PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 106
Ubezpieczenia emerytalne, społeczne i metody aktuarialne 2010

Stanisław Wanat
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

MODELOWANIE WSPÓŁCZYNNIKA SZKODOWOŚCI ZALEŻNYCH GRUP UBEZPIECZEŃ Z WYKORZYSTANIEM FUNKCJI POŁĄCZEŃ

Streszczenie: W pracy rozważany jest problem, jak z wykorzystaniem funkcji połączenia można uwzględniać informacje dotyczące struktury zależności w szacowaniu rozkładu zagregowanego współczynnika szkodowości i jak informacje te wpływają na wymogi kapitałowe potrzebne do zabezpieczenia się przed zagregowanym ryzykiem ubezpieczeniowym kilku grup ubezpieczeń nie na życie. Przedstawiono w niej metodę umożliwiającą szacowanie dolnego i górnego ograniczenia dystrybuanty rozkładu sumy zmiennych losowych w zależności od posiadanej wiedzy o strukturze zależności (wyrażonej językiem funkcji połączeń) oraz wyniki badań empirycznych, w których analizowano, w jakim stopniu przyjęcie określonej struktury zależności między współczynnikami szkodowości dwóch grup ubezpieczeń wpływa na wysokość wymogów kapitałowych dla zagregowanego ryzyka ubezpieczeniowego tych grup.

Słowa kluczowe: współczynnik szkodowości, funkcja połączeń, ryzyko ubezpieczeniowe.

1. Wstęp

Ryzyko ubezpieczeniowe jest modelowane najczęściej za pomocą zmiennej losowej opisującej współczynnik szkodowości brutto, który dla konkretnej grupy ubezpieczeń definiowany jest jako iloraz wypłaconych odszkodowań i świadczeń do składki zarobionej. Współczynnik szkodowości w swej istocie jest standaryzowaną miarą informującą o ekspozycji na ryzyko składki zarobionej. Jego rozkład wraz z odpowiednią miarą ryzyka są podstawą szacowania wymogów kapitałowych związanych z ryzykiem ubezpieczeniowym dla danej grupy ubezpieczeń. Z kolei ocena zagregowanych wymogów kapitałowych dla posiadanych grup ubezpieczeń wymaga oszacowania rozkładu zmiennej losowej, będącej ważoną sumą zmiennych opisujących współczynniki szkodowości z poszczególnych grup. Praktyczne oszacowanie takiego rozkładu nie jest zadaniem prostym, z wyłączeniem sytuacji, gdy łączny rozkład współczynników szkodowości jest wielowymiarowym rozkładem normalnym. Zastosowane podejście zależy od posiadanej wiedzy dotyczącej sumowanych (brzegowych) zmiennych losowych oraz struktury zależności między nimi. Na przykład w przypadku zmiennych brzegowych mogą być znane ich rozkłady albo tylko momenty rozkładów i ewentualnie jakieś ograniczenia dotyczące możliwych wartości tych zmiennych. Natomiast w odniesieniu do struktury zależności można wyróżnić dwa skrajne przypadki polegające na braku jakiejkolwiek wiedzy na temat zależności lub pełnej znajomości tej struktury w postaci łącznego wielowymiarowego rozkładu oraz przypadek częściowej wiedzy o strukturze zależności (np. wiedza, że zmienne są dodatnio ćwiartkowo zależne, współmonotoniczne czy też są ograniczone z góry i (lub) z dołu znanym rozkładem wielowymiarowym). Połączenie wiedzy dotyczącej rozkładów brzegowych i dotyczącej struktury zależności decyduje o wyborze konkretnej metody szacowania rozkładu sumy.

W pracy uwaga jest skoncentrowana na zależności, a konkretnie na problemie, w jaki sposób, wykorzystując funkcje połączenia, można uwzględniać informacje dotyczące struktury zależności w szacowaniu rozkładu zagregowanego współczynnika szkodowości i jak informacje te wpływają na wymogi kapitałowe potrzebne do zabezpieczenia się przed zagregowanym ryzykiem ubezpieczeniowym kilku grup ubezpieczeń nie na życie. Zostanie przedstawiona metoda umożliwiająca szacowanie dolnego i górnego ograniczenia dystrybuanty rozkładu sumy zmiennych losowych w zależności od posiadanej wiedzy o strukturze zależności (wyrażonej językiem funkcji połączeń) oraz wyniki badań empirycznych, w których analizowano wysokość wymogów kapitałowych dla zagregowanego ryzyka ubezpieczeniowego dwóch grup ubezpieczeń ze względu na przyjętą strukturę zależności między współczynnikami szkodowości dla tych grup.

2. Wykorzystanie funkcji połączeń w szacowaniu rozkładu zagregowanych rodzajów ryzyka

Funkcje połączenia umożliwiają wprowadzenie różnych struktur zależności w modelowaniu zagregowanego ryzyka. Przyjmijmy, że agregacji podlega k rodzajów ryzyka $X_1, ..., X_k$. Symbolem C^d oznaczamy dualną do funkcji połączenia C, czyli $C^d(u_1, ..., u_k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{U_i \le u_i\}\right)$, gdzie U_i jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Jeżeli założymy, że zależność między zmiennymi $X_1, ..., X_k$ jest opisana funkcją połączenia C, dla której istnieją funkcje połączenia C_0 i C_1 takie, że C_0 z dołu ogranicza C, tzn.

$$C(u_1, ..., u_k) \ge C_0(u_1, ..., u_k), \text{ dla każdego } (u_1, ..., u_k) \in [0, 1]^k, \tag{1}$$

natomiast C_1^d z góry ogranicza C^d, tzn.

$$C^d(u_1, ..., u_k) \le C_1^d(u_1, ..., u_k), \text{ dla każdego } (u_1, ..., u_k) \in [0, 1]^k, \tag{2}$$

wówczas dystrybuanta sumy $Y = X_1 + ... + X_k$ ma ograniczenia postaci (por. np. [Cossette, Denuit, Marceau 2002])

$$F_{\min}^{C_0}(y) \le F_Y(y) \le F_{\max}^{C_1}(y), \text{ dla każdego } y \in R, \tag{3}$$

gdzie:

$$F_{\min}^{C_0}(y) = \sup_{(x_1,...,x_{k-1}) \in R^{k-1}} \left\{ C_0\left(F_1(x_1), ..., F_{k-1}(x_{k-1}), F_k(y - (x_1 + ... + x_{k-1}))\right) \right\} \tag{4}$$

$$F_{\max}^{C_1}(y) = \inf_{(x_1,...,x_{k-1}) \in R^{k-1}} \left\{ C_1^d\left(F_1(x_1), ..., F_{k-1}(x_{k-1}), F_k(y - (x_1 + ... + x_{k-1}))\right) \right\}. \tag{5}$$

Na podstawie (3) wartość zagrożona dla zagregowanych rodzajów ryzyka ma następujące ograniczenia:

$$\left(F_{\max}^{C_1}\right)^{-1}(\alpha) \le VaR_\alpha(Y) \le \left(F_{\min}^{C_0}\right)^{-1}(\alpha). \tag{6}$$

Zależnie od postaci funkcji połączenia C_0 i C_1 za pomocą wzorów (3) – (5) można wyznaczyć ograniczenia rozkładu zagregowanych rodzajów ryzyka dla różnych struktur zależności. Szczególnie $C_0 = C_W$ (gdzie C_W oznacza dolne ograniczenie Frécheta[1]) oraz $C_1^d = \tilde{C}_W^d := \min(1, \sum_{i=1}^k u_i)$ oznacza brak wiedzy o strukturze zależności. Natomiast agregowane rodzaje ryzyka $X_1, ..., X_k$ charakteryzują się dodatnio orthantową zależnością[2], gdy dolnym ograniczeniem jest niezależna funkcja połączenia C_Π, czyli $C_0(u_1, ..., u_k) = u_1 \cdot ... \cdot u_k$, a górnym $C_1^d(u_1, ..., u_k) = 1 - (1 - u_1) \cdot ... \cdot (1 - u_k)$.

Rozważania nieco się upraszczają podczas agregacji dwóch rodzajów ryzyka. Dla dwuwymiarowych funkcji połączenia warunek $C \ge C_0$ jest równoważny warunkowi $C^d \le C_0^d$, można więc przyjąć, że $C_1 = C_0$. Wówczas warunki (1) i (2) redukują się do konieczności istnienia funkcji połączenia C_0 takiej, że[3]:

---

[1] Dla $k > 3$ dolne ograniczenie Frécheta C_W nie jest funkcją połączenia. Mimo tego przy tak określonym dolnym i górnym ograniczeniu nierówności (8) nadal obowiązują, gdyż ich prawdziwość wykazuje się, wykorzystując tylko własność C_0 i C_1^d polegającą na tym, że są one rosnące ze względu na każdy argument.

[2] Intuicyjnie dodatnio orthantowa zależność oznacza, że jest bardziej prawdopodobne, iż ryzyka $X_1, ..., X_k$ przyjmują jednocześnie duże wartości, niż w przypadku gdyby były one niezależne (por. m.in. [Esary, Proschan, Walkup 1967; Joe 1997; *Actuarial Theory* ... 2005]).

[3] Spełnienie tego warunku oznacza, że zakładany rozkład w relacji porządku korelacyjnego następuje po rozkładzie opisywanym funkcją połączenia C_0, czyli dla wszystkich niemalejących funkcji g_1 i g_2 prawdziwa jest nierówność $\operatorname{cov}_C\left(g_1(X_1), g_2(X_2)\right) \ge \operatorname{cov}_{C_0}\left(g_1(X_1), g_2(X_2)\right)$, gdzie cov_C

$$C(u_1,u_2) \geq C_0(u_1,u_2)\text{, dla wszystkich } (u_1,u_2) \in [0,1]^2 . \tag{7}$$

Przy tak określonej strukturze zależności dystrybuanta sumy $Y = X_1 + X_2$ ma ograniczenia postaci:

$$F_{\min}^{C_0}(y) \leq F_Y(y) \leq F_{\max}^{C_0}(y)\text{, dla każdego } y \in R , \tag{8}$$

przy czym: $F_{\min}^{C_0}(y) = \sup_{x_1 \in R}\left\{C_0\left(F_1(x_1), F_2(y-x_1)\right)\right\}$,

$$F_{\max}^{C_0}(y) = \inf_{x_1 \in R}\left\{C_0^d\left(F_1(x_1), F_2(y-x_1)\right)\right\}$$

Jeżeli warunek (7) spełnia niezależna funkcja połączenia $C_0 = u_1 u_2$, to mamy do czynienia z agregacją dodatnio ćwiartkowo zależnych rodzajów ryzyka[4].

3. Zagregowane wymogi kapitałowe dla ryzyka ubezpieczeniowego dwóch zależnych grup ubezpieczeń

Ubezpieczyciel może szacować zagregowane wymogi kapitałowe dla ryzyka ubezpieczeniowego posiadanych grup ubezpieczeń, wykorzystując wartość zagrożoną (*Value-at-Risk – VaR*). W tym celu musi oszacować rozkład zmiennej losowej będącej ważoną sumą zmiennych opisujących współczynniki szkodowości z poszczególnych grup ubezpieczeń, czyli

$$LR = w_1 LR_1 + \ldots + w_k LR_k , \tag{9}$$

gdzie: LR – zagregowany współczynnik szkodowości,

$LR_i = \frac{IC_i}{EP_i}$ – współczynnik szkodowości dla *i*-tej grupy (IC_i oznacza odszkodowania należne[5] (*incurred claims*), natomiast EP_i składkę zarobioną[6] (*earned premiums*)),

$w_i = \frac{EP_i}{\sum_{i=1}^{k} EP_i}$ – waga *i*-tej grupy (udział składki zarobionej dla *i*-tej grupy w łącznej składce zarobionej).

(odp. cov_{C_0}) oznacza kowariancję w przypadku rozkładu modelowanego funkcją połączenia C (odp. C_0). Definicja i własności porządku korelacyjnego są przedstawione m.in. w: [*Actuarial Theory*... 2005, s. 287-295].

4 Dodatnio ćwiartkowa zależność rodzajów ryzyka X_1, X_2 oznacza, że jest bardziej prawdopodobne, że „wspólnie" przyjmują one większe lub mniejsze wartości, niż w sytuacji, gdyby były niezależne (por. m.in. [Lehmann 1966]).

5 Odszkodowania wypłacone łącznie ze zmianą stanu rezerw.

6 Składka przypisana w okresie sprawozdawczym pomniejszona o stan rezerwy składek na koniec okresu sprawozdawczego i powiększona o stan rezerwy składek na początek okresu sprawozdawczego.

W dalszej części oszacowano zagregowane wymogi kapitałowe przy założeniu różnych struktur zależności dla następujących dwóch grup ubezpieczeń:

*G*1: Komunikacyjne – odpowiedzialność cywilna (*Motor vehicle third party*).

*G*2: Od ognia i innych szkód rzeczowych (*Fire and other damage to property*).

W celu wyeliminowania wpływu struktury portfela na wymogi kapitałowe zakłada się takie same wagi dla rozważanych grup ubezpieczeń $w_1 = w_2 = 0,5.$ Należy zatem oszacować *VaR* dla zagregowanego współczynnika szkodowości postaci:

$$LR = 0,5LR_1 + 0,5LR_2. \tag{10}$$

Problem sprowadza się więc do wyznaczenia rozkładu zmiennej (10), przy założeniu różnych struktur zależności. W badaniu zastosowano opisaną wcześniej metodę wykorzystującą funkcje połączenia. Najpierw wyznaczono rozkłady LR_1 i LR_2, a następnie, zależnie od struktury zależności, wyznaczono rozkład zmiennej (10) lub jego ograniczenia, co umożliwiło wyznaczenie wartości zagrożonej. Rozkłady brzegowe LR_1 i LR_2 oszacowano na podstawie danych przedstawiających wypłacone odszkodowania i świadczenia oraz składkę zarobioną w państwach Unii Europejskiej[7] (z wyjątkiem Bułgarii i Rumunii) oraz w Norwegii i Islandii w latach 2003-2006. Rozważano trzy rodziny rozkładów: normalną, logarytmiczno-normalną i gamma. Parametry szacowano metodą największej wiarygodności. Ostatecznie, kierując się wartością funkcji wiarygodności i statystyki chi-kwadrat, w obydwu przypadkach dopasowano rozkład normalny: $LR_1 : N\left(0,773052; 0,166708\right)$, $LR_2 : N(0,482837; 0,155823)$.

W badaniach przyjęto następujące struktury zależności między zmiennymi losowymi LR_1 i LR_2:

Struktura A: Brak jakiejkolwiek wiedzy o zależności ($C_0 = C_1 = C_W$).

Struktura B: Zależność dodatnio ćwiartkowa między LR_1 i LR_2 ($C_0 = C_1 = C_\Pi$).

Struktura C: Zależność opisana funkcją połączenia *C*, która z dołu jest ograniczona funkcją połączenia Claytona z parametrem $\theta^{Cl} = 1,521,$ natomiast ograniczenie z góry jej dualnej C^d jest określone funkcją połączenia przeżycia Gumbela z parametrem $\theta^{Gu} = 0,568.$ (W obydwóch przypadkach parametry są tak dobrane, aby współczynnik τ-Kendalla między współczynnikami szkodowości był równy oszacowanej na podstawie danych wartości 0,432.)

Struktura D: Współmonotoniczne[8] współczynniki szkodowości.

---

[7] Źródłem danych były raporty *Financial Conditions and Financial Stability in the European Insurance and Occupational Pension Fund Sector*, 2005-2006, 2006-2007 opracowane przez CEIOPS (*Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisor*).

[8] Współmonotoniczność zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_k$ oznacza, że większym wartościom jednej z nich odpowiadają większe wartości wszystkich pozostałych. Jeśli wyłączy się związki o

Struktura E: Niezależne współczynniki szkodowości.
Struktura F: Struktura zależności opisana funkcją połączenia Gumbela:

$$C\left(u_1,u_2\right)=\exp\left[-\left(\left(-\ln u_1\right)^{\theta}+\left(-\ln u_1\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right],\ \theta>1. \tag{11}$$

Umożliwia ona uwzględnienie zależności w górnych ogonach rozkładów współczynników szkodowości. Dwuwymiarowy rozkład, otrzymany za pomocą tej funkcji połączenia i przy założeniu, że rozkłady brzegowe są normalne, oszacowano na podstawie danych empirycznych przedstawiających współczynniki szkodowości w poszczególnych krajach w latach 2003-2006. Zastosowano trzy metody estymacji bazujące na metodzie największej wiarygodności: IFM (*Inference functions for margins*, por. [Joe 1997]), FML (*Full maximum likelihood*, por. [Joe 1997]), CML (*Canonical maximum likelihood*, por. [Genest, Rivest 1993]). Ostatecznie, kierując się wartością funkcji wiarygodności, wybrano rozkład oszacowany metodą FML. Parametry jego rozkładów brzegowych są następujące: $LR_1 : N(\underset{(0{,}022907)}{0{,}778724};\ \underset{(0{,}016391)}{0{,}176257})$, $LR_2 : N(\underset{(0{,}020905)}{0{,}487310};\ \underset{(0{,}015192)}{0{,}161603})$, natomiast parametr funkcji połączenia Gumbela wynosi: $\hat{\theta}=\underset{(0{,}206660)}{1{,}674602}$.

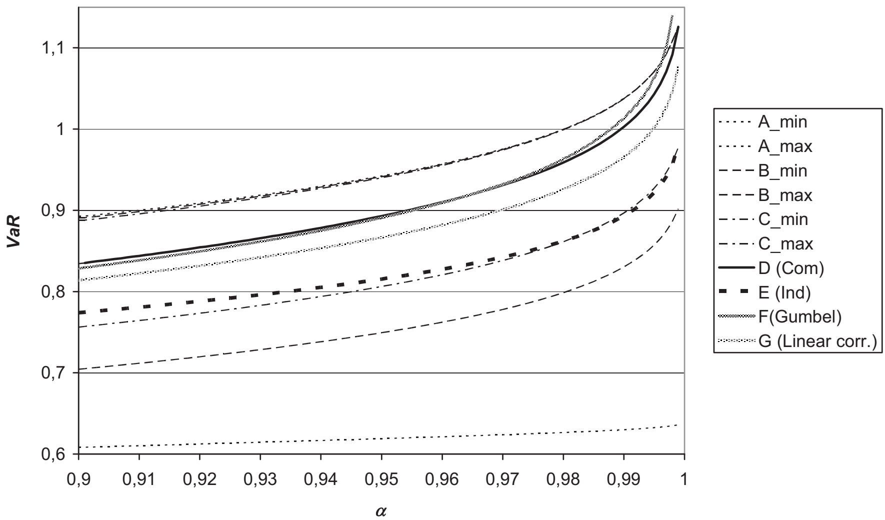
Struktura G: Struktura zależności opisywana jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym z rozkładami brzegowymi $LR_1 : N\left(0{,}773052;\ 0{,}166708\right)$, $LR_2 :$ $N(0{,}482837;\ 0{,}155823)$ i współczynnikiem korelacji liniowej $\hat{\rho}=$ 0,621736. Jest to metoda najczęściej stosowana w praktyce.

Wartość zagrożoną (*VaR*) oszacowaną dla $\alpha\in[0{,}900,\ 0{,}999]$ (zmieniającego się co 0,001) przy założeniu opisanych struktur zależności przedstawiono na rys. 1. W przypadku trzech pierwszych struktur zależności (A, B, C) dolne i górne ograniczenia wartości zagrożonej wyznaczono na podstawie (6), stosując metodę Williamsona-Downsa [Williamson, Downs 1990]. Dla struktury D można pokazać, że ([*The Concept of comonotonicity*... 2002]) $VaR_{\alpha}(LR)=VaR_{\alpha}(0{,}5LR_1)+VaR_{\alpha}(0{,}5LR_2)$. Z kolei w przypadku struktury F wartość zagrożoną wyznaczono metodą symulacyjną.

W tab. 1 przedstawiono wartości zagrożone (*VaR*) otrzymane przy założeniu rozważanych struktur zależności dla wybranych poziomów tolerancji. Wynika z niej, że np. w celu zapewnienia z prawdopodobieństwem 0,95 wypłaty odszkodowań z rozważanych dwóch klas ubezpieczeń (o udziale każdej z nich po 50% w składce zarobionej) należy zapewnić kapitał na poziomie co najmniej:

– od 61,90% do 94,24% składki zarobionej, gdy nic nie wiemy o strukturze zależności między współczynnikami szkodowości rozważanych klas ubezpieczeń,

niemalejącym charakterze funkcyjnym, współmonotoniczność jest najsilniejszym pojęciem dodatniej zależności (zob. np. [*The Concept of comonotonicity*... 2002]).



Rys. 1. *VaR* przy założeniu opisanych struktur zależności

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Wartość zagrożona w zależności od struktury zależności dla wybranych poziomów tolerancji α

Struktura zależności	$VaR_{0,90}(LR)$		$VaR_{0,95}(LR)$		$VaR_{0,99}(LR)$	
	min	*max*	*min*	*max*	*min*	*max*
A	0,6082	0,8929	0,6190	0,9424	0,6301	1,0377
B	0,7045	0,8909	0,7494	0,9415	0,8303	1,0376
C	0,7563	0,8879	0,8063	0,9401	0,8967	1,0373
D	0,8345		0,8930		1,0028	
E	0,7741		0,8155		0,8932	
F	0,8286		0,8910		1,0138	
G	0,8139		0,8667		0,9656	

Źródło: obliczenia własne.

- od 74,94% do 94,15% składki zarobionej, gdy wiemy, że współczynniki szkodowości charakteryzują się zależnością dodatnio ćwiartkową,
- od 80,63% do 94,01% składki zarobionej, gdy współczynniki charakteryzują się strukturą zależności D,
- 89,30% składki zarobionej, gdy współczynniki szkodowości są współmonotoniczne,
- 81,55% składki zarobionej, gdy współczynniki szkodowości są niezależne,

– 89,10% składki zarobionej, gdy strukturę zależności między współczynnikami szkodowości opisuje funkcja połączenie Gumbela,
– 86,67% składki zarobionej, gdy przyjmie się standardowo, że współczynniki szkodowości są opisywane dwuwymiarowym rozkładem normalnym.

Na podstawie uzyskanych wyników można uznać, że ustalenie właściwej struktury zależności jest bardzo ważne w modelowaniu zagregowanego współczynnika szkodowości. Pokazują one, jak struktura zależności wpływa na wartość zagrożoną, która jest jedną z najczęściej stosowanych w praktyce miar ryzyka. Uzyskane wyniki unaoczniają również fakt, którego intuicyjnie należało się spodziewać i który można ogólnie udowodnić (por. np. [Denuit, Genest, Marceau 1999]), że dodatkowa wiedza o strukturze zależności, jak np. stwierdzenie dodatniej zależności, „zawęża obszar", w którym leży właściwy rozkład zagregowanego ryzyka (co zawęża przedział możliwych wartości *VaR*).

4. Podsumowanie

Głównym czynnikiem wpływającym na wysokość wymogów kapitałowych ubezpieczyciela jest rozważane w pracy ryzyko ubezpieczeniowe. W nowych rozwiązaniach proponuje się, aby wymogi kapitałowe z tytułu tego ryzyka były wyznaczane na drodze agregacji wymogów dla poszczególnych grup ubezpieczeń. Jednak, jak wynika z przedstawionej analizy, przy takim podejściu oszacowanie wymogów kapitałowych na właściwym poziomie jest ściśle związane z rozpoznaniem i oszacowaniem struktury zależności, której podlegają agregowane współczynniki szkodowości. Wygodnym sposobem dającym szerokie możliwości w rozpoznawaniu i modelowaniu takich struktur zależności jest (omawiane w pracy) zastosowanie funkcji połączeń. Do głównych zalet zastosowania funkcji połączeń można zaliczyć m.in. możliwość uwzględnienia za ich pomocą szerokiej gamy różnych struktur zależności, wyznaczenia „dokładnego" rozkładu, modelowanie zależności w ogonach rozkładów oraz łatwy sposób symulacji. Jednak, jak z każdą metodą, z wykorzystaniem funkcji połączeń związane są także pewne wady. Do głównych można zaliczyć wymaganie dość dużej liczby danych empirycznych niezbędnych do oszacowania właściwej funkcji połączenia, jak również pewne trudności przy rozstrzyganiu, którą z funkcji połączeń należy wybrać do opisu rozkładu wielowymiarowego. Pomimo tych wad funkcje połączenia wydają się wygodnym narzędziem wprowadzania struktur zależności do modeli umożliwiających szacowanie wymogów kapitałowych z tytułu ryzyka ubezpieczeniowego.

Literatura

Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models, M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, John Wiley & Sons, Ltd. 2005.

Cossette H., Denuit M., Marceau E., *Distributional bounds for functions of dependent risks*, Schweizerische Aktuarvereinigung. Mitteilungen 2002, nr 1, s. 45-65.

Denuit M., Genest C., Marceau E., *Stochastic bounds on sums of dependent risks*, "Insurance: Mathematics & Economics" 1999, vol. 25, s. 85-104.

Esary J.D., Proschan F., Walkup D.W., *Association of Random Variables*, *with Applications*, "Annals of Mathematical Statistics" 1967, vol. 38, no. 5, s. 1466-1474.

Financial Conditions and Financial Stability in the European Insurance and Occupational Pension Fund Sector, 2005-2006, Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisor (CEIOPS), http://www.ceiops.eu (30.09.2008).

Financial Conditions and Financial Stability in the European Insurance and Occupational Pension Fund Sector, 2006-2007, Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisor (CEIOPS), http://www.ceiops.eu (30.09.2008).

Genest C., Rivest L.P., *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*, "Journal of the American Statistical Association" 1993, vol. 88, s. 1034-1043.

Joe H., *Multivariate models and dependence concepts*, Chapman-Hall 1997.

Lehmann E.L., *Some concepts of dependence*, "Annals of Mathematical Statistics" 1966, vol. 37, no. 5, s. 1137-1153.

The Concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory, J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke (ed.), "Insurance: Mathematics & Economics" 2002, vol. 31, no. 1, s. 3-33.

Williamson R.C., Downs T., *Probabilistic arithmetic I: Numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds*, "International Journal of Approximate Reasoning" 1990, vol. 4, s. 89-158.

MODELLING THE LOSS RATIO FOR DEPENDENT CLASSES OF INSURANCE USING COPULAS

Summary: The paper focuses on the dependence and specifically in what ways, using copula functions, we can include the information regarding dependence structure in the estimation of distribution of aggregate loss ratio, and how this information influences capital requirements for aggregate underwriting risk of several classes of non-life insurance. It presents a method for estimating upper and lower bounds for the distribution of the sum of random variables with partial knowledge about the dependence structure and the results of empirical research, which dealt with the amount of capital requirements for aggregate underwriting risk for two classes of insurance in depending on the assumed dependence structure between the loss ratios of those classes.