PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 106
Ubezpieczenia emerytalne, społeczne i metody aktuarialne 2010

Monika Papież
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

WPŁYW NIEJEDNORODNOŚCI POPULACJI NA RYZYKO PORTFELA ZAKŁADÓW EMERYTALNYCH

Streszczenie: Przedstawiony referat jest kontynuacją badań nad wpływem niejednorodności populacji wynikającej z nieobserwowalnych czynników na ryzyko demograficzne. W prowadzonych wcześniej badaniach autorka zaprezentowała m.in. jedną z metod analizy nieobserwowalnych czynników, a mianowicie modele nazywane *frailty models*, opisujące indywidualne zróżnicowanie umieralności. W modelach tego typu zakłada się, że Z jest nieobserwowalną, nieujemną zmienną losową, która charakteryzuje ryzyko danej grupy spowodowane zróżnicowaniem pod względem umieralności.

Celem referatu jest analiza ryzyka demograficznego w portfelu zakładów emerytalnych przy założeniu, że populacja jest niejednorodna pod względem nieobserwowalnych czynników. Analiza ta pozwoli ocenić, w jakim stopniu indywidualne zróżnicowanie pod względem umieralności oraz niejednorodność populacji mają wpływ na wielkość ryzyka jednorazowej składki netto dla renty dożywotniej w zależności od wieku osoby rozpo-czynającej pobieranie renty oraz dokonać oceny ryzyka dla portfela zakładów emerytalnych.

Słowa kluczowe: ryzyko demograficzne, zmienna losowa, ubezpieczenia emerytalne.

1. Wstęp

Niejednorodność populacji pod względem umieralności spowodowana jest indywidualnymi różnicami między osobami wynikającymi zarówno z obserwowalnych, jak i nieobserwowalnych czynników. Portfele ubezpieczeniowe są tak konstruowane przez aktuariuszy, aby czynniki oddziałujące na polisy w danym portfelu były takie same. Jednak nie zawsze jest to możliwe, gdyż nie zawsze można wyodrębnić wszystkie czynniki ryzyka. Dla portfeli budowanych w ubezpieczeniach życiowych wykorzystuje się w dużym stopniu modele uwzględniające niejednorodność ryzyka spowodowaną tylko obserwowalnymi czynnikami (np. płeć, wiek, indywidualny styl życia, nawyk palenia), a w małym stopniu modele uwzględniające niejednorodność wynikającą z nieobserwowalnych czynników (np. cechy dziedziczne, genetyczne). Obserwowalne czynniki ryzyka są powszechnie uwzględniane w wycenie produktów ubezpieczeniowych – jest to tzw. underwriting. Natomiast nieobserwowalne czynniki ryzyka są zazwyczaj pomijane.

Przedstawiony referat jest kontynuacją badań nad wpływem niejednorodności populacji wynikającej z nieobserwowalnych czynników na ryzyko demograficzne. W prowadzonych wcześniej badaniach autorka zaprezentowała m.in. jedną z metod analizy nieobserwowalnych czynników, a mianowicie modele nazywane *frailty models*, czyli modele opisujące indywidualne zróżnicowanie umieralności. W tych modelach zakłada się, że Z jest nieobserwowalną, nieujemną zmienną losową (*frailty random variable*), która charakteryzuje ryzyko danej grupy spowodowane zróżnicowaniem pod względem umieralności. Autorka wykorzystała te modele do oceny ryzyka demograficznego dla portfela ubezpieczeń na życie (por. [Papież]).

Celem niniejszego referatu jest analiza ryzyka demograficznego w portfelu zakładów emerytalnych przy założeniu, że populacja jest niejednorodna pod względem nieobserwowalnych czynników. Do oceny ryzyka zostanie wykorzystana metoda podziału łącznego ryzyka oparta na analizie wariancji. Wariancja będzie przedstawiona jako suma dwóch składowych, które są związane z ryzykiem ubezpieczeniowym, długowieczności oraz ryzykiem wynikającym z działania czynników nieobserwowalnych.

Analiza ta pozwoli ocenić, w jakim stopniu indywidualne zróżnicowanie pod względem umieralności oraz niejednorodność populacji ma wpływ na wielkość ryzyka jednorazowej składki netto dla renty dożywotniej w zależności od wieku osoby rozpoczynającej pobieranie renty, a tym samym dokonać oceny ryzyka dla portfela zakładów emerytalnych.

2. Metody analizy niejednorodności populacji – modele *frailty*

Badania nad niejednorodnością populacji w analizie przeżycia zostały przedstawione m.in. w pracy [Vaupel, Manton, Stallard 1979]. W pracy zaprezentowano dwa podejścia: podejście dyskretne, w którym niejednorodność jest modelowana przez mieszankę odpowiednich funkcji, oraz podejście ciągłe, w którym do modelowania niejednorodności wykorzystuje się nieobserwowalną nieujemną zmienną losową Z (*frailty random variable*) wyrażającą poziom nieobserwowalnego czynnika ryzyka oddziałującego na indywidualny przebieg umieralności. Modele *frailty*, czyli indywidualnego zróżnicowania osób w populacji pod względem umieralności, mają za zadanie opisać wszystkie czynniki nieobserwowalne wpływające na przebieg indywidualnej umieralności. W modelach tych zakłada się, że osoby z wyższą wartością zmiennej losowej Z umierają średnio wcześniej niż pozostałe (por. [*Metody oceny*… 2000]).

Niech x oznacza wiek osób, które tworzą niejednorodną grupę tylko z powodu nieobserwowalnych czynników. Załóżmy ponadto, że dla pojedynczej osoby czynniki te opisane są przez nieujemną zmienną losową opisującą indywidualne zróżnicowanie umieralności. Niech Z_x będzie nieobserwowalną zmienną losową o rozkładzie ciągłym opisanym funkcją gęstości $g_x(z)$, wówczas warunkową funkcję intensywności umieralności dla osoby w wieku x przy danym poziomie indywidualnego zróżnicowania umieralności można zdefiniować wzorem:

$$\mu_x(z) = \lim_{t \to \infty} \frac{P(T_x \le t \mid Z_x = z)}{t}. \tag{1}$$

Stąd wynika, że badanie zależności między $\mu_x(z)$ a standardową funkcją intensywności umieralności μ_x wymaga analizy łącznego rozkładu zmiennych losowych $(T_x Z_x)$. W pracy [Vaupel, Manton, Stallard 1979] został zaproponowany multiplikatywny model dla intensywności umieralności:

$$\mu_x(z) = z\mu_x, \tag{2}$$

gdzie μ_x można interpretować jako intensywność umieralności osoby w wieku x, gdy $z = 1$, czyli na osobę nie działają czynniki nieobserwowalne.

Podstawowe charakterystyki nieobserwowalnej zmiennej losowej Z_x opisującej indywidualne zróżnicowanie ze względu na umieralność zostały przedstawione np. w pracach [Olivieri 2006; *Metody oceny*… 2000, s. 155; Papież].

Zależność między indywidualną umieralnością a umieralnością populacji zależy od rozkładu zmiennej losowej Z_x. Przyjmuje się następujące założenia dotyczącego indywidualnego zróżnicowania. Zakłada się, że parametr indywidualnego zróżnicowania jest wynikiem działania wielu czynników nieobserwowalnych, nie jest stały w ciągu całego życia oraz że kumuluje on czynniki mające wpływ na umieralność (por. [*Metody oceny*… 2000, s. 154]). Stąd można przyjąć, tak jak sugerują autorzy w pracy [Vaupel, Manton, Stallard 1979], żeby w badaniach dotyczących niejednorodności populacji zmienna losowa Z_x miała rozkład gamma. Szczegółowe uzasadnienie wyboru rozkładu gamma do opisu niejednorodności populacji wraz z własnościami tego rozkładu w pracach [Olivieri 2006; *Metody oceny*… 2000, s. 155; Papież].

3. Składka i ryzyko dla niejednorodnego portfela zakładów emerytalnych

Zdefiniujmy zmienną losową $Y_t^{(j)}$ opisująca zaktualizowaną na moment t łączną sumę przyszłych wypłat renty dożywotniej j-tej osoby w wieku x następująco:

$$Y_t^{(j)} = \int_0^{T_{x+t}^{(j)}} b_{t+u}^{(j)} e^{-ru} du, \tag{3}$$

gdzie: $T_{x+t}^{(j)}$ – zmienna losowa opisująca dalsze trwanie życia j-tej osoby w wieku x w czasie t, $b_t^{(j)}$ – wysokość świadczenia w czasie t dla j-tej osoby w wieku x (wypłata realizowana przez cały rok), r – intensywność oprocentowania.

Wielkość portfela zakładu emerytalnego, który jest jednorodny ze względu na obserwowalne ryzyka (np. wiek, płeć), oznaczymy symbolem: $\Pi_t = \{j : T_x^{(j)} > t,$ $j = 1,\ldots,n\}$. Jeżeli zmienne $\left\{T_{x+t}^{(j)}, j = 1,\ldots n\right\}$ mają taki sam rozkład i są niezależne, to zmienna losowa:

$$Y_t^{(\Pi_t)} = \sum_{j\in\Pi_t} Y_t^{(j)} = \sum_{j\in\Pi_t} \int_0^{T_{x+t}^{(j)}} b_{t+u}^{(j)} e^{-ru} du \tag{4}$$

opisuje zaktualizowaną na moment t łączną sumę przyszłych wypłat renty dożywotniej dla całego portfela.

W celu uproszczenia analizy założymy, że wartość wypłaty świadczenia dla każdej osoby jest jednakowa w czasie t, czyli $\forall j\ b_t^{(j)} \equiv b_t \equiv 1$ oraz n_t oznacza liczbę osób (polis) w czasie t. Jeżeli dodatkowo założymy, że portfel jest niejednorodny ze względu na nieobserwowalne ryzyko, to wówczas zmienne losowe $\left\{T_{x+t}^{(j)}, j = 1,\ldots n\right\}$ są zależne od nieobserwowalnej zmiennej losowej Z_x, ale zmienne losowe $\left\{T_{x+t}^{(j)}, j = 1,\ldots n \mid Z_x = z\right\}$ są warunkowo niezależne i mają taki sam rozkład. W tym przypadku postać portfela nie ulegnie zmianie. Dla takiego portfela można wyznaczyć jednorazową składkę oraz ryzyko demograficzne związane z tą składką. Warunkowa jednorazowa składka netto dożywotniej renty ciągłej dla j-tej osoby w wieku x przy założeniu wartości indywidualnego zróżnicowania ze względu na umieralność wynosi (por. [Olivieri 2006]):

$$\overline{a}_{x|z} = E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t} = z\right) = \int_0^\infty e^{-ru} \frac{S(x+t+u \mid z)}{S(x+t \mid z)} du, \tag{5}$$

a średnia jednorazowa składka netto dożywotniej renty ciągłej j-tej osoby w wieku x, w niejednorodnej populacji ze względu na nieobserwowalne ryzyka, wynosi:

$$\overline{a}_x = E\left(Y_t^{(j)}\right) = E\left(E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t} = z\right)\right) = \int_0^\infty e^{-ru} \frac{\overline{S}(x+t+u)}{\overline{S}(x+t)} du, \tag{6}$$

gdzie: $S(x|z)$ – warunkowa funkcja przeżycia dana wzorem: $S(x \mid z) = e^{-\int_0^x \mu_t(z)dt}$,

$\overline{S}(x)$ – średnia liczba osób dożywających wieku x dana wzorem: $\overline{S}(x) = \int_0^\infty S(x|z) g_0(z) dz.$

Wartość jednorazowej składki netto dla całego portfela Π wynosi:

$$\overline{a}_x^{(\Pi_t)} = E\left(Y_t^{(\Pi_t)}\right) = \sum_{j\in\Pi_t} E\left(Y_t^{(j)}\right) = n_t E\left(Y_t^{(j)}\right) = n_t \overline{a}_x . \tag{7}$$

Wykorzystując metodę łącznego podziału opartą na analizie wariancji, wariancję tej zmiennej można przedstawić w następujący sposób (por. [Papież 2008; 2008a, Papież]):

$$\begin{aligned} Var\left(Y_t^{(\Pi_t)}\right) &= E\left(Var\left(Y_t^{(\Pi_t)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right) + Var\left(E\left(Y_t^{(\Pi_t)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right) = \\ &= n_t E\left(Var\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right) + n_t^2 Var\left(E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right) \end{aligned}. \tag{8}$$

Jeżeli założymy, że populacja jest jednorodna, wówczas pierwszy składnik sumy (8) – $E\left(Var\left(Y_t^{(\Pi_t)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right)$ redukuje się do wartości $Var\left(Y_t^{(\Pi_t)}\right)$, a drugi składnik wynosi zero. Stąd pierwszy składnik można traktować jako składnik ryzyka demograficznego, który mierzy ryzyko spowodowane przypadkowymi odchyleniami od wartości oczekiwanej umieralności, czyli mierzy ryzyko ubezpieczeniowe. Natomiast gdy założymy niejednorodność populacji w portfelu wynikającą z czynników nieobserwowalnych, to drugi składnik sumy $Var\left(E\left(Y_t^{(\Pi_t)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right)$ mierzy systematyczne odchylenia między rzeczywistą liczbą zgonów a oczekiwaną, wynikającą z działania czynników nieobserwowalnych, które wpływają na długość życia. Zatem mierzy albo ryzyko długowieczności, albo śmiertelności. Do wyznaczenia udziału ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym w stosunku do składki można obliczyć indeks ryzyka w zależności od liczby polis w portfelu:

$$r(n_t) = \frac{\sqrt{Var\left(Y_t^{(\Pi_t)}\right)}}{E\left(Y_t^{(\Pi_t)}\right)} = \sqrt{\frac{E\left(Var\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right)}{n_t E^2\left(Y_t^{(j)}\right)} + \frac{Var\left(E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right)}{E^2\left(Y_t^{(j)}\right)}} \tag{9}$$

oraz wielkość indeksu ryzyka, gdy liczba polis w portfelu rośnie do nieskończoności:

$$\lim_{n_t\to\infty} r(n_t) = \sqrt{\frac{Var\left(E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t}=z\right)\right)}{E^2\left(Y_t^{(j)}\right)}} . \tag{10}$$

Ze wzorów (9) i (10) wynika, że udział pierwszego składnika sumy (8) w składce może być zmniejszony, gdy zostanie zwiększona wielkość portfela. Natomiast udział drugiego składnika w składce nie ulega zmianie wraz ze wzrostem liczby polis w portfelu. Ze wzoru (10) wynika, że wraz ze wzrostem liczby polis w portfelu udział całkowitego ryzyka demograficznego w składce redukuje się tylko do udziału ryzyka związanego z niejednorodnością populacji. Udział ryzyka ubezpieczeniowego redukuje się wówczas do zera.

4. Analiza składki i ryzyko dla niejednorodnego portfela zakładów emerytalnych – przykład empiryczny

W celu analizy wpływu niejednorodności populacji na wysokość jednorazowej składki dożywotniej renty ciągłej oraz wpływu na ryzyko demograficzne w portfelu zakładu emerytalnego, przyjmijmy, że w rozpatrywanym portfelu indywidualna intensywność umieralności opisana jest za pomocą funkcji Gompertza $\mu_x = \alpha e^{\beta x}$ (por. [Papież]). Do analizy przyjęto wartości parametrów: α = 0,0001878 i β = 0,07713. Zostały one oszacowane na podstawie tablic trwania życia dla mężczyzn w Polsce w 2007 r. Dodatkowo założymy, tak jak proponuje literatura [Olivieri 2006], że w badaniach dotyczących niejednorodności populacji zmienna losowa Z_x ma rozkład gamma oraz średnie zróżnicowanie indywidualne umieralności w chwili urodzenia jest równe 1. Wówczas parametr skali jest równy parametrowi kształtu w rozkładzie gamma $(\delta = \theta)$. Ponadto do wyznaczenia wysokości jednorazowej składki dożywotniej renty przyjmijmy wysokość intensywności oprocentowania na poziomie $r = 0{,}0198$.

Wyniki analiz przedstawiono w tab. 1-3. Tabela 1 przedstawia wartości jednorazowej składki netto dożywotniej renty w zależności od wieku x przy założeniu wartości indywidualnego zróżnicowania ze względu na umieralność oraz wartość ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym w stosunku do wielkości jednorazowej składki netto dla pojedynczej polisy. Do analizy przyjęto następujące wartości zmiennej losowej opisującej indywidualne zróżnicowanie pod względem umieralności: z = 0,75, co oznacza zwiększoną indywidualną odporność na zachorowanie, z = 1,25 oznacza zwiększoną indywidualną podatność na choroby oraz $z = 1$, które można traktować jako „standardową" umieralność. Analiza wartości jednorazowej składki netto wskazuje, że maleje ona zarówno z wiekiem, jak i ze wzrostem wartości nieobserwowalnej zmiennej losowej Z_x opisującej indywidualne zróżnicowanie umieralności. Natomiast ryzyko mierzone odchyleniem standardowym w stosunku do wielkości jednorazowej składki netto dla pojedynczej polisy wzrasta wraz z wiekiem oraz wartością zmiennej losowej Z_x.

Tabela 1 przedstawia również stosunek wielkości jednorazowej składki netto dla portfela niejednorodnego do wielkości jednorazowej składki netto dla portfela o jednorodnej populacji (z = 1) w zależności od wartości parametru δ oraz wieku. Należy zauważyć, że różnica między wielkością jednorazowej składki netto dla portfela jednorodnego i niejednorodnego wzrasta wraz ze wzrostem wieku oraz im wyższa wartość parametru δ, tym portfel staje się bardziej jednorodny, a wartości składek się wyrównują.

Natomiast w tab. 2 przedstawiono porównanie ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym w stosunku do wielkości jednorazowej składki netto dla portfela, w którym brak indywidualnego zróżnicowania populacji (z = 1) oraz dla portfela z niejednorodną populacją (δ =30), w zależności od liczby polis w portfelu i wieku.

Analiza tych wartości wskazuje, że udział jednorazowej składki netto w odchyleniu standardowym jest wyższy, gdy portfel jest niejednorodny, oraz wzrasta wraz z wiekiem. Oznacza to, że gdy na populację działają nieobserwowalne czynniki, to ryzyko związane ze składką wzrasta. Ponadto wraz ze wzrostem liczby polis w portfelu ryzyko to redukuje się do zera w wypadku braku indywidualnego zróżnicowania populacji. Natomiast gdy populacja jest niejednorodna, nie można go całkowicie zredukować.

Tabela 1. Wartości jednorazowej składki netto dożywotniej renty w zależności od wieku x przy założeniu wartości indywidualnego zróżnicowania ze względu na umieralność $z = 0{,}75$, $z = 1$ i $z = 1{,}25$ wraz z wartością współczynnika zmienności dla pojedynczej polisy oraz stosunek wielkości jednorazowej składki netto dla portfela niejednorodnego do wielkości jednorazowej składki netto dla portfela o jednorodnej populacji ($z = 1$) w zależności od wartości parametru δ oraz wieku

Wiek	$\bar{a}_{x\|z} = E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t} = z\right)$			$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(j)} \mid Z_{x+t} = z\right)}}{E\left(Y^{(j)} \mid Z_{x+t} = z\right)}$ w [%]			$\frac{\bar{a}_x}{\bar{a}_{x\|z}} = \frac{E\left(E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t} = z\right)\right)}{E\left(Y_t^{(j)} \mid Z_{x+t} = z\right)}$		
	$z = 0{,}75$	$z = 1$	$z = 1{,}25$	$z = 0{,}75$	$z = 1$	$z = 1{,}25$	$\delta = 1$	$\delta = 30$	$\delta = 100$
55	18,1148	**16,3875**	15,0597	40,20	**43,28**	45,79	1,248	1,008	1,003
60	15,8026	**14,1053**	12,8198	44,37	**47,67**	50,34	1,324	1,011	1,003
65	13,5369	**11,9070**	10,6932	48,84	**52,34**	55,15	1,431	1,015	1,004
70	11,3680	**9,8429**	8,7283	53,57	**57,23**	60,14	1,584	1,020	1,006
75	9,3457	**7,9589**	6,9657	58,51	**62,28**	65,23	1,803	1,028	1,008
80	7,5136	**6,2909**	5,4337	63,58	**67,38**	70,30	2,118	1,040	1,012
85	5,9045	**4,8609**	4,1449	68,66	**72,40**	75,22	2,575	1,057	1,017

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Porównanie ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym w stosunku do wielkości jednorazowej składki netto dla portfela, w którym brak indywidualnego zróżnicowania populacji ($Z_x = 1$) oraz dla niejednorodnej populacji $(\delta = 30)$ w zależności od liczby polis w portfelu i wieku (w %)

Wiek	$x = 55$		$x = 65$		$x = 75$	
N	$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)}$ $z = 1$	$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(\Pi)}\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ $\delta = 30$	$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)}$ $z = 1$	$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(\Pi)}\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ $\delta = 30$	$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)}$ $z = 1$	$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(\Pi)}\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ $\delta = 30$
1	43,28	43,46	52,34	52,55	62,28	62,50
10	13,69	15,12	16,55	18,47	19,69	22,16
100	4,33	7,92	5,23	9,96	6,23	12,24
1000	1,37	6,80	1,66	8,66	1,97	10,75
100000	0,14	6,66	0,17	8,50	0,20	10,57

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Porównanie wielkości ryzyka ubezpieczeniowego i ryzyka związanego z niejednorodnością populacji w stosunku do całkowitego ryzyka oraz indeksu ryzyka w zależności od liczby polis w portfelu dla osób w wieku 65 lat (w %)

N	$\frac{E\left(Var\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)\right)}{Var\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ (1)	$\frac{Var\left(E\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)\right)}{Var\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ (2)	$\frac{\sqrt{E\left(Var\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ (3)	$\frac{\sqrt{Var\left(E\left(Y^{(\Pi)} \mid Z_x\right)\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ (4)	$\frac{\sqrt{Var\left(Y^{(\Pi)}\right)}}{E\left(Y^{(\Pi)}\right)}$ (5)
1	97,38	2,62	51,86	**8,50**	52,55
10	78,83	21,17	16,40	**8,50**	18,47
100	27,13	72,87	5,19	**8,50**	9,96
1000	3,59	96,41	1,64	**8,50**	8,66
100000	0,04	99,96	0,16	**8,50**	**8,50**

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3 przedstawia porównanie wielkości ryzyka ubezpieczeniowego i ryzyka długowieczności związanego z niejednorodnością populacji w stosunku do całkowitego ryzyka w zależności od liczby polis w portfelu dla osób w wieku 65 lat. Tabela zawiera również wartości indeksu ryzyka. Analiza wartości z tab. 3 (kolumny 1 i 2) wskazuje, że wraz ze wzrostem liczby polis w portfelu ulega zmianie rodzaj ryzyka oddziałujący na całkowite ryzyko demograficzne. W wypadku jednej polisy całkowite ryzyko demograficzne w ok. 97,4% zależy od przypadkowych odchyleń między oszacowaną a rzeczywistą długością trwania życia i tylko w ok. 2,6% zależy od niejednorodności populacji. Jeżeli liczba polis w portfelu wzrośnie, wówczas udział ryzyka ubezpieczeniowego w ryzyku demograficznym redukuje się prawie do zera. Wzrasta natomiast udział ryzyka związanego z niejednorodnością populacji, która powoduje wydłużanie się lub skracanie długości trwania życia. Analiza wartości indeksu ryzyka (kolumna 5) wskazuje, że wraz ze wzrostem liczby polis maleje wielkość ryzyka demograficznego w stosunku do składki, ale tylko do poziomu udziału ryzyka związanego z niejednorodnością populacji w składce. Tak więc zmiana liczby polis nie powoduje, że wielkość ryzyka związanego z niejednorodnością populacji w stosunku do składki ulegnie zmianie (kolumna 4). Natomiast wraz ze wzrostem liczby polis maleje wielkość ryzyka ubezpieczeniowego w stosunku do składki (kolumna 3). Redukuje się ono prawie do zera.

5. Uwagi końcowe

Analiza wysokości jednorazowej składki netto dożywotniej renty i wielkości ryzyka demograficznego w portfelu zakładów emerytalnych w zależności od indywidualnego zróżnicowania osób ze względu na umieralność oraz stopień niejednorodności populacji ze względu na nieobserwowalne czynniki wskazuje, że nieuwzględnienie tych czynników ma wpływ na wysokość składki i ryzyka z nią związanego. Wyniki empiryczne potwierdzają fakt, że częściowej redukcji ryzyka demograficznego można dokonać, zwiększając liczbę polis w portfelu. Jednak całkowita redukcja jest niemożliwa, gdyż niezależnie od liczby polis udział ryzyka związanego z niejednorodnością populacji jest stały.

Literatura

Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych, red. S. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2000.

Olivieri A., *Heterogeneity in survival models. Applications to pensions and life annuities*, "Belgian Actuarial Bulletin" 2006, vol. 6, no. 1, s. 23-39.

Papież M., *Metody oceny ryzyka demograficznego i inwestycyjnego dla portfela ubezpieczeń na życie*, [w:] *Modelowanie Preferencji a Ryzyko `07*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, red. T. Trzaskalik, AE, Katowice 2008a, s. 361-376.

Papież M., *Ryzyko długowieczności dla portfela ubezpieczeń na życie i zakładów emerytalnych*, [w:] *Ubezpieczenia w XXI wieku*, red. W. Ronka-Chmielowiec, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1197, AE, Wrocław 2008, s. 334-343.

Papież M., Wanat S., *Wybrane metody analizy i modelowania zależnych zmiennych losowych wykorzystywanych w ubezpieczeniach*, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie, Prace z zakresu prognozowania nr 726, red. A. Sokołowski, AE, Kraków 2006, s. 61-78.

Papież M., *Wpływ niejednorodności populacji na ryzyko demograficzne w portfelu ubezpieczeń na życie* [w:] *Modelowanie Preferencji a Ryzyko `09*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, red. T. Trzaskalik, AE, Katowice (w druku).

Pitacco E., *From Halley to "frailty": a review of survival models for actuarial calculations*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 2004a, LXVII (1-2), s. 17-47.

Pitacco E., *Survival models in a dynamic context: A survey*, "Insurance: Mathematics and Economics" 2004, vol. 35, s. 279-298.

Vaupel J.W., Manton K.G., Stallard E., *The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality*, "Demography" 1979, 16(3), s. 439-454.

IMPACT OF HETEROGENEITY OF A POPULATION ON A RISK OF PENSION INSURANCE PORTFOLIO

Summary: The following paper is the continuation of the analysis of the impact of heterogeneity of a population due to unobservable factors on a demographic risk. In an earlier paper the author presents, among others, one of the methods of analyzing unobservable factors called "frailty models", that is models describing individual mortality. In such models it is assumed that Z is a frailty random variable, which characterizes the risk of a given population due to mortality differences. The aim of the paper is the analysis of a demographic risk in a pension insurance portfolio, with the assumption that the population is heterogeneous as far as unobservable factors are concerned. Such an analysis can be used in assessing to what extent individual mortality differences and heterogeneity of the population affect the risk of a net single premium of life annuities dependent on the age of a pensioner, and, at the same time, in evaluating the risk for pension insurance portfolios.