

na prawach rękopisu

INSTYTUT BUDOWNICTWA  
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ  
Raport serii PRE nr 2/2010

**DRGANIA BELEK ŻELBETOWYCH  
Z UWZGLĘDNIENIEM DYSKRETNEGO  
MODELU RYSY**

**Michał MUSIAŁ**

**Rozprawa doktorska**

Promotor:

dr hab. inż. Andrzej UBYSZ, prof. PWr

Słowa kluczowe:

badania doświadczalne, belka, drgania, rysy, żelbet

Wrocław, 2010



*Pracę dedykuję mojej żonie Monice  
oraz Rodzicom*



<b>1. Wprowadzenie.....</b>	<b>11</b>
<b>2. Stan wiedzy – przegląd literatury.....</b>	<b>15</b>
2.1. Wstęp.....	15
2.2. Dynamika belek żelbetowych.....	16
2.3. Dynamika niezarysowanych belek żelbetowych.....	28
2.4. Propozycje norm.....	31
2.5. Podsumowanie.....	33
<b>3. Tezy pracy.....</b>	<b>35</b>
<b>4. Badania laboratoryjne.....</b>	<b>37</b>
4.1. Cel, zakres i program badań.....	37
4.2. Analiza modalna – podstawy, zastosowanie w badaniach własnych.....	38
4.3. Stanowisko badawcze.....	42
4.4. Badania laboratoryjne – etap I.....	47
4.4.1. Elementy badawcze.....	47
4.4.2. Badania stali.....	51
4.4.3. Beton.....	55
4.4.4. Badania belek.....	63
4.5. Badania laboratoryjne – etap II.....	83
4.5.1. Elementy badawcze.....	83
4.5.2. Badania stali.....	84
4.5.3. Badania betonu.....	86
4.5.4. Badania belek.....	87
4.6. Analiza wyników i wnioski z badań laboratoryjnych.....	96
<b>5. Analizy numeryczne.....</b>	<b>109</b>
5.1. Wstęp.....	109
5.2. Metoda sztywnych elementów skończonych.....	110
5.2.1. Metoda sztywnych elementów skończonych dla belek jednorodnych.....	110
5.2.2. Metoda sztywnych elementów skończonych dla belek żelbetowych z rysami.....	114
5.2.3. Rotacyjna podatność wynikająca z rysy.....	116

5.2.4. Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach statycznych belek żelbetowych.....	118
5.2.5. Dynamiczna podatność rotacyjna wynikająca z rysy.....	120
5.3. Uproszczona metoda sztywności dynamicznej.....	125
5.4. Przykład obliczeniowy.....	128
<b>6. Wnioski końcowe.....</b>	<b>133</b>
<b>Literatura.....</b>	<b>137</b>
<b>Załącznik Z-1.</b> Wydruk z programu do obliczania ugięć.....	143
<b>Załącznik Z-2.</b> Wydruk z programu skalującego parametr $\alpha_d$ .....	149
<b>Załącznik Z-3.</b> Wydruk z programu skalującego parametry modelu $(\alpha, \beta)$ .....	157
<b>Załącznik Z-4.</b> Wydruk z przykładowego programu obliczeniowego.....	165

**Duże litery łacińskie:**

- $\mathbf{A}_k$  – macierz transformacji,
- $\mathbf{A}_{kU}$  – macierz transformacji sztywnego elementu skończonego,
- $\mathbf{B}$  – macierz bezwładności,
- $B$  – sztywność giętą,
- $B_I$  – sztywność giętą w fazie I,
- $B_{II}$  – sztywność giętą w fazie II,
- $\mathbf{C}$  – macierz tłumienia,
- $E_c$  – moduł Younga betonu,
- $E_{cm}$  – średni moduł Younga betonu,
- $E_D$  – dynamiczny moduł Younga betonu,
- $EI$  – sztywność giętą,
- $EI_d$  – dynamiczna sztywność giętą,
- $EI_n$  – sztywność wg normy [N3],
- $EI_s$  – statyczna sztywność giętą,
- $E_s$  – moduł Younga stali zbrojeniowej,
- $F_c$  – siła w betonie,
- $F_s$  – siła w stali,
- $I$  – moment bezwładności przekroju betonowego,
- $I_I$  – moment bezwładności w fazie I,
- $I_{II}$  – moment bezwładności w fazie II,
- $J_m$  – masowy moment bezwładności elementu,
- $\mathbf{K}$  – macierz sztywności,
- $K$  – sztywność giętą przekroju betonowego,
- $M$  – moment zginający,
- $M_{cr}$  – moment rysujący,
- $M_R$  – moment niszczący,
- $M_s$  – statyczny moment zginający,
- $\mathbf{P}$  – wektor obciążenia,
- $P$  – siła skupiona,
- $P_0$  – amplituda siły wymuszającej.

**Małe litery łacińskie:**

- $a$  – ugięcie,
- $b$  – szerokość przekroju,
- $b_{eff}$  – szerokość półki,
- $d$  – wysokość użyteczna przekroju,
- $d_{\varphi}$  – podatność rotacyjna wynikająca z odkształcalności giętej elementu,
- $d_{cr}$  – podatność rotacyjna wynikająca z rysy,
- $d_{\varphi}^{cr}$  – podatność rotacyjna w miejscu pojawienia się rysy,
- $f$  – częstotliwość własna,
- $f_{c,cyl}$  – wytrzymałość walcowa betonu na ściskanie,
- $f_{cd}$  – wytrzymałość obliczeniowa betonu na ściskanie,
- $f_{ck,cube}$  – charakterystyczna wytrzymałość kostkowa betonu na ściskanie,
- $f_{cm,cube}$  – średnia wytrzymałość kostkowa betonu na ściskanie,
- $f_{ctm}$  – średnia wytrzymałość na rozciąganie przez rozłupywanie,
- $f_t$  – wytrzymałość na rozciąganie stali zbrojeniowej,
- $f_y$  – granica plastyczności stali zbrojeniowej,
- $f_{yd}$  – obliczeniowa granica plastyczności stali zbrojeniowej,
- $g$  – przyspieszenie ziemskie,
- $h$  – wysokość przekroju,
- $h_f$  – wysokość półki,
- $k_{\varphi}$  – sztywność rotacyjna więzi,
- $k_{\Delta}$  – sztywność translacyjna więzi,
- $k_{\varphi}^{cr}$  – sztywność rotacyjna w miejscu pojawienia się rysy,
- $l$  – długość belki,
- $l_e$  – długość elementu skończonego,
- $l_{eff}$  – rozpiętość belki,
- $m$  – masa rozłożona na pręcie, masa tarczy,
- $n_{cr}$  – liczba rys,
- $n_{el}$  – liczba elementów skończonych,
- $n_q$  – liczba współrzędnych uogólnionych,
- $p$  – częstość kątowa wymuszenia,
- $\mathbf{q}$  – wektor współrzędnych uogólnionych,



- $q$  – obciążenie rozłożone,
- $q_i$  –  $i$ -ta współrzędna uogólniona (wychylenie, kąt obrotu),
- $\mathbf{r}$  – wektor dyslokacji względnych,
- $r_{\Delta}$  – wzajemne przemieszczenie sąsiadujących elementów,
- $r_{\varphi}$  – wzajemny obrót sąsiadujących elementów,
- $s_{rm}$  – średni rozstaw rys,
- $t$  – czas,
- $w_k$  – rozwartość rysy,
- $x$  – położenie punktu na długości pręta,
- $x_c$  – położenie środka ciężkości przekroju,
- $x_I$  – wysokość strefy ściskanej w fazie I,
- $x_{II}$  – wysokość strefy ściskanej w fazie II.

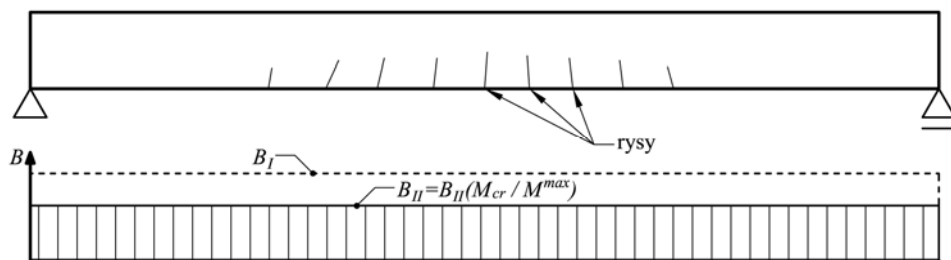
**Małe litery greckie:**

- $\alpha$  – liczba tłumienia, parametr modelu,
- $\alpha_B$  – parametr do obliczania sztywności dynamicznej belki,
- $\alpha_d$  – współczynnik przejścia ze statycznej na dynamiczną podatność rysy,
- $\beta$  – parametr modelu,
- $\beta_1$  – współczynnik wg normy [N2],
- $\beta_2$  – współczynnik wg normy [N2],
- $\beta_B$  – parametr do obliczania sztywności dynamicznej belki,
- $\delta$  – logarytmiczny dekrement tłumienia,
- $\varepsilon$  – odkształcenie,
- $\kappa$  – parametr modelu tłumienia,
- $\mu$  – parametr modelu tłumienia,
- $\rho$  – gęstość masy, stopień zbrojenia rozciąganego,
- $\sigma_c$  – naprężenie w betonie,
- $\sigma_s$  – naprężenie w zbrojeniu w przekroju przez rysę,
- $\sigma_{sm}$  – średnie naprężenie w zbrojeniu między rysami,
- $\varphi$  – kąt rozwarcia rysy,
- $\psi_z$  – współczynnik,
- $\omega$  – częstość własna.



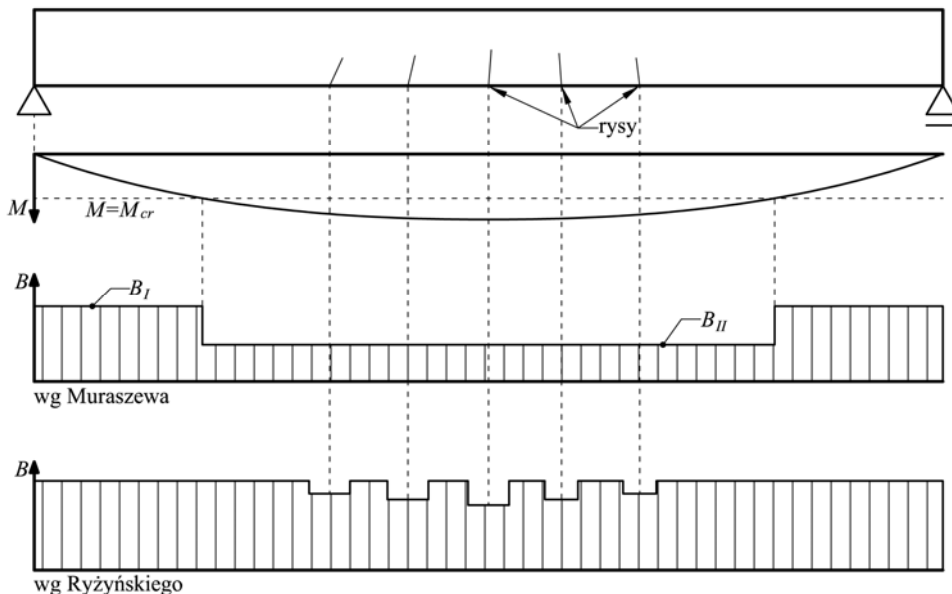
## 1. Wprowadzenie

Znamienną cechą zginanych, rozciąganych i ściskanych mimośrodowo elementów żelbetowych jest możliwość występowania rys w strefie rozciąganej. Rysy te mają wpływ na sztywność elementów konstrukcyjnych. Powstało wiele teorii do obliczania deformacji i redystrybucji sił wewnętrznych w fazach przed i po zarysowaniu. W różny sposób starają się one opisywać rozkład sztywności na długości elementu. Najprostsze z nich, stosowane do praktycznych zadań inżynierskich, posługują się globalnym opisem sztywności całego elementu (m. in. normy [N3, N6]) – jak na rysunku poniżej.



Rys. 1.1 – Sztywność elementu wg [N3, N6]

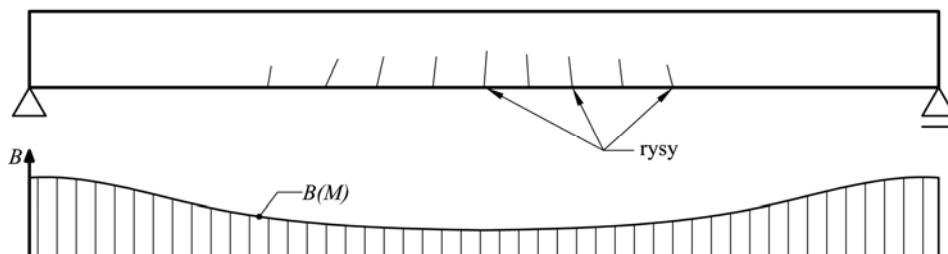
Niektórzy badacze zaproponowali podejście podobne [42, 50], bo bazujące na stałej sztywności, ale tylko na wybranych odcinkach (rys. 1.2).



Rys. 1.2 – Sztywność elementu wg [42, 50]

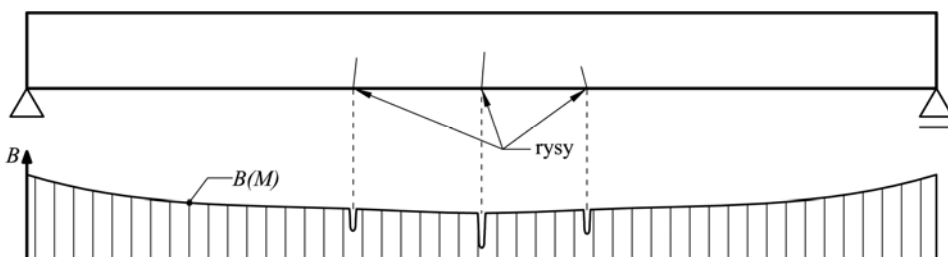
Inni autorzy (m. in. D. E. Branson [4], W. Kuczyński [29]) opisują sztywność elementu funkcją, zmieniającą się po długości elementu. W tym przypadku sztywność elementu zależy

m. in. od stopnia przeciężenia elementu i jest inna dla każdego przekroju. Lokalny wpływ zarysowania zostaje rozmyty na całą długość belki. Poglądowy rozkład sztywności po długości elementu, oparty na wspomnianych teoriach pokazano na rysunku 1.3.



Rys. 1.3 – Sztywność elementu wg [4, 29]

Badania nad sztywnością elementów żelbetowych prowadził również M. Szechiński [24, 52, 53]. Rozkład sztywności po długości elementu według tej teorii można zilustrować rysunkiem 1.4.

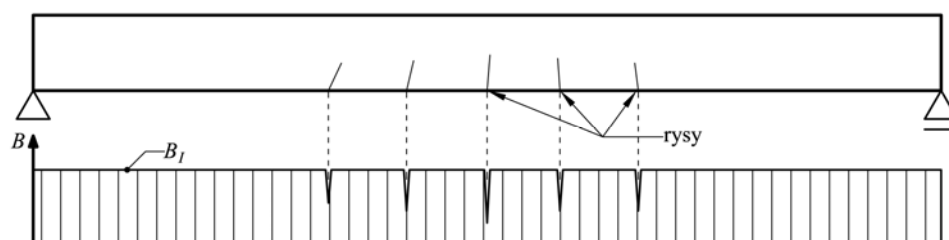


Rys. 1.4 – Sztywność elementu wg [24]

M. Szechiński proponował opisać sztywność elementu żelbetowego sumą dwóch funkcji. Pierwsza z nich dotyczy fazy I i występuje ona przed i po pojawieniu się rys. Druga funkcja pojawia się w momencie zarysowania i opisuje falę w otoczeniu przekroju zarysowanego.

Oryginalne podejście w swoich pracach [2, 3] zaprezentował A. Borcz. Efekty związane z zarysowaniem proponował uwzględnić w sposób dyskretny. Na odcinkach między rysami przyjmował stałą sztywność, jak dla fazy pierwszej. Rysy wprowadzane były jako dyslokacje kątowe (zależne od wartości momentu zginającego) do równania różniczkowego belki zginanej jako szczególny rodzaj obciążenia zewnętrznego, co pozwalało zachować niezmienną postać rozwiązania ogólnego belki przed i po zarysowaniu. Ideę rozkładu sztywności elementu według Borcza można zilustrować jak na rysunku 1.5. Teorię tę rozwijano i uogólniano na inne żelbetowe elementy konstrukcyjne (m.in. słupy, płyty i tarcze) w pracach [26, 33, 37, 55, 56], także z wykorzystaniem popularnej dawniej metody macierzy przeniesienia [49]. Ponadto podjęto próbę opisu zagadnień dynamiki konstrukcji

żelbetowych według niniejszej teorii [32], co szerzej opisano w dalszej części pracy.



Rys. 1.5 – Sztywność elementu wg [2, 3]

Każda z opisanych teorii powiązana jest ze sposobem rozwiązania zagadnienia zginania belki żelbetowej z rysami. I tak np. przyjęcie stałej sztywności dla całego elementu umożliwia wykorzystanie rozwiązania ścisłego dla belki pryzmatycznej, teoria bazująca na sztywności stałej odcinkami może być wykorzystana w rozwiązaniu metodą belek wtórnych, element o zmiennej sztywności można rozwiązać metodą aproksymacji lokalnej (MES), rozwiązanie belki z dyskretnym modelem rysy Autor powiązał ze zmodyfikowanym równaniem różniczkowym pręta zginanego.

Różnorodność teorii do obliczania ugięć i redystrybucji sił wewnętrznych w belkach żelbetowych wskazuje na atrakcyjność tematu i zachęca do szczegółowego przebadania tychże zjawisk również pod kątem dynamiki. Jeżeli przeciążanie elementu ma wpływ na jego sztywność, a co za tym idzie także na ugięcia i redystrybucję sił wewnętrznych to należy przypuszczać, że wpływa także na podstawowe parametry dynamiczne (częstotliwości własne oraz tłumienie).

Niniejsza praca dotyczy, wspomnianych wyżej, zagadnień dynamicznych i ma charakter doświadczalno – teoretyczny. Przeprowadzono własne eksperymenty z wykorzystaniem nowoczesnego narzędzia diagnostycznego – analizy modalnej. Zaproponowano własną metodę obliczeń dynamicznych opartą na dyskretnym modelu rysy. Analizy teoretyczne przeprowadzono przy pewnych założeniach. Główne z nich to takie, że rozważa się określony stan konstrukcji o znanym położeniu rys. Obciążenie działające na konstrukcję może zmieniać ten stan. Analizując poszczególne stany można wnioskować o zachodzących procesach dynamicznych.

Zawartość merytoryczna pracy może być wykorzystana do uściślenia metod obliczeniowych zarysowanych belek żelbetowych w dynamice konstrukcji. Może znaleźć zastosowanie w obliczaniu konstrukcji wsporczych pod maszyny oraz innych, obciążanych dynamicznie. Analizy numeryczne zilustrowano stosunkowo prostym przykładem

obliczeniowym. Zdaniem autora można jednak uogólnić proponowaną metodę na przypadki bardziej złożone.

Praca nie obejmuje zagadnień dynamiki takich jak: propagacja fali w elemencie, wpływ drgań pochodzących od podłoża (sejsmicznych) lub wybuchu oraz analizy procesów zmęzeniowych, zachodzących w drgających belkach żelbetowych.

Badania doświadczalne, zrelacjonowane w niniejszej pracy, zostały sfinansowane głównie z wewnętrznego grantu JM Rektora Politechniki Wrocławskiej. Autor pragnie wyrazić swą wdzięczność Panu Arturowi Dziechcińskiemu za bezpłatne przekazanie części elementów do badań. Operacyjne analizy modalne zostały przeprowadzone z wykorzystaniem aparatury Zakładu Dynamiki Budowli Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej. Autor dziękuje prof. Zbigniewowi Wójcickiemu oraz dr. inż. Jackowi Groselowi za cenne uwagi oraz znaczną pomoc w realizacji eksperymentu i interpretacji wyników.

## 2. Stan wiedzy – przegląd literatury

### 2.1. Wstęp

Przeprowadzone studia literaturowe wykazały, że powstało już wiele prac dotyczących dynamiki belek żelbetowych. Badacze zajmowali się głównie elementami pracującymi w fazie II. Można jednak natrafić na opracowania, dotyczące drgań belek niezarysowanych. Większość przedmiotowych pozycji literatury dotyczy zeszłego stulecia. Zdaniem autora wynika to z dużej popularności prac o charakterze badań podstawowych w tamtym czasie. Na częściowe zaniechanie tego tematu w ostatnich latach mógł przyczynić się bardzo dynamiczny rozwój gotowych systemów obliczeniowych opartych na metodzie sprężystych elementów skończonych.

W dalszej części rozdziału przedstawiono wyróżniające się opracowania krajowe i zagraniczne, w których podjęto próby przebadania i opisanie zjawisk związanych z dynamiką belek żelbetowych. Autorzy zdecydowanej większości przytoczonych prac starają się sprowadzić stronę teoretyczną zagadnienia dynamiki belek zarysowanych do belek jednorodnych. Podejście to umożliwia wykorzystanie zamkniętych rozwiązań dynamiki konstrukcji. Cały problem badawczy sprowadza się wtedy do określenia zastępczej sztywności dynamicznej belki. Jak wynika ze studiów literaturowych nie ma jednoznacznych zależności pozwalających odnieść sztywność dynamiczną do sztywności statycznej, wykorzystywanej np. przy obliczaniu ugięć. Niektóre eksperymenty [61] wykazały, że sztywność dynamiczna jest taka sama jak sztywność efektywna lub mniejsza od niej. Inne zaś wyniki badań [22], że jest od niej większa.

Niektóre z prac przytoczonych poniżej dotyczą belek niezarysowanych. Badania wykazują, że zróżnicowanie sztywności dynamicznej i statycznej następuje już w fazie pierwszej. Najpopularniejsze podejście wiąże cały problem z dynamicznym modułem Younga betonu, który jest inny niż ten rozumiany klasycznie. Co ciekawe, badania [20, 35] wykazały, że jest on różny w belkach o zróżnicowanym stopniu zbrojenia, mimo tego, że były one wykonane z tego samego zarobu mieszanki betonowej. Niepokój może budzić powiązanie różnic w sztywnościach elementu (związanych przecież z ilością i rodzajem zbrojenia) z modułem Younga betonu. Podejście to jest jednak dość powszechne i prezentacja wyników w takiej formie jest intuicyjna i łatwa w interpretacji.

## 2.2. Dynamika belek żelbetowych

Jednym z badaczy pracujących nad zagadnieniami dynamiki konstrukcji żelbetowych był G. B. Szmakow [54]. Na podstawie badań doświadczalnych opracował on zależność na sztywność dynamiczną belki w fazie I:

$$EI_d = \frac{M_{cr}(h-x_I)}{\gamma \cdot i_p}, \quad (2.1)$$

gdzie:  $M_{cr}$  – moment rysujący,

$h$  – wysokość przekroju,

$x_I$  – wysokość strefy ściskanej w fazie I,

$\gamma$  – współczynnik przejścia od momentu sprężystego do momentu sprężysto-plastycznego, obliczany na podstawie ówczesnej normy radzieckiej, będący funkcją stopnia zbrojenia i wymiarów przekroju,

$i_p$  – maksymalne odkształcenie betonu przy rozciąganiu.

Następnie zaproponował relację między sztywnością w fazie I ( $EI_d$ ), a sztywnością belki zarysowanej ( $B$ ):

$$\frac{B}{EI_d} = k, \quad (2.2)$$

przy czym:

$$k = \frac{\mu \cdot n}{a + c \cdot \mu \cdot n \cdot (1 + \mu \cdot n) - n_1 \frac{M_{cr}}{M}}, \quad (2.3)$$

gdzie:  $\mu$  – stopień zbrojenia,

$n$  – stosunek modułów Younga stali i betonu,

$a, c, n_1$  – współczynniki doświadczalne,

$M$  – moment zginający.

Autor podaje też zależność na obliczanie ugięć statycznych elementu na podstawie jego częstotliwości własnej, nie wprowadza zatem rozgraniczenia między sztywnością statyczną, a dynamiczną. Jak wykazują prace zaprezentowane w dalszej części rozdziału może to prowadzić do błędów.



Probleмами dynamiki konstrukcji zajmował się w swoich pracach W. Wittig [58]. Zaproponował własną metodę obliczania częstotliwości własnych, która sprowadza się do obliczania zastępczej sztywności dynamicznej na podstawie ugięć statycznych oraz znajomości formy własnej, odpowiadającej obliczanej częstotliwości. W ogólnym przypadku metoda pozwala np. na obliczenie częstotliwości drgań belki ciągłej na podstawie jej ugięć, przez sprowadzenie jej schematu do belki jednoprzęsłowej o znanym rozwiązaniu zamkniętym. Metodę można też zaadaptować do obliczania belek żelbetowych. Punktem wyjścia w obliczeniach jest zależność:

$$EI_d = EI \frac{\delta}{\delta_r}, \quad (2.4)$$

gdzie:  $EI_d$  – sztywność dynamiczna pręta,

$EI$  – sztywność w układzie pomocniczym,

$\delta$  – obliczone ugięcie w układzie pomocniczym,

$\delta_r$  – ugięcie w rozpatrywanym układzie (pomierzone lub obliczone).

Do obliczenia ugięć należy przyjąć takie obciążenie, aby oś odkształcona belki była zgodna z kształtem formy własnej. Częstość własną oblicza się ze wzoru analitycznego (2.5), adekwatnego schematowi pomocniczemu, ale podstawia się do niego sztywność układu rzeczywistego.

$$\omega_i = \gamma_i \sqrt{\frac{EI_d}{ml^4}}, \quad (2.5)$$

gdzie:  $\gamma_i$  – współczynnik, odpowiadający  $i$ -tej formie własnej, zależny od schematu statycznego układu pomocniczego,

$EI_d$  – sztywność dynamiczna pręta,

$m$  – masa pręta,

$l$  – rozpiętość belki.

Istotnym ograniczeniem metody tej jest warunek stałej sztywności na całej długości belki. Można ją zatem zaliczyć do grupy metod bazujących na sztywności zastępczej.

Róża Łuczak-Romanów [32] opracowała oryginalny model teoretyczny drgającej belki żelbetowej z rysami. Punktem wyjścia w rozważaniach było różniczkowe równanie równowagi dynamicznej pręta przyrzątkowego z pominięciem tłumienia:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t), \quad (2.6)$$

gdzie:  $EI$  – sztywność giętna pręta [ $\text{kMm}^2$ ],  
 $w(x,t)$  – ugięcie [m],  
 $m$  – masa pręta [ $\text{kg/m}$ ],  
 $q(x,t)$  – obciążenie [ $\text{kN/m}$ ]  
 $x$  – współrzędna przekroju pręta [m],  
 $t$  – czas [s].

Po podstawieniu parametru pomocniczego  $\lambda$ , wprowadzeniu bezwymiarowego przemieszczenia  $v$ , bezwymiarowej zmiennej  $\xi$  i uwzględnieniu członu związanego z zarysowaniem, wprowadzającym rysy dyskretnie równanie (2.6) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^4 v(\xi,t)}{\partial \xi^4} + \lambda^4 \frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n r_{1i} \frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\zeta_i^-} \delta_{,\zeta\zeta}(\xi - \zeta_i) + q(\xi,t), \quad (2.7)$$

przy czym:

$$\lambda^4 = \frac{ml^4}{EI}, \quad (2.8)$$

$$v = \frac{w}{l}, \quad (2.9)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad (2.10)$$

gdzie:  $l$  – rozpiętość obliczeniowa belki,

$\zeta_i$  – punkt wystąpienia  $i$ -tej rysy,

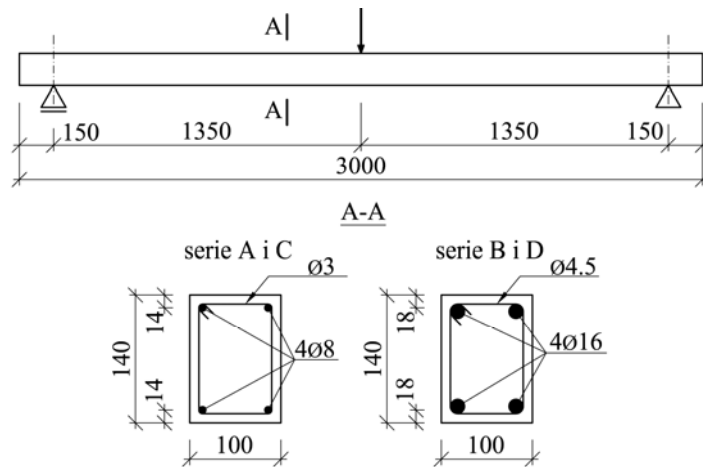
$r_{1i} \frac{\partial^2 v(\zeta_i^-, t)}{\partial \xi^2}$  – wartość kąta rozwarcia rysy zależnego od odkształceń sprężystych,

$\delta_{,\zeta\zeta}(\xi - \zeta_i)$  – druga pochodna dystrybucji  $\delta$  – Diraca.

Równanie (2.7) pozwala także rozwiązać zagadnienie własne. Należy wtedy pominąć człon odpowiadający obciążeniu zewnętrznemu  $q$ . Rozwiązanie równania przeprowadzane jest metodą operatorową dla zadanych warunków brzegowych. Wymaga zastosowania zaawansowanego aparatu matematycznego i nie daje się ona łatwo uogólnić na dowolne przypadki. Jednakże jest jedyną, napotkaną przez autora metodą, która nie opiera się na

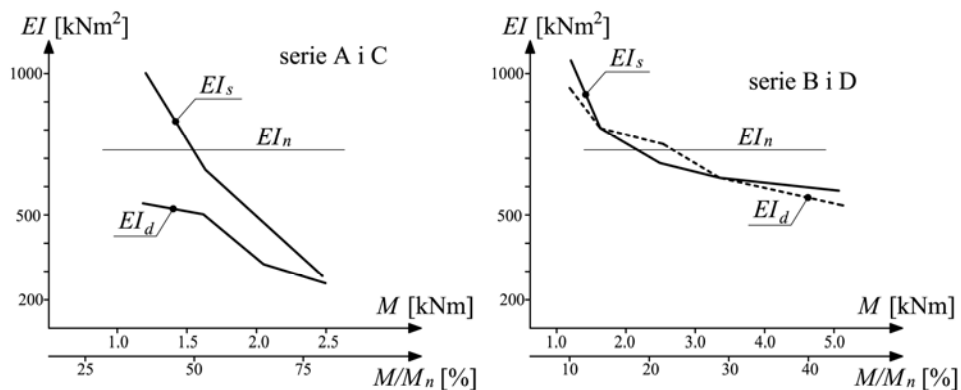
zastępczej sztywności dynamicznej i wprowadza efekty związane z zarysowaniem w sposób dyskretny.

Zagadnieniami dynamiki konstrukcji żelbetowych w ujęciu teoretyczno – doświadczalnym zajmował się R. Wlazło. Przeprowadzone badania dotyczyły głównie tłumienia w zarysowanych belkach żelbetowych [60, 61]. Pośrednio, bo badając tłumienie na podstawie zanikania drgań, określono wpływ historii obciążenia na częstotliwość drgań własnych [61]. Badaniu poddane były cztery serie belek (rys. 2.1) z betonu B30 oraz stali klasy A-I.



Rys. 2.1 – Elementy badawcze w [61]

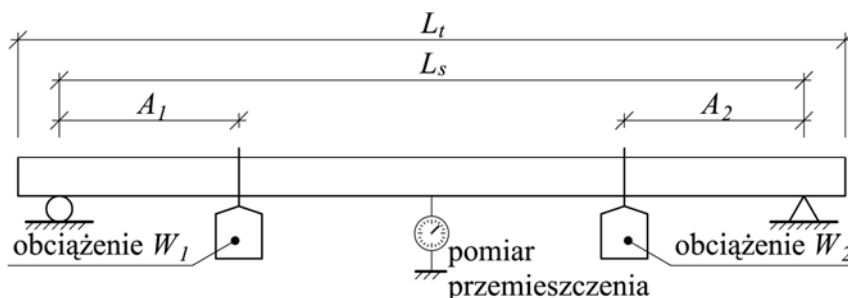
Elementy badawcze były obciążane w środku rozpiętości siłą skupioną. W każdym kroku obciążenia rejestrowane było ugięcie statyczne. Nagłe zdjęcie obciążenia wprowadzało belkę w drgania swobodne. Zarejestrowany wibrogram pozwolił określić pierwszą częstotliwość i obliczyć na jej podstawie sztywność dynamiczną elementu  $EI_d$ . Na podstawie ugięcia statycznego obliczano sztywność statyczną  $EI_s$ . Wyniki doświadczeń zaprezentowano w postaci wykresu na rysunku 2.2.



Rys. 2.2 – Wyniki badań doświadczalnych [61]

Badania wykazały spadek częstotliwości własnych w miarę wzrostu przeciążenia. Autor powiązał to z globalną sztywnością dynamiczną elementu belkowego. Na wykresach naniesiono też sztywność  $EI_n$ , jaką zaleca przyjmować do obliczeń dynamicznych norma [N2]. Jest ona określana dla całego przekroju betonowego (bez uwzględnienia zbrojenia) jako stała w całym przedziale pracy belki. Jak widać może to prowadzić do błędów. Wykazano, że sztywność dynamiczna jest mniejsza od statycznej dla elementów słabo zbrojonych, natomiast jest równa sztywności statycznej w elementach silnie zbrojonych. Pojawia się jednak pytanie o efekt skali w przypadku elementów serii B i D. Zastosowanie tak dużych średnic ( $\phi 16$ ) w elementach o przekroju poprzecznym 100x140 mm uniemożliwia raczej wyciągnięcie ogólnych wniosków, dotyczących zjawiska.

Podobne badania prowadził K.C. Johns [22]. Eksperymentom poddano cztery belki żelbetowe o wymiarach 203x356x6096 mm z betonu o średniej wytrzymałości na ściskanie równej 34 MPa. Zbrojenie jakie zastosowano w belkach to po dwa pręty #6<sup>1</sup> (pole przekroju zbrojenia 5,68 cm<sup>2</sup>) ze stali o granicy plastyczności 414 MPa. W belkach nie zastosowano strzemion i zbrojenia w strefie ściskanej. Belki obciążane były symetrycznie dwoma masami skupionymi jak na rysunku 2.3.



Rys. 2.3 – Stanowisko badawcze [22]

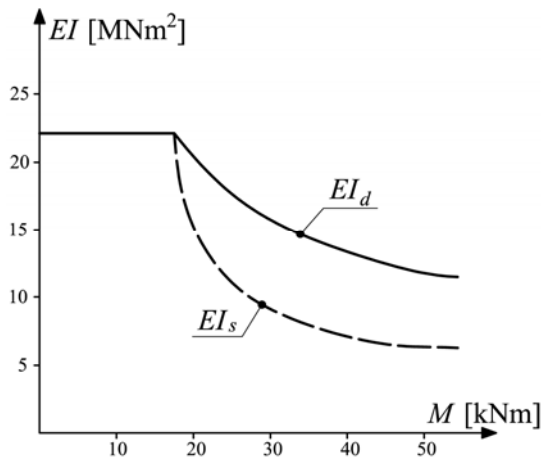
Po każdym przyroście obciążenia rejestrowano ugięcie statyczne oraz częstotliwość własną na podstawie drgań swobodnych o amplitudzie do 3 mm. Drgania swobodne wzbudzane były krótkotrwałym impulsem. Należy zaznaczyć, że belka drgała razem z obciążeniem, na które składał się ciężar własny oraz dwie masy skupione. Sztywność statyczną obliczano z ugięć, sztywność dynamiczną natomiast, na podstawie częstotliwości własnej. Ponieważ na belce spoczywały dwie masy skupione wyprowadzono wzór (2.11) na częstotliwość własną odpowiedniego układu. Przy wyprowadzeniu zależności, posłużono się metodą aproksymacji globalnej.

<sup>1</sup> Oznaczenie średnicy według systemu amerykańskiego. Jest to pręt o średnicy nominalnej 19,05 mm.

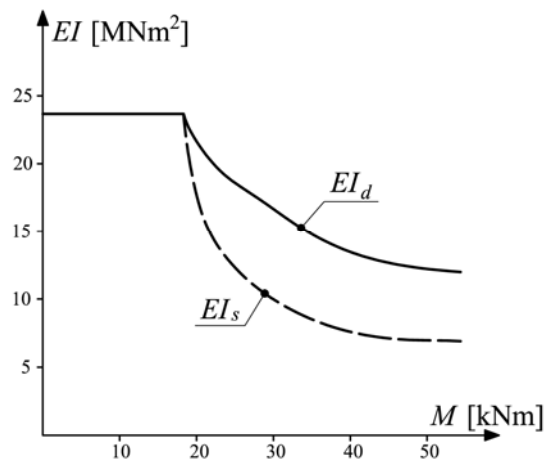
$$\omega^2 = \frac{\pi^4 g EI_d}{pL_t + 2 \sum W_i \sin^2(\pi A_i / L_s)}, \quad (2.11)$$

gdzie:  $\omega$  – częstość kołowa [rad/s],  
 $g$  – przyspieszenie ziemskie [m/s<sup>2</sup>],  
 $p$  – ciężar własny belki [N/m],  
 $W_i$  – ciężar skupiony [N].

Wyniki doświadczenia pokazano poniżej (rys. 2.4).



Rys. 2.4a – Sztywność elementu w funkcji momentu zginającego, belka nr 3 [22]



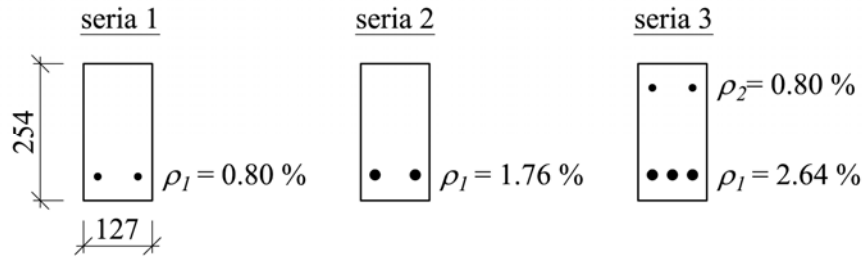
Rys. 2.4b – Sztywność elementu w funkcji momentu zginającego, belka nr 4 [22]

Autorzy badań zaproponowali wstępnie zależność na sztywność dynamiczną debiutującego elementu (2.12). Jak sami zaznaczyli, ich badania wymagały kontynuacji, a wyników nie można bezkrytycznie uogólnić. Ponadto prześledzenie zależności (2.11) wykazało niespójność w jednostkach.

$$EI_d = \left( \frac{M_{cr}}{M} \right) EI_I + \left( 1 - \frac{M_{cr}}{M} \right) EI_{II}, \quad (2.12)$$

gdzie:  $M_{cr}$  – moment rysujący,  
 $M$  – moment zginający,  
 $EI_I$  – sztywność giętna w fazie I,  
 $EI_{II}$  – sztywność giętna w fazie II.

Kontynuacją prac K. C. Johnsa [22] zajął się S. Jerath [21]. Badania przeprowadzono na bardzo podobnym stanowisku badawczym (rys 2.3). Zróznicowano natomiast typy belek. Przebadano trzy serie elementów o przekrojach jak na rysunku 2.5 i rozpiętości 3353 mm.



Rys. 2.5 – Elementy badawcze – przekroje poprzeczne [21]

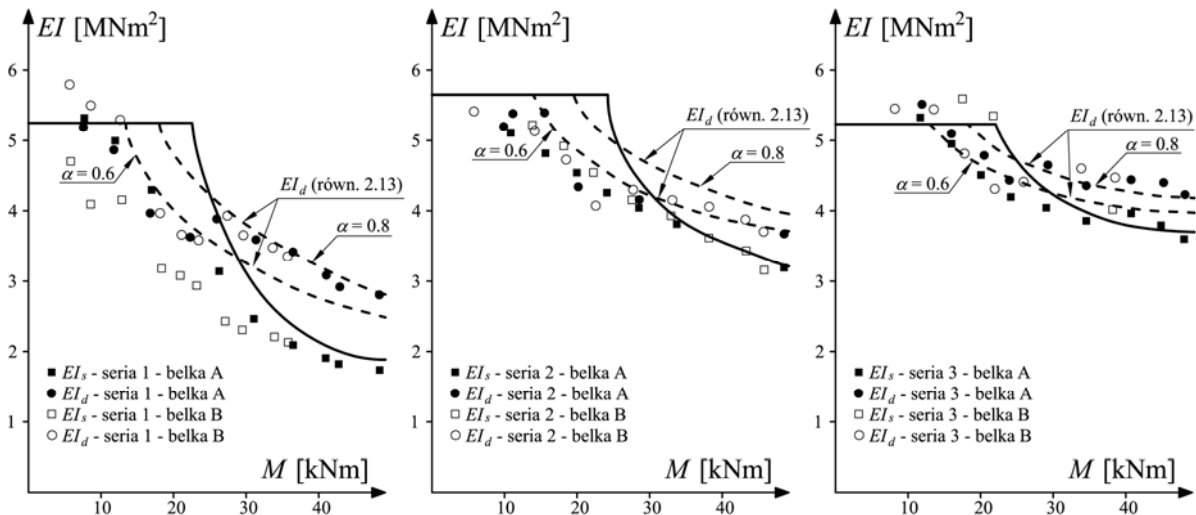
Wytrzymałość betonu, z którego wykonano elementy wynosiła odpowiednio dla serii 41,37, 48,26 oraz 42,10 MPa. Granica plastyczność stali zbrojeniowej natomiast 276 MPa.

Przeprowadzone badania pozwoliły zmodyfikować zależność (2.12) zaproponowaną przez K. C. Johnsa do postaci:

$$EI_d = E_c \left[ \left( \frac{\alpha M_{cr}}{M} \right) I_I + \left( 1 - \frac{\alpha M_{cr}}{M} \right) I_{II} \right], \quad (2.13)$$

gdzie:  $\alpha$  – stała doświadczalna, zawierająca się w granicach 0,6 – 0,8.

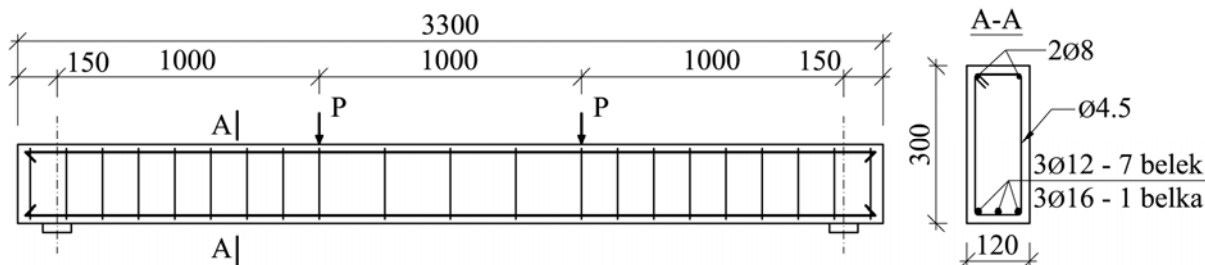
Wyniki eksperymentu pokazano na wykresach poniżej (rys. 2.6).



Rys. 2.6 – Wyniki eksperymentu [21]

W porównaniu do badań K. C. Johnsa [22] eksperyment wzbogacono o zróżnicowanie stopnia zbrojenia elementów. Wprowadzono też modyfikację we wzorze na sztywność dynamiczną elementu (współczynnik  $\alpha$ ). Wykazano na drodze doświadczalnej, że im większy stopień zbrojenia tym mniejszy spadek sztywności przy przeciążaniu elementu. Zastanawiający jest jednak fakt, że elementy serii 3, zbrojne najsilniej miały sztywność wyjściową zbliżoną do elementów zbrojonych najsłabiej (seria 1).

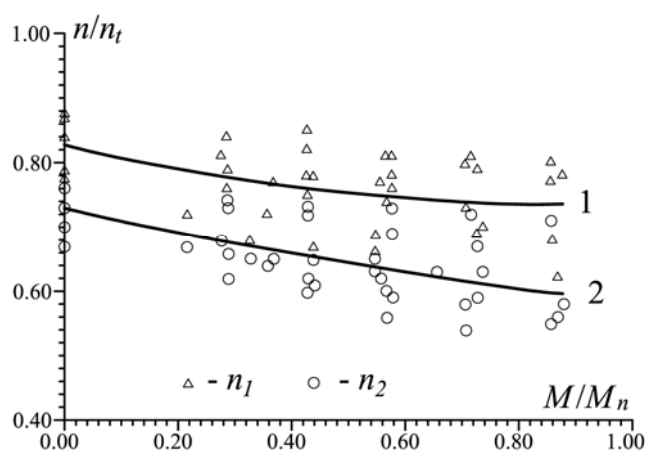
Wpływem historii obciążenia elementu na jego parametry dynamiczne zajmował się także S. Goszczyński z zespołem [17]. W badaniach, oprócz częstotliwości własnych, rejestrowano także tłumienie. W eksperymencie przebadano osiem żelbetowych elementów belkowych jak na rysunku 2.7.



Rys. 2.7 – Elementy badawcze w [17]

Średnia wytrzymałość betonu na ściskanie wynosiła od 20,5 – 32,66 MPa (belki wykonywane były w kilku cyklach betonowania). Do zbrojenia wykorzystano stal o różnych średnich granicach plastyczności (323,38 MPa – pręty  $\phi 16$ , 415,57 oraz 285 MPa – pręty  $\phi 12$ ). Belki obciążane były cyklicznie dwoma siłami skupionymi. Pomiar drgań wykonywany był przed obciążeniem oraz po każdym odciążeniu do zera. Drgania wzbudzano krótkotrwałym impulsem przyłożonym w środku rozpiętości. Zarejestrowany wibrogram pozwalał określić częstotliwość drgań swobodnych. Dodatkowo przeprowadzono pomiar krzywizny belki.

Wyniki badań zaprezentowano poniżej, w formie zbiorczego wykresu dla wszystkich belek.



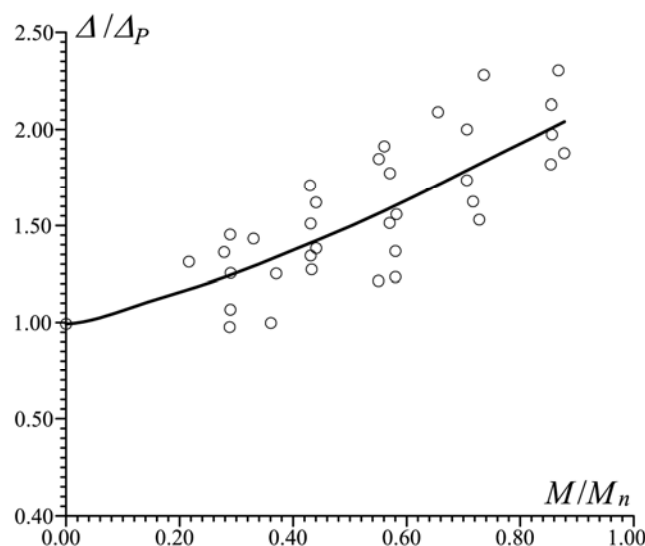
Rys. 2.8 – Znormalizowane częstotliwości własne w funkcji zaawansowania obciążenia [17]

Belki miały różne sztywności, zatem dla celów porównawczych sprowadzono częstotliwości pomierzone ( $n_1$ ) do częstotliwości początkowej ( $n_t$ ), obliczonej dla sztywności

w fazie I (na podstawie geometrii przekroju i właściwości materiałów). Oprócz wyników doświadczalnych pokazano też wyniki teoretyczne ( $n_2$ ), uzyskane z całkowania równania ruchu dla zmiennej po długości sztywności doświadczalnej. Sztywność doświadczalną obliczono na podstawie pomierzonej krzywizny. Na osi poziomej pokazano stopień zaawansowania obciążenia (stosunek momentu zginającego do momentu niszczącego). Wyniki aproksymowano krzywymi (1, 2).

Na wykresie można zaobserwować spadek częstotliwości własnych w miarę wzrostu obciążenia. Widoczne są znaczne rozbieżności między krzywą doświadczalną (1), a krzywą teoretyczną (2). Według Autorów wynika to z przyjęcia do obliczeń uśrednionej sztywności powrotnej z całego zakresu odciążenia. Stosowniejsze byłoby natomiast przyjęcie sztywności stycznej w punkcie  $M = 0$ . Częstotliwości  $n_1$  i  $n_2$  są mniejsze od częstotliwości  $n_t$ , obliczonych przy założeniu pracy w fazie I. Może to wynikać z układu samonaprzeżeń w konstrukcji, powstałych przed obciążeniem, wywołanych głównie skurczem oraz obciążeniami transportowymi.

Oprócz częstotliwości własnych Autorzy zbadali także tłumienie. Wyniki pomiarów i obliczeń pokazano na rysunku 2.9. Do opisu zjawiska posłużono się logarytmicznym dekrementem tłumienia  $\Delta$ . Jego wartość, podobnie jak w przypadku częstotliwości własnych, znormalizowano do wartości początkowej  $\Delta_P$  dla belki nieobciążonej.



Rys. 2.9 – Znormalizowany logarytmiczny dekrement tłumienia w funkcji zaawansowania obciążenia [17]

Zaobserwowano znaczny wzrost logarytmicznego dekrementu tłumienia w miarę zwiększania się obciążenia, aż do 2,5 razy większego od początkowego w końcowej fazie obciążenia.

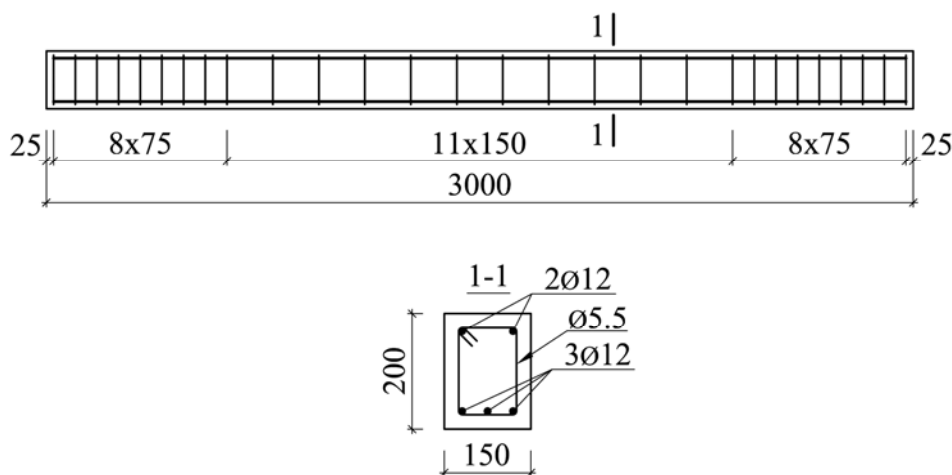


Szerzej zjawiskiem tłumienia w zarysowanych belkach żelbetowych zajmował się R. Wlazło [60]. Badano tłumienie dwoma metodami:

- metodą statycznej pętli histerezy, wykreślonej w cyklu obciążeniem znakovziennym,
- metodą zanikających drgań swobodnych.

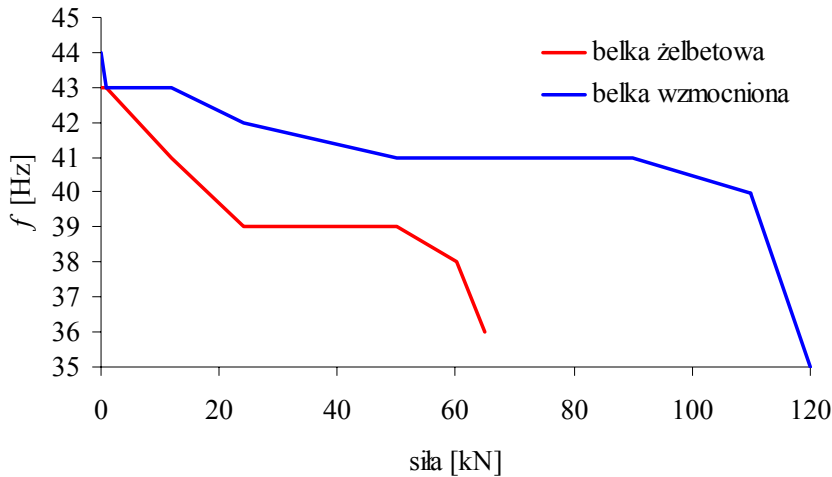
Obie metody dały jednakowe przebiegi i wartości liczbowe tłumienia jedynie w obszarze powstawania i rozwoju rys. Logarytmiczny dekrement tłumienia w metodzie statycznej pętli histerezy spada po osiągnięciu pewnego krytycznego poziomu. Natomiast w przypadku metody zanikających drgań rośnie i w końcowym etapie obciążenia stabilizuje się. Szczegółowy opis zjawiska tłumienia w zarysowanych belkach żelbetowych nie jest bezpośrednio przedmiotem niniejszej pracy, dlatego też przywołanie pozycji literaturowej [60] ma charakter jedynie informacyjny.

W grupie prac dotyczących dynamiki konstrukcji żelbetowych znajdują się też prace o charakterze diagnostycznym [5]. Autorzy wysuwają słuszną tezę, że na podstawie analiz dynamicznych można ocenić stan techniczny konstrukcji. Jego pogorszenie (degradacja sztywności) znajduje odzwierciedlenie w parametrach dynamicznych. Narzędzie analizy modalnej do określenia tych parametrów jest chętnie wykorzystywane za sprawą nieniszczącego charakteru. Autorzy przeprowadzili badania na serii 15 belek jak na rysunku 2.10, trzy z nich dodatkowo wzmocniono taśmami z włókna węglowego (CFRP).



Rys. 2.10 – Elementy badawcze w [5]

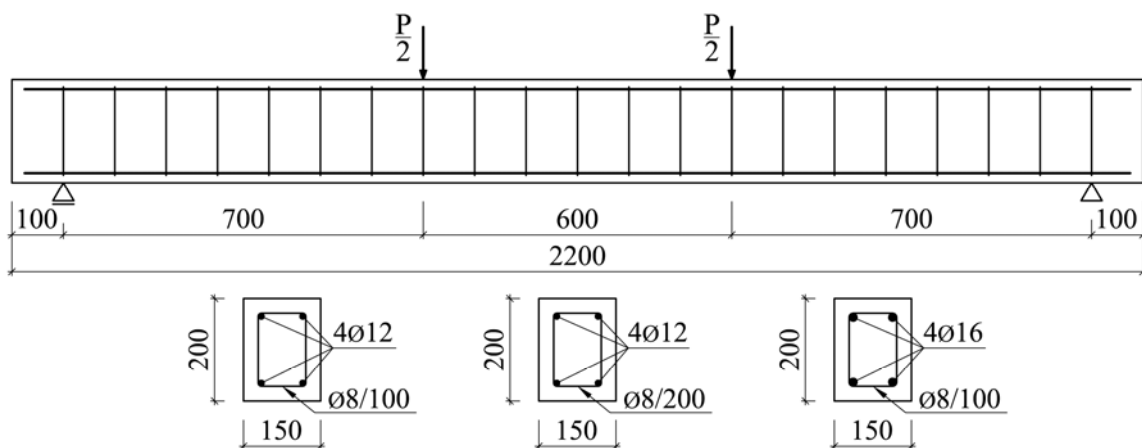
Elementy wykonane były z betonu C16/20. Zbrojenie główne stanowiły pręty ze stali A-III, strzemiona wykonano ze stali A-0. Belkę obciążano symetrycznie dwiema siłami skupionymi, z określonym krokiem. Po zrealizowaniu każdego kroku obciążenia i odciążenia wykonywano analizę modalną. Przykładowe pomierzone pierwsze częstotliwości własne pokazano na wykresie (rys. 2.11).



Rys. 2.11 – Zmiana pierwszej częstotliwości własnej w zależności od wartości realizowanego obciążenia [5]

Wyniki badań nie różnią się jakościowo od przytoczonych poprzednio eksperymentów. Są jednak bogatsze o wyższe częstotliwości. Określenie ich umożliwiła analiza modalna. Na rysunku 2.11 zamieszczono też wyniki dla belki wzmocnionej materiałami CFRP. Za ich sprawą sztywność wzmocnionej belki ulega degradacji wolniej niż sztywność belki żelbetowej, co znajduje odzwierciedlenie w wyższych częstotliwościach dla tego samego kroku obciążenia.

W literaturze [14] natrafiono na badania elementów żelbetowych wzmocnionych materiałami CFRP o zróżnicowanej intensywności. Eksperymenty wykonano na ośmiu elementach belkowych jak na rysunku 2.12. Średnia wytrzymałość betonu na ściskanie wynosiła 15,43 MPa.



Rys. 2.12 – Elementy badawcze w [14]

Obciążenie statyczne realizowano dwoma siłami skupionymi (fot. 2.1), po każdym odciążeniu belkę podnoszono (fot. 2.2), celem przeprowadzenia analizy modalnej. Podniesienie służyło odizolowaniu się od warunków podparcia.



Fot. 2.1 – Stanowisko do obciążenia statycznego [14]



Fot. 2.2 – Belka podwieszona [14]

Autorzy obserwowali zmianę pięciu pierwszych częstotliwości własnych w zależności od stopnia zaawansowania obciążenia. Rezultaty potwierdzają jakościowo wyniki dotychczasowych eksperymentów. Głównym celem badań była ocena wpływu zewnętrznego zbrojenia CFRP na częstotliwości własne. Elementy miały zróżnicowaną intensywność zbrojenia kompozytowego. Wzmacniano je jedną lub dwiema warstwami taśm węglowych. Przebadano także dwie belki bez początkowego wzmocnienia. Po trzecim kroku obciążenia doklejono do nich taśmy kompozytowe. Spowodowało to, że nie można było wyciągnąć z badań wniosków dotyczących belek żelbetowych bez wzmocnienia w całym zakresie ich pracy.

Analiza modalna, poza częstotliwościami, pozwoliła także zarejestrować formy własne. Autorzy zauważyli, że na ich podstawie można z pewną dokładnością określić miejsce uszkodzenia belki. W sąsiedztwie punktu zniszczenia forma własna zmienia bowiem rzędną i krzywiznę.

### 2.3. Dynamika niezarysowanych belek żelbetowych

Przytoczone powyżej prace dotyczą wpływu obciążenia (degradacji sztywności) na częstotliwości własne i właściwości tłumiące. Zdecydowana większość Autorów pomija opis i badanie zjawisk, związanych z dynamiką, zachodzących w fazie I, czyli przed przekroczeniem wartości momentu rysującego ( $M_{cr}$ ). Jak wykazują prace przywołane poniżej drgania niezarysowanych belek żelbetowych też mogą być przyczynkiem do rozważań badawczych. Określane doświadczalnie właściwości materiałów mogą się różnić w zagadnieniach statycznych i dynamicznych. Dowiedziono tego na drodze eksperymentu [20]. Autorzy przebadali trzy serie belek o zróżnicowanym stopniu zbrojenia. Każda z serii składała się z dwóch elementów. Geometria przekrojów poprzecznych dla poszczególnych serii była taka sama jak w [21] – rysunek 2.5, rozpiętość wynosiła 3353 mm. Parametry materiałów, z jakich wykonano belki, zestawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1 – Właściwości materiałów [20]

Oznaczenie belki	Zbrojenie <sup>2</sup>	Stopień zbrojenia [%]	Wytrzymałość na ściskanie betonu [MPa]	Moduł Younga betonu $E_c$ [GPa]
1 (A i B)	2#4	0,80	41,37	30,48
2 (A i B)	2#6	1,76	48,26	32,89
3 (A i B)	2#6 2#4*	2,64 0,80	42,10	30,68

\*zbrojenie ściskane

Granica plastyczności stali zbrojeniowej wynosiła 276 MPa. Częstotliwość własna rejestrowana była w procesie poprzecznych drgań swobodnych, wzbudzanych krótkotrwałym impulsem przyłożonym w środku rozpiętości belki. Na podstawie częstotliwości  $f$  obliczano dynamiczny moduł Younga betonu  $E_D$ , z zależności:

$$E_D = \frac{Wl^3 f^2}{kbh^3}, \quad (2.14)$$

gdzie:  $W$  – ciężar belki,

$l$  – rozpiętość belki,

$k$  – stała (dla belki swobodnie podpartej  $k = 2,01 \text{ m/s}^2$ )

$b$  – szerokość przekroju,

$h$  – wysokość przekroju.

<sup>2</sup> Oznaczenie średnic według systemu amerykańskiego.

Dodatkowo określano moduł Younga betonu  $E_p$  na podstawie propagacji fali w elemencie, wywołanej impulsem. Wyniki badań zestawiono w tabeli 2.2.

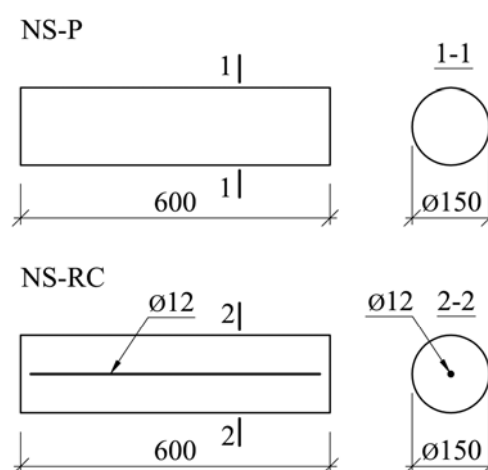
Tabela 2.2 – Wyniki badań [20]

Oznaczenie belki	$E_c$ [GPa]	$E_D$ [GPa]	$E_p$ [GPa]	$E_c/E_D$ [-]	$E_c/E_p$ [-]
1-A	30,48	26,61	40,76	1,15	0,75
1-B	30,48	26,61	40,34	1,15	0,75
2-A	32,89	30,82	45,03	1,07	0,73
2-B	32,89	30,96	45,31	1,06	0,73
3-A	30,68	34,13	38,76	0,90	0,79
3-B	30,68	31,85	39,03	0,96	0,79

Rezultaty wykazały, że wartość dynamicznego modułu Younga betonu  $E_D$ , obliczonego na podstawie poprzecznych drgań swobodnych jest mniejsza od modułu statycznego (siecznego) dla belek słabiej zbrojonych. Ze wzrostem stopnia zbrojenia stosunek  $E_c/E_D$  zbliża się do jedynki i dla belek zbrojonych silniej spada do wartości 0,90. Moduł  $E_p$  określony na podstawie propagacji fali charakteryzuje się dużym odchyleniem od modułu siecznego  $E_c$ .

Autorzy wskazali, że do celów obliczeń dynamicznych najodpowiedniejsze jest przyjęcie modułu  $E_D$ .

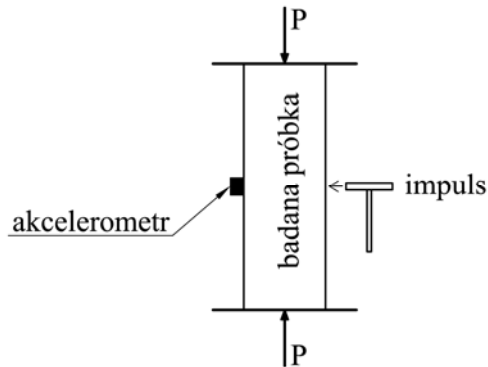
W pracy [35] zrelacjonowano badania statycznego i dynamicznego modułu Younga betonu, przeprowadzone na elementach cylindrycznych jak na rysunku 2.13.



Rys. 2.13 – Elementy badawcze w [35]

Dwa cylindry wykonano z betonu (NS-P), dwa natomiast zazbrojono centrycznie jednym prętem o średnicy 12 mm (NS-RC). Wytrzymałość betonu na ściskanie określono na trzech walcach o wysokości 300 mm i średnicy 150 mm. Wynosiła ona 25,4 MPa. Elementy

badano jako pręt obustronnie utwierdzony (z uwzględnieniem siły ściskającej  $P$ ). Schemat stanowiska badawczego pokazano na rysunku 2.14.



Rys. 2.14 – Schemat stanowiska badawczego [35]

Siłę ściskającą  $P$  uwzględniono przez przeskalowaniem wyników pomiarów (częstotliwości własnych  $f_n$ ) na podstawie zależności:

$$\frac{f_n|_{P \neq 0}}{f_n|_{P=0}} = \left( 1 + \frac{P}{|P_b|} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_n^2} \right)^{1/2}, \quad (2.14)$$

gdzie:  $P_b$  – siła krytyczna, obliczona według (2.15),

$\lambda_n$  – długość fali stowarzyszona z  $n$ -tą formą własną, obliczona według (2.16).

$$P_b = -\pi^2 \frac{4EI}{L^2}, \quad (2.15)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (2.16)$$

gdzie:  $EI$  – sztywność giętna pręta.

$L$  – długość próbki.

Dynamiczny moduł Younga  $E_d$  określono na podstawie częstotliwości własnej  $f_n$  z zależności (2.17), wyprowadzonej z równania (2.6) z pominięciem tłumienia.

$$E_d = \frac{4\pi^2 f_n^2}{(\beta_n L)^4} \frac{\rho A L^4}{I}, \quad (2.17)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość masy elementu,

$A$  – pole przekroju poprzecznego,

$I$  – moment bezwładności.

Wartość współczynnika ( $\beta_n L$ ) dla pierwszej częstotliwości własnej układu o schemacie jak na rysunku 2.14 wynosi:

$$\beta_1 L = 4,730041. \quad (2.18)$$

Wyniki doświadczenia pokazano w tabeli 2.3. Wartości statycznego modułu Younga  $E_c$  określono w powszechnej próbie ściskania statycznego.

Tabela 2.3 – Wyniki badań [35]

Oznaczenie próbki	Statyczny moduł Younga $E_c$ [GPa]	Dynamiczny moduł Younga $E_d$ [GPa]	$E_c/E_d$ [-]
NS-P-1/2	28,1	29,71	0,95
NS-P-2/2	29,1	29,83	0,98
NS-RC-1/2	29,0	26,30	1,10
NS-RC-2/2	29,0	26,55	1,09

Przeprowadzone badania mają charakter jedynie sygnalizacyjny. Wykazują rozbieżności między statycznym, a dynamicznym modułem Younga. Wpływ na rozbieżności ma obecność zbrojenia w elemencie. Jak widać w przypadku próbek bez zbrojenia stosunek  $E_c/E_d$  jest mniejszy od jeden. W próbkach z wkładką zbrojeniową natomiast jest on o około 10% większy od jedności. Materiał badawczy jest jednak zbyt skromny, aby wyniki można było uogólnić.

#### 2.4. Propozycje norm

W polskich normach brak jest wyczerpujących informacji, dotyczących projektowania elementów żelbetowych, pracujących pod obciążeniem dynamicznym. W większości przypadków natrafia się na zalecenia oparte o współczynniki zwiększające związane z efektami dynamicznymi. Według normy do projektowania konstrukcji wsporczych pod maszyny [N2] do obliczeń częstości własnych należy przyjmować sztywność  $K$ , określaną według zależności:

$$K = EI, \quad (2.19)$$

gdzie:  $E$  – moduł Younga betonu przyjęty wg [N3],

$I$  – moment bezwładności pełnego przekroju obliczanego elementu (dla przekrojów żelbetowych bez uwzględnienia zbrojenia).

Łatwo zauważyć, że sztywność obliczona z zależności (2.19) jest stała w całym zakresie pracy elementu i nie zależy od stopnia zbrojenia. Doświadczenia zaprezentowane w punkcie 2.2 wykazały, że może to prowadzić do błędów.

Bardziej uzasadnione mogłoby wydawać się przyjmowanie do obliczeń dynamicznych sztywności elementu  $B$  według polskiej normy do projektowania konstrukcji żelbetowych [N3], z rozgraniczeniem na przekrój niezarysowany:

$$B = E_c I_I, \quad (2.20)$$

oraz zarysowany:

$$B = \frac{E_c I_{II}}{1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \left( 1 - \frac{I_{II}}{I_I} \right)}, \quad (2.21)$$

gdzie:  $E_c$  – moduł Younga betonu,

$\beta_1$  – współczynnik zależny od przyczepności prętów (1,0 dla prętów żebrowanych, 0,5 dla prętów gładkich),

$\beta_2$  – współczynnik zależny od czasu działania i powtarzalności obciążenia (1,0 przy jednokrotnym obciążeniu krótkotrwałym, 0,5 przy obciążeniu długotrwałym lub wielokrotnie zmiennym),

$I_I$  – moment bezwładności przekroju w fazie I,

$I_{II}$  – moment bezwładności przekroju w fazie II.

Warta rozważenia jest stosowalność zależności podanej w Eurokodzie 2 [N6] w postaci:

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I, \quad (2.22)$$

gdzie:  $\zeta$  – współczynnik dystrybucji według (2.20).

$$\zeta = 1 - \beta_2 \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2, \quad (2.23)$$

przy czym  $\zeta = 0$  w przekrojach niezarysowanych.

Zależność (2.22) służy obliczaniu deformacji, tak więc wielkość  $\alpha$  jest jej parametrem (np. odkształceniem, krzywizną, obrotem lub ugięciem). Parametry  $\alpha_I$ ,  $\alpha_{II}$  obliczane są odpowiednio przy założeniu, że nie ma rys i przy założeniu pełnego zarysowania. Obliczając



częstotliwość drgań własnych belki zarysowanej można się spodziewać, że wynikiem będzie kombinacja wartości dla fazy I oraz II. Stąd wykorzystanie zależności (2.22) do jej określenia może być uzasadnione. Należy jednak zaznaczyć, że wzory proponowane przez normy [N6] oraz [N3] prowadzą do tych samych wyników. Dlatego w dalszej części pracy ograniczono się do sprawdzenia stosowalności w obliczeniach dynamicznych zależności (2.20) i (2.21). Bezpośrednie obliczenie sztywności pozwala prowadzić dalsze rozważania (związane np. z zagadnieniem drgań wymuszonych). Podczas gdy wykorzystanie zależności (2.22) pozwoli określić bezpośrednio jedynie częstotliwości własne.

W studiach literaturowych zapoznano się również z innymi pozycjami, dotyczącymi zagadnień dynamiki konstrukcji żelbetowych [11, 12, 16, 34, 36, 40, 41, 44, 45, 47] oraz betonu jako materiału [18, 63]. Ich zakres jest podobny do opracowań cytowanych powyżej, bądź nie jest bezpośrednio związany z tematem niniejszej pracy.

## **2.5. Podsumowanie**

Obliczenia dynamiczne konstrukcji żelbetowych nie są powszechnie tak potrzebne jak klasyczne obliczanie uogólnionych przemieszczeń, sił wewnętrznych lub ich redystrybucji. Być może w ten sposób można wytłumaczyć mniejsze zainteresowanie badaczy tym zjawiskiem. Jak wspomniano w rozdziale pierwszym, powstało wiele teorii dotyczących sztywności niezarysowanych i zarysowanych elementów żelbetowych pod obciążeniem statycznym. Brak jest jednak wystarczających wskazówek dotyczących obliczania podstawowych parametrów dynamicznych belek żelbetowych. Prace nawiązujące do tego zagadnienia nie wyczerpują tematu. W przeważającej części składa się na nie eksperyment i określenie na jego podstawie sztywności dynamicznej elementów badawczych. Niektórzy z Autorów podają zależność, która pozwala ją obliczyć. Opisuje to zagadnienie jedynie fragmentarycznie, bo podanie globalnej sztywności dynamicznej nie pozwala w sposób szczegółowy śledzić procesów w drgających belkach żelbetowych, a jedynie obserwować końcowe efekty.



### **3. Tezy pracy**

Przeprowadzone studia literaturowe pozwalają wysunąć następujące tezy pracy:

- 1.** Przeciążaniu elementu żelbetowego towarzyszy spadek częstotliwości własnych, jest on różny dla różnych form własnych i zależy od stopnia zbrojenia,
- 2.** Morfologia (w szczególności rozstaw i liczba) rys dla określonego poziomego obciążenia nie ma wpływu na podstawowe parametry dynamiczne zarysowanych belek żelbetowych,
- 3.** Procesy drgań zarysowanych belek żelbetowych można opisać z wykorzystaniem metody sztywnych elementów skończonych, uwzględniając dyskretny model rysy.

Tezy 1, 2 dotyczą części doświadczalnej niniejszej pracy i zostaną zweryfikowane eksperymentem. Teza 3 związana jest z częścią teoretyczną. Jej potwierdzeniem będzie opracowanie algorytmu, bazującego na metodzie sztywnych elementów skończonych, pozwalającego uwzględnić dyskretny model rysy. Część doświadczalną zaplanowano tak, aby umożliwiła zbudowanie modelu numerycznego zarysowanej belki żelbetowej.



## 4. Badania laboratoryjne

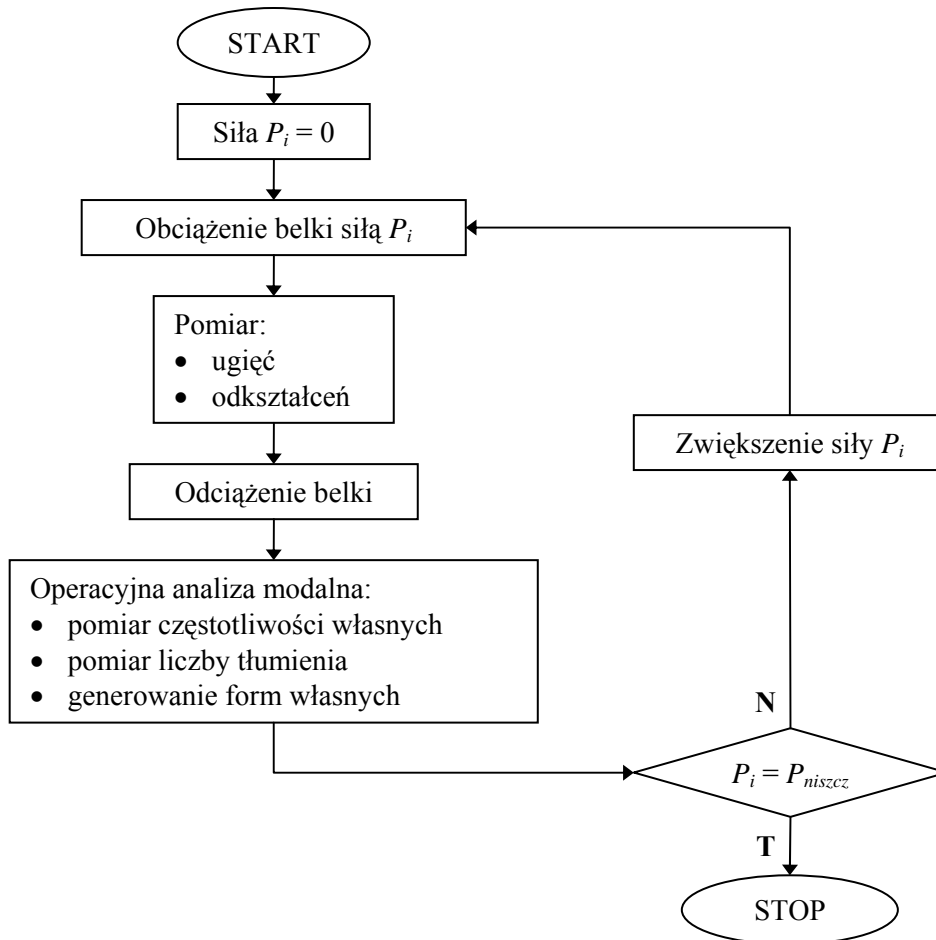
### 4.1. Cel, zakres i program badań

W celu weryfikacji tez niniejszej pracy zaplanowano badania doświadczalne. Przewidziano przebadanie 12 belek żelbetowych w skali półnaturalnej. Doświadczenie obejmowało swym zakresem badania materiałów, czyli:

- określenie klasy betonu,
- określenie średniej wytrzymałości betonu na ściskanie, rozciąganie i średniego modułu Younga betonu w przeddzień badania belki,
- określenie średniej granicy plastyczności, wytrzymałości na rozciąganie i średniego modułu Younga stali zbrojeniowej,

oraz badania belek żelbetowych.

Badania belek żelbetowych przeprowadzone zostały według schematu pokazanego poniżej (rys. 4.1).



Rys. 4.1 – Schemat procedury badawczej belki

Schemat pokazuje jedynie ogólny tok postępowania. Wszelkie szczegółowe informacje, dotyczące m. in. stanowiska badawczego oraz aparatury pomiarowej podane zostaną w dalszej części.

Jako miarę tłumienia w pracy przyjęto liczbę tłumienia  $\alpha$  wyrażoną w procentach. Na podstawie studiów literaturowych stwierdzono, że najpopularniejszym parametrem, opisującym tłumienie jest jego logarytmiczny dekrement  $\delta$ . Określa się go na podstawie badań doświadczalnych, w zagadnieniu gasnących drgań swobodnych z zależności:

$$\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \ln \frac{q_m}{q_{m+1}}, \quad (4.1)$$

gdzie:  $q$  – wychylenie,

$q_m$  – wychylenie w  $m$ -tym cyklu,

$q_{m+1}$  – wychylenie w  $m+1$  cyklu,

$T$  – okres drgań swobodnych.

Zależność wiążąca oba parametry tłumienia jest postaci:

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \cdot 100\% \approx \frac{\delta}{2\pi} \cdot 100\%. \quad (4.2)$$

Uproszczenie zależności (4.2) jest słuszne m. in. dla konstrukcji budowlanych ( $\delta \ll 2\pi$ ).

Program badań miał umożliwić obserwację spadku podstawowych parametrów dynamicznych (częstotliwości własne, tłumienie) w zależności od stopnia zaawansowania obciążenia. Jako stopień zaawansowania obciążenia rozumie się maksymalne obciążenie jakie było przyłożone od belki. Formalnie można zatem napisać, że badany był wpływ historii obciążenia na podstawowe parametry dynamiczne.

#### **4.2. Analiza modalna – podstawy, zastosowanie w badaniach własnych**

Jednym z podstawowych narzędzi, służących do badania własności dynamicznych jest analiza modalna [51, 57]. Analiza modalna może służyć m. in. syntezie układów mechanicznych, analizie zachowań konstrukcji pod różnymi oddziaływaniami zewnętrznymi, modyfikacji własności konstrukcji, analizie zmęczeniowej. Wykorzystuje się ją zarówno do badań precyzyjnych elementów maszyn jak i do środków transportu oraz dużych konstrukcji budowlanych (maszty, mosty, zapory wodne). Analiza modalna pozwala zbudować model

modalny badanej konstrukcji, na który składają się:

- uporządkowane częstości własne,
- współczynniki tłumienia,
- formy własne (postacie drgań), przyporządkowane poszczególnym częstościom własnym.

Metody analizy modalnej można podzielić na trzy główne grupy [57]:

- metody realizowane w dziedzinie częstości,
- metody realizowane w dziedzinie czasu,
- metody realizowane w dziedzinie amplitud.

Największe zastosowanie w praktyce mają metody realizowane w dziedzinie częstości. Badania laboratoryjne, będące przedmiotem niniejszej pracy, zostały przeprowadzone z wykorzystaniem metody właśnie tej grupy.

Większość badań laboratoryjnych, przeprowadzanych z wykorzystaniem analizy modalnej, polega na przeprowadzeniu tzw. eksperymentu identyfikacyjnego. W eksperymencie identyfikacyjnym wymuszane są drgania badanego elementu. Model konstrukcji budowany jest na podstawie pomiaru siły wymuszającej oraz odpowiedzi konstrukcji. Do wymuszenia drgań stosuje się zwykle sygnał harmoniczny (o zmiennej częstotliwości w sposób skokowy lub ciągły) lub sygnał impulsowy, wymuszony młotkiem modalnym. Dobór wzbudnika zależy od prognozowanych częstości własnych. Do wymuszeń harmonicznych stosuje się siłowniki elektromagnetyczne (o dużym zakresie częstości oraz amplitud siły wzbudzającej) lub hydrauliczne (o stosunkowo wąskim paśmie częstości wzbudzania). W badaniach rzeczywistych konstrukcji inżynierskich znajdują zastosowanie siłowniki hydrauliczne. Sygnał impulsowy, jak wspomniano, generowany jest specjalnym młotkiem modalnym. Jego charakterystyki zależą od charakterystyk badanego obiektu. Różnorodność wzbudników impulsowych pokazano na fotografii 4.1.



Fot. 4.1 – Modalne wzbudniki impulsowe

W doborze młotki modalnego można kierować się prostą zasadą: im twardsza część uderzająca, tym krótszy impuls, a wzbudzone częstotliwości wyższe. Dostępne młotki modalne mają wbudowane czujniki siły, co znacznie ułatwia pomiar wymuszenia.

Wyspecjalizowanym wariantem analizy modalnej jest operacyjna analiza modalna [1] (Operating Modal Analysis – OMA). Odmiana ta została opracowana z myślą o pomiarach in-situ dużych konstrukcji inżynierskich, których wzbudzenie i jego pomiar mogą następczą trudności. Polega na rejestracji odpowiedzi konstrukcji (w minimum 2 punktach) na nieznane wymuszenia, będące zazwyczaj warunkami pracy badanego obiektu. W czasie badań nie ma zatem potrzeby wyłączania konstrukcji z eksploatacji. Jest to szczególnie pożądane w przypadku mostów, tam, budynków wysokich, których odizolowanie od wpływów otoczenia jest bardzo trudne, a nierzadko niemożliwe. Wyniki badań, prowadzonych z wykorzystaniem operacyjnej analizy modalnej na dużych konstrukcjach inżynierskich zrelacjonowano w literaturze [8]. We własnych badaniach wykorzystano operacyjną analizę modalną, jako bardziej efektywną w zadanych warunkach. Wyeliminowano czynnik ludzki związany z obsługą wzbudnika impulsowego. Rejestrowano odpowiedź konstrukcji na wymuszenia losowe (delikatne uderzenia gumowym młotkiem) w 11 punktach.

Pomiar odpowiedzi konstrukcji przeprowadzany był czujnikami przyspieszenia (akcelerometrami), przymocowanymi do badanego obiektu. Akcelerometry, wchodzące w skład wykorzystanego zestawu pomiarowego, pokazano na fotografii 4.2.



Fot. 4.2a – Akcelerometr typu ThetaShear Miniature  
DeltaTron 4507 B002



Fot. 4.2b – Akcelerometr typu Seismic  
DeltaTron 8340

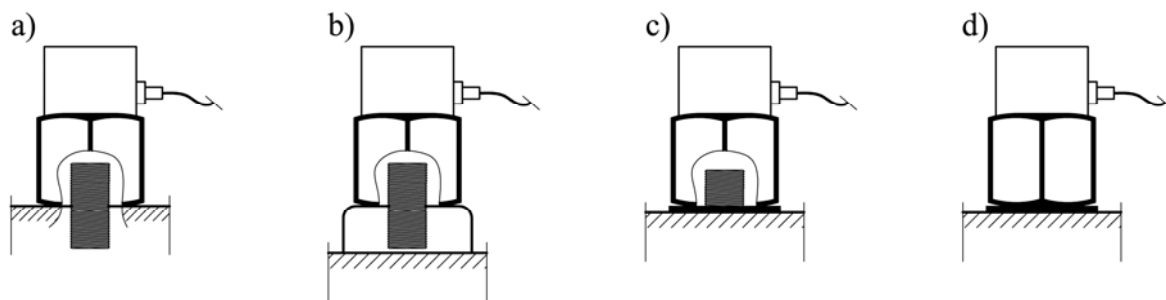
W badaniach wykorzystano akcelerometr typu 4507 B002 (fot. 4.2a). Jego właściwości zestawiono w tabeli 4.1.



Tabela 4.1 – Właściwości akcelerometru typu 4507 B002

Masa czujnika	4,8 g
Zakres	0,4 Hz – 6 kHz do $700 \text{ ms}^{-2}$
Czułość	$100 \text{ mV/ms}^{-2}$ $150 \mu\text{g}$

Sposób mocowania akcelerometru do badanego obiektu zależy od jego właściwości oraz warunków zadania. Najpowszechniej stosowane metody pokazano na rysunku 4.2 [57].

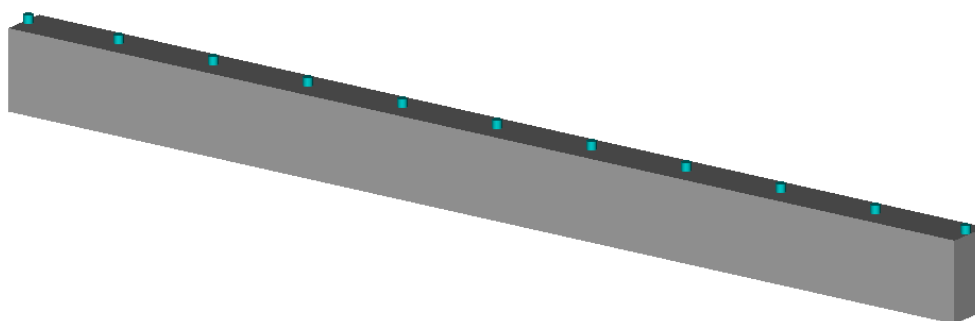


Rys. 4.2 – Sposoby mocowania akcelerometrów: a) śrubowe, b) za pomocą magnesu, c) śrubowo klejone, d) za pomocą wosku lub kleju [57]

W przeprowadzonym eksperymencie akcelerometry przymocowano do belki klejem układanym na gorąco (fot. 4.3). Na każdej z belek umieszczono 11 czujników w równych odstępach – co 330 mm (rys. 4.3).



Fot. 4.3 – Akcelerometr przymocowany do belki



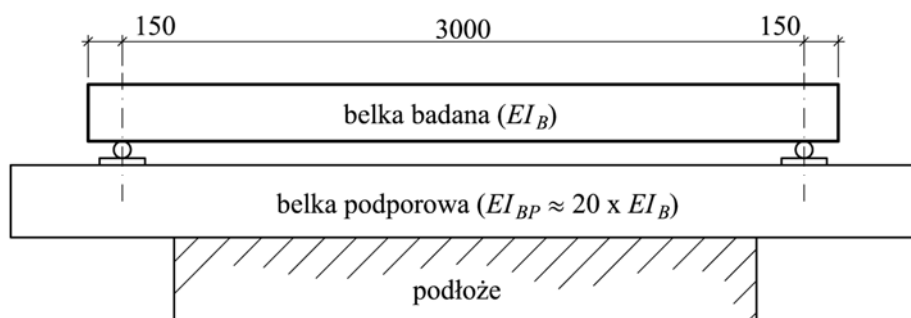
Rys. 4.3 – Rozmieszczenie akcelerometrów na belce

Badania laboratoryjne oraz wstępną obróbkę danych przeprowadzono z wykorzystaniem systemu PULSE 3560. W jego skład, oprócz akcelerometrów, wchodziła 17-kanalowa kasetka pomiarowa oraz komputer z oprogramowaniem, dostarczonym przez producenta.

### 4.3. Stanowisko badawcze

Badania dynamiczne tego typu nie były do tej pory prowadzone w Akredytowanym Laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, toteż wiele uwagi poświęcono budowie stanowiska badawczego. Z uwagi na późniejsze analizy numeryczne należało zapewnić adekwatność modelu w laboratorium oraz modelu obliczeniowego. Początkowo zamierzano przeprowadzić badania jak dla belki swobodnie podpartej. Belkę zamierzano obciążać w próbie trzypunktowego zginania, następnie przeprowadzać operacyjną analizę modalną w tej samej pozycji, po odciążeniu. Celem zweryfikowania poprawności przyjętych założeń przeprowadzono szereg analiz wstępnych.

Pierwsze badania przeprowadzono na stanowisku o schemacie jak na rysunku 4.4. Ogólny widok stanowiska badawczego nr 1 zamieszczono na fotografii 4.4.



Rys. 4.4 – Schemat stanowiska badawczego nr 1



Fot. 4.4 – Belka na stanowisku badawczym nr 1

Badana belka była swobodnie położona na stalowych wałkach podporowych. Wałki z blachami ułożono na stalowej belce podporowej o przekroju skrzynkowym. Sztywność belki podporowej była znacznie większa od sztywności belki badanej. Dużo większa sztywność belki podporowej miała wyeliminować przenoszenie się drgań na podłoże. Cały układ spoczywał na masywnym wózku stalowym, umożliwiającym wprowadzenie belki pod prasę, po ustawieniu jej na stanowisku.

Formy własne, uzyskane z pomiarów, porównano z formami teoretycznymi dla belki swobodnie podpartej (4.3).

$$w_n(\xi) = \sin(n\pi\xi), \quad (4.3)$$

gdzie:  $w_n$  – rzędna  $n$ -tej formy własnej,

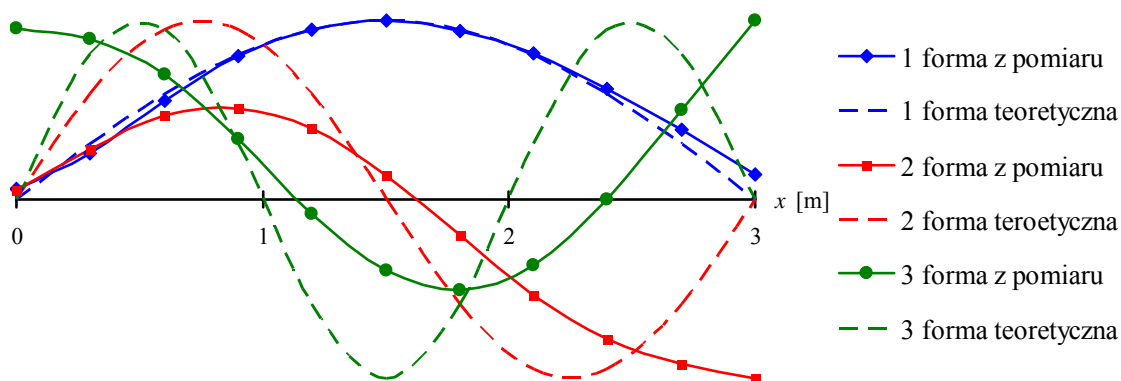
$\xi$  – bezwymiarowe położenie przekroju ( $\xi = x / l$ ),

$x$  – położenie przekroju,

$l$  – rozpiętość belki,

$n$  – numer formy.

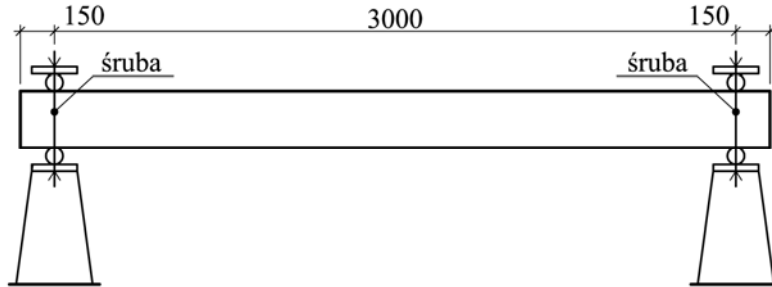
Zestawienie wartości doświadczalnych i teoretycznych dla trzech pierwszych form pokazano na rysunku 4.5.



Rys. 4.5 – Formy własne zarejestrowane na stanowisku badawczym nr 1

O ile pierwsza forma pomierzona odzwierciedla teoretyczną, o tyle przebieg formy drugiej i trzeciej znacznie odbiega od wyników teoretycznych. Zdaniem autora miało to związek z odrywaniem belki od podpór, szczególnie przy wyższych częstotliwościach (powyżej 160 Hz). Akcelerometr zamocowany na podporze zarejestrował przyspieszenia porównywalne z tymi z przęsła. Wskazuje to na ruch podpór. Ponadto mogło mieć miejsce rozpraszanie drgań na podporach (wzajemny ruch belki, wałka i blachy podporowej).

Zdecydowano się na przeprowadzenie analiz na innym stanowisku. Celem odebrania ruchu na podporach zastosowano dwustronne łożysko, dodatkowo spięte śrubami (rys. 4.6, fot. 4.5).



Rys. 4.6 – Schemat stanowiska badawczego nr 2

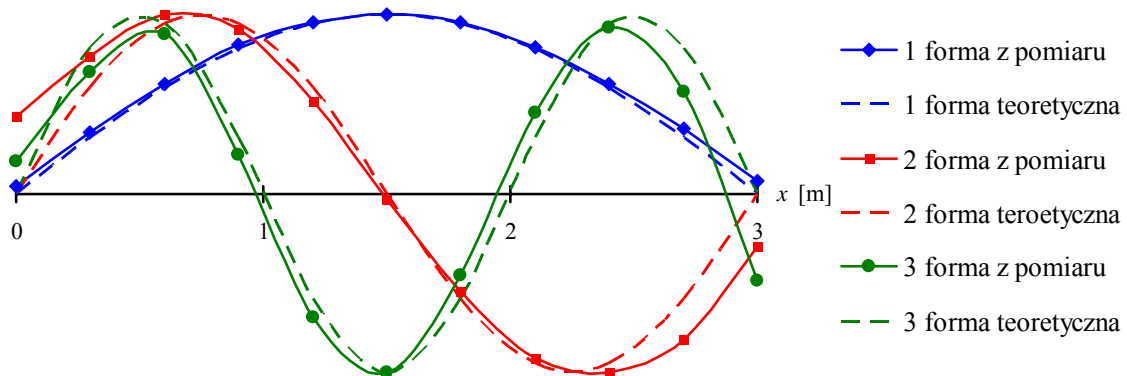


Fot. 4.5a – Belka na stanowisku badawczym nr 2



Fot. 4.5b – Łożysko podporowe

Belkę ustawiono na podporach stalowych przykręconych do posadzki. Wyniki pomiarów w zestawieniu z wartościami teoretycznymi pokazano na rysunku 4.7.



Rys. 4.7 – Formy własne zarejestrowane na stanowisku badawczym nr 2

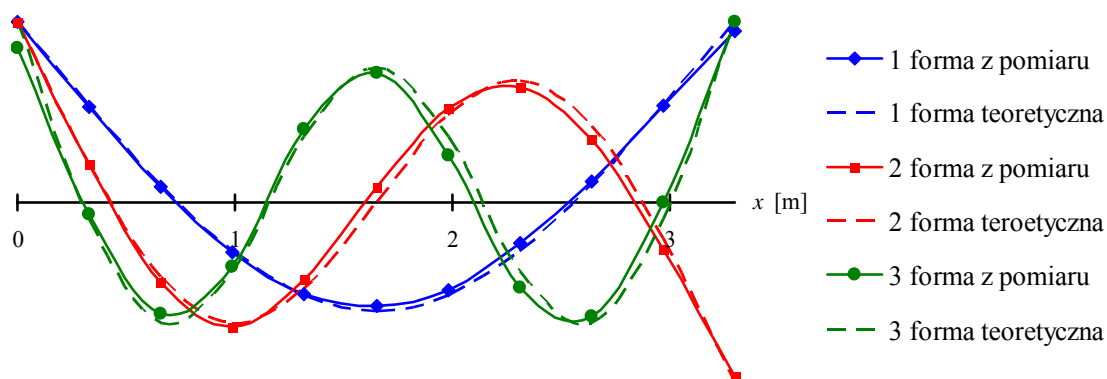
Przeprowadzono próbę z akcelerometrem przymocowanym do podpory. Wyniki były bardziej zadowalające. Przyspieszenie zarejestrowane na podporach było pomijalnie małe w stosunku do przyspieszeń pomierzonych w przęśle belki. Wygenerowane formy własne nie oddawały jednak form teoretycznych belki swobodnie podpartej. Nadal występował ruch na podporach przy wyższych częstotliwościach.

Wyniki analiz rozpoznawczych spowodowały zaniechanie badań modelu jako belki swobodnie podpartej. Dokładność jaką uzyskano była zadowalająca jedynie w przypadku pierwszej formy własnej. W zasadniczych badaniach laboratoryjnych, będących fundamentalną częścią pracy, zamierzano nie ograniczać się do pierwszej częstotliwości. W tym celu postanowiono zbudować trzecie stanowisko badawcze. Miało ono umożliwić podniesienie belki do analizy modalnej na elastycznych linach. Numerycznym odpowiednikiem takiego modelu może być pręt swobodny (bez kinematycznych warunków brzegowych). Na fotografii 4.6 zaprezentowano widok stanowiska badawczego z podwieszoną belką.



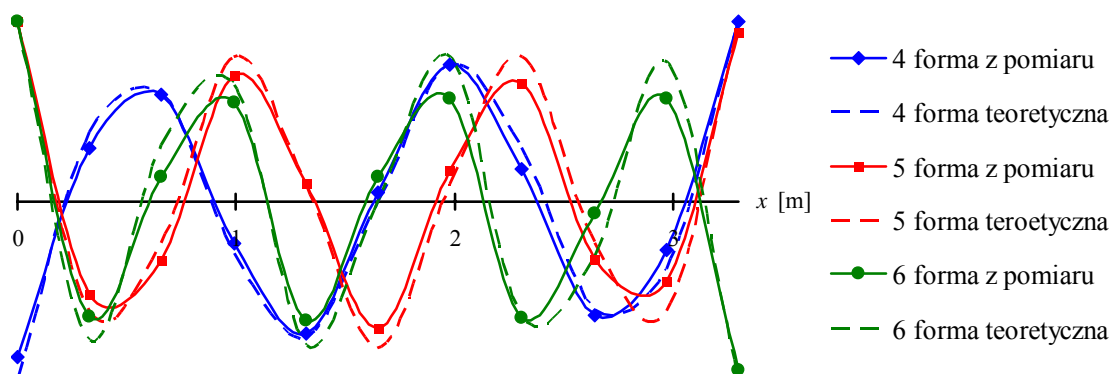
Fot. 4.6 – Belka na stanowisku badawczym nr 3

Wyniki pomiarów, przeprowadzonych na stanowisku trzecim, pokazano na rysunku 4.8.



Rys. 4.8 – Formy własne (1, 2, 3) zarejestrowane na stanowisku badawczym nr 3

Zarejestrowane formy własne wykazały zadowalającą zgodność z formami teoretycznymi. Zgodność zaobserwowano także dla form wyższych (4, 5, 6) – rysunek 4.9.



Rys. 4.9 – Formy własne (4, 5, 6) zarejestrowane na stanowisku badawczym nr 3

Dla celów porównawczych obliczono dla wszystkich stanowisk euklidesową normę błędu  $\varepsilon$  według zależności (4.4). Do wzoru podstawiono wartości dyskretne obliczone ( $w_i$ ) bądź zarejestrowane ( $w_p$ ) w 11 punktach pomiarowych.

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\int_l (w_i - w_p)^2 dx}}{\sqrt{\int_l w_i^2 dx}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (w_{ii} - w_{pi})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (w_{ii})^2}}, \quad (4.4)$$

gdzie:  $w_{ii}$  – wartość teoretyczna w punkcie  $i$ ,

$w_{pi}$  – wartość pomierzona w punkcie  $i$ ,

$l$  – długość belki.

$n$  – liczba punktów pomiarowych ( $n = 11$ ).

Wyniki obliczeń błędu zestawiono w tabeli 4.2.

Tabela 4.2 – Błędy pomiarów

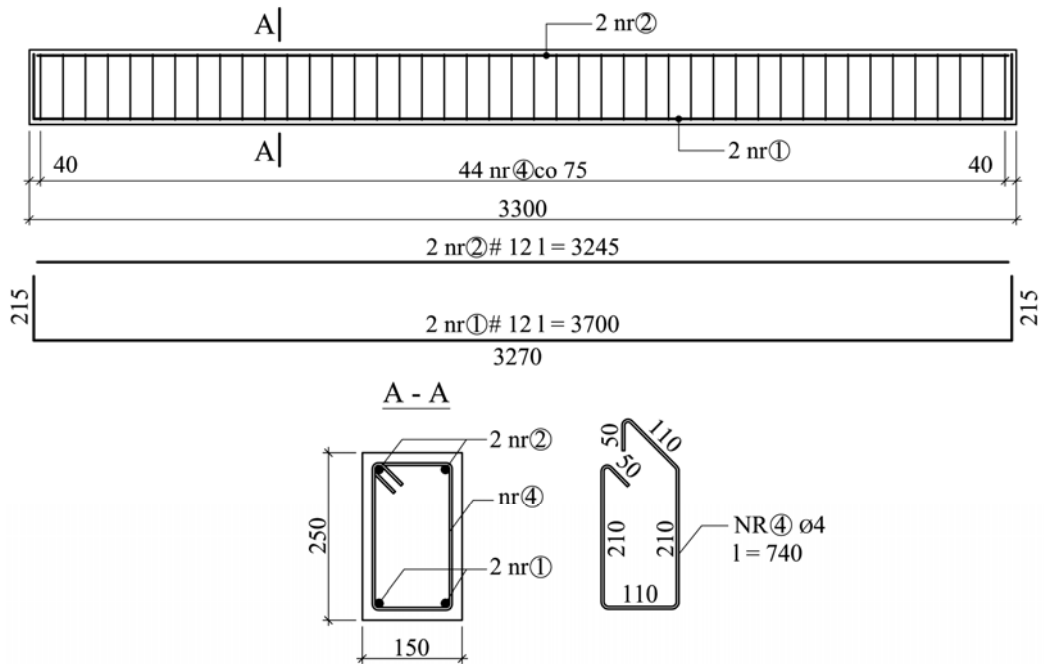
Stanowisko badawcze	Błąd 1 formy	Błąd 2 formy	Błąd 3 formy
	$\varepsilon_1$ [%]	$\varepsilon_2$ [%]	$\varepsilon_3$ [%]
1	6	45	78
2	4	24	18
3	4	9	14

Wyniki wstępnych analiz wykazały, że stosunkowo najmniejsze różnice między schematami statycznymi modelu laboratoryjnego i numerycznego uzyskuje się na stanowisku badawczym numer 3. Na nim zdecydowano się prowadzić dalsze badania.

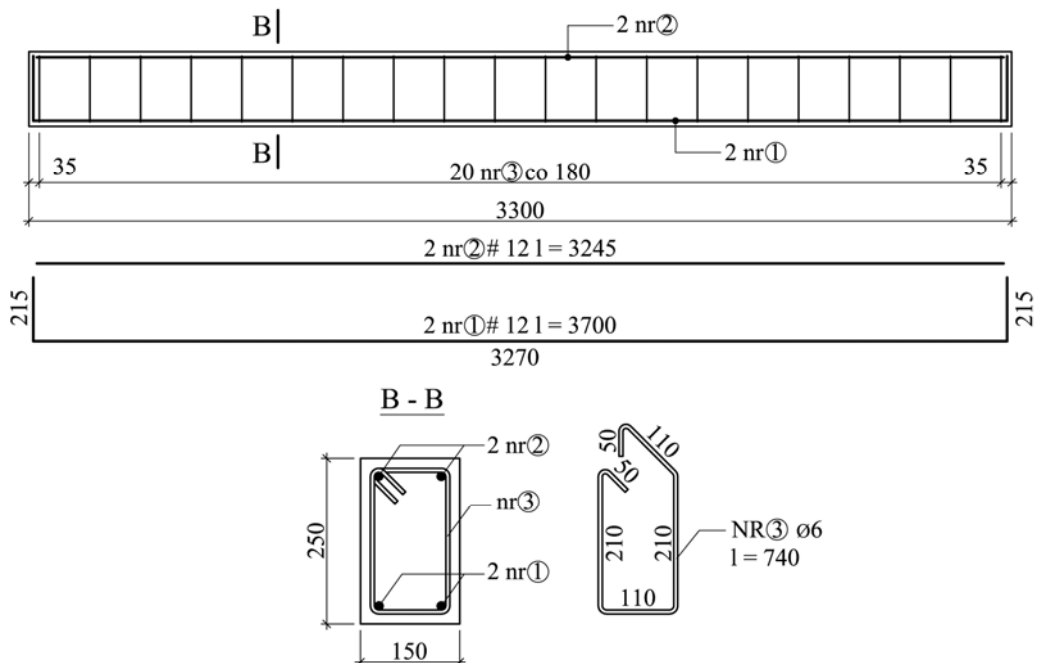
#### 4.4. Badania laboratoryjne – etap I

##### 4.4.1. Elementy badawcze

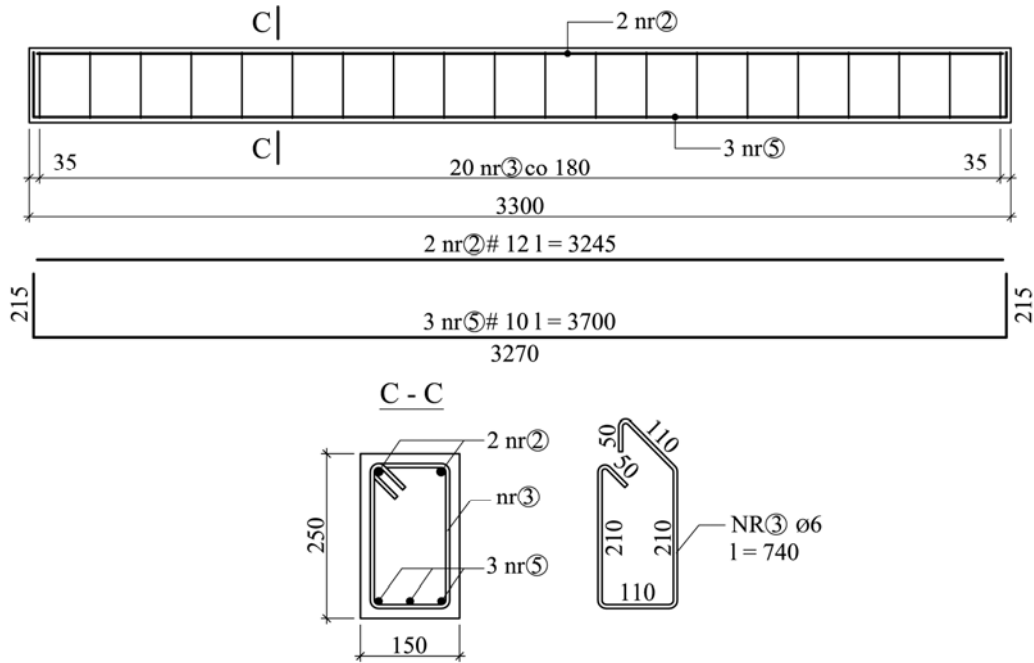
W pierwszym etapie przewidziano przeprowadzenie badania na 9 elementach belkowych. Składały się na nie trzy serie, po trzy belki w każdej z nich. Elementy badawcze pokazano na rysunkach 4.10 – 4.12.



Rys. 4.10 – Belka serii I



Rys. 4.11 – Belka serii II



Rys. 4.12 – Belka serii III

Belki wykonano w skręcanych formach stalowych, umożliwiającym betonowanie dwóch belek jednocześnie. Betonowanie odbyło się w pięciu cyklach, wg tabeli 4.3. Oprócz belek wykonywano próbki (kostki sześciennie 150x150x150 mm, oraz walce o wysokości  $h = 350$  mm i średnicy  $\phi = 113$  mm) do określenia cech wytrzymałościowych i odkształcalnościowych. Beton belek zagęszczano dwoma wibratorami przyczepnymi, próbki natomiast zawibrowano przy pomocy blatu wibracyjnego.

Tabela 4.3 – Harmonogram wykonania elementów badawczych

Cykl betonowania	Data	Betonowane belki	Liczba kostek [szt.]	Liczba walców [szt.]
1	24.04.2008	B-I-1 B-I-2	15	12
2	29.04.2008	B-I-3 B-II-1	15	12
3	07.05.2008	B-II-2 B-II-3	15	12
4	12.05.2008	B-III-1 B-III-2	15	12
5	15.05.2008	B-III-3	9	6

Na próbkach z betonu przewidziano wykonanie następujących badań:

- określenie klasy betonu na 3 próbkach sześciennych, pobranych przy każdym cyklu betonowania, po 28 dniach dojrzewania w stałych warunkach ciepłno-wilgotnościowych,
- określenie średniej wytrzymałości betonu na ściskanie na 3 próbkach sześciennych



w przeddzień badania belki,

- c) określenie średniej wytrzymałości betonu na rozciąganie przy rozłupywaniu na 3 próbkach sześciennych w przeddzień badania belki,
- d) określenie średniego modułu Younga betonu na 6 próbkach walcowych w przeddzień badania belki.

Próbki do badań z punktu a) przechowywano w komorze, na stalowej kratce powyżej poziomu wody. Miało to zapewnić stałe warunki wilgotnościowe i termiczne otoczenia. Badania b) – d) wykonano niezależnie dla każdej z belek, a próbki do nich znajdowały się w tych samych warunkach co belki. W czasie dojrzewania beton belek i próbki pielęgnowano (przykryto je nasiąkliwymi matami i polewano wodą).

Fotografie wykonane podczas prac zbrojarskich i betonowania zamieszczono poniżej (fot. 4.7 – 4.13).



Fot. 4.7 – Gotowy szkielet zbrojenia (belka serii I)



Fot. 4.8 – Gotowy szkielet zbrojenia (belka serii II)



Fot. 4.9 – Gotowy szkielet zbrojenia (belka serii III)



Fot. 4.10 – Wykonywanie szkieletu zbrojarskiego belki serii III



Fot. 4.11 – Układanie mieszanki betonowej



Fot. 4.12 – Zagęszczanie mieszanki betonowej



Fot. 4.13 – Układanie i zacieranie ostatniej warstwy

#### 4.4.2. Badania stali

Celem określenia właściwości wytrzymałościowych i odkształcalnościowych stali losowo wybrano po 3 próbki stali z każdej średnicy (w sumie 12 próbek). Badanie przeprowadzono w prasie wytrzymałościowej typu Zwick/Roell UFP 400, w próbie osiowego rozciągania, zgodnie z wytycznymi normy [N4]. Wydłużenie próbek mierzono ekstensometrem. Do rejestracji i wstępnej obróbki wyników wykorzystano zestaw PC z zainstalowanym oprogramowaniem, dostarczonym przez producenta prasy. Ogólny widok stanowiska pokazano na fotografii 4.14.



Fot. 4.14 – Stanowisko do badania stali zbrojeniowej

Dane wejściowe i wyniki pomiarów zestawiono dla poszczególnych średnic w tabelach 4.4 – 4.7. Pod każdą z wartości średnich podano odchylenie standardowe. Zważywszy na to, że badania przeprowadzono na 3 próbkach każdej ze średnic podanie odchyleń

standardowych ma charakter jedynie informacyjny i nie zostało wykorzystane do żadnych dalszych analiz statystycznych. Wykresy naprężenie – odkształcenie zamieszczono na rysunkach 4.13 – 4.16. Symbole literowe badanych wielkości przyjęto zgodnie z [N3, N6].

Tabela 4.4 – Raport z badań prętów średnicy 4 mm (stal gładka)

Zastosowanie w badaniach		: strzemiona w belkach serii I					
Średnica $d$ [mm]		: 4					
Pole przekroju $S_0$ [mm <sup>2</sup> ]		: 12,57					
Początkowa długość pomiarowa $L_0$ [mm]		: 40					
(wg [N4]: $L_0 = k\sqrt{S_0}$ , $k = 11,3$ )							
Długość robocza próbki $L_c$ [mm]		: 160					
Długość całkowita próbki $L_t$ [mm]		: 280					
L.p.	Próbka	$f_{yi}^*$ [MPa]	$f_y^*$ [MPa]	$f_{ii}$ [MPa]	$f_i$ [MPa]	$E_{si}$ [GPa]	$E_s$ [GPa]
1	4 1	498	499	510	517	209	202
2	4 2	500		520		208	
3	4 3	499		519		190	

\* $f_y = f_{0,2}$

gdzie:  $f_{yi}$  – granica plastyczności  $i$ -tej próbki,

$f_y$  – średnica granica plastyczności,

$f_{ii}$  – wytrzymałość na rozciąganie  $i$ -tej próbki,

$f_i$  – średnia wytrzymałość na rozciąganie,

$E_{si}$  – moduł Younga  $i$ -tej próbki,

$E_s$  – średni moduł Younga.

Tabela 4.5 – Raport z badań prętów średnicy 6 mm (stal gładka)

Zastosowanie w badaniach		: strzemiona w belkach serii II, III					
Średnica $d$ [mm]		: 6					
Pole przekroju $S_0$ [mm <sup>2</sup> ]		: 28,27					
Początkowa długość pomiarowa $L_0$ [mm]		: 60					
Długość robocza próbki $L_c$ [mm]		: 160					
Długość całkowita próbki $L_t$ [mm]		: 280					
L.p.	Próbka	$f_{yi}$ [MPa]	$f_y$ [MPa]	$f_{ii}$ [MPa]	$f_i$ [MPa]	$E_{si}$ [GPa]	$E_s$ [GPa]
1	6 1	416	427	497	511	191	195
2	6 2	435		520		190	
3	6 3	430		514		203	

Tabela 4.6 – Raport z badań prętów średnicy 10 mm (stal zębrowana)

Zastosowanie w badaniach		: zbrojenie dolne w belkach serii III					
Średnica $d$ [mm]		: 10					
Pole przekroju $S_0$ [mm <sup>2</sup> ]		: 78,54					
Początkowa długość pomiarowa $L_0$ [mm]		: 100					
Długość robocza próbki $L_c$ [mm]		: 160					
Długość całkowita próbki $L_t$ [mm]		: 280					

Tabela 4.6 (c. d.) – Raport z badań prętów średnicy 10 mm (stal żebrowana)

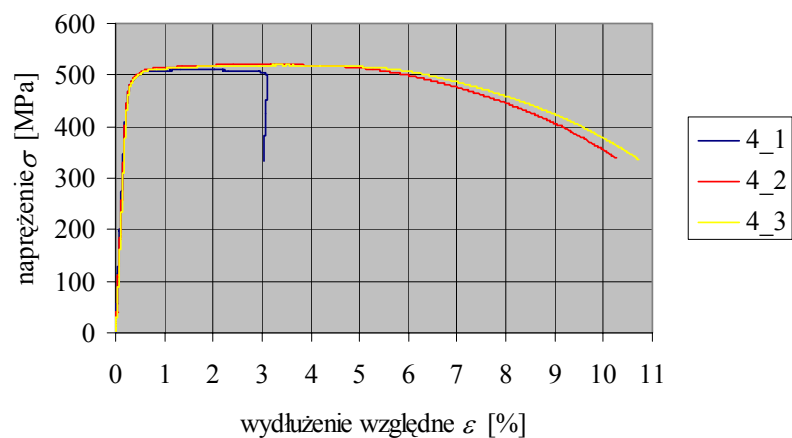
L.p.	Próbka	$f_{yi}$ [MPa]	$f_y$ [MPa]	$f_{ii}$ [MPa]	$f_i$ [MPa]	$E_{si}$ [GPa]	$E_s$ [GPa]
1	10_1	550	548 (2,76)	671	669 (1,53)	206	198 (7,51)
2	10_2	545		668		198	
3	10_3	550		670		191	

Tabela 4.7 – Raport z badań prętów średnicy 12 mm (stal żebrowana)

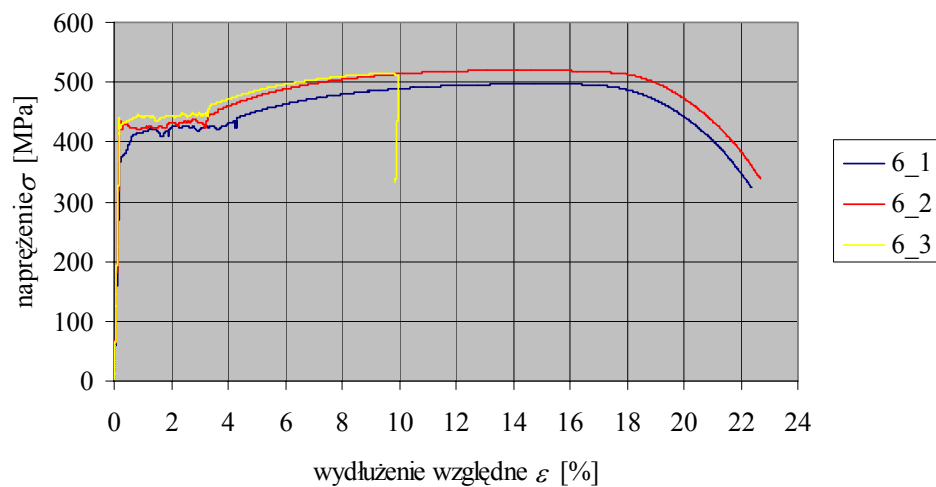
Zastosowanie w badaniach	:	zbrojenie dolne w belkach serii I, II zbrojenie górne w belkach serii I, II, III
Średnica $d$ [mm]	:	12
Pole przekroju $S_0$ [mm <sup>2</sup> ]	:	113,10
Początkowa długość pomiarowa $L_0$ [mm]	:	120
Długość robocza próbki $L_c$ [mm]	:	160
Długość całkowita próbki $L_t$ [mm]	:	280

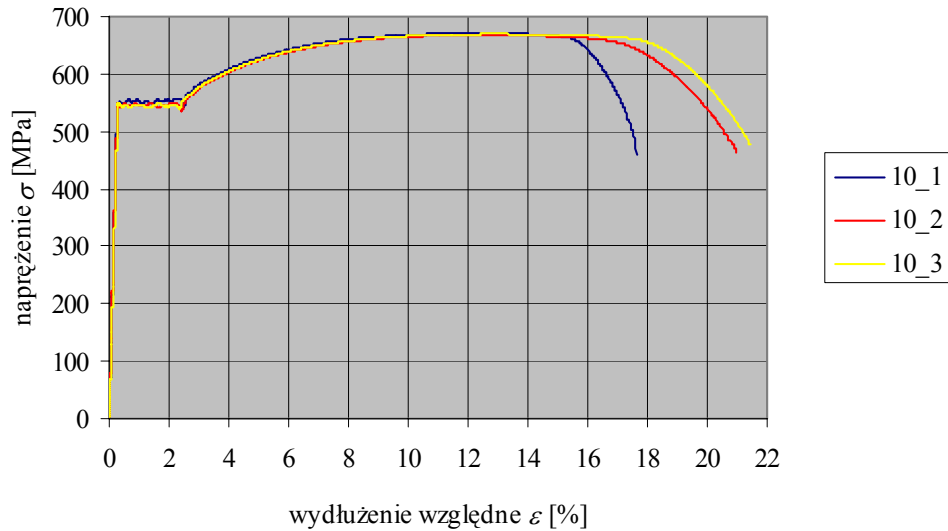
L.p.	Próbka	$f_{yi}$ [MPa]	$f_y$ [MPa]	$f_{ii}$ [MPa]	$f_i$ [MPa]	$E_{si}$ [GPa]	$E_s$ [GPa]
1	12_1	544	563 (18,7)	662	667 (4,64)	210	202 (7,87)
2	12_2	564		668		195	
3	12_3	581		671		103	



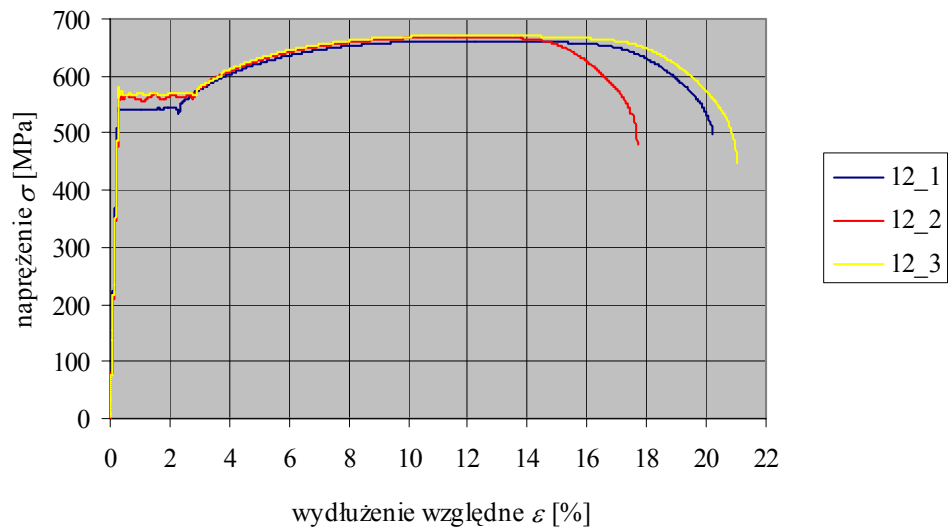
Rys. 4.13 – Wykres  $\sigma - \varepsilon$  dla prętów średnicy 4 mm



Rys. 4.14 – Wykres  $\sigma - \varepsilon$  dla prętów średnicy 6 mm



Rys. 4.15 – Wykres  $\sigma - \varepsilon$  dla prętów średnicy 10 mm



Rys. 4.16 – Wykres  $\sigma - \varepsilon$  dla prętów średnicy 12 mm

Należy podkreślić, że stal gładka wykorzystana na strzemiona (średnice 4 i 6 mm) wykazała w badaniach różne właściwości (tab. 4.4, 4.5 oraz rys. 4.13, 4.14). Nie wpływa to jednak na dalsze wyniki pomiarów oraz analizy porównawcze, będące bezpośrednim celem niniejszej pracy. Zadaniem strzemion było bowiem jedynie zapewnienie większej nośności na ścinanie niż na zginanie.

Na zbrojenie podłużne belek wykorzystano stal gatunku B500SP ze znakiem jakości EPSTAL<sup>®</sup>. Stal tego typu charakteryzuje się podwyższoną ciągliwością. Według normy [N6] należy do najwyższej klasy ciągliwości C. Jest to cecha szczególnie pożądana w przypadku prętów do zbrojenia konstrukcji obciążanych dynamicznie.

#### 4.4.3. Beton

Beton wykonano w warunkach laboratoryjnych z następujących składników:

- cement CEM II/A-LL 42,5R (wg [N5]),
- piasek frakcji 0-2 mm (kopalnia Mietków, woj. dolnośląskie),
- kruszywo otoczkowe frakcji 2-8, 8-16 mm (kopalnia Mietków, woj. dolnośląskie),
- woda wodociągowa.

Dla uzyskania żądanej klasy betonu C25/30 (B30) opracowano własną recepturę. Do określenia współczynnika cementowo – wodnego posłużono się zależnością Bolomeya [19], w postaci jak poniżej:

$$\frac{C}{W} = \frac{f_{cm,cube}}{A} + a = \frac{1,1 \cdot f_{ck,cube}}{A} + a, \quad (4.5)$$

gdzie:  $f_{cm,cube}$  – średnia wytrzymałość kostkowa betonu na ściskanie,

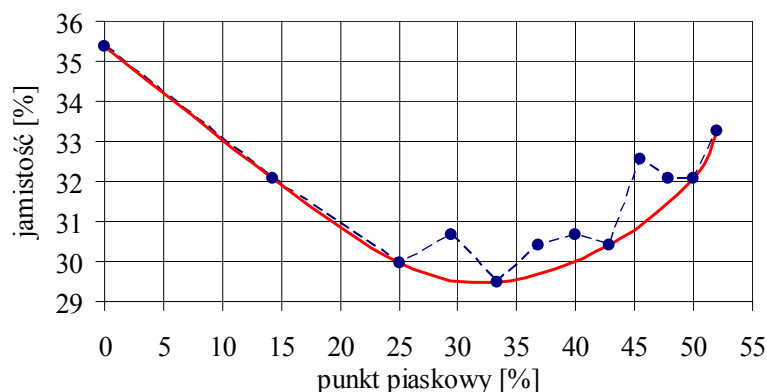
$A$  – współczynnik zależny od wytrzymałości cementu i rodzaju kruszywa ( $A = 21$ ),

$a$  – współczynnik zależny od jakości cementu ( $a = 0,5$ ).

$f_{ck,cube}$  – charakterystyczna wytrzymałość kostkowa betonu na ściskanie (zał. 30 MPa).

Współczynnik wiążący wytrzymałość średnią i charakterystyczną zależny jest od poziomu wykonywania. Dla warunków laboratoryjnych przyjęto go jako 1,1. Obliczony współczynnik cementowo – wodny wyniósł 2,1.

Skład granulometryczny kruszywa określono metodą iteracji. Dobrano w ten sposób mieszankę o minimalnej jamistości (maksymalnej szczelności), przy czym przyjęto stosunek frakcji 2-8 i 8-16 jako 1. Wykres jamistości kruszywa w zależności od punktu piaskowego pokazano poniżej (rys. 4.17).



Rys. 4.17 – Jamistość kruszywa w zależności od punktu piaskowego

Ostatecznie wykonano beton o składzie jak w tabeli 4.8 i konsystencji plastycznej klasy S2 (określonej metodą opadu stożka).

Tabela 4.8 – Skład betonu

Składnik	Ilość [kg/m <sup>3</sup> ]
Cement CEM II/A-LL 42,5R	300
P 0-2	639
Ż 2-8	639
Ż 8-16	639
Woda	143

Po 28 dniach dojrzewania, w normowych warunkach ciepłno-wilgotnościowych, przeprowadzono badania wytrzymałości na ściskanie w prasie hydraulicznej EDB 400 (fot. 4.15). Klasę betonu określono według [N7] oraz [9] na próbkach sześciennych o wymiarach 150x150x150 mm. Dla każdego cyklu betonowania wykonano próbę ściskania na 3 próbkach.



Fot. 4.15 – Prasa hydrauliczna EDB 400

Wyniki badań wytrzymałościowych zestawiono w tabeli 4.9.

Tabela 4.9 – Wyniki badań wytrzymałościowych do określenia klasy betonu

Data betonowania/ data badania	Oznaczenie próbki	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	Gęstość średnia [kg/m <sup>3</sup> ]	$P_f$ [kN]	$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$s$ [MPa]	$v$ [%]
24.04.2008/ 21.05.2008	001	2303	2316	720	32,20*	35,84	3,69	10
	002	2320		800	35,75			
	003	2326		890	39,57			
29.04.2008/ 27.05.2008	001	2292	2293	760	33,98	34,07	0,30	0,88
	002	2301		770	34,40			
	003	2285		760	33,82*			
07.05.2008/ 04.06.2008	001	2332	2328	750	33,79*	35,73	2,27	6,4
	002	2318		840	38,22			
	003	2335		780	35,17			



Tabela 4.9 (c. d.) – Wyniki badań wytrzymałościowych do określenia klasy betonu

Data betonowania/ data badania	Oznaczenie próbki	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	Gęstość średnia [kg/m <sup>3</sup> ]	$P_f$ [kN]	$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$s$ [MPa]	$v$ [%]
12.05.2008/ 09.06.2008	001	2274	2278	720	32,14	32,77	1,12	3,4
	002	2285		720	32,12*			
	003	2275		760	34,07			
15.05.2008/ 12.06.2008	001	2297	2289	750	33,20	32,10	0,96	3,0
	002	2280		710	31,65			
	003	2291		715	31,46*			

\* wytrzymałość minimalna  $f_{c\ min,cube}$

gdzie:  $P_f$  – siła niszcząca,

$f_{ci,cube}$  – wytrzymałość na ściskanie próbki  $i$ ,

$f_{cm,cube}$  – średnia wytrzymałość na ściskanie,

$s$  – odchylenie standardowe,

$v$  – wskaźnik zmienności.

Klasę betonu określono na podstawie poniższego kryterium [19]:

$$f_{c\ min,cube} \geq \alpha(f_{ck,cube} - 4), \quad (4.6)$$

gdzie:  $\alpha$  – współczynnik zależny od ilości próbek  $n$  ( $\alpha = 1,15$  dla  $n = 3$ ).

Dla założonej klasy betonu C25/30 (B30) wytrzymałość charakterystyczna  $f_{ck,cube}$  wynosi 30 MPa. Kryterium (4.6) zostało spełnione dla każdego z cykli betonowania. Beton można zatem zaklasyfikować do założonej przy projektowaniu klasy. Dodatkowo obliczono wskaźnik zmienności  $v$ , pozwolił on sklasyfikować poziom wykonania betonu jako dobry (cykl betonowania 1) oraz bardzo dobry (cykle betonowania 2 – 5).

Próbki sześciennie i cylindryczne posłużyły ponadto do określenia właściwości betonu w przeddzień badania belki. Badania przeprowadzono w maszynie wytrzymałościowej Instron (fot. 4.16). Na próbkach sześciennych określono średnie wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie przy rozłupywaniu (metoda brazylijska). W próbie rozłupywania wytrzymałość na rozciąganie jest zależna od siły niszczącej, przyłożonej osiowo do próbki w sposób ciągły (fot. 4.17) i wyraża się wzorem [19]:

$$f_t = \frac{20P}{\pi \cdot h \cdot l}, \quad (4.7)$$

gdzie:  $P$  – siła niszcząca [kN],

$h$  – wysokość próbki (15 cm),

$l$  – długość próbki (15 cm).

Na fotografii 4.17 pokazano próbkę przygotowaną do badania wytrzymałości na rozciąganie w próbie rozłupywania.



Fot. 4.16 – Maszyna wytrzymałościowa Instron



Fot. 4.17 – Próbkę do badania wytrzymałości na rozciąganie

Wyniki badań (wytrzymałości na ściskanie  $f_c$  oraz rozciąganie  $f_{ct}$ ) zestawiono dla poszczególnych belek w tabelach 4.10 – 4.12. Dla wartości średnich podano odchylenia standardowe.

Tabela 4.10 – Wyniki badania betonu belek serii I

Belka	$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$f_{cti}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]
B-I-1	57,65	50,3 (7,64)	4,06	3,80 (0,25)
	42,39		3,79	
	50,72		3,56	
B-I-2	56,10	55,2 (0,83)	3,47	3,72 (0,25)
	54,44		3,71	
	55,24		3,97	
B-I-3	50,38	49,6 (0,81)	3,10	3,23 (0,13)
	48,77		3,23	
	49,70		3,36	

Tabela 4.11 – Wyniki badania betonu belek serii II

Belka	$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$f_{cti}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]
B-II-1	50,61	47,9 (2,45)	2,82	3,20 (0,36)
	45,88		3,53	
	47,12		3,25	

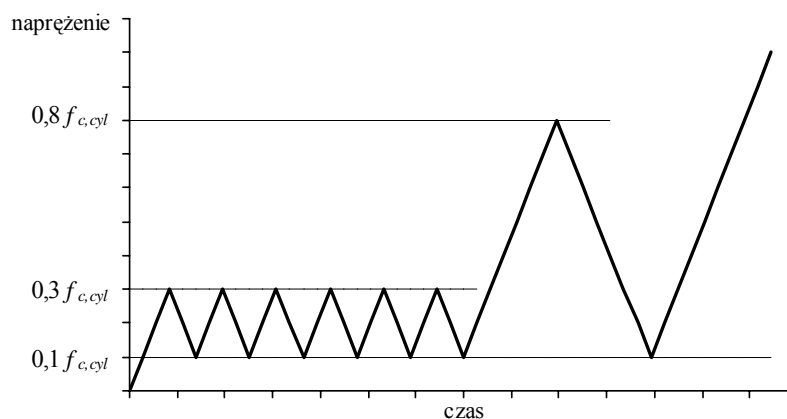
Tabela 4.11 (c. d.) – Wyniki badania betonu belek serii II

Belka	$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$f_{cti}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]
B-II-2	53,06	52,8	2,87	3,05
	53,65		2,99	
	51,66	(1,02)	3,30	(0,22)
B-II-3	50,40	52,9	3,49	3,39
	53,99		3,52	
	54,49	(2,23)	3,16	(0,20)

Tabela 4.12 – Wyniki badania betonu belek serii III

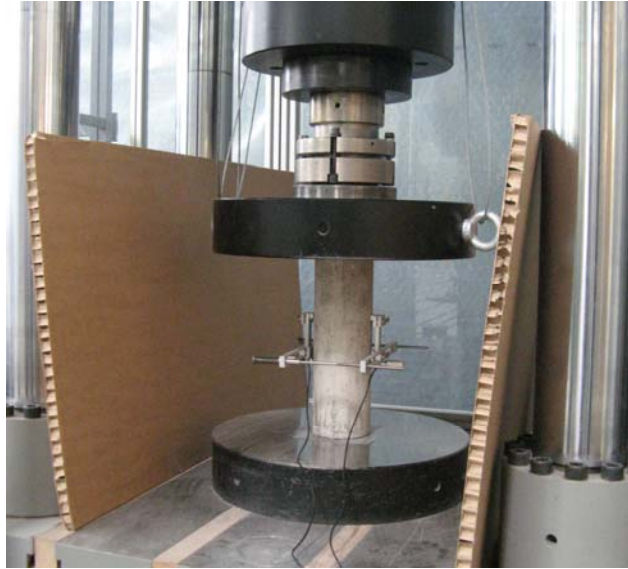
Belka	$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$f_{cti}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]
B-III-1	47,49	45,7	3,10	2,91
	43,93		2,65	
	45,69	(1,78)	2,97	(0,23)
B-III-2	47,22	44,2	3,23	2,92
	44,03		2,87	
	41,30	(2,96)	2,65	(0,29)
B-III-3	47,62	47,0	3,23	3,27
	43,95		3,19	
	49,39	(2,77)	3,39	(0,10)

Metoda badań modułu Younga nie jest znormalizowana. Podczas badań można kierować się wskazówkami zawartymi m. in. w [43] i [N1]. W pracy wykorzystano metodę badania opracowaną przez kadrę naukową Akredytowanego Laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej. Moduł Younga określono na próbkach cylindrycznych. Każdej z belek przyporządkowano po 6 próbek. Badanie przeprowadzono w maszynie wytrzymałościowej Instron (fot. 4.13). Skrócenie próbki mierzono za pomocą ekstensometru. Próbka była obciążana w 6 cyklach siłą odpowiadającą naprężeniu od  $0,1$  do  $0,3$  wytrzymałości walcowej na ściskanie –  $f_{c,cyl}$ . W 7 cyklu obciążenie zwiększano (naprężenie wzrastało do  $0,8 f_{c,cyl}$ ). Następnie zwiększano obciążenie do zniszczenia próbki. Sieczny moduł Younga określano w ostatnim cyklu obciążenia w przedziale  $0,1 - 0,3 f_{c,cyl}$ .



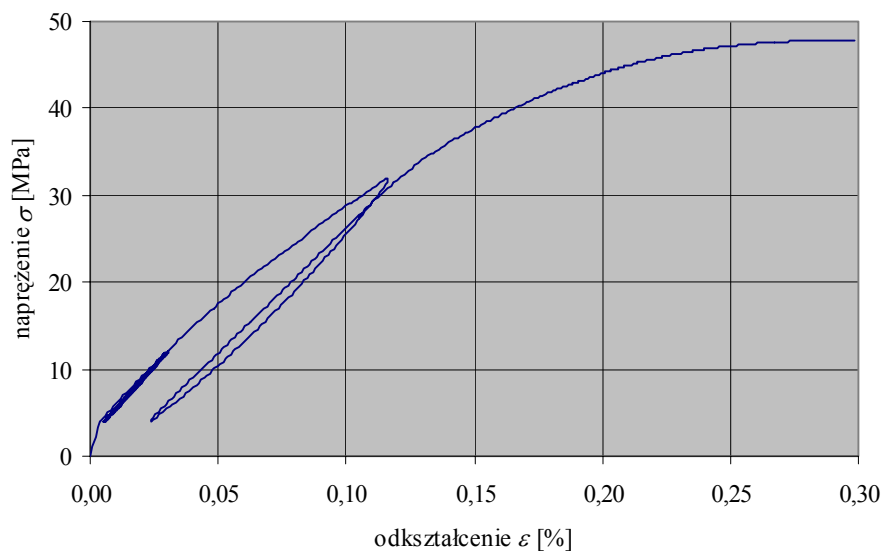
Rys. 4.18 – Cykle obciążenia próbki do wyznaczenia modułu Younga

Badania przeprowadzono dla 6 próbek walcowych dla każdej belki. Zgodnie z zaleceniem instrukcji [N1] odrzucono wyniki prób, w których naprężenie niszczące  $f_{c,cyl}$  różniło się więcej niż o 20% od założonego w cyklach obciążenia  $f_{c,cyl}^*$ . Próbkę gotową do badań z założonym ekstensometrem pokazano na fotografii 4.18.



Fot. 4.18 – Próbkę do badania modułu Younga

Na rysunku 4.19 pokazano przykładowy wykres naprężenie – odkształcenie, zarejestrowany w jednym z badań. Wyniki badań modułu Younga betonu dla poszczególnych belek zestawiono w tabelach 4.13 – 4.21. Dla wartości średnich podano odchylenia standardowe.



Rys. 4.19 – Wykres  $\sigma - \varepsilon$  dla próbki betonowej  
Tabela 4.13 – Moduł Younga betonu belki B-I-1

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta = \left  \frac{f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}}{f_{c,cyl}^*} \right $ [%]
1	26,41	38,60	40,00	3,5
2	37,85	42,31		5,8
3	29,73	39,52		1,2
4	29,98	47,84		19,6
5	33,04	42,43		6,1
6	29,64	34,98		12,6

$E_{cm} = 31,11$  GPa (3,911 GPa)

Tabela 4.14 – Moduł Younga betonu belki B-I-2

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta = \left  \frac{f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}}{f_{c,cyl}^*} \right $ [%]
1	29,20	35,32	44,00	19,7
2	36,26	35,76		18,7
3	27,35	42,46		3,5
4	23,26	41,76		5,1
5	33,02	42,43		3,6

$E_{cm} = 29,82$  GPa (5,030 GPa)

Tabela 4.15 – Moduł Younga betonu belki B-I-3

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta = \left  \frac{f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}}{f_{c,cyl}^*} \right $ [%]
1	26,40	34,27	40,00	14,3
2	24,68	35,24		11,9
3	30,26	43,64		9,1
4	34,95	39,09		2,3
5	32,35	47,52		18,8
6	31,28	42,74		6,9

$E_{cm} = 29,99$  GPa (3,822 GPa)

Tabela 4.16 – Moduł Younga betonu belki B-II-1

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta = \left  \frac{f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}}{f_{c,cyl}^*} \right $ [%]
1	28,12	34,4	38,00	9,6
2	24,66	44,8		17,9
3	34,45	37,3		1,9

$E_{cm} = 29,08$  GPa (4,964 GPa)

Tabela 4.17 – Moduł Younga betonu belki B-II-2

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta = \left  \frac{f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}}{f_{c,cyl}^*} \right $ [%]
1	24,56	35,54	40,00	11,2
2	30,81	37,76		5,6
3	34,67	44,66		11,7
4	32,79	45,18		13,0
5	31,57	33,26		16,9

$E_{cm} = 30,88$  GPa (3,822 GPa)

Tabela 4.18 – Moduł Younga betonu belki B-II-3

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta =  f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}  / f_{c,cyl}^*$ [%]
1	28,19	34,01	40,00	15,0
2	24,55	40,84		2,1
3	30,04	36,09		9,8
4	30,21	44,12		10,3
5	31,11	34,88		12,8

$E_{cm} = 28,82$  GPa (2,613 GPa)

Tabela 4.19 – Moduł Younga betonu belki B-III-1

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta =  f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}  / f_{c,cyl}^*$ [%]
1	30,54	29,11	35,00	16,8
2	25,12	35,71		2,0
3	27,19	30,36		13,3
4	31,41	33,67		3,8
5	28,65	33,33		4,8

$E_{cm} = 28,58$  GPa (2,538 GPa)

Tabela 4.20 – Moduł Younga betonu belki B-III-2

L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta =  f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}  / f_{c,cyl}^*$ [%]
1	28,72	36,13	33,00	9,5
2	26,63	33,17		0,5
3	23,41	31,6		4,2
4	25,45	35,61		7,9
5	31,31	26,48		19,8

$E_{cm} = 27,11$  GPa (3,035 GPa)

Tabela 4.21 – Moduł Younga betonu belki B-III-3

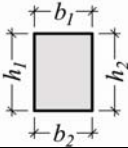
L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta =  f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}  / f_{c,cyl}^*$ [%]
1	30,59	33,78	35,00	3,5
2	34,82	34,82		0,5
3	25,08	37,02		5,8
4	26,93	36,23		3,5
5	31,49	37,42		6,9

$E_{cm} = 29,78$  GPa (3,848 GPa)

#### 4.4.4. Badania belek

Przed przystąpieniem do właściwych badań elementy belkowe zinwentaryzowano. Zostały zmierzone i zważone. Przekrój poprzeczny zmierzono w trzech miejscach (w przekroju środkowym – II i na końcach elementów – I, III). Wyniki inwentaryzacji zestawiono w tabeli 4.22.

Tabela 4.22 – Wyniki inwentaryzacji elementów

Belka		Wymiary [mm]				Masa [kg]	Masa [kg/m]
		przekrój I	przekrój II	przekrój III	średnia		
B-I-1	$h_1$	258	259	258	258	310	93,94
	$h_2$	258	259	255			
	$b_1$	153	155	152	154		
	$b_2$	154	156	151			
B-I-2	$h_1$	255	256	253	256	315	95,45
	$h_2$	255	257	257			
	$b_1$	152	160	151	154		
	$b_2$	152	156	154			
B-I-3	$h_1$	252	256	253	255	303	91,82
	$h_2$	253	258	257			
	$b_1$	150	157	155	153		
	$b_2$	150	154	152			
B-II-1	$h_1$	255	256	252	255	313	94,85
	$h_2$	255	257	252			
	$b_1$	155	160	155	154		
	$b_2$	151	154	150			
B-II-2	$h_1$	254	256	255	255	314	95,15
	$h_2$	253	256	254			
	$b_1$	154	160	152	154		
	$b_2$	150	157	150			
B-II-3	$h_1$	251	258	255	255	309	93,64
	$h_2$	250	257	256			
	$b_1$	151	153	150	151		
	$b_2$	150	154	149			
B-III-1	$h_1$	251	254	251	252	319	96,67
	$h_2$	253	253	250			
	$b_1$	154	161	152	154		
	$b_2$	150	156	151			
B-III-2	$h_1$	252	256	255	255	312	94,55
	$h_2$	253	257	255			
	$b_1$	150	152	152	153		
	$b_2$	152	158	154			
B-III-3	$h_1$	253	255	252	253	304	92,12
	$h_2$	255	254	250			
	$b_1$	152	153	152	152		
	$b_2$	152	150	152			

Wyniki badań belek przedstawiono w tablicach oraz na wykresach. Tabele 4.23 – 4.40 zawierają wyniki pomiarów częstotliwości własnych oraz liczb tłumienia dla poszczególnych kroków obciążenia.

Tabela 4.22 – Częstotliwości własne belki B-I-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	93,1	246,3	460,0	718,8	1013,6	1326,9
1	10,02	0,29	89,4	244,2	448,6	711,0	995,8	1311,1
2	15,05	0,43	83,3	235,2	436,4	683,5	966,8	1276,4
3	20,01	0,57	80,0	222,5	422,8	668,3	939,4	1235,3
4	25,02	0,71	78,0	214,9	412,1	654,7	924,6	1215,6
5	30,11	0,86	77,6	211,7	405,6	648,2	917,6	1206,7
6	35,11	1,00	73,5	207,9	382,9	633,9	879,9	1181,6

Tabela 4.23 – Liczby tłumienia belki B-I-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	0,541	0,377	0,346	0,348	0,340	0,352
1	10,02	0,29	0,787	0,415	0,530	0,403	0,427	0,408
2	15,05	0,43	0,981	0,538	0,634	0,558	0,558	0,508
3	20,01	0,57	1,061	0,777	0,725	0,533	0,671	0,631
4	25,02	0,71	1,279	1,051	0,939	0,878	0,805	0,719
5	30,11	0,86	1,174	0,973	0,835	0,719	0,614	0,658
6	35,11	1,00	1,112	1,020	0,978	0,751	0,913	0,703

Tabela 4.24 – Częstotliwości własne belki B-I-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	90,0	233,3	439,6	712,0	1001,7	1293,8
1	10,48	0,28	85,9	232,0	428,5	701,3	986,1	1278,3
2	11,99	0,32	84,0	230,5	422,6	692,7	980,1	1267,6
3	15,02	0,40	81,2	225,1	416,4	676,1	962,5	1253,5
4	20,07	0,53	79,3	219,0	412,7	665,3	945,6	1232,7
5	25,06	0,66	78,0	213,6	407,3	658,8	931,3	1213,9
6	30,16	0,80	77,2	209,2	400,6	652,5	923,0	1199,1
7	37,74	1,00	71,9	204,0	370,0	620,5	882,0	1121,7

Tabela 4.25 – Liczby tłumienia belki B-I-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	1,103	0,912	0,687	0,439	0,431	0,526
1	10,48	0,28	1,601	0,933	0,805	0,498	0,481	0,474
2	11,99	0,32	1,719	0,960	1,287	0,846	0,502	0,547
3	15,02	0,40	1,960	1,120	1,279	0,781	0,608	0,615
4	20,07	0,53	1,877	1,174	1,106	0,721	0,621	0,645
5	25,06	0,66	1,909	1,288	0,956	0,730	0,566	0,682
6	30,16	0,80	1,056	1,190	0,983	0,722	0,661	0,721
7	37,74	1,00	1,896	1,253	1,049	0,898	0,624	0,870



Tabela 4.26 – Częstotliwości własne belki B-I-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	-	-	-	-	-	-
1	9,92	0,28	-	-	-	-	-	-
2	15,00	0,43	83,2	233,4	440,0	692,5	969,2	1283,9
3	19,92	0,57	80,8	225,9	431,2	678,1	952,0	1258,2
4	24,91	0,71	79,1	218,6	419,9	666,2	939,5	1232,2
5	29,98	0,86	78,7	214,6	410,6	655,1	930,8	1224,3
6	34,99	1,00	74,6	212,3	390,9	643,4	896,5	1201,8

Tabela 4.27 – Liczby tłumienia belki B-I-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	-	-	-	-	-	-
1	9,92	0,28	-	-	-	-	-	-
2	15,00	0,43	0,967	0,650	0,608	0,808	0,613	0,555
3	19,92	0,57	0,980	0,705	0,636	0,563	0,638	0,700
4	24,91	0,71	1,043	0,902	0,721	0,883	0,725	0,742
5	29,98	0,86	0,870	0,896	0,726	0,885	0,669	0,616
6	34,99	1,00	0,977	0,897	0,792	0,873	1,439	0,657

Tabela 4.28 – Częstotliwości własne belki B-II-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	-	-	-	-	-	-
1	9,04	0,26	88,5	244,0	444,6	707,5	988,7	1303,8
2	15,04	0,43	80,8	231,7	429,3	675,0	949,1	1257,0
3	20,03	0,57	78,1	218,8	418,1	660,7	926,8	1221,7
4	24,92	0,72	77,2	213,6	408,2	649,3	916,5	1207,3
5	29,85	0,86	77,0	211,9	403,0	643,9	910,0	1199,8
6	34,84	1,00	72,4	209,8	382,8	631,3	877,9	1169,6

Tabela 4.29 – Liczby tłumienia belki B-II-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	-	-	-	-	-	-
1	9,04	0,26	0,852	0,395	0,591	0,428	0,484	0,479
2	15,04	0,43	1,632	0,483	0,750	0,770	0,703	0,783
3	20,03	0,57	1,450	1,327	0,827	0,687	0,834	0,756
4	24,92	0,72	1,395	0,841	0,941	0,858	0,851	0,746
5	29,85	0,86	1,306	0,710	0,855	0,781	0,784	0,682
6	34,84	1,00	1,283	0,666	1,057	0,774	0,885	0,781

Tabela 4.30 – Częstotliwości własne belki B-II-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	91,6	243,2	452,7	712,2	1000,9	1311,2
1	7,04	0,19	88,8	241,1	444,6	706,2	987,1	1299,0
2	14,84	0,40	79,0	220,1	420,6	664,6	932,0	1225,5
3	19,94	0,54	76,8	212,8	407,7	649,4	916,0	1201,1
4	24,97	0,67	75,9	207,6	397,3	637,1	903,1	1185,1
5	30,05	0,81	75,8	205,8	392,7	630,9	896,3	1177,5
6	37,14	1,00	67,2	200,2	353,8	593,2	834,7	1088,3

Tabela 4.31 – Liczby tłumienia belki B-II-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	0,560	0,355	0,391	0,353	0,370	0,367
1	7,04	0,19	0,667	0,397	0,483	0,384	0,438	0,428
2	14,84	0,40	1,181	1,113	0,798	0,584	0,749	0,762
3	19,94	0,54	1,179	1,016	0,920	1,029	0,760	0,869
4	24,97	0,67	1,140	1,090	0,988	1,151	0,696	0,790
5	30,05	0,81	0,990	0,955	0,882	0,927	0,752	0,738
6	37,14	1,00	0,977	0,942	0,771	0,796	0,777	0,831

Tabela 4.32 – Częstotliwości własne belki B-II-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	92,4	242,3	457,4	717,6	1011,1	1327,6
1	8,44	0,23	88,2	241,2	445,2	708,3	992,6	1308,5
2	14,99	0,42	80,4	226,9	428,8	671,7	947,1	1254,5
3	20,08	0,56	78,2	217,5	415,1	656,9	928,8	1224,3
4	24,95	0,69	77,2	211,8	405,9	647,6	918,4	1207,0
5	29,85	0,83	76,7	207,9	396,7	635,4	904,7	1193,3
6	36,02	1,00	72,3	205,9	376,5	-	870,9	1161,7

Tabela 4.33 – Liczby tłumienia belki B-II-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	0,533	0,050	0,329	0,327	0,426	0,335
1	8,44	0,23	0,816	0,235	0,538	0,402	0,481	0,486
2	14,99	0,42	1,081	0,753	0,661	0,929	0,724	0,602
3	20,08	0,56	0,919	0,910	0,775	0,670	0,955	0,903
4	24,95	0,69	1,071	1,060	0,865	0,949	0,839	0,862
5	29,85	0,83	1,042	1,132	0,942	0,909	0,817	0,811
6	36,02	1,00	1,038	0,920	0,842	-	0,741	0,685

Tabela 4.34 – Częstotliwości własne belki B-III-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	92,4	242,3	457,4	717,6	1011,1	1327,6
1	4,95	0,14	90,1	239,7	447,9	703,5	992,3	1300,5
2	9,50	0,28	86,4	238,0	436,8	696,8	974,4	1285,9
3	14,89	0,43	80,7	229,1	425,4	669,0	949,0	1248,4
4	19,91	0,58	78,1	219,8	417,1	655,8	922,3	1218,5
5	24,90	0,72	76,5	211,9	405,9	643,1	910,4	1196,1
6	29,97	0,87	76,2	208,5	398,7	635,3	901,3	1184,4
7	34,36	1,00	72,6	205,7	380,8	624,3	871,9	1162,2

Tabela 4.35 – Liczby tłumienia belki B-III-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	0,533	0,050	0,329	0,327	0,426	0,335
1	4,95	0,14	0,579	0,376	0,348	0,357	0,379	0,357
2	9,50	0,28	0,754	0,380	0,498	0,401	0,476	0,402
3	14,89	0,43	1,063	0,568	0,635	1,002	0,668	0,620
4	19,91	0,58	0,976	0,737	0,673	0,603	0,671	0,622

Tabela 4.35 (c. d.) – Liczby tłumienia belki B-III-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
5	24,90	0,72	1,140	0,922	0,760	0,908	0,803	0,690
6	29,97	0,87	0,869	0,939	0,780	0,852	0,725	0,684
7	34,36	1,00	1,075	0,987	1,000	0,816	0,958	0,734

Tabela 4.36 – Częstotliwości własne belki B-III-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	92,9	245,3	457,6	716,9	1009,4	1323,2
1	4,96	0,13	92,6	244,9	456,9	715,9	1008,1	1321,8
2	9,49	0,26	89,3	243,5	446,3	711,2	991,8	1309,7
3	14,94	0,40	82,7	233,3	434,0	679,7	960,1	1269,0
4	19,92	0,54	79,4	221,2	422,1	663,9	932,3	1226,1
5	24,93	0,68	78,0	214,1	411,7	653,6	921,1	1209,8
6	29,98	0,81	77,2	210,0	404,0	646,0	912,1	1200,4
7	36,91	1,00	73,7	205,8	382,7	625,2	874,7	1162,4

Tabela 4.37 – Liczby tłumienia belki B-III-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	0,494	0,658	0,425	0,342	0,343	0,344
1	4,96	0,13	0,444	0,703	0,477	0,366	0,362	0,361
2	9,49	0,26	0,702	0,576	0,574	0,447	0,540	0,423
3	14,94	0,40	1,032	0,669	0,642	0,741	0,584	0,489
4	19,92	0,54	1,219	0,949	0,769	0,653	0,727	0,884
5	24,93	0,68	1,177	1,027	0,792	0,839	0,766	0,629
6	29,98	0,81	1,132	1,101	0,884	0,800	0,622	0,623
7	36,91	1,00	1,143	1,118	0,979	0,821	1,012	0,818

Tabela 4.38 – Częstotliwości własne belki B-III-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0	88,8	235,2	441,6	693,0	976,2	1282,2
1	4,97	0,14	88,1	234,3	440,0	690,9	973,0	1278,6
2	8,02	0,23	83,9	231,4	426,7	680,4	951,4	1258,6
3	14,95	0,42	77,3	214,0	409,7	646,4	910,4	1200,1
4	20,09	0,57	75,9	207,8	399,0	633,9	895,0	1182,8
5	24,94	0,71	75,2	204,0	391,3	623,9	884,7	1170,4
6	30,00	0,85	74,7	201,7	385,9	617,1	874,4	1159,8
7	35,22	1,00	72,1	200,1	372,9	607,8	850,8	1139,1

Tabela 4.39 – Liczby tłumienia belki B-III-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0	0,519	0,383	0,368	0,372	0,400	0,368
1	4,97	0,14	0,628	0,397	0,388	0,392	0,424	0,390
2	8,02	0,23	0,794	0,539	0,653	0,452	0,530	0,462
3	14,95	0,42	1,136	0,906	0,765	0,693	0,925	0,680
4	20,09	0,57	0,911	0,847	0,693	0,700	0,800	0,628
5	24,94	0,71	0,968	0,938	0,767	0,727	0,679	0,615

Tabela 4.39 (c. d.) – Liczby tłumienia belki B-III-3

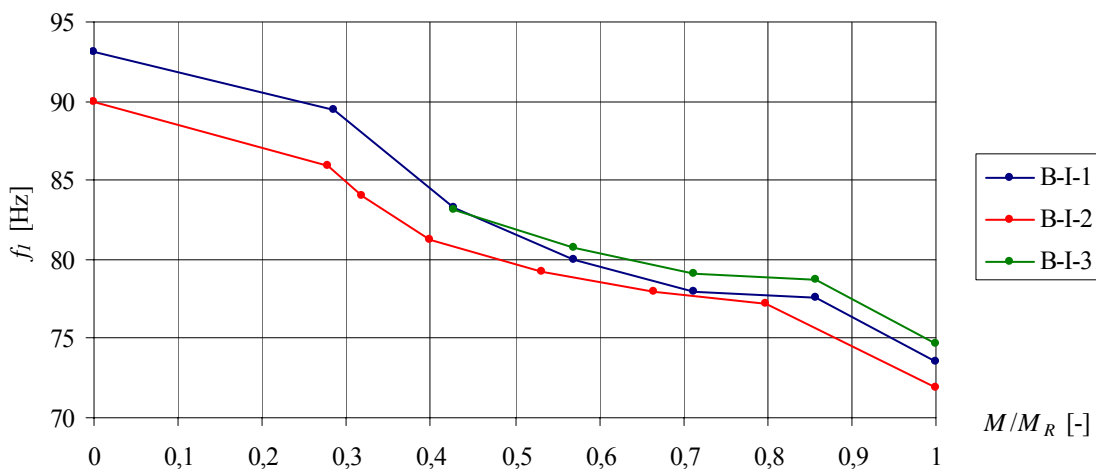
Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
6	30,00	0,85	1,065	0,965	0,842	0,764	0,717	0,664
7	35,22	1,00	1,175	0,993	0,901	0,779	0,862	0,730

Graficznie pokazano trzy pierwsze częstotliwości własne  $f$  w funkcji zaawansowania obciążenia  $M/M_R$  dla każdej z serii belek (B-I, B-II, B-III) – rysunki 4.20 – 4.28. Ponadto, dla niektórych belek pokazano sześć pierwszych, znormalizowanych częstotliwości własnych  $f_{ni}$  w funkcji momentu zginającego  $M$  – rysunki 4.29 – 4.35. Normalizację przeprowadzono według zależności:

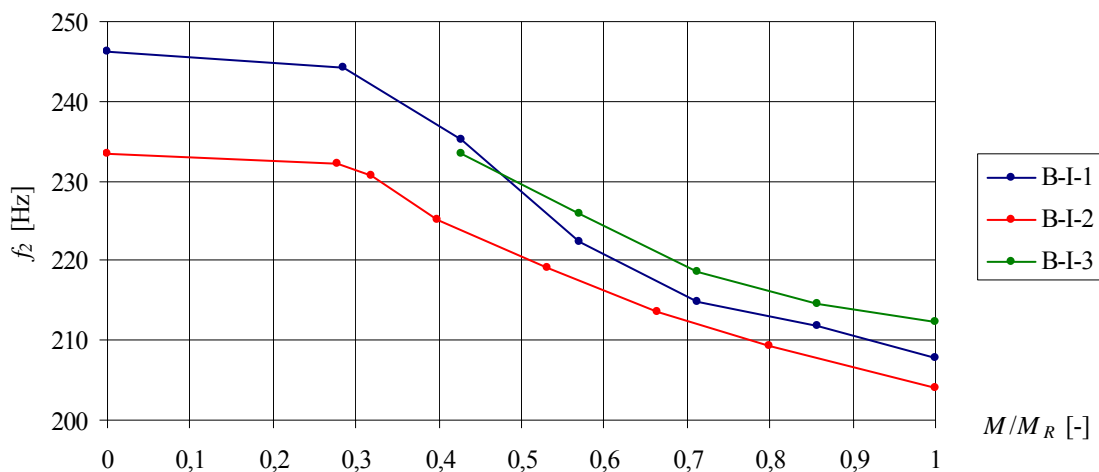
$$f_{ni} = \frac{f_i}{f_0} \cdot 100\%, \quad (4.8)$$

gdzie:  $f_{ni}$  – częstotliwość znormalizowana po  $i$ -tym kroku obciążenia ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ),  
 $f_0$  – częstotliwość przed obciążeniem belki ( $i = 0$ ),  
 $f_i$  – częstotliwość po  $i$ -tym kroku obciążenia.

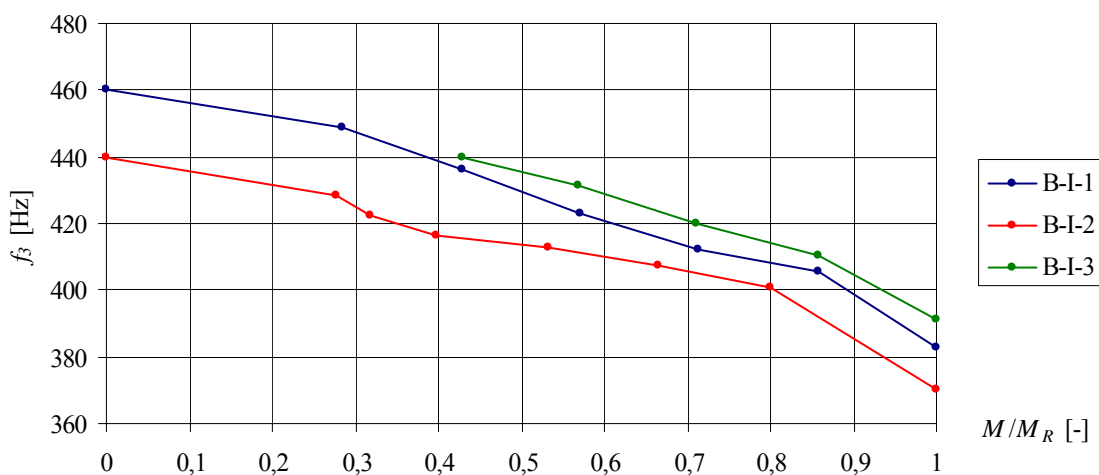
Błędy w oprogramowaniu sprzętu pomiarowego spowodowały, że nie udało się zarejestrować wyników przed obciążeniem i po pierwszym kroku w przypadku belki B-I-3 (porównaj tabela 4.26 i 4.27) oraz przed obciążeniem w przypadku belki B-II-1 (porównaj tabela 4.28 i 4.29). Skutkuje to brakiem wykresów częstotliwości znormalizowanych dla tych elementów. Dla każdej z belek pokazano trzy pierwsze gięte formy własne przed obciążaniem, po drugim kroku obciążenia (belka B-I-3) lub po pierwszym kroku obciążenia (belka B-II-1) oraz po zniszczeniu belki – rys 4.36 – 4.44.



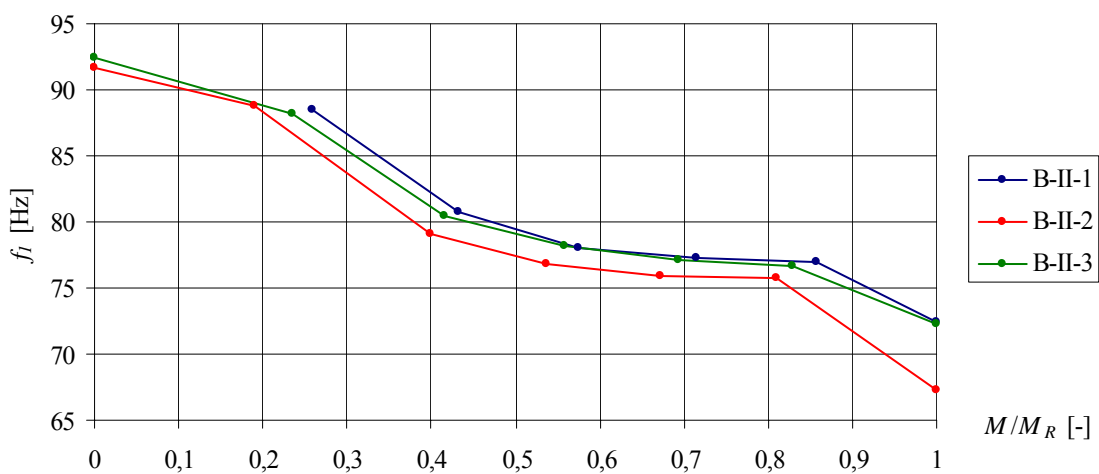
Rys. 4.20 – Pierwsza częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-I



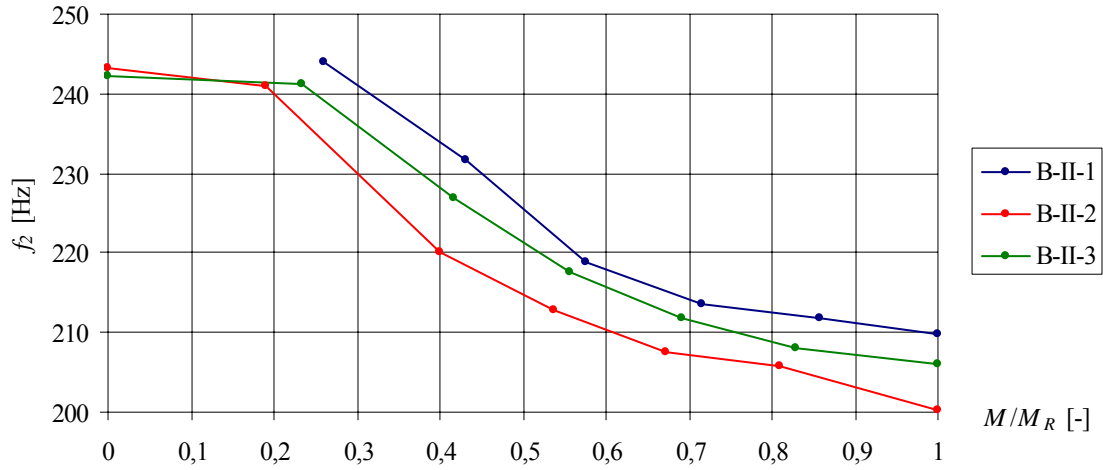
Rys. 4.21 – Druga częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-I



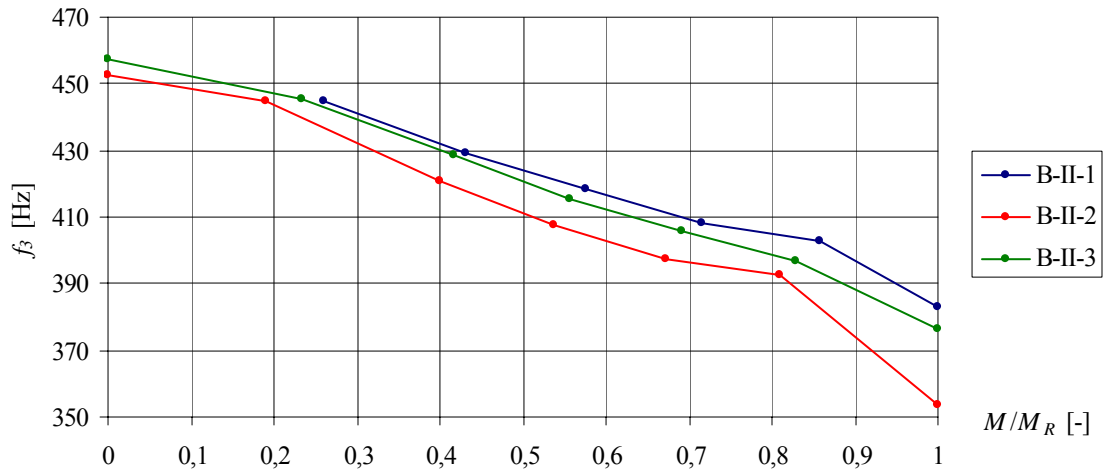
Rys. 4.22 – Trzecia częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-I



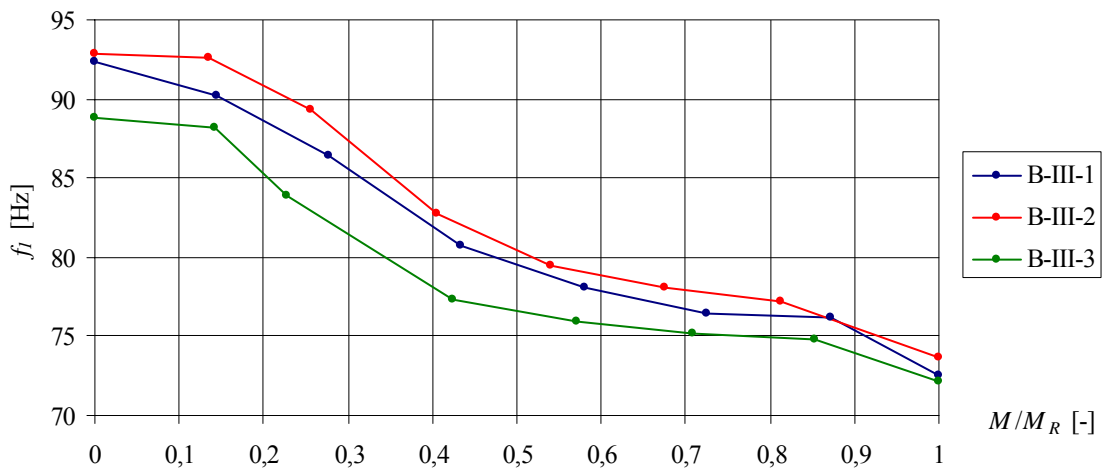
Rys. 4.23 – Pierwsza częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-II



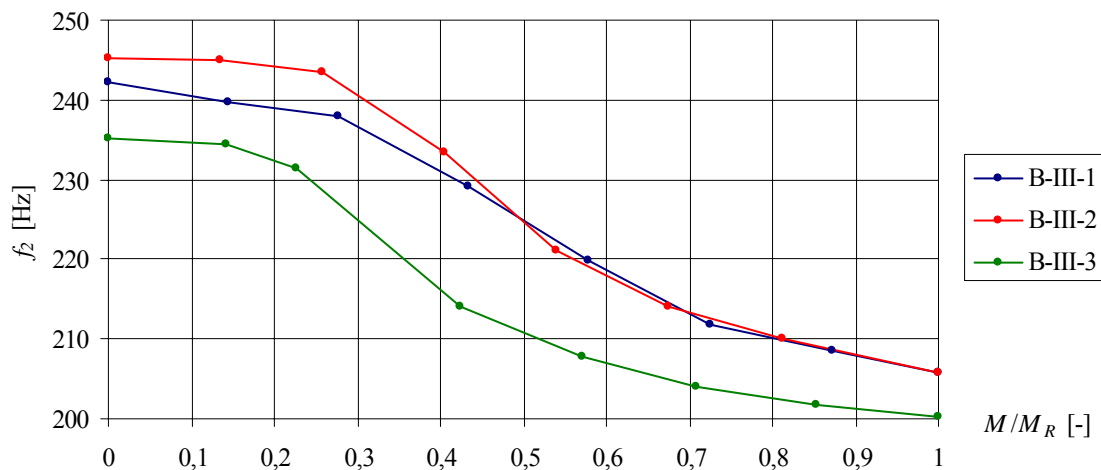
Rys. 4.24 – Druga częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-II



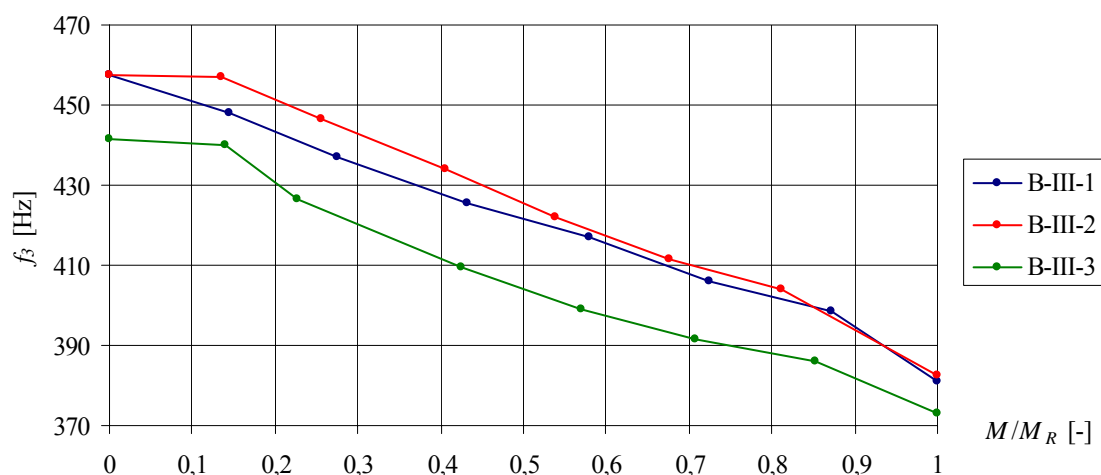
Rys. 4.25 – Trzecia częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-II



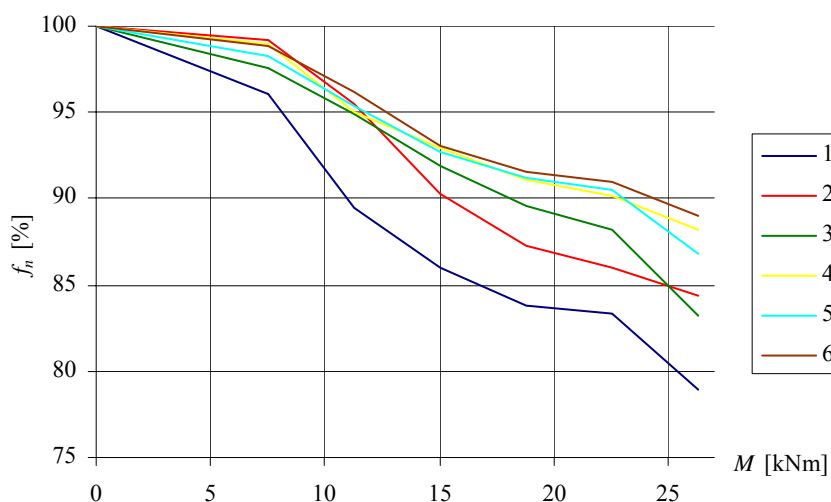
Rys. 4.26 – Pierwsza częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-III



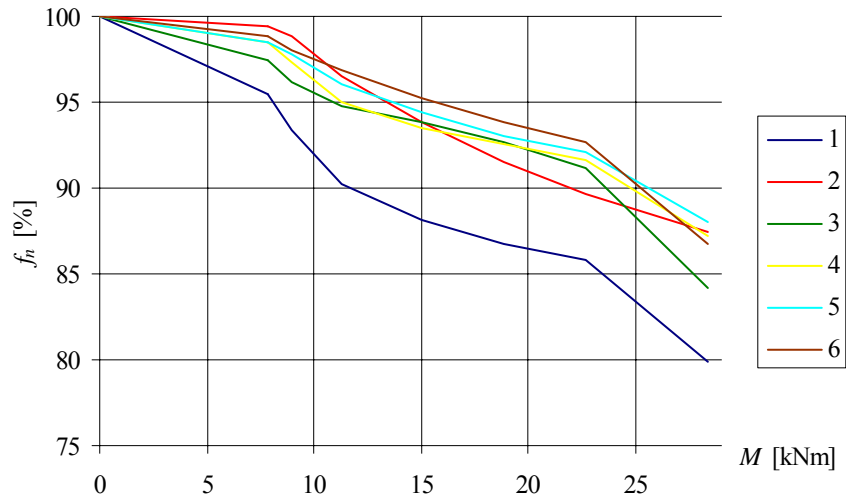
Rys. 4.27 – Druga częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-III



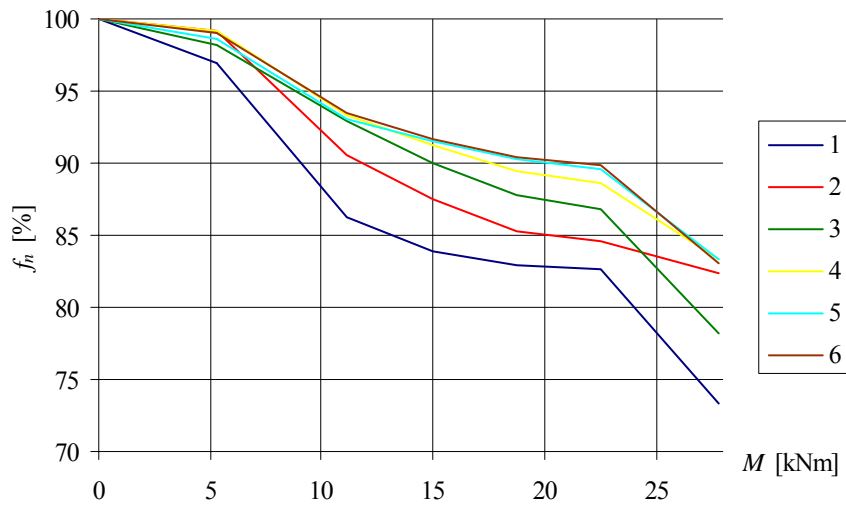
Rys. 4.28 – Trzecia częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-III



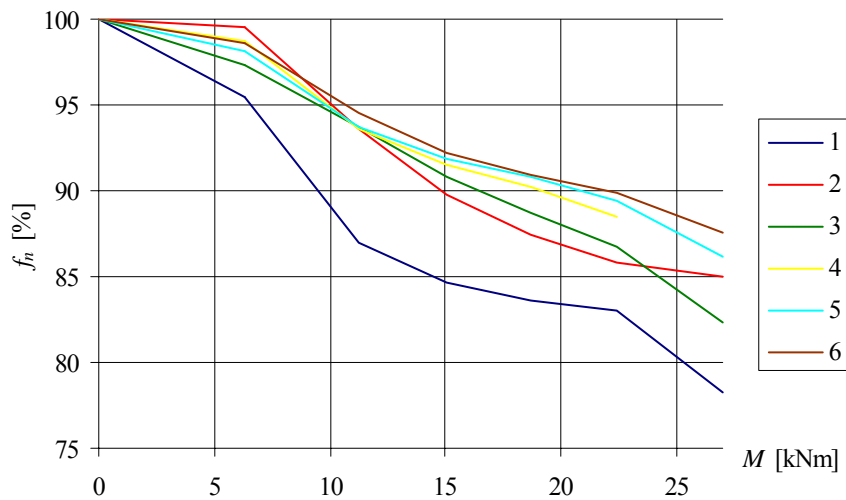
Rys. 4.29 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-I-1



Rys. 4.30 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-I-2

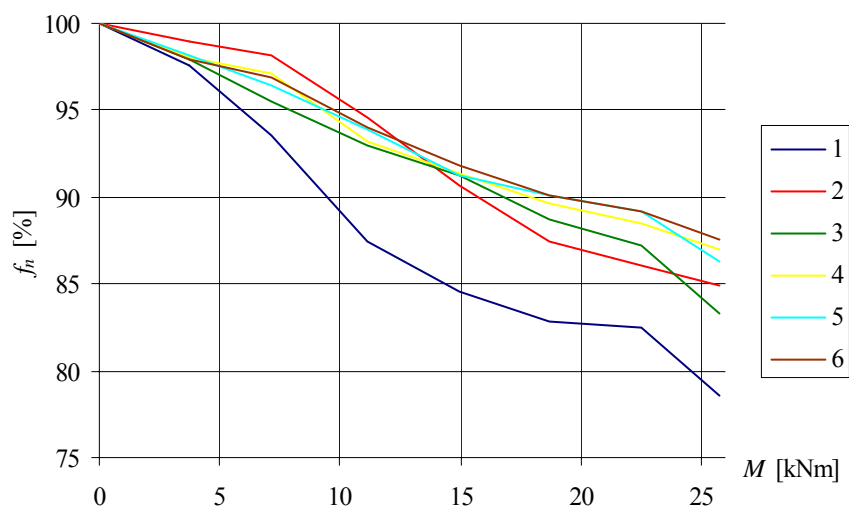


Rys. 4.31 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-II-2

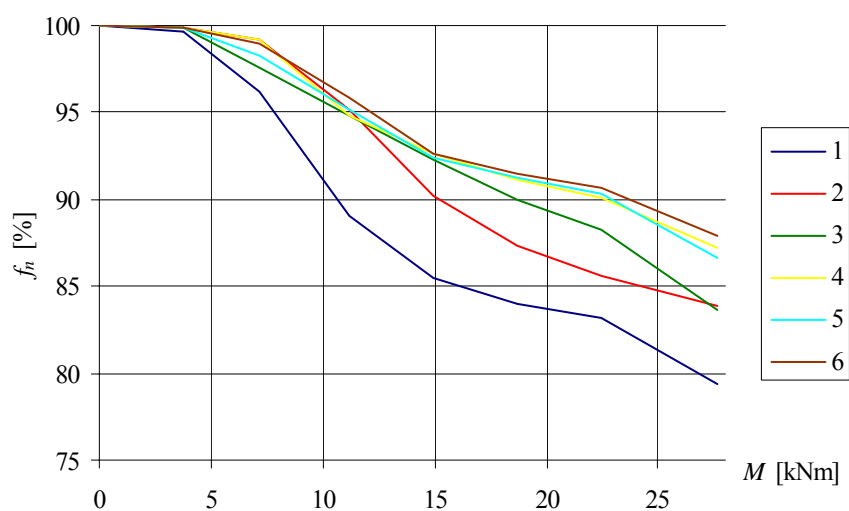


Rys. 4.32 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-II-3

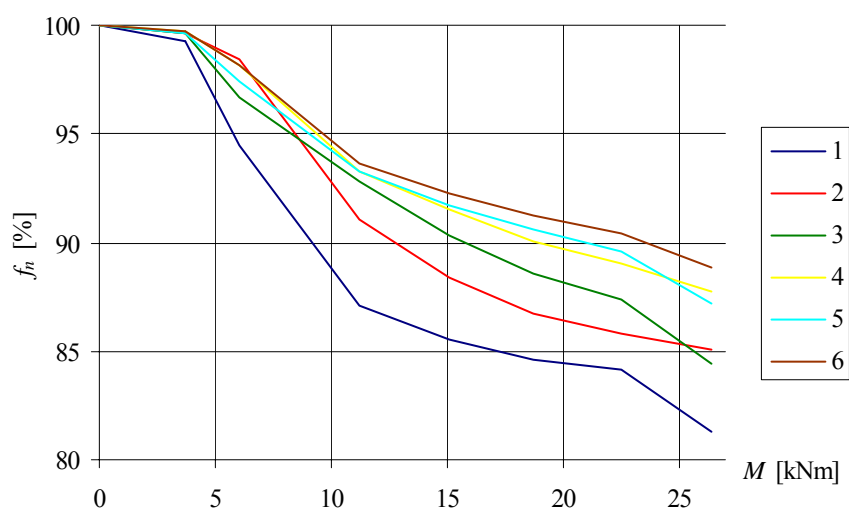




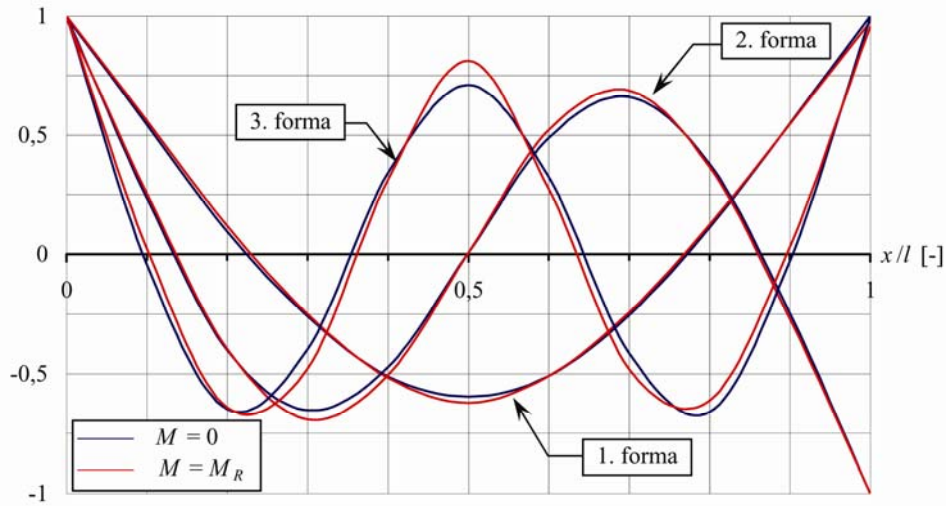
Rys. 4.33 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-III-1



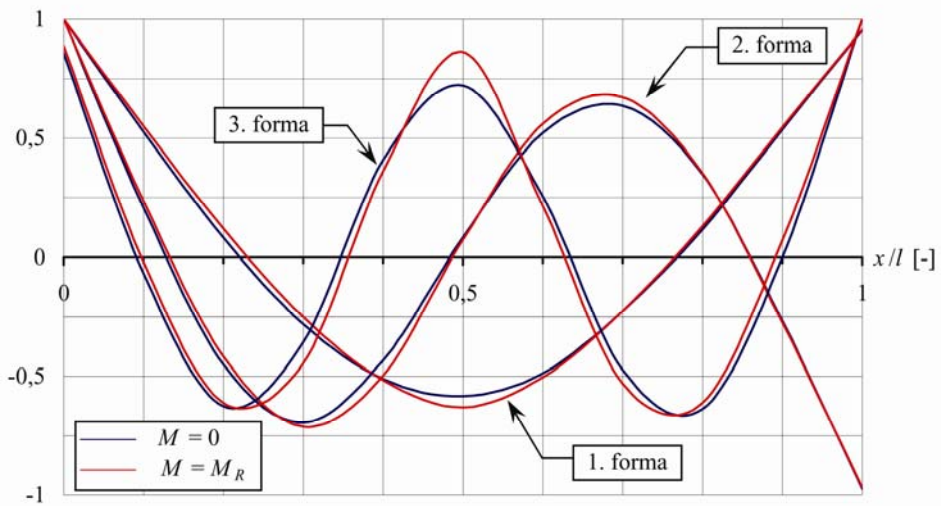
Rys. 4.34 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-III-2



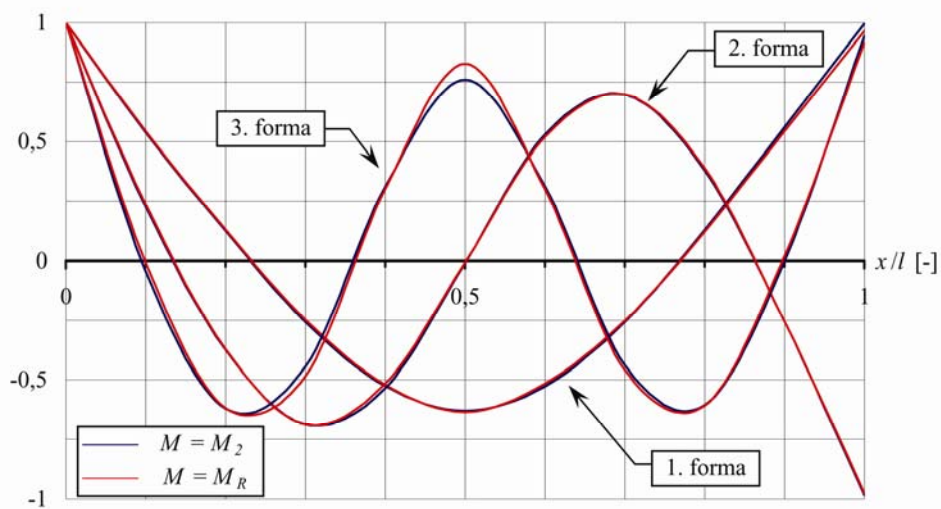
Rys. 4.35 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-III-3



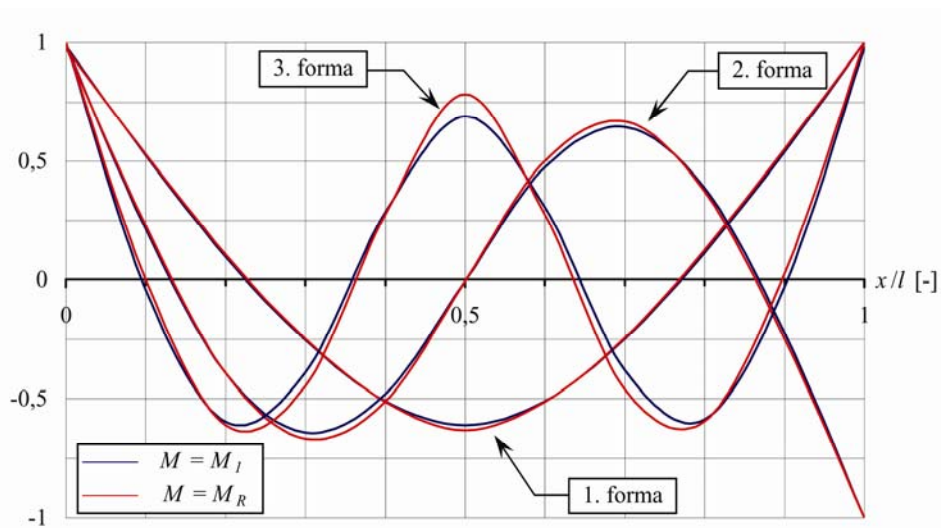
Rys. 4.36 – Formy własne belki B-I-1



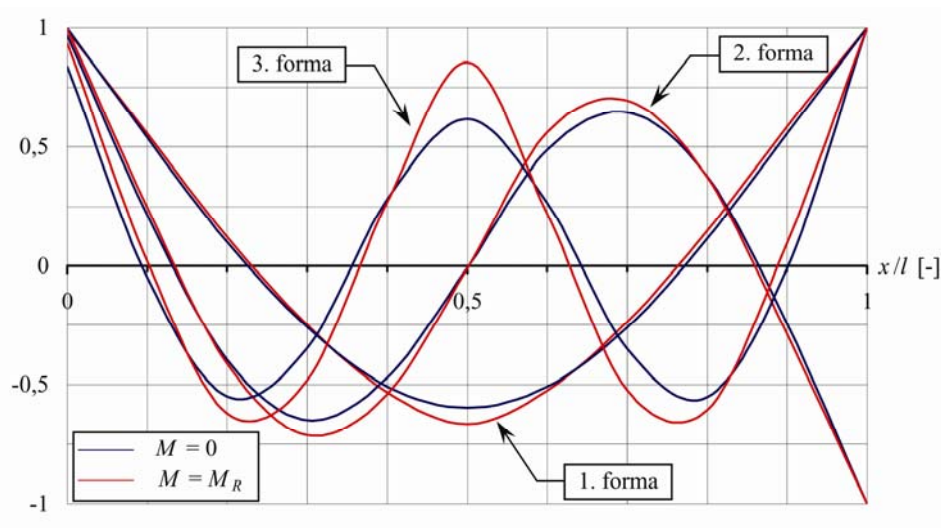
Rys. 4.37 – Formy własne belki B-I-2



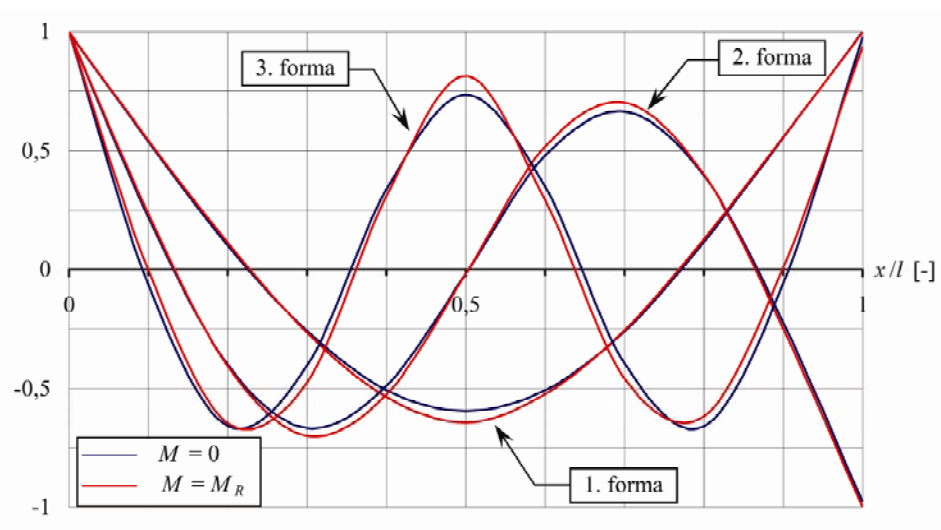
Rys. 4.38 – Formy własne belki B-I-3



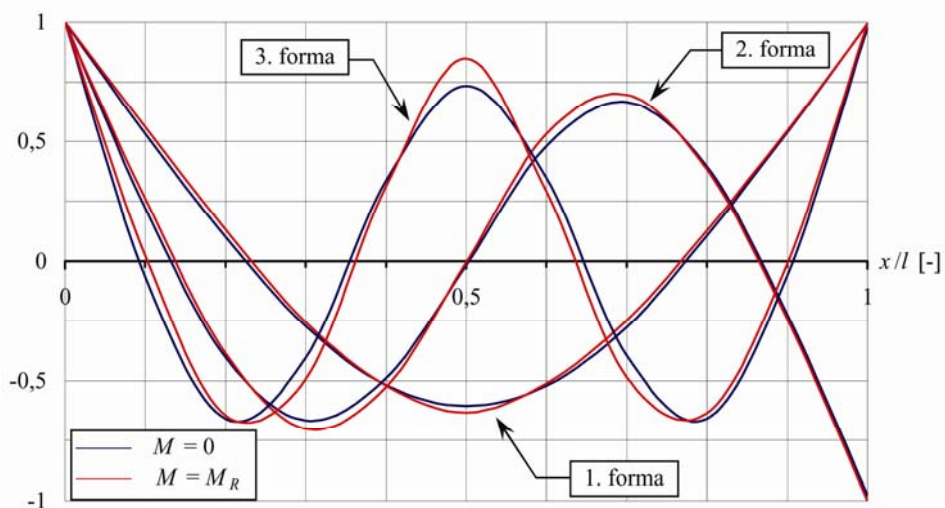
Rys. 4.39 – Formy własne belki B-II-1



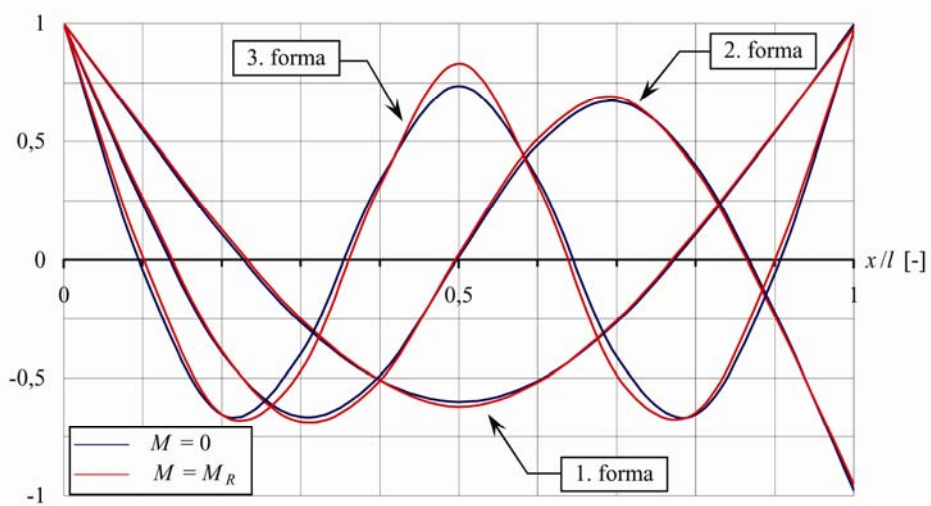
Rys. 4.40 – Formy własne belki B-II-2



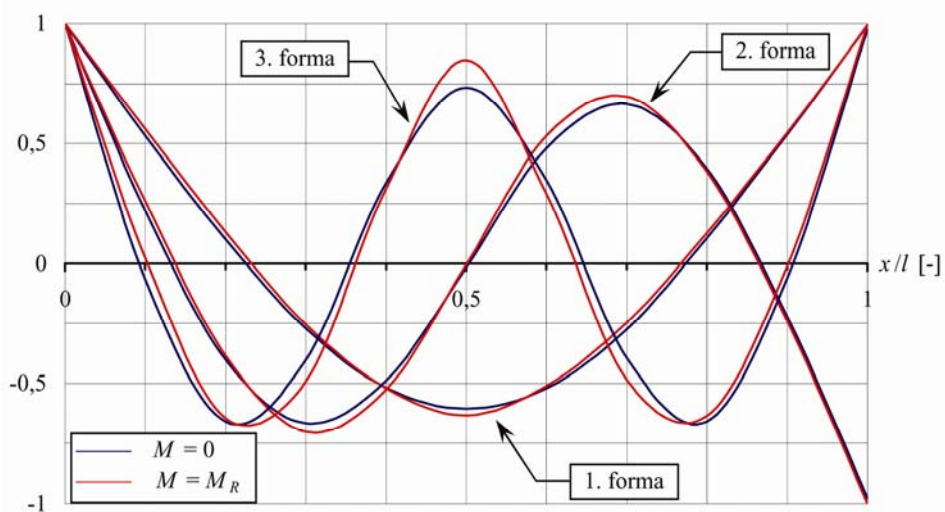
Rys. 4.41 – Formy własne belki B-II-3



Rys. 4.42 – Formy własne belki B-III-1

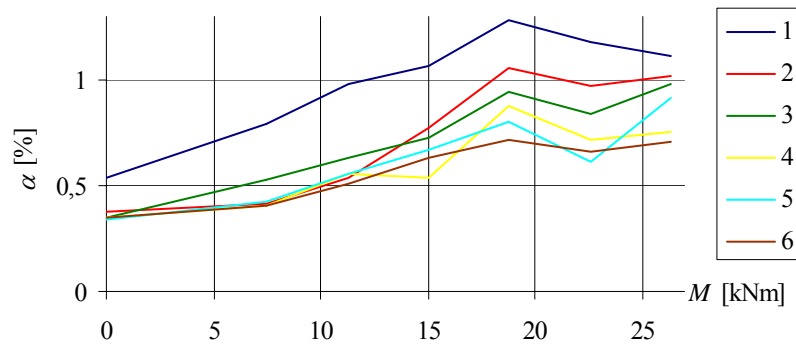


Rys. 4.43 – Formy własne belki B-III-2

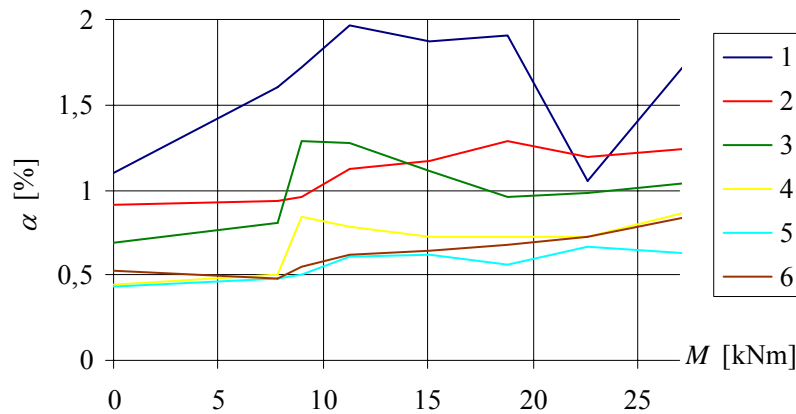


Rys. 4.44 – Formy własne belki B-III-3

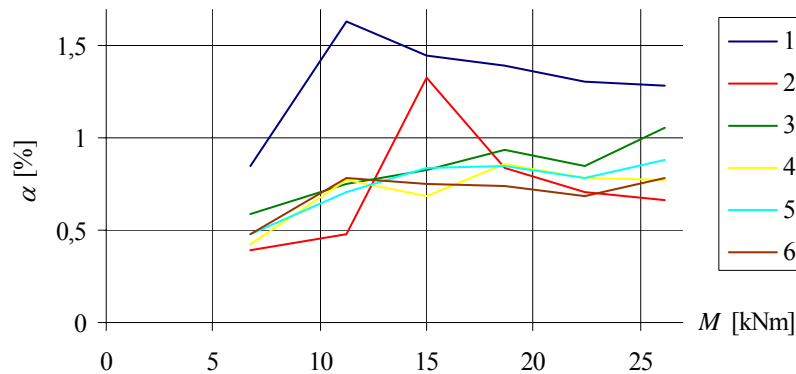
Na rysunkach 4.45 – 4.52 zamieszczono wykresy liczb tłumienia  $\alpha$  dla poszczególnych częstotliwości, w zależności od poziomu momentu zginającego  $M$ .



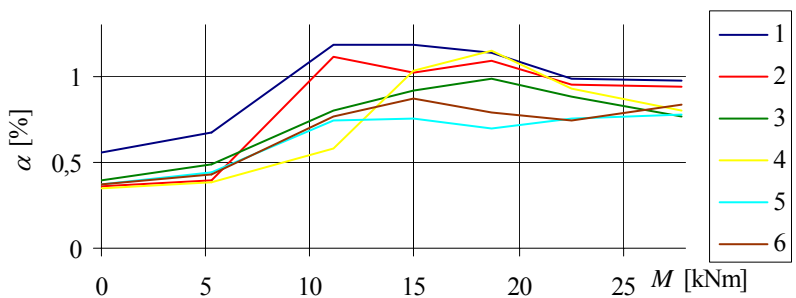
Rys. 4.45 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-I-1



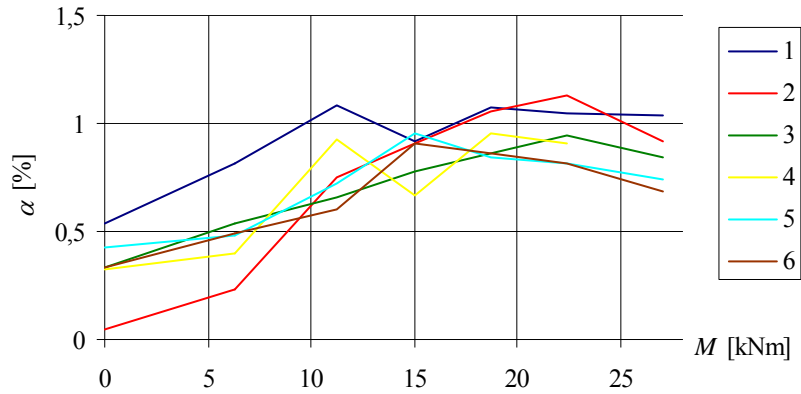
Rys. 4.46 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-I-2



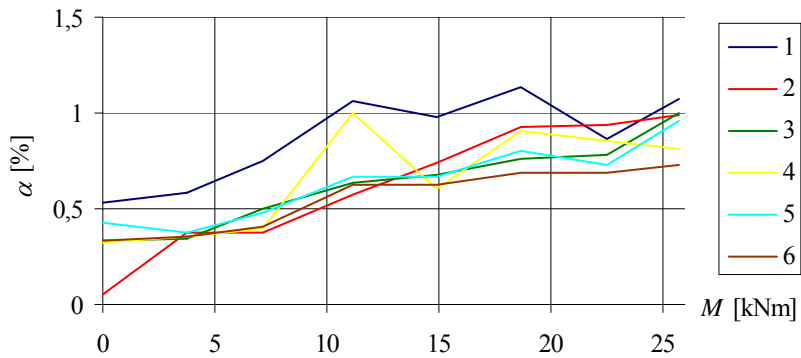
Rys. 4.47 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-II-1



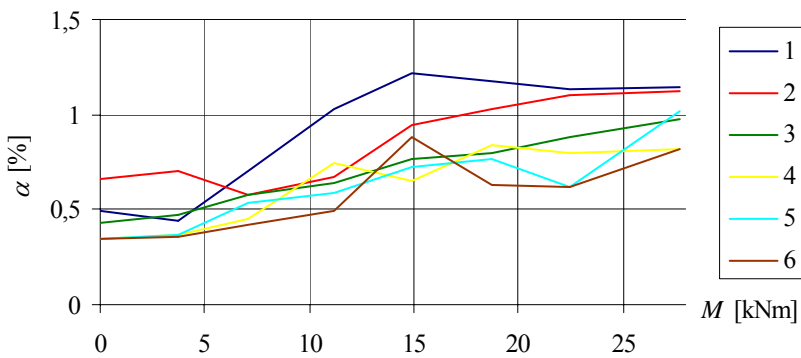
Rys. 4.48 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-II-2



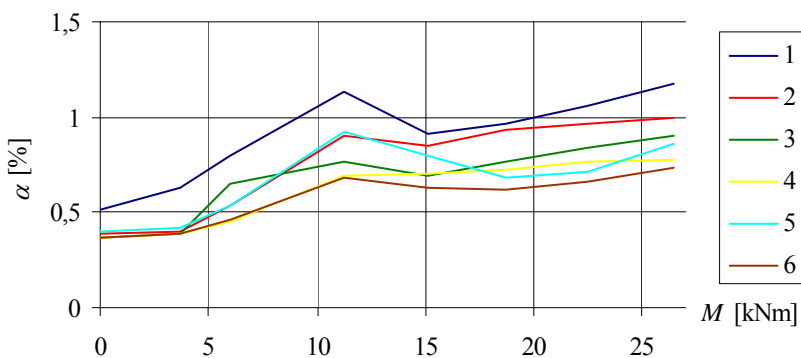
Rys. 4.49 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-II-3



Rys. 4.50 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-III-1



Rys. 4.51 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-III-2

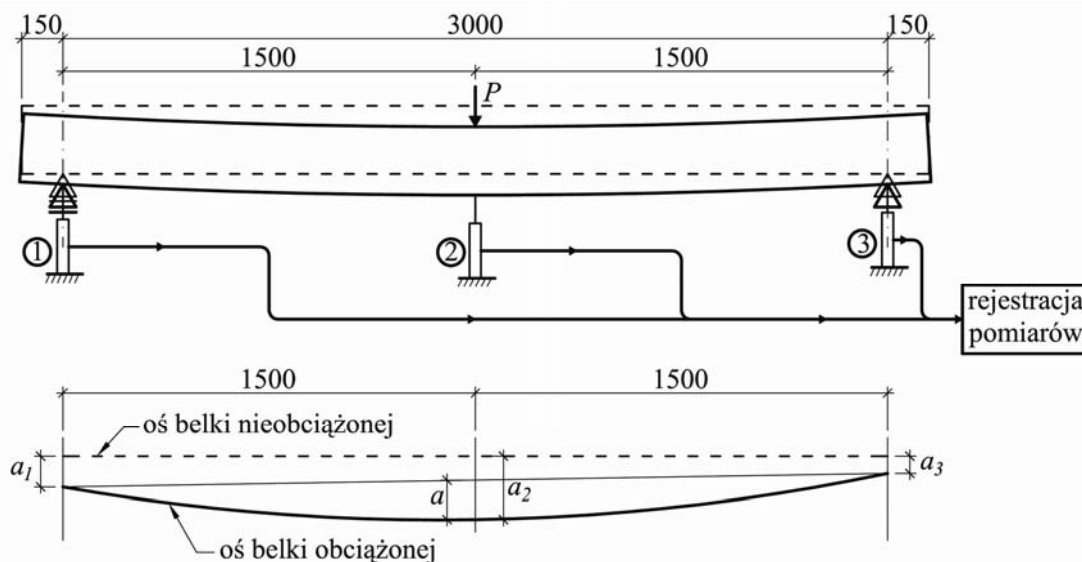


Rys. 4.52 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-III-3

Oprócz analizy modalnej, służącej określeniu właściwości dynamicznych, przeprowadzono pomiar ugięć. Pozwolił on określić statyczne predyspozycje elementów badawczych (m. in. statyczną sztywność efektywną belek). Ugięcia mierzono czujnikami indukcyjnymi o dokładności 0,001 mm. Oprócz pomiaru ugięcia  $a_2$  w środku rozpiętości (czujnik nr 2), przygotowano się także do pomiaru ewentualnego ugniotu  $a_1, a_3$  na podporach (czujniki nr 1 i 3). Strzałkę ugięcia  $a$  obliczono z zależności:

$$a = a_2 - \frac{a_1 + a_3}{2} \quad (4.9)$$

Schemat układu pomiarowego oraz sposobu interpretacji wyników pokazano na rysunku 4.53.



Rys. 4.53 – Schemat pomiaru ugięć belek

Wartości ugięć belek serii B-I, B-II, B-III dla poszczególnych kroków obciążenia zestawiono w tabelach 4.40 – 4.42. Ponadto zaprezentowano wykresy ugięć w całym zakresie pracy elementów (rys. 4.54 – 4.56).

Tabela 4.40 – Ugięcia belek serii B-I

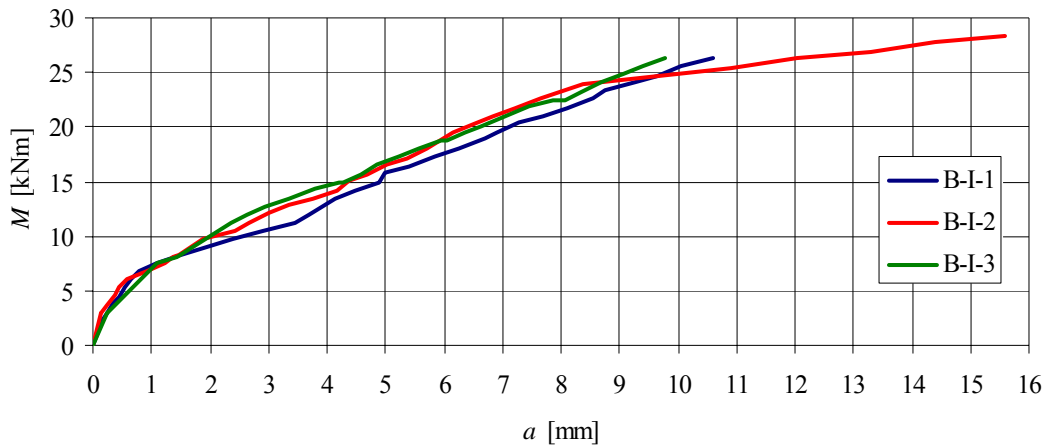
Krok obciążenia	B-I-1			B-I-2			B-I-3		
	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]
1	10,02	0,29	1,089	10,48	0,28	1,833	9,92	0,28	1,981
2	15,05	0,43	3,447	11,99	0,32	1,668	15,00	0,43	3,788
3	20,01	0,57	5,254	15,02	0,40	2,268	19,92	0,57	4,221
4	25,02	0,71	6,701	20,07	0,53	4,602	24,91	0,71	5,946
5	30,11	0,86	8,532	25,06	0,66	6,186	29,98	0,86	8,042
6	35,11	1,00	10,596	30,16	0,80	7,648	34,99	1,00	8,988
7	-	-	-	37,74	1,00	15,582	-	-	-

Tabela 4.41 – Ugięcia belek serii B-II

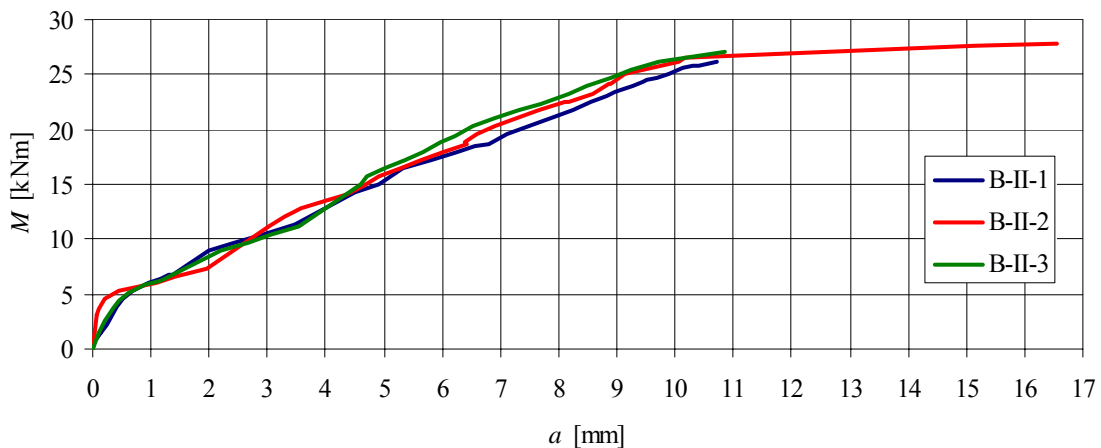
Krok obciążenia	B-II-1			B-II-2			B-II-3		
	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]
1	9,04	0,26	1,390	7,04	0,19	0,431	8,44	0,23	1,234
2	15,04	0,43	3,559	14,84	0,40	4,277	14,99	0,42	3,546
3	20,03	0,57	5,027	19,94	0,54	4,913	20,08	0,56	4,599
4	24,92	0,72	6,788	24,97	0,67	6,525	24,95	0,69	6,065
5	29,85	0,86	9,170	30,05	0,81	8,103	29,85	0,83	7,706
6	34,84	1,00	10,719	37,14	1,00	16,570	36,02	1,00	10,845

Tabela 4.42 – Ugięcia belek serii B-III

Krok obciążenia	B-III-1			B-III-2			B-III-3		
	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]
1	4,95	0,14	0,430	4,96	0,13	0,253	4,97	0,14	0,379
2	9,50	0,28	1,313	9,49	0,26	1,095	8,02	0,23	1,523
3	14,89	0,43	3,139	14,94	0,40	3,270	14,95	0,42	4,169
4	19,91	0,58	4,455	19,92	0,54	4,294	20,09	0,57	4,360
5	24,90	0,72	5,948	24,93	0,68	6,025	24,94	0,71	6,263
6	29,97	0,87	7,840	29,98	0,81	7,673	30,00	0,85	7,997
7	34,36	1,00	10,287	36,91	1,00	10,739	35,22	1,00	11,346

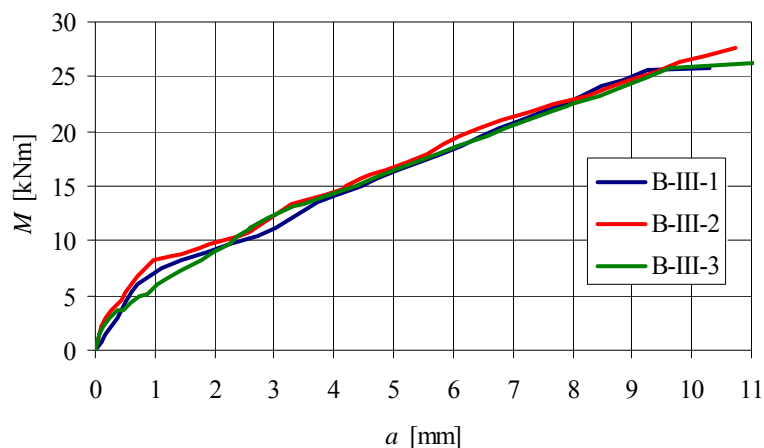


Rys. 4.54 – Ugięcia belek serii B-I



Rys. 4.55 – Ugięcia belek serii B-II





Rys. 4.56 – Ugięcia belek serii B-III

Wartości momentów rysujących  $M_{cr}$ , zarejestrowanych w doświadczeniu, zestawiono w tabelicy 4.40.

Tabela 4.40 – Wartości momentów rysujących

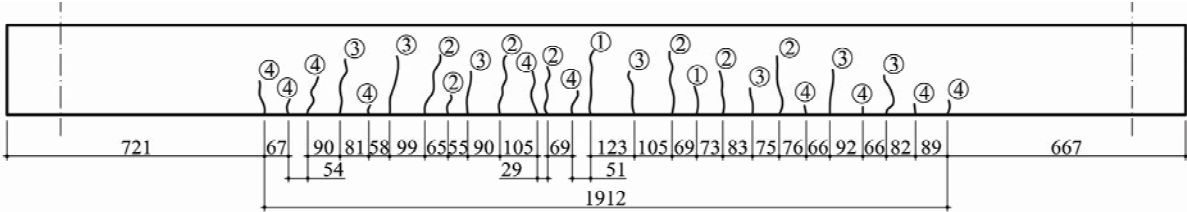
Belka	B-I-1	B-I-2	B-I-3	B-II-1	B-II-2	B-II-3	B-III-1	B-III-2	B-III-3
$M_{cr}$ [kNm]	7,52	7,46	7,08	6,22	5,89	6,44	5,60	5,75	6,27

Mając w perspektywie opracowanie metody obliczeniowej, opartej na dyskretnym modelu rysy, dokonano pomiaru rozstawu rys w belkach. Wyniki pomiarów zestawiono w tabelicy 4.41.

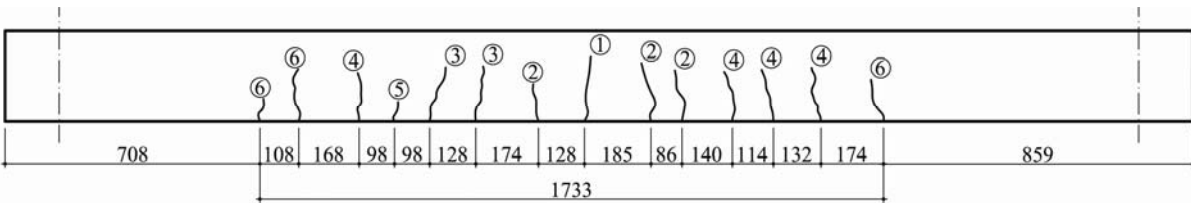
Tabela 4.41 – Liczba i średni rozstaw rys

Belka	Wielkość	Krok obciążenia					
		1	2	3	4	5	6
B-I-1	$n_{cr}$ [szt.]	2	9	16	26	26	-
	$s_{rm}$ [mm]	297	124	102	76,5	76,5	-
B-I-2	$n_{cr}$ [szt.]	2	4	6	10	11	14
	$s_{rm}$ [mm]	185	133	140	143	128	133
B-I-3	$n_{cr}$ [szt.]	1	9	13	17	20	-
	$s_{rm}$ [mm]	124	124	112	107	122	-
B-II-1	$n_{cr}$ [szt.]	1	7	12	16	18	-
	$s_{rm}$ [mm]	173	173	135	132	128	-
B-II-2	$n_{cr}$ [szt.]	2	8	13	15	16	-
	$s_{rm}$ [mm]	153	169	146	172	160	-
B-II-3	$n_{cr}$ [szt.]	2	8	12	14	17	-
	$s_{rm}$ [mm]	195	170	159	143	130	-
B-III-1	$n_{cr}$ [szt.]	$M < M_{cr}$	2	6	10	15	15
	$s_{rm}$ [mm]		133	175	148	124	124
B-III-2	$n_{cr}$ [szt.]	$M < M_{cr}$	2	6	10	12	18
	$s_{rm}$ [mm]		176	166	161	144	108
B-III-3	$n_{cr}$ [szt.]	$M < M_{cr}$	2	10	13	20	23
	$s_{rm}$ [mm]		205	171	157	108	93,4

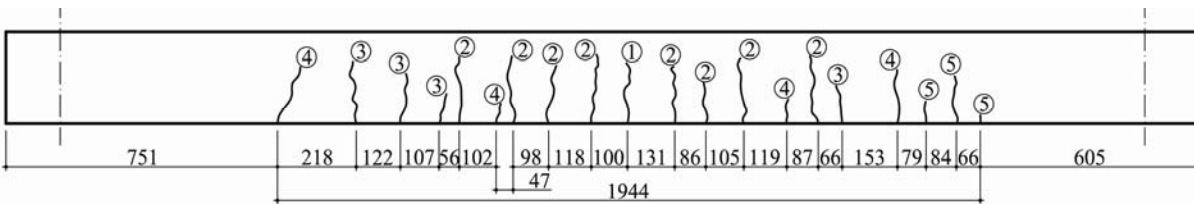
Szkic rys wraz z rozstawami dla wszystkich belek pierwszego etapu badań zamieszczono na rysunkach 4.57 – 4.65. Obraz rys dotyczy stanu po przedostatnim kroku obciążenia (poprzedzającym zniszczenie belki). Przy każdej rysie zaznaczono krok obciążenia, w którym się pojawiła.



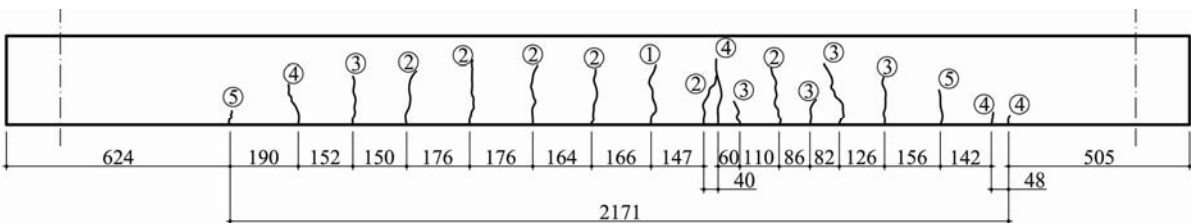
Rys. 4.57 – Obraz rys w belce B-I-1



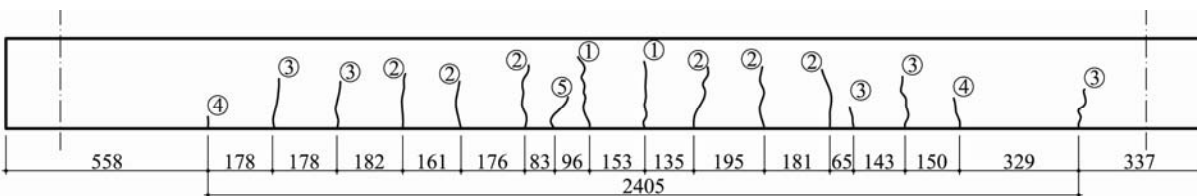
Rys. 4.58 – Obraz rys w belce B-I-2



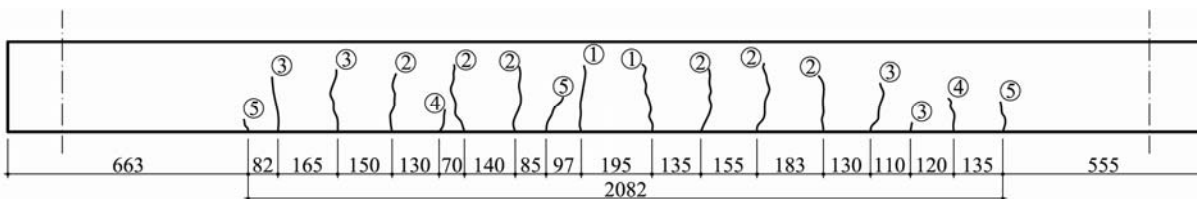
Rys. 4.59 – Obraz rys w belce B-I-3



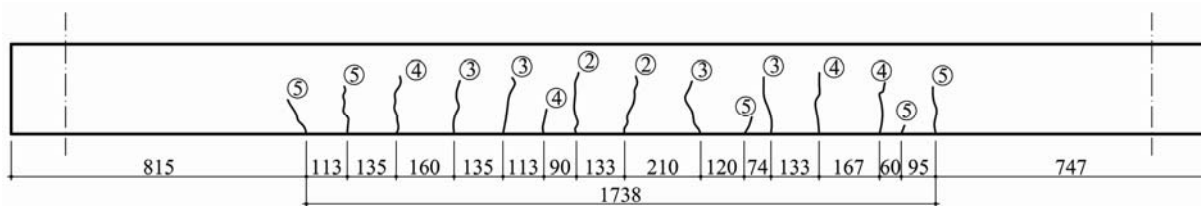
Rys. 4.60 – Obraz rys w belce B-II-1



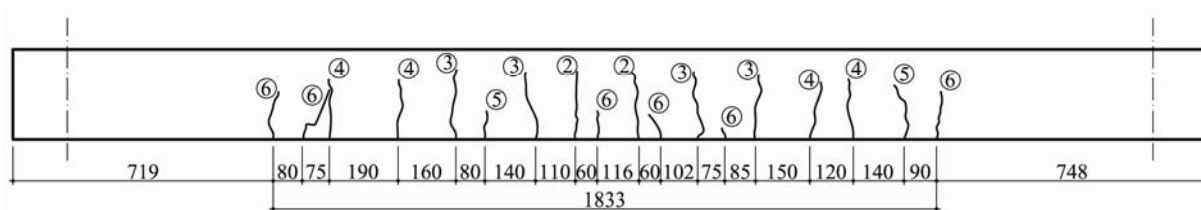
Rys. 4.61 – Obraz rys w belce B-II-2



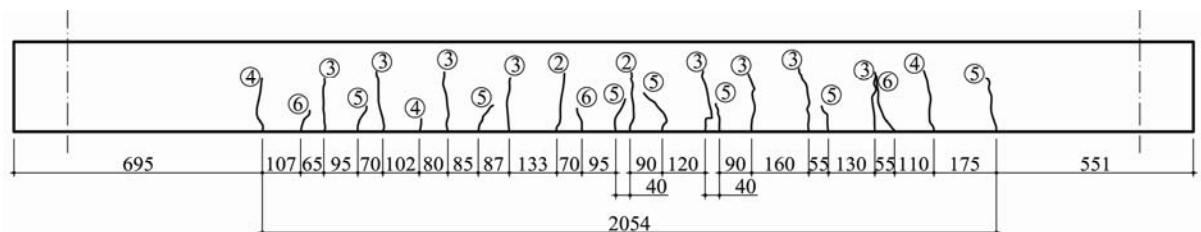
Rys. 4.62 – Obraz rys w belce B-II-3



Rys. 4.63 – Obraz rys w belce B-III-1



Rys. 4.64 – Obraz rys w belce B-III-2

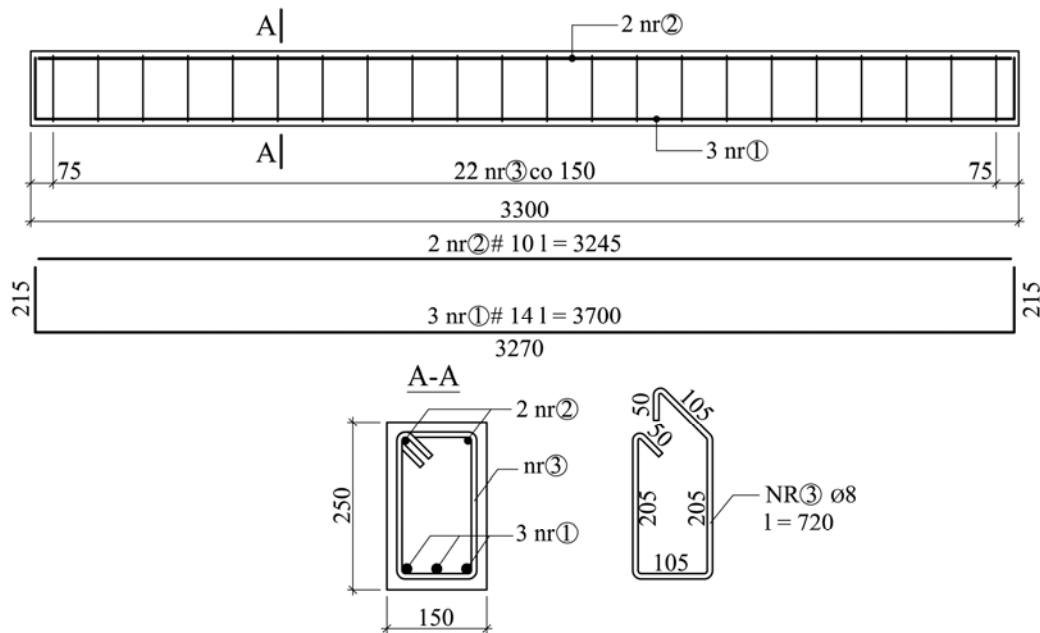


Rys. 4.65 – Obraz rys w belce B-III-3

## 4.5. Badania laboratoryjne – etap II

### 4.5.1. Elementy badawcze

W pierwszym etapie badań laboratoryjnych zbadano 9 elementów belkowych. Zaprojektowano je tak, aby różnicować morfologię rys. Belki miały w przybliżeniu taki sam stopień zbrojenia (0,65 %), ale różniły się rozstawem strzemion (seria B-I – 75 mm, serie B-II, B-III – 180 mm) oraz typem (w sensie ilości i średnic prętów) zbrojenia rozciąganego (serie B-I, B-II – 2#12, seria B-III – 3#10). Celem wzbogacenia badań i uogólnienia, proponowanych w dalszej części pracy, metod obliczeniowych przewidziano badanie 3 dodatkowych elementów (seria B-IV). Ich stopień zbrojenia wynosił 1,38 %. Belki serii IV zostały zamówione i wykonane w zakładzie prefabrykacji. Rysunek warsztatowy elementu zamieszczono na rysunku 4.66.



Rys. 4.66 – Belka serii IV

Zbrojenie wykonano z następujących gatunków stali:

- RB500W – zbrojenie podłużne – dolne (#14),
- B500SP – zbrojenie podłużne – górne (#10),

Dla realizacji stopnia zbrojenia 1,38 % oraz uniknięcia efektu skali požądane było zastosowanie prętów o średnicy 14 mm. Niestety, nie ma ich w asortymencie stali B500SP. Stąd zróżnicowanie gatunków w ramach zbrojenia podłużnego. Zastosowana stal gatunku RB500W charakteryzuje się jednak porównywalną ciągliwością. Badania opisane w punkcie 4.5.2 wykazały, że odkształcenia przy maksymalnej sile przekraczały 10 %.

Elementy wykonano z betonu C25/30 (B30). Skład betonu opracowany był przez producenta. W cyklu betonowania pobrano próbki sześciennie i cylindryczne do określenia cech wytrzymałościowych i odkształcalnościowych (jak w punkcie 4.4.1). Otulina elementów wynosiła 15 mm.

#### 4.5.2. Badania stali

Celem określenia cech wytrzymałościowych i odkształcalnościowych stali zbrojeniowej pobrano losowo po 3 próbki z każdego gatunku stali. W sumie przeprowadzono 9 prób osiowego rozciągania. Metodyka badań i sposób opracowania wyników był taki sam jak w punkcie 4.4.1. Opracowane wyniki pomiarów zestawiono dla poszczególnych średnic w tabelach 4.42 – 4.44. Wykresy naprężenie – odkształcenie zamieszczono na rysunkach 4.67 – 4.69.

Tabela 4.42 – Raport z badań prętów średnicy 8 mm (stal gładka)

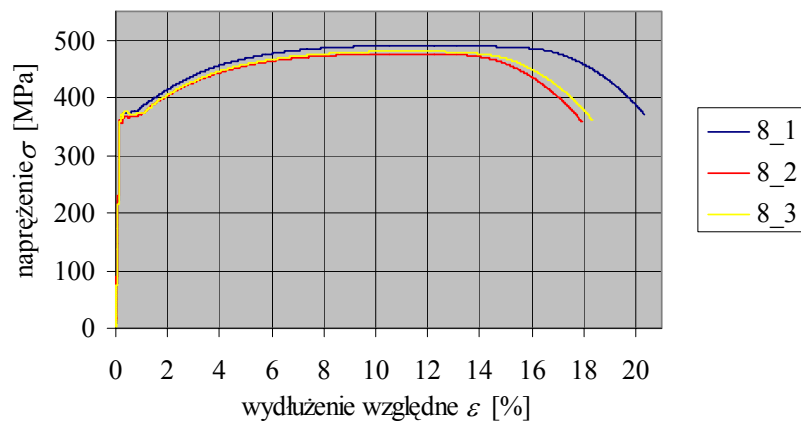
Zastosowanie w badaniach		: strzemiona w belkach serii IV					
Średnica $d$ [mm]		: 8					
Pole przekroju $S_0$ [mm <sup>2</sup> ]		: 50,27					
Początkowa długość pomiarowa $L_0$ [mm]		: 80					
Długość robocza próbki $L_c$ [mm]		: 160					
Długość całkowita próbki $L_t$ [mm]		: 280					
L.p.	Próbka	$f_{yi}$ [MPa]	$f_y$ [MPa]	$f_{ii}$ [MPa]	$f_i$ [MPa]	$E_{si}$ [GPa]	$E_s$ [GPa]
1	8_1	367	367 (3,92)	491	483 (7,20)	213	210 (5,19)
2	8_2	363		477		212	
3	8_3	371		481		203	

Tabela 4.43 – Raport z badań prętów średnicy 10 mm (stal żebrzana)

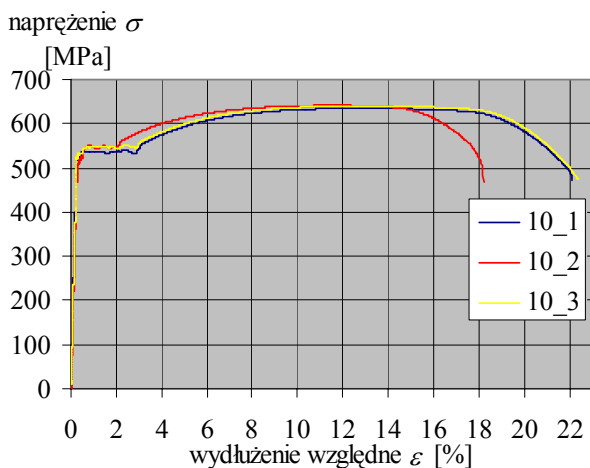
Zastosowanie w badaniach		: zbrojenie górne w belkach serii IV					
Średnica $d$ [mm]		: 10					
Pole przekroju $S_0$ [mm <sup>2</sup> ]		: 78,54					
Początkowa długość pomiarowa $L_0$ [mm]		: 100					
Długość robocza próbki $L_c$ [mm]		: 160					
Długość całkowita próbki $L_t$ [mm]		: 280					
L.p.	Próbka	$f_{yi}$ [MPa]	$f_y$ [MPa]	$f_{ii}$ [MPa]	$f_i$ [MPa]	$E_{si}$ [GPa]	$E_s$ [GPa]
1	10_1	525	536 (13,4)	635	639 (3,42)	210	203 (3,30)
2	10_2	551		641		200	
3	10_3	531		640		199	

Tabela 4.44 – Raport z badań prętów średnicy 14 mm (stal żebrzana)

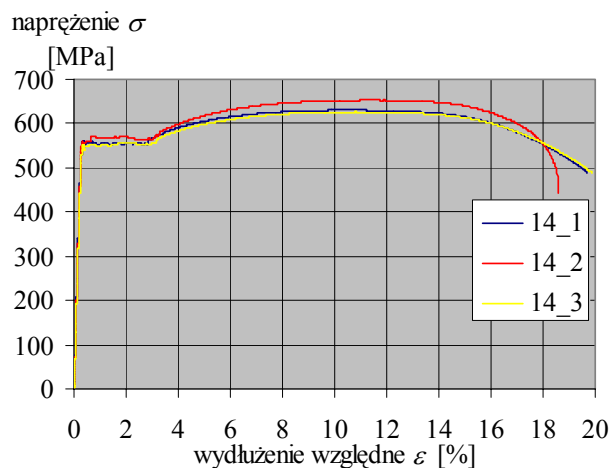
Zastosowanie w badaniach		: zbrojenie dolne w belkach serii IV					
Średnica $d$ [mm]		: 14					
Pole przekroju $S_0$ [mm <sup>2</sup> ]		: 153,94					
Początkowa długość pomiarowa $L_0$ [mm]		: 140					
Długość robocza próbki $L_c$ [mm]		: 160					
Długość całkowita próbki $L_t$ [mm]		: 280					
L.p.	Próbka	$f_{yi}$ [MPa]	$f_y$ [MPa]	$f_{ii}$ [MPa]	$f_i$ [MPa]	$E_{si}$ [GPa]	$E_s$ [GPa]
1	14_1	560	555 (4,74)	630	636 (14,4)	209	201 (7,99)
2	14_2	555		653		193	
3	14_3	551		626		201	



Rys. 4.67 – Wykres  $\sigma - \varepsilon$  dla prętów średnicy 8 mm



Rys. 4.68 – Wykres  $\sigma$ – $\varepsilon$  dla prętów średnicy 10 mm



Rys. 4.69 – Wykres  $\sigma$ – $\varepsilon$  dla prętów średnicy 14 mm

### 4.5.3. Badanie betonu

Beton wykorzystany w belkach wykonany był według receptury producenta. Ilość składników na m<sup>3</sup> mieszanki betonowej zestawiono w tabeli 4.45.

Tabela 4.45 – Skład betonu

Składnik	Ilość [kg/m <sup>3</sup> ]
Cement CEM I 42,5R	337
Piasek 0-2 (kopalnia Brzezinki)	656
Żwir 2-8 (kopalnia Wójcice)	572
Żwir 8-16 (kopalnia Wójcice)	564
Woda	171
Popiół lotny	58
Superplastyfikator (Chrysofluid Premia 150)	2,02

Klasę betonu określono na 3 próbkach sześciennych, po 28 dniach przechowywania w stałych warunkach cieplno-wilgotnościowych. Wyniki badań zestawiono w tabeli 4.46.

Tabela 4.46 – Wyniki badań wytrzymałościowych do określenia klasy betonu

Data betonowania/ data badania	Oznaczenie próbki	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	Gęstość średnia [kg/m <sup>3</sup> ]	$P_f$ [kN]	$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$s$ [MPa]	$v$ [%]
07.07.2009/ 04.08.2009	001	2278	2285	720	31,98	31,12	0,94	3
	002	2286		680	30,12*			
	003	2291		710	31,26			

\* wytrzymałość minimalna  $f_{c\ min,cube}$

Właściwości wytrzymałościowe wykorzystanego betonu spełniają kryterium (4.6) dla  $f_{ck,cube} = 30$  MPa. Pozwala to zaklasyfikować beton do klasy C25/30. W przeddzień badania belek określono wytrzymałość betonu na ściskanie (na 3 próbkach kostkowych),

wytrzymałość na rozciąganie przy rozłupywaniu (na 3 próbkach kostkowych) oraz moduł Younga (na 6 próbkach walcowych). Zastosowane procedury badawcze były takie same jak w punkcie 4.4.3. Wyniki badań pokazano poniżej (tabela 4.47 oraz 4.48). Rezultaty z prób ściskania 2 próbek walcowych odrzucono (różnica między założoną, a rzeczywistą siłą niszczącą przekraczała 20 %).

Tabela 4.47 – Wyniki badania betonu belek serii IV

Wytrzymałość na ściskanie		Wytrzymałość na rozciąganie	
$f_{ci,cube}$ [MPa]	$f_{cm,cube}$ [MPa]	$f_{cti}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]
40,43	41,1±3,07	2,71	2,79±0,35
44,38		2,48	
38,34		3,17	

Tabela 4.48 – Moduł Younga betonu belek serii IV

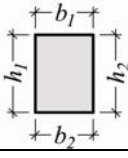
L. p.	$E_c$ [GPa]	$f_{c,cyl}$ [MPa]	$f_{c,cyl}^*$ [MPa]	$\Delta =  f_{c,cyl}^* - f_{c,cyl}  / f_{c,cyl}^*$ [%]
1	31,46	21,45	24,87	6,7
2	29,71	27,17		18,1
3	29,76	26,04		13,2
4	29,18	24,82		7,9

$E_{cm} = 30,03 \pm 0,989$  GPa

#### 4.5.4. Badania belek

Badania belek serii IV przeprowadzono podobnie jak serii I – III. W tabeli 4.49 zestawiono wyniki inwentaryzacji belek.

Tabela 4.49 – Wyniki inwentaryzacji elementów

Belka		Wymiary [mm]				Masa [kg]	Masa [kg/m]
		przekrój I	przekrój II	przekrój III	średnia		
B-IV-1	$h_1$	250	249	250	250	300	90,91
	$h_2$	248	251	249			
	$b_1$	153	152	152	152		
	$b_2$	152	151	151			
B-IV-2	$h_1$	249	252	251	251	303	91,82
	$h_2$	249	250	252			
	$b_1$	150	150	151	151		
	$b_2$	151	151	151			
B-IV-3	$h_1$	250	251	251	250	296	89,67
	$h_2$	250	248	251			
	$b_1$	152	153	151	151		
	$b_2$	150	151	150			

Tabele 4.50 – 4.55 zawierają wyniki operacyjnej analizy modalnej belek serii IV.

Tabela 4.50 – Częstotliwości własne belki B-IV-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0,00	81,8	220,5	416,6	653,0	929,3	1222,5
1	4,89	0,07	80,6	219,3	413,7	649,2	922,6	1215,7
2	9,98	0,14	77,3	213,2	404,1	637,0	904,5	1194,0
3	15,04	0,21	74,9	207,2	394,7	623,2	885,2	1172,0
4	20,01	0,28	74,1	204,1	389,6	615,6	876,6	1160,5
5	30,00	0,42	75,5	206,7	392,9	620,5	884,0	1170,0
6	45,36	0,63	75,9	206,4	390,0	616,5	876,6	1163,2
7	60,44	0,84	74,8	204,9	384,0	609,1	861,1	1146,1
8	71,92	1,00	66,0	200,8	355,1	580,2	814,4	1069,2

Tabela 4.51 – Liczby tłumienia belki B-IV-1

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0,00	0,840	0,718	0,602	0,590	0,738	0,512
1	4,89	0,07	1,416	0,668	0,687	0,630	0,759	0,542
2	9,98	0,14	1,178	0,907	0,857	0,666	0,749	0,697
3	15,04	0,21	1,383	1,198	1,108	0,870	1,066	0,856
4	20,01	0,28	1,505	1,139	1,048	0,937	1,171	0,869
5	30,00	0,42	0,915	0,714	0,615	0,564	0,791	0,529
6	45,36	0,63	0,850	0,677	0,559	0,516	0,747	0,512
7	60,44	0,84	0,783	0,719	0,753	0,615	0,727	0,610
8	71,92	1,00	0,788	0,571	0,534	0,587	0,540	0,603

Tabela 4.52 – Częstotliwości własne belki B-IV-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0,00	79,2	215,5	409,6	640,6	907,4	1205,7
1	4,97	0,07	77,4	212,2	404,5	633,1	896,1	1193,1
2	10,05	0,14	75,8	208,5	398,6	624,7	884,8	1179,5
3	15,06	0,21	74,1	204,4	391,8	615,4	873,4	1164,3
4	20,12	0,29	73,0	201,2	386,3	608,1	864,8	1151,9
5	30,25	0,43	72,8	199,8	382,3	603,8	858,0	1143,7
6	45,59	0,65	73,2	199,8	379,7	601,0	851,7	1137,2
7	60,22	0,85	72,0	199,4	374,3	596,3	838,7	1121,7
8	70,59	1,00	61,4	192,5	341,4	556,9	776,4	1029,8

Tabela 4.53 – Liczby tłumienia belki B-IV-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0,00	0,869	0,591	0,506	0,541	0,870	0,499
1	4,97	0,07	1,093	0,770	0,653	0,555	0,829	0,635
2	10,05	0,14	1,077	0,849	0,717	0,562	0,768	0,637
3	15,06	0,21	1,134	0,902	0,785	0,647	0,857	0,680
4	20,12	0,29	1,274	0,926	0,825	0,823	0,888	0,739
5	30,25	0,43	1,055	0,885	0,779	0,852	0,795	0,697



Tabela 4.53 (c. d.) – Liczby tłumienia belki B-IV-2

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
6	45,59	0,65	1,049	0,804	0,719	0,728	0,689	0,657
7	60,22	0,85	1,070	0,756	0,797	0,614	0,677	0,674
8	70,59	1,00	1,178	0,862	0,786	0,924	0,896	1,030

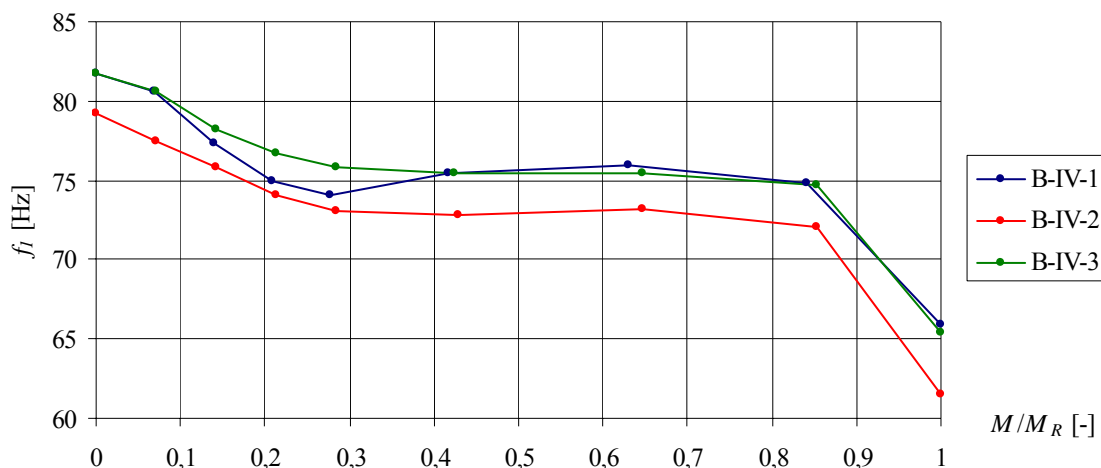
Tabela 4.54 – Częstotliwości własne belki B-IV-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]
0	0	0,00	81,7	219,7	412,9	652,2	920,9	1220,7
1	5,01	0,07	80,6	217,9	409,9	648,2	914,9	1213,8
2	10,01	0,14	78,2	213,1	402,6	637,1	900,4	1195,3
3	15,12	0,21	76,7	208,6	395,6	626,5	886,5	1178,5
4	20,05	0,28	75,8	205,6	390,6	620,1	877,5	1167,7
5	30,00	0,42	75,5	203,2	385,8	613,8	869,6	1157,2
6	45,76	0,65	75,5	202,3	381,5	607,8	861,1	1145,9
7	60,31	0,85	74,7	202,4	377,1	603,7	850,9	1134,1
8	70,63	1,00	65,3	197,6	348,9	569,9	800,6	1056,0

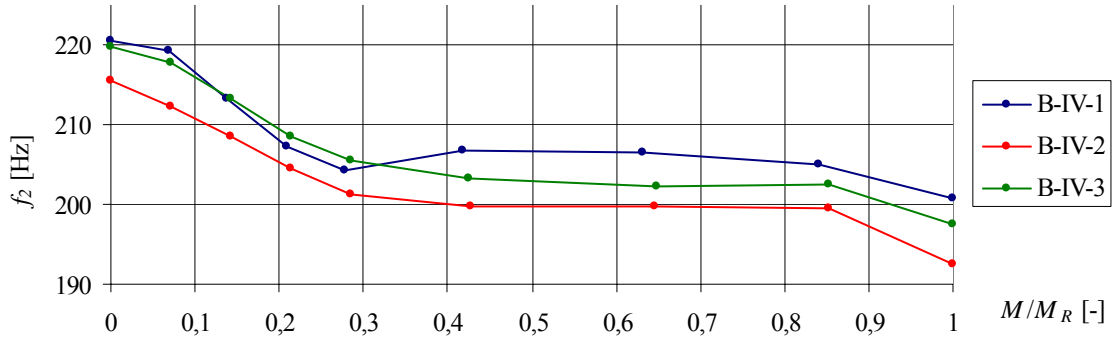
Tabela 4.55 – Liczby tłumienia belki B-IV-3

Krok obciążenia	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_1$ [%]	$\alpha_2$ [%]	$\alpha_3$ [%]	$\alpha_4$ [%]	$\alpha_5$ [%]	$\alpha_6$ [%]
0	0	0,00	0,618	0,519	0,503	0,534	0,461	0,508
1	5,01	0,07	0,749	0,558	0,516	0,534	0,489	0,524
2	10,01	0,14	0,948	0,661	0,600	0,520	0,535	0,588
3	15,12	0,21	0,958	0,737	0,667	0,607	0,617	0,648
4	20,05	0,28	1,077	0,754	0,686	0,685	0,667	0,655
5	30,00	0,42	1,067	0,759	0,721	0,762	0,671	0,665
6	45,76	0,65	0,806	0,722	0,781	0,685	0,612	0,641
7	60,31	0,85	1,009	0,655	0,737	0,546	0,600	0,610
8	70,63	1,00	1,214	0,667	0,675	0,889	0,678	0,643

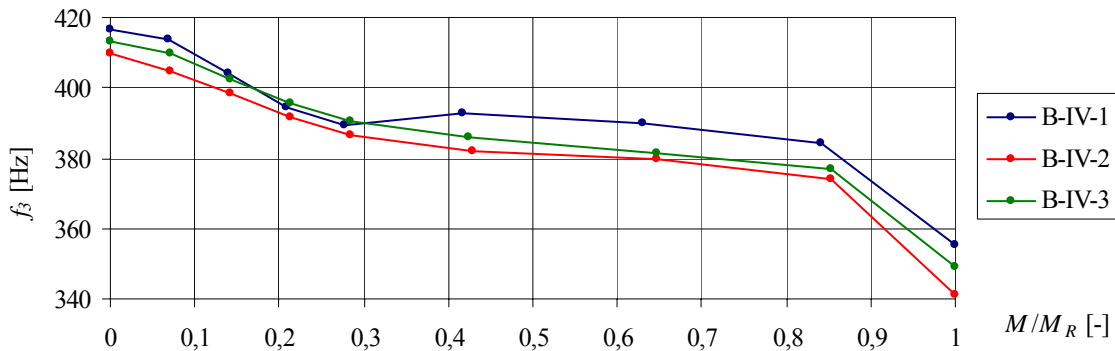
Rysunki 4.70 – 4.72 ilustrują spadek trzech pierwszych częstotliwości własnych belek serii IV w zależności od poziomu zaawansowania obciążenia.



Rys. 4.70 – Pierwsza częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-IV

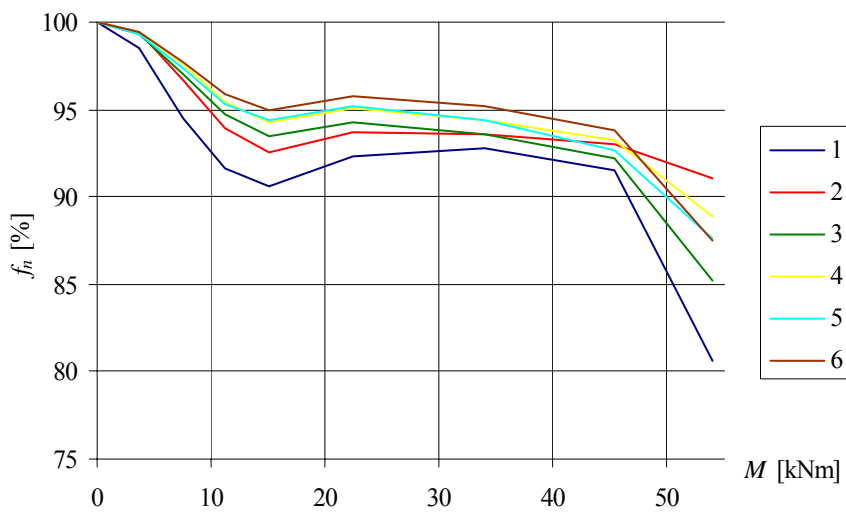


Rys. 4.71 – Druga częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-IV

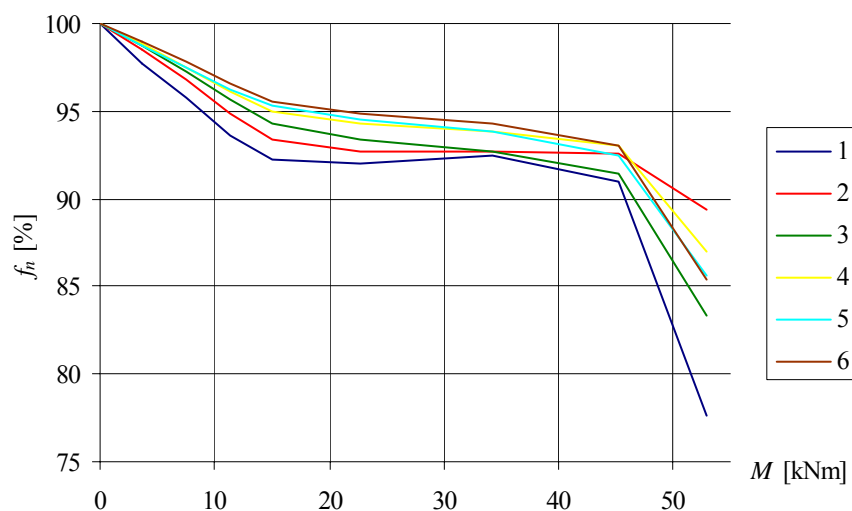


Rys. 4.72 – Trzecia częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-IV

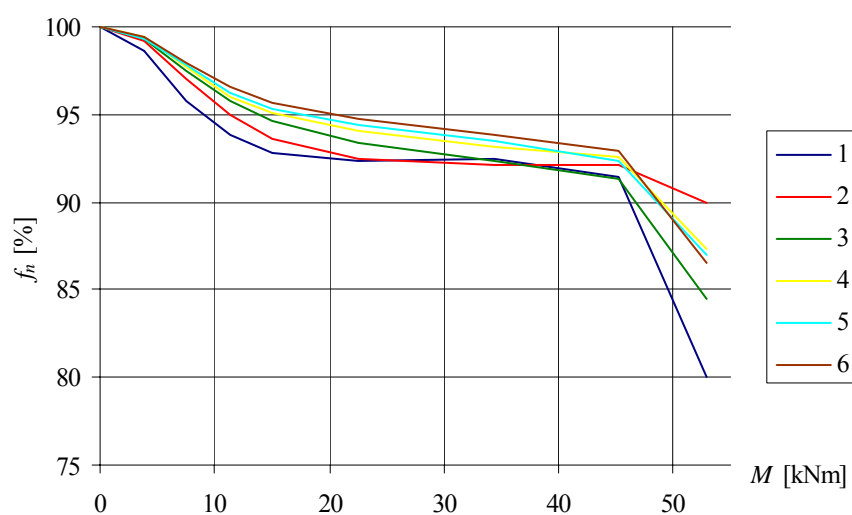
Znormalizowane, według zależności (4.8), częstotliwości własne dla każdego z elementów pokazano na rysunkach 4.73 – 4.75. Rysunki 4.76 – 4.78 zawierają trzy pierwsze formy własne belek. Podobnie jak w przypadku poprzedniego etapu badań pokazano formę belki debiutującej oraz belki po zniszczeniu.



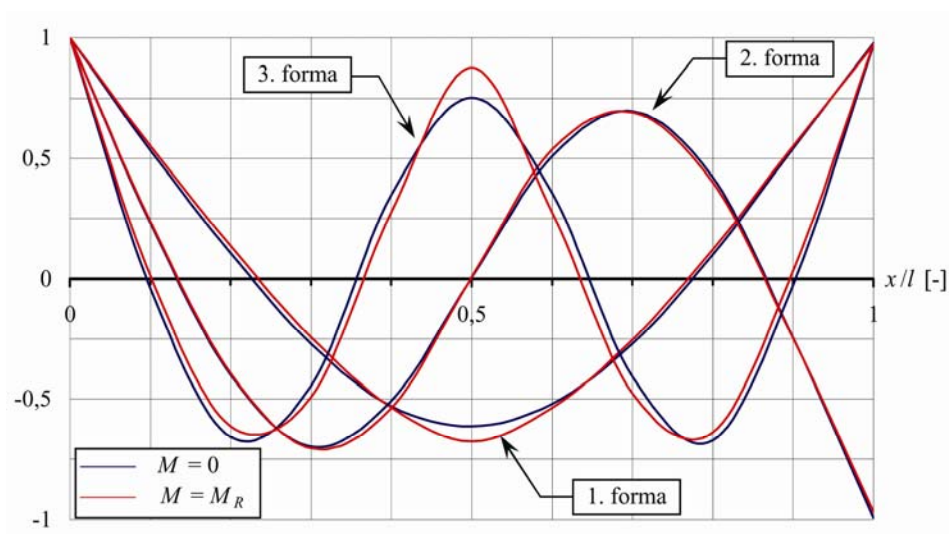
Rys. 4.73 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-IV-1



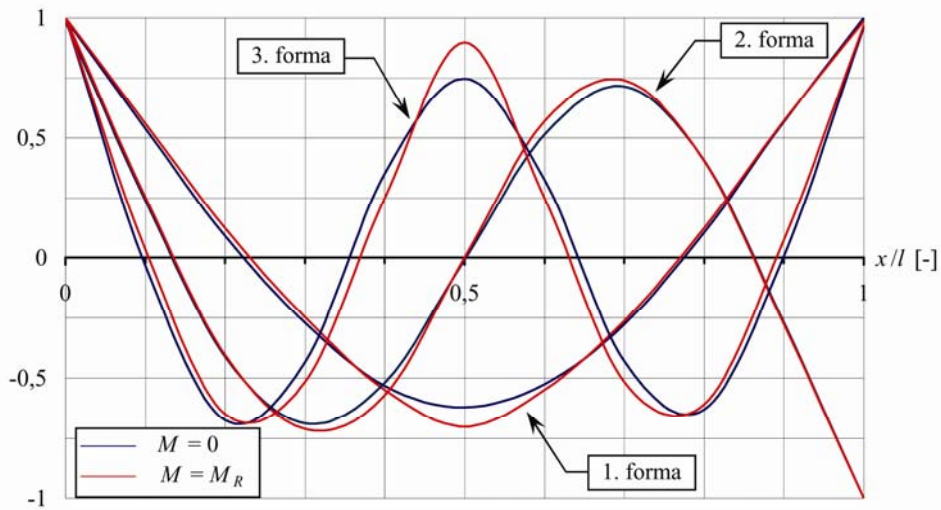
Rys. 4.74 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-IV-2



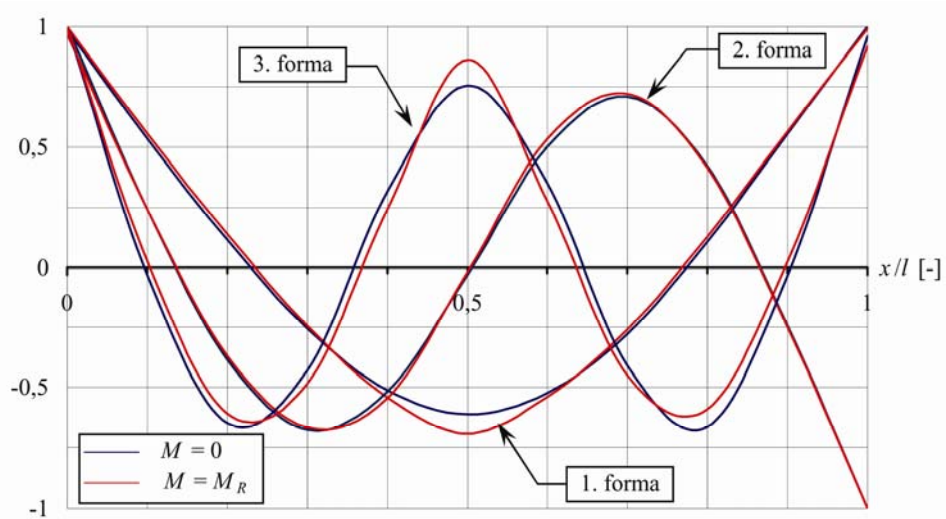
Rys. 4.75 – Znormalizowane częstotliwości własne 1 – 6 w funkcji momentu zginającego dla belki B-IV-3



Rys. 4.76 – Formy własne belki B-IV-1

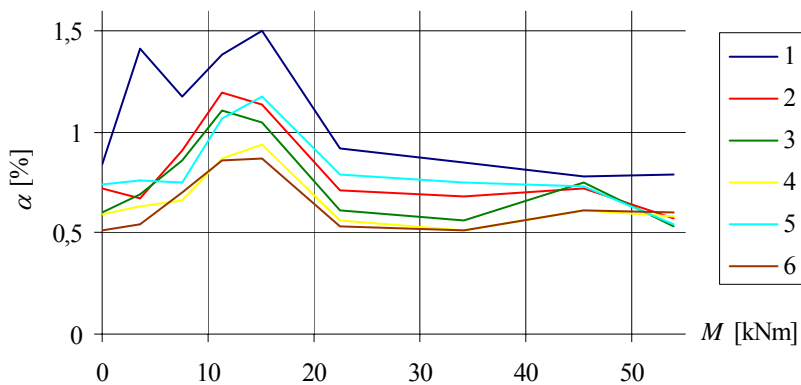


Rys. 4.77 – Formy własne belki B-IV-2

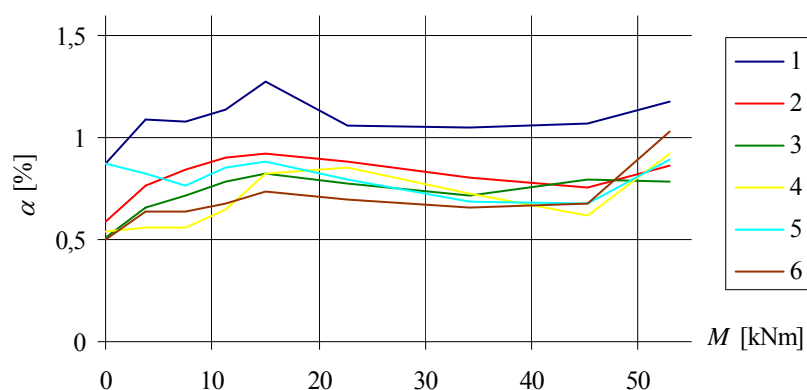


Rys. 4.78 – Formy własne belki B-IV-3

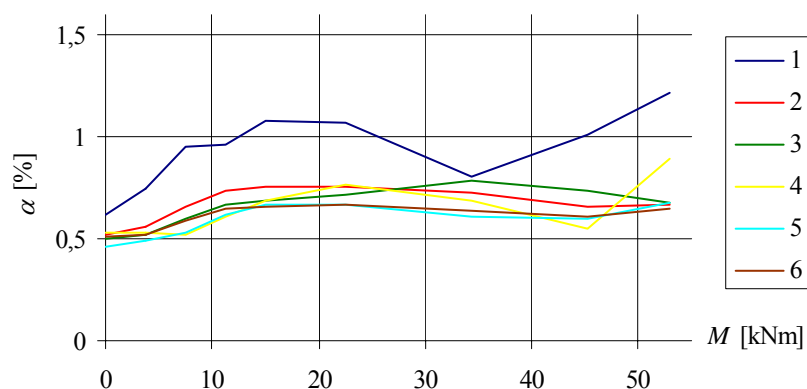
Liczby tłumienia belek serii IV w funkcji momentu zginającego zestawiono na wykresach (rys. 4.79 – 4.81).



Rys. 4.79 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-IV-1



Rys. 4.80 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-IV-2

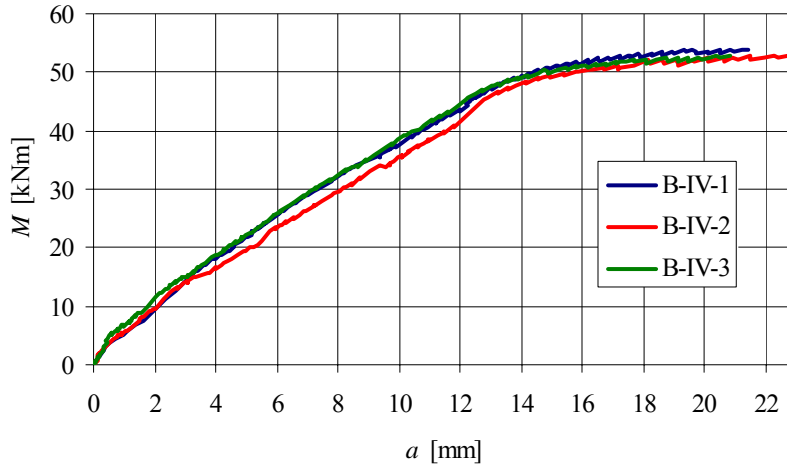


Rys. 4.81 – Liczby tłumienia w funkcji momentu zginającego dla belki B-IV-3

Pomiar ugięć przeprowadzono w trzech punktach (w środku rozpiętości i przy podporach). Strzałkę ugięcia obliczano z zależności (4.9). Ugięcia belek zestawiono w tabeli 4.56 dla poszczególnych kroków obciążenia. Wykres 4.82 ilustruje ugięcia w całym zakresie obciążenia.

Tabela 4.56 – Ugięcia belek serii B-IV

Krok obciążenia	B-IV-1			B-IV-2			B-IV-3		
	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$a$ [mm]
1	4,89	0,07	0,351	4,97	0,07	0,632	5,01	0,07	0,469
2	9,98	0,14	1,613	10,05	0,14	1,877	10,01	0,14	1,330
3	15,04	0,21	2,020	15,06	0,21	2,780	15,12	0,21	2,441
4	20,01	0,28	3,486	20,12	0,29	3,330	20,05	0,28	3,017
5	30,00	0,42	5,448	30,25	0,43	6,190	30,00	0,42	5,304
6	45,36	0,63	8,553	45,59	0,65	8,559	45,76	0,65	8,831
7	60,44	0,84	12,686	60,22	0,85	13,939	60,31	0,85	12,464
8	71,92	1,00	21,410	70,59	1,00	22,292	70,63	1,00	20,857



Rys. 4.82 – Ugięcia belek serii B-IV

Wartości momentów rysujących  $M_{cr}$ , zarejestrowanych w doświadczeniu, zestawiono w tabelicy 4.57.

Tabela 4.57 – Wartości momentów rysujących

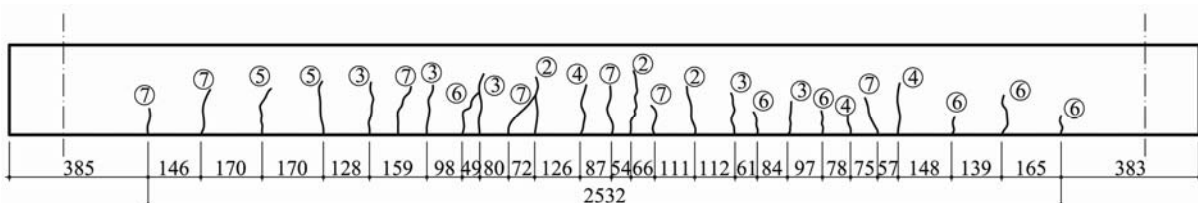
Belka	B-IV-1	B-IV-2	B-IV-3
$M_{cr}$ [kNm]	5,20	5,69	5,92

W tabelicy 4.58 pokazano wyniki pomiarów związanych z rysami (liczba i rozstaw), dla każdego z kroków obciążenia.

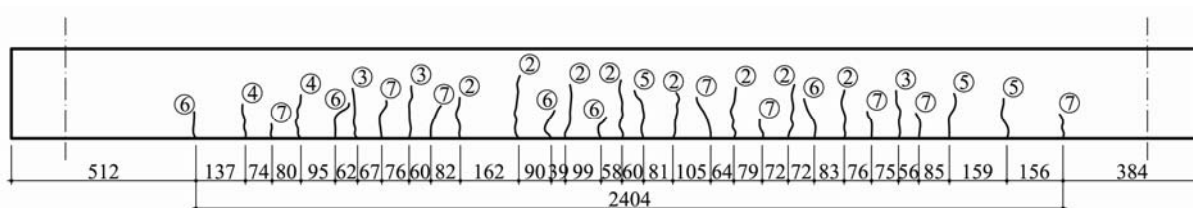
Tabela 4.58 – Liczba i średni rozstaw rys

Belka	Wielkość	Krok obciążenia						
		1	2	3	4	5	6	7
B-IV-1	$n_{cr}$ [szt.]	$M < M_{cr}$	3	8	11	13	19	26
	$s_{rm}$ [mm]		222	166	147	147	123	101
B-IV-2	$n_{cr}$ [szt.]	$M < M_{cr}$	8	11	13	16	21	29
	$s_{rm}$ [mm]		152	150	151	141	112	85,9
B-IV-3	$n_{cr}$ [szt.]	$M < M_{cr}$	4	8	13	18	24	28
	$s_{rm}$ [mm]		206	155	151	122	112	95,2

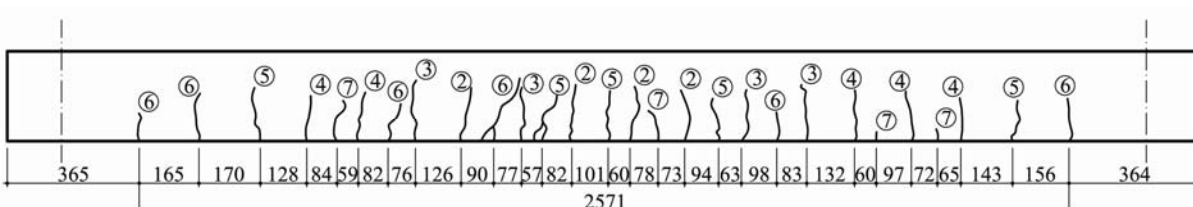
Szkic rys wraz z rozstawami dla belek drugiego etapu badań zamieszczono na rysunkach 4.83 – 4.85. Obraz rys dotyczy stanu po 7 kroku obciążenia (poprzedzającym zniszczenie belki). Przy każdej rysie zaznaczono krok obciążenia, w którym się pojawiła.



Rys. 4.83 – Obraz rys w belce B-IV-1



Rys. 4.84 – Obraz rys w belce B-IV-2



Rys. 4.85 – Obraz rys w belce B-IV-3

Dokumentację fotograficzną z badań belek w pierwszym i drugim etapie zamieszczono poniżej (fot. 4.19 – 4.23).



Fot. 4.19 – Belka podwieszona przed badaniem dynamicznym



Fot. 4.20 – Wymuszanie drgań w operacyjnej analizie modalnej



Fot. 4.21 – Belka w czasie obciążania



Fot. 4.22 – Belka przed inwentaryzacją rys



Fot. 4.23 – Stanowisko pomiarowe systemu PULSE 3560

#### 4.6. Analiza wyników i wnioski z badań laboratoryjnych

Pierwsze nasuwające się spostrzeżenie, wynikające z badań laboratoryjnych, dotyczy predyspozycji odkształcalnościowych betonu, a ściślej modułu odkształcalności podłużnej. Na uwagę zasługują różnice między modułem Younga oznaczonym w teście osiowego ściskania, na próbkach walcowych (p. 4.4.3 i 4.5.3), a określonym pośrednio, na podstawie częstotliwości własnych belek debiutujących. Znając częstotliwość własną belki można obliczyć jej sztywność dynamiczną  $EI_D$  z zależności (4.10):

$$EI_D = \frac{f^2 \cdot m \cdot l^4}{\gamma^2}, \quad (4.10)$$

gdzie:  $\gamma$  – mnożnik zależny od schematu statycznego belki oraz numeru formy własnej,

$f$  – pomierzona częstotliwość własna belki,

$m$  – masa belki (równomiernie rozłożona),

$l$  – długość belki (3,30 m).

W rozpatrywanym przypadku ograniczono się do podstawowej częstotliwości własnej, jako obciążonej najmniejszym błędem (tablica 4.2). Mnożnik dla pierwszej częstotliwości i schematu pręta swobodnego wynosi:

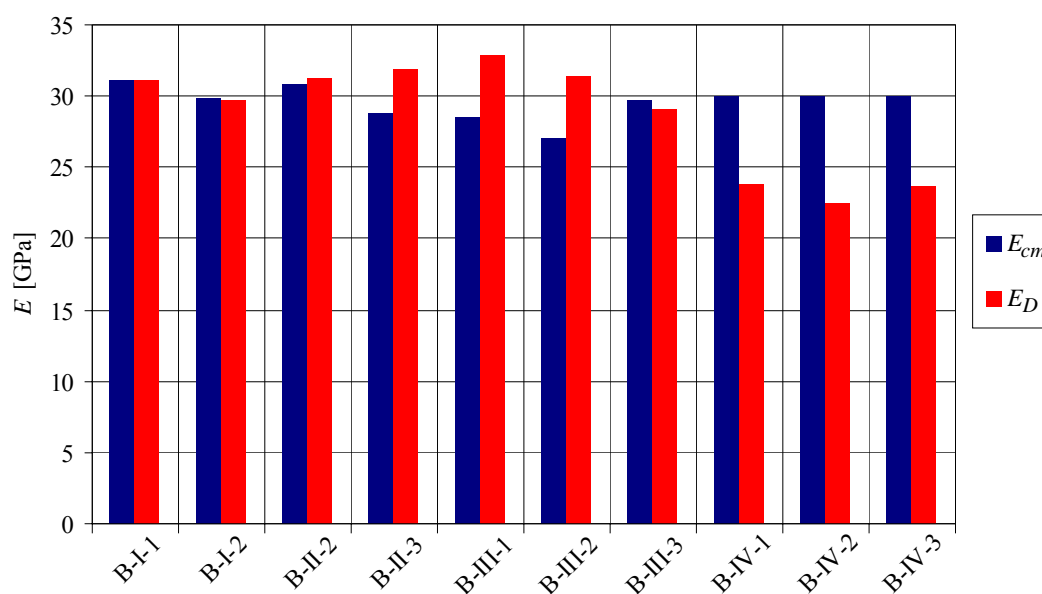
$$\gamma \approx 3,49979. \quad (4.11)$$



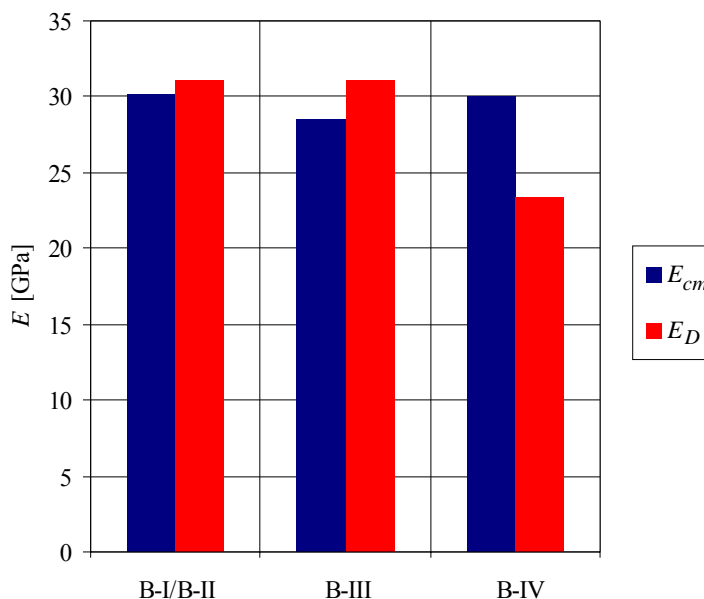
Na podstawie sztywności dynamicznej można obliczyć odpowiadający jej moduł Younga betonu  $E_D$ , zwany umownie dynamicznym. Umowność niniejszego terminu uzasadniono rozdziale 2 pracy. Obliczenia przeprowadzono dla przekroju sprowadzonego (uwzględniono zbrojenie podłużne). Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 4.59. Pominięto belki, dla których nie udało się zarejestrować częstotliwości własnych przed obciążeniem (B-I-3 oraz B-II-1). Belki serii B-I i B-II różniły się jedynie rozstawem strzemion, co zdaniem autora nie ma znaczącego wpływu na drgania poprzeczne elementu. Wyniki dla tych dwóch serii uśredniono. Pozostałe uśrednienia zastosowano jedynie w obrębie poszczególnych serii (B-III oraz B-IV). Ponadto zawarto w tabeli względne różnice między modułem dynamicznym, a statycznym. Wyniki analiz zilustrowano graficznie na wykresach (rys. 4.86 i 4.87). Pierwszy wykres zawiera wyniki dla wszystkich belek (rys. 4.86), drugi natomiast wartości uśrednione (rys. 4.87).

Tabela 4.59 – Moduł Younga badanego betonu określony dwoma metodami

Belka	$E_{cm}$ [GPa]	$E_D$ [GPa]	Względna różnica [%]	$E_{cm}$ [GPa]	$E_D$ [GPa]	Względna różnica [%]
B-I-1	31,11	31,12	0,03	30,16	31,01	2,84
B-I-2	29,82	29,71	0,37			
B-II-2	30,88	31,29	1,33			
B-II-3	28,82	31,93	10,79			
B-III-1	28,58	32,81	14,80	28,49	31,11	9,18
B-III-2	27,11	31,40	15,82			
B-III-3	29,78	29,11	2,25			
B-IV-1	30,03	23,88	20,48	30,03	23,33	22,30
B-IV-2		22,49	25,11			
B-IV-3		23,63	21,31			



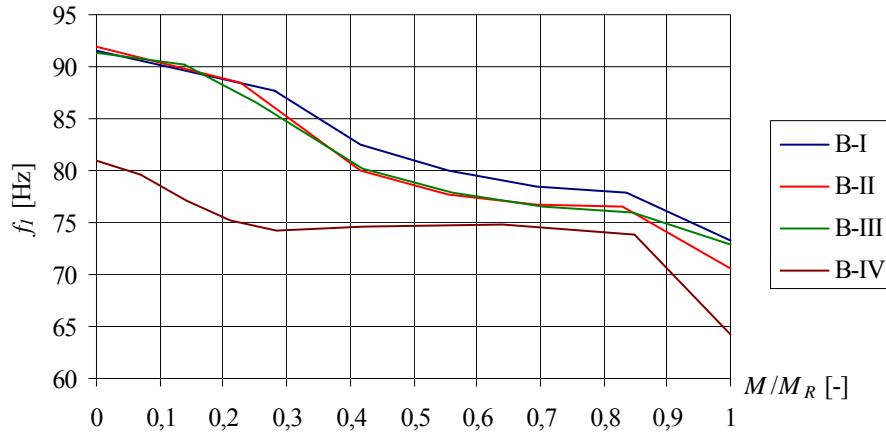
Rys. 4.86 – Statyczny i dynamiczny moduł Younga dla poszczególnych belek



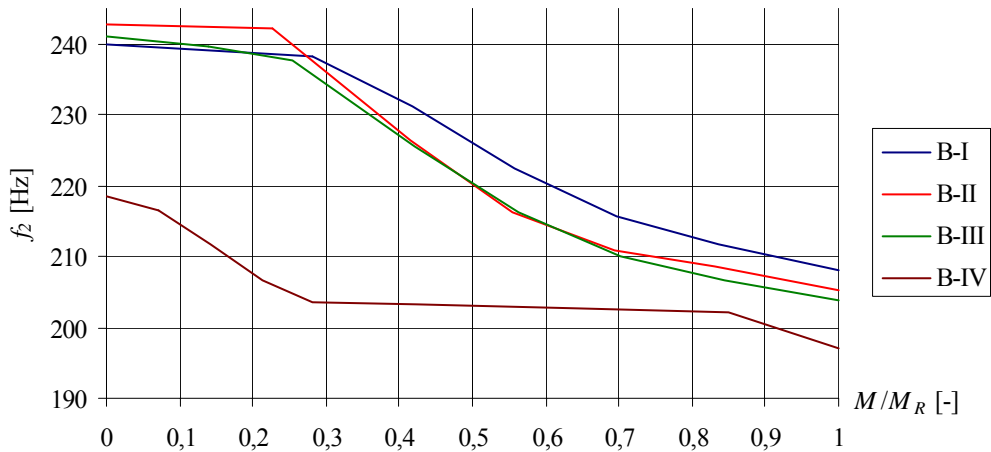
Rys. 4.87 – Statyczny i dynamiczny moduł Younga dla poszczególnych serii

W przypadku belek serii B-I, B-II, B-III średnie różnice między statycznym, a dynamicznym modułem Younga betonu nie przekraczają 10 %. Co więcej, na podstawie przebadanych elementów nie da się określić jednoznacznie trendu tych różnic. W niektórych przypadkach większy jest moduł statyczny (belki B-I-2, B-III-3) w innych zaś moduł dynamiczny (belki B-I-1, B-II-2, B-II-3, B-III-1, B-III-2). Trudno zatem wyciągnąć wiążące wnioski, co do przyjmowania tego parametru w obliczeniach dynamicznych. Tym bardziej, że nie jest to bezpośrednim celem niniejszej pracy. Inaczej jest w przypadku belek silnie zbrojonych (seria IV). Daje się zauważyć wyraźny spadek modułu dynamicznego w stosunku do statycznego. Spadek ten przekracza 20 %. Zdaniem autora fakt ten można uzasadnić ilością zbrojenia. Duża ilość zbrojenia może zaburzać jego współpracę z betonem. Założenie jej idealnego charakteru (jak w przypadku przekroju sprowadzonego) w obliczeniach dynamicznych może prowadzić do błędów. W przypadku drgań, szczególnie o wysokich częstotliwościach, dochodzić może do wzajemnego przemieszczania się zbrojenia i otaczającego je betonu. W zagadnieniach statycznych obciążenia przyrastają zdecydowanie wolniej i są większe niż delikatne uderzenia młotkiem (jak w przypadku przeprowadzonej operacyjnej analizy modalnej). Skutkuje to tym, że zbrojenie o znacznie większym module Younga niż beton, nie zostaje zaangażowane w pełni do współpracy. W przypadku belek serii B-I, B-II, B-III efekt ten nie jest tak znaczny. Uzasadnienia można szukać w mniejszym stopniu zbrojenia, a co za tym idzie mniejszym jego wpływie na sztywność dynamiczną elementu.

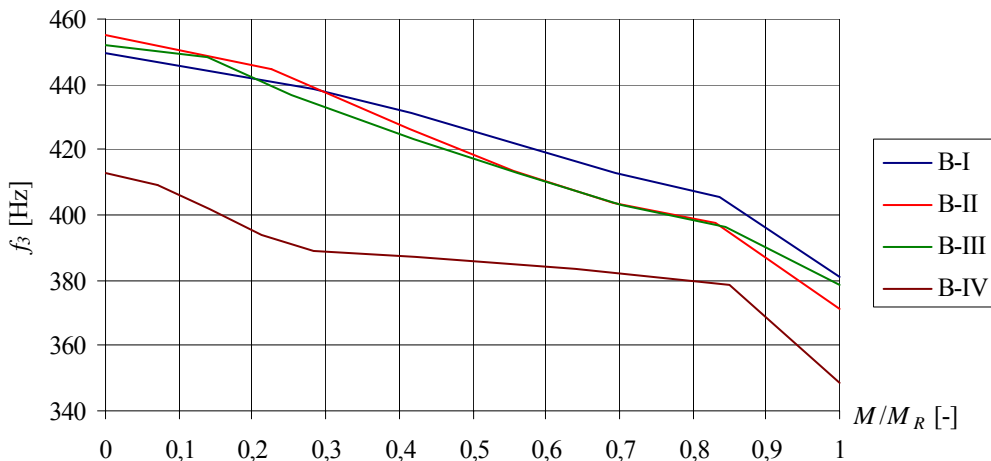
Wykresy na rysunkach 4.20 – 4.28 oraz 4.70 – 4.72 ilustrują spadek trzech pierwszych częstotliwości w zależności od stosunku momentu jakim przeciążana była belka do momentu niszczonego. Wartości z pomiarów uśredniono w ramach poszczególnych serii i przywołano ponownie poniżej (rys. 4.88 – 4.90).



Rys. 4.88 – Pierwsza częstotliwość własna belek w funkcji zaawansowania obciążenia



Rys. 4.89 – Druga częstotliwość własna belek w funkcji zaawansowania obciążenia



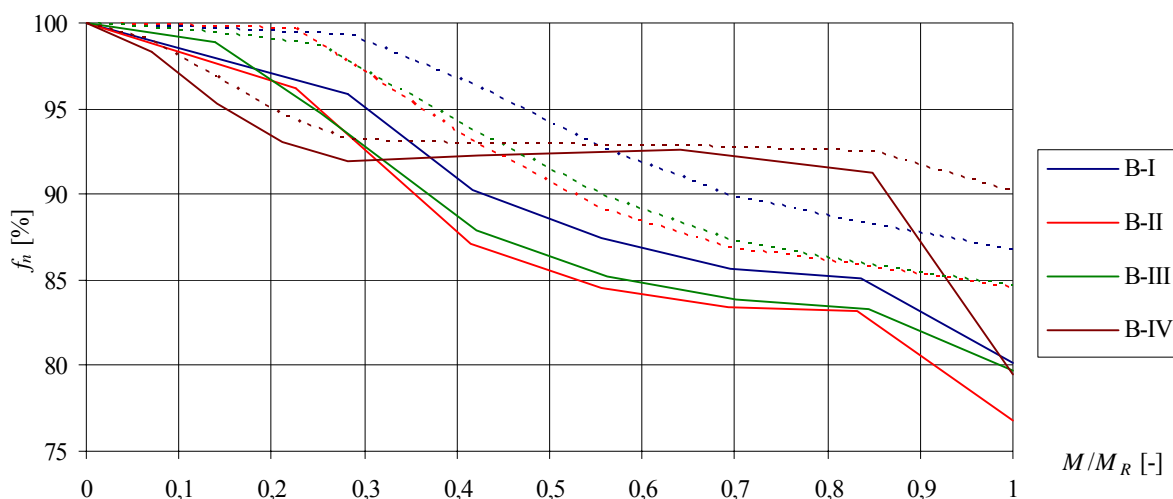
Rys. 4.90 – Trzecia częstotliwość własna belek w funkcji zaawansowania obciążenia

Wykresy (rys. 4.88 – 4.90) ilustrują spadek częstotliwości w miarę przeciążania elementu. Ograniczono się do pokazania trzech pierwszych częstotliwości. W przypadku pozostałych zarejestrowanych zaobserwowano podobny trend. We wszystkich belkach zaobserwowano, że częstotliwości spadają stosunkowo łagodnie przed pojawieniem się widocznych rys ( $M < M_{cr}$ ). Po osiągnięciu wartości momentu rysującego ( $M/M_R = M_{cr}/M_R \approx 0,24$  dla belek serii I, II, III oraz 0,12 dla serii IV) zauważono wyraźny spadek częstotliwości związany z pojawianiem się rys.

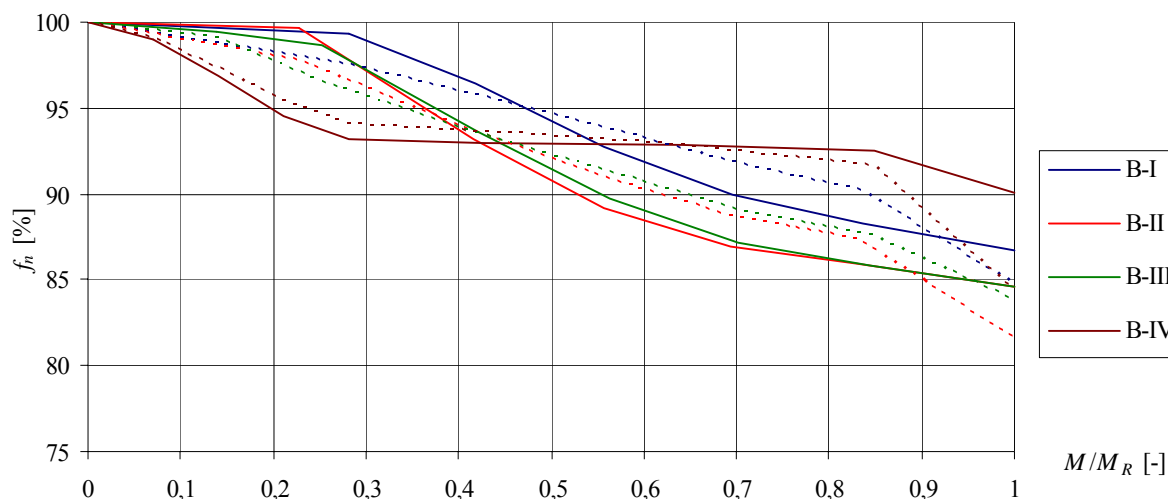
W przypadku belek słabo zbrojonych wartości pierwszej częstotliwości stabilizują się gdy  $M/M_R > 0,50$ . Im wyższa częstotliwość, tym stabilizacja jest mniej widoczna, aż do quasi liniowego spadku dla częstotliwości trzeciej. Dla częstotliwości nieparzystych zaobserwowano znaczny ich spadek gdy  $M = M_R$ . Zjawiska tego nie zauważono dla częstotliwości parzystych. Zniszczenie belek następowało w środku ich rozpiętości. Nieparzyste formy własne mają w tym miejscu ekstremum, co może uzasadniać załamanie wykresów nieparzystych częstotliwości (rys. 4.88 i 4.90).

Zachowanie belek silnie zbrojonych jest odmienne niż belek słabo zbrojonych. Wartości częstotliwości własnych po procesie propagacji rys stabilizują się i przyjmują niemal stały charakter aż do zniszczenia. Po przekroczeniu nośności ujawnia się widoczny spadek, podobnie jak w przypadku belek słabo zbrojonych.

Rysunki 4.91 oraz 4.92 zawierają wykresy znormalizowanych częstotliwości (1, 2, 3). Wyniki pomiarów uśredniono dla poszczególnych serii.



Rys. 4.91 – Pierwsza i druga znormalizowana częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia



Rys. 4.91 – Druga i trzecia znormalizowana częstotliwość własna w funkcji zaawansowania obciążenia

Wyniki dla poszczególnych serii oznaczono jednolitym kolorem. Linia ciągła dotyczy na wykresach niższej częstotliwości (rys. 4.90 – 1, 4.91 – 2), linia przerywana natomiast wyższej (rys. 4.90 – 2, 4.91 – 3). Można zauważyć, że im wyższa częstotliwość, tym mniejszy jest jej względny spadek, spowodowany przeciążaniem elementu. Wyjątkiem są końcowe punkty wykresów zarejestrowane po zniszczeniu, co wynika z ekstremum formy własnej w środku rozpiętości i zostało już opisane.

Zaobserwowano znaczne różnice w zachowaniu się belek słabo i silnie zbrojonych. Belki słabo zbrojone wykazały spadek częstotliwości o zmiennej intensywności w całym przedziale obciążenia. Dla podstawowej częstotliwości w przypadku belek serii B-II i B-III przekraczał on 15 % w końcowej fazie pracy, a po zniszczeniu wyniósł około 20 %. Belki silnie zbrojone wykazały natomiast spadek rzędu 8 %. Przy czym praktycznie w całości stowarzyszony był z procesem pojawiania się nowych rys. W przedziale  $M/M_R > 0,35$  wartości ustabilizowały się aż do spadku po zniszczeniu, który był znacznie wyraźniejszy niż w przypadku belek słabo zbrojonych.

Przeprowadzone doświadczenia wykazały znikomy wpływ ilości i rozstawu rys na częstotliwości własne belek. Należy jednak zaznaczyć, że rysy powstawały naturalnie, a ich rozstaw nie był w żaden zamierzony sposób wymuszany (belki nie były nacinane, nie zabetonowano w miejscu prognozowanego wystąpienia rysy cienkich pionowych blach itp.). Być może byłyby wskazane przeprowadzenie eksperymentów z wykorzystaniem tych środków w celu jeszcze znaczniejszego zróżnicowania ich ilości i rozstawu.

Przeprowadzone pomiary dynamiczne obejmowały także rejestrację form własnych. Pokazano je na wykresach w części dotyczącej badań laboratoryjnych belek (rys. 4.36 – 4.44 oraz 4.76 – 4.78). Zaprezentowano trzy pierwsze formy dla każdej belki w skrajnych krokach

obciążenia. Na wykresach widoczne są różnice w przebiegach form zarejestrowanych w początkowych krokach obciążenia oraz po zniszczeniu. Wartości bezwzględne rzędnych form po zniszczeniu są znacznie większe. Jest to spowodowane obciążaniem elementu, pociągającym za sobą degradację sztywności. Fakt ten znajduje obecnie szerokie zastosowanie w diagnostyce konstrukcji. Zmiana przebiegu form własnych pozwala bowiem prognozować miejsca ewentualnych uszkodzeń budowli oraz maszyn. W niniejszej pracy rejestracja form własnych posłużyła głównie doborowi i budowie optymalnego stanowiska badawczego.

Stwierdzony eksperymentalnie spadek wartości częstotliwości własnych w dziedzinie zaawansowania obciążenia jest oczywisty i zgodny z powszechnymi przekonaniem pod względem jakościowym. Na wyciągnięcie dalszych wniosków pozwoliłaby analiza porównawcza predyspozycji dynamicznych i statycznych zarysowanych belek żelbetowych. W tym celu obliczono sztywność dynamiczną elementów  $EI_D$  na podstawie pomierzonych podstawowych częstotliwości własnych z zależności (4.10) w poszczególnych krokach obciążania elementu. Sztywność statyczną belek  $EI_S$  obliczono na podstawie ugięć ze wzoru (4.12):

$$EI_S = \frac{1}{48} \cdot \frac{P \cdot l_{eff}^3}{a}, \quad (4.12)$$

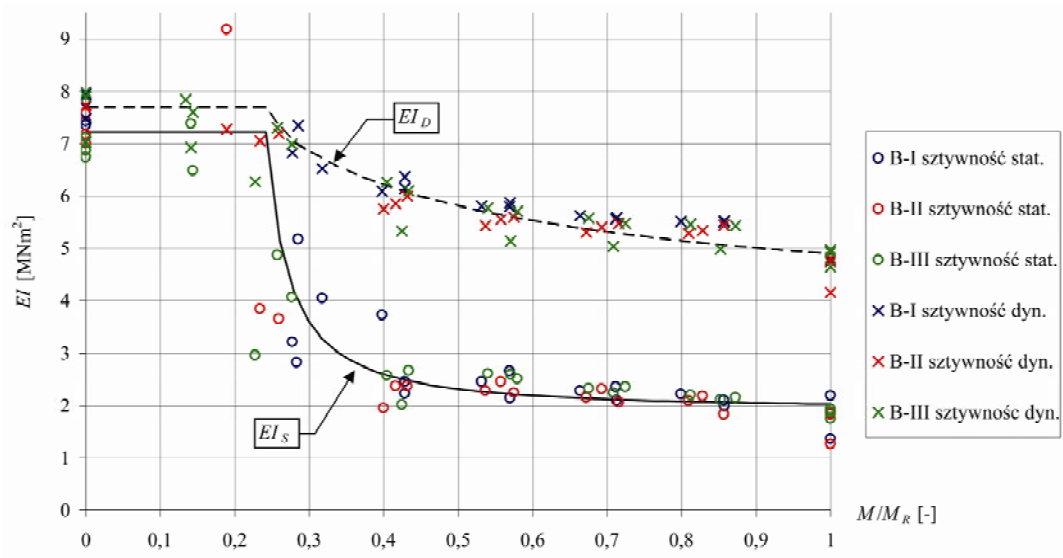
gdzie:  $P$  – obciążenie belki,

$l_{eff}$  – rozpiętość belki w osiach podpór (3,00 m),

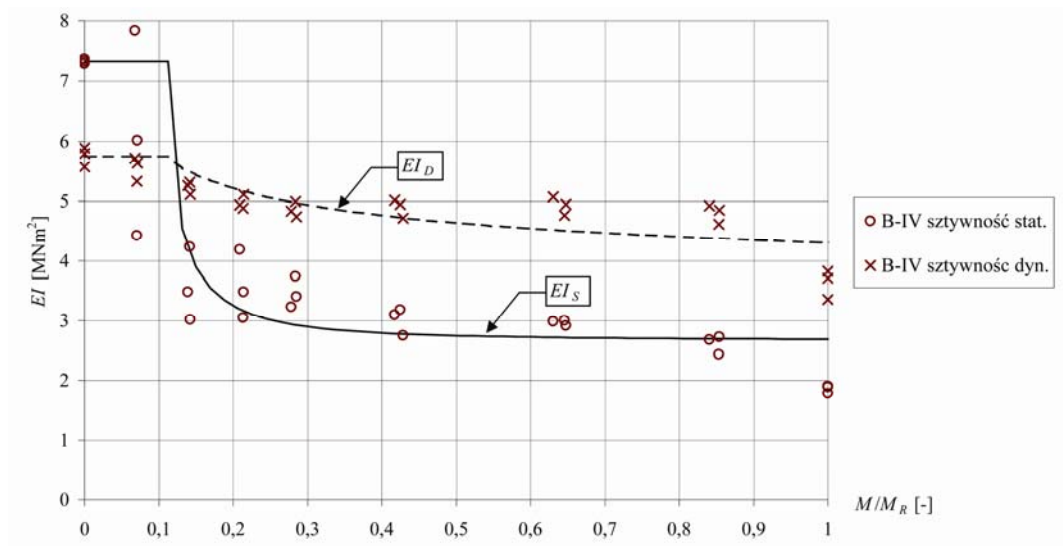
$a$  – ugięcie.

Wyniki obliczeń pokazano na wykresach (rys. 4.92 – 4.94). Pierwszy z nich (rys. 4.92) zawiera rezultaty dla belek słabo zbrojonych (serie I – III), drugi (rys. 4.93) dotyczy belek serii IV, o dwa razy większym stopniu zbrojenia. Wyniki pomiarów (pokazane jako punkty) interpolowano krzywymi (metodą najmniejszych kwadratów), zakładając stałe sztywności gdy  $M < M_{cr}$ . Rozkład punktów jest zbliżony dla wszystkich serii, stąd przy interpolacji posłużono się jedną krzywą dla sztywności dynamicznej  $EI_D$  i jedną dla sztywności statycznej  $EI_S$ . Można zauważyć, że krzywe interpolacyjne mają podobny przebieg do sztywności elementu, obliczonego na podstawie zależności (2.20) i (2.21), proponowanych przez normę [N3].

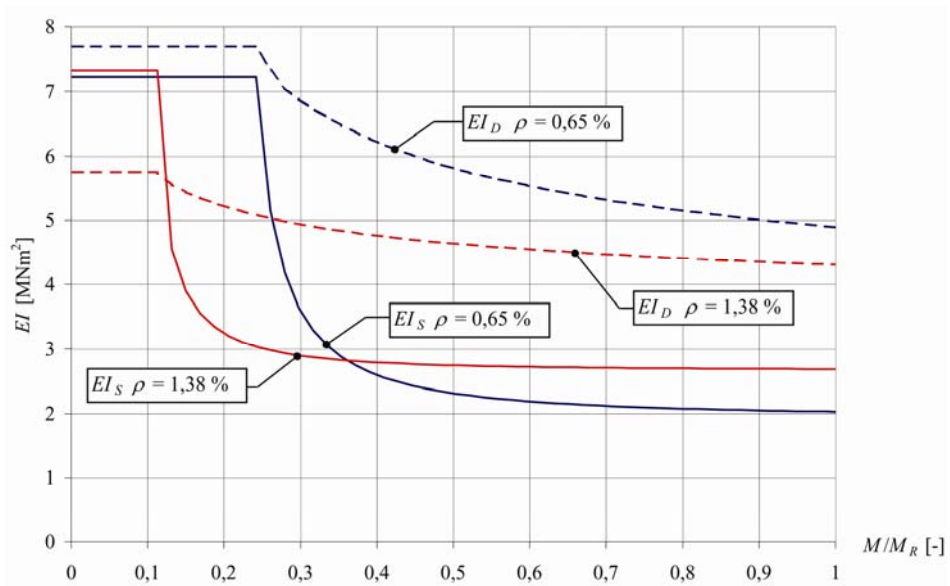
Zbiorczy wykres sztywności pokazano na rysunku 4.94. Zestawiono na nim krzywe odpowiadające poszczególnym stopniom zbrojenia belek.



Rys. 4.92 – Sztywności belek serii I – III

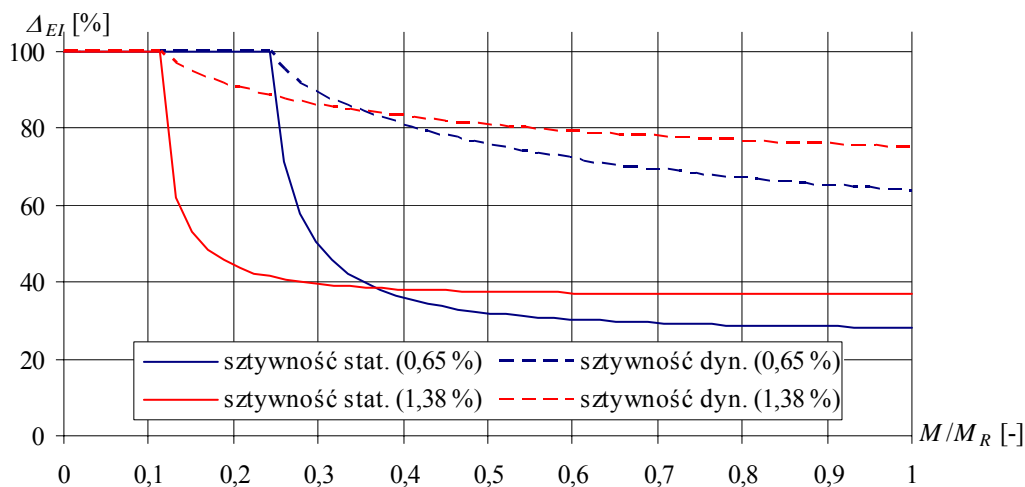


Rys. 4.93 – Sztywności belek serii IV



Rys. 4.94 – Sztywności belek

W przypadku belek słabo zbrojonych różnica między sztywnością dynamiczną, a statyczną w fazie I wynosi 5 %. Nie jest ona znacząca w porównaniu z belkami silnie zbrojonymi, w przypadku których różnica ta wynosi 20 %. Genezę tej różnicy wyjaśniono już na początku punktu 4.6. Na uwagę zasługuje zachowanie się elementów po przekroczeniu wartości momentu rysującego  $M_{cr}$ . W przypadku obu stopni zbrojenia sztywność statyczna wykazała znacznie większy spadek niż sztywność dynamiczna. Względny spadek sztywności  $\Delta_{EI}$  (stosunek sztywności w fazie I do sztywności w fazie II) pokazano na wykresie poniżej (rys. 4.95).



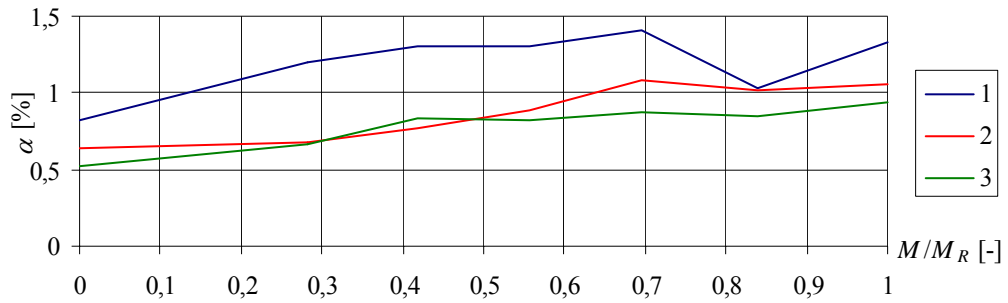
Rys. 4.95 – Względny spadek sztywności

Badania wykazały, że po przekroczeniu momentu rysującego sztywności statyczne spadają o przeszło 60 %. Sztywności dynamiczne natomiast o około 30 %. Zatem przyjęcie do obliczeń dynamicznych sztywności statycznej elementu żelbetowego może prowadzić do błędów. Założenie takie powodowałoby jej niedoszacowanie. Co istotne, nie wiąże się to z klasycznie pojmowanym zapasem bezpieczeństwa, jak w wytrzymałości materiałów. Błędne określenie sztywności dynamicznej, a co za tym idzie częstotliwości własnych może prowadzić do zjawiska rezonansu w elementach obciążanych dynamicznie.

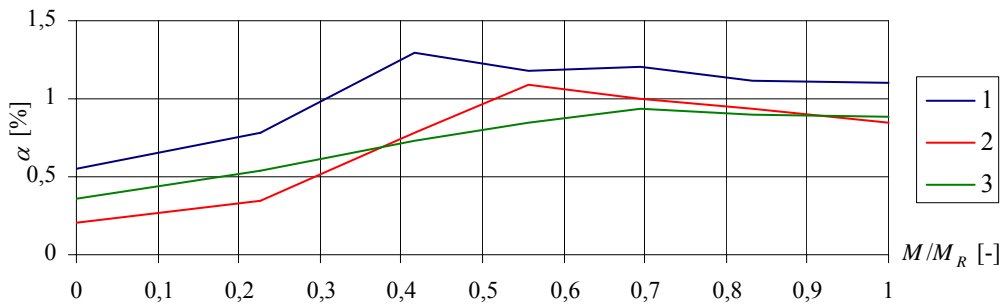
Aparatura pomiarowa umożliwiła określenie liczby tłumienia  $\alpha$ . Wyniki pomiarów zamieszczono na wykresach (rys. 4.45 – 4.52 oraz 4.79 – 4.81). W odniesieniu do wszystkich belek można zauważyć, że tłumienie przyporządkowane podstawowej częstotliwości własnej jest większe od tych, które odpowiadają częstotliwościom wyższym (2 – 6). Liczby tłumienia częstotliwości wyższych tworzą zlewające się pęki krzywych. Ich przebieg jest podobny do liczby tłumienia częstotliwości podstawowej. Rezultaty pomiarów uśredniono i pokazano osobno dla każdej z serii belek (rys. 4.96 – 4.99). Przy czym ograniczono się do trzech pierwszych liczb tłumienia. Na wykresach widoczna jest różnica w charakterze krzywych dla



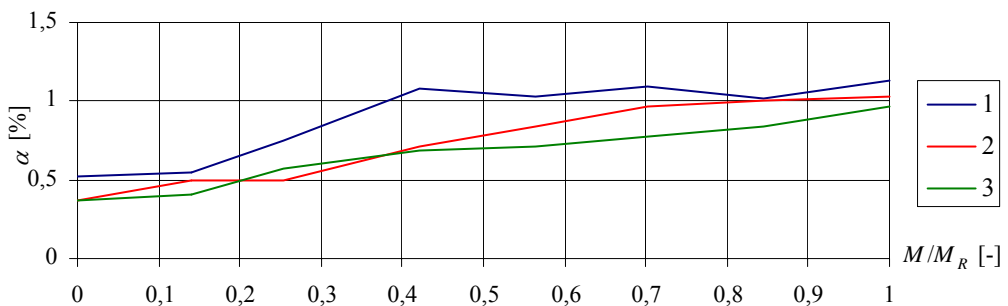
belek słabo i silnie zbrojonych. Belki silnie zbrojone wykazują mniejszą zmianę właściwości tłumiących w funkcji zaawansowania obciążenia. Potwierdza to dotychczasowe wyniki badań [60], według których w skrajnych przypadkach ( $\rho = 3,6\%$ ) tłumienie jest w przybliżeniu stałe w całym zakresie pracy elementu.



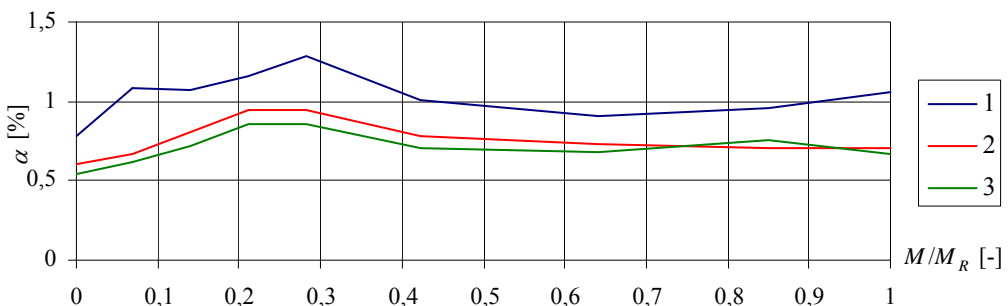
Rys. 4.96 – Liczby tłumienia w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-I



Rys. 4.97 – Liczby tłumienia w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-II

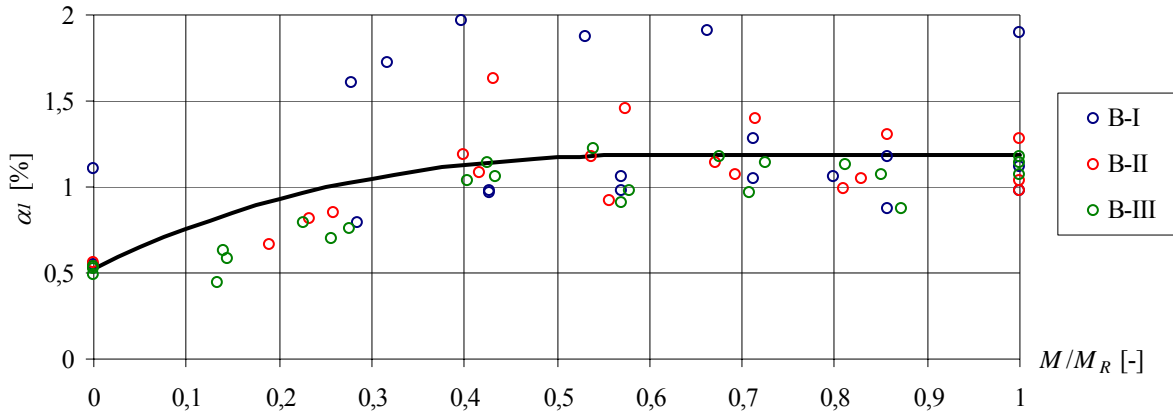


Rys. 4.98 – Liczby tłumienia w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-III

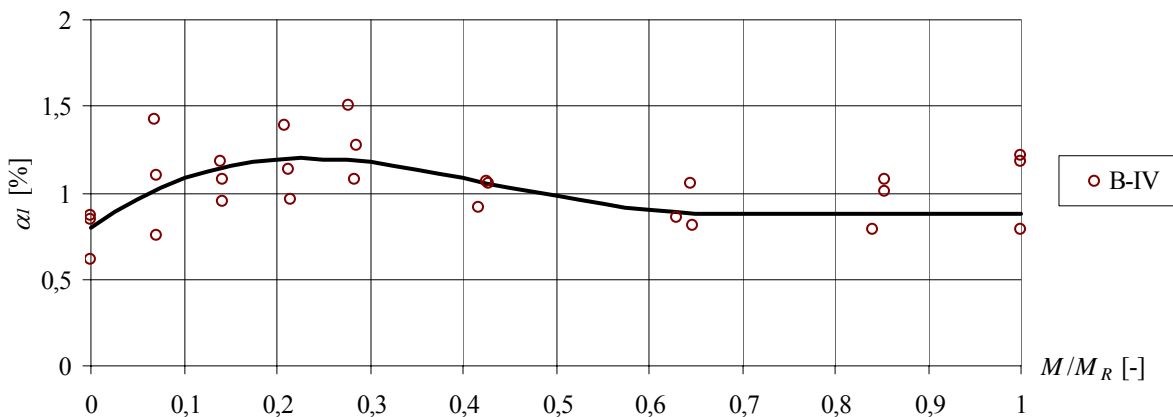


Rys. 4.99 – Liczby tłumienia w funkcji zaawansowania obciążenia dla belek serii B-IV

W dalszej analizie wyników ograniczono się do liczby tłumienia odpowiadającej podstawowej częstotliwości własnej. Podobnie jak w przypadku sztywności elementów wyniki podzielono na dwie grupy: belki słabo zbrojone (serie I – III) i silnie zbrojone (seria IV). Wykresy liczby tłumienia pokazano na rysunkach 4.100 i 4.101. Naniesiono wyniki pomiarów oraz funkcje aproksymujące je. Do aproksymacji zastosowano wielomiany 3 (belki słabo zbrojone) lub 5 stopnia (belki silnie zbrojone) oraz linie proste.

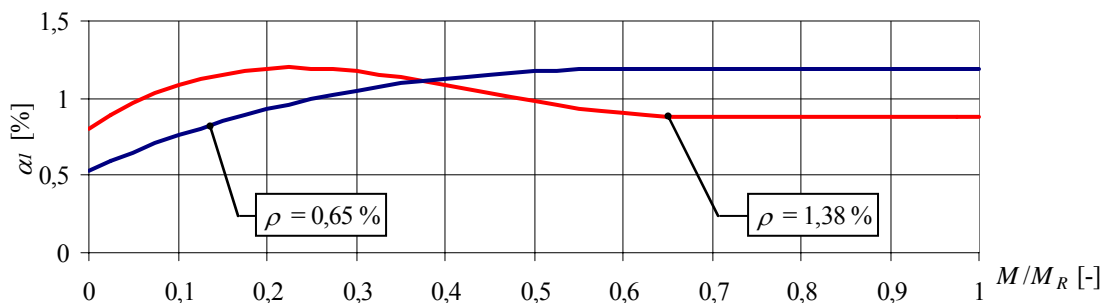


Rys. 4.100 – Liczby tłumienia belek serii I – III



Rys. 4.101 – Liczby tłumienia belek serii IV

Zbiórny wykres dla obu stopni zbrojenia pokazano na rysunku 4.102.



Rys. 4.102 – Liczby tłumienia belek

Na podstawie rysunku 4.102 można wyciągnąć następujące wnioski:

- tłumienie w belkach żelbetowych zależne jest od stopnia przeciążenia elementu i nie może być uznawane za stałą materiałową w całym zakresie pracy elementu,
- w belkach słabo zbrojonych ( $\rho = 0,65 \%$ ) właściwości tłumiące rosną w dziedzinie obciążenia, odpowiadającej pojawianiu się rys, stabilizują się natomiast gdy przestają pojawiać się nowe rysy, a obciążenia pociąga za sobą prawie wyłącznie dalsze rozwieranie się rys istniejących,
- w belkach silnie zbrojonych ( $\rho = 1,38 \%$ ) liczba tłumienia rośnie, aż do pewnej wartości maksymalnej, gdy proces pojawiania się nowych rys dobiega końca liczba tłumienia spada i stabilizuje się na pewnym poziomie aż do zniszczenia elementu,
- belki silnie zbrojone charakteryzują się mniejszym rozrzutem właściwości tłumiących ( $\alpha \in [0,8 \%; 1,2 \%]$ ) w dziedzinie obciążenia niż belki słabo zbrojone ( $\alpha \in [0,5\%; 1,2 \%]$ ).

Należy jednocześnie nadmienić, że beton wykorzystany do wykonania belek serii I – III oraz serii IV opierał się na różnych recepturach. Beton belek serii IV charakteryzował się niższą wytrzymałością na rozciąganie, a co za tym idzie mniejszą wartością momentu rysującego. Na podstawie własnych obserwacji można przypuszczać, że gdyby belki serii IV były wykonane z tego samego betonu co belki serii I – III (o większej wytrzymałości na rozciąganie) ekstremum liczby tłumienia w przypadku belek silnie zbrojonych przesunięte byłoby w prawo o około 0,12 jednostki osi  $M/M_R$ . Nie zostało to jednak potwierdzone w doświadczeniu bezpośrednio.

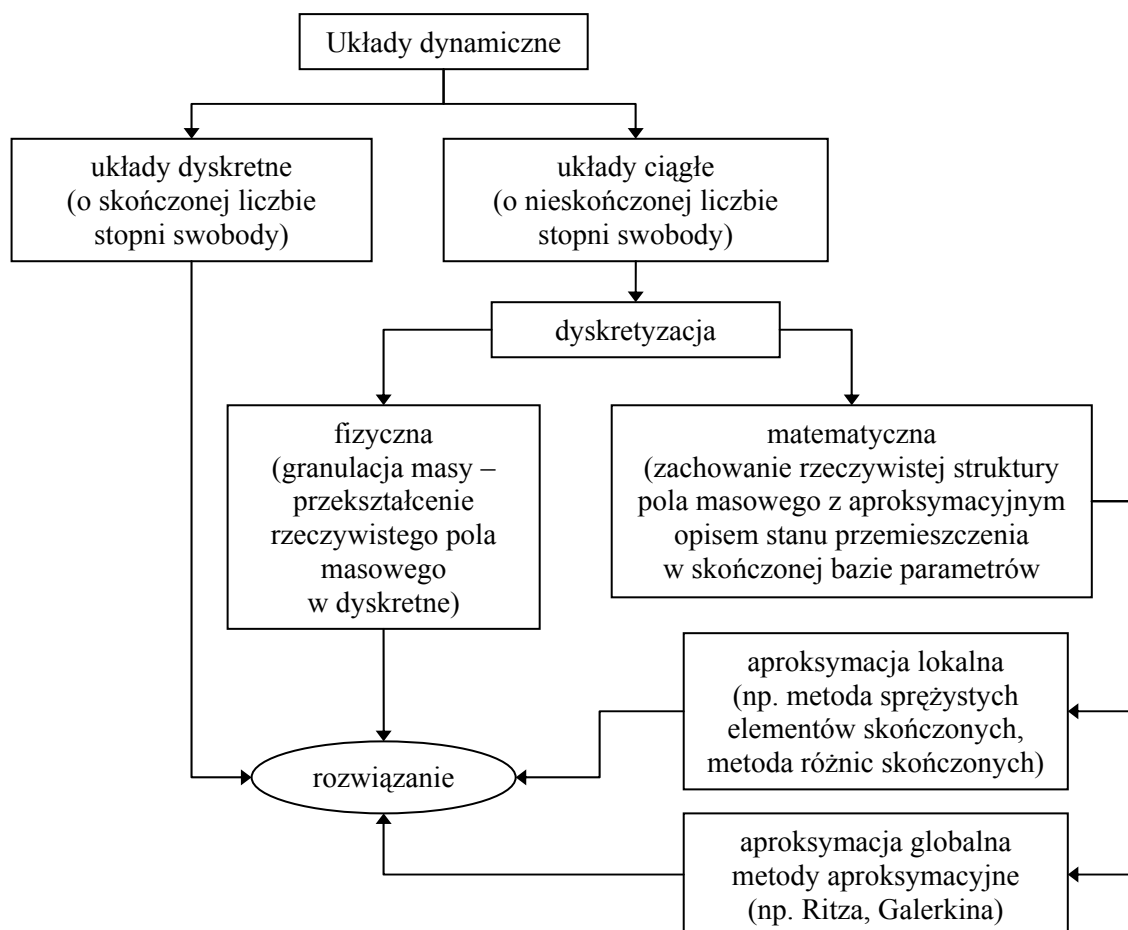
Jak nadmieniono w rozdziale 2 szerszy opis zjawisk tłumienia w odniesieniu do zarysowanych belek żelbetowych można znaleźć w pracy [60].



## 5. Analizy numeryczne

### 5.1. Wstęp

Dostępna literatura [6, 7, 23, 30, 46, 48] proponuje szereg metod do obliczeń dynamicznych konstrukcji. W niektórych wydawnictwach można natrafić na syntezę podstaw teoretycznych oraz realizacje numeryczne w wybranych powszechnych systemach obliczeniowych [15, 28]. Większość metod prezentowana jest w odniesieniu do prętów przyrzmatycznych lub przyrzmatycznych odcinkami. Klasyfikację układów dynamicznych oraz metod ich dyskretyzacji pokazano na rysunku 5.1.



Rys. 5.1 – Podział układów dynamicznych i metody dyskretyzacji

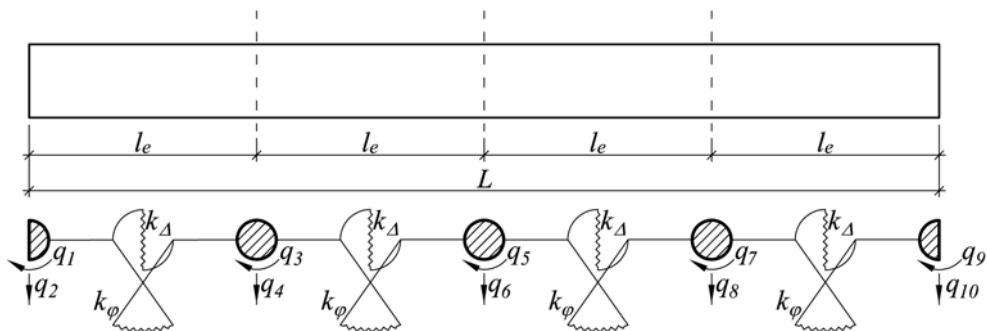
Obliczenia dynamiczne konstrukcji żelbetowych komplikują się ze względu na interakcję dwóch materiałów: betonu i stali oraz fakt zarysowania. Uwzględnienie współpracy betonu i zbrojenia nie nastęrcza problemów, szczególnie przy założeniu idealnego jej charakteru. Trendy obserwowane w literaturze zalecają w obliczeniach dynamicznych

przyjmowanie odpowiedniej sztywności elementu, która wprowadza do obliczeń efekty związane z zarysowaniem. Podejście to znajduje swoje uzasadnienie w znacznym uproszczeniu obliczeń, przez wykorzystanie metod, bądź nawet rozwiązań zamkniętych dla elementów pryzmatycznych (przynajmniej odcinkami). Zdaniem autora jest to fragmentaryczne rozwiązanie problemu. Pozwala śledzić jedynie końcowe efekty, a nie proces drgań elementu w sposób szczegółowy.

## 5.2. Metoda sztywnych elementów skończonych

### 5.2.1. Metoda sztywnych elementów skończonych dla belek jednorodnych

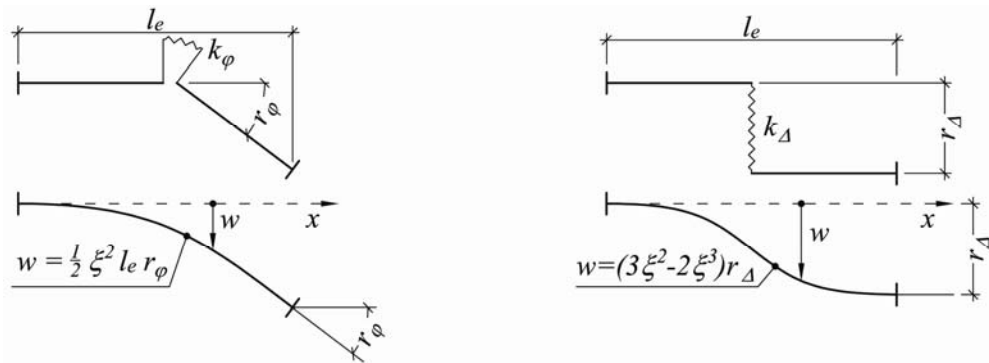
W niniejszej pracy zdecydowano się wykorzystać metodę sztywnych elementów skończonych. Została ona zapoczątkowana przez J. Kruszewskiego z zespołem [27]. Powstała z myślą o przemyśle okrętowym. Służyła obliczeniom m. in. kadłubów statków, części maszyn, elementów silników. Do obliczeń prętowych konstrukcji budowlanych zaadaptował ją J. Langer [30]. W metodzie tej mamy do czynienia z granulacją mas, czyli dyskretyzacją fizyczną. Za cechy bezwładnościowe ustroju odpowiedzialne są sztywne tarcze masowe. Tarcze połączone sprężystymi więziami (dwoma translacyjnymi i jedną rotacyjną), reprezentującymi cechy sprężyste ustroju. Ruch każdej z tarcz opisany jest trzema współzrędnymi uogólnionymi. W przypadku drgań giętnych, a do takich ograniczono się w niniejszej pracy, liczba więzi oraz współzrędnych uogólnionych redukuje się do dwóch. Schemat i model numeryczny pręta jednorodnego, bez warunków brzegowych, pokazano na rysunku 5.2.



Rys. 5.2 – Schemat i model numeryczny pręta jednorodnego

Pręt podzielono na cztery elementy skończone o długości  $l_e$ . Każdej tarczy masowej odpowiadają dwie współzrędnymi uogólnione  $q_i$ . Tarcze połączone są więziami rotacyjnymi i translacyjnymi o odpowiednich sztywnościach  $k_\phi$  oraz  $k_\Delta$ . Sztywności poszczególnych więzi

można obliczyć z porównania energii potencjalnych elementu sztywnego i elementu sprężystego. Modele elementów pokazano na rysunku 5.3 [30].



Rys. 5.3 – Modele elementarne do wyprowadzenia sztywności więzi [30]

Przez  $r_\Delta$  oraz  $r_\varphi$  oznaczono wzajemne dyslokacje sąsiadujących elementów. W zależności od nich podano wzory na ugięcie elementu  $w$ , z wykorzystaniem funkcji kształtu. Wyprowadzenie zależności na sztywności więzi pokazano poniżej [30].

$$E_{p\varphi} = \frac{1}{2} k_\varphi r_\varphi^2 = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{12EI}{l_e^3} \right) r_\varphi^2 \Rightarrow k_\varphi = \frac{12EI}{l_e^3}, \quad (5.1)$$

$$E_{p\Delta} = \frac{1}{2} k_\Delta r_\Delta^2 = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{EI}{l_e} \right) r_\Delta^2 \Rightarrow k_\Delta = \frac{EI}{l_e}, \quad (5.2)$$

gdzie:  $EI$  – sztywność giętna elementu.

Sztywności poszczególnych więzi należy zgrupować w macierz diagonalną  $\{k\}$ . Macierz ta dla pręta jak na rysunku 5.2 ma postać:

$$\{k\} = \text{diag}\{k_\varphi, k_\Delta, k_\varphi, k_\Delta, k_\varphi, k_\Delta, k_\varphi, k_\Delta\}. \quad (5.3)$$

Energia potencjalna odkształcenia ustroju wyraża się wzorem:

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \{k\} \mathbf{r}, \quad (5.4)$$

gdzie:  $\mathbf{r}$  – wektor dyslokacji względnych.

Wektor współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}$  można transformować na wektor  $\mathbf{r}$  wg zależności:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}_k \mathbf{q}, \quad (5.5)$$

gdzie:  $\mathbf{A}_k$  – macierz transformacji.

Wykorzystując zależności (5.4) oraz (5.5) można zapisać wzór na energię potencjalną całego ustroju w postaci:

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A}_k^T \{k\} \mathbf{A}_k \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (5.6)$$

Globalna macierz sztywności ustroju  $\mathbf{K}$  ma zatem postać:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_k^T \{k\} \mathbf{A}_k. \quad (5.7)$$

Budowę macierzy transformacji  $\mathbf{A}_k$  można zalgorytmizować. Wiedząc, że transformacja współrzędnych uogólnionych na dyslokacje względne dla pojedynczego elementu wyraża się wzorem:

$$\begin{bmatrix} r_\varphi \\ r_\Delta \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{kU} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{l_e}{2} & -1 & \frac{l_e}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

łatwo jest zbudować macierz transformacji  $\mathbf{A}_k$  o strukturze pasmowej, dla całego ustroju belkowego. Przykładowo dla schematu jak na rysunku 5.2:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{kU} & & & \\ & \mathbf{A}_{kU} & & 0 \\ & & \mathbf{A}_{kU} & \\ 0 & & & \mathbf{A}_{kU} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Celem realizacji numerycznych można zapisać wyrażenie ogólne na niezerowe wartości  $i$ -tego wiersza,  $j$ -tej kolumny macierzy transformacji  $\mathbf{A}_k$  o wymiarach  $2n_{el} \times n_q$  ( $n_{el}$  – liczba elementów skończonych,  $n_q$  – liczba współrzędnych uogólnionych):

$$A_{k,ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j = i \text{ dla } i = 1, 2, \dots, 2n_{el} \\ -1, & \text{gdy } j = i + 2 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, 2n_{el} \\ -\frac{l_e}{2}, & j = i - 1 \text{ dla } i = 2, 4, \dots, 2n_{el} \\ -\frac{l_e}{2}, & j = i + 1 \text{ dla } i = 2, 4, \dots, 2n_{el} \end{cases}. \quad (5.10)$$





Wektor obciążeń  $\mathbf{P}(t)$  zawiera poszczególne siły wzbudzające, przyporządkowane kierunkiem i miejscem przyłożenia współrzędnym uogólnionym. Sformułowanie macierzy tłumienia  $\mathbf{C}$ , na podstawie wybranej hipotezy, pozwala zapisać macierzowe równanie ruchu w postaci:

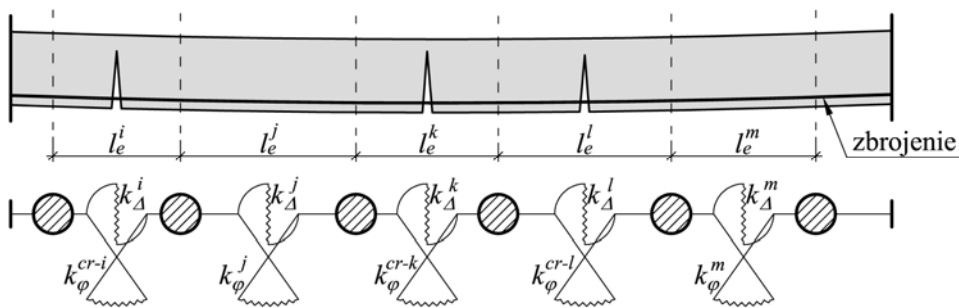
$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t). \quad (5.13)$$

Gdy pominiemy tłumienie oraz obciążenie zewnętrzne otrzymujemy się równanie drgań własnych, którego rozwiązanie pozwala wyznaczyć częstotliwości oraz przyporządkowane im formy własne. W zagadnieniach statycznych pomija się siły bezwładności oraz tłumienia, a obciążenie i przemieszczenie jest stałe w czasie. Równanie ruchu ma zatem postać:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}. \quad (5.14)$$

### 5.2.2. Metoda sztywnych elementów skończonych dla belek żelbetowych z rysami

Prezentowana metoda sztywnych elementów skończonych pozwala uwzględnić zarysowanie elementu żelbetowego w sposób dyskretny. Jak pokazano w punkcie 5.2.1. jednym z elementów, prowadzących do rozwiązania, jest sformułowanie macierzy diagonalnej  $\{k\}$ . W macierzy na diagonalu zgrupowane są sztywności więzi, łączących tarcze masowe. Można zatem przypuszczać, że dzieląc odpowiednio na elementy skończone (to znaczy tak, aby rysa znajdowała się w połowie odległości między tarczami masowymi), wprowadzenie efektu zarysowania do obliczeń będzie polegało na redukcji sztywności więzi rotacyjnej w miejscu pojawienia się rysy. Schemat oraz model numeryczny pręta żelbetowego z rysami pokazano na rysunku 5.4.



Rys. 5.4 – Schemat i model numeryczny zarysowanego pręta żelbetowego

Na rysunku 5.4 wprowadzono następujące oznaczenia:

- $l_e^i, l_e^j, \dots, l_e^m$  – długości elementów  $i, j, \dots, m$ ,

- $k_{\Delta}^i, k_{\Delta}^j, \dots, k_{\Delta}^m$  – sztywności więzi translacyjnych elementów  $i, j, \dots, m$ , obliczone na podstawie sprowadzonej sztywności giętej elementu w fazie I –  $EI_I$ ,
- $k_{\varphi}^j, k_{\varphi}^m$  – sztywności więzi rotacyjnych elementów  $j, m$ , obliczone na podstawie sprowadzonej sztywności giętej elementu w fazie I –  $EI_I$ ,
- $k_{\varphi}^{cr-i}, k_{\varphi}^{cr-k}, k_{\varphi}^{cr-l}$  – sztywności więzi rotacyjnych elementów  $i, k, l$  z uwzględnieniem rysy.

Odstępy między rysami są różne. Skutkuje to tym, że elementy skończone są różnej długości. W praktyce, propagacji rys w konstrukcjach żelbetowych towarzyszy pewna regularność i pojawiają się one w podobnych rozstawach. W dalszych rozważaniach przyjęto uśredniony rozstaw rysy dla całej belki. Pozwala to znacznie uprościć obliczenia, gdyż elementy skończone mają taką stałą długość  $l_e$ .

Parametrem pozostającym do określenia jest sztywność rotacyjna elementu z rysą. Jeżeli przyjąć, że podatność rotacyjna elementu z rysą jest sumą podatności, jaka wynika z odkształcalności giętej oraz z faktu wystąpienia rysy to można napisać:

$$d_{\varphi}^{cr-i} = d_{\varphi}^i + d_{cr}^i, \quad (5.15)$$

gdzie:  $d_{\varphi}^{cr-i}$  – podatność rotacyjna  $i$ -tego elementu z rysą,

$d_{\varphi}^i$  – podatność rotacyjna  $i$ -tego elementu w fazie I (bez rysy),

$d_{cr}^i$  – podatność rotacyjna, wynikająca z rysy w  $i$ -tym elemencie.

Odwrotnością sztywności jest podatność, a zatem:

$$d_{\varphi}^i = (k_{\varphi}^i)^{-1}. \quad (5.16)$$

gdzie:  $k_{\varphi}^i$  – sztywność więzi rotacyjnej w  $i$ -tym elemencie, obliczona z zależności (5.1), dla sprowadzonej sztywności giętej w fazie I –  $EI_I$ .

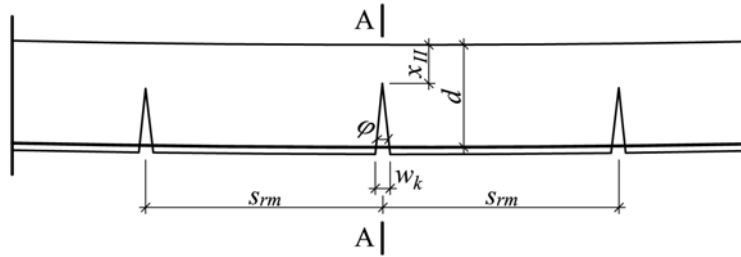
Dla znanej podatności, wynikającej z faktu wystąpienia rysy, można zapisać zależność na sztywność więzi rotacyjnej elementu, pracującego w fazie II (z rysą):

$$k_{\varphi}^{cr-i} = \frac{1}{(k_{\varphi}^i)^{-1} + d_{cr}^i}. \quad (5.17)$$

Obliczona na podstawie zależności (5.17) sztywność rotacyjna może być elementem macierzy diagonalnej  $\{k\}$ , zawierającym wpływ wystąpienia rysy.

### 5.2.3. Podatność rotacyjna wynikająca z rysy

Podatność obrotową rysy określono na podstawie elementarnych zależności geometrycznych oraz wytrzymałości materiałów. Rozpatrzono schemat jak na rysunku 5.5.



Rys. 5.5 – Schemat do obliczenia podatności obrotowej rysy

Na rysunku powyżej wprowadzono następujące oznaczenia:

$d$  – wysokość użyteczna przekroju,

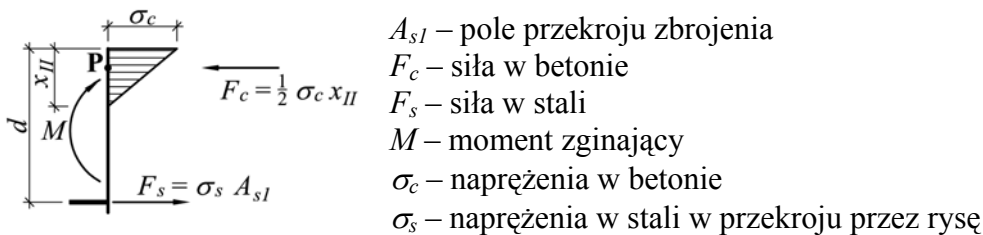
$s_{rm}$  – średni rozstaw rys,

$w_k$  – rozwartość rysy,

$x_{II}$  – wysokość strefy ściskanej w fazie II,

$\varphi$  – kąt rozwarcia rysy.

Siły działające w przekroju przez rysę (A-A), dla trójkątnego rozkładu naprężeń w betonie, pokazano na rysunku 5.6.



Rys. 5.6 – Siły w przekroju przez rysę

Na podstawie rysunku 5.6 można zapisać równanie równowagi momentów względem punktu **P**:

$$M = F_s \cdot \left( d - \frac{x_{II}}{3} \right) = \sigma_s \cdot A_{s1} \cdot \left( d - \frac{x_{II}}{3} \right) \Rightarrow \sigma_s = \frac{M}{A_{s1} \cdot \left( d - \frac{x_{II}}{3} \right)}. \quad (5.18)$$

Wzór na średnią rozwartość rys ma postać:

$$w_k = (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \cdot s_{rm} \approx \varepsilon_{sm} \cdot s_{rm} = \frac{\sigma_{sm}}{E_s} \cdot s_{rm}. \quad (5.19)$$

gdzie:  $\sigma_{sm}$  – średnie naprężenie w zbrojeniu między rysami.

Średnie naprężenia w stali między rysami z naprężeniami w przekroju przez rysę wiąże współczynnik  $\psi_z$  – według zależności (5.20).

$$\psi_z = 1,3 - s \frac{M_{cr}}{M}, \quad (5.20)$$

gdzie:  $s$  – współczynnik uwzględniający stopień naruszenia przyczepności zbrojenia do betonu, wynoszący odpowiednio:

1,0 – przy obciążeniu krótkotrwałym, dla prętów gładkich,

1,1 – przy obciążeniu krótkotrwałym, dla prętów żebrowanych,

0,8 – przy obciążeniu długotrwałym.

Zależność na średnie naprężenie w stali ma zatem postać:

$$\sigma_{sm} = \psi_z \cdot \sigma_s. \quad (5.21)$$

Na podstawie rysunku 5.5 można zapisać wyrażenie na kąt rozwarcia rysy:

$$\varphi = \frac{w_k}{d - x_{II}}. \quad (5.22)$$

Na podstawie wzorów (5.18) – (5.22) zapisano poniżej zależność na kąt rozwarcia rysy:

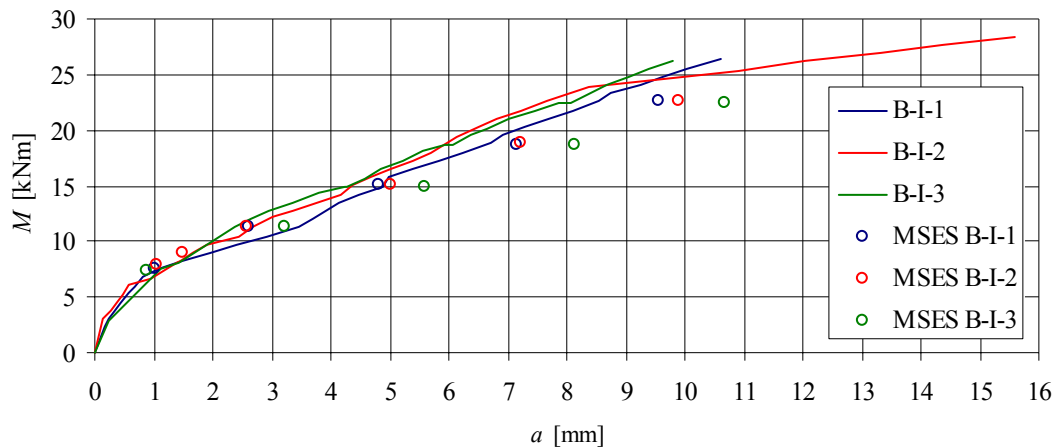
$$\varphi = \frac{\psi_z \cdot s_{rm}}{E_s \cdot A_{s1} \cdot (d - \frac{x_{II}}{3}) \cdot (d - x_{II})} \cdot M. \quad (5.23)$$

Podatność obrotowa, wynikająca z rysy wynosi zatem:

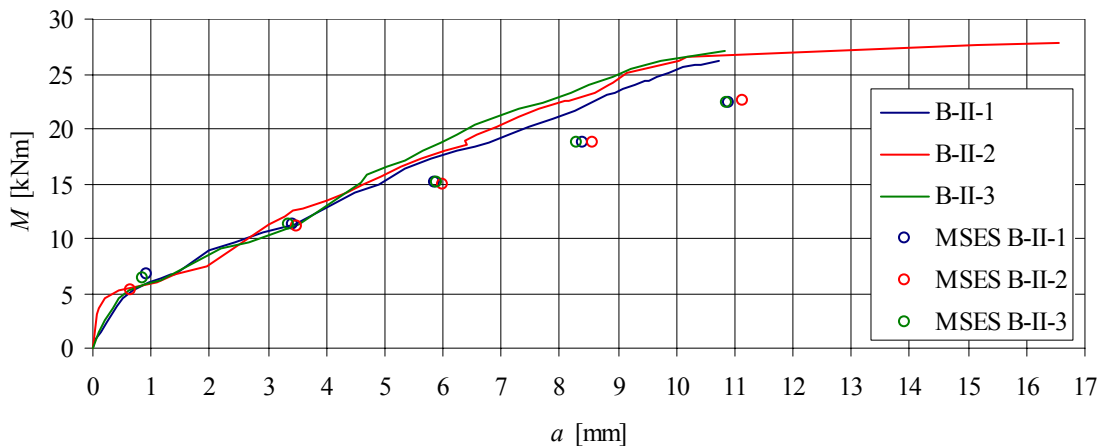
$$d_{cr} = \frac{\psi_z \cdot s_{rm}}{E_s \cdot A_{s1} \cdot (d - \frac{x_{II}}{3}) \cdot (d - x_{II})}. \quad (5.24)$$

### 5.2.4. Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach statycznych belek żelbetowych

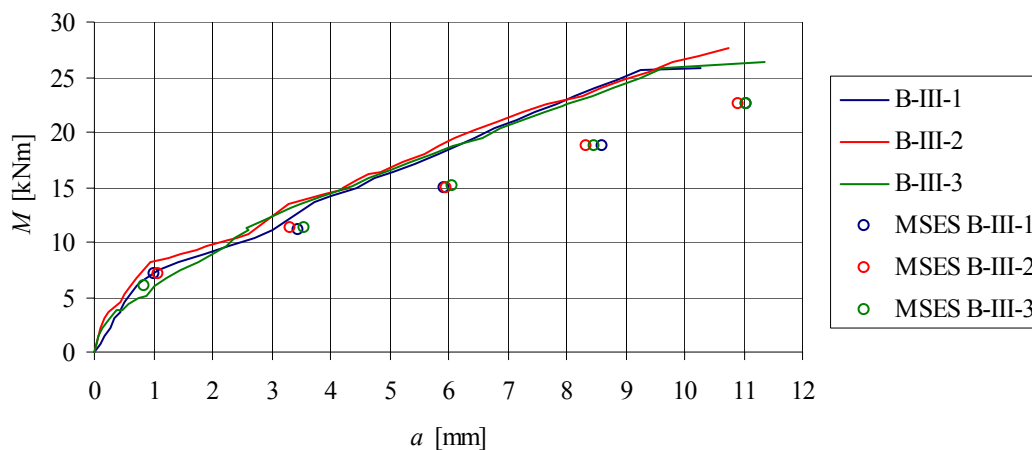
Przed przystąpieniem do realizacji numerycznej proponowanego algorytmu w obliczeniach dynamicznych postanowiono sprawdzić jego przydatność w obliczeniach statycznych. Badaniom laboratoryjnym poddano belki statycznie wyznaczalne, zarysowanie nie wpływało zatem na redystrybucję sił wewnętrznych, a jedynie na uogólnione przemieszczenia (ugięcia i kąty obrotu). Pomiary ugięć badanych elementów umożliwiły weryfikację metody proponowanej do obliczania ugięć. Wyniki pomiarów i obliczeń metodą sztywnych elementów skończonych (MSES) zastawiono na wykresach (rys. 5.7 – 5.10). Obliczenia przeprowadzono dla każdego kroku obciążenia i zaznaczono na wykresach jako punkty. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem programu Mathematica® [62]. Przykładowy wydruk z programu obliczeniowego zamieszczono w załączniku Z-1.



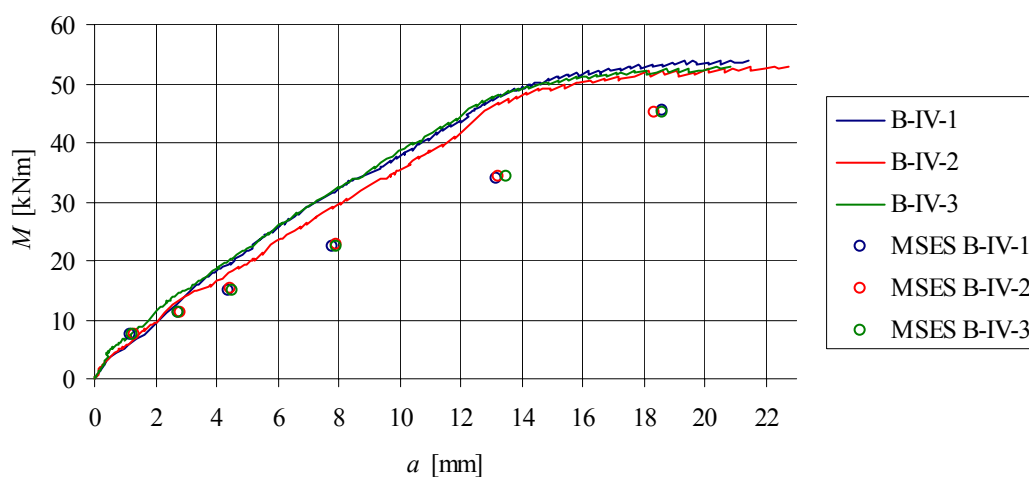
Rys. 5.7 – Wyniki pomiarów i obliczeń belek serii B-I



Rys. 5.8 – Wyniki pomiarów i obliczeń belek serii B-II



Rys. 5.9 – Wyniki pomiarów i obliczeń belek serii B-III



Rys. 5.10 – Wyniki pomiarów i obliczeń belek serii B-IV

Uzyskano dużą zgodność wyników, szczególnie w zakresie do 50 % zaawansowania obciążenia w przypadku belek słabo zbrojonych oraz do 30 % w przypadku belek silnie zbrojonych. Wyniki spoza tego zakresu charakteryzują się większymi różnicami, sięgającymi nawet 30 %. Fakt ten można tłumaczyć tym, że w obliczeniach uwzględniono każdą, zaobserwowaną makroskopowo rysę. Rysy powstałe w wyższych krokach obciążenia nie mają tak dużej głębokości jak te, które powstały w początkowych krokach. W modelu pokazanym na rysunku 5.6 zakłada się natomiast, że każda rysa sięga osi obojętnej belki. Zdaniem autora właśnie w tym można upatrywać przeszacowania ugięć w prezentowanej metodzie obliczeniowej.

Wyniki obliczeń potwierdziły przydatność prezentowanej metody do obliczania ugięć zarysowanych belek żelbetowych. Różnice między rezultatami eksperymentu, a analizami numerycznymi nie są znaczne. Tym bardziej, że w pracy [24], dotyczącej obliczania ugięć

belek żelbetowych wykazano, że ugięcia obliczone różnymi metodami różnią się nawet przeszło o 50 % (np. metoda Swaina oraz podana w normie ACI).

### 5.2.5. Dynamiczna podatność rotacyjna wynikająca z rysy

Przeprowadzone badania eksperymentalne wykazały, że predyspozycje statyczne konstrukcji (ugięcia) są inne niż dynamiczne (częstotliwości własne), co pokazano na wykresach (rys. 4.94, 4.95). Można się zatem spodziewać, że podatność dynamiczna rysy będzie inna (mniejsza) niż proponowana zależnością (5.24). Wyniki eksperymentu wykorzystano do skalowania modelu numerycznego. W obliczeniach zastosowano współczynnik  $\alpha_d$ . Podatność dynamiczna rysy wyraża się zatem wzorem:

$$d_{cr}^D = \alpha_d \cdot d_{cr}, \quad (5.25)$$

gdzie:  $\alpha_d$  – współczynnik przejścia ze statycznej na dynamiczną podatność rysy,

$d_{cr}$  – podatność obrotowa rysy według zależności (5.24).

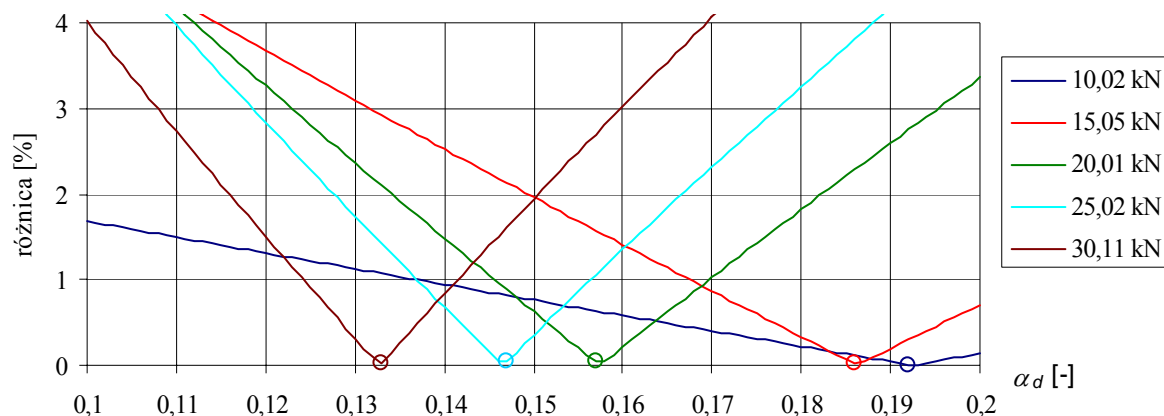
Parametr  $\alpha_d$  skalowano iteracyjnie tak, aby zminimalizować błąd między częstotliwością pomierzoną, a obliczoną. W obliczeniach przyjęto następujące założenia:

- do określenia częstotliwości własnych dla każdego z kroków iteracji przyjęto dynamiczny moduł Younga betonu  $E_D$  (obliczony na podstawie częstotliwości belki debiutującej), w przypadku braku danych (belki B-I-3 oraz B-II-1) przyjęto moduł Younga  $E_{cm}$  z próby osiowego ściskania walców betonowych (jak wykazano w punkcie 4.6 różnice między  $E_D$  i  $E_{cm}$  dla belek słabo zbrojonych nie były znaczne),
- do określenia charakterystyk belki w fazie I i II (między innymi  $M_{cr}$ ) przyjęto moduł Younga  $E_{cm}$ ,
- skalowanie parametru  $\alpha_d$  przeprowadzono pod kątem podstawowej częstotliwości własnej, założenie to uprościło obliczenia, nie wprowadzając znacznych błędów (największym błędem względnym obarczone były szóste częstotliwości własne i wynosił on około 10 %).

Skalowanie iteracyjne, jakim się posłużono, polegało na obliczeniu podstawowej częstotliwości własnej belki zarysowanej dla wielu wartości  $\alpha_d$  z zadanego przedziału i wybraniu tej, dla której błąd względny był najmniejszy. W wyniku otrzymywano także wykresy, ilustrujące względną różnicę między częstotliwością pomierzoną, a obliczoną.



Przykładowy wykres dla belki B-I-1 pokazano na rysunku 5.11.



Rys. 5.11 – Względna różnica w zależności od parametru  $\alpha_d$  dla poszczególnych kroków obciążenia

Przykładowy wydruk z programu obliczeniowego zamieszczono w załączniku Z-2. Wyniki dla wszystkich belek zestawiono w tabelach 5.2 – 5.5.

Tabela 5.2 – Parametry  $\alpha_d$  belek serii B-I

B-I-1			B-I-2			B-I-3		
$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]
10,02	0,29	0,192	10,48	0,28	0,211	15,00	0,43	0,118
15,05	0,43	0,186	11,99	0,32	0,258	19,92	0,57	0,104
20,01	0,57	0,157	15,02	0,40	0,176	24,91	0,71	0,101
25,02	0,71	0,147	20,07	0,53	0,121	29,98	0,86	0,0926
30,11	0,86	0,133	25,06	0,66	0,116	-	-	-
-	-	-	30,16	0,80	0,103	-	-	-

Tabela 5.3 – Parametry  $\alpha_d$  belek serii B-II

B-II-1			B-II-2			B-II-3		
$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]
9,04	0,26	0,0163	7,04	0,19	0,286	8,44	0,23	0,372
15,04	0,43	0,115	14,84	0,40	0,167	14,99	0,42	0,177
20,03	0,57	0,106	19,94	0,54	0,134	20,08	0,56	0,144
24,92	0,72	0,0953	24,97	0,67	0,126	24,95	0,69	0,125
29,85	0,86	0,086	30,05	0,81	0,115	29,85	0,83	0,118

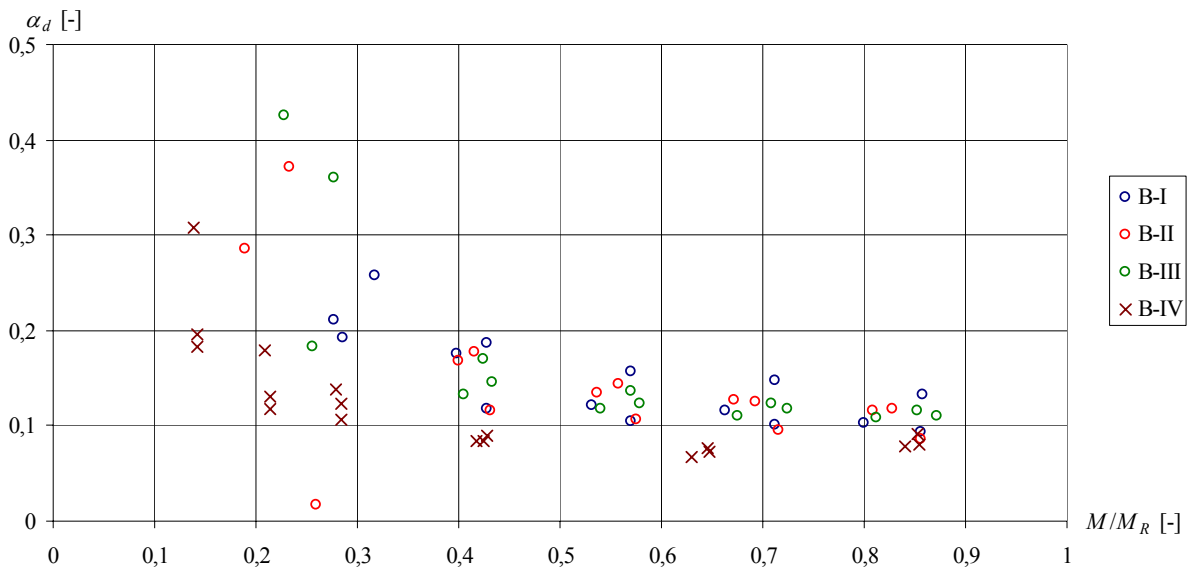
Tabela 5.4 – Parametry  $\alpha_d$  belek serii B-III

B-III-1			B-III-2			B-III-3		
$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]
9,50	0,28	0,361	9,49	0,26	0,183	8,02	0,23	0,426
14,89	0,43	0,146	14,94	0,40	0,132	14,95	0,42	0,169
19,91	0,58	0,124	19,92	0,54	0,118	20,09	0,57	0,137
24,90	0,72	0,117	24,93	0,68	0,110	24,94	0,71	0,123
29,97	0,87	0,110	29,98	0,81	0,108	30,00	0,85	0,116

Tabela 5.5 – Parametry  $\alpha_d$  belek serii B-IV

B-IV-1			B-IV-2			B-IV-3		
$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]	$P$ [kN]	$M/M_R$ [-]	$\alpha_d$ [-]
9,98	0,14	0,307	10,05	0,14	0,183	10,01	0,14	0,195
15,04	0,21	0,179	15,06	0,21	0,118	15,12	0,21	0,130
20,01	0,28	0,138	20,12	0,29	0,123	20,05	0,28	0,107
30,00	0,42	0,0837	30,25	0,43	0,0900	30,00	0,42	0,0833
45,36	0,63	0,0670	45,59	0,65	0,0756	45,76	0,65	0,0726
60,44	0,84	0,0787	60,22	0,85	0,0912	60,31	0,85	0,0797

Wyniki zestawiono dla wszystkich belek na wykresie (rys. 5.12).



Rys. 5.12 – Parametr  $\alpha_d$  w funkcji zaawansowania obciążenia

Przeprowadzone analizy wykazały, że podatność dynamiczna rysy jest mniejsza niż statyczna. Nie jest stała w całej dziedzinie obciążenia, a spada z różną intensywnością. Największy spadek towarzyszy procesowi rozwoju rysy w przedziale do  $0,4 M_R$ . Powyżej tej granicy wartości współczynnika  $\alpha_d$  stabilizują się. Ponadto można zauważyć, że belkom silnie zbrojonym odpowiadają mniejsze ich wartości niż w przypadku belek słabo zbrojonych.

W dalszej części pracy zaproponowano zależności, służące obliczaniu współczynnika  $\alpha_d$  dla dowolnego przypadku. Materiał badawczy, jakim dysponowano, nakazywał uzależnienie współczynnika od stopnia zbrojenia oraz poziomu zaawansowania obciążenia. W tym celu przetestowano sześć nieliniowych funkcji, których charakter zbliżony jest do wyników doświadczenia. Funkcje zawierały od 1 do 3 parametrów. Wyniki analiz zestawiono w tabelicy 5.6. Oprócz zależności ogólnej podano względną różnicę między wartościami obliczonymi, a wynikami eksperymentu. Wyniki pokazano dla każdej serii belek osobno oraz

dla poszczególnych stopni zbrojenia.

Tablica 5.6 – Funkcje opisujące parametr  $\alpha_d$

Funkcja	Względna różnica [%]				
	B-I	B-II	B-III	B-I, B-II, B-III $\rho = 0,65 \%$	B-IV $\rho = 1,38 \%$
$e^{-\beta x}$	0,46	1,03	0,48	0,67	0,42
$\alpha \cdot e^{-\beta x}$	0,09	0,53	0,36	0,33	0,16
$\alpha \cdot \gamma^{-\beta x}$	0,10	0,57	0,39	-	0,17
$\alpha + x^{-\beta}$	<b>0,09</b>	<b>0,51</b>	<b>0,35</b>	<b>0,32</b>	<b>0,13</b>
$Cot(\alpha \cdot x^\beta) + \gamma$	0,09	0,56	0,38	0,33	0,14
$\alpha + e^{-\beta x}$	0,10	0,55	0,46	0,36	0,20

$e$  – liczba Eulera

$\alpha, \beta, \gamma$  – parametry

$x = M/M_R$

Wybrano model charakteryzujący się najmniejszym błędem i w dalszych analizach ograniczono się do niego. Wartości parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$  zestawiono w tabeli 5.7. Wydruk z programu obliczeniowego, skalującego parametry dla wybranego modelu zamieszczono w załączniku Z-3.

Tabela 5.7 – Parametry przyjętego modelu

Parametr	B-I	B-II	B-III	B-I, B-II, B-III $\rho = 0,65 \%$	B-IV $\rho = 1,38 \%$
$\alpha$	-0,916	-0,926	-0,947	-0,929	-0,958
$\beta$	0,0941	0,0955	0,157	0,116	0,0732

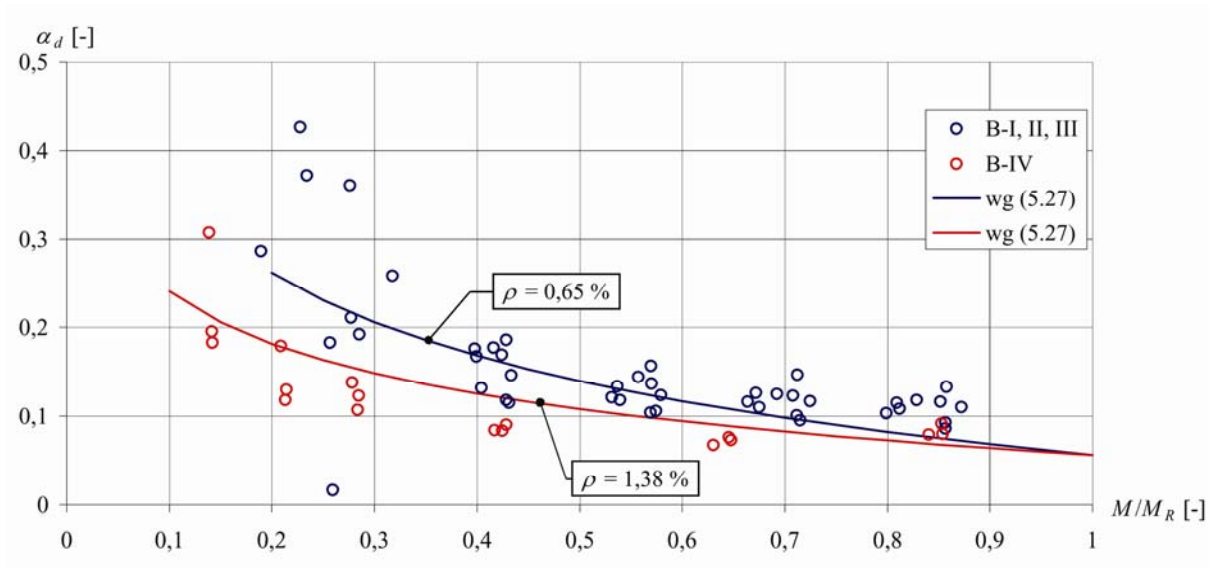
Ze względu na niewielką różnicę między parametrem  $\alpha$  dla belek słabo i silnie zbrojonych do dalszych obliczeń postanowiono go uśrednić. Ponadto przyjęto liniową zmienność parametru  $\beta$  w funkcji stopnia zbrojenia według zależności (5.26):

$$\beta = -0,154 + 5,823 \cdot \rho \quad (5.26)$$

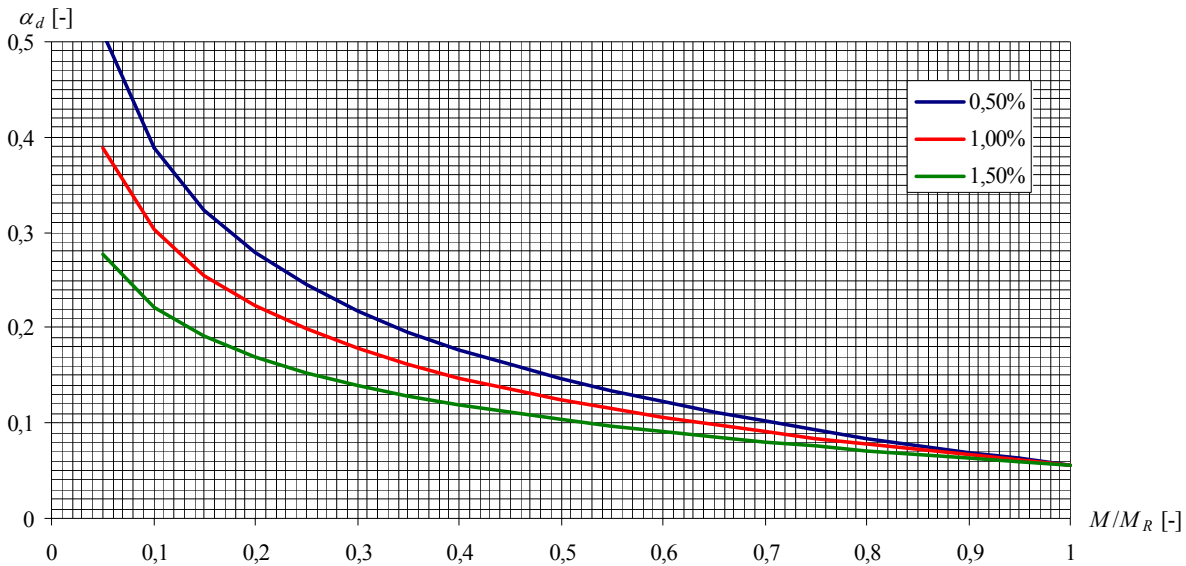
Ostatecznie wzór, pozwalający obliczyć współczynnik  $\alpha_d$  jest postaci (5.27):

$$\alpha_d = -0,944 + \left( \frac{M}{M_R} \right)^{-0,154 + 5,823 \cdot \rho} \quad (5.27)$$

Na rysunku 5.13 pokazano wykres parametru  $\alpha_d$  obliczony na podstawie zależności (5.27) w zestawieniu z wynikami eksperymentu. Rysunek 5.14 zawiera natomiast nomogram parametru dla wybranych stopni zbrojenia.



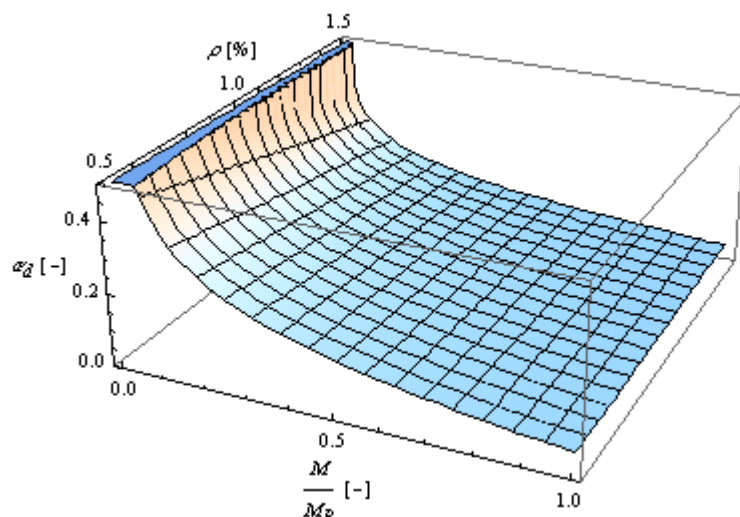
Rys. 5.13 – Parametr  $\alpha_d$  z pomiarów oraz obliczeń w funkcji zaawansowania obciążenia



Rys. 5.14 – Nomogram parametru  $\alpha_d$  dla wybranych stopni zbrojenia

Na podstawie wykresów (rys. 5.13 oraz 5.14) można zauważyć, że im większy stopień zbrojenia tym mniejsza jest dynamiczna podatność rotacyjna wynikająca z rysy w stosunku do podatności statycznej. Różnice te są szczególnie widoczne przy niskim poziomie obciążenia elementu. Dla wyższych stopni zaawansowania obciążenia różnice te zmniejszają się, a dla obciążenia zbliżonego do niszczącego parametr  $\alpha_d$  jest stały (niezależny od stopnia zbrojenia). Celem uzupełnienia analiz pokazano wykres parametru  $\alpha_d$  w trójwymiarowym układzie współrzędnych (rys. 5.15), gdzie:

$$\alpha_d = \alpha_d \left( \rho, \frac{M}{M_R} \right). \quad (5.28)$$



Rys. 5.15 – Parametr  $\alpha_d$  w funkcji stopnia zbrojenia i zaawansowania obciążenia

Wartym rozważenia jest zastosowanie stałego parametru  $\alpha_d$ , szczególnie w zakresie zaawansowania obciążenia powyżej 30 %. W tym celu obliczono wartości średnie z wyników doświadczenia. Wyniosły one odpowiednio:

$$\bar{\alpha}_d = 0,131 \text{ dla } \rho = 0,65 \% \quad (5.29a)$$

$$\bar{\alpha}_d = 0,905 \text{ dla } \rho = 1,38 \% \quad (5.29b)$$

Przyjęcie liniowej zależności od stopnia zbrojenia pozwala zapisać wyrażenie na średni współczynnik w postaci:

$$\bar{\alpha}_d = -5,489\rho + 0,166. \quad (5.30)$$

### 5.3. Uproszczona metoda sztywności dynamicznej

Przeprowadzone badania laboratoryjne pozwoliły dodatkowo określić zależność na zastępczą sztywność dynamiczną zarysowanej belki żelbetowej. Jako punkt wyjścia rozważań przyjęto wzór (2.21) proponowany przez normę [N3]. Wzbogacono go o dwa parametry  $\alpha_B$  oraz  $\beta_B$ , co prowadzi do następującej postaci dla fazy I (5.31a) oraz II (5.31b):

$$B_D^I = \alpha_B E_c I_I, \quad (5.31a)$$

$$B_D^{II} = \frac{\alpha_B E_c I_{II}}{1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^{2\beta_B} \left( 1 - \frac{I_{II}}{I_I} \right)}, \quad (5.31b)$$

gdzie:  $\alpha_B$  – współczynnik przejścia ze statycznego na dynamiczny moduł Younga betonu,

$\beta_B$  – współczynnik uwzględniający intensywność spadku sztywności, związanego z przeciążaniem elementu,

$E_c, \beta_1, \beta_2, I_I, I_{II}$  – jak we wzorze (2.21).

Współczynnik  $\alpha_B$  przyjęto na podstawie badań laboratoryjnych (według punktu 4.6). Wyniósł on odpowiednio:

$$\alpha_B \approx 1,000 \text{ dla } \rho = 0,65 \%, \quad (5.32a)$$

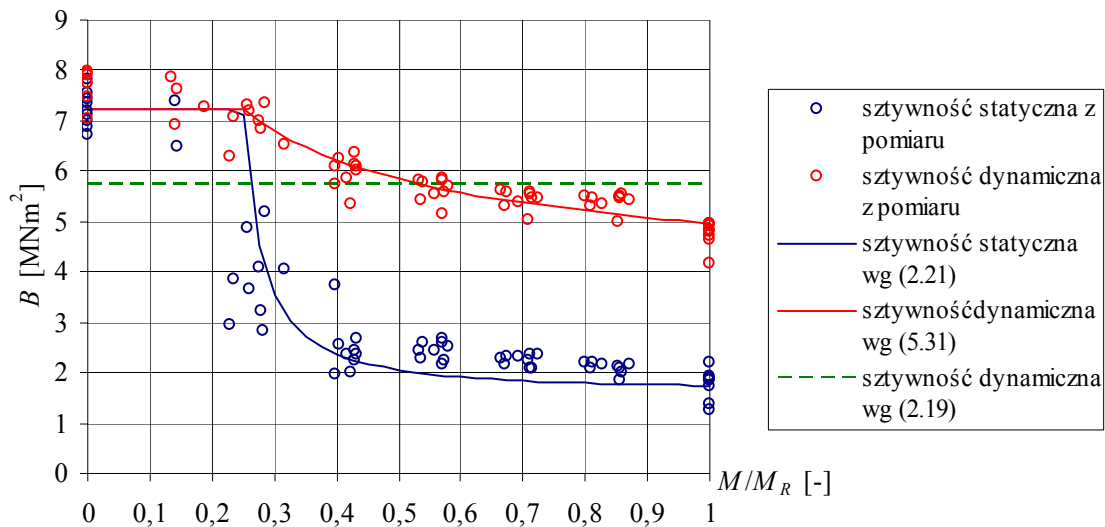
$$\alpha_B = 0,777 \text{ dla } \rho = 1,38 \%. \quad (5.32b)$$

Parametr  $\beta_B$  wyskalowano na podstawie wyników pomiarów laboratoryjnych. Skalowanie przeprowadzono dla rezultatów zarejestrowanych po przekroczeniu momentu rysującego, z pominięciem pomiarów przeprowadzonych po zniszczeniu belki. Uzyskano następujące wartości:

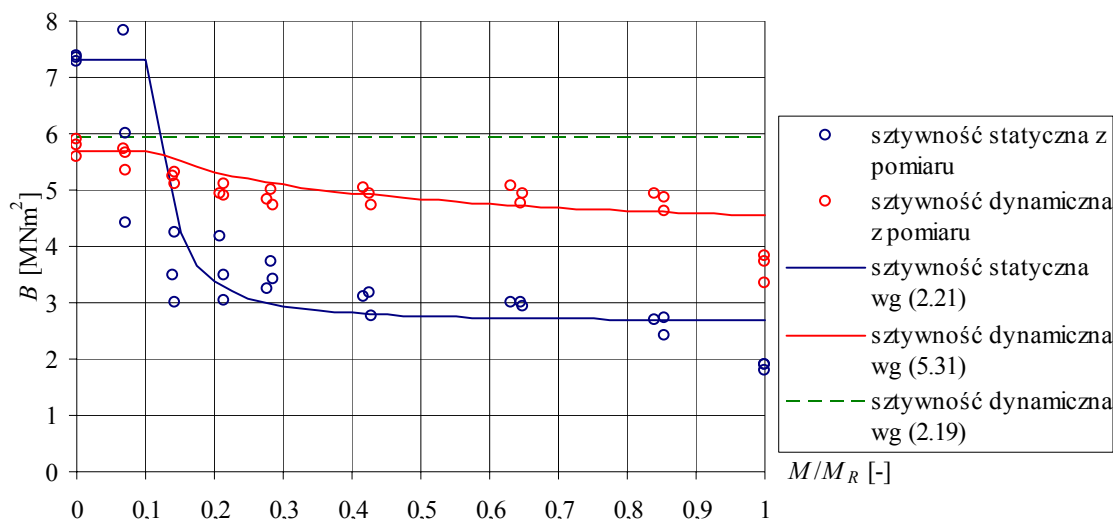
$$\beta_B = 0,525 \text{ dla } \rho = 0,65 \% \quad (5.33a)$$

$$\beta_B = 0,362 \text{ dla } \rho = 1,38 \% \quad (5.33b)$$

Na rysunkach 5.16 oraz 5.17 zestawiono wyniki pomiarów oraz wykresy sztywności dynamicznej i statycznej. Sztywność dynamiczną obliczono na podstawie zależności (5.31) przy założeniach (5.32) oraz (5.33). Sztywność statyczną natomiast na podstawie wzorów (2.20) oraz (2.21), zaczerpniętych z normy [N3]. Pokazanie jej na wykresach ma charakter jedynie informacyjny i pozwala zweryfikować poprawność pomierzonych ugięć.



Rys. 5.16 – Sztywności belek słabo zbrojonych



Rys. 5.16 – Sztywności belek silnie zbrojonych

Na wykresach pokazano ponadto sztywność (linia przerywana), jaką zaleca przyjmować do obliczeń norma [N2]. Jest to sztywność całkowitego przekroju betonowego, bez uwzględnienia zbrojenia. Będzie zatem stała w całym zakresie pracy elementu i niezależna od stopnia zbrojenia.

Na podstawie przeprowadzonych badań można wnioskować, że krytykowana w pracy [61] propozycja normy [N2] nie może być arbitralnie odrzucona. Skorzystanie z niej jest warte rozważenia, szczególnie w niektórych zakresach obciążenia. Ponadto jest bliższa rzeczywistości w zagadnieniach dynamicznych niż zależność (2.21).

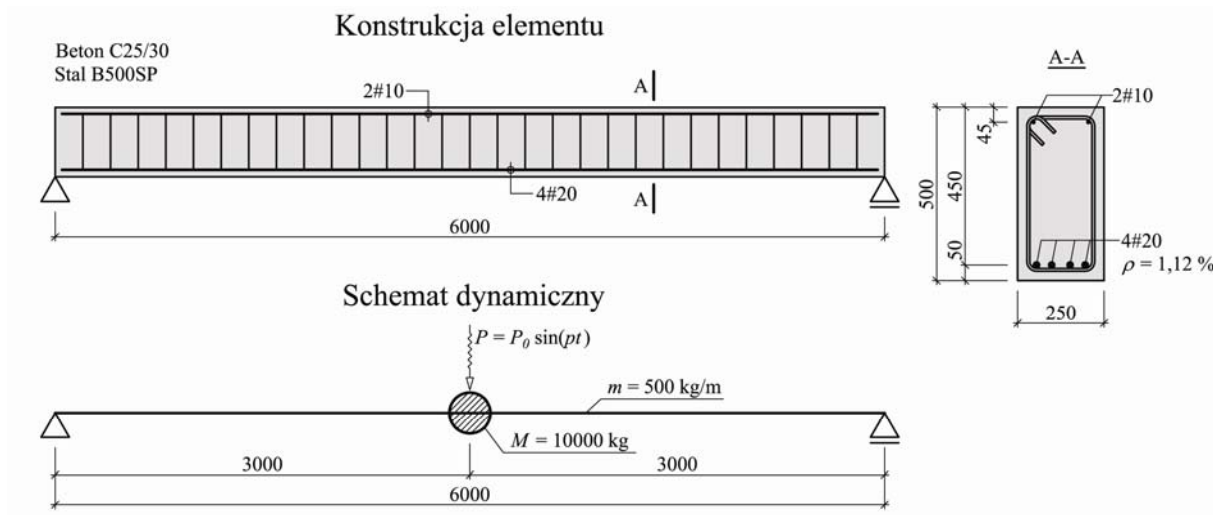
Celem uogólnienia określono zależność pozwalającą obliczyć parametr  $\beta_B$  dla dowolnego stopnia zbrojenia. Podobnie jak w przypadku współczynnika  $\beta$  założono liniową zmienność. Ostatecznie prowadzi to do wzoru:

$$\beta_B = -2,22\rho + 0,0669. \quad (5.34)$$

Na podstawie posiadanego materiału badawczego trudno jest zaproponować podobne uogólnienie dla parametru  $\alpha_B$ . Tym bardziej, że dynamiczny moduł Younga betonu zależny jest nie tylko od stopnia zbrojenia, ale także od składu mieszanki betonowej. Ponadto sprzężony jest z wytrzymałością na ściskanie, czego dowiedziono m. in. w pracy [18]. Wniosek jaki można wyciągnąć z przeprowadzonych badań dotyczy jedynie przedziału, w jakim zawiera się parametr  $\alpha_B$ . Dla niższych stopni zbrojenia można przyjąć w przybliżeniu, że jest równy 1,0. W przypadku belek silnie zbrojonych wyniósł on 0,777.

#### 5.4. Przykład obliczeniowy

Elementem zamykającym rozdział 5 jest praktyczna realizacja proponowanej metody. Analizie poddano belkę jak na rysunku 5.17.



Rys. 5.17 – Belka w analizowanym przykładzie

Właściwości materiałów i ich oznaczenia przyjęto na podstawie normy [N3]:

- obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie  $f_{cd} = 16,7$  MPa,
- średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie  $f_{cm} = 2,6$  MPa,
- moduł Younga betonu  $E_{cm} = 31$  GPa,
- obliczeniowa granica plastyczności stali zbrojeniowej  $f_{yd} = 420$  MPa,
- moduł Younga stali zbrojeniowej  $E_s = 200$  GPa.

Na belkę działa obciążenie dynamiczne  $P = P(t)$  z następującymi parametrami:

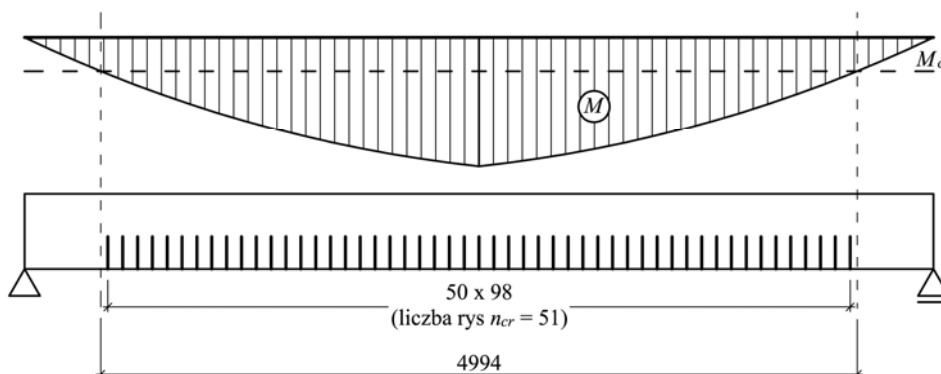
- amplituda siły wymuszającej  $P_0 = 2000$  N,
- częstość kątowna wymuszenia  $p = 35$  rad/s.

Pozostałe charakterystyki belki są jak poniżej:

- dynamiczny moduł Younga betonu  $E_D = 27,9$  GPa (przyjęto, że  $E_D = 0,90 E_{cm}$ ),
- statyczny moment zginający  $M_S = 172,5$  kNm,
- nośność giętą elementu  $M_R = 209,04$  kNm,
- moment bezwładności w fazie I  $I_I = 0,00295621$  m<sup>4</sup>,
- sztywność giętą elementu w fazie I  $EI_I = 91642$  kNm<sup>2</sup>,
- moment rysujący  $M_{cr} = 32,10$  kNm,
- wysokość strefy ściskanej w fazie II  $x_{II} = 0,139$  m,
- średni rozstaw rys (obliczony wg [N3])  $s_{rm} = 0,098$  m.



Przyjęto, że pierwsza rysa powstanie w środku rozpiętości belki, w miejscu wystąpienia maksymalnego momentu zginającego. Pozostałe pojawiają się symetrycznie w rozstawach  $s_{rm} = 0,098$  m. Obraz rys w belce z wykresem momentów pokazano na rysunku 5.18.



Rys. 5.18 – Wykres momentów statycznych i lokalizacja rys w analizowanej belce

Wyznaczono częstotliwości własne belki debutującej  $f_{deb}$  oraz zarysowanej po obciążeniu statycznym  $f_{obc}$ . W obu przypadkach przyjęto masę jako równomiernie rozłożoną oraz skupioną w środku rozpiętości. Wyniki pokazano poniżej (5.34):

$$f_{deb} = \{6,36; 69,46; 113,28; 262,09\dots\}, \quad (5.34a)$$

$$f_{obc} = \{5,83; 64,42; 105,16; 244,70\dots\}. \quad (5.34b)$$

Widoczny jest spadek częstotliwości związany z degradacją sztywności giętej elementu. Dla pierwszej formy własnej wynosi przeszło 8 %.

Dodatkowo obliczono częstotliwości własne uproszczoną metodą sztywności dynamicznej (według 5.31b) oraz na podstawie normy [N2] (uwzględniając całkowity przekrój betonowy bez zbrojenia). Wyniki zestawiono poniżej (5.35):

$$f_{obcBD} = \{5,69; 62,09; 101,26; 234,27\dots\}, \quad (5.35a)$$

$$f_{obc[N2]} = \{6,30; 68,72; 112,07; 259,29\dots\}. \quad (5.35b)$$

Obie metody proponowane w pracy dały zbliżone wyniki (5.34b oraz 5.35a). Propozycja normy dała wyniki bliskie wynikom dla belki debutującej (5.34a oraz 5.35b). Widać zatem, że w rozpatrywanym przypadku skorzystanie ze wzoru normowego prowadzić może do błędów. W dalszej części obliczeń ograniczono się do metody opartej na dyskretnym modelu rysy.

W równaniu ruchu rozpatrywanego zagadnienia uwzględniono tłumienie. Wykorzystano sztywnościowo-bezwładnościowy model tłumienia. Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  jest

zatem liniową kombinacją macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  oraz bezwładności  $\mathbf{M}$  i wyraża się wzorem (5.35):

$$\mathbf{C} = \mu \cdot \mathbf{M} + \kappa \cdot \mathbf{K} \quad (5.35)$$

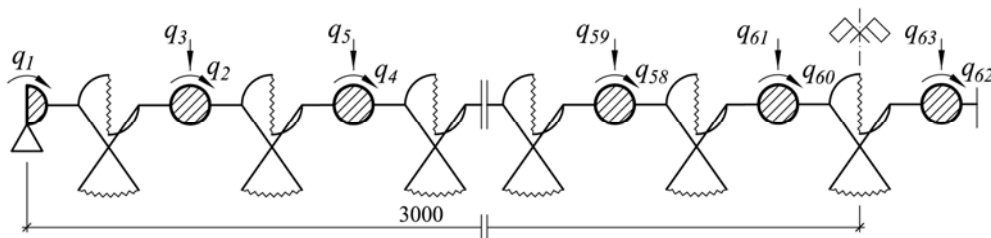
Do obliczenia współczynników  $\mu$  oraz  $\kappa$  wykorzystano propozycję zawartą w pracy [25]. Zależności pozwalające je obliczyć są postaci (5.36), (5.37):

$$\mu = 4\pi \frac{\alpha_a \cdot f_b - \alpha_b \cdot f_a}{\frac{f_b}{f_a} - \frac{f_a}{f_b}}, \quad (5.36)$$

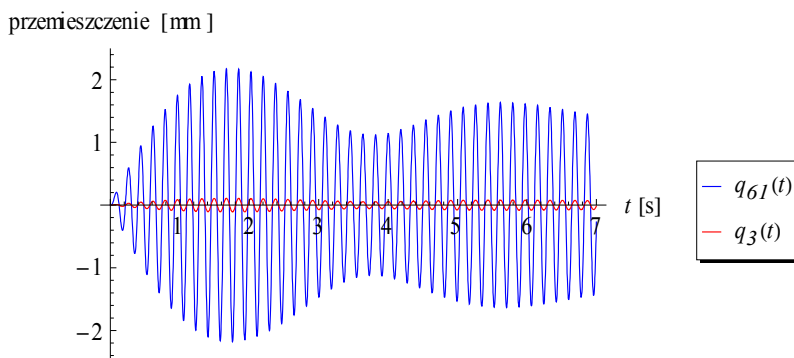
$$\kappa = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_b \cdot f_b - \alpha_a \cdot f_a}{f_b^2 - f_a^2}, \quad (5.37)$$

gdzie:  $\alpha_a, \alpha_b$  – liczby tłumienia odpowiadające dwóm kolejnym formom własnym, w rozpatrywanym przypadku przyjęto takie samo tłumienie dla obu form – 0,01,  $f_a, f_b$  – dwie kolejne częstotliwości własne, w przykładzie przyjęto, że  $f_a = f_1, f_b = f_2$ .

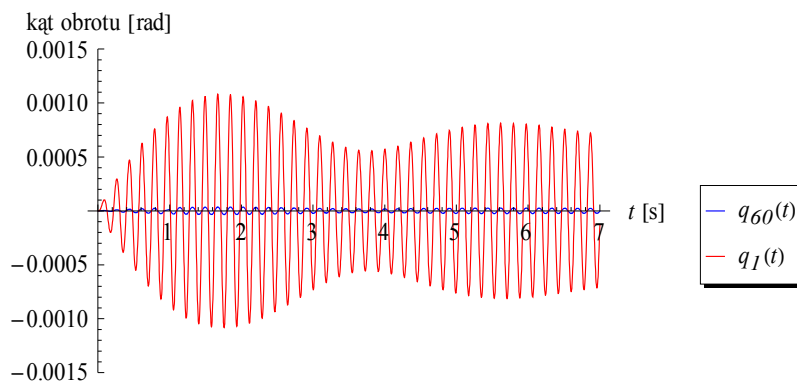
Równanie ruchu rozwiązano metodą całkowania numerycznego. Ograniczono się do przedziału czasu  $t \in [0, 7 \text{ s}]$ . Wyniki obliczeń zestawiono na wykresach (rys. 5.20 – 5.22). Rysunki 5.20 oraz 5.21 dotyczą uogólnionych przemieszczeń dla wybranych współrzędnych uogólnionych zgodnie z numeracją (rys. 5.19).



Rys. 5.19 – Numeracja współrzędnych uogólnionych



Rys. 5.20 – Przeszyczenie wybranych mas



Rys. 5.21 – Obrót wybranych mas

Prezentowana metoda pozwala obliczyć wektor sił przekrojowych  $\mathbf{S}$  na podstawie zależności (5.38).

$$\mathbf{S} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad (5.38)$$

gdzie:  $\mathbf{k}$  – diagonalna macierz sztywności więzi według (5.3),

$\mathbf{r}$  – wektor dyslokacji względnych według (5.5).

Wektor sił przekrojowych zawiera wartości momentów zginających oraz sił tnących.

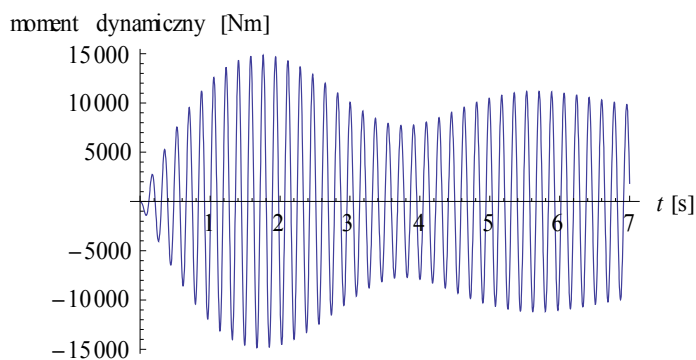
Wynoszą one odpowiednio:

$$M_{dyn,i} = -S_i, \quad (5.39)$$

$$V_{dyn,j} = S_j, \quad (5.40)$$

przy czym  $i$  odpowiada uogólnionej współrzędnej rotacyjnej (w przykładzie  $i = 1, 2, 4, \dots, 118, 120, 122$ ), a  $j$  translacyjnej (w przykładzie  $j = 3, 5, 7, \dots, 117, 119, 121$ ).

Na rysunku 5.22 pokazano wykres momentu dynamicznego w środku rozpiętości w analizowanym przypadku.



Rys. 5.22 – Moment dynamiczny w środku rozpiętości

Wydruk z programu obliczeniowego zamieszczono w załączniku Z-4.

W zaprezentowanym przykładzie nie uwzględniono wpływu zmęczenia betonu i stali. Należy zaznaczyć, że w przypadku prognozowanej dużej liczby cykli ( $N > 5 \times 10^5$ ) należałoby przeprowadzić dodatkowo analizę zmęczeniową. Syntetyczny opis tego typu analiz wraz z przeglądem metod obliczeniowych zamieszczono m. in. w pracach [10, 13].

W obliczeniach pominięto efekty związane z przyrostem rozwartości rys oraz rozwojem strefy zarysowania pod obciążeniem wibracyjnym. Procesy te stabilizują się jednak w czasie i nie są znaczne dla wysokich współczynników asymetrii cyklu, co wykazano w pracach [38, 39]. Można je zatem uwzględnić poprzez sformułowanie macierzy sztywności dla prognozowanego stanu konstrukcji.

## 6. Wnioski końcowe

W niniejszej pracy zrelacjonowano badania doświadczalne wpływu historii obciążenia na drgania własne belek żelbetowych. Pierwszym z celów było określenie charakteru spadku częstotliwości własnych w zależności od stopnia zawansowania obciążenia. Przeprowadzone eksperymenty wykazały, że przeciążaniu elementu towarzyszą zmiany podstawowych parametrów dynamicznych (częstotliwości własnych oraz tłumienia). W przypadku częstotliwości własnych zaobserwowano ich spadek w miarę zwiększania obciążenia. Obniżanie się częstotliwości, wynikające z degradacji sztywności nie jest wnioskiem odkrywczym w sensie jakościowym. Spadek sztywności związany z obciążaniem elementu jest bowiem jednym z podstawowych prawideł teorii żelbetu.

### Wnioski dotyczące tezy 1

Przeprowadzone doświadczenia wykazały, że względny spadek częstotliwości (w stosunku do belki debiutującej) jest różny dla poszczególnych form własnych. Im wyższa forma tym względny spadek jest mniejszy. W badaniach zaobserwowano tę prawidłowość dla wszystkich mierzonych częstotliwości, we wszystkich badanych belkach. Ponadto zauważono, że częstotliwości przeciążanej belki spadają intensywniej, bo o 7 – 18 % (w zależności od numeru formy) w przypadku belek słabo zbrojonych. W przypadku belek silnie zbrojonych zarejestrowany spadek wynosił natomiast 6 – 9 %. Przy czym wyłączono z porównania wartości zarejestrowane po zniszczeniu belek. Powyższe spostrzeżenia potwierdzają pierwszą tezę badawczą niniejszej pracy.

### Wnioski dotyczące tezy 2

Druga z tez dotyczyła wpływu morfologii rys na podstawowe parametry dynamiczne zarysowanych belek żelbetowych. Pod kątem jej weryfikacji zaprojektowano i przebadano belki serii B-I, B-II oraz B-III. Doświadczenia pozwoliły stwierdzić, że różna liczba i rozstaw rys nie znajduje odbicia w częstotliwościach własnych i tłumieniu. Nie zaobserwowano znaczących różnic, które wskazywałyby na podłoże tkwiące w morfologii rys. Potwierdza to drugą z postawionych tez. Spadek częstotliwości oraz zmianę liczby tłumienia można zatem uzależnić od globalnego stopnia zaawansowania obciążenia. W ewentualnych dalszych badaniach należałoby rozważyć zastosowanie środków technicznych inicjujących rysy jedynie w założonych miejscach. Pozwala to w pełni kontrolować proces zarysowania. Podejście to może jednak budzić kontrowersje, jest bowiem sztuczną ingerencją w warunki pracy elementu.

### Wnioski dotyczące tezy 3

Trzecia teza została potwierdzona w części pracy dotyczącej analiz numerycznych. Pierwsze serie przeprowadzonych obliczeń wykazały przydatność metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń statycznych belek żelbetowych z uwzględnieniem dyskretnego modelu rysy. Wiedząc, że predyspozycje statyczne belek żelbetowych są inne niż dynamiczne (czego dowiedziono w części doświadczalnej), należało założyć, że podatność statyczna rysy będzie inna niż dynamiczna. W punkcie 5.2.5 wyprowadzono zależność na współczynnik empiryczny  $\alpha_d$  wiążący obie podatności. Powyżej pewnego poziomu obciążenia współczynnik stabilizuje się. W związku z czym zaproponowano wersję uproszczoną, polegającą na przyjęciu stałego współczynnika  $\bar{\alpha}_d$  od poziomu obciążenia około 30 %. Metoda sztywnych elementów skończonych z zaproponowanymi modyfikacjami może być wykorzystana do obliczeń dynamicznych zarysowanych belek żelbetowych.

### Pozostałe wnioski z badań

Dalsze wnioski nie wiążą się bezpośrednio z tezami niniejszej pracy i mają charakter podsumowania. W badaniach stwierdzono, że sztywność efektywna elementu (określona na podstawie ugięć) spada intensywniej w dziedzinie obciążenia niż sztywność dynamiczna (określona na podstawie podstawowej częstotliwości własnej). W przypadku belek słabo zbrojonych ( $\rho = 0,65$  %) w fazie I obie sztywności były zbliżone. Rozbieżności między nimi miały swój początek po przekroczeniu wartości momentu rysującego i w końcowej fazie sięgały 60 %. Innym zachowaniem charakteryzowały się belki silnie zbrojone ( $\rho = 1,38$  %). W fazie I sztywność statyczna była większa o około 20 %. Próbę wyjaśnienia genezy tej różnicy podjęto już w punkcie 4.6. Po zarysowaniu spadek sztywności dynamicznej nie był tak intensywny jak statycznej. Dla wartości momentu zbliżonej do niszczącego sztywność statyczna była o około 40 % niższa. Porównanie belek silnie i słabo zbrojonych wykazało, że w przypadku tych pierwszych sztywność dynamiczna spada znacznie, bo o przeszło 35 %. Podczas gdy spadek w przypadku belek silnie zbrojonych wyniósł niewiele ponad 20 %.

Wyniki pomiarów tłumienia potwierdziły dotychczasowy stan wiedzy w tej dziedzinie, a poniższe spostrzeżenia, wynikające ze stosunkowo nowoczesnej metody badań, mogą rozszerzyć aktualny stan wiedzy w tym temacie. W przypadku belek słabo zbrojonych właściwości tłumiące rosną w początkowym zakresie pracy elementu i z końcem procesu znacznego przyrostu rys stabilizują się i pozostają stałe do zniszczenia. Liczba tłumienia w belkach silnie zbrojonych wzrastała w początkowym przedziale obciążenia. Po osiągnięciu wartości maksymalnej spadała do pewnej wartości stabilnej, aż do zniszczenia. Pierwsze

spostrzeżenie jakie się nasuwa nakazuje odrzucić pojęcie stałej materiałowej w przypadku tłumienia w zarysowanych belkach żelbetowych. Warto jednak zauważyć, że wszystkie elementy badawcze (tak słabo jak i silnie zbrojone) wykazały stabilną wartość liczby tłumienia już po przekroczeniu zaawansowania obciążenia 50 %. Zważywszy na to, że ekonomicznie zaprojektowane elementy powinny charakteryzować się wyężeniem z przedziału 50 – 100 % można dopuścić stałe tłumienie w pewnych zakresach pracy elementu.

W związku z tym, że najpopularniejszym podejściem do obliczeń dynamicznych konstrukcji żelbetowych, prezentowanym w dostępnej literaturze, jest metoda opierająca się na zastępczej sztywności dynamicznej, zaproponowano modyfikację zależności na sztywność dynamiczną belki żelbetowej w fazie I i II. Modyfikacja dotyczy wzorów na sztywność efektywną, proponowanych przez normę [N3].

Rozdział dotyczący analiz numerycznych zamknięto przykładem, w którym porównano wybrane metody obliczeń. Obie zaproponowane w pracy dały zbliżone wyniki. Pewną różnicą charakteryzowały się wyniki obliczone według normy do projektowania konstrukcji wsporczych pod maszyny [N2]. Według autora stosowanie jej jest i tak bardziej zasadne niż zaczerpnięcie wzorów na sztywność efektywną belki, proponowanych przez normę do projektowania konstrukcji żelbetowych [N3] bez modyfikacji. Postępowanie takie zalecono w pracy [61].

#### Kierunek dalszych badań

Wysuwając postulaty pod adresem dalszych badań, w pierwszej kolejności należałoby się skoncentrować na eksperymentalnej analizie modalnej w odniesieniu do belek debiutujących. Przeprowadzone badania wykazały różnice w wartościach modułu Younga betonu określonego w próbie statycznego ściskania próbki walcowej oraz na podstawie częstotliwości własnej elementu bez rys. Materiał badawczy (wynikający z bezpośrednich celów niniejszej pracy) nie pozwolił na całościowe rozwiązanie tego zagadnienia. Pożądane byłoby przeprowadzenie serii eksperymentów na elementach o różnym stopniu zbrojenia, wykonanych z betonów różnych klas.

W zrealizowanych badaniach ograniczono się do zagadnienia własnego elementów obciążonych wyłącznie ciężarem własnym. Trwałe dociążanie belki powodowałoby większy spadek częstotliwości własnych, wynikający nie tylko z degradacji sztywności, ale także ze zwiększania bezwładności ustroju. To z kolei utrudniłoby budowę modelu numerycznego. W dalszych badaniach wskazane byłyby jednak kontrolne doświadczenia z wykorzystaniem

mas balastowych. Wyniki przyczyniłyby się do dodatkowej weryfikacji proponowanej metody obliczeniowej.

W dalszej perspektywie należałoby przeprowadzić próby drgań swobodnych oraz wymuszonych, co pozwoliłoby dobrać optymalny wariant tłumienia oraz ostatecznie zweryfikować metodę.



## Literatura

- [1] Batel M.: Operational Modal Analysis – Another Way of Doing Modal Testing, Sound and Vibration, August 2002, s. 22-27.
- [2] Borcz A.: Teoria konstrukcji żelbetowych. Wybrane badania wrocławskie. Część II, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1986.
- [3] Borcz A.: Teoria konstrukcji żelbetowych. Wybrane zagadnienia. Część I, Redakcja Wydawnictw Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1973.
- [4] Branson D. E.: Deformations of Concrete Structures, McGraw-Hill Book Company, Nowy Jork 1977.
- [5] Buda-Ożóg L., Łakota W.: Ocena stanu technicznego belek żelbetowych i wzmocnionych taśmami z włókna węglowego na podstawie zmian charakterystyk dynamicznych, Materiały LI Konferencji KILiW PAN i KN PZITB, Gdańsk – Krynica 2005, s. 33-40.
- [6] Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1998.
- [7] Clough R. W., Penzien J.: Dynamics of structures, Mc Graw Hill, New York 1993.
- [8] Cunha A., Caetano E., Magalhaes F., Moutinho C.: From Input-Output to Output-Only Modal Identification of Civil Engineering Structures, Organization of Structural Assessment, Monitoring and Control (SAMCO), Final Report 2006, F11 – Selected Papers.
- [9] Czarnecki L. i inni: Beton według normy PN-EN 206-1 – komentarz, Polski Komitet Normalizacyjny, Kraków 2004.
- [10] Dyduch K.: Analiza metod obliczeniowych nośności przekrojów normalnych w zginanych konstrukcjach żelbetowych pod obciążeniem zmęczeniowym, Cement-Wapno-Beton, nr 4, 1997, s. 136-140.
- [11] Eibl J., Keintzel E., Charlier H.: Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Dynamische Probleme im Stahlbetonbau. Teil II – Stahlbetonbauteile und -bauwerke unter dynamischer Beanspruchung, Beuth Verlag GmbH, Berlin 1988.
- [12] Flaga A.: Metoda wyznaczania parametrów tłumienia drgań z funkcji autokorelacji odpowiedzi budowli, Materiały XXXII Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Kraków – Krynica 1986, s. 51-56.
- [13] Furtak K.: Nośność eksploatacyjna przęseł mostów betonowych, Prace Instytutu Badawczego Dróg i Mostów, nr 3, 1994, s. 55-81.

- [14] Ghods A. S., Moghaddasie B.: Evaluating the dynamic characteristics of reinforced concrete beams, Proceedings of Fourth International Conference on FRP Composites in Civil Engineering (CICE 2008) – dokument elektroniczny, Zurich, Switzerland, July 2008.
- [15] Glabisz W.: MATHEMATICA® w zagadnieniach mechaniki konstrukcji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.
- [16] Goszczyński S., Mucha J., Wójcicki A.: Badania doświadczalne wpływu historii obciążenia na częstotliwość drgań własnych i tłumienie trójprzęsłowych belek żelbetowych, Materiały XL Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Rzeszów – Krynica – Warszawa 1994, s. 69-76.
- [17] Goszczyński S., Mucha J., Wójcicki A.: Ocena zmian sztywności belek żelbetowych na podstawie pomiaru niektórych parametrów dynamicznych, Materiały XLI Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Kraków – Krynica 1995, s. 77-83.
- [18] Hansen W.: Static and Dynamic Elastic Modulus of Concrete as Affected by Mix Composition and Compressive Strength, ACI Special Publication 98, 1986, s. 115-137.
- [19] Jamroży Z.: Beton i jego technologie. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [20] Jerath S., Shibani M. M.: Dynamic Modulus for Reinforced Concrete Beams. Journal of Structural Engineering, Vol. 110, 1984, s. 1405-1410.
- [21] Jerath S., Shibani M. M.: Dynamic Stiffness and Vibration of Reinforced Concrete Beams, ACI Journal 82-18, 1985, s. 196-202.
- [22] Johns K. C., Belanger M. D.: Dynamic Stiffness of Concrete Beams, ACI Journal 78-18, 1981, s. 201-205.
- [23] Kaliski S.: Drgania i fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1986.
- [24] Kamiński M., Szechiński M., Ubysz A.: Teoretyczne i praktyczne podstawy obliczania ugięć elementów żelbetowych, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 1998.
- [25] Kawecki J.: Uwzględnienie wpływów dynamicznych w obliczeniach konstrukcji żelbetowych, Materiały XXV Ogólnopolskich Warsztatów Pracy Projektanta Konstrukcji, Szczyrk 2010, s. 1-64.
- [26] Kiedroń K.: Siła krytyczna ściskanych słupów żelbetowych, Archiwum Inżynierii Lądowej, tom XXVII, zeszyt 3/1981, s. 221-231.
- [27] Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S.: Metoda sztywnych elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1975.
- [28] Kucharski T.: Drgania mechaniczne. Rozwiązywanie zagadnień z MATHCAD-em, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.

- [29] Kuczyński W.: Konstrukcje betonowe. Kontynuacja teorii zginania żelbetu, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1971.
- [30] Langer J.: Dynamika budowli, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [31] Leyko J., Szmelter J. i inni: Zbiór zadań z mechaniki – Część III – Dynamika, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961.
- [32] Łuczak-Romanów R.: Metoda obliczeń dynamicznych żelbetowych belek i ram z rysami, Praca doktorska, Wrocław 1979.
- [33] Maj M., Trochanowski A.: Metoda obliczania żelbetowych tarcz z rysami, Prace naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej nr 40, Seria: Konferencje nr 9, Mechanika Konstrukcji Betonowych, Wrocław 1983, s. 251-256.
- [34] Major A.: Dynamics In Civil Engineering – Analysis and Design – vol. IV, Akadémiai Kiadó, Budapest 1980.
- [35] Malaikah A., Al-Saif K., Al-Zaid R.: Prediction of the Dynamic Modulus of Elasticity of Concrete Under Different Loading Conditions. Proceedings of International Conference On Concrete Engineering and Technology – dokument elektroniczny, Kuala Lumpur, Malaysia, April 2004.
- [36] Miedziałowski Cz., Kościuk L., Chyży T.: Zastosowanie wybranych opisów sztywności żelbetowych elementów zginanych do obliczeń dynamicznych, Materiały XXXIII Konferencji Naukowej KILiW i KN PZITB, Gliwice – Krynica 1987, s. 115-120.
- [37] Minch M.: Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych, Praca doktorska, Wrocław 1978.
- [38] Misztal S., Misztal G., Skrzypczak A., Bryła R.: The influence of the vibration loads on the crack area length of bended reinforced concrete beams, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej nr 59, Seria: Konferencje nr 19, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1990, s. 105-110.
- [39] Misztal S., Misztal G.: Wpływ zmęczenia betonu na stan zarysowania zginanych konstrukcji mostowych, Prace Instytutu Badawczego Dróg i Mostów, nr 3, 1994, s. 43-53.
- [40] Misztal S.: Betonowe zbrojone elementy prętowe poddane działaniu długotrwałych obciążeń wibracyjnych, Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Inżynierskiej im. Jurija Gagarina w Zielonej Górze, Zielona Góra 1985.

- [41] Müller F. P., Keintzel E., Charlier H.: Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Dynamische Probleme im Stahlbetonbau. Teil I – Der Baustoff Stahlbeton unter dynamischer Beanspruchung, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn Berlin – München, Berlin 1983.
- [42] Muraszow V. J., Sigalov E. E., Bajkov V. V.: Żelazobetonnye konstrukcij, Strojizdat, Moskwa 1962.
- [43] Nagrodzka-Godycka K.: Badanie właściwości betonu i żelbetu w warunkach laboratoryjnych. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1999.
- [44] Neild S. A., Williams M. S., Mc Fadden P.D.: Non-linear behaviour of reinforced concrete beams under low-amplitude cyclic and vibration loads, Engineering Structures 24, 2002, s. 707-718.
- [45] Neild S. A., Williams M. S., Mc Fadden P.D.: Nonlinear Vibration Characteristics of Damaged Concrete Beams, Journal of Structural Engineering, Vol. 129, No. 2, 2003, 260-268.
- [46] Nowacki W.: Dynamika budowli, Arkady, Warszawa 1972.
- [47] Penzien J., Hansen R. J.: Static and Dynamic Behavior of Reinforced Concrete Beams, ACI Journal 50-32, 1954, s. 545-567.
- [48] Rakowski G. i inni: Mechanika budowli z elementami ujęcia komputerowego – część 2, Arkady, Warszawa 1984.
- [49] Rakowski G.: Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych, Arkady, Warszawa 1968.
- [50] Rzyński A., Wołowicki W.: Propozycja obliczania ugięć belki żelbetowej z uwzględnieniem niegładkości jej odkształconej, Archiwum Inżynierii Lądowej, 1968, z. 2, s. 329-347.
- [51] Schwarz B. J., Richardson M. H.: Experimental modal analysis, Proceedings of CSI Reliability Week – dokument elektroniczny, Orlando, USA, October 1999.
- [52] Szechiński M.: Deformacje zginanych elementów żelbetowych obciążonych długotrwale, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1996.
- [53] Szechiński M.: Ugięcia długotrwale obciążonych belek żelbetowych. Studium porównawcze, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
- [54] Szmakow G. B.: O swazi dinamiczeskich parametrow żelazobetonnych konstrukcji s ich standartnymi staticzeskimi charakteristikami, Beton i Żelazobeton, 1971, nr 5, s. 44-46.
- [55] Ubysz A.: Analiza deformacji żelbetowych ustrojów prętowych z wykorzystaniem macierzy przeniesienia, Praca doktorska, Wrocław 1981.

- [56] Ubysz A.: Odkształcenia plastyczne i samonapężenia w żelbetowych konstrukcjach prętowych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999.
- [57] Uhl T.: Komputerowo wspomaganą identyfikacją modeli konstrukcji mechanicznych, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
- [58] Wittig W.: Steifigkeitsmethode zur einfachen Ermittlung der Eigenfrequenzen von Trägern, Bauplanung – Bautechnik 12, 1977, s. 554-557.
- [59] Wlazło R.: Sztywność dynamiczna belek żelbetowych, Materiały XXXIII Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Gliwice – Krynica 1987, s. 213-218.
- [60] Wlazło R.: Tłumienie drgań w zarysowanych belkach żelbetowych, Praca doktorska, Gdańsk 1981.
- [61] Wlazło R.: Tłumienie w zarysowanych belkach żelbetowych, Materiały XXV Jubileuszowej Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Wrocław – Krynica 1979, s. 343-349.
- [62] Wolfram S.: The Mathematica Book, Wolfram Media and Cambridge University Press, Champaign 1999.
- [63] Xianyu J., Zongjin LI.: Dynamic Property Determination for Early-Age Concrete, ACI Materials Journal 98-M39, 2001, s. 365-370.

### **Normy i instrukcje**

- [N1] Instrukcja ITB nr 194. Badania cech mechanicznych betonu na próbkach wykonanych w formach. ITB, Warszawa 1998.
- [N2] PN-80/B-03040. Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny – Obliczenia i projektowanie. Polski Komitet Normalizacyjny. Warszawa 1993.
- [N3] PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone – Obliczenia statyczne i projektowanie. Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa 2002.
- [N4] PN-EN 10002-1:2004. Metale – Próba rozciągania – Metoda badań w temperaturze otoczenia. Polski Komitet Normalizacyjny. Warszawa 2004.
- [N5] PN-EN 197-1:2002. Cement – Część 1: Skład, wymagania i kryteria zgodności dotyczące cementów powszechnego użytku. Polski Komitet Normalizacyjny. Warszawa 2002.
- [N6] PN-EN 1992-1-1. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa 2008.
- [N7] PN-EN 206-1:2003. Beton – Część 1: Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność. Polski Komitet Normalizacyjny. Warszawa 2003.



**Załącznik Z-1**

**Wydruk z programu do obliczania ugięć**

```
"Dane materiałowe";
Clear["Global`*"];
Es1 = 202 000 000;
Es2 = 202 000 000;
fy = 563 000;
Ec = 31 110 000;


$$\alpha_1 = \frac{Es_1}{Ec} // N;$$


$$\alpha_2 = \frac{Es_2}{Ec} // N;$$

fct = 3800;
Print[" $\alpha_1 =$ ",  $\alpha_1$ ]
Print[" $\alpha_2 =$ ",  $\alpha_2$ ]

 $\alpha_1 = 6.49309$ 
 $\alpha_2 = 6.49309$ 

"Geometria elementu";
b = 0.154;
h = 0.258;
c1 = 0.015;
 $\phi_1 = 0.012;$ 
 $\phi_2 = 0.012;$ 
 $\phi_s = 0.004;$ 
hs = 0.22;
As1 =  $2.26 * 10^{-4}$ ;
As2 =  $2.26 * 10^{-4}$ ;


$$a_1 = c_1 + \phi_s + \frac{\phi_1}{2};$$



$$a_2 = h - c_1 - hs + \phi_s + \frac{\phi_2}{2};$$

d = h - a1;

$$\rho_1 = \frac{As_1}{b * d};$$

leff = 3.00;
Print[" $\rho_1 =$ ",  $\rho_1 * 100,$  " %"]

 $\rho_1 = 0.629842 \%$ 

"Siła niszcząca";

$$M_r = As_1 * f_y * \left( hs - 2 \phi_s - \frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \right);$$



$$P_r = \frac{M_r * 4}{leff};$$

Print["Mr = ", Mr, " kNm"];
Print["Pr = ", Pr, " kN"];

Mr = 25.4476 kNm
Pr = 33.9301 kN
```



```

"Charakterystyki przekroju w fazie I";
Ac = b * h + α1 * As1 + α2 * As2;

Sc = b * h *  $\frac{h}{2}$  + α1 * As1 * (h - a1) + α2 * As2 * a2;

x1 =  $\frac{Sc}{Ac}$ ;

I1 =  $\frac{b * h^3}{12}$  + b * h *  $\left(\frac{h}{2} - x1\right)^2$  + α1 * As1 * (h - x1 - a1)2 + α2 * As2 * (x1 - a2)2;

EI1 = Ec * I1;

W1 =  $\frac{I1}{h - x1}$ ;

Mcr = W1 * fct;

Pcr =  $\frac{Mcr * 4}{leff}$ ;

Print["x1 = ", x1, " m"];
Print["I1 = ", I1, " m4"];
Print["EI1 = ", EI1, " kNm2"];
Print["W1 = ", W1, " m3"];
Print["Mcr = ", Mcr, " kNm"];
Print["Pcr = ", Pcr, " kN"];

x1 = 0.129275 m

I1 = 0.000249786 m4

EI1 = 7770.84 kNm2

W1 = 0.00194046 m3

Mcr = 7.37376 kNm

Pcr = 9.83168 kN

"Dane kroku obciążenia";
P = 20.012;
ncr = 16;
xcr1 = 0.782;
lcr = 1.530;

"Charakterystyka rys";

srm =  $\frac{lcr}{ncr - 1}$ ;

CR = Table[0, {i, 1, ncr}, {j, 1, 4}];
CR[[1, 1]] = xcr1;
Do[CR[[i, 1]] = CR[[1, 1]] + srm * (i - 1), {i, 2, ncr}];

M[x_] = 0.5 P x - UnitStep[x -  $\frac{leff}{2}$ ] P  $\left(x - \frac{leff}{2}\right)$ ;

Do[CR[[i, 2]] = M[CR[[i, 1]]], {i, 1, ncr}];

Do[CR[[i, 3]] = Max[1.3 - 1.1 *  $\frac{Mcr}{CR[[i, 2]]}$ , 0.2] // N, {i, 1, ncr}];

Clear[x2];
x2 = x2 /. Solve[b * 0.5 * x22 + α2 * As2 (x2 - a2) - α1 * As1 (h - a1 - x2) == 0, x2][[2]];

ξ2 =  $\frac{x2}{h}$ ;

Do[CR[[i, 4]] =  $\frac{CR[[i, 3]] * srm}{Es1 * 1000 * As1 * h^2 * \left(1 - \frac{\xi2}{3} - \frac{a1}{h}\right) \left(1 - \xi2 - \frac{a1}{h}\right)}$  // N, {i, 1, ncr}];

```

```

"Podział na elementy";
dle2 = If[srm < 0.15, srm,  $\frac{srm}{2}$ ];
le2 = If[srm < 0.15, ncr, 2 ncr - 1];
lodc2 = le2 * dle2;
lodc1 = xcr1 -  $\frac{dle2}{2}$ ;
lodc3 = leff - lodc1 - lodc2;
le1 = Round[lodc1 / dle2];
le3 = Round[lodc3 / dle2];
dle1 =  $\frac{lodc1}{le1}$ ;
dle3 =  $\frac{lodc3}{le3}$ ;
dle =
  Join[Table[dle1, {i, 1, le1}], Table[dle2, {i, 1, le2}], Table[dle3, {i, 1, le3}]];
le = Length[dle];
Print["Długości elementów [m]: ", dle1, ", ", dle2, ", ", dle3]
Print["Względna różnica między długościami elementów: ",

$$\frac{\text{Max}[dle] - \text{Min}[dle]}{\text{Max}[dle]} * 100, " \%"]$$

Długości elementów [m]: 0.104429, 0.102, 0.106167
Względna różnica między długościami elementów: 3.92465 %

"Dane wejściowe";
n = 2 * le + 2;
Ec = Ec * 109;

"Macierz transformacji Ak";
Ak = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, n}];
Do[{Ak[[i, i]] = -1, Ak[[i, i + 2]] = 1}, {i, 1, 2 * le}];
Do[{Ak[[i + 1, i]] = Ak[[i + 1, i + 2]] = - $\frac{dle[[\frac{i+1}{2}]]}{2}$ }, {i, 1, 2 * le, 2}];
Ak = Transpose[Ak]; Ak = Delete[Ak, n]; Ak = Delete[Ak, 2]; Ak = Transpose[Ak];
n = n - 2;
"Macierz sztywności k w bazie lokalnej";
k = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, 2 * le}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{Ec I1}{dle[[\frac{i+1}{2}]]}$ , {i, 1, 2 * le, 2}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{12 * Ec I1}{dle[[\frac{i}{2}]]^3}$ , {i, 2, 2 * le, 2}];

```

```

"Wektor obciążenia";
xel = Join[{0}, Table[ $\sum_{i=1}^l$  dle[[i]], {i, 1, le}]];
xelgraf = Table[0, {i, 1, le+1}, {j, 1, 2}];
Do[xelgraf[[i, 1]] = xel[[i]], {i, 1, le+1}];
Do[xelgraf[[i, 2]] = 0, {i, 1, le+1}];
ListPlot[xelgraf, PlotStyle -> PointSize[0.02],
PlotLabel -> "Podział na elementy skończone",
Axes -> {True, False}, AxesLabel -> {"x [m]", None}]
i = 1;
(Label[Start]; If[xel[[i]] > 1.5, {pp = i, pl = i - 1}, {i++, Goto[Start]}];
Clear[i];
dleP = dle[[pl]];
PL = 1.5 - xel[[pl]];
PP = xel[[pp]] - 1.5;
Pvec = Table[0, {i, 1, n}];
Pvec[[2 * pl - 1]] = P *  $\frac{PP}{dleP}$  * 1000;
Pvec[[2 * pp - 1]] = P *  $\frac{PL}{dleP}$  * 1000;

```

Podział na elementy skończone

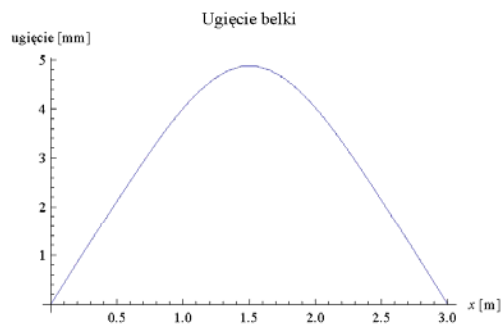


```

"Więzi zredukowane";
kcr = k;
w = If[srm < 0.15, Table[2 * (le1 + i) - 1, {i, 1, ncr}],
Table[2 * (le1 + i) - 1, {i, 1, 2 ncr - 1, 2}]];
dw = Table[0, {i, 1, ncr}];
Do[dw[[i]] = k[[w[[i]], w[[i]]]]-1 + CR[[i, 4]], {i, 1, ncr}];
Do[kcr[[w[[i]], w[[i]]]] = dw[[i]]-1, {i, 1, ncr}];
"Macierz sztywności K";
K = Transpose[Ak].kcr.Ak;
"Rozwiązanie";
Q = LinearSolve[K, Pvec];
Q = Insert[Q, 0, 2];
Q = Insert[Q, 0, -1];
u = Table[0, {i, 1, le+1}, {j, 1, 2}];
Do[u[[i, 1]] = xel[[i]], {i, 1, le+1}];
Do[u[[i, 2]] = Q[[2 * i]] * 1000, {i, 1, le+1}];

```

```
ListPlot[u, PlotLabel -> "Ugięcie belki",  
  AxesLabel -> {"x [m]", "ugięcie [mm]"}, Joined -> True]
```



```
umax = u;  
Do[umax[[i, 1]] = u[[i, 1]] / 1010, {i, 1, le + 1}];  
Print["Maksymalne ugięcie: ", amax = Max[umax], " mm"]
```

Maksymalne ugięcie: 4.87591 mm

**Załącznik Z-2**

**Wydruk z programu skalującego parametr  $\alpha_d$**

```
"Dane materiałowe";
Clear["Global`*"];
Es = 202 000 000;
fy = 563 000;
Ec = 31 110 000;
Ecd = 31 119 211;

$$\alpha = \frac{Es}{Ec} // N;$$

fct = 3800;
Print[" $\alpha =$ ",  $\alpha$ ]
 $\alpha = 6.49309$ 

"Geometria elementu";
b = 0.154;
h = 0.258;
c1 = 0.015;
 $\phi = 0.012;$ 
 $\phi_s = 0.004;$ 
hs = 0.22;
As1 =  $2.26 * 10^{-4}$ ;
As2 =  $2.26 * 10^{-4}$ ;

$$a1 = c1 + \phi_s + \frac{\phi}{2};$$


$$a2 = h - c1 - hs + \phi_s + \frac{\phi}{2};$$

d = h - a1;

$$\rho1 = \frac{As1}{b * d};$$

l = 3.30;
leff = 3.00;
Print[" $\rho1 =$ ",  $\rho1 * 100, " \%$ "]
l = 3.30;
leff = 3.00;
 $\rho1 = 0.629842 \%$ 

"Masa elementu";
Q = 310;

$$m = \frac{Q}{l};$$

Print["m = ", m, " kg/m"];
m = 93.9394 kg/m

"Sila niszcząca";
Mr = As1 * fy * (hs - 2  $\phi_s$  -  $\phi$ );

$$Pr = \frac{Mr * 4}{leff};$$

Print["Mr = ", Mr, " kNm"];
Print["Pr = ", Pr, " kN"];
Mr = 25.4476 kNm
Pr = 33.9301 kN
```

```
"Charakterystyki przekroju w fazie I";
Ac = b * h + alpha * (As1 + As2);
Sc = b * h * h / 2 + alpha * As1 * (h - a1) + alpha * As2 * a2;
x1 = Sc / Ac;
I1 = (b * h^3) / 12 + b * h * ((h / 2) - x1)^2 + alpha * As1 * (h - x1 - a1)^2 + alpha * As2 * (x1 - a2)^2;
EI1 = Ec * I1;
W1 = I1 / (h - x1);
Mcr = W1 * fct;
Pcr = (Mcr * 4) / leff;
Print["x1 = ", x1, " m"];
Print["I1 = ", I1, " m^4"];
Print["EI1 = ", EI1, " kNm^2"];
Print["W1 = ", W1, " m^3"];
Print["Mcr = ", Mcr, " kNm"];
Print["Pcr = ", Pcr, " kN"];

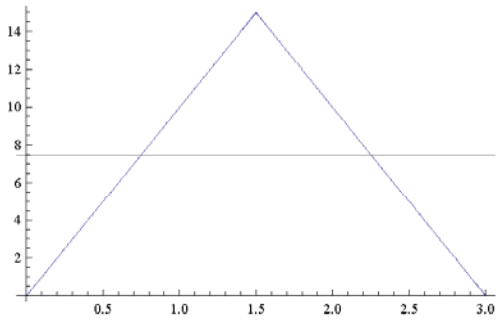
x1 = 0.129275 m
I1 = 0.000252977 m^4
EI1 = 7870.11 kNm^2
W1 = 0.00196525 m^3
Mcr = 7.46796 kNm
Pcr = 9.95728 kN

"Dane kroku obciążenia";
P = 20.0119;
ncr = 16;
xcr1 = 0.932;
lcr = 1.530;
```

```

"Charakterystyka rys";
srm =  $\frac{lcr}{ncr - 1}$ ;
CR = Table[0, {i, 1, ncr}, {j, 1, 4}];
CR[[1, 1]] = xcr1;
Do[CR[[i, 1]] = CR[[1, 1]] + srm * (i - 1), {i, 2, ncr}];
M[x_] = 0.5 P x - UnitStep[x -  $\frac{leff}{2}$ ] P(x -  $\frac{leff}{2}$ );
wm = Plot[M[x], {x, 0, leff}, GridLines -> {None, {Mcr}}];
Do[CR[[i, 2]] = M[CR[[i, 1]]], {i, 1, ncr}];
Do[CR[[i, 3]] = Max[1.3 - 1.1 *  $\frac{Mcr}{CR[[i, 2]]}$ , 0.2] // N, {i, 1, ncr}];
Clear[x2];
x2 = x2 /. Solve[b * 0.5 * x22 +  $\alpha$  * As2 (x2 - a2) -  $\alpha$  * As1 (h - a1 - x2) == 0, x2][[2]];
 $\xi 2 = \frac{x2}{h}$ ;
Do[CR[[i, 4]] =  $\alpha d \frac{CR[[i, 3]] * srm}{Es * 1000 * As1 * h^2 * (1 - \frac{\xi 2}{3} - \frac{a1}{h}) (1 - \xi 2 - \frac{a1}{h})}$  // N, {i, 1, ncr}];

```



```

"Podział na elementy";
dle2 = If[srm < 0.15, srm,  $\frac{srm}{2}$ ];
le2 = If[srm < 0.15, ncr, 2 ncr - 1];
lodc2 = le2 * dle2;
lodc1 = xcr1 -  $\frac{dle2}{2}$ ;
lodc3 = 1 - lodc1 - lodc2;
le1 = Round[lodc1 / dle2];
le3 = Round[lodc3 / dle2];
dle1 =  $\frac{lodc1}{le1}$ ;
dle3 =  $\frac{lodc3}{le3}$ ;
dle = Join[Table[dle1, {i, 1, le1}], Table[dle2, {i, 1, le2}], Table[dle3, {i, 1, le3}]];
le = Length[dle];
Print["Długości elementów [m]: ", dle1, ", ", dle2, ", ", dle3];
Print["Względna różnica między długościami elementów: ",
 $\frac{Max[dle] - Min[dle]}{Max[dle]} * 100$ , " %"];

```



Długości elementów [m]: 0.0978889, 0.102, 0.098375

Względna różnica między długościami elementów: 4.0305 %

```

"Dane wejściowe";
le = Length[dle];

$$\rho = \frac{Q}{b \cdot h \cdot l};$$

n = 2 * le + 2;
Ec = Ecd * 103;

"Macierz transformacji Ak";
Ak = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, n}];
Do[{Ak[[i, i]] = -1, Ak[[i, i + 2]] = 1}, {i, 1, 2 * le}];

Do[{Ak[[i + 1, i]] = Ak[[i + 1, i + 2]] =  $-\frac{dle[[\frac{i+1}{2}]]}{2}$ }, {i, 1, 2 * le, 2}];

"Macierz sztywności k w bazie lokalnej";
k = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, 2 * le}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{Ec I1}{dle[[\frac{i+1}{2}]}$ , {i, 1, 2 * le, 2}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{12 * Ec I1}{dle[[\frac{i}{2}]]^3}$ , {i, 2, 2 * le, 2}];

"Macierz bezwładności m";
m = Table[0, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
m[[1, 1]] =  $\rho * \frac{dle[[1]]}{2} * b * h * \left( \left( \left( \frac{dle[[1]]}{2} \right)^2 + h^2 \right) * \frac{1}{12} + \left( \frac{dle[[1]]}{4} \right)^2 \right)$ ;
m[[n - 1, n - 1]] =  $\rho * \frac{dle[[le]]}{2} * b * h * \left( \left( \left( \frac{dle[[le]]}{2} \right)^2 + h^2 \right) * \frac{1}{12} + \left( \frac{dle[[le]]}{4} \right)^2 \right)$ ;
m[[2, 2]] =  $\rho * \frac{dle[[1]]}{2} * b * h$ ;
m[[n, n]] =  $\rho * \frac{dle[[le]]}{2} * b * h$ ;
Do[m[[i, i]] =  $\rho * \frac{dle[[\frac{i-1}{2}]]}{2} * b * h * \left( \left( \left( \frac{dle[[\frac{i-1}{2}]]}{2} \right)^2 + h^2 \right) * \frac{1}{12} + \left( \frac{dle[[\frac{i-1}{2}]]}{4} \right)^2 \right) + \rho * \frac{dle[[\frac{i+1}{2}]]}{2} * b * h * \left( \left( \left( \frac{dle[[\frac{i+1}{2}]]}{2} \right)^2 + h^2 \right) * \frac{1}{12} + \left( \frac{dle[[\frac{i+1}{2}]]}{4} \right)^2 \right)$ , {i, 3, n - 3, 2}];
Do[m[[i, i]] =  $\rho * \frac{dle[[\frac{i}{2} - 1]]}{2} * h * b + \rho * \frac{dle[[\frac{i}{2}]]}{2} * h * b$ , {i, 4, n - 2, 2}];

"Wyniki pomiarów";
fe = {80.0, 222.5, 422.8, 668.3, 939.4, 1235.3};

"Dane iteracji";
kroki = 101;
licznik = 1;
graf = Table[0, {i, 1, kroki}, {j, 1, 2}];
adstart = 0.1;
ad = adstart;
krokad = 0.001;

```

```

Label[start];

Do[CR[[i, 4]] =  $\alpha d * \frac{CR[[i, 3]] * srm}{Es * 1000 * As1 * h^2 * \left(1 - \frac{\xi_2}{3} - \frac{a1}{h}\right) \left(1 - \xi_2 - \frac{a1}{h}\right)}$  // N, {i, 1, ncr}];

kcr = k;
"Więzi zredukowane";
w = If[srm < 0.15, Table[2 * (1e1 + i) - 1, {i, 1, ncr}],
Table[2 * (1e1 + i) - 1, {i, 1, 2 ncr - 1, 2}]];
dw = Table[0, {i, 1, ncr}];
Do[dw[[i]] = k[[w[[i]], w[[i]]]]-1 + CR[[i, 4]], {i, 1, ncr}];
Do[kcr[[w[[i]], w[[i]]]] = dw[[i]]-1, {i, 1, ncr}];
"Macierz sztywności K";
K = Transpose[Ak].kcr.Ak;
"Wartości własne λ";
m1 = Inverse[m];
A = m1.K;
λ = Sort[Eigenvalues[A]];
"Częstotliwości własne f";
ω = Sqrt[λ];
f =  $\frac{\text{Take}[\omega, \{3, 8\}]}{2 \pi}$ ;
"Błąd względny";
 $\Delta = \frac{\sqrt{(fe[[1]] - f[[1]])^2}}{\sqrt{(fe[[1]])^2}} * 100$ ;
graf[[licznik, 1]] =  $\alpha d$ ;
graf[[licznik, 2]] =  $\Delta$ ;
 $\alpha d = \alpha d + \text{krokad}$ ;
licznik++;

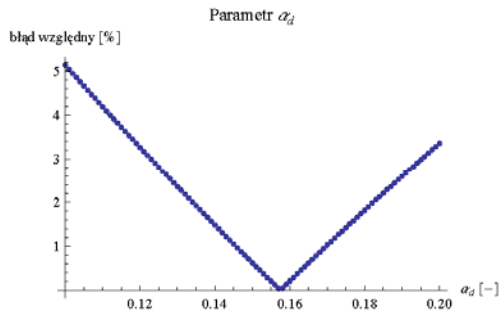
If[licznik <= kroki, Goto[start]]

```

```

ListPlot[graf, PlotLabel -> "Parametr  $\alpha_d$ ",
AxesLabel -> {" $\alpha_d$  [-]", "błąd względny [%]"}]

```



```

Amin = Min[graf];
Do[If[graf[[i, 2]] == Amin, ad = graf[[i, 1]], {i, 1, kroki}];
Print[" ad = ", ad]

ad = 0.157

Do[CR[[i, 4]] = ad *  $\frac{CR[[i, 3]] * srm}{Es * 1000 * As1 * h^2 * \left(1 - \frac{\xi^2}{3} - \frac{a1}{h}\right) \left(1 - \xi^2 - \frac{a1}{h}\right)}$  // N, {i, 1, ncr}];

kcr = k;
"Więzi redukowane";
w = If[srm < 0.15, Table[2 * (1e1 + i) - 1, {i, 1, ncr}],
Table[2 * (1e1 + i) - 1, {i, 1, 2 ncr - 1, 2}]];
dw = Table[0, {i, 1, ncr}];
Do[dw[[i]] = k[[w[[i]], w[[i]]]]-1 + CR[[i, 4]], {i, 1, ncr}];
Do[kcr[[w[[i]], w[[i]]]] = dw[[i]]-1, {i, 1, ncr}];
"Macierz sztywności K";
K = Transpose[Ak].kcr.Ak;
"Wartości własne λ";
m1 = Inverse[m];
A = m1.K;
λ = Sort[Eigenvalues[A]];
"Częstotliwości własne f";
ω = Sqrt[λ];
f =  $\frac{\text{Take}[\omega, \{3, 8\}]}{2 \pi}$ ;

"Euklidesowa noirma błędu";
nΔ = 6;
iΔ = 1;
ΔE =  $\frac{\sqrt{\sum_{i=i\Delta}^{n\Delta} (fe[[i]] - f[[i]])^2}}{\sqrt{\sum_{i=i\Delta}^{n\Delta} (fe[[i]])^2}} * 100$ ;
Δ = Table[0, {i, 1, 6}];
Do[Δ[[i]] =  $\frac{\text{Abs}[f[[i]] - fe[[i]]]}{\text{Max}[f[[i]], fe[[i]]]} * 100$ , {i, 1, 6}];
Do[Print["f", i, " = ", f[[i]], " Hz", " f", i, "e = ",
fe[[i]], " Hz", " Δ", i, " = ", Δ[[i]], " %"], {i, 1, 6}];
Print["Norma euklidesowa błędu dla 6 częstotliwości: ", ΔE, " %"]

f1 = 80.0309 Hz   fle = 80. Hz   Δ1 = 0.0385626 %
f2 = 231.428 Hz  f2e = 222.5 Hz  Δ2 = 3.85763 %
f3 = 451.007 Hz  f3e = 422.8 Hz  Δ3 = 6.25416 %
f4 = 724.614 Hz  f4e = 668.3 Hz  Δ4 = 7.77156 %
f5 = 1045.38 Hz  f5e = 939.4 Hz  Δ5 = 10.1377 %
f6 = 1414.11 Hz  f6e = 1235.3 Hz Δ6 = 12.6448 %

Norma euklidesowa błędu dla 6 częstotliwości: 12.3665 %

```



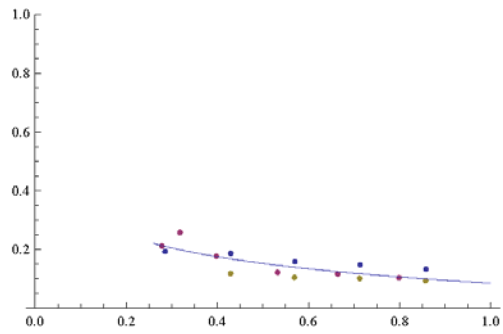
**Załącznik Z-3**

**Wydruk z programu skalującego parametry modelu ( $\alpha, \beta$ )**

```

BI1 =
  {{0.285, 0.192}, {0.429, 0.186}, {0.570, 0.157}, {0.713, 0.147}, {0.858, 0.133}};
BI2 = {{0.278, 0.211}, {0.318, 0.258}, {0.398, 0.176},
  {0.532, 0.121}, {0.664, 0.116}, {0.799, 0.103}};
BI3 = {{0.429, 0.118}, {0.569, 0.104}, {0.712, 0.101}, {0.857, 0.0926}};
McrBI = Mean[{0.284, 0.256, 0.237}];
BI = Join[BI1, BI2, BI3];
BIpkty = ListPlot[{BI1, BI2, BI3}, PlotRange -> {0, 1}];
Clear[α, β];
model = α + x-β;
fitBI = NonlinearModelFit[BI, model, {α, β}, x];
BIfunkcja = Plot[Normal[fitBI], {x, McrBI, 1}];
Show[BIPkty, BIfunkcja, AxesOrigin -> {0, 0}]
fitBI[{"BestFitParameters", "ParameterTable", "EstimatedVariance"}]

```



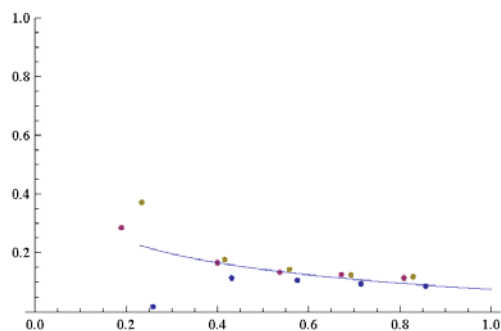
{α → -0.915537, β → 0.0941454},

	Estimate	Standard Error	t Statistic	P-Value
α	-0.915537	0.0145834	-62.7794	1.57382 × 10 <sup>-17</sup> , 0.000866455}
β	0.0941454	0.0177899	5.29207	0.000145852

```

BII1 = {{0.259, 0.0163}, {0.431, 0.115},
        {0.575, 0.106}, {0.715, 0.0953}, {0.857, 0.086}};
BII2 = {{0.189, 0.286}, {0.400, 0.167}, {0.537, 0.134},
        {0.672, 0.126}, {0.809, 0.115}};
BII3 = {{0.234, 0.372}, {0.416, 0.177}, {0.558, 0.144},
        {0.693, 0.125}, {0.829, 0.118}};
McxBII = Mean[{0.238, 0.211, 0.240}];
BII = Join[BII1, BII2, BII3];
BIIpkty = ListPlot[{BII1, BII2, BII3}, PlotRange -> {0, 1}];
Clear[α, β];
model = α + x-β;
fitBII = NonlinearModelFit[BII, model, {α, β}, x];
BIIfunkcja = Plot[Normal[fitBII], {x, McxBII, 1}];
Show[BIIpkty, BIIfunkcja, AxesOrigin -> {0, 0}]
fitBII[{"BestFitParameters", "ParameterTable", "EstimatedVariance"}]

```



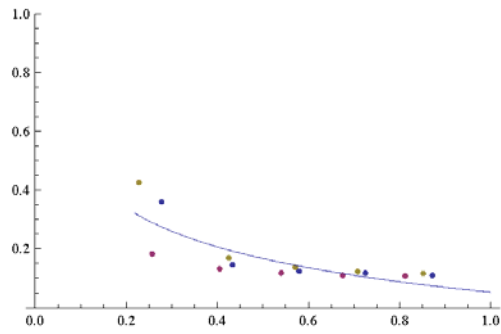
{α → -0.92476, β → 0.0954598},

	Estimate	Standard Error	t Statistic	P-Value
α	-0.92476	0.032013	-28.8871	3.52682 × 10 <sup>-13</sup> , 0.00510461
β	0.0954598	0.0338695	2.81846	0.0145077

```

BIIII =
  {{0.277, 0.361}, {0.433, 0.146}, {0.579, 0.124}, {0.725, 0.117}, {0.872, 0.110}};
BIIII2 = {{0.257, 0.183}, {0.405, 0.132}, {0.540, 0.118},
  {0.675, 0.110}, {0.812, 0.108}};
BIIII3 = {{0.228, 0.426}, {0.425, 0.169}, {0.571, 0.137},
  {0.708, 0.123}, {0.852, 0.116}};
McrBIIII = Mean[{0.216, 0.206, 0.234}];
BIIII = Join[BIIII1, BIIII2, BIIII3];
BIIIIpky = ListPlot[{BIIII1, BIIII2, BIIII3}, PlotRange -> {0, 1}];
Clear[α, β];
model = α + x-β;
fitBIIII = NonlinearModelFit[BIIII, model, {α, β}, x];
BIIIIfunkcja = Plot[Normal[fitBIIII], {x, McrBIIII, 1}];
Show[BIIIIpky, BIIIIfunkcja, AxesOrigin -> {0, 0}]
fitBIIII[{"BestFitParameters", "ParameterTable", "EstimatedVariance"}]

```



{α → -0.947486, β → 0.156877},

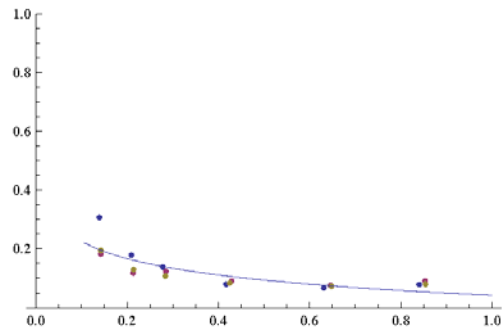
	Estimate	Standard Error	t Statistic	P-Value
α	-0.947486	0.0264353	-35.8416	2.20639×10 <sup>-14</sup> , 0.00345853
β	0.156877	0.0279418	5.61443	0.0000841804



```

BIV1 = {{0.139, 0.307}, {0.209, 0.179},
        {0.278, 0.138}, {0.417, 0.0798}, {0.631, 0.0670}, {0.840, 0.0787}};
BIV2 = {{0.142, 0.183}, {0.213, 0.118}, {0.285, 0.123},
        {0.429, 0.0900}, {0.646, 0.0756}, {0.853, 0.0912}};
BIV3 = {{0.142, 0.195}, {0.214, 0.130}, {0.284, 0.107},
        {0.425, 0.0833}, {0.648, 0.0726}, {0.854, 0.0797}};
McrBIV = Mean[{0.105, 0.107, 0.106}];
BIV = Join[BIV1, BIV2, BIV3];
BIVpkty = ListPlot[{BIV1, BIV2, BIV3}, PlotRange -> {0, 1}];
Clear[α, β];
model = α + x-β;
fitBIV = NonlinearModelFit[BIV, model, {α, β}, x];
BIVfunkcja = Plot[Normal[fitBIV], {x, McrBIV, 1}];
Show[BIVpkty, BIVfunkcja, AxesOrigin -> {0, 0}]
fitBIV[{"BestFitParameters", "ParameterTable", "EstimatedVariance"}]

```



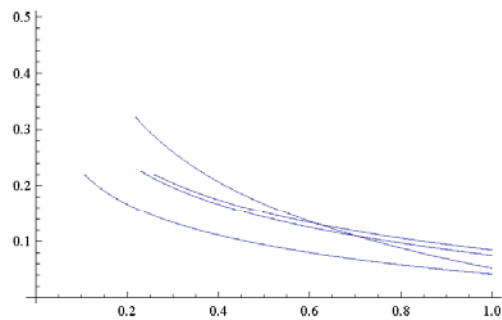
```
{α -> -0.958137, β -> 0.0732078},
```

	Estimate	Standard Error	t Statistic	P-Value
α	-0.958137	0.0160422	-59.7259	3.11005×10 <sup>-20</sup>
β	0.0732078	0.0117771	6.2161	0.0000123507

```

Show[BIfunkcja, BIIIfunkcja, BIIIIfunkcja,
      BIVfunkcja, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {0, 0.5}]

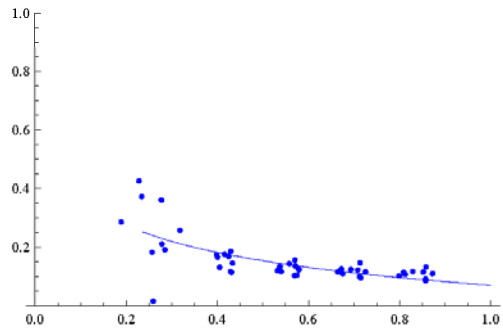
```



```

McrBsl = Mean[{McrBI, McrBII, McrBIII}];
Bsl = Join[BI, BII, BIII];
Bslpkty = ListPlot[{BI, BII, BIII}, PlotRange -> {0, 1}, PlotStyle -> {Blue}];
Clear[α, β];
model = α + x-β;
fitBsl = NonlinearModelFit[Bsl, model, {α, β}, x];
Bslfunkcja = Plot[Normal[fitBsl], {x, McrBsl, 1}, PlotStyle -> {Blue}];
Show[Bslpkty, Bslfunkcja, AxesOrigin -> {0, 0}]
fitBsl[{"BestFitParameters", "ParameterTable", "EstimatedVariance"}]

```



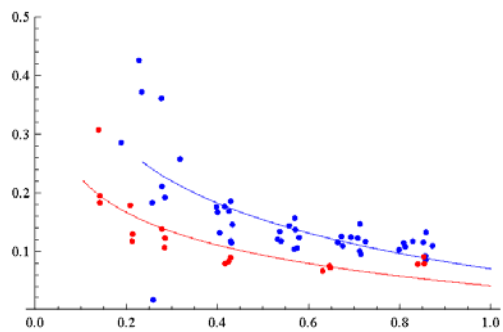
{α → -0.929189, β → 0.115713},

	Estimate	Standard Error	t Statistic	P-Value
α	-0.929189	0.0149911	-61.9826	1.07904 × 10 <sup>-43</sup> , 0.0031896
β	0.115713	0.0165673	6.98441	1.35544 × 10 <sup>-8</sup>

```

BIVpkty = ListPlot[{BIV1, BIV2, BIV3}, PlotRange -> {0, 1}, PlotStyle -> {Red}];
BIVfunkcja = Plot[Normal[fitBIV], {x, McrBIV, 1}, PlotStyle -> {Red}];
Show[Bslpkty, Bslfunkcja, BIVpkty,
BIVfunkcja, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {0, 0.5}]

```



```

αsl = -0.9291890693901043;
βsl = 0.11571263270440692;
αIV = -0.9581372447800596;
βIV = 0.07320776411289175;

```

$$\alpha = \frac{\alpha_{sl} + \alpha_{IV}}{2}$$

-0.943663

$\rho_{sl} = 0.65 / 100;$

$\rho_{IV} = 1.38 / 100;$

$$a = \frac{\beta_{IV} - \beta_{sl}}{\rho_{IV} - \rho_{sl}}$$

$b = \beta_{sl} - a * \rho_{sl}$

-5.82258

0.153559

$\beta = a * \rho + b$

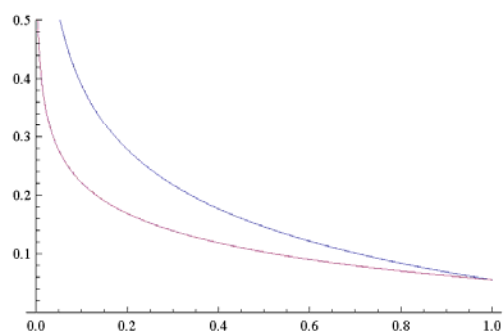
0.153559 - 5.82258  $\rho$

`FullSimplify[ $\alpha + x^{-\beta}$ ]`

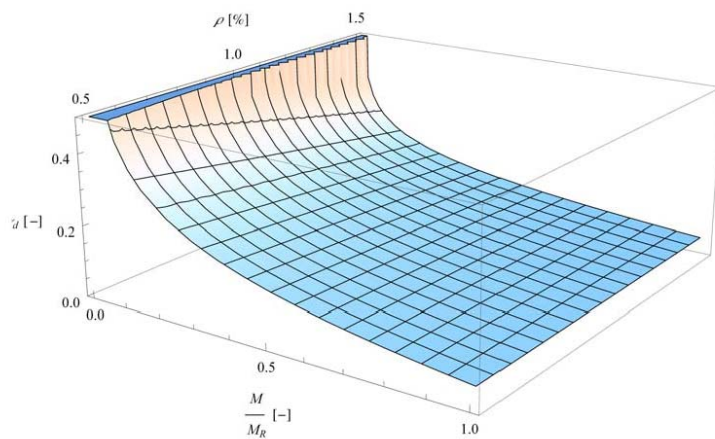
-0.943663 +  $x^{-0.153559 + 5.82258 \rho}$

`ad[x_,  $\rho_$ ] = -0.944 +  $x^{-0.154 + 5.823 \rho}$ ;`

`Plot[{ad[x, 0.005], ad[x, 0.015]}, {x, 0, 1}, PlotRange -> {0, 0.5}]`



```
ad[x_, ρ_] = -0.944 + x-0.154+5.823 ρ/100;  
Plot3D[ad[x, ρ], {x, 0, 1}, {ρ, 0.5, 1.5},  
  AxesLabel → {" $\frac{M}{M_R}$  [-]", "ρ [%]", "ad [-]"}, PlotRange → {0, 0.5}]
```



**Załącznik Z-4**

**Wydruk z przykładowego programu obliczeniowego**

```
"Dane materiałowe";
Clear["Global`*"];
Es = 200 000 000;
fyd = 420 000;
Ec = 31 000 000;
fcd = 16 700;
Ecd = 0.90 * Ec;

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} // N;$$

fctm = 2600;
Print[" $\alpha =$ ",  $\alpha$ ];
Print["Ecd = ", Ecd, " kPa"]

 $\alpha = 6.45161$ 

Ecd =  $2.79 \times 10^7$  kPa

"Geometria elementu";
b = 0.25;
h = 0.50;
c = 0.03;
 $\phi_1 = 0.02;$ 
 $\phi_2 = 0.01;$ 
 $\phi_s = 0.01;$ 
As1 =  $12.57 \times 10^{-4};$ 
As2 =  $1.57 \times 10^{-4};$ 

$$a_1 = c + \phi_s + \frac{\phi_1}{2};$$


$$a_2 = c + \phi_s + \frac{\phi_2}{2};$$

d = h - a1;

$$\rho_1 = \frac{As_1}{b * d};$$

leff = 6.00;
Print[" $\rho_1 =$ ",  $\rho_1 * 100,$  " %"]

 $\rho_1 = 1.11733$  %

"Masa elementu";
mr = 500;
ms = 10 000;
Print["mr = ", mr, " kg/m"];
Print["ms = ", ms, " kg"];

mr = 500 kg/m
ms = 10 000 kg

"Moment zginający statyczny";

$$Msd = \left( \frac{mr * leff^2}{8} + \frac{ms * leff}{4} \right) / 100;$$

Print["Msd = ", Msd, " kNm"];

Msd = 172.5 kNm
```

```

"Moment niszczący";
xeff = 
$$\frac{(As1 - As2) * fyd}{b * fcd};$$

Mrd = fcd * b * xeff *  $\left(d - \frac{xeff}{2}\right)$  + fyd * As2 * (d - a2);
Print["Mrd = ", Mrd, " kNm"];
Mrd = 209.044 kNm

"Charakterystyki przekroju w fazie I";
Ac = b * h +  $\alpha$  * As1 +  $\alpha$  * As2;
Sc = b * h *  $\frac{h}{2}$  +  $\alpha$  * As1 * d +  $\alpha$  * As2 * a2;
x1 =  $\frac{Sc}{Ac}$ ;
I1 =  $\frac{b * h^3}{12}$  + b * h *  $\left(\frac{h}{2} - x1\right)^2$  +  $\alpha$  * As1 * (d - x1)^2 +  $\alpha$  * As2 * (x1 - a2)^2;
EI1 = Ec * I1;
W1 =  $\frac{I1}{h - x1}$ ;
Mcr = W1 * fctm;
Print["x1 = ", x1, " m"];
Print["I1 = ", I1, " m^4"];
Print["EI1 = ", EI1, " kNm^2"];
Print["W1 = ", W1, " m^3"];
Print["Mcr = ", Mcr, " kNm"];

x1 = 0.260545 m
I1 = 0.00295621 m^4
EI1 = 91642.4 kNm^2
W1 = 0.0123456 m^3
Mcr = 32.0984 kNm

"Charakterystyki przekroju w fazie II";
x2 = x /. Solve[b * x *  $\frac{x}{2}$  +  $\alpha$  * As2 * (x - a2) -  $\alpha$  * As1 * (d - x) == 0, x][[2]];
 $\xi2 = \frac{x2}{h}$ ;
Print["x2 = ", x2, " m"];
Print[" $\xi2$  = ",  $\xi2$ ];

x2 = 0.139268 m
 $\xi2 = 0.278536$ 

"Średni rozstaw rys";
Acteff = b * Min[2.5 a1,  $\frac{h - x2}{3}$ ];
 $\rho r = \frac{As1}{Acteff}$ ;
srm = Round[ $\left(50 + 0.25 * 0.8 * 0.5 * \frac{\phi1 * 1000}{\rho r}\right) / 1000, 0.001$ ];
Print["srm = ", srm, " m"];

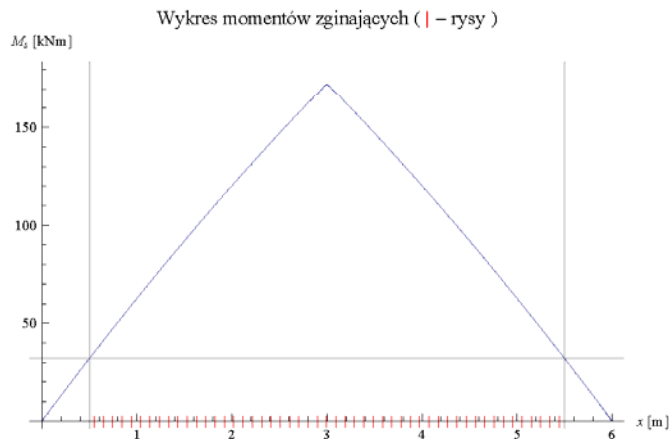
srm = 0.098 m

```

```

"Odcinek zarysowany";
M[x_] =  $\frac{mr}{100} * \frac{leff}{2} * x + \frac{ms}{100} * \frac{1}{2} * x - \frac{mr}{100} * \frac{x^2}{2} - \text{UnitStep}\left[x - \frac{leff}{2}\right] \frac{ms}{100} \left(x - \frac{leff}{2}\right)$ ;
lcrp = x /. Solve[ $\frac{mr}{100} * \frac{leff}{2} * x + \frac{ms}{100} * \frac{1}{2} * x - \frac{mr}{100} * \frac{x^2}{2} == Mcr, x$ ][[1]];
lcrk = leff - lcrp;
lcr = lcrk - lcrp;
ncr = Floor[ $\frac{lcr}{2 * srm}$ ] * 2 + 1;
xcrl =  $\frac{leff}{2} - \frac{ncr - 1}{2} * srm$ ;
CR = Table[0, {i, 1, ncr}, {j, 1, 4}];
CR[[1, 1]] = xcrl;
Do[CR[[i, 1]] = CR[[1, 1]] + srm * (i - 1), {i, 2, ncr}];
wr = Table[0, {i, 1, ncr}, {j, 1, 2}];
Do[wr[[i, 1]] = CR[[i, 1]], {i, 1, ncr}];
grafwr = ListPlot[wr, GridLines -> {{lcrp, lcrk}, {Mcr}},
  PlotStyle -> PointSize[0.01], PlotMarkers -> {"|"}];
grafwm = Plot[M[x], {x, 0, leff}, GridLines -> {{lcrp, lcrk}, {Mcr}}];
Show[grafwr, grafwm, PlotRange -> {0, 180},
  PlotLabel -> "Wykres momentów zginających ( | - rysy )",
  AxesLabel -> {"x [m]", "Me [kNm]"}]

```



```

"Charakterystyka rys";
Do[CR[[i, 2]] = M[CR[[i, 1]]], {i, 1, ncr}];
Do[CR[[i, 3]] =  $1.3 - 1.1 * \frac{Mcr}{CR[[i, 2]]}$  // N, {i, 1, ncr}];
 $\alpha d = -0.944 + \left(\frac{Msd}{Mrd}\right)^{-0.154 + 5.823 \rho 1}$ ;
Do[CR[[i, 4]] =  $\alpha d * \frac{CR[[i, 3]] * srm}{Es * 1000 * As1 * h^2 * \left(1 - \frac{\xi 2}{3} - \frac{a1}{h}\right) \left(1 - \xi 2 - \frac{a1}{h}\right)}$  // N, {i, 1, ncr}];

```



```
"Podział na elementy";
dle2 = If[srm ≤ 0.15, srm,  $\frac{srm}{2}$ ];
le2 = If[srm ≤ 0.15, ncr, 2 ncr - 1];
lodc2 = le2 * dle2;
lodc1 = xcr1 -  $\frac{dle2}{2}$ ;
lodc3 = leff - lodc1 - lodc2;
le1 = Round[lodc1 / dle2];
le3 = Round[lodc3 / dle2];
dle1 =  $\frac{lodc1}{le1}$ ;
dle3 =  $\frac{lodc3}{le3}$ ;
dle =
  Join[Table[dle1, {i, 1, le1}], Table[dle2, {i, 1, le2}], Table[dle3, {i, 1, le3}]];
le = Length[dle];
Print["Długości elementów [m]: ", dle1, ", ", dle2, ", ", dle3];
Print["Względna różnica między długościami elementów: ",
 $\frac{\text{Max}[dle] - \text{Min}[dle]}{\text{Max}[dle]} * 100, " \%$ "]
```

Długości elementów [m]: 0.1002, 0.098, 0.1002

Względna różnica między długościami elementów: 2.19561 %

```

"Dane wejściowe";
le = Length[dle];
rho = mr / (b * h);
n = 2 * le + 2;
Ec = Ecd * 103;

"Macierz transformacji Ak";
Ak = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, n}];
Do[{Ak[[i, i]] = -1, Ak[[i, i + 2]] = 1}, {i, 1, 2 * le}];

Do[{Ak[[i + 1, i]] = Ak[[i + 1, i + 2]] = - dle[[i + 1]] / 2}, {i, 1, 2 * le, 2}];

"Macierz sztywności k w bazie lokalnej";
k = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, 2 * le}];
Do[k[[i, i]] = Ec I1 / dle[[i]], {i, 1, 2 * le, 2}];

Do[k[[i, i]] = 12 * Ec I1 / dle[[i]]3, {i, 2, 2 * le, 2}];

"Macierz bezwładności m";
m = Table[0, {i, 1, n}, {j, 1, n}];

m[[1, 1]] = rho * dle[[1]] / 2 * b * h * (((dle[[1]] / 2)2 + h2) * 1 / 12 + (dle[[1]] / 4)2);

m[[n - 1, n - 1]] = rho * dle[[le]] / 2 * b * h * (((dle[[le]] / 2)2 + h2) * 1 / 12 + (dle[[le]] / 4)2);

m[[2, 2]] = rho * dle[[1]] / 2 * b * h;

m[[n, n]] = rho * dle[[le]] / 2 * b * h;

Do[m[[i, i]] = rho * dle[[i - 1]] / 2 * b * h * (((dle[[i - 1]] / 2)2 + h2) * 1 / 12 + (dle[[i - 1]] / 4)2) + rho * dle[[i]] / 2 * b * h * (((dle[[i]] / 2)2 + h2) * 1 / 12 + (dle[[i]] / 4)2], {i, 3, n - 3, 2}];

Do[m[[i, i]] = rho * dle[[i/2 - 1]] / 2 * h * b + rho * dle[[i/2]] / 2 * h * b, {i, 4, n - 2, 2}];

m[[n/2, n/2]] = m[[n/2, n/2]] + ms / 2;

m[[n/2 + 2, n/2 + 2]] = m[[n/2 + 2, n/2 + 2]] + ms / 2;

"Warunki brzegowe";
Ak = Transpose[Ak]; Ak = Delete[Ak, 2]; Ak = Transpose[Ak];
m = Delete[m, 2]; m = Transpose[m]; m = Delete[m, 2]; m = Transpose[m];
Ak = Transpose[Ak]; Ak = Delete[Ak, -1]; Ak = Transpose[Ak];
m = Delete[m, -1]; m = Transpose[m]; m = Delete[m, -1]; m = Transpose[m];
n = n - 2;

```

```

"Macierz sztywności K";
K = Transpose[Ak].k.Ak;
"Wartości własne λ";
m1 = Inverse[m];
A = m1.K;
λ = Sort[Eigenvalues[A]];
"Częstości własne ω";
Take[ω = Sqrt[λ], 6]

{39.9905, 436.432, 711.759, 1646.75, 2176.51, 3383.69}

"Częstotliwości własne f";
Take[f =  $\frac{\omega}{2\pi}$ , 6]

{6.36468, 69.4603, 113.28, 262.088, 346.402, 538.531}

"Wektory własne W";
W = Transpose[Eigenvectors[A]];
zerowa = Table[0, {i, n}];
a = n;
W = Insert[W, zerowa, 2];
W = Insert[W, zerowa, -1]; a = a + 2;

"Numer formy własnej";
nf = 1;
b = a - nf - 1;
x = Table[0, {i, 1, le}];
Do[x[[i]] =  $\sum_{j=1}^i dle[[j]]$ , {i, 1, le}];

x = Join[{0}, x];
y = Table[0, {i, a}];
Do[y[[i]] = W[[i, b]], {i, a}];
y = Take[y, {2, a, 2}];

If[Max[y] > Abs[Min[y]], y =  $\frac{Y}{\text{Max}[y]}$ , y =  $\frac{Y}{\text{Min}[y]}$ ];

punkty = Table[0, {i, 0.5`a}, {j, 2}];
Do[punkty[[i, 1]] = x[[i]], {i, 0.5`a}];
Do[punkty[[i, 2]] = y[[i]], {i, 0.5`a}];
fdeb = ListPlot[punkty, PlotLabel -> "1. forma własna belki debutującej",
  Joined -> True, AxesLabel -> {"x [m]", None}]

```



```
"Więzi redukowane";
kcr = k;
w = If[srm < 0.15, Table[2 * (le1 + i) - 1, {i, 1, ncr}],
      Table[2 * (le1 + i) - 1, {i, 1, 2 ncr - 1, 2}]];
dw = Table[0, {i, 1, ncr}];
Do[dw[[i]] = k[[w[[i]], w[[i]]]]-1 + CR[[i, 4]], {i, 1, ncr}];
Do[kcr[[w[[i]], w[[i]]]] = dw[[i]]-1, {i, 1, ncr}];
"Macierz sztywności K";
K = Transpose[Ak].kcr.Ak;
"Wartości własne λ";
m1 = Inverse[m];
A = m1.K;
λ = Sort[Eigenvalues[A]];
"Częstości własne ω";
Take[ω = Sqrt[λ], 6]
{36.6236, 404.732, 660.722, 1537.51, 2037.61, 3162.88}

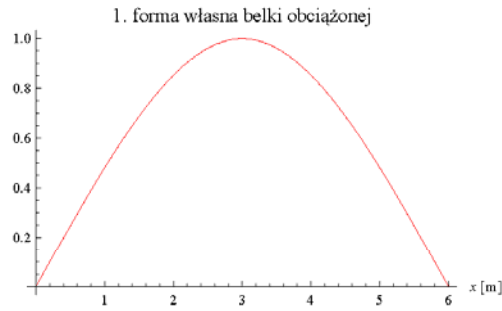
"Częstotliwości własne f";
Take[f =  $\frac{\omega}{2\pi}$ , 6]
{5.82883, 64.4151, 105.157, 244.703, 324.295, 503.388}

"Wektory własne W";
W = Transpose[Eigenvectors[A]];
zerowa = Table[0, {i, n}];
a = n;
W = Insert[W, zerowa, 2];
W = Insert[W, zerowa, -1]; a = a + 2;
```

```

"Numer formy własnej";
nf = 1;
b = a - nf - 1;
x = Table[0, {i, 1, le}];
Do[x[[i]] =  $\sum_{j=1}^i$  dle[[j]], {i, 1, le}];
x = Join[{0}, x];
y = Table[0, {i, a}];
Do[y[[i]] = W[i, b], {i, a}];
y = Take[y, {2, a, 2}];
If[Max[y] > Abs[Min[y]], y =  $\frac{Y}{\text{Max}[y]}$ , y =  $\frac{Y}{\text{Min}[y]}$ ];
punkty = Table[0, {i, 0.5`a}, {j, 2}];
Do[punkty[[i, 1]] = x[[i], {i, 0.5`a}];
Do[punkty[[i, 2]] = y[[i], {i, 0.5`a}];
fobc = ListPlot[punkty, PlotLabel -> "1. forma własna belki obciążonej",
  Joined -> True, PlotStyle -> {Red}, AxesLabel -> {"x [m]", None}]

```



```

"Macierz tłumienia C";
at = 0.01;

$$\mu = 4\pi * at * \frac{f[[2]] - f[[1]]}{\frac{f[[2]]}{f[[1]]} - \frac{f[[1]]}{f[[2]]}}$$


$$\kappa = \frac{1}{\pi} * at * \frac{f[[2]] - f[[1]]}{f[[2]]^2 - f[[1]]^2}$$

CT =  $\mu m + \kappa K$ ;
"Siła wymuszająca";
F1 = 2000;
p = 35;
F[t] = F1 Sin[p t];
"Wektor współrzędnych uogólnionych q_i";
Q = Table[q[i][t], {i, 1, n}];
Q1 = Table[q[i]'[t], {i, 1, n}];
Q2 = Table[q[i]''[t], {i, 1, n}];

```

```

"Równanie ruchu";
RR = m.Q2 + CT.Q1 + K.Q;
UR = Table[0, {i, 1, n}];
Do[UR[[i]] = RR[[i]] == 0, {i, 1, n}];
UR[[ $\frac{n}{2}$ ]] = RR[[ $\frac{n}{2}$ ]] == F[t] / 2;
UR[[ $\frac{n}{2} + 2$ ]] = RR[[ $\frac{n}{2} + 2$ ]] == F[t] / 2;

"Warunki początkowe";
WP = Table[0, {i, 1, 2 n}];
Do[WP[[2 i - 1]] = q[i][0] == 0, {i, 1, n}];
Do[WP[[2 i]] = q[i]'[0] == 0, {i, 1, n}];

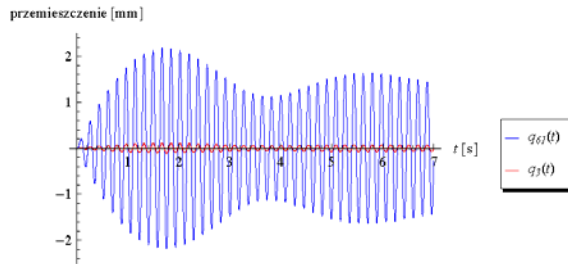
"Rozwiązanie numeryczne";
tmax = 7;
DS = Join[UR, WP];
rozw = NDSolve[DS, Q, {t, 0, tmax}, MaxSteps -> 50000000];

qwyn = Table[0, {i, 1, n}];
Do[qwyn[[i]] = q[i][t] /. rozw, {i, 1, n}];

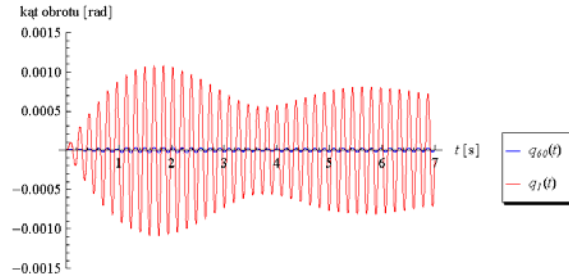
tmaxw = 7;

Plot[{qwyn[[ $\frac{n}{2}$ ]] * 1000, qwyn[[3]] * 1000}, {t, 0, tmaxw}, PlotRange -> {-2.5, 2.5},
PlotStyle -> {Blue, Red}, AxesLabel -> {"t [s]", "przeszyczenie [mm]"},
PlotLegend -> {"q6z(t)", "q3(t)"}, LegendPosition -> {1.1, -0.3},
LegendSize -> {0.3, 0.3}, LegendShadow -> {0.01, -0.01}]

```

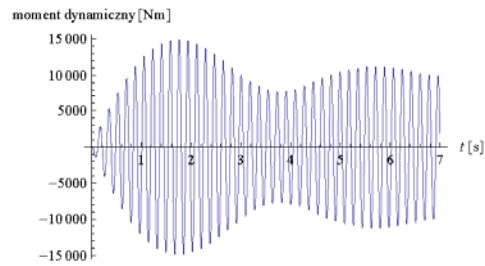


```
Plot[{qwyn[[ $\frac{n}{2} - 1$ ]], qwyn[[1]]}, {t, 0, tmaxw}, PlotRange -> {-0.0015, 0.0015},  
PlotStyle -> {Blue, Red}, AxesLabel -> {"t [s]", "kąt obrotu [rad]"},  
PlotLegend -> {"q60(t)", "q1(t)"}, LegendPosition -> {1.1, -0.3},  
LegendSize -> {0.3, 0.3}, LegendShadow -> {0.01, -0.01}]
```



```
"Moment dynamiczny";  
r = Ak.qwyn;  
Mdyn = -kcr.r;
```

```
Plot[Mdyn[[n / 2 - 1]], {t, 0, tmaxw},  
AxesLabel -> {"t [s]", "moment dynamiczny [Nm]"}]
```



```

"Metoda sztywności dynamicznej";
"Geometria elementu";
b = 0.25;
h = 0.50;
c = 0.03;
φ1 = 0.02;
φ2 = 0.01;
φs = 0.01;
As1 = 12.57 * 10-4;
As2 = 1.57 * 10-4;
a1 = c + φs +  $\frac{\phi 1}{2}$ ;
a2 = c + φs +  $\frac{\phi 2}{2}$ ;
d = h - a1;
ρ1 =  $\frac{As1}{b * d}$ ;
leff = 6.00;
Print["ρ1 = ", ρ1 * 100, " %"];
"Charakterystyki przekroju w fazie II";
Ec = 31000000000;
I2 =  $\frac{b * x^3}{3} + \alpha * As2 * (x2 - a2)^2 + \alpha * As1 * (d - x2)^2$ ;
αB = 0.90;
βB = 0.06691791719553872 - 2.2232238879705446 ρ1;
EId =  $\frac{\alpha B * Ec * I2}{1 - \left(\frac{Mcx}{Ms d}\right)^{2 \beta B} \left(1 - \frac{I2}{I1}\right)}$ ;
Print["I2 = ", I2, " m4"];
Print["EId = ", EId, " kNm2"];
ρ1 = 1.11733 %
I2 = 0.00101712 m4
EId = 6.59 × 107 kNm2
"Macierz sztywności k w bazie lokalnej";
k = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, 2 * le}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{EId}{d1e\left[\left[\frac{i+1}{2}\right]\right]}$ , {i, 1, 2 * le, 2}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{12 * EId}{d1e\left[\left[\frac{i}{2}\right]\right]^3}$ , {i, 2, 2 * le, 2}];
"Macierz sztywności K";
K = Transpose[Ak].k.Ak;
"Wartości własne λ";
A = ml.K;
λ = Sort[Eigenvalues[A]];
"Częstości własne ω";
Take[ω = Sqrt[λ], 6]
{35.7462, 390.112, 636.218, 1471.97, 1945.51, 3024.57}

```



```
"Częstotliwości własne f";
Take[f =  $\frac{\omega}{2\pi}$ , 6]
{5.68918, 62.0883, 101.257, 234.272, 309.637, 481.375}

"Według normy";
Ib =  $\frac{b * h^3}{12}$ ;

"Macierz sztywności k w bazie lokalnej";
k = Table[0, {i, 1, 2 * le}, {j, 1, 2 * le}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{Ec * Ib}{dIe[[\frac{i+1}{2}]}$ , {i, 1, 2 * le, 2}];
Do[k[[i, i]] =  $\frac{12 * Ec * Ib}{dIe[[\frac{i}{2}]]^3}$ , {i, 2, 2 * le, 2}];

"Macierz sztywności K";
K = Transpose[Ak].k.Ak;
"Wartości własne λ";
A = m1.K;
λ = Sort[Eigenvalues[A]];
"Częstości własne ω";
Take[ω = Sqrt[λ], 6]
{39.5642, 431.78, 704.172, 1629.19, 2153.3, 3347.62}

"Częstotliwości własne f";
Take[f =  $\frac{\omega}{2\pi}$ , 6]
{6.29684, 68.7199, 112.072, 259.294, 342.709, 532.79}
```