

Bartosz Lawędziak

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

OBLIGACJE DOŻYWALNOŚCIOWE JAKO FORMA ZABEZPIECZENIA HIPOTEKI ODWROTNEJ

Streszczenie: Hipoteka odwrócona to nieobecny na polskim rynku produkt finansowy, ale z powodzeniem wykorzystywany na rynku amerykańskim i europejskim dzięki korzyściom ekonomicznym. W związku z postępującą tendencją do wydłużania się życia produkt zyskuje na popularności wśród osób emerytowanych. Z punktu widzenia dostawcy instrumentu finansowego efekt ten wprowadza ryzyko związane z długowiecznością potencjalnych klientów. W niniejszym artykule zaproponowano wykorzystanie sekurytyzacji jako metodę zabezpieczenia przed ryzykiem ponoszonym przez kredytodawcę i podjęto próbę prognozy wyceny obligacji typu *survivor* będących elementem tego procesu.

Słowa kluczowe: hipoteka odwrótne, sekurytyzacja, obligacje.

1. Wstęp

W ostatnich latach obserwuje się systematyczny wzrost średniej długości życia oraz równoległe stopniowe obniżanie progu emerytalnego, które to zjawiska prowadzą do nadwężenia stabilności finansowej systemów ubezpieczeń społecznych i możliwości indywidualnych podmiotów do zapewnienia odpowiedniego zabezpieczenia na starość w formie emerytury. W artykule skupiono się na problemie związanym z żywotnością społeczeństw (ryzyku długowieczności) ze względu na coraz dłuższy okres emerytalny i przesunięciu struktury demograficznej w kierunku populacji zaawansowanej wiekowo. Pojawia się w związku z tym zapotrzebowanie na nowe produkty finansowe, które stanowią swoiste ubezpieczenie od ryzyka długowieczności.

Jednym z nich jest hipoteka odwrócona (*reverse mortgage*) umożliwiająca osobom na emeryturze przekształcenie części kapitału zamrożonego w nieruchomości w dochód ryczałtowy lub dożywotni, pozostawiając jednocześnie decyzję odnośnie do pozostania i zamieszkiwania w swoim domu aż do śmierci bądź też jego zbycia i zmiany miejsca zamieszkania. Kredyty udzielane na hipotekę odwróconą są oprocentowane, przy czym ich rozliczenia dokonuje się dopiero po wystąpieniu jednego z wymienionych warunków. W okresie, na jaki kredyt został udzielony, nie dokonuje się spłaty, a do spłaty zadłużenia nie można wykorzystać innego majątku niż dom – kredyt jest udzielany bez prawa regresu. Jeżeli w momencie rozliczenia kwota

kredytu wraz z oprocentowaniem przewyższa cenę sprzedaży nieruchomości, to kredytodawca, zazwyczaj bank lub towarzystwo ubezpieczeniowe, odzyskuje wyłącznie kwotę stanowiącą równowartość ceny sprzedaży. Stopa oprocentowania kredytu zawiera premię przeznaczoną na pokrycie takiego ryzyka.

2. Charakterystyka hipoteki odwrotnej z punktu widzenia jej dostawcy

Podmiot udzielający pożyczki w okresie obowiązywania umowy nalicza do kwoty zasadniczej oprocentowanie na podstawie aktualizowanej miesięcznie lub rocznie stopy procentowej. Saldo kredytowe narasta zazwyczaj w szybszym tempie niż rośnie wartość domu i z tego względu w pewnym momencie przewyższa tę wartość – gdy nastąpi to przed rozliczeniem kredytu, wówczas po stronie kredytodawcy zostanie odnotowana strata. Zjawisko to określa się mianem ryzyka krzyżowania (*crossover risk*) i jest ono głównym ryzykiem napotykanym przy zarządzaniu hipotekami odwróconymi. Ryzyko krzyżowe stanowi połączenie trzech domniemych obszarów, którymi są:

- Ryzyko zajmowania i ryzyko długowieczności. Ryzyko zajmowania jest związane ze zbyt długim zamieszkiwaniem przez kredytobiorcę, wskutek czego wartość kredytu dojdzie do punktu, w którym przewyższy wartość domu. Całkowity wskaźnik spłaty stanowi połączenie wskaźników śmiertelności i mobilności. Ze względu na radykalny spadek (poprawę) wskaźnika śmiertelności od lat 70. ryzyko długowieczności stało się kluczowym ryzykiem w hipotece odwróconej.
- Ryzyko oprocentowania i ryzyko cenowe. Ponieważ spłata kredytu podlega ograniczeniu, jakim jest cena domu, wysoka stopa oprocentowania i stagnacja na rynku nieruchomości mogą zaostrzyć ryzyko krzyżowe. Ryzyko oprocentowania nie może zostać zdywersyfikowane, natomiast ryzyko cenowe może zostać częściowo zdywersyfikowane poprzez duży portfel kredytów na różnych terenach.
- Ryzyko utrzymania i wydatków. Ryzyko utrzymania to forma zagrożenia moralnego, z którym mamy do czynienia, gdy kredytobiorca korzystający z hipoteki odwróconej nie utrzyma wartości domu, ponieważ zdaje sobie sprawę, że to kredytodawca ponosi ryzyko związane ze spadkiem wartości domu przy jego odsprzedaży.

W tradycyjnej metodzie rozwiązywania kwestii związanych z ryzykiem towarzyszającym hipotece odwróconej stosuje się ubezpieczenia. Reasekuracja stanowi przykład handlu ryzykiem ubezpieczeniowym, natomiast przedmiotem niniejszej pracy uczyniono sekurytyzację, która umożliwia inwestorom dojście do rynku ubezpieczeniowego oraz zdywersyfikowanie posiadanego portfela inwestycyjnego. W sekurytyzacji opartej na wskaźniku śmiertelności ubezpieczyciel jest chroniony przed ewentualnym ryzykiem z tytułu niekorzystnego poziomu śmiertelności (lub długowieczności) występującym w polisach ubezpieczeniowych na życie i w pro-

duktach dożywnych. Na przykład ubezpieczyciel może wyemitować obligacje oparte na ryzyku śmiertelności, zapewniające zabezpieczenie przed stratami z tytułu niesprzyjającej niedożywalności w przypadku ubezpieczenia na życie lub niesprzyjającej długowieczności w przypadku produktów dożywnych [Cummins 2004].

Obligacje dożywalnościowe można traktować jako obligacje obciążone ryzykiem niedożywalności, analogicznie jak produkty dożywnie, wypuszczone w celu sekurytyzacji komponentu reprezentującego ryzyko niedożywalności w produktach stanowiących ubezpieczenie na życie. W przypadku obligacji dożywalnościowych przyszłe płatności z tytułu kuponów obligacyjnych zależą od liczby osób w określonym wieku dożywalnościowym w danym przedziale populacji (kohorty). Ponieważ zabezpieczamy się przed ryzykiem związanym z przeżyciem większej liczby klientów niż pierwotnie oczekiwano, płatności z tytułu kuponów obligacyjnych będą oczywiście dotyczyły przypadków, gdy liczba takich klientów jest większa niż zakładano.

3. Struktura organizacji sekurytyzacji hipotek wstecznych

W punkcie tym zastosowano ogólną strukturę do przypadku ryczałtowej hipoteki odwróconej [Cox, Fairchild, Pedersen 2000]. W takiej sytuacji proces powinien obejmować co najmniej pięć składowych, którymi są:

- kredytobiorca (właściciel domu),
- inicjator kredytu (dostawca detaliczny),
- spółka celowa,
- kredytodawca (bank inwestycyjny),
- inwestorzy (rynki kapitałowe).

Transakcja zaczyna się u detalicznego dostawcy kredytu na bazie hipoteki odwróconej. Taki detaliczny dostawca reprezentuje biuro, które nawiązuje kontakt z potencjalnymi klientami kredytu z hipoteką odwróconą, i negocjuje warunki kredytowe. Po tym, jak dostawca detaliczny uruchomi kredyt, pozyskuje należną sumę ryczałtową od kredytodawców prowadzących hipoteki odwrócone, którą następnie przekazuje kredytobiorcy. W celu zabezpieczenia siebie samego przed ryzykiem niemożności całkowitego odzyskania pełnej kwoty kredytu kredytodawca zawiera umowę ubezpieczeniową z SPV (*Special Purpose Vehicle*). Na mocy umowy ubezpieczeniowej zostaje ustalony harmonogram stałych punktów kontrolnych (*trigger level*), na podstawie których, jeżeli kwota straty przekroczy pewną uprzednio określoną wartość kontrolną, SPV wypłaci kredytodawcy określoną sumę do ustalonej górnej granicy. W zamian SPV pobiera od kredytodawcy płacone z góry składki, następnie wypuszcza obligacje dożywalnościowe na rynek. W danym momencie obligacje zostają sprzedane po cenie niższej niż normalna cena rynkowa, ponieważ gdy strata kredytodawcy przekroczy wartość kontrolną, część lub całość płatności kuponowej należnej na rzecz posiadacza obligacji, może zostać wstrzymana i przekazana ubezpieczonemu – kredytodawcy.

W celu zobrazowania zależności krótko przedstawiona zostanie analiza przepływów środków pieniężnych dla każdego podmiotu sekurytyzacji:

- Dostawca detaliczny – kontroluje spłatę kredytu i podtrzymuje integralność przepływów gotówkowych i procesu płatności. W całym okresie od momentu uruchomienia kredytu dostawca detaliczny pobiera od kredytobiorców kwoty na rzecz spłaty kredytu, które następnie przekazuje kredytodawcy. Z perspektywy dostawcy detalicznego, wpływy pieniężne od kredytobiorców są dokładnie takie same jak odpływy pieniężne do kredytodawcy i z tego względu nie zachodzi żadne ryzyko straty.
- Kredytodawca – prognozuje liczbę osób uposażonych z tytułu dożycia i wysokość strat w całym okresie w drodze analizy dotychczasowego spadku wskaźnika śmiertelności, fluktuacji stopy procentowej oraz warunków na rynku nieruchomości poprzedzającej uruchomienie kredytu. W całym okresie od momentu, kiedy kredyt rozpoczyna bieg, wpływy pieniężne kredytodawcy obejmują kwoty z tytułu spłaty kredytu pochodzące od dostawcy detalicznego oraz odpływy pieniężne w postaci narosłego kosztu kapitału. Jeżeli suma netto tych dwóch elementów jest mniejsza niż przewidywana wartość kontrolna, to kredytodawca nie występuje do SPV o wypłatę świadczenia ubezpieczeniowego. W przeciwnym razie kredytodawca może uzyskać takie świadczenie ze strony SPV w celu pokrycia straty.
- SPV – stanowi bierny podmiot, którego zadaniem jest jedynie sekurytyzacja ryzyka śmiertelności i sprzedaż ubezpieczeń na rynku kapitałowym. W tym celu pobierane są składki od kredytodawcy i emitowane obligacje dożywalnościowe. Składka i kapitał ze sprzedaży obligacji zostają przeznaczone na inwestycje przy wolnej od ryzyka stopie oprocentowania. W całym okresie od momentu uruchomienia kredytu dochody z wolnych od ryzyka inwestycji stanowią jedyne wpływy pieniężne SPV. Odpływy pieniężne SPV obejmują wysoko priorytetowe roszczenia ze strony dostawcy detalicznego oraz płatności kuponowe na rzecz posiadaczy obligacji. Na koniec okresu ważności obligacji SPV dokonuje spłaty kapitału na rzecz inwestorów. Dla SPV przepływy pieniężne netto powinny być zawsze zerowe.
- Inwestorzy – zakupują obligacje po cenie niższej niż w przypadku zwykłych obligacji, jednakże ponoszą ryzyko straty pewnej liczby przyszłych płatności kuponowych. W całym okresie od momentu uruchomienia kredytu wpływy pieniężne posiadaczy obligacji stanowią losowe płatności kuponowe ze strony SPV. Na koniec okresu ważności inwestorzy odbierają pełny kapitał.

4. Prognozowanie wartości hipoteki odwrotnej

W dalszej części tekstu zostanie wprowadzana notacja, na podstawie której podjęta będzie próba wyceny hipoteki wstecznej przy założeniu wykorzystania pełnej wysokości pożyczki. Podmiot indywidualny zaciągający pożyczkę o wartości Q_0

jednostek pieniężnych przy wartości domu wycenionego na H_0 jednostek pieniężnych. Przy okresie czasu t wartość pożyczki wynosi Q_t , wartość nieruchomości – H_t , a koszt kapitału – M_t , wtedy wartość hipoteki można zdefiniować jako:

$$V_t = \min(Q_t, H_t),$$

a stratę pożyczkodawcy L_t jako:

$$L_t = M_t - V_t = M_t - \min(Q_t, H_t).$$

Dla narastającej wysokości pożyczki Q_t przy ryzyku wolnym stopy procentowej r_t z składką ubezpieczeniową λ , wartość domu H_t powiększa się o stawkę δ_t i koszt kapitału M_t przy stopie procentowej η , wtedy wysokość pożyczki może być opisana równaniem:

$$Q_t = Q_0 \exp\left(\int_0^t (r_s + \lambda) ds\right),$$

odpowiednio przy przebiegu ceny nieruchomości zgodnie ze wzorem

$$H_t = H_0 \exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right),$$

oraz cenie kapitału

$$M_t = Q_0 \exp\left(\int_0^t \eta_s ds\right).$$

Jeśli wysokość spłaty pożyczki V_t jest niższa od wartości nieruchomości i naliczonej pożyczki, to

$$V_t = \min\left[Q_0 \exp\left(\int_0^t (r_s + \lambda) ds\right), H_0 \exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right)\right],$$

strata pożyczkodawcy L_t w okresie t dana jest wzorem:

$$L_t = Q_0 \exp\left(\int_0^t \eta_s ds\right) - \min\left[Q_0 \exp\left(\int_0^t (r_s + \lambda) ds\right), H_0 \exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right)\right].$$

Przyjmując, że długość życia z hipoteki wstecznej jest zmienną losową T przy ustalonej pożyczce, stwierdza się, że strata L_T pożyczkodawcy wyrażona jest jako zmienna losowa:

$$L_T = Q_0 \exp\left(\int_0^T \eta_s ds\right) - \min\left[Q_0 \exp\left(\int_0^T (r_s + \lambda) ds\right), H_0 \exp\left(\int_0^T \delta_s ds\right)\right]. \quad (1)$$

Na podstawie aktuarialnej zasady równoważności można zapisać:

$$E(e^{-rT} L_T) = 0, \quad (2)$$

czyli obecna wartość całkowitego zysku równa jest całkowitej oczekiwanej stracie.

Zastępując równanie drugie trzecim, problem wyceny hipoteki zapisać można jako:

$$E\left[Q_0 \exp\left(\int_0^T \eta_s ds\right)\right] = E\left[\min\left[Q_0 \exp\left(\int_0^T (r_s + \lambda) ds\right), H_0 \exp\left(\int_0^T \delta_s ds\right)\right]\right]. \quad (3)$$

5. Przykładowa obligacja dożywalnościowa zbudowana w oparciu na hipotecę odwrotnej

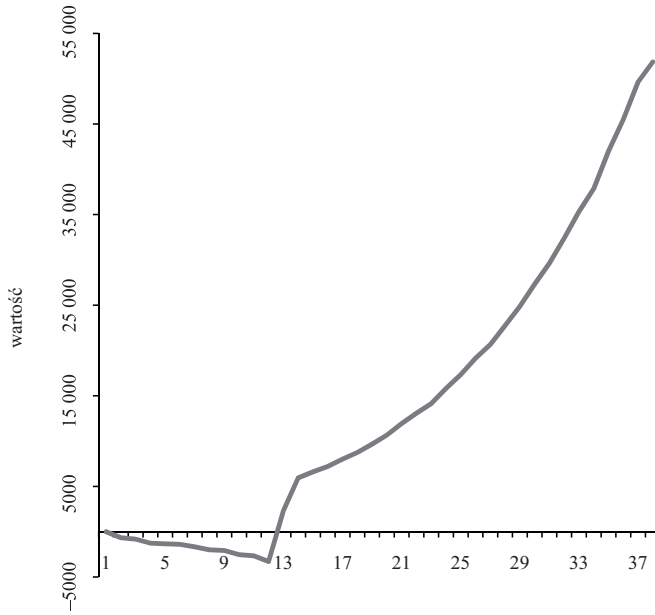
W celu zobrazowania efektu sekurytyzacji ryzyka długowieczności stopa oprocentowania i stopa wzrostu wartości domu zostały przyjęte za wartości stałe. Przyjmijmy, że kredytodawca posiada portfel l_0 kredytów. W punkcie początkowym wszyscy kredytobiorcy są w jednakowym wieku, każdy z nich zaciąga kredyt w wysokości ryczałtowej Q_0 pod zastaw domu wycenionego w danym momencie na kwotę H_0 . W celu zabezpieczenia ryzyka długowieczności kredytodawca wykupuje u SPV ubezpieczenie z ryczałtową składką równą P . Na mocy umowy w całym okresie po osiągnięciu punktu krzyżowego SPV wypłaci kredytodawcy świadczenie w wysokości $A_t(l_t - \hat{l}_t)$ do górnej granicy C , jeżeli liczba kredytów podożywalnościowych l_t przekroczy uprzednio ustaloną wartość kontrolną \hat{l}_t . W okresie t strata każdej pożyczki i jest dana jako $L_{i,t}$ oraz $L_{i,t} = L_t$ są stałe dla wszystkich i, t . Kwota A_t stanowi jednookresową różnicę dyskontową pomiędzy przewidywaną stratą poniesioną w przedziałach czasowych t oraz $t + 1$, stąd otrzymujemy

$$A_t = \frac{L_{t+1}}{1+r} - L_t.$$

Jeżeli przyjmiemy wolną od ryzyka stopę oprocentowania jako r , stopę wzrostu wartości domu za c , premię za ryzyko naliczone przez kredytodawcę za λ_1 , składkę należną ze strony kredytodawcy z tytułu finansowania kapitału za λ_2 , to

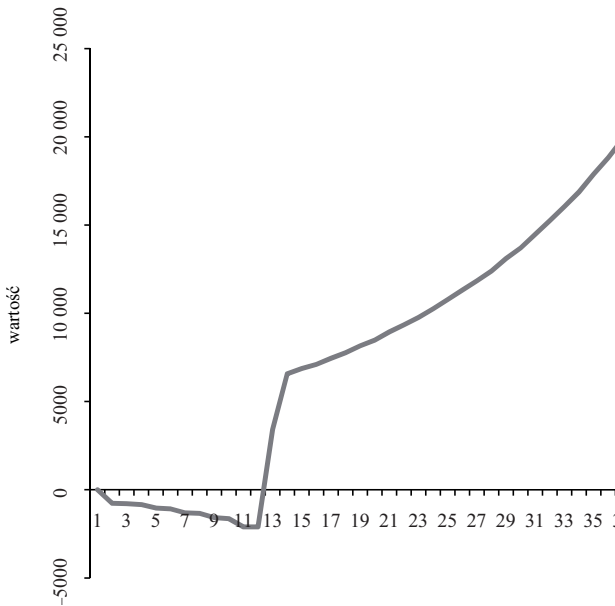
$$L_t = Q_0(1+r+\lambda_2)^t - \min\left[Q_0(1+r+\lambda_2)^t, H_0(1+c)^t\right].$$

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wartości L_t oraz A_t dla przyjętych wartości parametrów $r = 6,5\%$, $c = 3\%$, $\lambda_1 = 3\%$, $\lambda_2 = 1,5\%$, $Q_0 = 50\,000$, a $H_0 = 100\,000$.



Rys. 1. Pojedyncza strata L_t w poszczególnych latach

Źródło: na podstawie [Wang, Valdez, Piggott 2007].



Rys. 2. Wzrost A_t dla każdej ze strat w poszczególnych okresach

Źródło: na podstawie [Wang, Valdez, Piggott 2007].

Na rysunku 1 L_t stale rośnie w czasie t po osiągnięciu punktu krzyżowego, co oznacza, że po osiągnięciu punktu krzyżowania wysokość straty rośnie w czasie. Zgodnie z rys. 2 wartość A_t rośnie w czasie t po osiągnięciu punktu krzyżowego, co oznacza, że jednookresowa dyskontowana strata L_{t+1} jest większa niż strata L_t w okresie bieżącym. Na podstawie tych wniosków można stwierdzić, że po osiągnięciu punktu krzyżowego dla kredytobiorcy w większym stopniu korzystniejsze są straty w bieżącym momencie niż straty w okresach późniejszych. Faktyczna i przewidywana liczba zakończonych kredytów w każdym okresie t wynosi odpowiednio d_t oraz \hat{d}_t , a pierwszy okres, w którym kredytodawca wystąpi o wypłatę świadczenia ubezpieczeniowego, został oznaczony jako j , pozwala to na wyprowadzenie równania

$$\sum_{t=j}^T (l_t - \hat{l}_t) = \sum_{t=j}^T (d_t - \hat{d}_t). \quad (4)$$

Równanie (4) informuje, że mniejsza strata w bieżącym okresie oznacza większą stratę w przyszłości ze względu na większą liczbę kredytów podożywalnościowych, które w efekcie trzeba będzie spłacić w pewnym momencie w przyszłości. Im później dojdzie do spłaty takiej nadmiarowej liczby kredytów, tym większa wysokość strat w stosunku do sytuacji, gdyby straty zostały poniesione w bieżącym momencie. Różnicę pomiędzy dowolnymi dwiema stratami L_j oraz L_k dla ($j \leq k, k \leq T$) w dwóch różnych okresach po osiągnięciu punktu krzyżowego można przedstawić jako

$$L_k - L_j = \sum_{t=j}^k A_t s_{t-j}, \quad (5)$$

gdzie s_{t-j} stanowi aktuarialną notację dla przyrostu równego 1 od punktu czasowego t do j przy wolnej od ryzyka stopie równej r . Kredytodawca zabezpieczony na mocy umowy sekurytyzacyjnej może po osiągnięciu punktu krzyżowego zwrócić się do SPV o wypłatę świadczenia ubezpieczeniowego w celu utworzenia rezerwy na pokrycie nieprzewidzianej przyszłej straty, gdy $l_t > \hat{l}_t$. Świadczenie ubezpieczeniowe w wysokości B_t za każdy okres można obliczyć z równania (6). Po wypłacie świadczenia są inwestowane przy wolnej od ryzyka stopie oprocentowania r i gromadzone do momentu spłaty nadmiarowych kredytów podożywalnościowych, wobec czego otrzymujemy

$$B_t = \begin{cases} 0 & \text{if } l_t \leq \hat{l}_t \\ A_t(l_t - \hat{l}_t) & \text{if } \hat{l}_t < l_t < C/A_t \\ C & \text{if } \hat{l}_t > C/A_t \end{cases} \quad (6)$$

Zakładając, że pierwszy okres, w którym kredytodawca zwraca się o wypłatę świadczenia ubezpieczeniowego B_j , to okres j , rezerwa R_k , na którą składają się świadczenia B_t gromadzone przez kredytodawcę w okresie kredytowania aż do okresu k , wynosi

$$R_k = \sum_{t=j}^k B_t s_{t-j}.$$

Jeśli się wyznaczy faktyczną i przewidywaną łączną stratę w każdym okresie t jako \underline{L}_t oraz \hat{L}_t , to z definicji faktyczna łączna strata wynosi

$$\hat{L}_t = \hat{d}_t L_t,$$

natomiast przewidywana łączna strata to

$$\underline{L}_t = d_t L_t.$$

Gdy $\underline{L}_t > \hat{L}_t$, wówczas kredytodawca poniesie nieprzewidywaną stratę w wysokości

$$\underline{L}_t - \hat{L}_t = (d_t - \hat{d}_t) L_t.$$

Taka nieprzewidywana strata w przedziale czasowym od j do k może zostać częściowo lub w całości spłacona z rezerwy R_k . Należy zauważyć, że

$$R_k = \sum_{t=j}^k B_t s_{t-j} \leq \sum_{t=j}^k (\underline{L}_t - \hat{L}_t), \quad (7)$$

co oznacza, iż narosła nieprzewidywana strata stanowi górną granicę rezerwy R_k . To pozwala na wykluczenie problemu nadmiarowego ubezpieczenia. Narosła nieprzewidywana strata zostanie całkowicie spłacona wyłącznie, gdy

$$R_k = \sum_{t=j}^k (\underline{L}_t - \hat{L}_t) \quad \text{lub} \quad R_k = \sum_{t=j}^k A_t s_{t-j},$$

kiedy wszystkie świadczenia pobrane od ubezpieczyciela mieszczą się w przedziale ograniczonym od góry wartością C .

SPV emituje obligacje o nominalnej wartości F oraz dokonuje płatności kuponowych zależnych od poziomu dożywalności, w wysokości C_t według ceny $V \leq F$. Płatności kuponowe zostają odliczone zawsze, gdy $\hat{l}_t < l_t$, a płatności kuponowe netto na rzecz posiadaczy obligacji w każdym okresie wynoszą

$$C_t = \begin{cases} C & \text{if } l_t \leq \hat{l}_t \\ C - A_t(l_t - \hat{l}_t) & \text{if } \hat{l}_t < l_t < C/A_t \\ 0 & \text{if } \hat{l}_t > C/A_t \end{cases} \quad (8)$$

SPV musi w całym okresie dokonywać płatności kuponowych C_t , a w okresie końcowym musi również spłacić kapitał. W celu pokrycia odpływów pieniężnych SPV inwestuje składkę P oraz wartość obligacji dożywalnościowych V w wolne od ryzyka obligacje zwykle o wartości nominalnej F sprzedawane po cenie W . Jeżeli $v = \frac{1}{1+r}$ przyjmiemy za jednookresowy czynnik dyskontowy, to dla całego okresu, w którym zachodzi

$$P + V \geq W = Fv^T + \sum_{t=1}^T v^t C_t.$$

SPV może zebrać kwotę C i będzie w stanie spełnić warunki zarówno ubezpieczenia, jak i umowy obligacji. W celu niedopuszczenia do arbitrażu rynkowego przyjmuje się, że $P + V = W$.

6. Prognoza ceny obligacji dożywalnościowych

W celu wyceny obligacji wystarczy zdyskontować wszelkie przewidywane przyszłe przepływy pieniężne według odpowiedniej stopy dyskontowej. W ogólnym przypadku do wyceny obligacji służy następujące równanie:

$$V = Fv^T + \sum_{k=1}^T v^k E(C_t). \quad (9)$$

Zakładamy, że stopa oprocentowania oraz stopa wzrostu wartości domu są stałe, szereg \hat{l}_t zostaje ustalony jako wartości kontrolne, przy portfelu l_0 kredytów udzielonych kredytobiorcom w wieku x posiadających domy o identycznej wartości H_0 , posiadacze obligacji uzyskują w okresie t płatności kuponowe w wysokości

$$C_t = \begin{cases} C & \text{if } l_t \leq \hat{l}_t \\ C - A_t(l_t - \hat{l}_t) & \text{if } \hat{l}_t < l_t < C/A_t \\ 0 & \text{if } l_t > C/A_t \end{cases},$$

co jest równoważne

$$C_t = C - [A_t(l_t - \hat{l}_t), 0]_+ + E[A_t(l_t - \hat{l}_t) - C, 0]_+.$$

Uwzględniając wartości oczekiwane, otrzymuje się postać

$$E(C_t) = C - E\left[A_t(l_t - \hat{l}_t), 0\right]_+ + E\left[A_t(l_t - \hat{l}_t) - C, 0\right]_+. \quad (10)$$

Równanie służące do wyceny obligacji dożywalnościowych można uzyskać poprzez podstawienie równania (10) do równania (9):

$$V = Fv^T + \sum_{k=1}^T v^k \left\{ C - E\left[A_t(l_t - \hat{l}_t), 0\right]_+ + E\left[A_t(l_t - \hat{l}_t) - C, 0\right]_+ \right\}. \quad (11)$$

Jeżeli liczba podożywalnościowych l_t jest znaczna, wynosi ponad 30, to zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym (CLT) wartość l_t w przybliżeniu jest zgodna z rozkładem normalnym ze średnią $\mu_t = l_t(1 - q_{x+t}^*)$ oraz wariancją $\sigma_t^2 = l_t(1 - q_{x+t}^*)q_{x+t}^*$. W równaniu (11) możemy rozpisać oczekiwane warunki jako

$$E\left[A_t(l_t - \hat{l}_t), 0\right]_+ = A_t E\left[(l_t - \mu_t) - (\hat{l}_t - \mu_t), 0\right]_+ = A_t \sigma_t E\left[\frac{(l_t - \mu_t)}{\sigma_t} - \frac{(\hat{l}_t - \mu_t)}{\sigma_t}\right]_+,$$

gdzie $E(X - k)_+ = \psi(k)$, $k_t = \frac{(\hat{l}_t - \mu_t)}{\sigma_t}$, wtedy otrzymujemy $E\left[A_t(l_t - \hat{l}_t), 0\right]_+ = A_t \sigma_t \psi(k_t)$, analogicznie

$$E\left[A_t(l_t - \hat{l}_t) - C, 0\right]_+ = A_t \sigma_t \psi\left(k_t + \frac{C}{\sigma_t}\right).$$

W ten sposób równanie (10) można zapisać w formie skróconej:

$$E(C_t) = C - A_t \sigma_t \psi(k_t) + A_t \sigma_t \psi\left(k_t + \frac{C}{\sigma_t}\right). \quad (12)$$

Po podstawieniu równania (10) do równania (9) otrzymujemy przybliżone równanie na wycenę obligacji dożywalnościowych hipoteki odwrotnej:

$$E(C_t) = Fv^T + \sum_{k=1}^T v^k \left[C - A_t \sigma_t \psi(k_t) + A_t \sigma_t \psi\left(k_t + \frac{C}{\sigma_t}\right) \right]. \quad (13)$$

7. Wnioski

Hipoteka odwrócona to obiecujący produkt finansowy mogący dawać wiele korzyści ekonomicznych zarówno dla konsumentów, jak i dostawców. Jednakże ze względu na liczne rodzaje ryzyka towarzyszące hipotece odwróconej, szczególnie komponent reprezentujący ryzyko długowieczności, rozwój produktu został w pewnym stopniu zahamowany. W niniejszym artykule przedstawiono sekurytyzację jako metodę zabezpieczenia przed ryzykiem ponoszonym przez kredytodawcę, głównie przed komponentem związanym z ryzykiem długowieczności.

Myśląc perspektywicznie, można stwierdzić, że inwestowanie w zakup nieruchomości może być postrzegane przez zainteresowane grupy społeczne jako budowanie swoistego prywatnego funduszu emerytalnego w oparciu na *reverse mortgage*. Obserwując stały wzrost cen nieruchomości, należy się spodziewać, że środki ulokowane w domu mogą być z niego uwolnione i stanowić istotne uzupełnienie dochodów, zwłaszcza po przejściu na emeryturę. O ile w krajach wysoko rozwiniętych istnieją tego typu rozwiązania, o tyle w Polsce jednak na razie po pierwsze brak takiej opcji na rynku zarówno finansowym, jak i ubezpieczeniowym, po drugie należy uwzględnić mentalność społeczeństwa, w którym własne mieszkanie często jest prestiżem i dorobkiem całego życia przekazywanym z pokolenia na pokolenia.

Warto zwrócić uwagę, że szczyt procesu starzenia się polskiego społeczeństwa przypadnie na lata 2010- 2020, kiedy to w wiek emerytalny wejdą łącznie około 2 miliony Polaków. Grupa ta stanowić będzie potencjalnych zainteresowanych odwróconą hipoteką, tym bardziej że od strony techniczno-prawnej nie trzeba dokonywać większych zmian – wystarczą odpowiednie programy ubezpieczeniowe, które będą chronić pożyczkodawców przed skutkami spadku wartości nieruchomości poniżej kwoty kredytu i odsetek do spłaty, a wpis hipoteki w IV dziale księgi wieczystej umożliwiłby dostawcom pożyczki prawo do sprzedaży nieruchomości po spełnieniu jednego z wymienianych we wstępie warunków.

Rozpatrując produkt z punktu widzenia banku lub instytucji ubezpieczeniowej, stwierdza się, że mogą one korzystać z tradycyjnych form zabezpieczenia przed głównym ryzykiem związanym z hipoteką wsteczną (*crossover risk*) poprzez ubezpieczenie się. Jednak jak próbowano pokazać w artykule, alternatywną metodą, a zarazem nowym źródłem derywat na rynku finansowym, może być sekurytyzacja. Stosowana jest ona z powodzeniem w pokrewnych obszarach finansowych, ale jej początki są właśnie powiązane z rynkiem hipotecznym. Proces sekurytyzacji zwiększa pojemność rynku ubezpieczeniowego poprzez transfer ryzyka na rynek finansowy, ale także ogranicza ryzyko hazardu moralnego poprzez ustalenie odpowiednich triggerów.

Literatura

- Blake D., Burrows W., *Survivor bonds: helping to hedge mortality risk*, „Journal of Risk and Insurance” 2001, 68.
- Chinloy P.T., Megbolugbe I.F., *Reverse mortgages: contracting and crossover risk*, „Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association” 1994.
- Cox S.H., Fairchild J.R., Pedersen H.W., *Economic aspects of securitization of risk*, „Astin Bulletin” 2000, 30.
- Cummins J.D., *Securitization of life insurance assets and liabilities*, „The Wharton Financial” 2004.
- Frees E.W., Carriere J., Valdez E.A., *Annuity valuation with dependent mortality*, „Journal of Risk and Insurance” 1996, 63(2).
- Lin Y., Cox S.H., *Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks*, Georgia State University, Working Paper, 2005.
- Shiller R.J., Weiss A.N., *Moral Hazard in Home Equity Conversion*, NBER Working Paper no W6552, 1998.
- Szymanoski E.J., *Risk and the home equity conversion mortgage*, „Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association” 1994, 22.
- Wang L., Valdez E.A., Piggott J., *Securitization of Longevity Risk in Reverse Mortgages*, NBER Working Paper, 2007.

THE SURVIVOR BONDS AS A FORM OF THE HEDGING OF REVERSE MORTGAGE

Summary: The reverse mortgage is a financial product that is absent in the Polish market. However, it is successfully used in the American and European markets thanks to economic advantages. Taking into account increasing longevity, the product gains on popularity among retired persons. From the point of view of the financial instrument’s provider, such an effect introduces risk connected with potential customers’ longevity. The author proposes using securitization as a method of protection against risk borne by lenders and undertakes the prognosis test of survivor bonds pricing.