

**Tadeusz Czernik**

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

---

## UŁAMKOWY GEOMETRYCZNY RUCH BROWNA – MAKSYMALNA STRATA I PRAWDOPODOBIENSTWO RUINY

---

**Streszczenie:** W pracy rozważono miarę ryzyka – maksymalną stratę. Wykazano jej przydatność w optymalizacji decyzji inwestycyjnych na rynku akcji, których ewolucja opisana jest ułamkowym geometrycznym ruchem Browna. Pokazano również nietrywialną zależność prawdopodobieństwa osiągnięcia choć raz maksymalnej akceptowalnej straty od historii notowań oraz składu portfela.

**Słowa kluczowe:** prawdopodobieństwo ruiny, maksymalna strata, ułamkowy geometryczny ruch Browna.

### 1. Wstęp

Wydarzenia ostatnich kilku lat pokazały, że pomiar ryzyka i zarządzanie ryzykiem są jednymi z najważniejszych wyzwań finansów i ubezpieczeń XXI wieku. Jak wiadomo, istnieje wiele miar ryzyka [Czernik 2003; Gątarek i in. 2001; Jajuga, Jajuga 1999; *Risk Measures...* 2004]. Jedną z częściej stosowanych przez inwestorów jest wariancja (odchylenie standardowe). Jednak zgodnie ze współczesnymi teoriami ryzyka wariancja jest raczej miarą niepewności niż ryzyka. Wynika to z tego, że wariancja nie rozróżnia wzrostów cen od ich spadków. Kolejną szeroko stosowaną miarą ryzyka jest wartość zagrożona (*Value at Risk* – VaR). Wadą tej miary – pomijając fakt, że nie jest miarą koherentną – jest zależność jedynie od wartości procesu ryzyka w ściśle określonym momencie czasu. Wady tej nie posiada pewne wywodzące się z teorii ruiny uogólnienie wartości zagrożonej: maksymalna strata (*maximal loss* – ML).

Własności maksymalnej straty w przypadku ewolucji opisanej geometrycznym ruchem Browna są znane [Acar 1997; Czernik 2003; Czernik 2007]. Celem niniejszego opracowania jest wykazanie przydatności maksymalnej straty w optymalizacji portfela instrumentów o dynamice opisanej ułamkowym geometrycznym ruchem Browna.

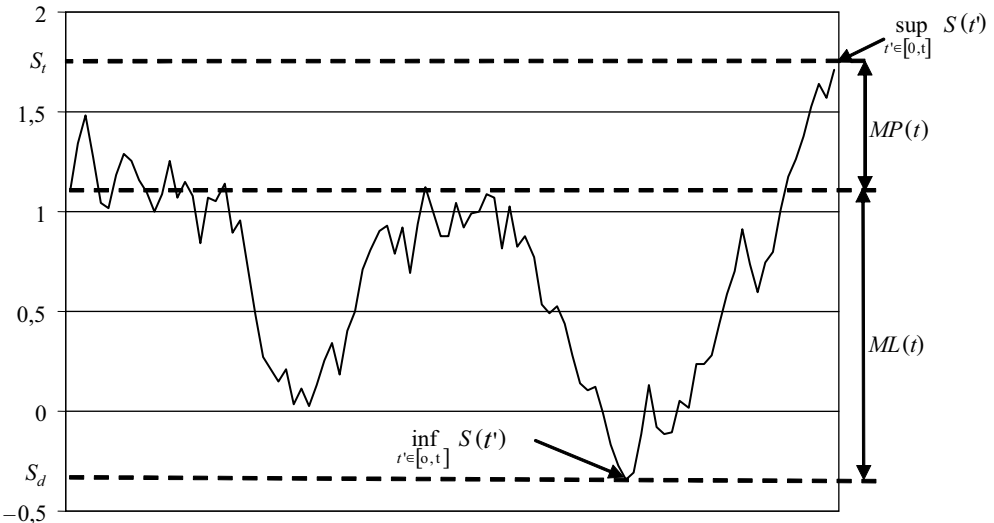
## 2. Maksymalna strata

Maksymalna strata, podobnie jak wartość zagrożona, należy do rodziny miar kwantylowych. Oznacza to, że dla dowolnej wielkości losowej (ryzyka) maksymalna strata zawsze istnieje (w odróżnieniu od miar opartych na momentach).

Maksymalną stratę definiujemy następująco (na ustalonym poziomie akceptacji/ istotności  $\alpha$  oraz w ustalonym horyzoncie czasu  $t$ ) [Czernik 2003]:

$$P\left(S_0 - \inf_{t' \in [0,t]} S(t') < ML(\alpha, t)\right) = 1 - \alpha. \quad (1)$$

Graficzna interpretacja maksymalnej straty przedstawiona jest na rys. 1 (rysunek poglądowy, wartości na osi rzędnych nie mogą być cenami). Na rysunku tym przedstawiono także tzw. maksymalny zysk (*maximal profit* – MP) osiągniany w horyzoncie  $t$  [Czernik 2007].



Rys. 1. Maksymalna strata ML, maksymalny zysk MP

Źródło: opracowanie własne.

Maksymalna strata jest ściśle związana z wywodzącym się z teorii ruiny prawdopodobieństwem ruiny oraz prawdopodobieństwem przetrwania [Asmussen 2000]. Ustalając  $ML$ , możemy obliczyć prawdopodobieństwo, że cena instrumentu nie spadnie ani razu poniżej wartości  $S_0 - ML$ . Jeśli zastąpimy wartość początkową  $S_0$  początkową wartością nadwyżki ubezpieczeniowej  $u$  oraz maksymalną stratę  $ML$  także wartością  $u$ , to powyższe prawdopodobieństwo będzie prawdopodobieństwem przetrwania (prawdopodobieństwo zdarzenia losowego: nadwyżka ani razu nie będzie mniejsza od zera).

Jak wynika z definicji, maksymalna strata związana jest z rozkładem skumulowanych zmian wartości instrumentu w chwili  $t$ . Rozkład maksymalnej straty możemy zdefiniować następująco [Riskén 1989]:

$$f(x, t) = \langle \delta(x - ML(t)) \rangle, \quad (2)$$

gdzie:  $\langle \dots \rangle$  oznacza uśrednianie po wszystkich realizacjach  $S(t)$  (dla ustalonego  $t$ ),  $\delta(\dots)$  – delta Diraca (miara atomowa, miara Diraca, dystrybucja Diraca) [Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette, Dillard-Bleick 1983; Zemanian 1969].

Warto nadmienić, iż z definicji określonej wzorem (2) wywodzą się symulacyjne metody szacowania maksymalnej straty (powyższe uwagi dotyczą dowolnej wielkości losowej). Ponadto reprezentacja gęstości prawdopodobieństwa wzorem (2) pozwala w wielu przypadkach na wyprowadzenie równań ewolucji rozkładu [Kliackin 1975].

### 3. Ułankowy ruch Browna

W przeprowadzonych do tej pory badaniach autor modelował dynamikę cen geometrycznym ruchem Browna. Istnieje jednak wiele dowodów empirycznych na to, że wartości instrumentów finansowych są procesami losowymi z długą pamięcią [Mandelbrot 1997; Peters 1994; Barkoulas, Baum; Shiryaev 1999; Cajueiro, Barbachan 2003; Mastalerz-Kodzis 2003]. W projekcie autor rozważy rynek, którego instrumenty ewoluują zgodnie z ułankowym ruchem Browna  $B^H$  [Decreusefond, Üstünel 1998]. W przypadku  $H > 0,5$  ułankowy ruch Browna jest procesem o długiej pamięci ( $H$  – wykładnik Hursta).

Ułankowy ruch Browna jest uogólnieniem dobrze znanego procesu Browna. Jest on procesem gaussowskim ze stacjonarnymi przyrostami, jednakże jego przyrosty nie są niezależne (z wyjątkiem zwykłego ruchu Browna  $H = 0,5$ ). Struktura zależności przyrostów uzależniona jest od wartości wykładnika Hursta  $H$ , tzn. kowariancja ułankowego ruchu Browna ( $H \in (0,1)$ ; przypadek  $H = 1$  nie jest interesujący gdyż realizacje tego procesu są liniami prostymi o losowym współczynniku kierunkowym):

$$R(s, t) = E \left[ B_s^H B_t^H \right] = \frac{V_H}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad (3)$$

gdzie:  $EB_t^H = 0$  oraz  $V_H = \frac{\Gamma(2 - 2H) \cos(\pi H)}{\pi H (1 - 2H)}$ .

Dla wartości  $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  proces posiada długą pamięć, dla  $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  proces preferuje ciągłe zmiany kierunku. Z uwagi na długą pamięć pierwszy przypadek jest interesujący z punktu widzenia zastosowania w ekonomii [Shiryaev 1999].

Ułamkowy ruch Browna był po raz pierwszy badany przez Kołmogorowa [Kołmogorow 1940] (używał on nazwy spirala Wienera) w kontekście zagadnień dotyczących modelowania turbulencji.

Spotyka się również w literaturze ułamkowy normalny ruch Browna o funkcji kowariancji [Biagini i in. 2008; Mishura 2008]:

$$R(s, t) = E[B_s^H B_t^H] = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (4)$$

W dalszej części pracy będziemy rozpatrywać normalny ułamkowy ruch Browna (obie definicje różnią się jedynie współczynnikami).

Istnieje wiele reprezentacji całkowych ułamkowego ruchu Browna [Hu 2005; *Theory and Applications...* 2003; Biagini i in. 2008; Mishura 2008], np.:

$$B_t^H = \kappa_H \left\{ \int_0^t (t-s)^{H-0,5} dB_s + \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-0,5} - (-s)^{H-0,5}] dB_s \right\}, \quad (5)$$

gdzie:  $dB_s = dB_s^{0,5}$  – ruch Browna,

$$\kappa_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-2H)}},$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du - \text{funkcja gamma},$$

lub

$$B_t^H = \int_0^t Z_H(t, s) dB_s \quad (6)$$

gdzie:

$$Z_H(t, s) = \kappa_H \left[ \left(\frac{t}{s}\right)^{H-0,5} (t-s)^{H-0,5} - \left(H-\frac{1}{2}\right) s^{0,5-H} \int_s^t u^{H-1,5} (u-s)^{H-0,5} du \right]. \quad (7)$$

W interesującym nas zakresie wartości indeksu Hursta  $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  jądro  $Z_H(t, s)$  przyjmuje postać:

$$Z_H(t, s) = \kappa_H \left( H - \frac{1}{2} \right) s^{0,5-H} \int_s^t u^{H-0,5} (u-s)^{H-1,5} du. \quad (8)$$

Własności ułamkowego ruchu Browna są następujące:

- stacjonarne przyrosty,
- jedynie dla  $H = \frac{1}{2}$  jest procesem Markowa,
- dla  $H > \frac{1}{2}$  występuje długa pamięć,
- samopodobieństwo, tzn.  $B_{at}^H \stackrel{d}{=} a^{-H} B_t^H$ ,
- nieróżniczkowalne realizacje (w sensie średniokwadratowym),
- dla  $H \neq \frac{1}{2}$  nie jest semimartyngałem.

Ostatnia z własności była przyczyną początkowych problemów w zdefiniowaniu stochastycznej całki względem ułamkowego ruchu Browna.

#### 4. Ułamkowa dynamika cen akcji

Procesy dyfuzyjne z ciągłym czasem stanowią we współczesnych finansach niezbędne narzędzie modelowania wielu zjawisk. Począwszy od takich prac, jak [Bachelier 1900], poprzez [Samuelson 1965; Merton 1969; Merton 1973; Black, Scholes 1973] procesy losowe wyznaczyły pewien standard modelowania procesów ekonomicznych.

W pracy autor rozważył model cen akcji oparty na ułamkowym ruchu Browna [Hu 2000]:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB^H, \tag{9}$$

gdzie:  $B^H$  – ułamkowy ruch Browna.

Niestety, długa pamięć sprawia, że analityczne wyrażenia na rozkład wartości cen akcji generowanych równaniem (9) (nie wspominając o rozkładzie maksymalnej straty) nie są znane. Wynika to z tego, że zagadnienie początkowe złożone jest z nieskończenie wielu wartości „początkowych”, tzn. wartością początkową jest cała historyczna realizacja wartości instrumentu.

W dalszych rozważaniach autor pomija kwestie dotyczące estymacji parametrów równania (9), tzn. zakłada się, że wartości parametrów są znane.

Nieznajomość rozkładu nie przekreśla możliwości postawienia np. nieobciążonej prognozy. Wyznamy warunkową wartość oczekiwaną (tzn. zakładamy, że znamy historię do chwili 0) procesu  $B_t^H$ :

$$\begin{aligned} E(B_t^H | F_0) &= E \left[ \kappa_H \left\{ \int_0^t (t-s)^{H-0,5} dB_s + \int_{-\infty}^0 \left[ (t-s)^{H-0,5} - (-s)^{H-0,5} \right] dB_s \right\} \middle| F_0 \right] = \\ &= \kappa_H \left\{ \int_0^t (t-s)^{H-0,5} E(dB_s | F_0) + \int_{-\infty}^0 \left[ (t-s)^{H-0,5} - (-s)^{H-0,5} \right] E(dB_s | F_0) \right\} = \tag{10} \\ &= \kappa_H \int_{-\infty}^0 \left[ (t-s)^{H-0,5} - (-s)^{H-0,5} \right] dB_s. \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie dla  $H \neq 0,5$  jest w ogólności różne od zera. Wprowadźmy proces:

$$\tilde{B}_t^H = B_t^H - E(B_t^H | F_0). \quad (11)$$

Łatwo pokazać, że  $E(\tilde{B}_t^H | F_0) = 0$  oraz  $E((\tilde{B}_t^H)^2 | F_0) = \frac{\kappa_H^2}{2H} t^{2H}$ .

Warunkowa wartość oczekiwana wartości instrumentu wynosi (w celu jej obliczenia korzystamy z faktu, iż  $\tilde{B}_t^H$  jest procesem gaussowskim o wartości oczekiwanej równej zero):

$$E(S_t^H | F_0) = S_0 \exp \left[ \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{\kappa_H^2}{2H} - 1 \right) t^{2H} + \sigma E(B_t^H | F_0) \right] \quad (12)$$

w odróżnieniu od bezwarunkowej wartości oczekiwanej

$$E(S_t^H) = S_0 e^{\mu t}. \quad (13)$$

Naturalnym rozszerzeniem analizy jest rozważenie portfela akcji o dynamice ( $i \in \{1, 2\}$ ):

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dB_i^{H_i}. \quad (14)$$

Analiza dynamiki portfela ( $w_1 + w_2 = 1$ ):

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = w_1 \frac{dS_1}{S_1} + w_2 \frac{dS_2}{S_2}, \quad (15)$$

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = (w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2) dt + w_1 \sigma_1 dB_1^{H_1} + w_2 \sigma_2 dB_2^{H_2} \quad (16)$$

dla różnych wartości indeksu  $H_i$  nie jest zadaniem łatwym.

Zależność pomiędzy cenami można modelować poprzez korelacje zwykłych ruchów Browna (procesów Wienera) występujących w reprezentacji całkowej (5) ułamkowego ruchu Browna. Jeżeli ponadto założymy, że  $E[\dot{B}_1(t) \dot{B}_2(s)] = \rho \delta(s-t)$  oraz  $H_1 = H_2 = H$ , gdzie  $\rho$  – współczynnik korelacji, to dynamika portfela daje się zapisać w postaci:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = (w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2) dt + \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho \sigma_1 \sigma_2} dB^H \quad (17)$$

lub

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \mu_\Pi dt + \sigma_\Pi dB^H, \quad (18)$$

gdzie

$$\mu_{\Pi} = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 \tag{19}$$

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2}. \tag{20}$$

Ze wzoru (18) wynika, że portfel dla ustalonej struktury zachowuje się jak zwykły instrument ewoluujący zgodnie z uławkowym geometrycznym ruchem Browna.

Niestety, powyższe stwierdzenie jest prawdziwe jedynie w przypadku bezwarunkowym, tj. w sytuacji, gdy nie znamy przeszłości procesów (14). W praktyce oznacza to konieczność stosowania w symulacjach wzoru (16) nawet w przypadku  $H_1 = H_2 = H$ .

W literaturze poświęconej symulacjom komputerowym można spotkać wiele metod symulowania uławkowego ruchu Browna [Norros, Mannersalo, Wang 1999; Carmona, Coutin 1998; Paxson, Fast 1997; Stoksik, Lane, Nguyen 1994; Dieker 2004].

Autor zastosował dyskretyzację wraz obcięciem równania (5). Łatwo pokazać, że przyrost uławkowego ruchu Browna wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} dB_t^H &= B_{t+dt}^H - B_t^H = \\ &= \kappa_H \left\{ \int_0^{t+dt} (t+dt-s)^{H-0,5} dB_s - \int_0^t (t-s)^{H-0,5} dB_s + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 \left[ (t+dt-s)^{H-0,5} - (t-s)^{H-0,5} \right] dB_s \right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Ostatnią z całek można z żadaną dokładnością (wybierając odpowiednią wartość stałej  $M$ ) przybliżyć całką (sumą) po ograniczonym od dołu przedziale. Czyli

$$\begin{aligned} \Delta B_t^H &= B_{t+\Delta t}^H - B_t^H \approx \\ &\approx \kappa_H \left\{ \int_0^{t+\Delta t} (t+\Delta t-s)^{H-0,5} dB_s - \int_0^t (t-s)^{H-0,5} dB_s \right. \\ &\quad \left. + \int_{-M}^0 \left[ (t+\Delta t-s)^{H-0,5} - (t-s)^{H-0,5} \right] dB_s \right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

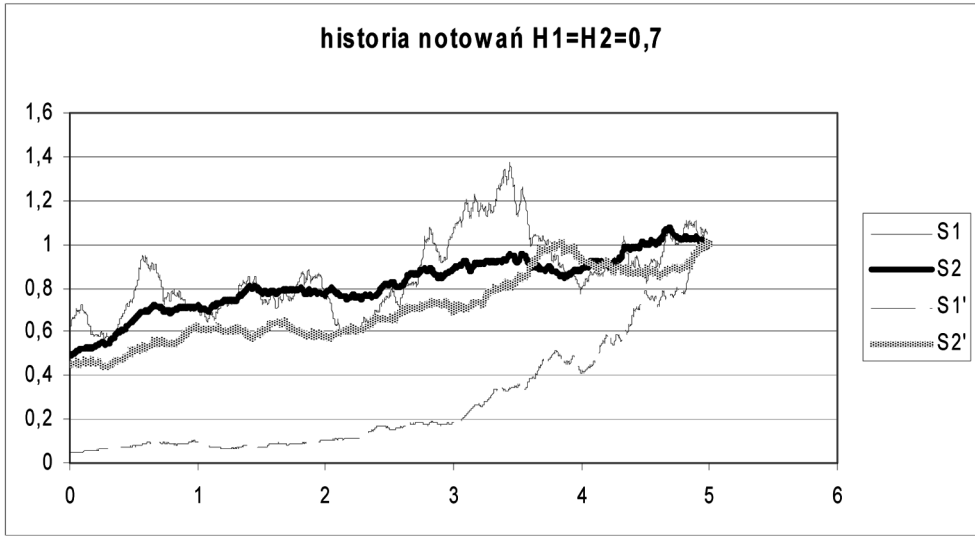
Przyrosty procesu Wienera aproksymowane są wyrażeniem:

$$dB \approx \varepsilon\sqrt{\Delta t}, \tag{23}$$

gdzie:  $\varepsilon$  – zmienna losowa o standardowym rozkładzie normalnym.

W przypadku portfela akcji stosowano również dekompozycję Choleskyego [Gątarek i in. 2001].

Na rys. 2 przedstawiono dwie przykładowe historie notowań dwóch akcji ( $H_1 = H_2 = H$ ). Ze względów poglądowych przyjęto, że aktualne ceny akcji są równe jednej jednostce pieniężnej.



**Rys. 2.** Przykładowe dwa historyczne notowania dwóch instrumentów (dryfy instrumentów wynoszą odpowiednio 0,1 i 0,05, zmienności 0,6 i 0,2, współczynnik korelacji 0,6, okres historyczny ma długość pięciu lat sesyjnych)

Źródło: opracowanie własne.

Rok sesyjny podzielono na 500 podokresów. W celu oszacowania prawdopodobieństwa spadku wartości portfela choć raz poniżej ustalonej (np. akceptowalnej przez inwestora maksymalnej straty) wartości przeprowadzono 10 000 symulacji.

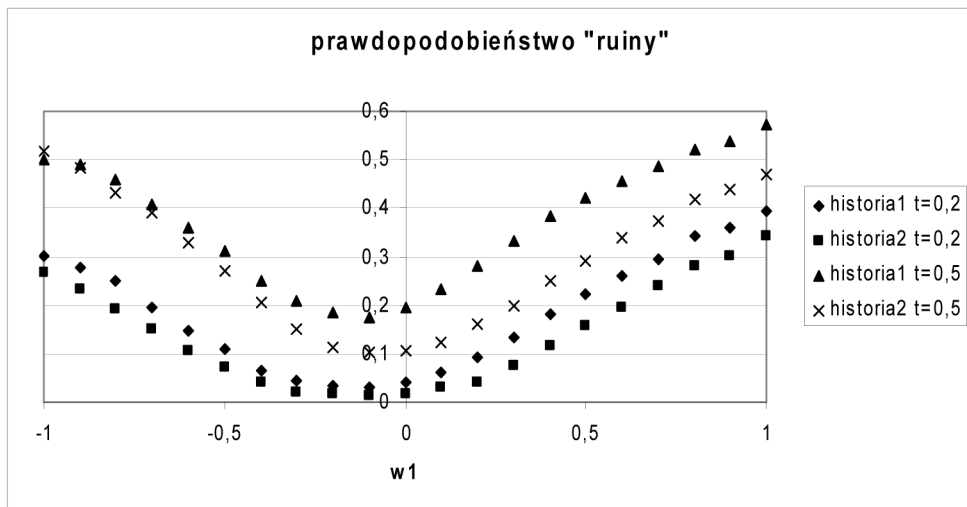
Na rys. 3 i 4 przedstawiono prawdopodobieństwa, że wartość portfela spadnie choć raz o 10% w stosunku do wartości początkowej w różnych horyzontach czasu w zależności od struktury portfela (wagi  $w_1$ ).

Ponieważ prawdopodobieństwo spadku choć raz poniżej pewnej wartości jest analogiczne do prawdopodobieństwa ruiny, wykresy zatytułowano prawdopodobieństwo „ruiny”.

Na podstawie rys. 3 i 4 można wyciągnąć następujące wnioski:

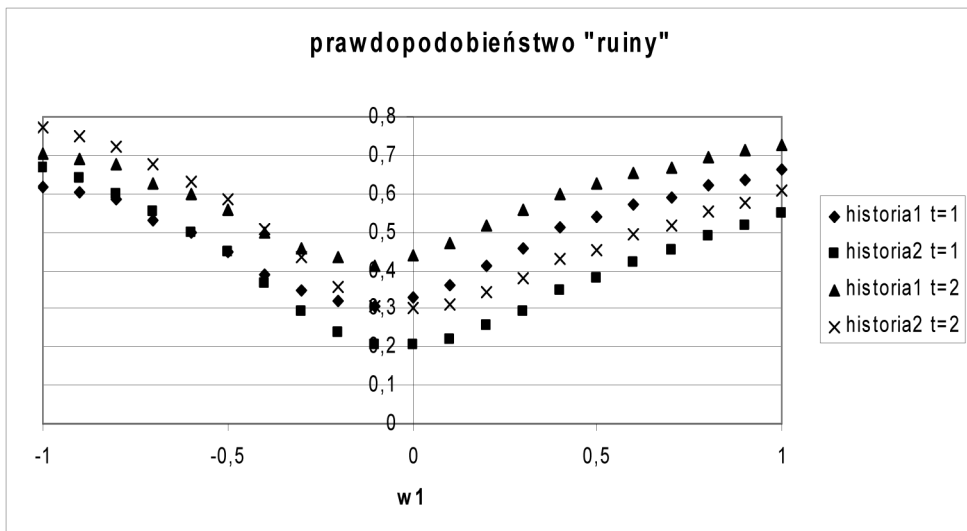
- prawdopodobieństwo osiągnięcia choć raz maksymalnej akceptowalnej straty (prawdopodobieństwo „ruiny”) posiada minimum ze względu na skład portfela,
- skład optymalnego portfela zależy od horyzontu inwestycji,
- na podstawie przeprowadzonych symulacji wydaje się, że skład optymalnego portfela nie zależy od historii notowań (badania przeprowadzono dla dwóch hi-





**Rys. 3.** Prawdopodobieństwo spadku choć raz o 10% w stosunku do wartości początkowej w zależności od struktury portfela

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 4.** Prawdopodobieństwo spadku choć raz o 10% w stosunku do wartości początkowej w zależności od struktury portfela

Źródło: opracowanie własne.

storii, stąd wniosek może nie być prawdziwy – kwestia ta wymaga dokładniejszej analizy),

- prawdopodobieństwo osiągnięcia choć raz maksymalnej akceptowalnej straty zależy od historii notowań,
- hierarchia ryzyka (ryzyko jako prawdopodobieństwo osiągnięcia choć raz maksymalnej akceptowalnej straty) portfeli o równej historii notowań w zależności od składu portfela może ulec odwróceniu.

Istotną konsekwencją pierwszego wniosku jest możliwość wykorzystania maksymalnej straty do optymalizacji decyzji inwestycyjnych.

## 5. Podsumowanie

Według wiedzy autora, rozważania dotyczące maksymalnej straty w odniesieniu do instrumentów ewoluujących zgodnie z ułamkowym geometrycznym ruchem Browna nie były dotychczas przeprowadzane w literaturze. Ciekawym osiągnięciem powyższej analizy jest wykazanie przydatności maksymalnej straty do optymalizacji decyzji inwestycyjnych w opisanym wyżej środowisku.

## Literatura

- Acar E., James S., *Maximum loss and maximum drawdown in financial markets*, International Conference “Forecasting Financial Markets”, London 1997.
- Asmussen S., *Ruin probability*, “World Scientific” 2000.
- Bachelier L., *Theorie de la Speculation*, Annales de l’Ecole Normale Supérieure, 3, Paris 1900.
- Barkoulas J.T., Baum Ch.F., *Fractional Dynamics in Japanese Financial Time Series*, “Pacific-Basin Finance Journal” vol. 6, iss. 1-2, May 1998, s. 115-124.
- Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer, London Limited 2008.
- Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities*, “Journal of Political Economy” 1973, no. 3.
- Cajueiro D.O., Barbachan J.F., *Volatility Estimation and Option Pricing with Fractional Brownian Motion*, preprint, 2003.
- Carmona P., Coutin L., *Fractional Brownian motion and the Markov property*, “Electronic Communications in Probability” 1998, no. 3.
- Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleick M., *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1983.
- Czernik T., *Maksymalna strata jako miara ryzyka*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko '03*, red. T. Trzaskalik, AE, Katowice 2003.
- Czernik T., *Zysk przed stratą miara ryzyka z rodziny FPRM*, [w:] *Metody matematyczne i ekonometryczne oceny ryzyka finansowego*, red. P. Chrzan, AE, Katowice 2007.
- Decreusefond L., Üstünel A.S., *Fractional Brownian motion: Theory and applications*, ESAIM: Proceedings Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications 1998, vol. 5, s. 75-86.
- Dieker T., *Simulation of fractional Brownian motion*, <http://www2.isye.gatech.edu/~adieker3/fbm/index.html> 2004.
- Gątarek D., Maksymiuk R., Krysiak M., Witkowski Ł., *Nowoczesne metody zarządzania ryzykiem finansowym*, WIG-Press, Warszawa 2001.

- Hu Y., *Integral transformations and anticipative calculus for fractional Brownian motions*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 175, no. 825, May 2005.
- Hu Y., Oksendal B., Sulem A., *Optimal portfolio in a fractional Black & Scholes market*, [www.math.uio.no/eprint/pure\\_math/1999/13-99.ps](http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/1999/13-99.ps).
- Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Inwestycje finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa 1999.
- Kliackin W.I., *Statisticzjeskoje opisanie dinamiczieskich sistiem s fluktuirujuszczimi paramietrami*, Nauka, Moskwa 1975.
- Kołmogorow A.N., *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum*, Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. USSR (N.S.), 26, 115-118, 1940.
- Mandelbrot B.B., *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, Springer-Verlag, New York 1997.
- Mastalerz-Kodzis A., *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, AE, Katowice 2003.
- Merton R.C., *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case*, "Review of Economics and Statistics" 1969, no. 51.
- Merton R.C., *Theory of rational option pricing*, "Bell Journal of Economics" 1973, no. 4.
- Mishura Y., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer, Berlin 2008.
- Norros I., Mannersalo P., Wang J.L., *Simulation of fractional Brownian motion with conditionalized random midpoint displacement*, "Advances in Performance Analysis" 1999, vol. 2, no. 1.
- Paxson V., *Fast approximate synthesis of fractional Gaussian noise for generating self-similar network traffic*, "Computer Communication Review" 1997, no. 27(5).
- Peters E.E., *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons, New York 1994.
- Risk Measures for the 21st Century*, ed. G. Szego, Wiley, 2004.
- Risken H., *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*, Springer, New York 1989.
- Samuelson P.A., *Rational theory of warrant pricing*, "Industrial Management Review" 1965, no. 6.
- Shiryaev A.N., *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapore 1999.
- Stoksik M.A., Lane R.G., Nguyen D.T., *Accurate synthesis of fractional Brownian motion using wavelets*, "Electronic Letters" 1994, no. 30(5).
- Theory and Applications of Long-range Dependence*, ed. P. Doukhan, G. Oppenheim, M.S. Taqqu, Birkhäuser 2003.
- Zemanian A., *Teoria dystrybucji i analiza transformacji. Wprowadzenie do funkcji uogólnionych i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1969.

## GEOMETRIC FRACTIONAL BROWNIAN MOTION – MAXIMAL LOSS AND RUIN PROBABILITY

**Summary:** In the article geometric fractional Brownian evolution of the stock is investigated and Maximal Loss as a risk measure is proposed. It is shown that Maximal Loss can be used to optimize investment decisions on the market described above. Nontrivial dependence of the probability of reaching maximal accepted loss on portfolio structure and historical prices is discussed.