identyfikacji jej morfologii na podstawie informacji o charakterystyce przewodności cieplnej ośrodka, jest poprawna. Po pierwsze, określona w ten sposób mikrostruktura ekwiwalentna, zastosowana w aparacie obliczeniowej mikromechaniki, zapewnia bardzo dobrą predykcję makroskopowej przewodności cieplnej gruntu. Po drugie, zidentyfikowana mikrostruktura ekwiwalentna przedstawia wyraźną strukturę ziarnową i w sensie jakościowym jest bardzo zbliżona do rekonstrukcji uzyskanej z mikrotomografii komputerowej.

W konsekwencji drugiego z przytoczonych rezultatów wydaje się, że przedstawiona tutaj procedura identyfikacji obrazu binarnego mikrostruktury ośrodka gruntowego może stanowić również pewną koncepcję rekonstrukcji rzeczywistej mikrostruktury gruntu. Oczywiście jest jednak, że uzyskany z algorytmu symulowanego wyżarzania obraz cyfrowy należy poddać dalszej obróbce cyfrowej w celu lepszego odzwierciedlenia kształtów ziaren oraz „wygładzenia” przestrzeni porowej. Wymaga to zastoso-



wania, a być może nawet stworzenia, filtrów dedykowanych konkretnemu typowi ośrodka gruntowego. Dalsze udoskonalanie algorytmu rekonstrukcji, w ramach szeroko rozumianej analizy obrazu, jest zagadnieniem, którym autor zamierza się zająć w niedalekiej przyszłości.

Oprócz stosowania technik obróbki cyfrowej, wydaje się również, że dalsze poprawianie jakości odzwierciedlenia rzeczywistej mikrostruktury ośrodka gruntowego może być uzyskane na drodze modyfikacji sformułowanego tutaj zagadnienia odwrotnego. Zdaniem autora, prawdopodobnie lepsze odwzorowanie rzeczywistej mikrostruktury gruntu można uzyskać, jeśli rekonstrukcję przeprowadzi się jednocześnie ze względu na parametry mechaniczne oraz dostępne miary mikrostruktury ośrodka gruntowego. Na przykład, jeśli, oprócz dyskretnej funkcji makroskopowej przewodności cieplnej, dysponowalibyśmy funkcją prawdopodobieństwa dwupunktowego, to zagadnienie odwrotne można by rozwiązywać w celu minimalizacji „energii” będącej połączeniem zależności (7.4) oraz (9.1), tj.:

$$E = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} (\lambda_i^{\text{hom,sat}} - \lambda_i^{\text{sat}})^2 + \sum_r (S_2(r) - S_2^{\text{cel}}(r))^2 \quad (9.2)$$

Zauważmy, że powyższa reprezentacja fikcyjnej „energii” nie ma w zasadzie wpływu na postępowanie algorytmu symulowanego wyżarzania. Zmiany konfiguracji, tj. układu białych i czarnych, pikseli wciąż mogłyby odbywać się w identyczny, jak zaproponowany w tej monografii, sposób. Różnica oczywiście polegałaby na wydłużeniu czasu obliczeń, gdyż każda zmiana konfiguracji wymagałaby jednoczesnego określania predykcji makroskopowej przewodności cieplnej oraz funkcji prawdopodobieństwa dwupunktowego. Wydaje się jednak, że równoczesne uwzględnienie „miar” mechanicznych oraz geometrycznych mogłoby skutkować tym, że do analizy wystarczyłoby przyjmując mniejszą (niż założone w pracy osiem) liczbę punktów pomiarowych definiujących funkcję makroskopowej odpowiedzi. Być może udałoby się osiągnąć satysfakcjonującą rekonstrukcję już dla dwóch punktów pomiarowych, tj. grunt suchy oraz nasycony wodą (zauważmy, że takie badania, w sensie pomiaru przewodności cieplnej, przeprowadza się stosunkowo łatwo). Takie przypuszczenie wynika z faktu, iż informacja o morfologii zawarta w funkcji makroskopowej przewodności cieplnej zostałaby w pewien sposób skompensowana przez miarę geometryczną, tj. prawdopodobieństwo dwupunktowe. Jednocześnie należy w tym miejscu podkreślić, że, jak pokazano np. w pracy Torquato (2002), rekonstrukcja mikrostruktur jedynie na podstawie funkcji  $S_2$  nie daje w pełni satysfakcjonujących rezultatów. Stąd właśnie proponowane tutaj zupełnie nowe podejście będące połączeniem rekonstrukcji na podstawie informacji o miarach mechanicznych i geometrycznych wydaje się tym, które może dać możliwość zdecydowanie lepszej identyfikacji nie tylko mikrostruktury ekwiwalentnej, ale wręcz może stanowić relatywnie proste narzędzie do rekonstrukcji rzeczywistych mikrostruktur ośrodków gruntowych.

Przez analogię do mikrotomografii komputerowej, gdzie jakość odwzorowania rzeczywistej mikrostruktury zależy od liczby wykonanych projekcji, tak i w rozważanych tutaj zagadnieniach odwrotnych dotyczących identyfikacji mikrostruktury ekwiwalentnej, można spodziewać się, że jakość rekonstrukcji z pewnością zależy od ilości przyjętych do analizy wartości makroskopowej przewodności cieplnej. Intuicja podpowiada oczywiście, że im więcej punktów pomiarowych, tym jakość rekonstrukcji powinna być lepsza. To stwierdzenie dotyczy oczywiście obu przypadków, tj. identyfikacji mikrostruktury ekwiwalentnej zarówno w ujęciu schematów aproksymacji analitycznej, jak również w ramach obliczeniowej mikromechaniki.

W niniejszej pracy wszystkie zagadnienia odwrotne identyfikujące mikrostruktury ekwiwalentne rozwiązywano dla przypadku, w którym dyskretna funkcja makroskopowej przewodności cieplnej dana była w postaci ośmiu punktów pomiarowych. Taka liczba pomiarów, jako wystarczająca do satysfakcjonującej predykcji makroskopowej przewodności cieplnej, została określona na podstawie wstępnych analiz przeprowadzonych w ramach wcześniejszej pracy autora (Łydźba i in. 2018) – przy czym rozważania zawarte w tej pracy dotyczyły oczywiście podejścia opartego na analitycznej mikromechanice. Wstępne symulacje przeprowadzone przez autora wykazały, że liczba punktów pomiarowych, a także ich odpowiedni dobór, istotnie wpływa na jakość identyfikacji mikrostruktury ekwiwalentnej (zarówno w ujęciu analitycznej, jak i obliczeniowej mikromechaniki). W niniejszej monografii nie prezentuje się jednak analiz dotyczących wpływu liczby punktów pomiarowych na jakość rekonstrukcji. Dobór odpowiedniej liczby oraz płynów wypełniających przestrzeń porową gruntu jest tematem dalszych prac autora.

## 10. Zakończenie

W niniejszej pracy przedstawiono niektóre z możliwych zastosowań technik homogenizacji w zagadnieniach dotyczących określania przewodności cieplnej gruntu, jako ośrodka wielofazowego. Analizy dotyczyły trzech odrębnych zagadnień, których celem było sformułowanie metod umożliwiających poprawne szacowanie wartości przewodności cieplnej:

- szkieletu gruntowego (rozdz. 6),
- gruntu nasyconego (rozdz. 7) oraz
- częściowo nasyconego ośrodka gruntowego (rozdz. 8).

Dodatkowym zagadnieniem, które trudno jednoznacznie przypisać do jednego z podanych tematów była identyfikacja cyfrowej reprezentacji tzw. ekwiwalentnej mikrostruktury ośrodka gruntowego na podstawie sekwencji pomiarów przewodności cieplnej, określanej mianem dyskretnej funkcji makroskopowej przewodności cieplnej (rozdz. 9).

Głównym celem analiz zawartych w tej monografii, łączącym niejako wszystkie wyróżnione zagadnienia, było zaadaptowanie wybranych metod homogenizacji do stworzenia technik obliczeniowych umożliwiających uzyskanie poprawnej predykcji charakterystyki przewodności cieplnej gruntu jako ośrodka wielofazowego. Zdaniem autora, cel ten został w pełni zrealizowany.

W szczególności zostało to dokonane przez sformułowanie i rozwiązanie wielu bezpośrednich (wprost), jak również odwrotnych, zagadnień teorii homogenizacji. Ponadto na uwagę zasługuje fakt, iż poza rozważaniami dotyczącymi określania przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego (rozdz. 8) oraz identyfikacji dyskretnej formy ekwiwalentnej mikrostruktury (rozdz. 9), wszystkie analizy prowadzono równolegle, tj. w ujęciu obliczeniowej i analitycznej mikromechaniki. Problem określania przewodności cieplnej dla ośrodka częściowo nasyconego rozwiązano, stosując podejście bazujące na analitycznej mikromechanice – wykorzystano w tym przypadku schemat aproksymacyjny Mori–Tanaki. Natomiast zagadnienie odwrotne, którego celem było zrekonstruowanie obrazu binarnego mikrostruktury ośrodka gruntowego, rozwiązano, stosując do tego celu aparat obliczeniowej mikromechaniki.

Podsumowania otrzymanych w pracy wyników dokonano już niejako w ramach opisywania celu i zakresu pracy, które sformułowano w podrozdziale 1.2. Wyniki te

omówiono w takiej kolejności, w jakiej prezentowano je w kolejnych rozdziałach. Ponadto, jak wspomniano we wstępie, po każdym ważniejszym rozdziale lub podrozdziale sformułowano najważniejsze zdaniem autora uwagi, które w wielu przypadkach stanowiły również wnioski płynące z zawartych w danym rozdziale rozważań. Większość z nich stanowiła również podstawę do analiz prowadzonych w kolejnych rozdziałach pracy. Jednak wydaje się naturalne, że takie opracowanie należy zakończyć sformułowaniem najważniejszych rezultatów, osiągnięć oraz wniosków płynących z rozważań i analiz zawartych w niniejszej pracy, nawet jeśli część z nich została już przedstawiona wcześniej. Takiego zestawienia dokonano w formie kolejnych odnośników.

- Najważniejsze czynniki, mające istotny wpływ na wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego, to m.in.: zawartość wody w przestrzeni porowej, skład mineralogiczny, porowatość oraz gęstość objętościowa szkieletu gruntowego.

- Charakterystyka termiczna ośrodka gruntowego, rozumiana jako zmiana wartości przewodności cieplnej spowodowana sukcesywnym nawadnianiem gruntu, zależy od rodzaju gruntu. Różnice w odpowiedzi makroskopowej gruntów drobno- i gruboziarnistych są głównie konsekwencją odmiennej morfologii mikrostruktury, w odniesieniu do kształtu oraz wielkości ziaren tworzących szkielet gruntowy.

- Spośród wszystkich minerałów tworzących szkielet gruntowy kwarc jest tym, który charakteryzuje się najwyższą przewodnością cieplną (tab. 2.2). Jego procentowy udział w szkielecie gruntowym ma zatem znaczący wpływ na makroskopową przewodność cieplną ośrodka gruntowego.

- W porównaniu do gruntów drobnoziarnistych, grunty gruboziarniste charakteryzują się zazwyczaj wyższą wartością przewodności cieplnej w całym zakresie możliwych wartości stopnia wilgotności.

- Przewodność cieplna gruntu suchego zależy głównie od porowatości (gęstości gruntu). Jest to konsekwencją tego, iż w gruncie suchym transport ciepła odbywa się w zasadzie jedynie przez kontakty międzyziarnowe. Istniejące w literaturze przedmiotu modele empiryczne poprawnie szacują wartość przewodności cieplnej ośrodka gruntowego w stanie suchym, tj.  $\lambda^{\text{dry}}$ .

- Wykazano, że w celu uzyskania poprawnej predykcji przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, a w konsekwencji przewodności cieplnej gruntu, jako ośrodka wielofazowego, w obliczeniach należy uwzględnić informację o zawartości materii organicznej. Wynika to z faktu, iż materia organiczna cechuje się relatywnie niską wartością przewodności cieplnej (tab. 2.1).

- W podrozdziale 3.2 przeprowadzono analizy dotyczące predykcji przewodności cieplnej gruntów drobno- i gruboziarnistych z wykorzystaniem omawianych w pracy modeli teoretycznych i empirycznych. Rezultaty porównano z wynikami badań zaczerpniętymi z literatury. Na ich podstawie, oraz jednocześnie na podstawie wiedzy dostępnej w literaturze przedmiotu, dokonano tabelarycznego zestawienia zalet, wad, zakresu stosowalności oraz uwag własnych autora dla każdego z omawianych w pracy

modeli. W rezultacie tab. 3.1 stanowi niejako „poradnik” do zastosowań w praktyce inżynierskiej, dający możliwość łatwego doboru odpowiedniego modelu obliczeniowego do konkretnej sytuacji obliczeniowej. Wykazano ponadto, że spośród wszystkich omawianych w podrozdziale 3.1 modeli, jedynie ten zaproponowany przez Lu i in. (2007) dość dobrze oddaje charakterystykę termiczną gruntów drobnoziarnistych (zależność  $\lambda - S_r$ ), w zakresie małych wartości stopnia wilgotności. Jakość tej predykcji zależy jednak od poprawnego oszacowania przewodności cieplnej gruntu suchego,  $\lambda^{\text{dry}}$ , oraz w pełni nasyconego wodą,  $\lambda^{\text{sat}}$ .

- Wykazano, że właściwe oszacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego ma kluczowe znaczenie w uzyskaniu poprawnej predykcji przewodności cieplnej gruntu, zwłaszcza dla większych wartości stopnia wilgotności. Jednocześnie, przeprowadzając odpowiednie obliczenia oraz porównując ich rezultaty z wynikami badań, wykazano, że w zasadzie brak jest obecnie uniwersalnego podejścia zapewniającego prawidłową predykcję przewodności cieplnej szkieletu gruntowego; przez pojęcie „uniwersalnego podejścia” rozumie się takie, które może być stosowane w każdej sytuacji, tj. niezależnie od rodzaju gruntu.

- W celu stworzenia uniwersalnego modelu umożliwiającego szacowanie przewodności cieplnej szkieletu gruntowego,  $\lambda_s$ , wprowadzono założenie o tzw. lokalnej zmienności współczynnika przewodności cieplnej w skali mikro, będącej konsekwencją złożonej struktury mineralogicznej gruntu w tej skali obserwacji. Założenie o losowych zmianach wartości przewodności cieplnej zaaplikowano do technik zarówno obliczeniowej, jak i analitycznej mikromechaniki (schemat samouzgodnionego pola). Przez rozwiązanie zagadnień odwrotnych teorii homogenizacji dokonano identyfikacji optymalnej charakterystyki opisującej lokalne fluktuacje przewodności cieplnej w obrębie szkieletu gruntowego – stwierdzono bardzo dobrą zgodność uzyskanych rezultatów z powszechną wiedzą dostępną w literaturze przedmiotu, zwłaszcza dla podejścia opartego na obliczeniowej mikromechanice.

- Na podstawie optymalnych funkcji (opisujących lokalne fluktuacje współczynnika  $\lambda$ ) uzyskanych z modelowania w ramach obliczeniowej mikromechaniki, stworzono dwa typy diagramów służące określaniu wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego (rys. 6.18–6.25). Na ich podstawie można określić wartość  $\lambda_s$  w sposób „dokładny” – bazując na informacji o procentowych zawartościach trzech głównych frakcji gruntowych – lub „zgrubny”, tj. jedynie na podstawie nazwy gruntu. W tym drugim przypadku otrzymuje się wartość średnią parametru  $\lambda_s$  oraz odchylenie standardowe. Co warto podkreślić, drugi typ diagramu jest konsystentny z trójkątem ISO „krajowym” według załącznika krajowego do normy PN-EN ISO 14688-2. Opracowanie diagramów trójkątnych jest, zdaniem autora, niezwykle ważnym osiągnięciem z perspektywy ich przydatności w praktyce inżynierskiej.

- Jak wykazano na podstawie analiz prowadzonych w rozdziale 7, zastosowanie w aparacie obliczeniowej i analitycznej mikromechaniki optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa (odpowiednio rys. 6.16 oraz 6.29), opisujących lokalną zmien-

ność wartości  $\lambda^{\text{sat}}$ , prowadzi do bardzo dobrych predykcji przewodności cieplnej gruntu nasyconego. Jakość predykcji uzyskanych z modelowania w ujęciu obu podejść zweryfikowano względem wartości przewodności cieplnej,  $\lambda^{\text{sat}}$ , pochodzących z badań własnych autora i uzupełnionych o dane literaturowe.

- Formułując metodę umożliwiającą określanie wartości  $\lambda^{\text{sat}}$  w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki, zakładano *a priori* postać mikrostruktury ośrodka gruntowego. Przyjęto model tzw. trójwymiarowej (wokselowej) losowej szachownicy. Bardzo dobra zgodność predykcji i wyników pomiaru potwierdza prawidłowość założeń dotyczących morfologii mikrostruktury. W przypadku analitycznej mikromechaniki, w szczególności dotyczy to wykorzystanego w rozdziale 7 schematu samouzgodnionego pola, wykazano, że morfologia mikrostruktury zastępczej istotnie wpływa na jakość predykcji wartości  $\lambda^{\text{sat}}$ . W efekcie, wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania, zidentyfikowano optymalną mikrostrukturę ośrodka zastępczego (o morfologii polikrystalicznej/ziarnowej) w zakresie wyznaczenia wartości parametrów kształtu dla wtrąceń sferoidalnych opisujących cząstki frakcji ilowej, materii organicznej oraz wody.

- Zidentyfikowanie optymalnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa (tab. 7.3) oraz optymalnej morfologii mikrostruktury (tab. 7.4) w ramach modelowania analitycznego ma istotne znaczenie z perspektywy zastosowań w praktyce inżynierskiej – ułatwia to określanie przewodności cieplnej nasyconego ośrodka gruntowego z wykorzystaniem schematu samouzgodnionego pola.

- W podrozdziale 8.1 zaprezentowano przykłady oszacowań makroskopowej przewodności cieplnej częściowo nasyconego ośrodka gruntowego w ramach schematów Mori–Tanaki oraz samouzgodnionego pola. Na podstawie uzyskanych wyników wykazano, że największą trudnością w modelowaniu odpowiedzi makroskopowej ośrodka gruntowego, za pomocą metod aproksymacji analitycznej, jest przyjęcie poprawnej morfologii dla mikrostruktury zastępczej. Wskazano na fakt, iż brak jest w literaturze tematu jasno sprecyzowanych wytycznych dotyczących doboru konkretnych „rodzin” wtrąceń elipsoidalnych w celu stworzenia mikrostruktury zastępczej dla ośrodka gruntowego.

- Pewnym rozwiązaniem problemu, o którym mowa wcześniej, jest zastosowanie w schematach analitycznych koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury. W niniejszej pracy dokonano analizy krytycznej sformułowań zaproponowanych w literaturze tematu. Wskazano na fakt, iż zaproponowane przez Kachanova i Sevostianova (2005; 2012) koncepcje ekwiwalentnej mikrostruktury dla ośrodków porowatych mają tę wadę, iż zależą od przewodności cieplnych składników tworzących kompozyt. Konsekwencją tej niedoskonałości jest konieczność określania nowej mikrostruktury ekwiwalentnej za każdym razem, gdy zmienia się medium, które wypełnia przestrzeń porową ośrodka rzeczywistego – np. w przypadku gruntu suchego lub nasyconego mogą istnieć, w ogólnym przypadku, dwie zasadniczo różniące się od siebie mikrostruktury ekwiwalentne.

- W podrozdziale 8.2 przedstawiono sformułowanie ekwiwalentnej mikrostruktury, która może być rozumiana w bardziej „ogólnym” sensie. W szczególności zawarte punktach 8.2.1 oraz 8.2.3 rozważania są efektem wspólnej pracy autora, Łydźby oraz Stefaniuka<sup>29</sup>. Sformułowana w ten sposób mikrostruktura ekwiwalentna jest niezmiennicza względem przewodności cieplnej medium wypełniającego przestrzeń porową ośrodka rzeczywistego. Weryfikacji poprawności koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury dokonano na przykładzie rozwiązania zagadnienia odwrotnego dla dwóch ośrodków: grunt (piasek średni) oraz materiał skalny (piaskowiec Fontainebleau).

- Opierając się na dwóch wspomnianych ośrodkach (grunt i materiał skalny), wykazano, że przytoczone w niniejszej pracy sformułowanie ekwiwalentnej mikrostruktury (rozumianej w znacznie bardziej „ogólnym” sensie, aniżeli dotychczas proponowane w literaturze koncepcje) jest poprawne. W obu przypadkach zidentyfikowane mikrostruktury ekwiwalentne okazały się (zgodnie z założeniem) niezmiennicze względem przewodności cieplnej medium wypełniającego przestrzeń porową ośrodka rzeczywistego. Wykazano, że ekwiwalentna mikrostruktura, rozumiana w pracy jako funkcja gęstości prawdopodobieństwa, której argumentem jest stosunek półosi wtrąceń sferoidalnych, zależy od użytego w analizie schematu aproksymacyjnego, tj. zidentyfikowano odmienne funkcje  $M^{eq}(\theta)$  dla schematów Mori–Tanaki i samouzgodnionego pola.

- Głównym celem analiz prowadzonych w rozdziale 8 było jednak sformułowanie metody ułatwiającej określanie przewodności cieplnej gruntów częściowo nasyconych z wykorzystaniem koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury w ujęciu schematu aproksymacyjnego Mori–Tanaki. Wykazano, że w przypadku gruntów częściowo nasyconych zamiana takiego ośrodka na kompozyt dwuskładnikowy i zastosowanie do takiego zastępczego medium koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury, w ogólności, nie zapewnia poprawnej predykcji makroskopowej przewodności cieplnej. Transformacji ośrodka trójskładnikowego na dwuskładnikowy dokonano przez ujednorodnienie mieszaniny woda–powietrze z wykorzystaniem dolnego i górnego ograniczenia Hashina–Shtrikmana.

- W konsekwencji do uzyskania poprawnej charakterystyki przewodności cieplnej gruntów częściowo nasyconych zaproponowano w niniejszej pracy nowe podejście. Stanowi ono połączenie koncepcji ekwiwalentnej mikrostruktury oraz tzw. „hierarchii zapełniania”, która determinuje przypisanie poszczególnych „rodzin” wtrąceń sferoidalnych do fazy wodnej lub gazowej, w zależności od wartości stopnia wilgotności,  $S_r$ . Efektywność zaproponowanej metody zilustrowano przykładem obliczeniowym, którego rezultaty porównano z wynikami badań. Wykazano, że koncepcja ekwiwalentnej mikrostruktury w połączeniu z „hierarchią zapełniania” prowadzi do poprawnego odwzorowania specyficznej charakterystyki termicznej gruntów drobnoziarnistych – mowa tu o zależności  $\lambda-S_r$ , szczególnie dla przypadku małych wartości stopnia wilgotności.

---

<sup>29</sup> Łydźba D., Różański A., Stefaniuk D. (2018), *Equivalent microstructure problem: Mathematical formulation and numerical solution*, International Journal of Engineering Science, 123, 20–35.

- Kolejnym ważnym i oryginalnym osiągnięciem autora jest sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia odwrotnego w wyniku, którego dokonano rekonstrukcji ekwiwalentnej mikrostruktury ośrodka gruntowego w ujęciu obliczeniowej mikromechaniki. W szczególności na podstawie wyników pomiarów laboratoryjnych makroskopowej przewodności cieplnej gruntu (a więc na podstawie charakterystyki cieplnej ośrodka gruntowego) zidentyfikowano cyfrowy obraz takiej mikrostruktury dla wspomnianego już wcześniej piasku średniego. Uzyskana w ten sposób dyskretna reprezentacja mikrostruktury piasku zapewnia bardzo dobrą predykcję dyskretnej funkcji makroskopowej przewodności cieplnej ośrodka gruntowego.

- Przez porównanie uzyskanej (w sposób opisany powyżej) mikrostruktury z rekonstrukcją otrzymaną na podstawie obrazowania w tomografii komputerowej wskazano na jakościowe podobieństwo obu obrazów cyfrowych. W tym kontekście zaproponowany w pracy schemat określania ekwiwalentnej mikrostruktury ośrodka gruntowego (koncepcję tę prezentuje rys. 9.1) może być również podstawą do stworzenia metody umożliwiającej rekonstrukcję rzeczywistej mikrostruktury ośrodka gruntowego.

Pomimo iż problematyka wykorzystania elementów konstrukcyjnych budowli inżynierskich do pozyskiwania energii cieplnej z ośrodka gruntowego w Polsce wciąż jest jeszcze mało rozpoznana, to z racji niemal ciągłego zwiększania się kosztów energii konwencjonalnej można spodziewać się w niedalekiej przyszłości wzrostu zainteresowania tą tematyką przez krajowe instytucje naukowe, a zwłaszcza przez biura projektowe. Stosowanie nowoczesnych rozwiązań w budownictwie, np. wspomnianych we wstępie do niniejszej monografii termopali, wymaga od inżynierów nowego podejścia do projektowania. Zauważmy bowiem, że poprawne zaprojektowanie pala, który łączy ze sobą klasyczne cechy posadowienia wraz z ideą odzysku ciepła z gruntu, obliguje nas do określania stanu deformacji wywołanego nie tylko obciążeniami mechanicznymi, ale również obciążeniami termicznymi, wynikającymi z cyklicznych wahań temperatury w palu, jak również w otaczającym go ośrodku gruntowym (np. Murphy i in. 2015; Khosravi i in. 2016). Określenie pełnego, termomechanicznego stanu deformacji pala wymaga więc znajomości nie tylko parametrów mechanicznych betonu oraz gruntu, ale również ich charakterystyki cieplnej, zwłaszcza w zakresie przewodności cieplnej (np. Laloui i in. 2006). Poprawne określenie charakterystyki przewodności cieplnej ośrodka gruntowego jest więc kluczowym aspektem w przypadku projektowania konstrukcji, dla których otaczający je grunt stanowi źródło energii cieplnej. W tym kontekście niniejsza monografia (jak również zawarte w niej analizy), w której dokonuje się adaptacji wybranych metod homogenizacji do stworzenia technik obliczeniowych, umożliwiających określanie makroskopowej przewodności cieplnej wielofazowego ośrodka gruntowego, stanowi, zdaniem autora, istotny wkład wniesiony do dyscypliny budownictwo.

Na zakończenie podsumowania wyników uzyskanych w ramach niniejszego opracowania autor chciałby wyraźnie podkreślić, że niektóre z rozważanych tutaj zagad-



nień mają charakter rozwojowy. Oznacza to, że część wyników i analiz może stanowić przedmiot do dalszych dociekań i badań w zakresie określania charakterystyki cieplnej ośrodków gruntowych. Spośród kierunków badań, najbliższych omawianym w tej książce, warto wymienić następujące:

- analiza wpływu liczby punktów pomiarowych na jakość identyfikacji mikrostruktury ekwiwalentnej zarówno w ujęciu schematów analitycznych, jak i w ramach obliczeniowej mikromechaniki,

- rekonstrukcja rzeczywistej mikrostruktury ośrodka gruntowego na podstawie funkcji makroskopowej odpowiedzi, z uwzględnieniem techniki analizy obrazu oraz modyfikacji fikcyjnej „energii” przez uwzględnienie, dodatkowo, informacji o morfologii mikrostruktury,

- modelowanie efektu histerezy, w odniesieniu do przewodności cieplnej częściowo nasyconych ośrodków gruntowych, z wykorzystaniem sformułowanej w pracy koncepcji „hierarchii zapełniania”,

- stworzenie, dla częściowo nasyconych ośrodków gruntowych, bazy ekwiwalentnych mikrostruktur do zastosowań w schematach aproksymacji analitycznej – w zależności od rodzaju gruntu – w celu umożliwienia szybkiej i efektywnej predykcji makroskopowej przewodności cieplnej w zastosowaniach inżynierskich.



## Literatura

- [1] ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A. (1972), *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Vol. 9. Dover, New York.
- [2] ABU-HAMDEH N.H., REEDER R.C. (2000), *Soil thermal conductivity effects of density, moisture, salt concentration, and organic matter*, Soil Science Society of America Journal, 64(4), 1285–1290.
- [3] ADAM D., MARKIEWICZ R. (2009), *Energy from earth-coupled structures, foundations, tunnels and sewers*, Géotechnique, 59(3), 229–236.
- [4] ANAGNOSTOU G., RÖNQVIST E.M., PATERA A.T. (1992), *A computational procedure for part design*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 97(1), 33–48.
- [5] ASTM D 5334-00. (2000), *Standard Test Method for Determination of Thermal Conductivity of Soil and Soft Rock by Thermal Needle Probe Procedure*. American Society for Testing and Materials, ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428–2959, USA.
- [6] ASTM D 5334-08. (2008), *Standard Test Method for Determination of Thermal Conductivity of Soil and Soft Rock by Thermal Needle Probe Procedure*. American Society for Testing and Materials, ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428–2959, USA.
- [7] ASTM D 5334-14. (2014), *Standard Test Method for Determination of Thermal Conductivity of Soil and Soft Rock by Thermal Needle Probe Procedure*. American Society for Testing and Materials, ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428–2959, USA.
- [8] AURIAULT J.L., BOUTIN C. (1992), *Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. I: Coupling effects*, Transport in porous media, 7(1), 63–82.
- [9] AURIAULT J.L., BOUTIN C. (1993), *Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. II: Memory effects*, Transport in porous media, 10(2), 153–169.
- [10] AUSTIN W.A. (1998), *Development of an in situ system for measuring ground thermal properties*, Master's thesis, Oklahoma State University.
- [11] BARRY-MACAULAY D., BOUZZA A., SINGH R.M., WANG B., RANJITH P.G. (2013), *Thermal conductivity of soils and rocks from the Melbourne (Australia) region*, Engineering Geology, 164, 131–138.
- [12] BEJAN A., KRAUS A.D. (2003), *Heat transfer handbook*, Vol. 1, John Wiley & Sons.
- [13] BERRYMAN J.G. (1997), *Generalization of Eshelby's formula for a single ellipsoidal elastic inclusion to poroelasticity and thermoelasticity*, Physical Review Letters, 79(6), 1142.
- [14] BOBKO C., ULM F.J. (2008), *The nano-mechanical morphology of shale*, Mechanics of Materials, 40(4–5), 318–337.
- [15] BRANDL H. (2006), *Energy foundations and other thermo-active ground structures*, Geotechnique, 56(2), 81–122.
- [16] BRANDL H., ADAM D., MARKIEWICZ R. (2006), *Energy geocomposites for tunnels*, Proceedings of 8ICG 8th International Geosynthetics Conference, Yokohama, Japan, September 18–22, 2006.
- [17] BRANDON T.L., MITCHELL J.K. (1989), *Factors influencing thermal resistivity of sands*, Journal of Geotechnical Engineering, 115(12), 1683–1698.
- [18] BRIGAUD F., VASSEUR G. (1989), *Mineralogy, porosity and fluid control on thermal conductivity of sedimentary rocks*, Geophysical Journal International, 98(3), 525–542.
- [19] BRISTOW K. L. (1998), *Measurement of thermal properties and water content of unsaturated sandy soil using dual-probe heat-pulse probes*, Agricultural and forest meteorology, 89(2), 75–84.

- [20] BROWN W.F. (1955), *Solid mixture permittivities*, The Journal of Chemical Physics, 23(8), 1514–1517.
- [21] CAMPBELL G.S., JUNGBAUER J.D. Jr., BIDLAKE W.R., HUNGERFORD R.D. (1994), *Predicting the effect of temperature on soil thermal conductivity*, Soil Science, 158(5), 307–313.
- [22] ČAPEK P., HEJTMANEK V., BRABEC L., ZIKANOVÁ A., KOCIRIK M. (2009), *Stochastic reconstruction of particulate media using simulated annealing: Improving pore connectivity*, Transport in Porous Media, 76(2), 179–198.
- [23] CARSLAW H.S., JAEGER J.C. (1959), *Conduction of heat in solids*, Second edition, Oxford, Clarendon Press, 1959.
- [24] ČERNÝ V. (1985), *Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm*, Journal of Optimization Theory and Applications, 45(1), 41–51.
- [25] CHEN S.X. (2008), *Thermal conductivity of sands*, Heat and Mass Transfer, 44(10), 1241.
- [26] CHRISTENSEN R.W., WU T.H. (1964), *Analysis of clay deformation as a rate process*, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 90(6), 125–160.
- [27] CHRISTIENSEN R.M. (1990), *A critical evaluation for a class of micromechanical models*, J. Mech. Phys. Solids, 38, 379–404.
- [28] CONSTANTINIDES G., ULM F.J., VAN VLIET K. (2003), *On the use of nanoindentation for cementitious materials*, Materials and Structures, 36(3), 191–196.
- [29] CÔTÉ J., KONRAD J.M. (2005a), *Thermal conductivity of base-course materials*, Canadian Geotechnical Journal, 42(1), 61–78.
- [30] CÔTÉ J., KONRAD J.M. (2005b), *A generalized thermal conductivity model for soils and construction materials*, Canadian Geotechnical Journal, 42(2), 443–458.
- [31] DALAQ A.S., RANGANATHAN S.I., OSTOJA-STARZEWSKI M. (2013), *Scaling function in conductivity of planar random checkerboards*, Comput. Mater. Sci., 79, 252–261.
- [32] DERSKI W., IZBICKI R., KISIEL I., MRÓZ Z. (1988), *Rock and soil mechanics*, PWN.
- [33] DE VRIES D.A. (1963), *Thermal properties of soils*, In Physics of plant environment, W.R. Van Wijk (Ed.), John Wiley & Sons, New York, 210–235.
- [34] DE VRIES D.A. (1974), *Heat transfer in soils*, *Heat and Mass Transfer in the Biosphere. 1. Transfer Processes in Plant Environment*, D.A. De Vries, N.H. Afgan (Eds.), John Wiley & Sons, Inc., Halsted Press, New York.
- [35] DONAZZI F., OCCHINI E., SEPPI A. (1979), *Soil thermal and hydrological characteristics in designing underground cables*, In Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Vol. 126, No. 6, 506–516, IET Digital Library.
- [36] DONG Y., MCCARTNEY J.S., LU N. (2015), *Critical review of thermal conductivity models for unsaturated soils*, Geotechnical and Geological Engineering, 33(2), 207–221.
- [37] ESHELBY J.D. (1957), *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*, In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 241, No. 1226, 376–396, The Royal Society.
- [38] EUCKEN A. (1932), *Heat transfer in ceramic refractory materials: Calculation from thermal conductivities of constituents*, Fortschg. Gebiete Ingenieurw., B3, Forschungsheft, 16, 353–360.
- [39] EYMARD R., GALLOUËT T., HERBIN R. (2000), *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, 7, 713–1018.
- [40] FAROUKI O.T. (1966), *Physical properties of granular materials with reference to thermal resistivity*, Highway Research Record, No. 128, 25–44.
- [41] FAROUKI O.T. (1981), *Thermal properties of soils* (No. CRREL-MONO-81-1), Cold Regions Research and Engineering Lab Hanover NH.
- [42] FAROUKI O.T. (1982), *Evaluation of methods for calculating soil thermal conductivity* (No. CRREL-82-8), Cold Regions Research and Engineering Lab Hanover NH.
- [43] FELDKAMP L.A., DAVIS L.C., KRESS J.W. (1984), *Practical cone-beam algorithm*, JOSA A, 1(6), 612–619.

- [44] FELLER W. (1961), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I, 2nd Edition, John Wiley and Sons, N.Y.
- [45] FlexPDE. (2005), User Guide Version 5.0, PDE Solutions, Inc.
- [46] FUCHS M., CAMPBELL G.S., PAPENDICK R.I. (1978), *An analysis of sensible and latent heat flow in a partially frozen unsaturated soil*, Soil Science Society of America Journal, 42(3), 379–385.
- [47] GANGADHARA RAO M.V.B.B., SINGH D.N. (1999), *A generalized relationship to estimate thermal resistivity of soils*, Canadian Geotechnical Journal, 36(4), 767–773.
- [48] GAWIN D., SCHREFLER B.A., GALINDO M. (1996), *Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials*, Engineering Computations, 13(7), 113–143.
- [49] GEERS M.G., KOUZNETSOVA V.G., BREKELMANS W.A.M. (2010), *Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234(7), 2175–2182.
- [50] GEHLIN S. (1998), *Thermal response test: in situ measurements of thermal properties in hard rock*, rozprawa doktorska, Luleå tekniska universitet.
- [51] GEMANT A. (1952), *How to compute thermal soil conductivities*, Heating, Piping, and Air Conditioning, 24(1), 122–123.
- [52] GILBERT F. (1990), *Change of scale in multiphase media: the case of saturated soils*, W: Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling, F. Darve (Ed.), 329–347.
- [53] GITMAN I.M., ASKES H., SLUYS L.J. (2007), *Representative volume: existence and size determination*, Engineering Fracture Mechanics, 74(16), 2518–2534.
- [54] GOŁĘBIEWSKA A., WUDZKA, A (2006), *Nowa klasyfikacja gruntów według normy PN-EN ISO*, Geoinżynieria: Drogi, Mosty, Tunele, (4), 44–55.
- [55] GORI F. (1983), *A theoretical model for predicting the effective thermal conductivity of unsaturated frozen soils*, In Proceedings of the Fourth International Conference on Permafrost, Fairbanks (Alaska), Vol. 363.
- [56] GORI F. (1986), *On the theoretical prediction of the effective thermal conductivity of bricks*. Proceedings of the Eight International Heat Transfer Conference, S. Francisco, USA, 627–632.
- [57] GORI F., CORASANITI S. (2001), *Theoretical prediction of the effective thermal conductivity of particulate materials in extraterrestrial conditions and of foams at low density*, Microgravity and Space Station Utilization, 2(2–4), 23–24.
- [58] GORI F., CORASANITI S. (2002), *Theoretical prediction of the soil thermal conductivity at moderately high temperatures*, Transactions American Society of Mechanical Engineers Journal Of Heat Transfer, 124(6), 1001–1008.
- [59] GORI F., CORASANITI S. (2003), *Experimental measurements and theoretical prediction of the thermal conductivity of two-and three-phase water/olivine systems*, International Journal of Thermophysics, 24(5), 1339–1353.
- [60] GORI F., CORASANITI, S. (2004), *Theoretical prediction of the thermal conductivity and temperature variation inside mars soil analogues*, Planetary and Space Science, 52(1), 91–99.
- [61] GORI F., CORASANITI, S. (2006), *Thermal properties and temperature variations in Martian soil analogues*, Space Science: New Research, 165.
- [62] GORI F., CORASANITI, S. (2013), *New model to evaluate the effective thermal conductivity of three-phase soils*, International Communications in Heat and Mass Transfer, 47, 1–6.
- [63] GORI F., MARINO C., PIETRAFESA M. (2001), *Experimental measurements and theoretical predictions of the thermal conductivity of two phases glass beads*, International Communications in Heat and Mass Transfer, 28(8), 1091–1102.
- [64] GRUFMAN C., ELLYIN F. (2007), *Determining a representative volume element capturing the morphology of fibre reinforced polymer composites*. Composites science and technology, 67(3), 766–775.
- [65] GUSEV A.A. (1997), *Representative volume element size for elastic composites: a numerical study*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 45(9), 1449–1459.

- [66] GRIM R. (1953), *Clay Mineralogy*, McGraw–Hill, New York.
- [67] HAIGH S.K. (2012). *Thermal conductivity of sands*. *Geotechnique*, 62(7), 617.
- [68] HANSON J.L., EDIL T.B., YESILLER N. (2000), *Thermal properties of high water content materials*, *Geotechnics of High Water Content Materials*. ASTM D5334-05 STP 1374, T.B. Edil, P.J. Fox (Eds.), ASTM D5334-05 International, West Conshohocken, PA, 137–151.
- [69] HÄNSEL H., KRAJEWSKI B. (1968), *Podstawy rachunku błędów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- [70] HASHIN Z. (1983), *Analysis of composite materials*, *J. Appl. Mech.*, 50(2), 481–505.
- [71] HASHIN Z., SHTRIKMAN S. (1962), *A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials*, *Journal of Applied Physics*, 33(10), 3125–3131.
- [72] HASHIN Z., SHTRIKMAN S. (1963), *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2), 127–140.
- [73] HAZANOV S., HUET C. (1994), *Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(12), 1995–2011.
- [74] HILL R. (1965), *A self-consistent mechanics of composite materials*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4), 213–222.
- [75] HE H., ZHAO Y., DYCK M.F., SI B., JIN H., LV J., WANG J.A. (2017), *A modified normalized model for predicting effective soil thermal conductivity*, *Acta Geotechnica*, 1–20.
- [76] HILLEL D. (1980), *Fundamentals of Soil Physics*, Academic Press, New York.
- [77] HILLEL D. (1998), *Environmental soil physics: Fundamentals, applications, and environmental considerations*, Academic press.
- [78] HIRAIWA Y., KASUBUCHI T. (2000), *Temperature dependence of thermal conductivity of soil over a wide range of temperature (5–75 °C)*, *European Journal of Soil Science*, 51(2), 211–218.
- [79] HOPMANS J.W., DANE J.H. (1986), *Thermal conductivity of two porous media as a function of water content, temperature, and density*, *Soil Science*, 142(4), 187–195.
- [80] HORAI K.I. (1971), *Thermal conductivity of rock-forming minerals*, *Journal of Geophysical Research*, 76(5), 1278–1308.
- [81] HUET C. (1990), *Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(6), 813–841.
- [82] JANKE W. (2002), Pseudo random numbers: Generation and quality checks. *Lecture Notes John von Neumann Institute for Computing*, 10, 447.
- [83] IEEE 442. (1981), *Guide for Soil Thermal Resistivity Measurements*. Proceedings of the IEEE Standards Committee, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., New York.
- [84] JIAO Y., STILLINGER F.H., TORQUATO S. (2008), *Modeling heterogeneous materials via two-point correlation functions. II. Algorithmic details and applications*, *Physical Review E*, 77(3), 031135.
- [85] JOHANSEN O. (1975), *Thermal conductivity of soils*. (No. CRREL-TL-637), Draft English Translation 637. *Rozprawa doktorska*, University of Trondheim, Norwegia, Cold Regions Research and Engineering Lab Hanover NH.
- [86] KACHANOV M. (1992), *Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concept*, *Appl. Mech. Rev.*, 45, 304–335.
- [87] KACHANOV M., SEVOSTIANOV I. (2005), *On quantitative characterization of microstructures and effective properties*, *International Journal of Solids and Structures*, 42(2), 309–336.
- [88] KANIT T., FOREST S., GALLIET I., MOUNOURY V., JEULIN D. (2003), *Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach*, *International Journal of Solids and Structures*, 40(13), 3647–3679.
- [89] KANIT T., N’GUYEN F., FOREST S., JEULIN D., REED M., SINGLETON S. (2006), *Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials: representativity of samples of two materials from food industry*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33), 3960–3982.
- [90] KD2 Pro. (2011), *Thermal Properties Analyzer Operator’s Manual*, Version 10, Decagon Devices, Inc.

- [91] KERSTEN M.S. (1949), *Laboratory research for the determination of the thermal properties of soils*, Technical Report 23. Research Laboratory Investigations, Eng. Experiment Station, University of Minnesota, Minneapolis.
- [92] KHDIR Y.K., KANIT T., ZAÏRI F., NAIT-ABDELAZIZ M. (2013), *Computational homogenization of elastic-plastic composites*, International Journal of Solids and Structures, 50(18), 2829–2835.
- [93] KHOSRAVI A., MORADSHAHI A., MCCARTNEY J.S., KABIRI M. (2016), *Numerical analysis of energy piles under different boundary conditions and thermal loading cycles*, In: E3S Web of Conferences, Vol. 9, 05005, EDP Sciences.
- [94] KINCAID D., CHENEY E.W. (2005), *Analiza numeryczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [95] KIRKPATRICK S., GELATT C.D., VECCHI M.P. (1983), *Optimization by simulated annealing*, Science, 220(4598), 671–680.
- [96] KOROHODA P., TADEUSIEWICZ R. (1997), *Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów*, Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków.
- [97] KOSZELA-MAREK E. (2014), *The effect of 200 MPa pressure on specific surface area of clay*, Studia Geotechnica et Mechanica, 36(4), 3–6.
- [98] KRESS R., MAZ'YA V., KOZLOV V. (1989), *Linear integral equations*, Vol. 17, Springer-Verlag, Berlin.
- [99] LALOUI L., NUTH M., VULLIET L. (2006), *Experimental and numerical investigations of the behaviour of a heat exchanger pile*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 30(8), 763–781.
- [100] LANTUEJOL C. (2002), *Geostatistical simulation: models and algorithms*, Springer Science & Business Media, Berlin.
- [101] LIPIEC J., USOWICZ B., FERRERO A. (2007), *Impact of soil compaction and wetness on thermal properties of sloping vineyard soil*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 50(19), 3837–3847.
- [102] LOW J.E., LOVERIDGE F.A., POWRIE W. (2013), *Measuring soil thermal properties for use in energy foundation design*. Proceedings of the 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Paris, France (2–6).
- [103] LIU C.H., ZHOU D., WU H. (2011), *Measurement and prediction of temperature effects of thermal conductivity of soils*, Chin. J. Geotech. Eng., 33(12), 1877–1886.
- [104] LU N., DONG Y. (2015), *Closed-form equation for thermal conductivity of unsaturated soils at room temperature*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 141(6), 04015016.
- [105] LU Y., LU S., HORTON R., REN T. (2014), *An empirical model for estimating soil thermal conductivity from texture, water content, and bulk density*, Soil Science Society of America Journal, 78(6), 1859–1868.
- [106] LU S., REN T. (2009), *Model for predicting soil thermal conductivity at various temperatures*, Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 25(7), 13–18.
- [107] LU S., REN T., GONG Y., HORTON R. (2007), *An improved model for predicting soil thermal conductivity from water content at room temperature*, Soil Science Society of America Journal, 71(1), 8–14.
- [108] LU S., REN T., YU Z., HORTON R. (2011), *A method to estimate the water vapour enhancement factor in soil*, European Journal of Soil Science, 62(4), 498–504.
- [109] LU Y., WANG Y., REN T. (2013), *Using late time data improves the heat-pulse method for estimating soil thermal properties with the pulsed infinite line source theory*, Vadose Zone Journal, 12(4).
- [110] ŁYDŹBA D. (2002), *Zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
- [111] ŁYDŹBA D. (2011), *Effective properties of composites: Introduction to Micromechanics*, Wrocław University of Technology, PRINTPAP, Wrocław.

- [112] ŁYDŻBA D., BAGIŃSKA I., BATOG A., KAWA M., KONDERLA H., KOSZELA-MAREK E., RAJZAKOWSKA M., TANKIEWICZ M., RÓŻAŃSKI A., SERWICKI A., SOBÓTKA M., STRÓŻYK J., STEFANIUK D. (2014), *Wykonanie laboratoryjnych badań parametrów mechanicznych i termicznych prób węgla brunatnego oraz gruntów nadkładowych*, Raporty Inst. Geotech. Hydrotech. PWr., Ser. SPR nr 1.
- [113] ŁYDŻBA D., IZBICKI R., BAGIŃSKA I., BATOG A., HAWRYSZ M., KAWA M., KONDERLA H., KUPIS R., KOSZELA-MAREK E., POCHRAŃ Z., ROGUT-SIEMIENIAK B., TANKIEWICZ M., RÓŻAŃSKI A., SZCZEŚNIAK K., SOBÓTKA M., STRÓŻYK J. (2013a), *Wykonanie laboratoryjnych badań parametrów mechanicznych i termicznych prób węgla brunatnego oraz gruntów nadkładowych*, Raporty Inst. Geotech. Hydrotech. PWr., Ser. SPR nr 1.
- [114] ŁYDŻBA D., IZBICKI R., BAGIŃSKA I., BATOG A., HAWRYSZ M., KAWA M., KONDERLA H., KOSZELA-MAREK E., SERWICKI A., TANKIEWICZ M., RÓŻAŃSKI A., SZCZEŚNIAK K., SOBÓTKA M., STRÓŻYK J. (2013b), *Sprawozdanie z wykonanych badań parametrów mechanicznych i termicznych prób węgla brunatnego oraz gruntów nadkładowych*, Raporty Inst. Geotech. Hydrotech. PWr., Ser. SPR nr 2.
- [115] ŁYDŻBA D., RÓŻAŃSKI A. (2014), *Microstructure measures and the minimum size of a representative volume element: 2D numerical study*, Acta Geophysica, 62(5), 1060–1086.
- [116] ŁYDŻBA D., RÓŻAŃSKI A., RAJZAKOWSKA M., STEFANIUK D. (2014), *Efficiency of the needle probe test for evaluation of thermal conductivity of composite materials: two-scale analysis*, Studia Geotechnica et Mechanica, 36(1), 55–62.
- [117] ŁYDŻBA D., RÓŻAŃSKI A., RAJZAKOWSKA M., STEFANIUK D. (2017), *Random checkerboard based homogenization for estimating effective thermal conductivity of fully saturated soils*, Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 9(1), 18–28.
- [118] ŁYDŻBA D., RÓŻAŃSKI A., STEFANIUK D. (2018), *Equivalent microstructure problem: Mathematical formulation and numerical solution*, International Journal of Engineering Science, 123, 20–35.
- [119] MANWART C., HILFER R. (1999), *Reconstruction of random media using Monte Carlo methods*, Physical Review E, 59(5), 5596.
- [120] MARQUARDT D.W. (1963), *An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 11(2), 431–441.
- [121] MARTYNOV G.A. (1963), *Heat and moisture transfer in freezing and thawing soils*, In: Principles of Geocryology, National Research Council of Canada, Technical Translation 1065, Rozdział 6.
- [122] MAXWELL J.C. (1873), *A treatise on electricity and magnetism*, Vol. 1, Clarendon Press.
- [123] METROPOLIS N., ROSENBLUTH A.W., ROSENBLUTH M.N., TELLER A. H., TELLER E. (1953), *Equation of state calculations by fast computing machines*, The Journal of Chemical Physics, 21(6), 1087–1092.
- [124] MICKLEY A.S. (1951), *The thermal conductivity of moist soil*, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 70(2), 1789–1797.
- [125] MILTON G.W. (1981a), *Bounds on the electromagnetic, elastic, and other properties of two-component composites*, Physical Review Letters, 46(8), 542.
- [126] MILTON G.W. (1981b), *Bounds on the transport and optical properties of a two-component composite material*, Journal of Applied Physics, 52(8), 5294–5304.
- [127] MILTON G.W. (1981c), *Concerning bounds on the transport and mechanical properties of multicomponent composite materials*, Applied Physics A: Materials Science & Processing, 26(2), 125–130.
- [128] MILTON G.W. (2002), *The theory of composites*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [129] MIMOUNI T., DUPRAY F., MINON S., LALOU L. (2013), *Heat exchanger anchors for thermo-active tunnels* (No. EPFL-REPORT-190673), Swiss Association of Road and Transportation Experts.
- [130] MITCHELL J.K., SOGA K. (2005), *Fundamentals of soil behavior*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ.
- [131] MOCHLINSKI K. (1964), *Some industrial measurements of thermal properties of soil*, International study group on soils, Cambridge, England, July, 1226, 168178.
- [132] MOGENSEN P. (1983), *Fluid to duct wall heat transfer in duct system heat storages*, Document-Swedish Council for Building Research, (16), 652–657.



- [133] MORI T., TANAKA K. (1973), *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, Acta Metal., 21(5), 571–574.
- [134] MURASHOV V.V., WHITE M.A. (2000), *Thermal conductivity of crystalline particulate materials*, Journal of Materials Science, 35(3), 649–653.
- [135] MURPHY K.D., MCCARTNEY J.S., HENRY K.S. (2015), *Evaluation of thermo-mechanical and thermal behavior of full-scale energy foundations*, Acta Geotechnica, 10(2), 179–195.
- [136] MYŚLIŃSKA E. (2006), *Laboratoryjne badania gruntów*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego.
- [137] NICOLAS J., ANDRE P., RIVEZ J.F., DEBBAUT V. (1993), *Thermal conductivity measurements in soil using an instrument based on the cylindrical probe method*, Review of Scientific Instruments, 64(3), 774–780.
- [138] NIGMATULIN R.I. (1981), *Three-dimensional averaging in the mechanics of heterogeneous media*, Fluid Mechanics, 10(4), 71–107.
- [139] NORRIS A.N. (1989), *An examination of the Mori-Tanaka effective medium approximation for multiphase composites*, Journal of Applied Mechanics, 56(1), 83–88.
- [140] OCHSNER T.E., HORTON R., REN T. (2001), *A new perspective on soil thermal properties*, Soil Science Society of America Journal, 65(6), 1641–1647.
- [141] OLIVER W.C., PHARR G.M. (2004), *Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology*, Journal of Materials Research, Vol. 19(01), 3–20.
- [142] OSTOJA-STARZEWSKI M., RANGANATHAN S.I. (2014), *Scaling and homogenization in spatially random composites*, W: Mathematical Methods and Models in Composites (pp. 61–101), Imperial College Press, London.
- [143] PETERS-LIDARD C.D., BLACKBURN E., LIANG X., WOOD E.F. (1998), *The effect of soil thermal conductivity parameterization on surface energy fluxes and temperatures*, Journal of the Atmospheric Sciences, 55, 1209–1224.
- [144] PN-81/B-03020. *Grunty budowlane. Posadowienie bezpośrednie budowli. Obliczenia statyczne i projektowanie*.
- [145] PN-B-04481:1998. *Grunty budowlane. Badania próbek gruntu*.
- [146] PN-EN ISO 14688-2. *Badania geotechniczne. Oznaczanie i klasyfikowanie gruntów. Część 2: Zasady klasyfikowania*.
- [147] PURUSHOTHAMARAJ P., JUDGE A. (1977), *Thermal conductivity of soil solids*, Unpublished paper from the Earth Physics Branch, National Research Council, Canada.
- [148] RINTOUL M.D., TORQUATO S. (1997), *Reconstruction of the structure of dispersions*, Journal of Colloid and Interface Science, 186(2), 467–476.
- [149] RUBIO C.M., JOSA R., COBOS D., CAMPBELL C., FERRER F. (2009), *Hysteric behaviour of thermal properties on porous media*, In Advances in studies on desertification, Murcia, September 16–18, 2009.
- [150] RUBIO C.M., JOSA R., FERRER F. (2011), *Influence of the hysteretic behaviour on silt loam soil thermal properties*, Open Journal of Soil Science, 1(03), 77.
- [151] RÓŻAŃSKI A. (2010), *Random composites: representativity, minimum RVE size, effective transport properties*, rozprawa doktorska, USTL, LML (UMR CNRS 8107).
- [152] RÓŻAŃSKI A. (2017), *Temperature Changes in the Vicinity of Thermally Loaded Structure Embedded in the Soil: Effect of Sand Content and Saturation Degree*, Studia Geotechnica et Mechanica, 39(2), 61–71.
- [153] RÓŻAŃSKI A., ŁYDŻBA D. (2011), *From digital image of microstructure to the size of representative volume element: B4C/Al composite*, Studia Geotechnica et Mechanica, 33(1), 55–68.
- [154] RÓŻAŃSKI A., SOBÓTKA M. (2013), *On the interpretation of the needle probe test results: thermal conductivity measurement of clayey soils*, Studia Geotechnica et Mechanica, 35(1), 195–207.
- [155] RÓŻAŃSKI A., STEFANIUK D. (2016a), *On the prediction of the thermal conductivity of saturated clayey soils: effect of the specific surface area*, Acta Geodyn. Geomater., Vol. 13, No. 4 (184), 339–349.

- [156] RÓŻAŃSKI A., STEFANIUK D. (2016b), *Prediction of soil solid thermal conductivity from soil separates and organic matter content: computational micromechanics approach*, European Journal of Soil Science, 67(5), 551–563.
- [157] RYCHLEWSKI P., JURASZ W., SIERANT J. (2014), *Fundamenty palowe – jako elementy instalacji pozyskującej energię cieplną z gruntu w instalacjach pomp ciepła – termopale*, Inżynier budownictwa – vademecum geoinżynierii I.
- [158] SAB K. (1992), *On the homogenization and the simulation of random materials*, European Journal of Mechanics. A. Solids, 11(5), 585–607.
- [159] SANCHEZ-PALENCIA E. (1980), *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer-Verlag.
- [160] SANNER B., HELLSTRÖM G., SPITLER J., GEHLIN S. (2005), *Thermal response test—current status and world-wide application*. Proceedings world geothermal congress, Vol. 200, International Geothermal Association.
- [161] SASS J.H., LACHENBRUCH A.H., MUNROE R.J. (1971), *Thermal conductivity of rocks from measurements on fragments and its application to heat-flow determinations*, Journal of Geophysical Research, 76(14), 3391–3401.
- [162] SCHWERTFEGER P. (1970), *The measurement of heat flow in the ground and the theory of heat flux meters* (No. CRREL-TR-232), Cold Regions Research and Engineering Lab Hanover NH.
- [163] SEN, A. K., TORQUATO, S. (1989), *Effective conductivity of anisotropic two-phase composite media*, Physical Review B, 39(7), 4504.
- [164] SEPASKHAH A.R., BOERSMA L. (1979), *Thermal conductivity of soils as a function of temperature and water content*, Soil Science Society of America Journal, 43(3), 439–444.
- [165] SEVOSTIANOV I., & KACHANOV M. (2012), *Is the concept of “average shape” legitimate, for a mixture of inclusions of diverse shapes?*, International Journal of Solids and Structures, 49(23–24), 3242–3254.
- [166] SEVOSTIANOV I., KACHANOV M. (2014), *On some controversial issues in effective field approaches to the problem of overall elastic properties*, Mech. Mater. 69(1), 93–105.
- [167] SEVOSTIANOV I., KACHANOV M. (2015), *On the possibility to represent effective properties of a material with inhomogeneities in terms of concentration parameters*, International Journal of Solids and Structures, 52, 197–204.
- [168] SHIM P.Y., MANOCHEHRI S. (1997), *Generating optimal configurations in structural design using simulated annealing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(6), 1053–1069.
- [169] SMITS K.M., SAKAKI T., LIMSUWAT A., ILLANGASEKARE T.H. (2010), *Thermal conductivity of sands under varying moisture and porosity in drainage–wetting cycles*, Vadose Zone Journal, 9(1), 172–180.
- [170] SMITS K.M., SAKAKI T., HOWINGTON S.E., PETERS J.F., ILLANGASEKARE T.H. (2013), *Temperature dependence of thermal properties of sands across a wide range of temperatures (30–70 °C)*, Vadose Zone Journal, 12(1).
- [171] SOBOTKA M., ŁYDZBA D. (2014), *Shape Optimization of Soil-steel Structure by Simulated Annealing*, Procedia Engineering, 91, 304–309.
- [172] SOBÓTKA M., ŁYDZBA D., RÓŻAŃSKI A. (2013), *Shape optimization of underground excavation by simulated annealing*, Studia Geotechnica et Mechanica, 35(1), 209–218.
- [173] SONMEZ F.O. (2007), *Shape optimization of 2D structures using simulated annealing*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(35–36), 3279–3299.
- [174] SORELLI L., CONSTANTINIDES G., ULM F.J., TOUTLEMONDE F. (2008), *The nano-mechanical signature of ultra-high performance concrete by statistical nanoindentation techniques*, Cement and Concrete Research, 38(12), 1447–1456.
- [175] STEFANIUK D., RÓŻAŃSKI A., ŁYDZBA D. (2016), *Recovery of microstructure properties: random variability of soil solid thermal conductivity*, Studia Geotechnica et Mechanica, 38(1), 99–107.
- [176] STROEVEN M., ASKES H., SLUYS L.J. (2004), *Numerical determination of representative volumes for granular materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(30), 3221–3238.

- [177] STRZELECKI T., AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W. (1996), *Mechanika ośrodków niejednorodnych*, Teoria homogenizacji, DWE.
- [178] SUQUET P.M. (1987), *Elements of Homogenization for Inelastic Solids Mechanics*, In: Homogenization Techniques for Composite Media, CISM Lectures, Udine.
- [179] TALUKDAR M.S., TORSÆTER O. (2002), *Reconstruction of chalk pore networks from 2D backscatter electron micrographs using a simulated annealing technique*, Journal of Petroleum Science and Engineering, 33(4), 265–282.
- [180] TARNAWSKI V.R., GORI F. (2002), *Enhancement of the cubic cell soil thermal conductivity model*, International Journal of Energy Research, 26(2), 143–157.
- [181] TARNAWSKI V.R., GORI F., WAGNER B., BUCHAN G.D. (2000), *Modelling approaches to predicting thermal conductivity of soils at high temperatures*, International Journal of Energy Research, 24, 403–423.
- [182] TARNAWSKI V.R., MCCOMBIE M.L., MOMOSE T., SAKAGUCHI I., LEONG W.H. (2013), *Thermal conductivity of standard sands. Part III. Full range of saturation*, International Journal of Thermophysics, 34(6), 1130–1147.
- [183] TARNAWSKI V.R., MOMOSE T., MCCOMBIE M.L., LEONG W.H. (2015), *Canadian field soils III. Thermal-conductivity data and modeling*, International Journal of Thermophysics, 36(1), 119–156.
- [184] TARNAWSKI V.R., WAGNER B. (1992), *A new computerized approach to estimating the thermal properties of unfrozen soils*, Canadian Geotechnical Journal, 29(4), 714–720.
- [185] TARNAWSKI V.R., WAGNER B. (1993), *Modeling the thermal conductivity of frozen soils*, Cold Regions Science and Technology, 22(1), 19–31.
- [186] TIAN Z., LU Y., HORTON R., REN T. (2016), *A simplified de Vries-based model to estimate thermal conductivity of unfrozen and frozen soil*, European Journal of Soil Science, 67(5), 564–572.
- [187] TONG F. (2010), *Numerical modeling of coupled thermo-hydro-mechanical processes in geological porous media*, rozprawa doktorska, KTH.
- [188] TONG F., JING L., ZIMMERMAN R.W. (2009), *An effective thermal conductivity model of geological porous media for coupled thermo-hydro-mechanical systems with multiphase flow*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 46(8), 1358–1369.
- [189] TONG F., JING L., ZIMMERMAN R.W. (2010), *A fully coupled thermo-hydro-mechanical model for simulating multiphase flow, deformation and heat transfer in buffer material and rock masses*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 47(2), 205–217.
- [190] TORQUATO S. (2002), *Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties*, Springer Verlag, New York.
- [191] TORQUATO S., STELL G. (1985), *Bounds on the effective thermal conductivity of a dispersion of fully penetrable spheres*, International Journal of Engineering Science, 23(3), 375–383.
- [192] USOWICZ B. (2002), *Szacowanie cieplnych właściwości gleby*, Acta Agrophysica, 72, 135–165.
- [193] USOWICZ B., LIPIEC J., USOWICZ J.B., MARCZEWSKI W. (2013), *Effects of aggregate size on soil thermal conductivity: Comparison of measured and model-predicted data*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 57(2), 536–541.
- [194] VAN WIJK W.R., BRUIJN P.J. (1964), *Determination of thermal conductivity and volumetric heat capacity of soils near the surface*, Soil Science Society of America Journal, 28(4), 461–464.
- [195] VANMARCKE E.H. (1977), *Probabilistic modeling of soil profiles*, Journal of the Geotechnical Engineering Division, 103(11), 1227–1246.
- [196] VILLAR M.V. (2005), *MX-80 bentonite. Thermo-hydro-mechanical characterisation performed at CIEMAT in the context of the Prototype Project*, Informes Técnicos CIEMAT, 1053, 39.
- [197] WIENER O. (1912), *Der Abhandlungen der Mathematisch-Physischen Klasse der Königl. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 32, 509–604.
- [198] WIJK W.V. (1963), *Physics of plant environment*, John Wiley & Sons.

- [199] WILLIS J.R. (1977), *Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 25(3), 185–202.
- [200] WILLIAMS M., KAPLAR C.W. (1968), *Comparison of soil thermal conductivity prediction formulae with test results*, U.S. Army Terrestrial Sciences Center (now CRREL), Technical Note, October.
- [201] WINTERKORN H.F. (1961), *Closing Remarks. Discussion on Water and its Conduction in Soils*, Highway Research Board Bulletin, 287, 81–82.
- [202] MATHEMATICA W. (2009), Wolfram Research. Inc., Champaign, Illinois.
- [203] WOODSIDE W.M.J., MESSMER J.H. (1961), *Thermal conductivity of porous media. I. Unconsolidated sands*, Journal of Applied Physics, 32(9), 1688–1699.
- [204] WU W., LI X., CHARLIER R., COLLIN F. (2004), *A thermo-hydro-mechanical constitutive model and its numerical modelling for unsaturated soils*, Computers and Geotechnics, 31(2), 155–167.
- [205] YEONG C.L.Y., TORQUATO S. (1998a), *Reconstructing random media*, Phys. Rev. E, 57, 495–506.
- [206] YEONG C.L.Y., TORQUATO S. (1998b), *Reconstructing random media, II. Three-dimensional media from two-dimensional cuts*, Physical Review E, 58(1), 224.
- [207] YUN T.S. (2005), *Mechanical and thermal study of hydrate bearing sediments*, rozprawa doktorska, Georgia Institute of Technology.
- [208] ZHANG N., WANG Z. (2017), *Review of soil thermal conductivity and predictive models*, International Journal of Thermal Sciences, 117, 172–183.
- [209] ZHANG Y.J., YU Z.W., HUANG R., WU G., HU J.H. (2009), *Measurement of thermal conductivity and temperature effect of geotechnical materials*, Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 31(2), 213–217.
- [210] ZOHDI T.I., WRIGGERS P. (2008), *An introduction to computational micromechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

# **Multi-scale analysis of the thermal characteristics of a multiphase soil medium**

The issues concerning the use of civil engineering structures (or their individual structural members) for acquiring energy from the ground have been extensively explored, from both the practical and scientific points of view, for at least ten-twenty years now. Obviously, highly developed countries, such as Japan, the United States, Switzerland and Germany, show the greatest interest in this subject. In Poland, this field of building engineering is little explored, but as the costs of conventional energy keep increasing, one can expect that the interest in it from the country's research institutions, particularly design offices, will grow in the near future.

The use of modern solutions, such as geothermal piles, requires a new approach to design from engineers. In order to correctly design a thermal pile, which combines classical foundation features with the idea of recovering heat from the ground, one must determine the deformation state implied not only by mechanical loads, but also by the thermal loads resulting from the cyclical fluctuation of temperature in the pile and in the surrounding soil medium. Therefore to determine the full state of pile deformation one must know not only the mechanical parameters of the concrete and the soil, but also their thermal characteristics, especially regarding their thermal conductivity. Thus the correct determination of the thermal conductivity characteristics of the soil medium is of key importance for the design of structures for which the surrounding ground constitutes a source of thermal energy.

This monograph presents some of the possible applications of homogenization techniques to problems relating to the determination of the thermal conductivity of the ground as a multiphase medium. It deals with three separate problems concerning the formulation of methods enabling one to correctly estimate the thermal conductivity of, respectively, the soil skeleton, saturated soil and a partially saturated soil medium. An additional problem, which is difficult to unequivocally fit into one of the above categories, is the identification of the numerical form of the soil microstructure on the basis of a properly executed sequence of measurements of the thermal conductivity of soil being in the state of full saturation.

The main aim of the analyses, covering all the problems distinguished above, was to suitably adapt selected homogenization methods in order to create computing techniques enabling one to correctly predict the thermal conductivity characteristic of the ground as a multiphase medium. This was achieved by formulating and solving many direct and inverse homogenization theory problems. Moreover, it should be noted that except for the considerations concerning the determination of the thermal conductivity of a partially saturated soil medium (Chapter 8) and the identification of the microstructure (Chapter 9), all the analyses were performed in parallel within two methodologically different approaches, i.e. from the perspectives of computational and analytical micromechanics. As part of this monograph the following detailed tasks were carried out:

- the factors having the greatest bearing on the thermal conductivity of the soil medium were identified;
- existing empirical and theoretical models used to estimate the thermal conductivity of the soil medium were critically evaluated;

- methods enabling the correct prediction of the thermal conductivity of the soil skeleton and the saturated soil medium from the computational and analytical micromechanics points of view were formulated;
- a method of determining the thermal conductivity of partially saturated soil media, using the analytical micromechanics approach, was formulated;
- a method enabling the identification of the numerical form of the soil medium microstructure through a sequence of measurements of the thermal conductivity of soil samples saturated with liquids with different thermal characteristics was proposed.



W monografii przedstawiono zastosowanie wybranych technik homogenizacji do oceny makroskopowej przewodności cieplnej gruntu jako ośrodka wielofazowego. Zaprezentowane zagadnienia są niezwykle istotne ze względu na stosowanie nowoczesnych rozwiązań w budownictwie, zwłaszcza w zakresie pozyskiwania energii cieplnej z ośrodka gruntowego. Dotyczą one sformułowania technik obliczeniowych umożliwiających uzyskanie poprawnych predykcji przewodności cieplnej gruntu w różnych skalach obserwacji. Sformułowano metody pozwalające na poprawne szacowanie wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego, gruntu nasyconego oraz częściowo nasyconego ośrodka gruntowego. Analizy są prowadzone w ramach dwóch metodologicznie różnych podejść, tj. w ujęciu analitycznej i obliczeniowej mikromechaniki. Oprócz nowych elementów poznawczych i oryginalnych technik obliczeniowych w pracy zawarto również ważne aspekty praktyczne, m.in.: wytyczne dotyczące przeprowadzania oraz interpretacji pomiarów przewodności cieplnej gruntów oraz serię nomogramów służących do określania wartości przewodności cieplnej szkieletu gruntowego.



**ADRIAN RÓŻAŃSKI** tytuł magistra inżyniera uzyskał na Wydziale Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w 2005 roku w specjalności teoria konstrukcji. W 2010 roku obronił pracę doktorską, którą realizował równocześnie na Politechnice Wrocławskiej i na Uniwersytecie w Lille we Francji. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku adiunkta naukowo-dydaktycznego w Katedrze Geotechniki, Hydrotechniki, Budownictwa Podziemnego i Wodnego na Wydziale Budownictwa

Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej. W sferze zainteresowań naukowych autora znajdują się: mechanika periodycznych i losowych ośrodków mikroniejednorodnych, obliczeniowa mikromechanika i metody numeryczne, wieloskalowe modelowanie procesów fizycznych oraz mechanika gruntów i skał. A. Różański jest autorem lub współautorem kilkudziesięciu prac naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych i wydawnictwach konferencyjnych, a także wielu opracowań o charakterze eksperckim; jest członkiem międzynarodowych stowarzyszeń naukowych i technicznych: *International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering* oraz *Engineering Mechanics Institute*. Przez wiele lat pełnił funkcję sekretarza czasopisma *Studia Geotechnica et Mechanica*, a od 2018 roku jest jego redaktorem zarządzającym. Współorganizował wiele konferencji naukowych, krajowych oraz międzynarodowych, m.in.: *EUROCK 2013 – The 2013 ISRM International Symposium*, *Zimowa Szkoła Mechaniki Górotworu i Geoinżynierii* (w latach 2007–2017), *XVI Krajowa Konferencja Mechaniki Gruntów i Inżynierii Geotechnicznej*.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej są do nabycia w księgarni  
ul. C.K. Norwida 9, 50-374 Wrocław, tel. 71 328 08 95  
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową: zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl

ISBN 978-83-7493-042-0