

Studia i Monografie z. 258

Lilianna Sadecka

**Metoda różnic skończonych i metoda
elementów skończonych w zagadnieniach
mechaniki konstrukcji i podłoża**

2010

SPIS TREŚCI

Przedmowa	5
1. Wstęp	7
2. Metoda różnic skończonych	13
2.1. Wprowadzenie.....	13
2.2. Operatory różnicowe.....	14
2.3. Ocena dokładności operatorów różnicowych.....	20
2.4. Zastosowanie MRS w analizie statycznej belek.....	23
2.4.1. Przykład – belka obciążona siłą skupioną.....	23
2.4.2. Przykład – belka obciążona momentem skupionym.....	28
2.5. Zastosowanie MRS w analizie statycznej płyt.....	32
2.5.1. Przykład – płyta obciążona równomiernie na całym obszarze	41
2.6. Wariacyjne ujęcie metody różnic skończonych (WMRS).....	45
2.6.1. Przykład – belka obciążona siłą skupioną.....	46
3. Metoda elementów skończonych	51
3.1. Wprowadzenie.....	51
3.2. Idea metody elementów skończonych.....	52
3.3. Dyskretyzacja.....	55
3.4. Klasyfikacja elementów skończonych.....	59
3.5. Równania metody elementów skończonych.....	61

3.6. Funkcje kształtu.....	62
3.7. Agregacja.....	72
3.8. Przykład – równanie różniczkowe podłoża Własowa.....	81
3.9. Ogólne sformułowanie MES dla zagadnień mechaniki ciała stałego	88
4. Charakterystyka wybranych elementów skończonych.....	95
4.1. Uwagi wstępne.....	95
4.2. Element belkowy.....	95
4.2.1. Przykład – belka z przegubem.....	106
4.3. Izoparametryczny element płyty średniej grubości wyższego rzędu	113
4.3.1. Związki podstawowe modelu płyty wyższego rzędu.....	114
4.3.2. Specyfikacja elementu płyty wyższego rzędu.....	116
4.4. Elementy nieskończone.....	120
4.4.1. Zasadnicza koncepcja elementów nieskończonych.....	121
4.4.2. Dwuwymiarowe elementy nieskończone.....	123
4.5. Makroelement podłoża warstwowego.....	126
4.5.1. Związki podstawowe modelu podłoża warstwowego.....	127
4.5.2. Specyfikacja makroelementu podłoża.....	131
4.5.3. Uwagi dotyczące kalibracji parametrów modelu podłoża warstwowego	138
5. Przykłady zastosowań MRS i MES w analizie statycznej konstrukcji posadowionych na podłożu sprężystym	139
5.1. Uwagi wstępne.....	139
5.2. Belka spoczywająca swobodnie na podłożu Winklera – WMRS.....	142
5.3. Belka spoczywająca swobodnie na podłożu Własowa – WMRS.....	148
5.4. Belka na podłożu Winklera z więzami jednostronnymi – WMRS....	153
5.5. Belka na podłożu dwuwarstwowym – MES.....	156
5.6. Płyta wyższego rzędu na podłożu dwuwarstwowym – MES.....	165
5.6.1. Płyta obciążona równomiernie na całym obszarze.....	171
5.6.2. Płyta obciążona centrycznie na małym obszarze.....	174
5.7. Płyta fundamentowa na podłożu dowolnie uwarstwowym – MES ..	176
Literatura.....	183

PRZEDMOWA

Metoda elementów skończonych i metoda różnic skończonych stanowią w obecnej dobie potężne narzędzie obliczeniowe, powszechnie wykorzystywane w analizie wielu zagadnień techniki. Literatura omawiająca teorię obu metod i ich aplikacji do konkretnych zagadnień jest bardzo obszerna. Spośród pozycji książkowych warto tu wymienić pracę O.C. Zienkiewicza i R.L. Taylora „Metoda elementów skończonych”, vol. 1, 2, (2000), pracę pod redakcją M. Kleibera „Komputerowe metody mechaniki ciała stałego”, (1995) czy książkę E. Rusińskiego, J. Czmochońskiego i T. Smolnickiego „Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych” (2000). Ogólnie, wśród pozycji książkowych, dają się zauważyć dwa trendy. Jeden obejmuje prace omawiające wspomniane metody w ścisłym ujęciu matematycznym, wymagające dobrej znajomości teorii równań różniczkowych, rachunku wariacyjnego i analizy funkcjonalnej, drugi tworzą prace przedstawiające szczegóły algorytmów metod na gruncie mechaniki konstrukcji. W niniejszej książce, w której przedstawiono zarys teorii metody różnic skończonych i metody elementów skończonych autorka starała się niejako te dwa główne nurty zrównoważyć, dając ogólny opis metod, niekoniecznie związany z dziedziną mechaniki konstrukcji, jakkolwiek przykłady ilustrujące, zawarte w tej części książki, odnoszą się do zagadnień mechaniki budowli. Druga część książki, chociaż nie wyodrębniona formalnie, ujmuje charakterystykę wybranych elementów skończonych, zarówno tych znanych i powszechnie stosowanych, takich, jak element belkowy, jak też szczególnych, takich jak element płyty wyższego rzędu czy element nieskończony, dla których trudno znaleźć nawet obszerniejsze omówienie w literaturze przedmiotu. Dotyczy to w pełni sformułowanego i opisanego makroelementu podłoża sprężystego, który stanowi własną autorską aplikację metody do zagadnień współpracy konstrukcji

z podłożem dowolnie uwarstwionym. Zastosowaniu MRS i MES do tego rodzaju zagadnień poświęcony jest ostatni rozdział książki. Zawarte w nim przykłady, stopniowane ze względu na przyjętą idealizację masywu gruntowego w zagadnieniach kontaktowych „konstrukcja – podłoże sprężyste”, obrazują w konkretny sposób zastosowanie rozważanych metod w zagadnieniach z pogranicza dwóch dziedzin: mechaniki konstrukcji i geomechaniki. W efekcie ukazują one (ostatni przykład) możliwość analiz tych zagadnień przy jednoczesnym, dostatecznie dokładnym modelowaniu obu substruktur: budowli i podłoża uwarstwionego, a zarazem przy stosunkowo małym wysiłku obliczeniowym. Jest to istotne, wciąż w powszechnym użyciu są bowiem programy komputerowe do analizy konstrukcji na sprężystym podłożu opisanym za pomocą najbardziej wyidealizowanego modelu-analogu Winklera. Leżące u podstaw tego podejścia założenie, że osiadanie podłoża w danym punkcie zależy tylko od wartości obciążenia powierzchniowego w tym punkcie ogranicza możliwość uzyskiwania realistycznych wyników analiz do podłoża w postaci cienkiej warstwy. Niezależnie od tego poważne trudności sprawia wiarygodne oszacowanie współczynnika Winklera dla podłoża uwarstwionego. W tym zakresie książka wypełnia pewną lukę między nadmiernie uproszczonym traktowaniem podłoża, a jego zbyt wyrafinowanym modelowaniem stwarzającym poważne trudności w praktycznym stosowaniu. Proponuje algorytmy obliczeń, stanowiące kompromis pomiędzy dokładnością a czasochłonnością obliczeń.

Książka adresowana jest do pracowników naukowych wykorzystujących MRS i MES do tworzenia modelu numerycznego danego zagadnienia; w szczególności zagadnienia współpracy konstrukcji z podłożem gruntowym. Skierowana jest również do studentów wydziałów politechnik pragnących usystematyzować swoją wiedzę z zakresu znanych i stosowanych metod obliczeniowych. Stanowiłoby ogromną satysfakcją dla autorki, gdyby w wyżej wspomnianym zakresie książka okazała się pomocna.

Korzystając ze sposobności autorka pragnie wyrazić wdzięczność Recenzentom: Panu profesorowi Jerzemu Gołasiowi, a w szczególności Panu profesorowi Maciejowi Gryczmańskiemu za życzliwość i cenne uwagi, pomocne w uporządkowaniu trudniejszych fragmentów książki. Słowa podziękowania kieruje również autorka pod adresem Pana Artura Łożyńskiego za znaczącą pomoc przy komputerowym opracowaniu rysunków i istotne wskazówki dotyczące składu tekstu.

Rozdział 1

WSTĘP

Zagadnienia fizyki matematycznej czy techniki, takie na przykład jak poszukiwanie rozkładu pól temperatury, przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia to zagadnienia brzegowe lub brzegowo-początkowe. Zagadnienia takie opisane są najczęściej układem równań różniczkowych i warunkami na brzegu obszaru w przypadku zagadnienia brzegowego, oraz dodatkowo, warunkami w danej chwili $t = t_0$, dla zagadnień brzegowo-początkowych zależnych od czasu. Każde zagadnienie brzegowe można w sposób ogólny opisać równaniem operatorowym:

$$A(u) + f = 0 \tag{1.1}$$

określonym w obszarze V , z warunkami brzegowymi

$$F(u) = p$$

$$G(u) = q$$

danymi na części odpowiednio S_1 i S_2 brzegu $S = S_1 \cup S_2$.

W równaniu (1.1) A oznacza pewien operator różniczkowy. Może to być np.

operator Laplace'a: $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bądź operator biharmoniczny:

$A = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$. Przez u oznaczono funkcję będącą dokładnym rozwiązaniem równania (1.1), natomiast f jest funkcją daną w obszarze V . W ogólności zagadnienie brzegowe może mieć charakter liniowy lub nieliniowy – odpowiednio A będzie operatorem liniowym lub nieliniowym.

Określenie funkcji u jako dokładnego rozwiązania równania (1.1) dotyczy z reguły wąskiej klasy zagadnień, dla których operator A jest liniowy, obszar u jest regularny, a warunki brzegowe ciągłe i elementarne. Uzyskane rozwiązania są ściśle w sensie matematycznym, często nazywa się je rozwiązaniami zamkniętymi.

Z chwilą pojawienia się obszarów o złożonych kształtach czy nieciągłych warunkach brzegowych, metody ściśle w wyniku stosowania których uzyskuje się funkcję u jako dokładne rozwiązanie równania operatorowego (1.1) prowadzą do długich i żmudnych obliczeń, często też w takich przypadkach nie ma rozwiązań w klasie funkcji elementarnych. Pozostają wówczas do dyspozycji metody przybliżone rozwiązania równania (1.1), które kosztem zmniejszonej dokładności obliczeń prowadzą szybciej lub w ogóle umożliwiają uzyskanie rezultatu.

Generalnie przy przybliżonym rozwiązywaniu równania (1.1) można wyróżnić dwa podejścia. Pierwsze z nich bazuje na oryginalnym równaniu operatorowym, drugie na warunku minimum funkcjonału zagadnienia. W myśl twierdzenia Weinberga analizy funkcjonalnej podejście drugie jest możliwe wtedy, gdy operator A jest potencjalny. Istnieje wtedy funkcjonał, gradientem którego jest oryginalny operator różniczkowy. W takim przypadku zamiast poszukiwać rozwiązania równania (1.1) poszukuje się punktu krytycznego funkcjonału. Zachodzi bowiem wówczas równoważność pomiędzy równaniem operatorowym a stowarzyszonym z nim funkcjonałem. Oznacza to ogólnie rzecz biorąc, że rozwiązaniem równania (1.1) jest funkcja, która minimalizuje funkcjonał i odwrotnie: wyznaczenie funkcji, która minimalizuje funkcjonał stanowi rozwiązanie równania (1.1). Podejście bazujące na funkcjonał jest często łatwiejsze niż rozwiązywanie równania operatorowego. Jest też bardziej dogodne z punktu widzenia zastosowań praktycznych.

Niezależnie od podejścia, metody przybliżone można podzielić na metody analityczne, czyli takie, przy użyciu których uzyskuje się rozwiązanie równania (1.1) w postaci funkcji, oraz numeryczne, kiedy rozwiązanie jest zbiorem wartości funkcji u w wybranych punktach obszaru V . W obu przypadkach rozwiązanie jest konstruowane w przestrzeni skończonej wymiarowej. Jeżeli wymiar tej przestrzeni zostaje sukcesywnie zwiększany, wówczas błąd aproksymacji ulega zmniejszaniu i rozwiązanie przybliżone zmierza do rozwiązania dokładnego. W ramach wspomnianego wyżej podziału klasyfikację poszczególnych metod przybliżonych przedstawiono schematycznie na rys. 1.1.

W metodach analitycznych traktuje się ciało jako continuum trójwymiarowe, czyli rozpatruje się **model kontynualny** ciała. W metodach numerycznych ciało traktuje się jako skończony zbiór punktów, między którymi zakłada się funkcyjny opis zmienności poszukiwanego pola. Rozpatruje się zatem **model dyskretny**. Proces dojścia do modelu dyskretnego, zwany dyskretyzacją, może odbywać się albo na drodze matematycznej – tzw. dyskretyzacja matematyczna, albo na drodze fizycznej przez podział rozpatrywanego continuum na skończoną liczbę części – tzw. dyskretyzacja fizyczna.



Rys. 1.1. Metody przybliżone rozwiązania równania $A(u) + f = 0$

W rozważaniach zawartych w niniejszej książce przedstawione będą podstawy teoretyczne oraz wybrane aspekty dwóch metod numerycznych: metody różnic skończonych (MRS) wraz z jej wariacyjnym ujęciem (WMRS) i metody elementów skończonych (MES). Metody te są tak skonstruowane, że aby osiągnąć odpowiednią dokładność rozwiązań, wymagana jest duża liczba powtarzających się obliczeń przez co niezbędnym staje się zastosowanie komputera. Stąd też metody te nazwać można **metodami komputerowymi**.

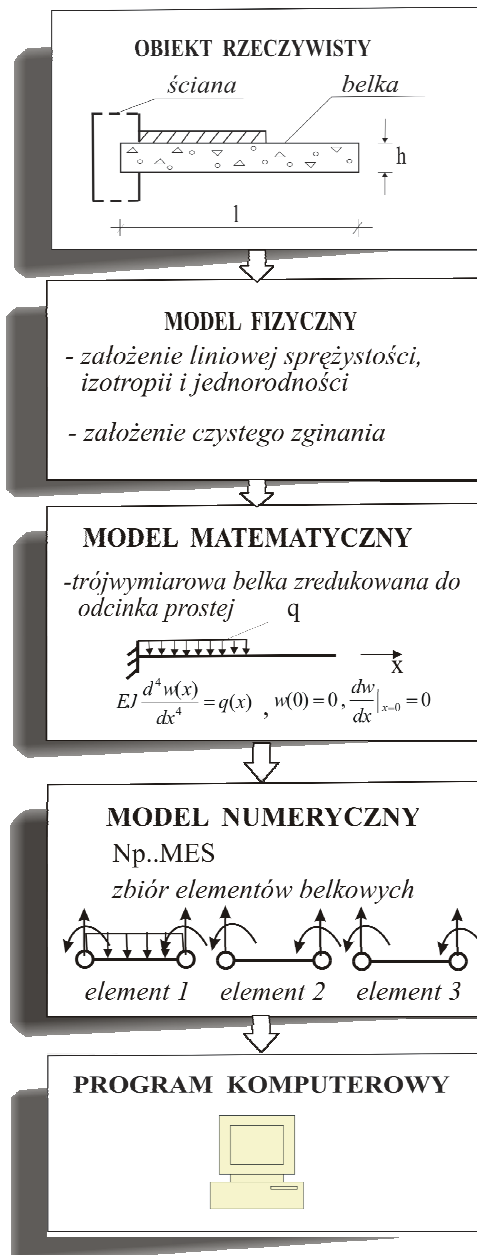
Nie jest możliwe podanie jednolitego kryterium użyteczności zastosowania każdej z wyżej wymienionych metod komputerowych do danego zagadnienia. W dużej mierze jest to uwarunkowane specyfiką rozpatrywanego problemu jak również doświadczeniem i intuicją tego, kto decyduje się na wybór tej, a nie innej metody numerycznej.

Stwierdzić można, że najbardziej uniwersalną spośród wymienionych metod jest metoda elementów skończonych. Jest ona wyczerpująco omówiona w literaturze przedmiotu i podobnie jak metoda różnic skończonych całkowicie opracowana w swoich podstawach teoretycznych. Metoda elementów brzegowych, która w niniejszej książce nie została omówiona, wciąż jest w fazie rozwojowej i znajduje coraz szersze zastosowanie do rozwiązywania wielu zagadnień naukowych i inżynierskich.

Warto również podkreślić, iż przy zastosowaniu danej metody komputerowej wyniki odnoszą się nie do układu rzeczywistego, ale do modelu obliczeniowego (dyskretnego), który tylko tę rzeczywistość modeluje. Mając bowiem układ rzeczywisty, którego zachowanie chcemy zbadać, tworzymy najpierw zbiór założeń dotyczących procesów i zjawisk, które w tym układzie zachodzą, czyli model fizyczny. W dalszej kolejności formułujemy równania, które wyrażają zasadnicze własności modelu fizycznego w sposób matematyczny. To dopiero staje się podstawą utworzenia modelu obliczeniowego rzeczywistego obiektu przy uwzględnieniu własności danej metody numerycznej. Schematycznie przedstawia to rys. 1.2.

Właściwa interpretacja wyników obliczeń programu komputerowego jest możliwa jedynie przy znajomości zastosowanego w tym programie modelu obliczeniowego. Ocena adekwatności otrzymanych rezultatów może odbyć się albo na drodze porównania z rozwiązaniem ścisłym (zazwyczaj niedostępnym), albo na drodze weryfikacji doświadczalnej.

Nie trzeba chyba podkreślać, że programy, w których użyto różnych modeli obliczeniowych tego samego obiektu rzeczywistego prowadzi będą do różniących się od siebie wyników. Nawet jednak przy tych samych modelach obliczeniowych mogą pojawiać się rozbieżności w wynikach, wynikające ze stosowania różnych technik numerycznych, na przykład różnych procedur rozwiązywania układu równań.



Rys. 1.2. Schemat tworzenia modeli obiektu rzeczywistego

Rozdział 2

METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

2.1. Wprowadzenie

Metoda różnic skończonych jest jedną z najstarszych metod przybliżonych, stosowaną jeszcze przed powstaniem elektronicznych maszyn cyfrowych jako dyskretna metoda rozwiązywania problemów brzegowych opisanych równaniami różniczkowymi. Metodę tę rozszerzono następnie na zagadnienia sformułowane w postaci wariacyjnej i stąd powstała odmiana tej metody – wariacyjne ujęcie metody różnic skończonych (WMRS).

Metoda różnic skończonych oparta jest na dyskretyzacji matematycznej równań różniczkowych opisujących continuum. Jej istotą jest zastąpienie operatorów różniczkowych odpowiednimi operatorami różnicowymi (ilorazami różnicowymi) określonymi na dyskretnym zbiorze punktów zwanym siatką dyskretyzacyjną. Elementy tego zbioru nazywane są węzłami. W wyniku takiego podejścia zagadnienie brzegowe sprowadzone zostaje do układu równań algebraicznych, w którym niewiadomymi są wartości poszukiwanej funkcji w węzłach siatki dyskretyzacyjnej.

W swojej wersji podstawowej MRS dotyczy regularnej siatki węzłów, co stanowi znaczne ograniczenie w zastosowaniu do obszarów o złożonej geometrii. Do mankamentów metody zalicza się również brak możliwości lokalnego zagęszczenia siatki i trudność w łączeniu obszarów o różnych wymiarach (na przykład $1D^1$ z $2D^2$). Niewątpliwą zaletą metody jest jej prostota oraz duża skuteczność dla obszarów regularnych.

¹ $1D$ - jednowymiarowy (ang. 1- dimensional)

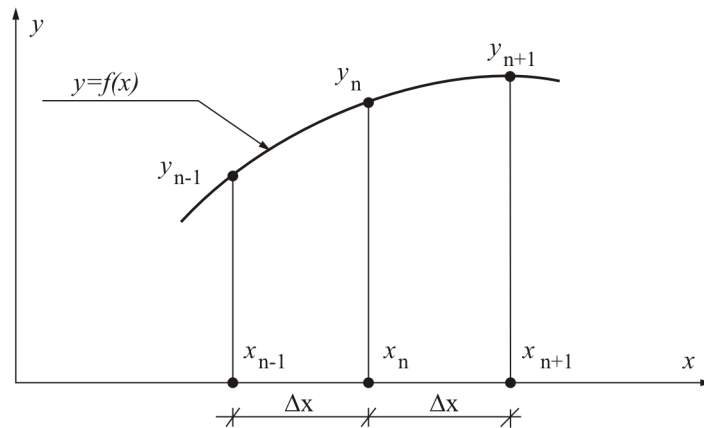
² $2D$ - dwuwymiarowy

Uogólnienia podstawowej wersji MRS opracowane w ostatnich latach i umożliwiające uwzględnienie podziału nierównomiernego pokazują duże możliwości metody i zwiększają jej obszar zastosowań, który staje się porównywalny z obszarem wiodącej metody komputerowej – metody elementów skończonych.

Często stosowana jest kombinacja MRS i MES w analizach zagadnień brzegowo-początkowych. Pierwsza używana jest wtedy do dyskretyzacji zmiennej czasowej, druga do dyskretyzacji pól przestrzennych.

2.2. Operatory różnicowe

Operatory różnicowe stanowiące punkt wyjścia metody można otrzymać wychodząc z definicji pochodnej funkcji w punkcie. W tym celu rozpatruje się dowolną funkcję ciągłą $y = f(x)$ (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Funkcja ciągła $y = f(x)$ i jej wartości w określonych punktach

Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_n , która oznaczona zostanie przez $y' = f'(x_n)$ nazywa się granicą ilorazu różnicowego

$$y' = \frac{dy}{dx} \Big|_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Wyrażenie powyższe można zapisać w następującej formie:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_n}{\Delta x} \quad (2.2)$$

Przybliżeniem tego wyrażenia jest równanie:

$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{\Delta y_n}{\Delta x} \quad (2.3)$$

które nazywa się **pierwszą różnicą przednią** funkcji y w punkcie x_n . Odpowiednio **pierwsza różnica wsteczna** funkcji y w punkcie x_n wyraża się następująco:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} \quad (2.4)$$

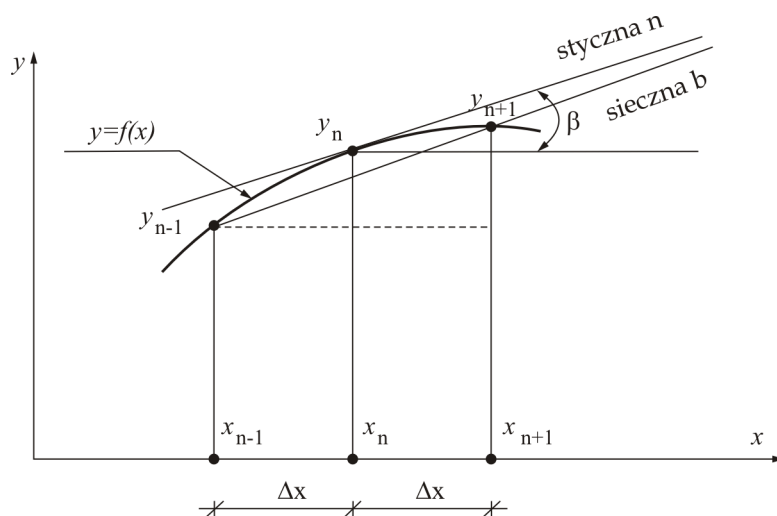
Pierwsza różnica centralna zawiera punkty symetrycznie położone względem punktu x_n :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} \quad (2.5)$$

Wiadomo, że pochodna ma swoją interpretację geometryczną. Pochodna $y'(x_n)$ jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do osi OX w punkcie y_n (rys 2.2). Jeżeli przyjmie się, że w punkcie x_n sieczna b jest równoległa do stycznej n , wówczas $\operatorname{tg}\beta$ można zapisać następująco:

$$\operatorname{tg}\beta = y'(x_n) = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x}, \quad (2.6)$$

a to jest właśnie pierwsza różnica centralna.



Rys. 3.2. Styczna i sieczna do krzywej $y = f(x)$

Oczywiście im mniejsze Δx , tym bardziej kąt nachylenia stycznej zbliża się do kąta nachylenia siecznej i tym bardziej zmniejsza się błąd, którym obarczone są ilorazy różnicowe. W ogólności pochodna w danym punkcie aproksymowana jest najlepiej przez odpowiednią różnicę centralną, ponieważ ten schemat różnicowy uwzględnia wartości funkcji w punktach symetrycznie położonych względem danego punktu. Te symetrycznie położone punkty dają lepszą średnią wartość pochodnych. Stąd też w dalszych rozważaniach uwzględniona zostanie **jedynie pierwsza różnica centralna**.

Pochodne funkcji $y = f(x)$ wyższych rzędów zastąpione zostaną ilorazami różnicowymi w następujący sposób:

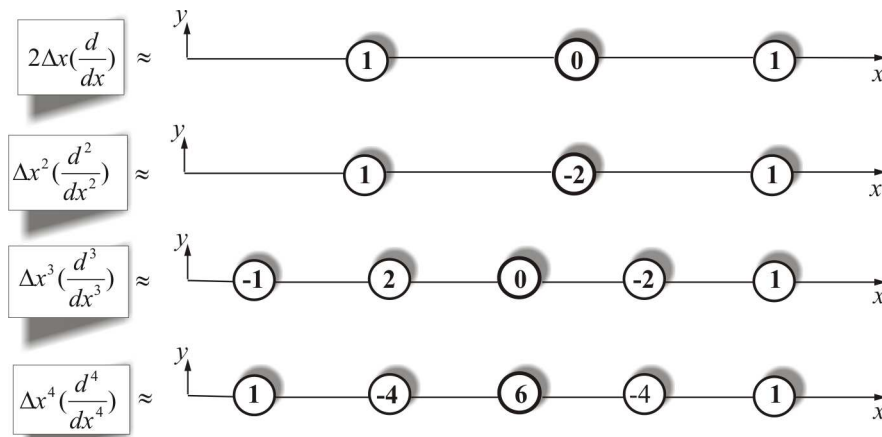
$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_n &\rightarrow \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} = \frac{\Delta}{\Delta x} \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{n+1/2} - \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{n-1/2}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{(\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x)} - \frac{y_n - y_{n-1}}{(\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} - \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 y}{dx^4} \Big|_n &\rightarrow \frac{\Delta^4 y_n}{\Delta x^4} = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} = \frac{\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \Big|_{n+1} - 2 \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \Big|_n + \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \Big|_{n-1}}{\Delta x^2} = \\
 &= \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n - 2(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta x^4} = \\
 &= \frac{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta x^4}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

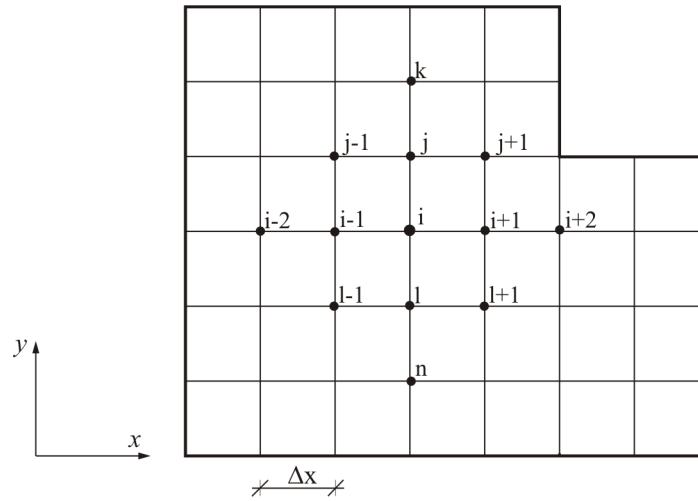
Odpowiednie schematy różnicowe można zilustrować graficznie (rys. 2.3).

Rozważa się obecnie funkcję dwóch zmiennych $f(x, y)$. W tym przypadku obszar zmienności funkcji $f(x, y)$ pokrywa się z siatką o bokach Δx i Δy (rys. 2.4) i określa wartości dyskretne w jej węzłach. Rozpatrując dowolny przekrój $y = \text{const.}$ otrzymuje się:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_i \rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \tag{2.9}$$



Rys. 2.3. Operatory różnicowe funkcji jednej zmiennej



Rys. 2.4. Obszar zmienności funkcji wraz z siatką dyskretyzacyjną

Z kolei dla przekroju $x = const.$ uzyskuje się:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_i \rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta y} \Big|_i = \frac{f_j - f_l}{2\Delta y} \quad (2.10)$$

Odpowiednio też zachodzi:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \Big|_i \rightarrow \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.11)$$

oraz :

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \Big|_i \rightarrow \frac{\Delta^2 f}{\Delta y^2} \Big|_i = \frac{f_j - 2f_i + f_l}{\Delta y^2} \quad (2.12)$$

Dla pochodnej mieszanej odpowiedni iloraz różnicowy otrzymuje się w analogiczny sposób:

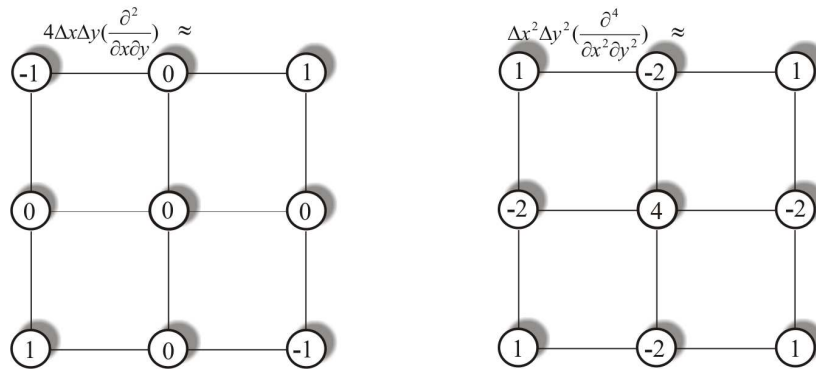
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_i &\rightarrow \frac{\Delta^2 f}{\Delta x \Delta y} \Big|_i = \frac{\Delta}{\Delta y} \frac{\Delta f_i}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Big|_j - \frac{\Delta f}{\Delta x} \Big|_l = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{f_{l+1} - f_{l-1}}{2\Delta x} = \\ &= \frac{f_{j+1} - f_{j-1} - f_{l+1} + f_{l-1}}{4\Delta x \Delta y}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

podobnie dla pochodnej czwartego rzędu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_i &\rightarrow \frac{\Delta^4 f}{\Delta x^2 \Delta y^2} \Big|_i = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \frac{\Delta^2 f_i}{\Delta y^2} = \frac{\frac{\Delta^2 f}{\Delta y^2} \Big|_{i+1} - 2 \frac{\Delta^2 f}{\Delta y^2} \Big|_i + \frac{\Delta^2 f}{\Delta y^2} \Big|_{i-1}}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{\frac{f_{j+1} - 2f_{i+1} + f_{l+1}}{\Delta y^2} - 2 \frac{f_j - 2f_i + f_l}{\Delta y^2} + \frac{f_{j-1} - 2f_{i-1} + f_{l-1}}{\Delta y^2}}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{f_{j+1} - 2f_{i+1} + f_{l+1} - 2f_j + 4f_i - 2f_l + f_{j-1} - 2f_{i-1} + f_{l-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Schematy powyższe można zilustrować graficznie (rys. 2.5).

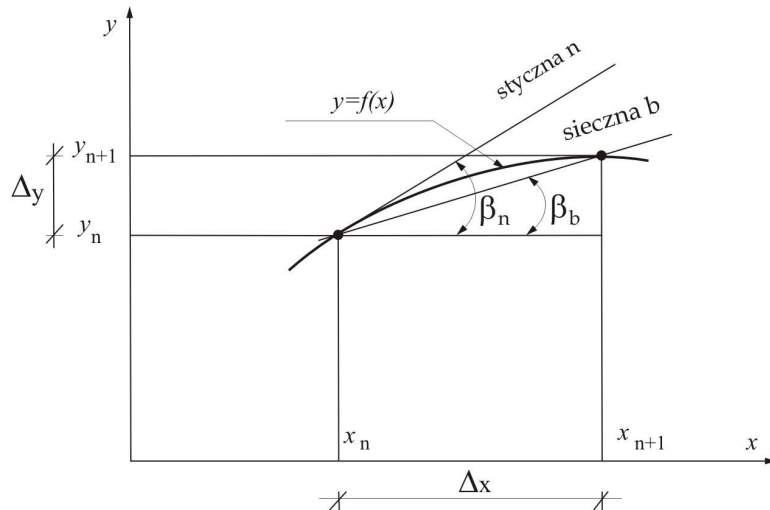
Postępując w ten sposób można napisać schemat różnicowy dowolnej pochodnej zwykłej lub mieszanej.



Rys. 2.5. Operatory różnicowe funkcji dwóch zmiennych

2.3. Ocena dokładności operatorów różnicowych

Rozpatruje się dowolną funkcję ciągłą $y = f(x)$ (rys. 2.6).



Rys. 2.6. Styczna i sieczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_n

Przyjęte schematy różnicowe jedynie aproksymują rzeczywistą wartość pochodnej:

- **Rzeczywista wartość pochodnej:** $\operatorname{tg} \beta_n = \frac{dy}{dx}$
- **Aproksymacja:** $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta_b \cong \operatorname{tg} \beta_n = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

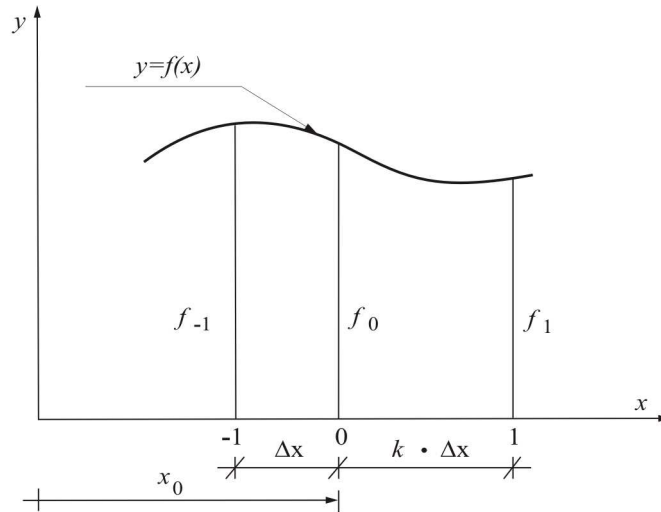
Rozbieżność pomiędzy rzeczywistą wartością pochodnej a aproksymacją maleje wraz ze zmniejszaniem się odległości Δx . Aby ocenić tę rozbieżność, czyli błąd wynikający z zastąpienia pochodnej ilorazem różnicowym rozwija się daną funkcję w szereg Taylora.

W tym celu rozpatruje się funkcję jednowymiarową $y = f(x)$ (rys. 2.7).

Szereg Taylora funkcji $f(x + \xi)$ ma postać:

$$f(x + \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad (2.15)$$

gdzie pochodna zerowego rzędu jest równa $f(x)$ i $0! = 1$.

Rys. 2.7. Funkcja ciągła $y = f(x)$

Zgodnie z rys. 2.7 dla f_1 i f_{-1} mamy:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f\left(x_0 + \frac{k\Delta x}{\xi}\right) = \frac{\xi^0}{0!} \frac{d^0 f(x_0)}{dx^0} + \frac{\xi^1}{1!} \frac{d^1 f(x_0)}{dx^1} + \frac{\xi^2}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + \\
 &+ \frac{\xi^3}{3!} \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} + \dots = f(x_0) + \xi \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{\xi^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} + \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_0} + \dots \\
 &= f_0 + k \Delta x \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{k^2 \Delta x^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} + \frac{k^3 \Delta x^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_0} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 f_{-1} &= f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{\xi}\right) = \frac{\xi^0}{0!} \frac{d^0 f(x_0)}{dx^0} + \frac{\xi^1}{1!} \frac{d^1 f(x_0)}{dx^1} + \frac{\xi^2}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + \\
 &+ \frac{\xi^3}{3!} \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} + \dots = f(x_0) - \Delta x \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} - \\
 &\quad - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_0} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Schemat różnicowy dla pochodnej $\frac{df}{dx}|_{x_0}$ przedstawia się następująco:

$$\frac{df}{dx}|_{x_0} = \frac{f_1 - f_{-1}}{\Delta x(1+k)} \quad (2.18)$$

Odejmując stronami wyrażenia na f_1 i f_{-1} uzyskuje się:

$$\begin{aligned} f_1 - f_{-1} = \Delta x(1+k) \frac{df}{dx}|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2}(k^2-1) \frac{d^2 f}{dx^2}|_{x_0} + \\ + \frac{\Delta x^3}{6}(k^3+1) \frac{d^3 f}{dx^3}|_{x_0} + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Z powyższego wyrażenia można wyznaczyć $\frac{df}{dx}|_{x_0}$. Otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}|_{x_0} = \frac{1}{\Delta x(1+k)}(f_1 - f_{-1}) + \frac{\Delta x^2(k^2-1)}{2\Delta x(1+k)} \frac{d^2 f}{dx^2}|_{x_0} + \\ + \frac{\Delta x^3(k^3+1)}{6\Delta x(1+k)} \frac{d^3 f}{dx^3}|_{x_0} + \dots = \frac{f_1 - f_{-1}}{\Delta x(1+k)} + \\ + \underbrace{\frac{\Delta x}{2}(k-1) \frac{d^2 f}{dx^2}|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{k^3+1}{1+k} \right) \frac{d^3 f}{dx^3}|_{x_0} + \dots}_R \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pierwszy człon w wyrażeniu (2.20) na pochodną $\frac{df}{dx}|_{x_0}$ to przyjęty schemat różnicowy (2.18). Pozostałe człony stanowią resztę, którą odrzuca się zastępując pochodną jej schematem różnicowym. Tak więc przybliżone wyrażenie na pochodną $\frac{df}{dx}|_{x_0}$ dane ilorazem różnicowym obarczone jest błędem:

$$R = \frac{\Delta x}{2}(k-1) \frac{d^2 f}{dx^2}|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{k^3+1}{1+k} \right) \frac{d^3 f}{dx^3}|_{x_0} + \dots \quad (2.21)$$

W przypadku gdy $k \neq 1$ (podział nierównomierny) $R \rightarrow 0$ gdy $\Delta x \rightarrow 0$, a więc błąd maleje wraz ze zmniejszaniem siatki podziału. Dla podziału równomiernego, czyli gdy $k = 1$, $R \rightarrow 0$ gdy $\Delta x^2 \rightarrow 0$.

Błąd operatora różnicowego nie jest jedynym źródłem powstawania błędów rozwiązywania zagadnienia metodą różnic skończonych. Dochodzą tu podobnie jak i w innych metodach numerycznych błędy wynikające z żądania spełnienia równań różniczkowych w wybranych, a nie w każdym punkcie obszaru oraz błędy zaokrągleń arytmetycznych.

2.4. Zastosowanie MRS w analizie statycznej belek

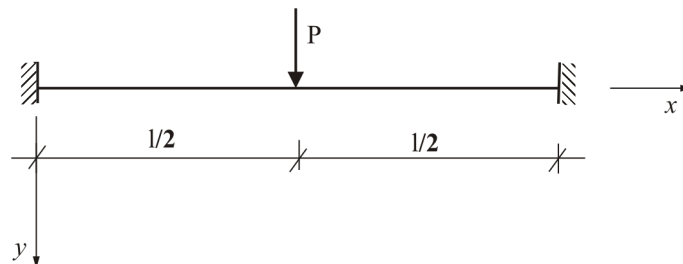
2.4.1. Przykład – belka obciążona siłą skupioną

Dana jest belka obustronnie utwierdzona obciążona siłą skupioną jak na rys. 2.8. Do określenia jest rozkład momentów zginających w belce. Rozwiązanie dokładne tego zagadnienia przedstawia rys. 2.9.

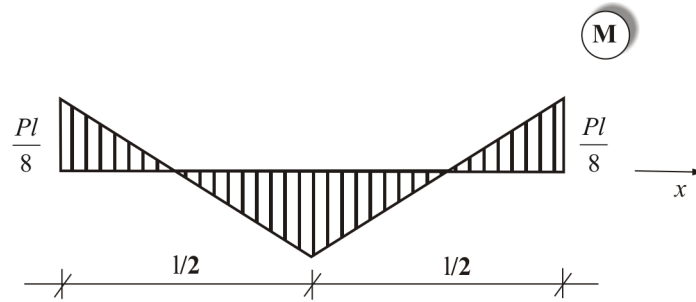
Zadanie rozwiązane zostanie w sposób przybliżony przy zastosowaniu metody różnic skończonych. Punktem wyjścia jest równanie różniczkowe osi odkształconej pręta:

$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2.22)$$

w którym: $w(x)$ – funkcja ugięcia belki, $q(x)$ – intensywność obciążenia równomiernie rozłożonego, EJ – sztywność belki.



Rys. 2.8. Belka obustronnie utwierdzona obciążona w środku siłą skupioną



Rys. 2.9. Rozkład momentów zginających – rozwiązanie dokładne

Rozpatruje się więc zagadnienie brzegowe opisane ogólnie równaniem (1.1), w którym obecnie:

$$A \equiv \frac{d^4}{dx^4}$$

$$u \equiv w(x) \quad (2.23)$$

$$f \equiv -\frac{q(x)}{EJ}$$

Warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia belki są następujące:

$$w(x=0) = 0$$

$$w(x=l) = 0$$

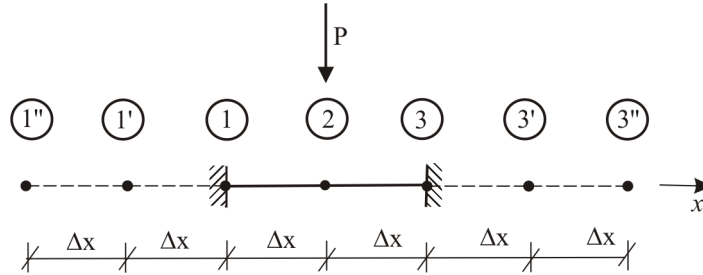
$$\varphi(x=0) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\varphi(x=l) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.24)$$

Związek pomiędzy funkcją momentów zginających $M(x)$ a funkcją ugięcia $w(x)$ ma postać:

$$M(x) = -EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2.25)$$

W celu uzyskania rozwiązania zadania metodą różnic skończonych dokonuje się podziału belki równomierną siatką dyskretyzacyjną o boku oczka $\Delta x = \frac{l}{2}$ (rys. 2.10).



Rys. 2.10. Przyjęta dyskretyzacja belki

W każdym węźle siatki podziału należy napisać odpowiednie równania różnicowe. Równania te wynikają z zastąpienia występującej w równaniu opisującym zagadnienie (2.22) pochodnej czwartego rzędu przez odpowiedni iloraz różnicowy. Otrzymuje się następujące równania różnicowe:

$$\text{węzeł '1': } w_1'' - 4w_1' + 6w_1 - 4w_2 + w_3 = \frac{q_1}{EJ} \Delta x^4$$

$$\text{węzeł '2': } w_1' - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_3' = \frac{q_2}{EJ} \Delta x^4 \quad (2.26)$$

$$\text{węzeł '3': } w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_3' + w_3'' = \frac{q_3}{EJ} \Delta x^4$$

W równaniach powyższych wielkości w_1', w_1'' oraz w_3', w_3'' są ugięciami węzłów fikcyjnych. Aby bowiem napisać schemat różnicowy odpowiadający czwartej pochodnej dla węzła „1” oraz „3” należy „przedłużyć” belkę o dwa odcinki o długości Δx , uzyskując po dwa dodatkowe węzły niezbędne w czwartej różnicy skończonej.

Z kolei biorąc pod uwagę warunki brzegowe

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

wielkością poszukiwaną będzie jedynie ugięcie węzła „2”. Ugięcie to można obliczyć z równania (2.26)₂:

$$w_1' - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_3' = \frac{q_2}{EJ} \Delta x^4 \quad (2.28)$$

Występujące w powyższym równaniu ugięcia fikcyjne w_1' oraz w_3' wyrażone zostaną poprzez ugięcia węzłów rzeczywistych przy wykorzystaniu warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 0 &\Rightarrow \frac{dw}{dx} \Big|_1 = 0 \\ \varphi_3 = 0 &\Rightarrow \frac{dw}{dx} \Big|_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

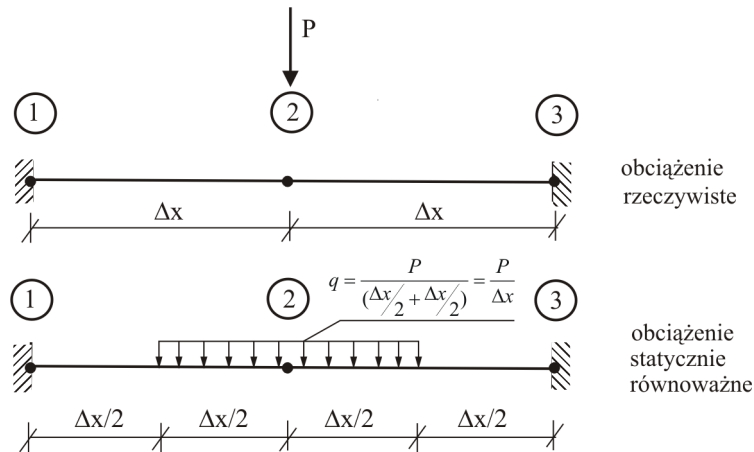
Zastępując w równaniu (2.29) pierwszą pochodną odpowiednim ilorazem różnicowym otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} \Big|_1 = 0 &: \frac{w_2 - w_1'}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_1' = w_2 \\ \frac{dw}{dx} \Big|_3 = 0 &: \frac{w_3' - w_2}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_3' = w_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Przy uwzględnieniu związków (2.27) i (2.30) w wyrażeniu (2.28) równanie różnicowe dla węzła „2” przyjmie postać:

$$8w_2 = \frac{q_2}{EJ} \Delta x^4, \quad (2.31)$$

W równaniu (2.31) q_2 jest intensywnością obciążenia równomiernie rozłożonego, przypadającego na węzeł „2”. Ponieważ w węźle „2” działa siła skupiona, aby określić q_2 , należy zastąpić obciążenie rzeczywiste obciążeniem równoważnym statycznie, zgodnie z rys. 2.11.



Rys. 2.11. Obciążenie równomiernie rozłożone przypadające na węzeł „2”

Tak więc $q_2 = \frac{P}{\Delta x}$. Równanie (2.31) przybiera zatem postać:

$$8w_2 = \frac{P}{EJ} \Delta x^3 = \frac{Pl^3}{8EJ} \quad (2.32)$$

Stąd otrzymuje się:

$$w_2 = \frac{Pl^3}{64EJ} \quad (2.33)$$

Momenty zginające w wybranych węzłach oblicza się na podstawie zależności (2.25), w której drugą pochodną zastępuje się odpowiednim ilorazem różnicowym. Postępując w ten sposób uzyskuje się:

$$M_1 = -EJ \left(\frac{w_2 - 2w_1 + w_1'}{\Delta x^2} \right)$$

$$M_3 = -EJ \left(\frac{w_3 - 2w_3' + w_2}{\Delta x^2} \right) \quad (2.34)$$

Uwzględniając we wzorze (2.34) związki (2.27), (2.30) oraz uzyskane rozwiązanie (2.33) ostatecznie otrzymuje się następujące wartości momentów utwierdzenia M_1 i M_3 :

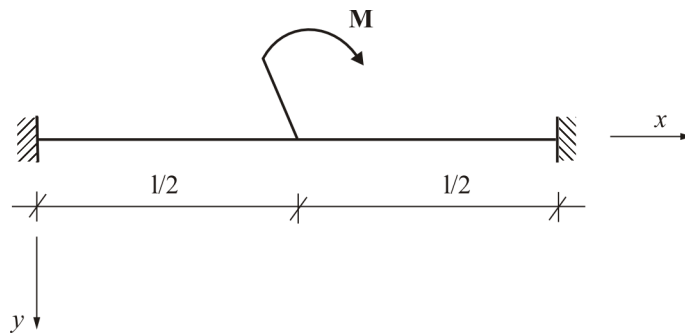
$$M_1 = -\frac{Pl}{8}$$

$$M_3 = -\frac{Pl}{8}$$
(2.35)

Jak widać, uzyskane w tym przypadku rozwiązanie przy wykorzystaniu metody różnic skończonych jest identyczne jak rozwiązanie dokładne.

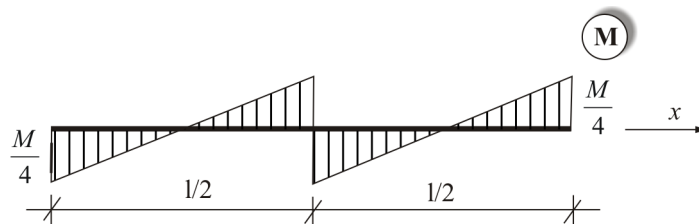
2.4.2. Przykład – belka obciążona momentem skupionym

Do określenia jest rozkład momentów zginających w belce obustronnie utwierdzonej, obciążonej w środku momentem skupionym (rys. 2.12).



Rys. 2.12. Belka obustronnie utwierdzona obciążona w środku momentem skupionym

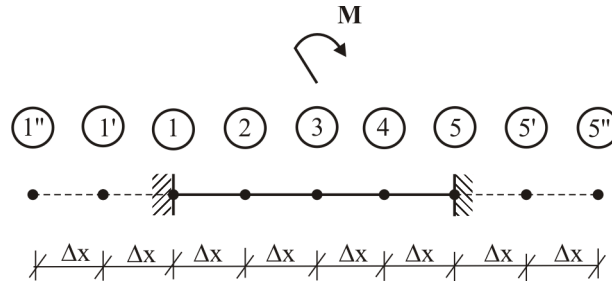
Rozwiązanie dokładne przedstawia rys. 2.13.



Rys. 2.13. Rozkład momentów zginających – rozwiązanie dokładne

Podobnie jak w przykładzie 2.4.1. punktem wyjścia jest równanie różniczkowe osi odkształconej pręta (2.22). Warunki brzegowe określają związki (2.24).

Przyjętą w metodzie różnic skończonych dyskretyzację belki przedstawiono na rys. 2.14.



Rys. 2.14. Przyjęta dyskretyzacja belki

Analogicznie jak w przykładzie 2.4.1. kolejnym węzłom siatki podziału przypisane są następujące równania różnicowe:

$$\begin{aligned}
 \text{węzeł ' 1 ' : } w_1'' - 4w_1' + 6w_1 - 4w_2 + w_3 &= \frac{q_1}{EJ} \Delta x^4 \\
 \text{węzeł ' 2 ' : } w_1' - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4 &= \frac{q_2}{EJ} \Delta x^4 \\
 \text{węzeł ' 3 ' : } w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 &= \frac{q_3}{EJ} \Delta x^4 \\
 \text{węzeł ' 4 ' : } w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 + w_5' &= \frac{q_4}{EJ} \Delta x^4 \\
 \text{węzeł ' 5 ' : } w_3 - 4w_4 + 6w_5 - 4w_5' + w_5'' &= \frac{q_5}{EJ} \Delta x^4
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Wielkości w_1' , w_1'' oraz w_5' , w_5'' występujące w powyższych równaniach są ugięciami węzłów fikcyjnych. Z uwagi na warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= 0 \\
 w_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

niezerowe ugięcia wystąpią jedynie w węzłach „2”, „3”, „4”. Będą one obliczone przy wykorzystaniu równań (2.36), odniesionych do odpowiednich węzłów. Układ równań na wyznaczenie poszukiwanych wielkości w_2, w_3, w_4 ma zatem postać:

$$\begin{aligned}
31 w_1' - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4 &= \frac{q_2}{EJ} \Delta x^4 \\
w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 &= \frac{q_3}{EJ} \Delta x^4 \\
w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 + w_5' &= \frac{q_4}{EJ} \Delta x^4
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Ugięcia fikcyjne w_1' oraz w_5' wyznacza się z warunków brzegowych:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 = 0 &\Rightarrow \frac{dw}{dx} \Big|_1 = 0 \Rightarrow \frac{w_2 - w_1'}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_1' = w_2 \\
\varphi_5 = 0 &\Rightarrow \frac{dw}{dx} \Big|_5 = 0 \Rightarrow \frac{w_5' - w_4}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_5' = w_4
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Uwzględniając zależności (2.39) w równaniach (2.38) ostatecznie otrzymuje się

$$\begin{aligned}
7w_2 - 4w_3 + w_4 &= \frac{q_2}{EJ} \Delta x^4 \\
-4w_2 + 6w_3 - 4w_4 &= \frac{q_3}{EJ} \Delta x^4 \\
w_2 - 4w_3 + 7w_4 &= \frac{q_4}{EJ} \Delta x^4
\end{aligned} \tag{2.40}$$

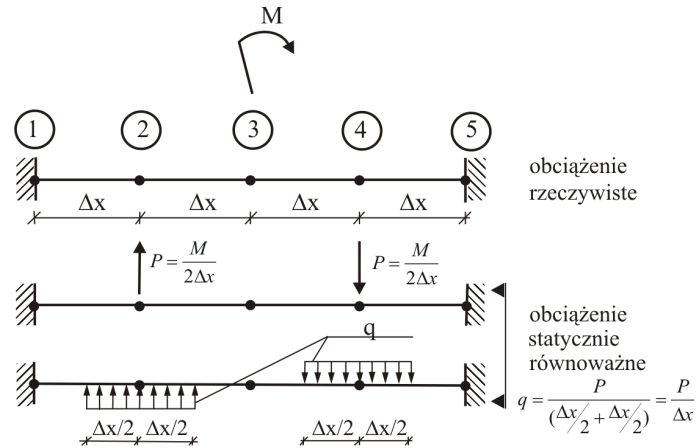
Obciążenie przyłożone jest w węźle „2”, natomiast $q_3 = q_4 = 0$. Obciążenie to zastępuje się obciążeniem równoważnym statycznie, zgodnie z rys. 2.15.

W wyniku zastąpienia momentu skupionego parą sił, którą następnie zapisano w postaci statycznie równoważnego obciążenia równomiernie rozłożonego uzyskuje się:

$$\begin{aligned}
q_2 &= -\frac{P}{\Delta x} = -\frac{M}{2\Delta x^2} \\
q_4 &= \frac{P}{\Delta x} = \frac{M}{2\Delta x^2} \\
q_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Równania (2.40) przybiorą zatem postać:

$$\begin{aligned}
 7w_2 - 4w_3 + w_4 &= -\frac{M}{2EJ} \Delta x^2 \\
 -4w_2 + 6w_3 - 4w_4 &= 0 \\
 w_2 - 4w_3 + 7w_4 &= \frac{M}{2EJ} \Delta x^2
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$



Rys. 2.15. Obciążenie statycznie równoważne obciążeniu danemu

Po rozwiązaniu układu (2.42) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 w_2 &= -\frac{Ml^2}{192EJ} \\
 w_3 &= 0 \\
 w_4 &= \frac{Ml^2}{192EJ}
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Momenty utwierdzenia M_1 i M_5 oblicza się na podstawie zależności (2.25) wyrażonej w różnicach skończonych:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -EJ \left(\frac{w_2 - 2w_1 + w_1'}{\Delta x^2} \right) \\
 M_5 &= -EJ \left(\frac{w_5' - 2w_5 + w_4}{\Delta x^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

Uwzględniając w powyższym związku (2.37) oraz (2.39), otrzymuje się:

$$\begin{aligned} M_1 &= -EJ \frac{2w_2}{\Delta x^2} = \frac{M}{6} \\ M_5 &= -EJ \frac{2w_4}{\Delta x^2} = -\frac{M}{6} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Odpowiednie wartości dokładne momentów wynoszą:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{4} \\ M_5 &= -\frac{M}{4} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Różnice jakie pojawiają się w tym przypadku pomiędzy rozwiązaniem dokładnym a rozwiązaniem metodą różnic skończonych wynikają głównie ze zbyt rzadkiej siatki dyskretyzacyjnej, co szczególnie odzwierciedla się przy zastąpieniu momentu skupionego parą sił.

2.5. Zastosowanie MRS w analizie statycznej płyt

Obliczenia statyczne płyty izotropowej o stałej grubości i małych ugięciach sprowadzają się do wyznaczenia funkcji ugięcia spełniającej równanie różniczkowe:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad (2.47)$$

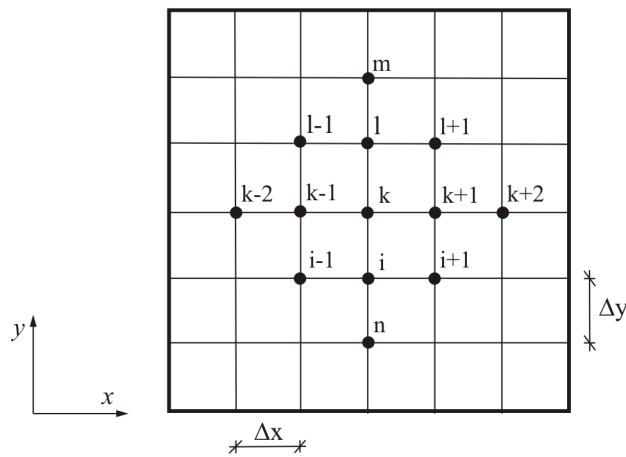
oraz warunki brzegowe zależne od sposobu podparcia płyty.

W równaniu (2.47) przez E oznaczono moduł sprężystości podłużnej, h jest grubością płyty, $w(x, y)$ ugięciem powierzchni środkowej, ν współczynnikiem Poissona, natomiast $q(x, y)$ obciążeniem przypadającym na jednostkę powierzchni płyty. Rozpatruje się zatem zagadnienie brzegowe (1.1), w którym:

$$\begin{aligned}
 A &\equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\
 u &\equiv w(x, y) \\
 f &\equiv -\frac{q(x, y)}{D}
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

gdzie $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ jest sztywnością płyty na zginanie. W celu zastosowania

MRS do rozwiązania płyty rozpatruje się płytę prostokątną i dokonuje podziału jej obszaru na elementarne podobszary o wymiarach Δx i Δy (rys. 2.16).



Rys. 2.16. Płyta z naniesioną siatką dyskretyzacyjną

Równanie powierzchni ugięcia płyty (2.47) można zapisać w następującej postaci:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}
 \tag{2.49}$$

gdzie: $\nabla^2 \nabla^2$ – operator różniczkowy, zwany bilaplasjanem (podwójny operator Laplace'a).

Zastępując w powyższym równaniu pochodne cząstkowe odpowiedzającymi im ilorazami różnicowymi otrzymuje się równanie różnicowe ugięcia płyty w węzle „k”:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^4} (w_{k-2} - 4w_{k-1} + 6w_k - 4w_{k+1} + w_{k+2}) + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} (w_{l-1} - \\ & - 2w_l + w_{l+1} - 2w_{k-1} + 4w_k - 2w_{k+1} + w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^4} (w_m - 4w_l + 6w_k - 4w_i + w_n) = \frac{q_k}{D} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Wykorzystano tutaj wcześniej wyprowadzone ilorazy różnicowe dla pochodnej IV rzędu.

Oznaczając stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ przez μ można przedstawić równanie (2.50) w postaci:

$$\begin{aligned} & \mu^4 (w_{k-2} - 4w_{k-1} + 6w_k - 4w_{k+1} + w_{k+2}) + 2\mu^2 (w_{l-1} - 2w_l + \\ & 2w_{k-1} + 4w_k - 2w_{k+1} + w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) + w_m - 4w_l + 6w_k - \\ & - 4w_i + w_n = \frac{q_k \mu^4 \Delta x^4}{D} \end{aligned} \quad (2.51)$$

W przypadku podziału równomiernego $\Delta x = \Delta y$ otrzymuje się równanie różnicowe:

$$\begin{aligned} & 20w_k - 8(w_{k-1} + w_{k+1} + w_l + w_i) + 2(w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + \\ & + w_{k-2} + w_{k+2} + w_m + w_n = \frac{q_k \Delta x^4}{D} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Schematyczny zapis tego równania przedstawia rysunek 2.17.

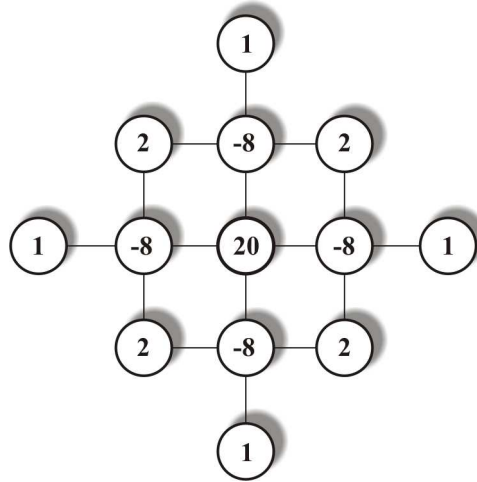
Równania tego typu należy napisać dla każdego węzła siatki podziału. W węzłach położonych na krawędzi płyty i w pobliżu tej krawędzi oprócz ugięć punktów „rzeczywistych” pojawią się jeszcze w powyższych równaniach fikcyjne ugięcia węzłów poza płytą. Ugięcia te wyznacza się na podstawie warunków brzegowych.

Warunki brzegowe

Równanie (2.47) ugięcia płyty jest cząstkowym równaniem różniczkowym IV rzędu, rozwiązanie $w(x, y)$ można więc wyznaczyć tylko dla dwóch warunków brzegowych na każdej krawędzi. Występują tam jednak trzy siły przekrojowe: moment zginający, moment skręcający i siła poprzeczna. Siły te powinny być zrównoważone odpowiadającymi im siłami zewnętrznymi.

W celu otrzymania tylko dwóch warunków brzegowych dodaje się do sił poprzecznych równoważniki momentów skręcających, otrzymując **zastępcze siły poprzeczne**:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_x &= -D \left[\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right] \\ \bar{Q}_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right]\end{aligned}\quad (2.53)$$



Rys. 2.17. Operator biharmoniczny

Odpowiednie wyrażenia na momenty zginające oraz moment skręcający mają postać:

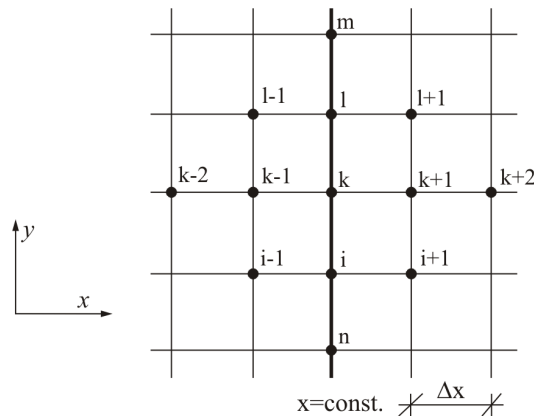
$$\begin{aligned}M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.54)$$

Rozpatrzone będzie obecnie równanie różnicowe (2.52) dla węzłów położonych w pobliżu lub na krawędzi płyty w przypadku różnych sposobów podparcia płyty.

- Krawędź $x = \text{const.}$ **całkowicie swobodna** (rys. 2.18)

Na krawędzi swobodnej muszą zanikać: moment zginający M_x i zastępcza siła poprzeczna \bar{Q}_x . Zgodnie zatem z zależnościami (2.53) i (2.54) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} M_x = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0 \\ \bar{Q}_x = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$



Rys. 2.18. Krawędź swobodna płyty z naniesioną siatką dyskretyzacyjną

W równaniu (2.52) dla węzła „k”:

$$\begin{aligned} 20w_k - 8(w_{k-1} + w_{k+1} + w_k + w_i) + 2(w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + \\ + w_{k-2} + w_{k+2} + w_m + w_n = \frac{q_k \Delta x^4}{D} \end{aligned}$$

ugięcia w_{k-2} , w_{l-1} , w_{k-1} oraz w_{i-1} są obecnie ugięciami fikcyjnymi węzłów położonych poza płytą. Ugięcia te wyraża się poprzez ugięcia węzłów położonych w obszarze płyty wykorzystując warunki brzegowe (2.55), odniesione do odpowiednich węzłów. Warunki te mają postać:

$$\begin{aligned}
(M_x)|_l &= 0 \\
(M_x)|_k &= 0 \\
(M_x)|_i &= 0 \\
(\bar{Q}_x)|_k &= 0
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Wyrażenia na momenty M_x oraz zastępczą siłę poprzeczną \bar{Q}_x zastępuje się przez odpowiednie schematy różnicowe. Przykładowo dla węzła „k” uzyskuje się:

$$\begin{aligned}
M_x|_k &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_k = -D \left(\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \nu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \\
&= -D [w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} + \nu(w_l - 2w_k + w_i)] \\
\bar{Q}_x|_k &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_k = -D \left[\frac{\Delta^3 w_k}{\Delta x \Delta y^2} + \right. \\
&\quad \left. + (2-\nu) \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta x \Delta y^2} \right] = -D [2w_{k-1} - w_{k-2} - 2w_{k+1} + w_{k+2} + \\
&\quad + (2-\nu)(w_{l+1} - 2w_{k+1} + w_{i+1} - w_{l-1} + 2w_{k-1} - w_{i-1})]
\end{aligned} \tag{2.57}$$

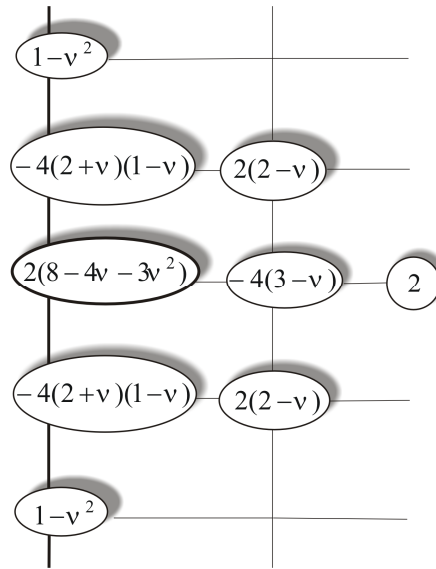
Postępując w ten sposób, z warunków (2.56) otrzymuje się następujące wyrażenia dla ugięć węzłów fikcyjnych:

$$\begin{aligned}
w_{l-1} &= 2(1+\nu)w_l - w_{l+1} - \nu w_m - \nu w_k \\
w_{k-1} &= 2(1+\nu)w_k - w_{k+1} - \nu w_l - \nu w_i \\
w_{i-1} &= 2(1+\nu)w_i - w_{i+1} - \nu w_k - \nu w_n \\
w_{k-2} &= w_{k+2} - 4(3-\nu)w_{k+1} + 6(2+2\nu-\nu^2)w_k - \\
&\quad - 4(1+2\nu-\nu^2)(w_i + w_l) + \nu(2-\nu)(w_m + w_n) + \\
&\quad + 2(2-\nu)(w_{l+1} + w_{i+1})
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Uwzględniając powyższe związki w równaniu różnicowym dla węzła „k” uzyskuje się ostatecznie równanie różnicowe dla węzła położonego na krawędzi swobodnej płyty:

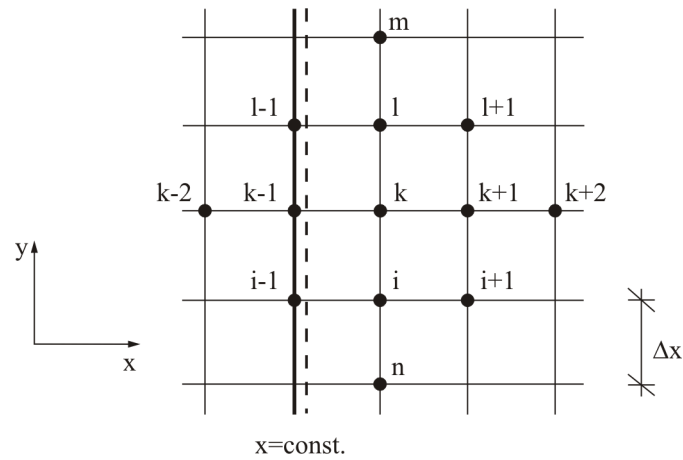
$$2(8 - 4\nu - 3\nu^2)w_k - 4(3 - \nu)w_{k+1} + 2w_{k+2} - 4(2 + \nu)(1 - \nu)(w_l + w_i) + 2(2 - \nu)(w_{l+1} + w_{i+1}) + (1 - \nu^2)(w_m + w_n) = \frac{q_k \Delta x^4}{D} \quad (2.59)$$

Schematyczny zapis tego równania przedstawia rysunek 2.19.



Rys. 2.19. Współczynniki w równaniu różnicowym węzła położonego na krawędzi swobodnej

- Krawędź $x = \text{const.}$ swobodnie podparta (rys. 2.20)



Rys. 2.20. Krawędź swobodnie podparta płyty z naniesioną siatką dyskretyzacyjną

Warunki brzegowe:

$$w = 0, \quad M_x|_{k-1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{k-1} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta^2 w_{k-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (2.60)$$

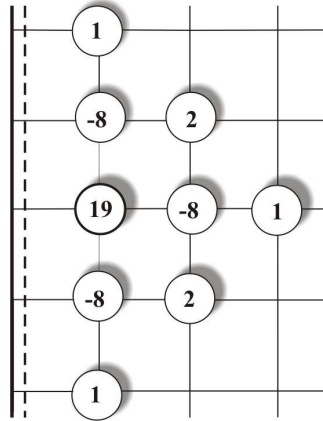
Z wyrażenia (2.60) otrzymuje się:

$$\frac{w_k - 2w_{k-1} - w_{k-2}}{\Delta x^2} = 0 \quad (2.61)$$

Ponieważ zgodnie z zależnością (2.60)₁ $w_{k-1} = 0$, zachodzi:

$$w_{k-2} = -w_k \quad (2.62)$$

Postępując analogicznie jak poprzednio, uzyskuje się równanie różnicowe dla węzła „k” leżącego w pobliżu krawędzi swobodnie podpartej. Równanie to przyjmie postać zapisaną schematycznie na rysunku 2.21.



Rys. 2.21. Współczynniki w równaniu różnicowym węzła położonego w pobliżu krawędzi swobodnie podpartej płyty

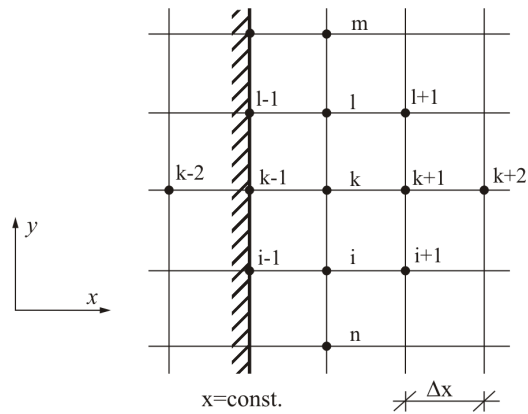
- Krawędź $x = \text{const.}$ **utwierdzona zupełnie** (rys. 2.22)

W tym przypadku warunki brzegowe są następujące:

$$w = 0, \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{k-1} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta w_{k-1}}{\Delta x} = 0 \quad (2.63)$$

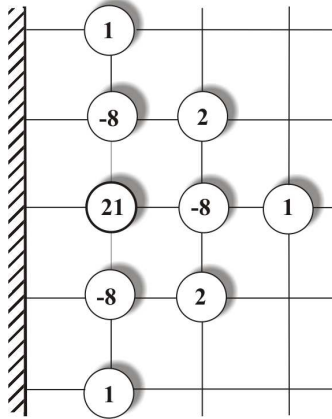
Z warunku (2.63) otrzymuje się:

$$\frac{w_k - w_{k-2}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_{k-2} = w_k \quad (2.64)$$



Rys. 2.22. Krawędź zamocowana płyty z naniesioną siatką dyskretyzacyjną

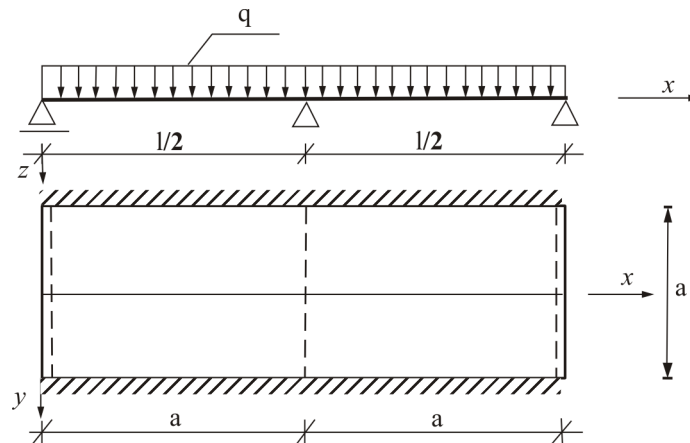
Schematyczny zapis równania różnicowego ugięcia płyty w węźle „k”, po uwzględnieniu zależności (2.64), przedstawia rysunek 2.23.



Rys. 2.23. Współczynniki w równaniu różnicowym węzła położonego w pobliżu krawędzi zamocowanej

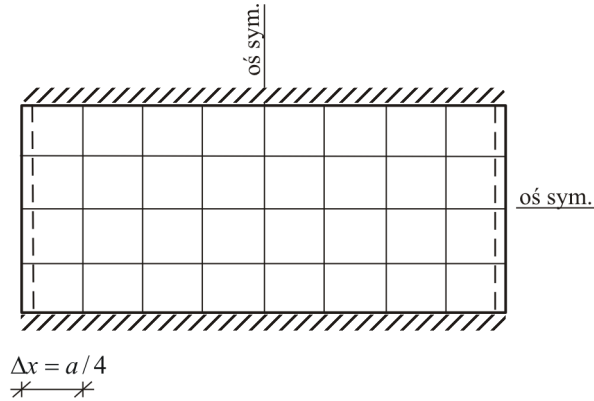
2.5.1. Przykład – płyta obciążona równomiernie na całym obszarze

Dana jest płyta o schemacie statycznym i obciążeniu jak na rys. 2.24. Do wyznaczenia są ugięcia płyty.



Rys. 2.24. Płyta obciążona równomiernie na całym obszarze

W celu rozwiązania zadania metodą różnic skończonych dzieli się obszar płyty siatką dyskretyzacyjną o boku oczka $\Delta x = a/4$ (rys. 2.25).



Rys. 2.25. Przyjęta dyskretyzacja płyty

Z uwagi na symetrię geometrii i obciążenia obliczenia ograniczone będą do ćwiartki płyty, zgodnie z rys. 2.26.

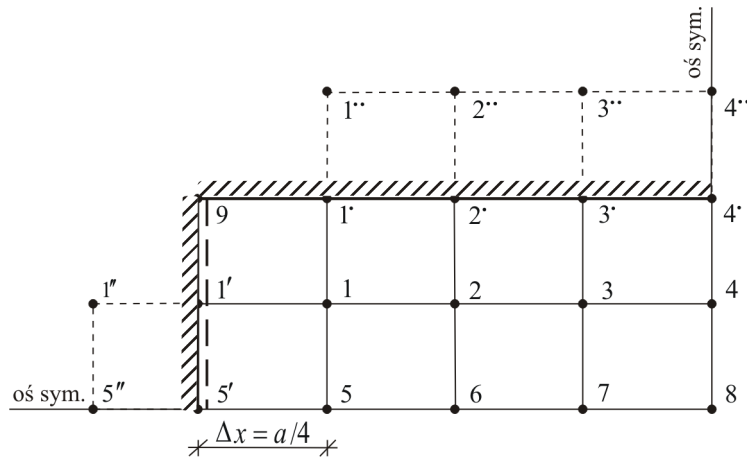
Warunki brzegowe

- Krawędź swobodnie podparta $x = 0$, $x = a$

$$w = 0$$

$$M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.65)$$

ale wzdłuż krawędzi $w = 0$ więc $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$



Rys. 2.26. Przyjęty do obliczeń obszar płyty

Z zależności (2.65) wynikają następujące równości:

$$\begin{aligned}
 w_9 &= w_{1'} = w_{5'} = w_4 = w_{4'} = w_8 = 0 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{1'} = 0 &\Rightarrow \frac{w_1 - 2w_{1'} + w_{1''}}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow w_{1''} = -w_1 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{5'} = 0 &\Rightarrow \frac{w_5 - 2w_{5'} + w_{5''}}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow w_{5''} = -w_5 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{4'} = 0 &\Rightarrow \frac{w_3 - 2w_{4'} + w_{4''}}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow w_{4''} = 0 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{8} = 0 &\Rightarrow \frac{w_7 - 2w_8 + w_{7'}}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow w_{7'} = 0
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

- Krawędź zamocowana $y = -a$

$$\begin{aligned}
 w &= 0 \\
 \varphi_y &= \frac{\partial w}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= w_2 = w_3 = 0 \\
 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_1 &= 0 \Rightarrow \frac{w_1 - w_1}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_1 = w_1 \\
 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_2 &= 0 \Rightarrow \frac{w_2 - w_2}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_2 = w_2 \\
 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_3 &= 0 \Rightarrow \frac{w_3 - w_3}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_3 = w_3
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Równania różnicowe

- Węzeł „1”

$$19w_1 - 8w_2 + w_3 - 8w_1 + w_1 - 8w_5 + w_1 + 2w_2 + 2w_6 = \frac{q_1 \Delta x^4}{D}$$

- Węzeł „2”

$$\begin{aligned}
 20w_2 - 8w_1 + w_2 + w_3 + w_6 + 2(w_1 + w_3 + w_5 + w_7) + w_1 + w_4 + \\
 + w_2 + w_2 = \frac{q_5 \Delta x^4}{D}
 \end{aligned}$$

- Węzeł „5”

$$19w_5 - 8w_6 + w_7 - 8w_1 + w_1 + 2w_2 + 2w_2 = \frac{q_5 \Delta x^4}{D}$$

- Węzeł „6”

$$\begin{aligned}
 20w_6 - 8(w_5 + w_7 + w_2 + w_2) + 2(w_1 + w_3 + w_1 + w_3) + w_5 + w_8 + \\
 + w_2 + w_2 = \frac{q_6 \Delta x^4}{D}
 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu w powyższych równaniach warunków brzegowych (2.66) i (2.68), równania różnicowe w poszczególnych węzłach przyjmą ostateczną postać:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Węzeł} & '1' \quad 21w_1 - 8w_2 - 8w_5 + 2w_6 = \frac{q_1 \Delta x^4}{D} \\
 \text{Węzeł} & '2' \quad -8w_1 + 22w_2 + 2w_5 - 8w_6 = \frac{q_2 \Delta x^4}{D} \\
 \text{Węzeł} & '5' \quad -16w_1 + 4w_2 + 19w_5 - 8w_6 = \frac{q_5 \Delta x^4}{D} \\
 \text{Węzeł} & '6' \quad 4w_1 - 16w_2 - 8w_5 + 20w_6 = \frac{q_6 \Delta x^4}{D}
 \end{array} \tag{2.69}$$

gdzie: $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = q$

Po rozwiązaniu układu (2.69) otrzymuje się:

$$\begin{array}{l}
 w_1 = 0,53 \frac{q \Delta x^4}{D} \\
 w_2 = 0,8 \frac{q \Delta x^4}{D} \\
 w_5 = 0,67 \frac{q \Delta x^4}{D} \\
 w_6 = 0,86 \frac{q \Delta x^4}{D}
 \end{array} \tag{2.70}$$

2.6. Wariacyjne ujęcie metody różnic skończonych (WMRS)

W odróżnieniu od klasycznej metody różnic skończonych, ujęcie wariacyjne bazuje nie na danym równaniu różniczkowym, ale na odpowiednim funkcjonał. Istota metody polega teraz na zastąpieniu występujących w funkcjonał pochodnych odpowiednimi ilorazami różnicowymi. W ten sposób funkcjonał zostaje sprowadzony do funkcji wielu zmiennych, której argumentami są dyskretne wartości poszukiwanej funkcji w wybranych punktach siatki podziału.

W przypadku zagadnień jednowymiarowych (1-D) dany odcinek dzieli się na krótsze odcinki, natomiast w zagadnieniach dwuwymiarowych (2-D) dany obszar na podobzary. Całkowanie funkcjonału odnoszące się do całego obszaru zamienia się na odpowiednie sumy. Układ równań algebraicznych, wyznaczający wartości funkcji w poszczególnych węzłach siatki otrzymuje się z warunku ekstremum funkcji wielu zmiennych:

$$\frac{\partial F(u_i)}{\partial u_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.71)$$

gdzie $F(u_i)$ – funkcja wielu zmiennych, otrzymana przez zastąpienie w funkcjonałe $F(u)$ pochodnych odpowiednimi ilorazami różnicowymi, u_i – poszukiwane wielkości dyskretne, n – liczba niewiadomych układu.

2.6.1. Przykład – belka obciążona siłą skupioną

Dana jest belka obustronnie utwierdzona jak w przykładzie 2.4.1. (rys. 2.8). Do wyznaczenia jest ugięcie belki.

Zadanie rozwiązane będzie przy wykorzystaniu wariacyjnego ujęcia metody różnic skończonych. Punktem wyjścia jest funkcjonał energii sprężystej belki:

$$E_b = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx \quad (2.72)$$

w którym EJ oznacza sztywność belki, $w(x)$ - funkcję ugięcia belki.

Przyjęto analogiczną jak w Przykładzie 2.2.1. dyskretyzację belki (rys. 2.10).

Przyjęto ponadto, że $EJ = const.$ na całej długości belki.

Funkcjonał (2.72) przyjmie wówczas postać:

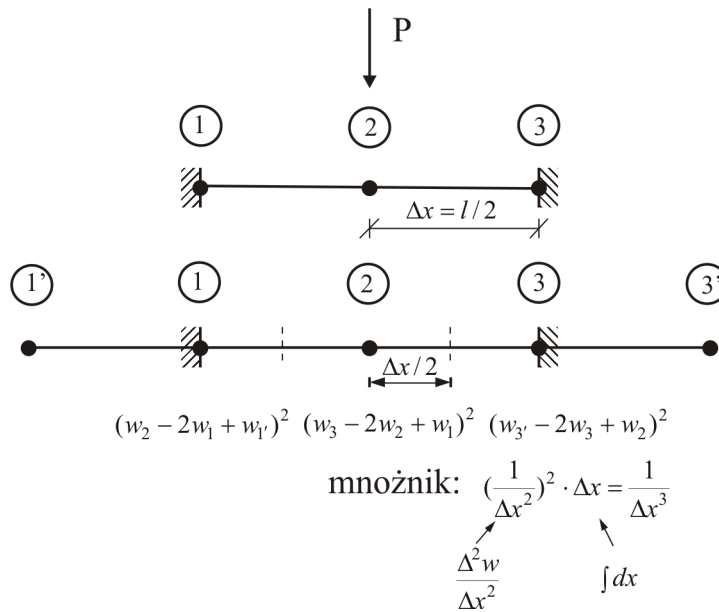
$$E_b = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx \quad (2.73)$$

Występująca w wyrażeniu (2.73) druga pochodna zastąpiona zostaje dla każdego punktu podziału odpowiednim ilorazem różnicowym. Ilorazy te dla kolejnych węzłów przedstawiono na rys. 2.27.

W wariacyjnym ujęciu metody różnic skończonych należy spełnić w przyjętym układzie niewiadomych tylko geometryczne warunki brzegowe,

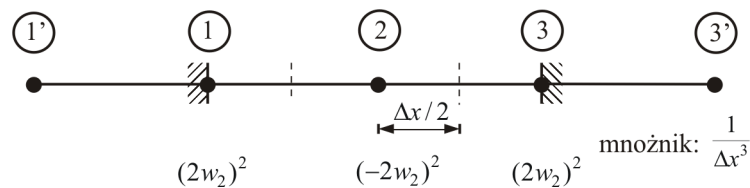
warunki statyczne spełnione są w sposób naturalny przez sam funkcjonal. Dla rozważanego sposobu podparcia warunki brzegowe są następujące:

$$\begin{aligned}
 w_1 = w_5 = 0 \\
 \varphi_x|_1 = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx}|_1 = 0 \Rightarrow \frac{w_2 - w_1}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 \\
 \varphi_x|_3 = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx}|_3 = 0 \Rightarrow \frac{w_3 - w_2}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_3 = w_2
 \end{aligned}
 \tag{2.74}$$



Rys. 2.27. Ilorazy różnicowe dla węzłów siatki podziału

Po uwzględnieniu związków (2.74) w kolejnych węzłach (rys. 2.27), schematy różnicowe przyjmą w rezultacie postać przedstawioną na rys. 2.28.



Rys. 2.28. Ilorazy różnicowe po uwzględnieniu warunków brzegowych

Całkowita energia potencjalna układu jest sumą energii sprężystej belki i pracy sił zewnętrznych:

$$\Pi_C = E_b + L \quad (2.75)$$

gdzie L jest potencjałem sił zewnętrznych. Potencjał ten wyraża się następująco:

$$L_z = -\int_0^l qw(x) dx \quad (2.76)$$

gdzie q jest intensywnością obciążenia równomiernie rozłożonego.

W analizowanym przykładzie siłę skupioną zastępuje się równoważnym obciążeniem ciągłym jak w Przykładzie 2.4.1. Zatem $q_2 = P/\Delta x$, a praca obciążenia zewnętrznego wyniesie:

$$L_2 = -\int q_2 w_2 dx = -\int \frac{P}{\Delta x} w_2 dx \quad (2.77)$$

Zapisując wyrażenie (2.75) w sposób dyskretny otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \frac{1}{2} EJ \sum_l \left[\left(\frac{2w_2}{\Delta x^2} \right)^2 0,5 + \left(\frac{-2w_2}{\Delta x^2} \right)^2 + \left(\frac{2w_2}{\Delta x^2} \right)^2 0,5 \right] \Delta x - \\ & - \frac{P}{\Delta x} \sum_q w_2 \Delta x \end{aligned} \quad (2.78)$$

W wyrażeniu powyższym przez \sum_l oraz \sum_q oznaczono umownie sumowanie odpowiednio po długości belki i długości obciążenia ciągłego.

Równania algebraiczne wyznaczające ugięcia kolejnych węzłów otrzymuje się z warunku (2.71), który obecnie przybierze postać:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial w_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.79)$$

gdzie n jest liczbą węzłów o niezerowych ugięciach.

W rozważanym przykładzie $n=1$ i zależność (2.79) sprowadzi się do jednego równania na wyznaczenie ugięcia w_2 . Równanie to ma postać:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial w_2} = \frac{1}{2} EJ \cdot \frac{1}{\Delta x^3} \cdot 16w_2 = P \quad (2.80)$$

Stąd:

$$w_2 = \frac{P\Delta x^3}{8EJ} = \frac{Pl^3}{64EJ} \quad (2.81)$$

Warto zwrócić uwagę, iż oczywiście uzyskuje się ten sam jak przy zastosowaniu klasycznej metody różnic skończonych wynik (przykład 2.4.1), jednak przy znacznie mniejszym nakładzie pracy rachunkowej.

Rozdział 3

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

3.1. Wprowadzenie

Metoda elementów skończonych (MES) powstała w latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia, choć jej początki można odnieść do pracy Couranta z 1942 roku. Zakres zastosowań metody koncentrował się początkowo głównie wokół zagadnień mechaniki konstrukcji oraz problemów inżynierii lądowej i przemysłu lotniczego. Ważnym przyczynkiem teoretycznym do rozwoju metody było wykazanie, że jest ona w rzeczywistości pewną odmianą znanej procedury Rayleigha-Ritza, bazującej na minimalizacji funkcjonału. Wykorzystanie procedury minimalizacji umożliwiło zastosowanie metody w innych niż mechanika konstrukcji dziedzinach. Zaczęto ją stosować do problemów opisanych równaniami Laplace'a i Poissona, tj. w mechanice cieczy, w zagadnieniach przepływu ciepła i innych. MES nabrała znamion ogólnej metody numerycznej rozwiązywania równań czy układu równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych.

Szczególnie dynamiczny rozwój MES datuje się od połowy lat 80. ubiegłego wieku, głównie w związku z szybkim rozwojem elektronicznej techniki obliczeniowej. W chwili obecnej MES jest powszechnie stosowaną metodą numeryczną, a w zagadnieniach mechaniki konstrukcji – wiodącą, na której bazuje zdecydowana większość profesjonalnych programów komputerowych (na przykład ANSYS, COSMOS/M, ABAQUS, ADINA). O tak dużej popularności metody zadecydowała zarówno prostota jej postaci matematycznej, jak również szereg korzystnych cech wyrażających się m.in.: możliwością obliczania obszarów o złożonych, a także krzywoliniowych brzegach,

stosowania różnych gęstości podziału na elementy czy też automatycznego uwzględniania warunków brzegowych.

Z matematycznego punktu widzenia MES stanowi uogólnienie metody Galerkin (bazującej na równaniu różniczkowym) i Ritza (bazującej na funkcjonale). W obu tych metodach przyjmuje się przybliżone rozwiązanie równania operatorowego (1.1) w postaci związku:

$$u(x, y, z) \cong \hat{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x, y, z) \quad (3.1)$$

gdzie $N = 1, 2, \dots, \infty$.

W metodzie elementów skończonych związek powyższy określony jest w obszarze elementu, a funkcje bazowe φ_i dobiera się tak, aby zapewniona została ciągłość poszukiwanej funkcji wzdłuż brzegów elementów. Najczęściej funkcje te przyjmuje się w postaci wielomianów. Zapewnia to wraz z zastosowaniem jako elementów prostych brył (czworościany, sześciściany) lub prostych figur geometrycznych (trójkąty, czworokąty) prostotę i efektywność obliczeń metody.

3.2. Idea metody elementów skończonych

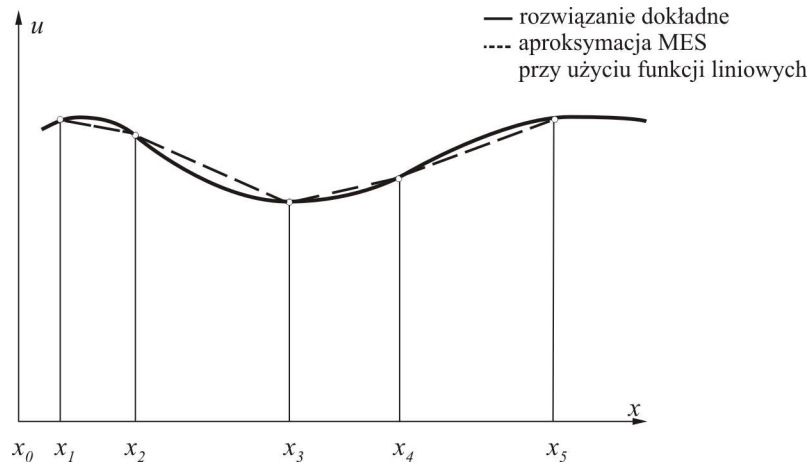
Zasadnicza koncepcja MES, dotycząca standardowego sformułowania metody, bazuje na założeniu, że dowolna funkcja ciągła może być aproksymowana przez **model dyskretny** składający się ze zbioru kawałkami ciągłych funkcji określonych na skończonej liczbie podobszarów. Funkcje kawałkami ciągłe określa się wykorzystując wartości funkcji ciągłej w skończonej liczbie punktów wewnątrz obszaru jej określoności.

Proces tworzenia modelu dyskretnego można przedstawić następująco:

- obszar jest podzielony na podobszary zwane elementami skończonymi, które połączone są ze sobą w węzłach i wspólnie odzwierciedlają kształt rozpatrywanego obszaru
- wartości poszukiwanej funkcji w węzłach uznaje się jako niewiadome, które mają być wyznaczone
- równanie różniczkowe opisujące problem brzegowy odniesione zostaje do elementu, a jego rozwiązanie aproksymowane w obszarze elementu za pomocą ciągłej funkcji przy użyciu wartości węzłowych.

W dalszej kolejności formułuje się równania dla elementów. Z chwilą kiedy są one określone, elementy zostają „scalone” ze sobą, co od strony fizycznej prowadzi do odtworzenia kształtu rozpatrywanego obszaru, a od strony matematycznej do uformowania globalnego układu równań umożliwiającego wyznaczenie wartości poszukiwanej funkcji w wybranych punktach (węzłach) obszaru. Rozwiązanie problemu staje się w efekcie kawałkami ciągłą

aproxymacją uzyskaną przez połączenie rozwiązań na wszystkich elementach. Typową aproxymację MES dla problemu jednowymiarowego przedstawiono na rys. 3.1.

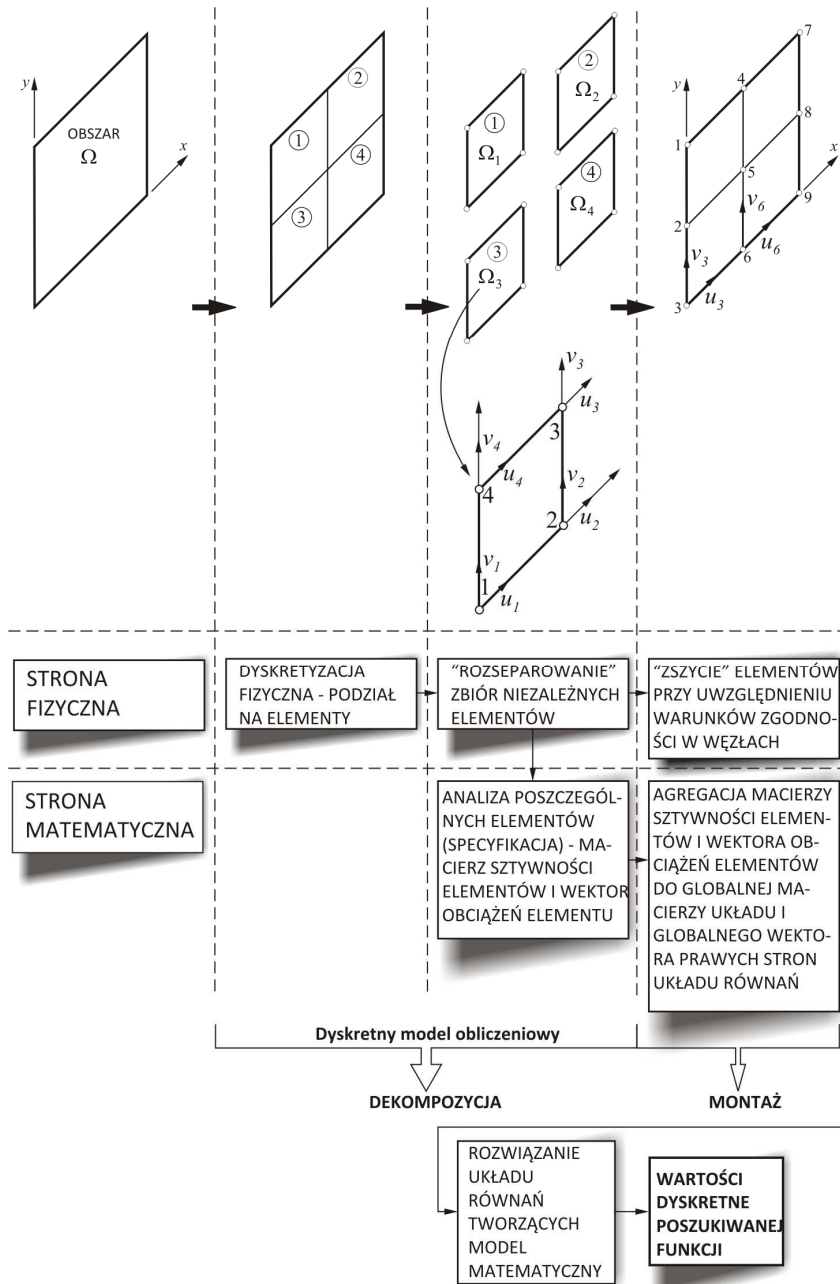


Rys. 3.1. Typowa aproxymacja MES rozwiązania zagadnienia jednowymiarowego

Ogólnie tok postępowania w MES można ująć w następujący sposób:

1. Podział obszaru na elementy połączone ze sobą w punktach węzłowych.
2. Specyfikacja elementu. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia dla każdego elementu:
 - wybór metody przybliżonej (Ritza, Galerkina)
 - dobór funkcji interpolujących
 - sformułowanie dla wybranej metody i interpolacji układu równań algebraicznych elementu
3. Agregacja. Budowa na podstawie równań elementów jednego dla całego obszaru układu równań algebraicznych z uwzględnieniem warunków ciągłości między elementami.
4. Uwzględnienie w globalnym układzie równań warunków brzegowych.
5. Rozwiązanie otrzymanego układu równań. Uzyskanie dyskretnych wartości poszukiwanej wielkości.
6. Obliczenie na podstawie wyznaczonych wartości dyskretnych innych wielkości od nich zależnych.

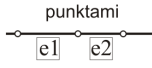




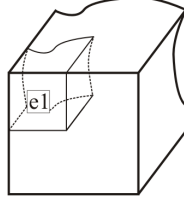

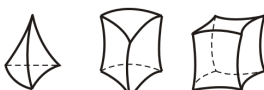
Przedstawiony sposób postępowania można w sposób schematyczny zobrazić jak na rys.3.2.



Rys. 3.2. Tok postępowania w MES

3.3. Dyskretyzacja

Dyskretyzacja obejmuje podział obszaru na podobszary zwane elementami skończonymi i przypisanie im zbioru węzłów. Element skończony jest całkowicie zdefiniowany, jeżeli jednoznacznie określona jest jego geometria (wielkość, kształt), zbiór węzłów oraz parametry węzłowe (nieznane w węzle). Podziału na elementy skończone dokonuje się w sposób schematycznie przedstawiony na rys. 3.3.

OBSZAR	PODZIAŁ	ELEMENT	PRAKTYCZNIE STOSOWANY KSZTAŁT
1-D $(n_w=1)$	punktami 	Jednowymiarowy (belki, ramy, kratownice, łuki)	
2-D $(n_w=2)$	liniami prostymi (lub krzywymi) 	Powierzchniowy (płyty, tarcze, powłoki)	o bokach prostych  o bokach zakrzywionych 
3-D $(n_w=3)$	powierzchniami 	Przestrzenny (konstrukcje masywne, ośrodek gruntowy)	o ścianach prostych  o ścianach zakrzywionych 

Rys. 3.3. Sposób dokonywania podziału na elementy

Podział obszaru na elementy uwarunkowany jest geometrią obszaru oraz przewidywanym przebiegiem poszukiwanej funkcji. Tradycyjnie w miejscach, w których istnieje możliwość wystąpienia nagłych zmian poszukiwanej funkcji (otwory, brzegi obszaru, regiony lokalnie obciążone, styki materiałów o różnych własnościach) należy zagęścić siatkę podziału na elementy. Takie podejście,

najczęściej stosowane, znane jest jako tzw. wersja h metody. Bardziej nowoczesne podejścia do tego problemu polegają na podwyższeniu rzędu wielomianu aproksymacyjnego elementów (metoda p) lub na zmianie usytuowania węzłów w elemencie (metoda r). Możliwe są także kombinacje wyżej wymienionych metod, czyli stosowanie w rejonach nagłych zmian poszukiwanej funkcji MES w ujęciu metody hp , hr lub hpr .

Uzyskanemu w wyniku podziału obszaru na podobszary elementowi przypisuje się zbiór punktów węzłowych, które w MES nie mają charakteru punktu geometrycznego. Węzeł może przemieszczać się w przestrzeni, a także doznawać obrotu. W węźle skoncentrowana jest niejako pełna informacja o zachowaniu się elementu i jego własnościach. Teoretycznie metoda nie narzuca żadnych ograniczeń odnośnie umiejscowienia węzłów w elemencie. Praktycznie jednak z uwagi na racjonalizację obliczeń stosuje się w kolejności węzły:

- wierzchołkowe (stosowane zawsze)
- krawędziowe
- ścienne
- wewnętrzne

Przy „rozseparowaniu” elementów węzły wierzchołkowe, krawędziowe i ścienne zostają rozdzielone na węzły przynależne do poszczególnych elementów. Montaż elementów wymaga, aby zachodziła zgodność wielkości węzłowych wszystkich elementów w węźle wspólnym, z uwagi na konieczność zapewnienia ciągłości funkcji (ewentualnie jej pochodnych) między elementami. Obrazowo przedstawia to rys. 3.4.

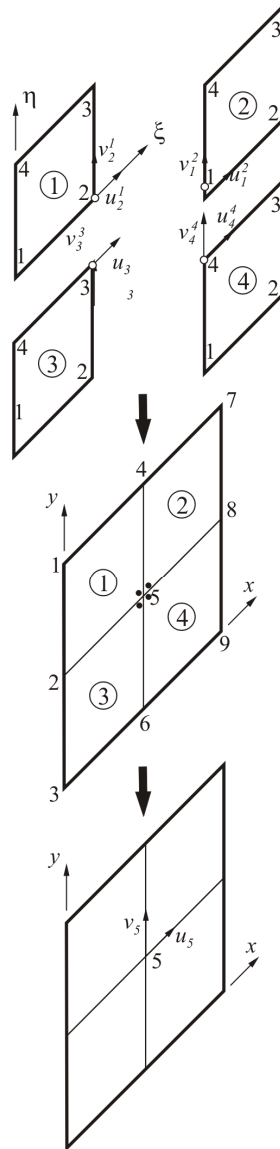
Montaż elementów wymaga więc (rys. 3.4) spełnienia warunków:

$$\begin{aligned} u_3^3 &= u_4^1 = u_1^2 = u_2^1 = u_5 \\ v_3^3 &= v_4^4 = v_2^1 = v_1^2 = v_5 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Kolejnym krokiem do zdefiniowania elementu jest określenie niewiadomych w węźle, czyli przypisanie węźlowi wielkości uogólnionych poszukiwanej funkcji. Liczba niewiadomych w węźle określana jest mianem stopni swobody węzła (SSW) i związana jest z przyjętym modelem fizycznym i matematycznym rozpatrywanego zagadnienia.

Istotnym aspektem dyskretyzacji jest również numeracja węzłów i elementów. Teoretycznie może ona przebiegać w sposób dowolny. Dla danego obszaru i podziału wszystkie możliwe numeracje węzłów prowadzą do globalnego układu równań o tych samych wymiarach i o tej samej liczbie członów niezerowych. Jednak numeracja węzłów i elementów wpływa na szerokość pasma globalnej macierzy układu i na rozkład elementów zerowych

w paśmie, a więc zarówno na rezerwację pamięci, jak i na czas rozwiązywania układu równań.

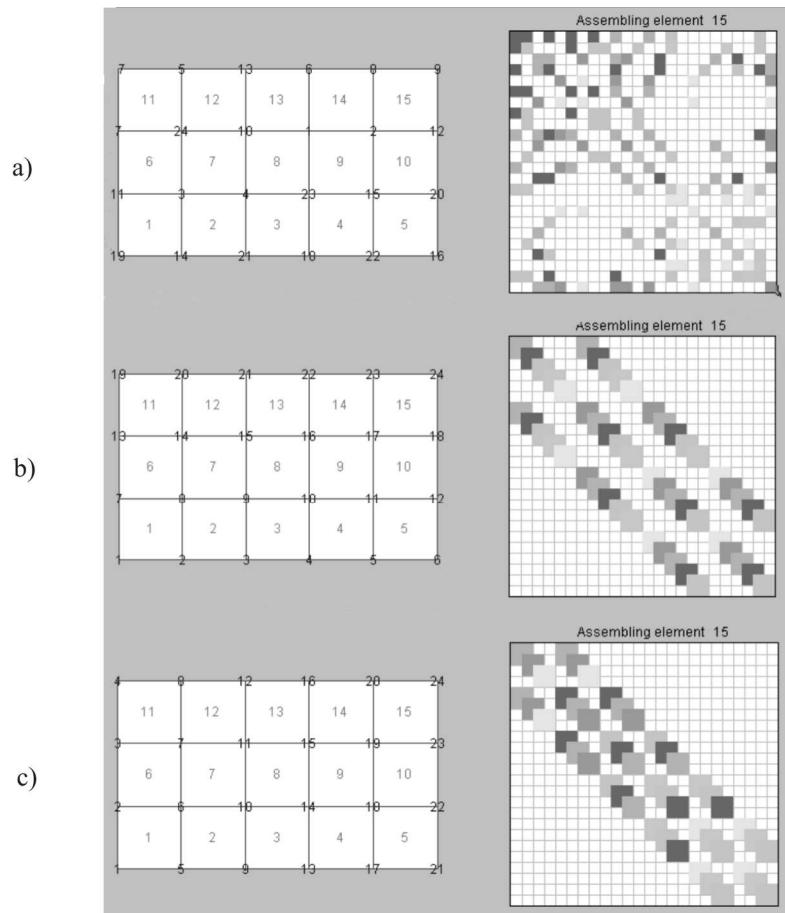


Rys. 3.4. Rozseparowanie i montaż elementów skończonych przy uwzględnieniu warunków „zszycia” elementów

Ogólnie można wskazać, że numeracja węzłów przebiegająca wzdłuż krótszego wymiaru danego obszaru prowadzi do zmniejszenia szerokości pasma macierzy

globalnej. Wpływ numeracji węzłów na rozkład elementów globalnej macierzy układu i szerokość półpasma przedstawiono przykładowo dla obszaru prostokątnego na rys. 3.5.

Wspomniany problem posiada jednak szerszy aspekt i najczęściej przy rozwiązywaniu dużych zadań buduje się specjalne programy generujące siatkę podziału na elementy (tzw. pre-processing).



Rys. 3.5. Wpływ numeracji węzłów na strukturę globalnej macierzy sztywności układu: a) numeracja dowolna, b) numeracja wzdłuż dłuższego boku, c) numeracja wzdłuż krótszego boku (Nikishkov G. P., <http://www.u-aizu.ac.jp/~niki>)

3.4. Klasyfikacja elementów skończonych

Z liczbą węzłów w elemencie wiąże się stopień wielomianu użytego do aproksymacji poszukiwanej wielkości w obszarze elementu. Im większa liczba węzłów, tym wyższy stopień wielomianu, a tym samym dokładniejsza aproksymacja. Zarazem jednak większa globalna liczba węzłów układu w sposób bezpośredni rzutuje na wymiar otrzymanego układu równań.

Stopień użytego wielomianu determinuje podział elementów skończonych na:

- **simpleksy** – wielomian składa się z członu stałego oraz członów liniowych; liczba współczynników wielomianu wynosi $n_w + 1$, gdzie n_w oznacza liczbę wymiarów przestrzeni
- **kompleksy** – wielomian posiada stałe i liniowe człony oraz człony wyższych rzędów; elementy tego typu mogą mieć ten sam kształt jak simpleksy, posiadają jednak dodatkowe węzły brzegowe lub wewnętrzne; liczba węzłów w kompleksie $LW > n_w + 1$
- **multipleksy** – wielomian zawiera człony stałe, liniowe i wyższego rzędu; w celu zapewnienia ciągłości funkcji między elementami brzegi elementu muszą być równoległe do osi układu odniesienia

Zastosowanie elementów wyższego rzędu (kompleksy, multipleksy) prowadzi do lepszego odzwierciedlenia rzeczywistego rozkładu poszukiwanej funkcji przy mniejszej w stosunku do elementów prostych (simpleksy) liczbie elementów, na który zostaje podzielony dany obszar.

W elementach czworobocznych (sześciocienne) występują dwa niezależne zbiory węzłów – jeden określa transformację współrzędnych (kształt elementu), drugi – wielomian interpolacyjny. Oznaczając liczbę węzłów w tych zbiorach odpowiednio LWK oraz LWW elementy skończone można sklasyfikować następująco:

- **elementy subparametryczne** – $LWK > LWW$
- **elementy izoparametryczne** – $LWK = LWW$
- **elementy superparametryczne** – $LWK < LWW$

Najczęściej stosuje się odwzorowanie izoparametryczne, które ma na celu lepsze zbliżenie się do rozwiązań ścisłych, umożliwia ponadto uwzględnienie zakrzywionego kształtu geometrycznego rozpatrywanego obszaru. Elementy izoparametryczne można stosować do zagadnień opisanych funkcjonalem, w którym występują co najwyżej pierwsze pochodne poszukiwanej wielkości. Elementy subparametryczne mogą być stosowane do szerszej niż izoparametryczne klasy zagadnień (w funkcjonale mogą występować dowolne pochodne), geometria jednak elementu jest ograniczona do możliwie prostych kształtów. Odwzorowanie superparametryczne ma charakter teoretyczny, tego

rodzaju elementy znajdują też sporadycznie zastosowanie na przykład w modelowaniu powłok średniej grubości.

Ze względu na liczbę stopni swobody w węźle elementy można podzielić na dwie klasy:

- **Lagrange’owska** – element posiada n_w stopni swobody w węźle. Stosowana, jeśli wielkościami węzłowymi są wartości poszukiwanej funkcji (w zagadnieniach mechaniki konstrukcji na przykład element kratowy)
- **Hermite’owska** – element posiada więcej niż n_w stopni swobody w węźle; stosowana, jeśli wielkościami węzłowymi są nie tylko wartości poszukiwanej funkcji, ale także jej pochodne (w mechanice konstrukcji na przykład element belkowy).

Z punktu widzenia zastosowań w mechanice konstrukcji elementy można również sklasyfikować następująco:

- **elementy podstawowe** (kratowy, prętowy, belkowy, ramowy),
- **elementy ciągłe** (płytowy, tarczowy, powłokowy),
- **elementy specjalne** (na przykład elementy umożliwiające uwzględnienie pęknięć, elementy nieskończone, elementy umożliwiające uwzględnienie struktury „plastra miodu”),
- **makroelementy** (złożone z elementów prostych).

Przykładowe elementy z wyżej wymienionych grup zostaną omówione w rozdziale 5.

Elementy można również uszeregować ze względu na ich sposób formułowania i specyficzne własności:

- **zablokowane izoparametrycznie** – wprowadzone w celu wyeliminowania niekorzystnych zjawisk pojawiających się w elementach izoparametrycznych (szczególnie niższego rzędu) – na przykład „lockingu” (ekstremalnej sztywności); parametrami węzłowymi są jedynie przemieszczenia
- **mieszane** – konstruowane na bazie funkcjonału Hellingera-Reissnera. Parametrami węzłowymi są przemieszczenia i naprężenia (wprowadzone głównie dla modelowania materiałów nieściśliwych oraz polepszenia zachowania się modeli przemieszczeniowych niższego rzędu)
- **hybrydowe** – z identyfikacją pola naprężeń wewnątrz i przemieszczenia na brzegach, formułowane w oparciu o energię komplementarną (szczególnie użyteczne w przypadkach, w których występują trudności w osiągnięciu ciągłości założonego pola przemieszczeń między elementami – na przykład cienkie płyty, powłoki)
- **o założonych odkształceniach** – rozkład pola odkształceń wewnątrz elementu założony według pewnej funkcji, w większości konstruowane na bazie twierdzenia Lagrange’a o minimum energii potencjalnej układu, szczególnie przydatne przy analizie płyt i powłok.

Programy profesjonalne w swoich pakietach oferują szereg typów elementów skończonych. Przykładowo program COSMOS/M zawiera około 200 rodzajów elementów skończonych. Warto podkreślić, że wybór elementu do analizy danego zagadnienia wiąże się bezpośrednio z akceptacją modelu matematycznego, na bazie którego element został skonstruowany i ma bezpośrednie implikacje w odniesieniu do uzyskanych rozwiązań.

3.5. Równania metody elementów skończonych

Punktem wyjścia do uzyskania równań MES jest transformowanie opisu problemu brzegowego w postaci równań różniczkowych (sformułowanie mocne) do sformułowania całkowego (globalnego). Przekształcenia tego można dokonać przy wykorzystaniu odpowiedniej zasady wariacyjnej lub metody ważonych residuów. W pierwszym przypadku bazuje się na słabym sformułowaniu analitycznym lub definiuje się problem minimalizacji pewnego funkcjonału. Metoda ważonych residuów przekształca natomiast lokalne sformułowanie zagadnienia brzegowego w całkową postać słabą.

Odpowiednie sformułowania problemu brzegowego, a więc sformułowanie mocne wyrażone poprzez równania różniczkowe i warunki brzegowe, sformułowanie wariacyjne wyrażone przez funkcjonał oraz sformułowanie słabe, określone jako uśrednione (ważone) równanie całkowite dla obszaru determinują zastosowanie odpowiednich metod przybliżonych rozwiązywania równań różniczkowych. Do przybliżonego rozwiązania zagadnienia sformułowanego jako problem minimalizacji funkcjonału wykorzystuje się metodę Rayleigha – Ritza, a w przypadku problemu sformułowanego w postaci formy słabej stosuje się najczęściej metodę Galerkina. W obu metodach przy podejściu analitycznym postuluje się rozwiązanie przybliżone w postaci związku (3.1), w którym φ_i są funkcjami bazowymi, których dobór związany jest z daną metodą. Funkcje te rozpięte na całym analizowanym obszarze muszą spełniać warunki brzegowe dane na jego brzegu. Przy podejściu numerycznym – MES zarówno przy wykorzystaniu sformułowania Rayleigha – Ritza jak i Galerkina zależność (3.1) odnosi się do poziomu elementu:

$$u^e(x, y, z) \approx \hat{u}^e(x, y, z) = \sum_I a_I \varphi_I, \quad (3.3)$$

gdzie I oznacza liczbę węzłów w elemencie (LWE). Przybliżenie ma w tym ujęciu postać lokalnej interpolacji i jest związane ze standardowym sposobem formułowania metody.

Dobór odpowiednich funkcji bazowych związany jest teraz z elementem, a więc jedynie z podobszarem rozpatrywanego obszaru. Funkcje bazowe mają zatem charakter lokalny, tzn. są różne od zera w rozważanym obszarze i przyjmują wartość zero w pozostałych. Stwarza to możliwość bardzo efektywnej aproksymacji rozwiązania na obszarze o praktycznie dowolnej geometrii.

Równania MES elementu dla odpowiednich metod można uzyskać w następujący sposób:

- **dla metody Ritz** – z warunku stacjonarności funkcjonału, do którego podstawiono rozwiązanie przybliżone (3.3)
- **dla metody Galerkin** – stosując następujący algorytm:
 - 1) mnożenie równań różniczkowych przez tzw. funkcje testowe
 - 2) całkowanie po obszarze
 - 3) zastosowanie całkowania przez części w celu zredukowania maksymalnego stopnia pochodnej w równaniu
 - 4) wprowadzenie warunków brzegowych do sformułowania

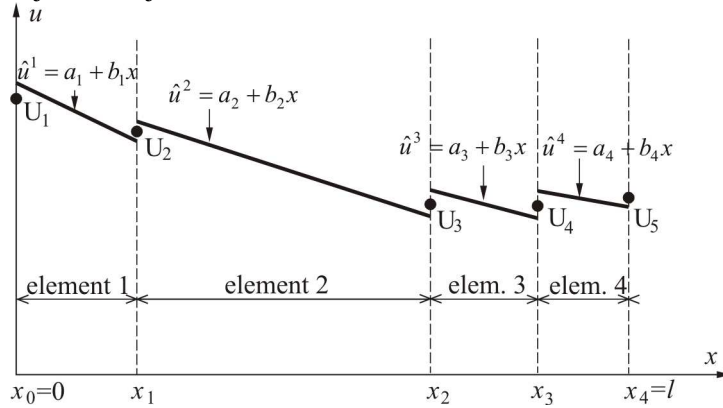
Dyskretyzując w dalszej kolejności poszukiwaną wielkość zgodnie z zależnością (3.3) oraz przyjmując takie same funkcje testowe i bazowe, w rezultacie na podstawie uzyskanej formy słabej otrzymuje się równania MES w ujęciu Galerkin. Wariant ten ma charakter ogólniejszy niż podejście Ritz, pozwala bowiem rozwiązywać także takie zagadnienia, dla których nie istnieje sformułowanie wariacyjne

3.6. Funkcje kształtu

Chcąc znaleźć zależność funkcyjną między na przykład dwiema wielkościami przy znajomości n wartości tych wielkości, wykorzystuje się metody aproksymacyjne. Przy skomplikowanym rozkładzie poszukiwanej funkcji podwyższa się stopień wielomianu aproksymacyjnego, uzyskując coraz to lepsze „dopasowanie” krzywej do wartości danych. Wzrost jednak stopnia wielomianu powoduje, że w pewnym momencie pojawiają się silne oscylacje krzywej i funkcja uzyskana w wyniku aproksymacji znacząco odbiega od rozkładu rzeczywistego. Korzystniej jest wówczas aproksymować funkcję nie w całym zadanym obszarze, ale w podobszarach.

Niech $u(x)$ będzie poszukiwaną funkcją jednej zmiennej, a $U_1 \div U_5$ znanymi jej wartościami w przedziale $\langle 0, l \rangle$. Dzieląc obszar określoności funkcji na podobszary i dokonując w nich aproksymacji funkcji wielomianami o niskim stopniu (na przykład liniowymi) uzyskuje się końcową aproksymację jak na rys. 3.6. Takie jednak podejście powoduje, że na granicy podobszarów (elementów) występują nieciągłości aproksymowanej funkcji. Nieciągłości te

można wyeliminować wykorzystując na przykład funkcje sklejane. Aby jednak wyznaczyć niewiadome współczynniki tych funkcji, należałoby rozwiązać układ ośmiu równań; ogólnie dla n przedziałów układ $2n$ równań w przypadku aproksymacji liniowej.



Rys. 3.6. Poszukiwana funkcja $u(x)$ aproksymowana wielomianami liniowymi $\hat{u}(x)$ w czterech podobszarach

Zdecydowanie prostszym sposobem jest opis funkcji \hat{u} w obszarze elementu przy użyciu wartości u na jego końcach, zgodnie z poniższą zależnością:

$$u^e \approx \hat{u}^e = N_1(\xi) u(\xi = 0) + N_2(\xi) u(\xi = 1) , \quad (3.4)$$

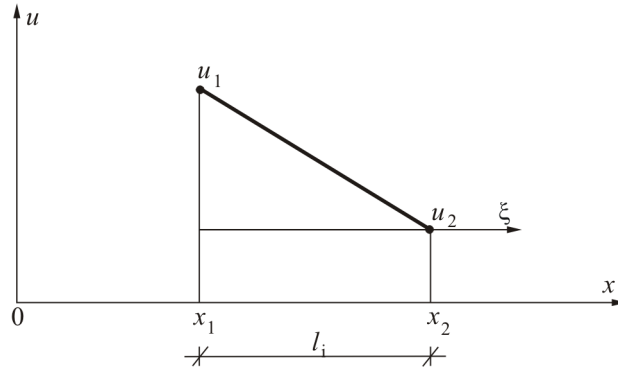
gdzie ξ jest współrzędną lokalną (lokalnym układem odniesienia), związaną z danym podobszarem (elementem), u_i są wartościami węzłowymi funkcji u w elemencie, natomiast N_i są pewnymi funkcjami omówionymi w dalszych rozważaniach.

Pomiędzy lokalnym układem odniesienia a układem globalnym (wspólnym dla wszystkich elementów) zachodzi zależność, którą obrazuje rys. 3.7. Zależność tę opisują wzory:

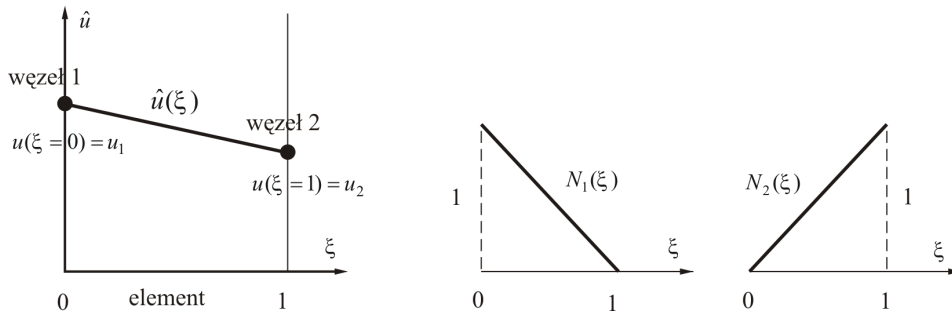
$$\begin{aligned} x(\xi) &= x_i + l_i \xi \\ \xi(x) &= \frac{1}{l_i} (x - x_i) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Z kolei rozkład funkcji \hat{u}^e w układzie lokalnym przedstawia rys. 3.8.

Występujące w wyrażeniu (3.4) oraz na rys. 3.8 wielkości $u(\xi=0)$ i $u(\xi=1)$ odpowiadają dla kolejnych elementów wartościom globalnym: dla elementu pierwszego U_1 i U_2 , dla elementu drugiego U_2 i U_3 itd. W układzie lokalnym odpowiadają wartościom węzłowym u_1 i u_2 .



Rys. 3.7. Związek między układem lokalnym a globalnym



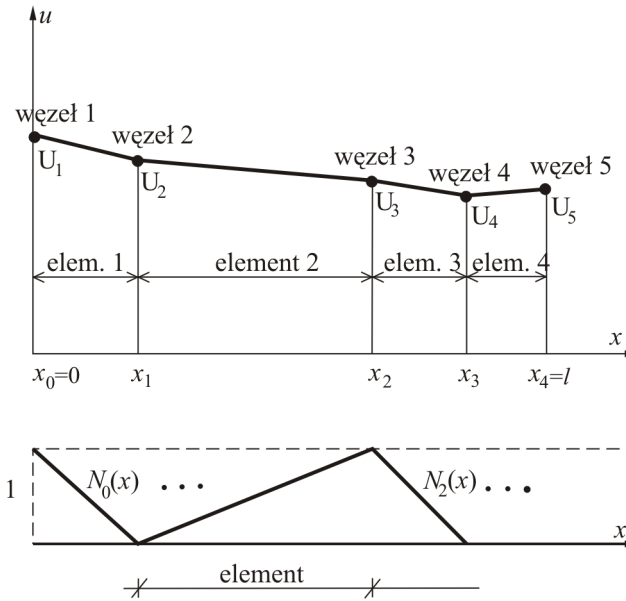
Rys. 3.8. Aproksymacja funkcji \hat{u} w obszarze elementu przy użyciu wartości węzłowych oraz funkcji N_1 i N_2

W ten sposób uzyskuje się aproksymację poszukiwanej funkcji $u(x)$, która na granicy elementów spełnia warunki ciągłości (rys. 3.9).

Funkcje $N_i(\xi)$ zwane są **funkcjami kształtu** (opisują kształt rozwiązania w obszarze elementu) i odgrywają w MES zasadniczą rolę. Charakter uzyskanego rozwiązania i stopień aproksymacji rozwiązania dokładnego zależą nie tylko od wymiaru i liczby elementów, ale znacząco od przyjętych funkcji kształtu. W układzie globalnym funkcje te zobrazowano na rys. 3.9. Przy ich wykorzystaniu globalny rozkład funkcji $\hat{u}(x)$ można przedstawić w następującej formie:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^N N_i(x) U_i, \quad (3.6)$$

co stanowi **podstawowy związek metody elementów skończonych**. W zależności (3.6) przez N oznaczono liczbę węzłów układu (LWU).



Rys. 3.9. Końcowa aproksymacja funkcji $u(x)$ w obszarze $\langle 0, l \rangle$ przy użyciu wartości węzłowych $U_1 \div U_5$ i funkcji $N_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, N = LWU = 5$

W zapisie lokalnym (rys. 3.8) funkcje $N_1(\xi)$ i $N_2(\xi)$ określone są wzorami:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - \xi \\ N_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (3.7)$$

Funkcje kształtu nie są zwykle definiowane bezpośrednio. Zamiast postaci funkcji kształtu określa się tzw. ansatz funkcje, najczęściej w postaci wielomianów liniowych lub kwadratowych. W rozważanym przypadku funkcja ansatz może być tylko wielomianem liniowym o następującej postaci:

$$\hat{u}^e(\xi) = a\xi + b \quad (3.8)$$

Podstawiając do zależności (3.8) współrzędne punktów węzłowych elementu otrzymuje się:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1 = b \\ u(1) &= u_2 = a + b \end{aligned} \quad (3.9)$$

Stąd natomiast wynika:

$$\begin{aligned} b &= u_1 \\ a &= u_2 - u_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

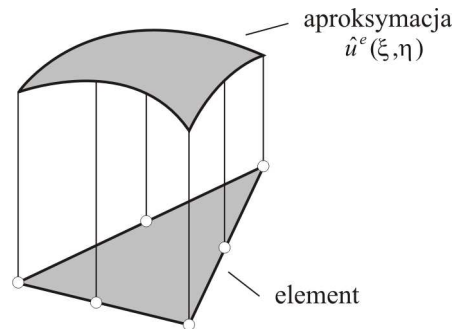
Zatem:

$$\hat{u}^e = (u_2 - u_1)\xi + u_1 = u_1(1 - \xi) + u_2\xi = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad (3.11)$$

W zapisie macierzowym zależność powyższa przybiera formę:

$$\hat{u}^e(\xi) = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (3.12)$$

Na podobnej zasadzie konstruuje się funkcje kształtu przy aproksymacji wielomianami wyższych rzędów. Na rys. 3.10 przedstawiono aproksymację $\hat{u}^e(\xi, \eta)$ dla funkcji ansatz będącej wielomianem kwadratowym.



Rys. 3.10. Element trójkątny i przyjęta aproksymacja funkcji $\hat{u}^e(\xi, \eta)$ wielomianem kwadratowym

Funkcje kształtu posiadają pewne charakterystyczne własności:

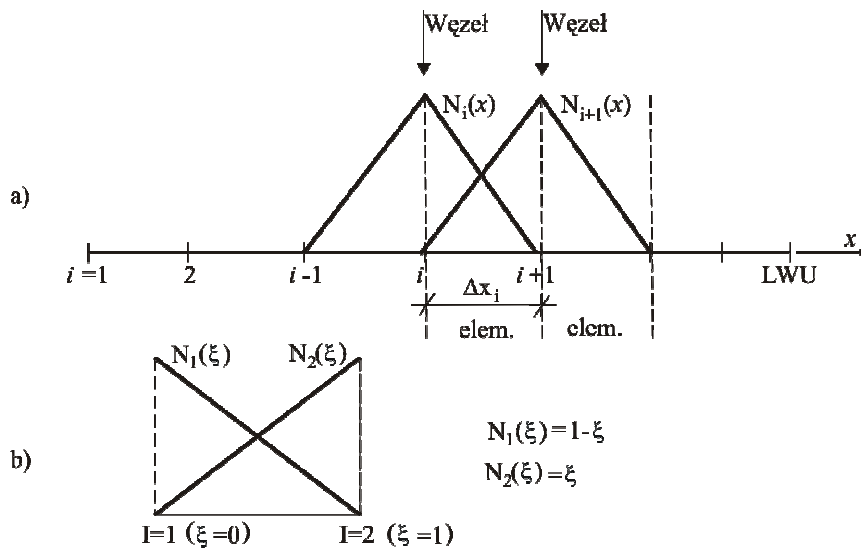
- każdy węzeł i posiada związaną z nim funkcję N_i
- $N_i = 1$ w węźle i
- N_i jest niezerowa tylko w węzłach połączonych z węzłem i
- suma funkcji kształtu elementu w jego dowolnym punkcie równa jest jedności

Funkcje kształtu powinny także spełniać warunek ciągłości i zupełności:

- **ciągłość:** ciągłość C^{n-1} na granicach między elementami
- **zupełność:** ciągłość C^n poszukiwanej wielkości w obszarze elementu, gdzie n jest najwyższym rzędem pochodnej występującej w równaniu całkowym.

Zapewnienie ciągłości jest ważne zarówno z fizycznego jak i matematycznego punktu widzenia. W pierwszym przypadku chodzi o uniemożliwienie powstawania szczelin między elementami i ich nakładek. Można wykazać, że przy spełnieniu warunków ciągłości i zupełności rozwiązanie MES zbiega się do rozwiązania ścisłego w miarę zagęszczania siatki podziału na elementy (w wersji h metody).

Najczęściej funkcje kształtu przyjmuje się w postaci wielomianów Lagrange'a, Hermite'a lub uzyskanych na podstawie trójkąta Pascala. Na rys 3.11 przedstawiono przykładowo liniowe funkcje kształtu Lagrange'a.



Rys. 3.11. Liniowe funkcje kształtu Lagrange'a: a) w układzie globalnym, b) w układzie lokalnym

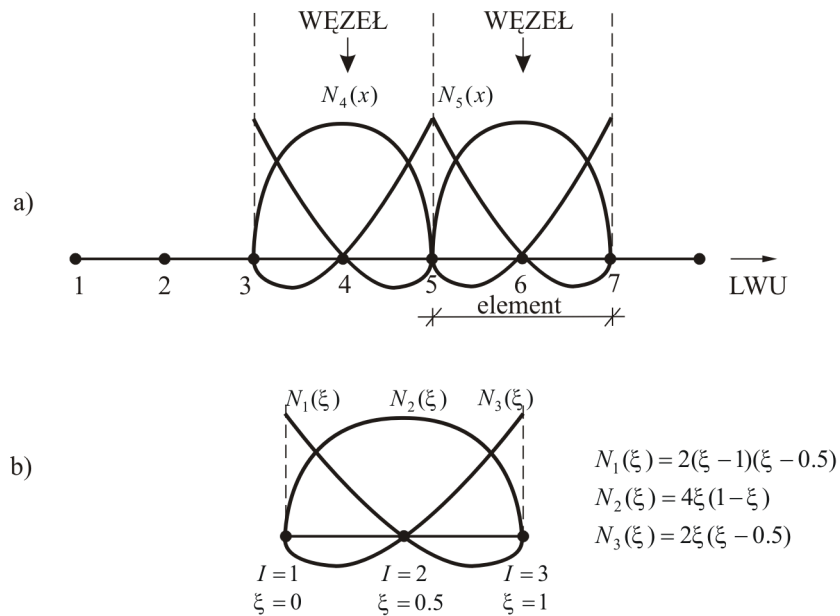
Funkcje te opisane są następującymi zależnościami:

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{w pozostałych przedziałach} \end{cases} \quad (3.13)$$

Ogólnie dla wielomianu n -tego stopnia:

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, (LW + 1) \quad (3.14)$$

Kwadratowe funkcje kształtu Lagrange'a zobrazowano z kolei na rys. 3.12.



Rys. 3.12. Kwadratowe funkcje kształtu Lagrange'a:
a) w układzie globalnym, b) w układzie lokalnym

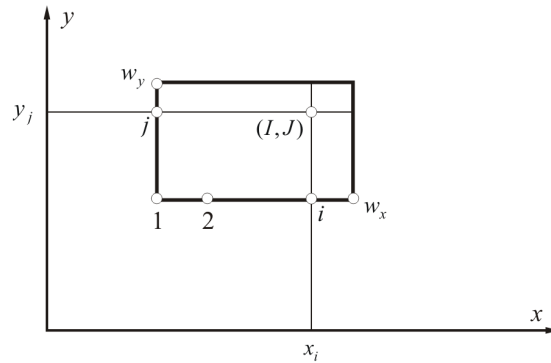
W przypadku zagadnienia dwuwymiarowego, dla elementu prostokątnego funkcje kształtu Lagrange'a dla i -tego węzła oblicza się z zależności:

$$N_i(x, y) = N_I(x)N_J(y) \quad (3.15)$$

gdzie:

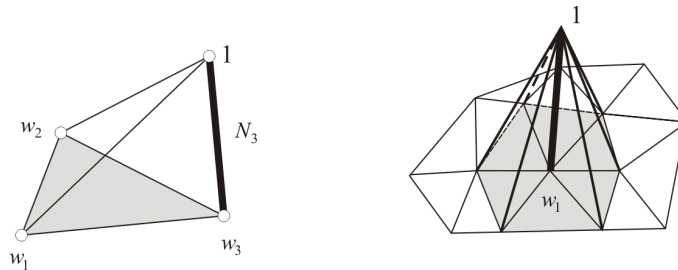
$$N_I = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^{W_x} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad N_J = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq J}}^{W_y} \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \quad (3.16)$$

są wielomianami dla linii poprowadzonych przez węzeł i , j (rys. 3.13) i równoległych do osi układu odniesienia.



Rys. 3.13. Element prostokątny z liczbą węzłów W_x w kierunku osi x i W_y w kierunku osi y

Funkcje kształtu Lagrange'a dla elementu trójkątnego obrazuje rysunek 3.14.



Rys. 3.14. Liniowe funkcje kształtu Lagrange'a dla elementu trójkątnego: a) w układzie lokalnym, b) w układzie globalnym

Omówione funkcje kształtu Lagrange'a zapewniają ciągłość poszukiwanej wielkości (ciągłość C^0) na granicy elementów. Niezależnie jednak od stopnia przyjętego wielomianu ciągłość pochodnej nie może być osiągnięta. W przypadkach, w których zachodzi konieczność ciągłości także pochodnej stosuje się funkcje kształtu oparte na wielomianach Hermite'a.

Przedstawione funkcje kształtu są tzw. standardowymi funkcjami kształtu, związanymi z interpolacją w obszarze elementu przy wykorzystaniu wartości węzłowych poszukiwanej wielkości. Ich stosowanie ograniczone jest do wersji tradycyjnej h MES, w której do aproksymacji wykorzystuje się najczęściej wielomiany niskiego stopnia (liniowe lub kwadratowe), a poprawę dokładności rozwiązania uzyskuje się przede wszystkim poprzez zagęszczenie (sukcesywne) siatki podziału. Poprawę tę można również uzyskać poprzez zwiększenie rzędu wielomianu aproksymacyjnego, co w wersji h wiąże się z wprowadzeniem dodatkowych węzłów w elemencie, a co za tym idzie rekonstrukcją istniejących już przy mniejszej liczbie węzłów funkcji kształtu.

Na innej niż standardowe funkcje kształtu koncepcji oparte są natomiast tzw. **hierarchiczne funkcje kształtu**. Stosowane są one w wersji p MES. W wersji tej poprawę dokładności rozwiązania uzyskuje się przez zwiększanie (sukcesywne) rzędu aproksymacji poszukiwanej wielkości w obszarze elementu, przy stałej siatce podziału na elementy. Tak więc w odróżnieniu od wersji h , w wersji p zakłada się, że element siatki pozostaje niezmienny (zarówno co do wymiaru jak i usytuowania), natomiast rząd aproksymacji wewnątrz każdego elementu może ulegać zmianie.

W pierwszej kolejności przyjmuje się aproksymację rozwiązania rzędu p (na przykład $p=1$, aproksymacja liniowa) przy użyciu standardowych funkcji kształtu. Poprawę dokładności rozwiązania otrzymuje się przez dodanie do istniejących, nowych funkcji kształtu w taki sposób, że wzrost z p do $(p+1)$ rzędu aproksymacji nie zmienia ani funkcji kształtu dla rzędu p , ani stopni swobody elementu (a więc nie zmienia liczby węzłów w elemencie). Funkcje kształtu spełniające ten warunek nazywane są hierarchicznymi. Podlegają one zależności:

$$\Phi^{(p=1)} \subset \Phi^{(p=2)} \subset \dots \subset \Phi^{(p=\infty)}, \quad (3.17)$$

gdzie $\Phi^{(p)}$ oznacza zbiór funkcji kształtu rzędu p .

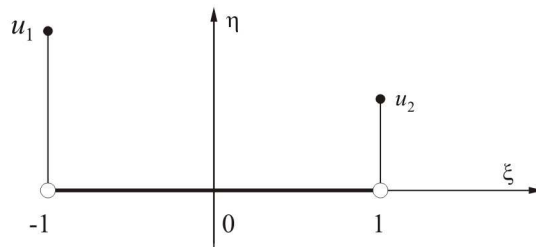
Używając hierarchicznych funkcji kształtu otrzymuje się aproksymację nieznanego rozwiązania w formie analogicznej jak w przypadku standardowych funkcji kształtu (por. zależność 3.6):

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^N N_i(x) U_i, \quad (3.18)$$

przy czym N nie jest teraz związane – jak w przypadku wersji h – z liczbą węzłów układu (LWU). Poza tym stopnie swobody U_i odpowiadające funkcjom kształtu wyższych rzędów nie mają obecnie znaczenia fizycznego, to znaczy nie mogą być interpretowane jako wartości rozwiązania w węzłach. Są one natomiast wartościami pewnych wyższych pochodnych rozwiązania między węzłami elementu.

Przykładowo, dla zagadnienia jednowymiarowego i elementu o dwóch węzłach (rys. 3.15) funkcje kształtu mają postać:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ N_S^p(\xi) &= \frac{1}{p!}(\xi^p - 1) \quad \text{dla } p = 2, 4, 6, \dots \\ N_S^p(\xi) &= \frac{1}{p!}(\xi^p - \xi) \quad \text{dla } p = 3, 5, 7, \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$



Rys. 3.15. Element jednowymiarowy, dwuwęzłowy o parametrach węzłowych u_1 i u_2 w lokalnym układzie odniesienia $-1 \leq \xi \leq 1$

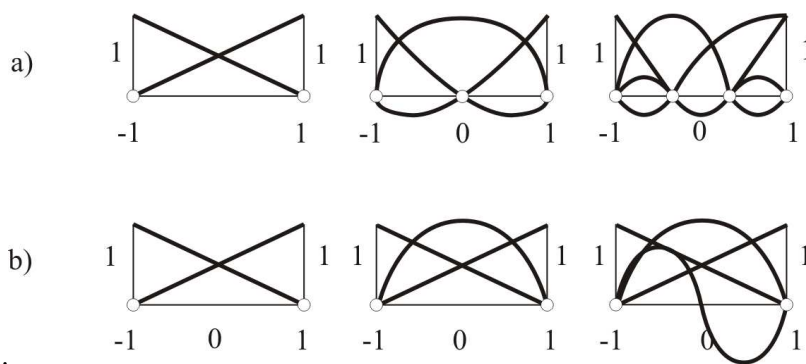
Poszukiwaną funkcję $u(x)$ można w obszarze elementu przedstawić następująco:

$$u^e(\xi) \approx \hat{u}^e = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 + \sum_{p=2, \dots} N_S^p \frac{d^p u}{d\xi^p}, \quad (3.20)$$

gdzie: N_1 i N_2 są standardowymi (Lagrange'owskimi, por. zależność. (3.7)) funkcjami kształtu, u_1 i u_2 są parametrami węzłowymi, funkcje N_S^p są funkcjami kształtu wyższych rzędów, odniesionymi do środka elementu.

Przykładowe hierarchiczne funkcje kształtu przedstawiono na rys. 3.16, na którym także celem porównania zobrazowano standardowe funkcje kształtu.

Wersja p z hierarchicznymi funkcjami kształtu wykorzystywana jest jako podstawa adaptacyjnej formy MES. Podejście adaptacyjne (możliwe także w oparciu o wersję h) ukierunkowane jest na osiągnięcie dużej (założonej) dokładności rozwiązania w możliwie najkrótszym czasie. Wymaga to stosowania zaawansowanych technik związanych z kontrolą błędów i zautomatyzowaniem procesu zmiany modelu MES w tych rejonach analizowanego obszaru, w których błąd ten przekracza wartość założoną.



Rys. 3.16. Funkcje kształtu dla elementu jednowymiarowego: a) standardowe oparte na wielomianach Lagrange'a, b) hierarchiczne oparte na wielomianach Legendre'a

3.7. Agregacja

Globalny układ równań MES, umożliwiający wyznaczenie dyskretnych wartości poszukiwanej funkcji (i ewentualnie jej pochodnych) w węzłach można zapisać w postaci:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Q} , \quad (3.21)$$

gdzie \mathbf{K} jest tzw. macierzą sztywności układu:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \text{sym.} & & \ddots & \vdots \\ & & & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

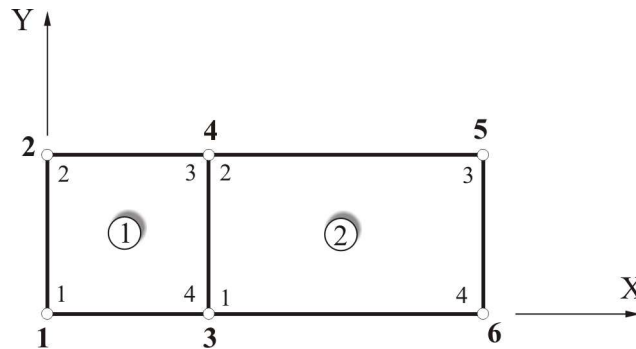
przy czym n jest równe liczbie stopni swobody układu (SSU); wektor $\hat{\mathbf{u}}^e = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ jest wektorem, którego składowe są poszukiwanymi wartościami węzłowymi układu (nieznanymi w węzłach), a $\mathbf{Q}^e = [Q_1^e \ Q_2^e \ \dots \ Q_n^e]^T$ – wektorem obciążeń węzłowych (wielkości znanych).

Proces agregacji stanowi aspekt strony matematycznej montażu elementów (por. rys. 3.2). Po specyfikacji elementu znane są (por. rozdział 3.5) macierze opisujące własności elementu: macierz sztywności elementu \mathbf{k}^e i wektor obciążeń elementu \mathbf{F}^e . Na ich podstawie, przy zapewnieniu warunków zgodności w węzłach (w mechanice konstrukcji dla nieznanymi w węzłach będących uogólnionymi przemieszczeniami warunek ten dotyczy zgodności przemieszczeń węzłowych i równowagi sił w węzłach) budowana jest globalna macierz sztywności i globalny wektor obciążeń węzłowych dla całego dyskretyzowanego obszaru. Zachodzi zależność:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_e \mathbf{k}^e \\ \mathbf{Q} &= \sum_e \mathbf{Q}^e \end{aligned} \quad (3.23)$$

Występujące w zależności (3.23) sumowanie nie ma charakteru algebraicznego, ale umowny. Globalną macierz sztywności \mathbf{K} oraz globalny wektor obciążeń węzłowych \mathbf{Q} otrzymuje się przez odpowiednie „dodawanie” macierzy i wektora obciążeń elementów, który to proces nazywany jest **agregacją**.

Schematycznie proces agregacji można zobrazować na przykładzie układu złożonego z dwóch elementów (rys. 3.17).



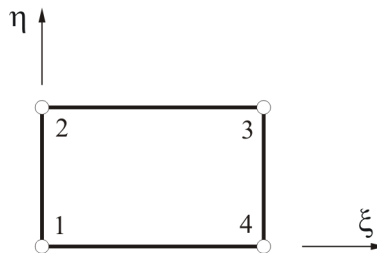
Rys. 3.17. Układ dwóch elementów skończonych z zaznaczoną numeracją globalną i lokalną węzłów

Zakładając stopień swobody węzła $SSW=1$ (poszukiwaną funkcją jest funkcja skalarna), wektor parametrów węzłowych układu $\hat{\mathbf{u}}$ ma następujące składowe:

$$\hat{\mathbf{u}} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6]^T, \quad (3.24)$$

gdzie $u_1 \div u_6$ są wartościami węzłowymi poszukiwanej funkcji u .

Element jest specyfikowany w lokalnym układzie współrzędnych, który przedstawiono na rys. 3.18.



Rys. 3.18. Czterowęzłowy element prostokątny w układzie lokalnym

Macierz sztywności elementu ma budowę:

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e \\ & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e \\ & & k_{33}^e & k_{34}^e \\ \text{sym.} & & & k_{44}^e \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Odpowiednio wektor \mathbf{F}^e można zapisać następująco:

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Wektor parametrów węzłowych elementu: $\hat{\mathbf{u}}^e = [u_1^e \ u_2^e \ u_3^e \ u_4^e]^T$.

Globalny układ równań przedstawiający udziały poszczególnych elementów można przedstawić schematycznie w postaci:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{k}^1] \\ \\ [\mathbf{k}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = u_1^1 \\ u_2 = u_2^1 \\ u_3 = u_4^1 = u_1^2 \\ u_4 = u_3^1 = u_2^2 \\ u_5 = u_3^2 \\ u_6 = u_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

przy czym uzgodniono tu wartości w węzłach wspólnych układu zgodnie z poniższą zależnością (por. zależność 3.2):

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_1 \\ u_2^1 &= u_2 \\ u_3^1 &= u_2^2 = u_4 \\ u_4^1 &= u_1^2 = u_3 \\ u_3^2 &= u_5 \\ u_4^2 &= u_6 \end{aligned} \quad (3.28)$$

gdzie indeks górny oznacza numer elementu.

Tak więc układ równań systemu będzie miał postać:

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{14}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 \\
 k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{24}^1 & k_{23}^1 & 0 & 0 \\
 k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{44}^1 + k_{11}^2 & k_{43}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\
 k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{34}^1 + k_{21}^2 & k_{33}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\
 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\
 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 Q_1^1 \\
 Q_2^1 \\
 Q_4^1 + Q_1^2 \\
 Q_3^1 + Q_2^2 \\
 Q_3^2 \\
 Q_4^2
 \end{Bmatrix}
 \quad (3.29)$$

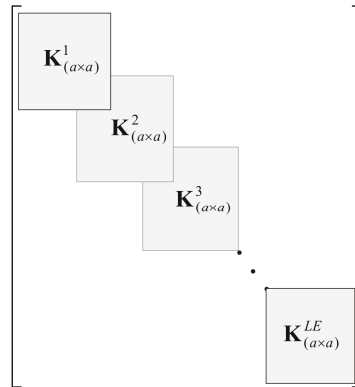
Ogólnie przy SSW stopniach swobody węzła, liczbie węzłów w elemencie LWU i liczbie węzłów układu LWU globalna macierz sztywności ma wymiar $N \times N$, gdzie $N = SSW \times LWU = SSU$. Jest ona symetryczna, rzadka, dodatnio określona i dla standardowych funkcji kształtu ma budowę schematycznie przedstawioną na rys. 3.19.

Globalna macierz sztywności w programowaniu metody elementów skończonych budowana jest bezpośrednio na podstawie tzw. **tablicy incydencji**, w której określona zostaje relacja między numeracją lokalną elementów a numeracją globalną układu. Dla rozpatrywanego układu dwóch elementów (rys. 3.17) tablica ta ma postać:

Tablica 3.1.

Lokalne i globalne numery węzłów elementów

Element 1		Element 2	
lokalnie	globalnie	lokalnie	globalnie
1	1	1	3
2	2	2	4
3	4	3	5
4	3	4	6



Rys. 3.19. Schematyczna postać globalnej macierzy sztywności.
 LE – liczba elementów, $a = SSW \times LWE$

Proces agregacji można wówczas zapisać:

$$\mathbf{K} = \sum^e \mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{14}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{24}^1 & k_{23}^1 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{44}^1 & k_{43}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{34}^1 & k_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{A} \mathbf{k}_{ab}^e, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{A} \mathbf{Q}_a^e, \quad (3.30)$$

gdzie: \mathbf{A} – symbol procedury agregacji
 i – globalny numer równania
 j – globalny numer składowej wektora $\hat{\mathbf{u}}$
 a – numer równania elementu
 b – numer stopnia swobody elementu

Przykładowo można zatem wprost napisać:

$$\begin{aligned} K_{34} &= k_{43}^1 + k_{12}^2 \\ K_{45} &= k_{23}^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Należy zaznaczyć, że w przypadku gdy osie układów lokalnego i globalnego nie są równoległe, przed agregacją zachodzi **konieczność transformowania** macierzy sztywności elementów i wektora obciążeń węzłowych elementów do układu globalnego.

Bez uwzględnienia warunków brzegowych otrzymana na drodze agregacji globalna macierz sztywności jest macierzą osobliwą, a więc układ równań systemu nie ma rozwiązania. Istnieje zatem konieczność wprowadzenia warunków brzegowych. Dotyczy to warunków brzegowych podstawowych (Dirichleta, w mechanice: kinematycznych warunków brzegowych). Naturalne warunki brzegowe (Neumanna, w mechanice: statyczne warunki brzegowe) są włączone zawsze do funkcjonału i przy minimalizacji funkcjonału (metoda Ritza) spełnione są w sposób automatyczny (w MES w sposób przybliżony w wersji przemieszczeniowej). W metodzie ważonych residuów (metoda Galerkina) naturalne warunki brzegowe wprowadzone są przy przekształcaniu równań całkowych (twierdzenie Greena).

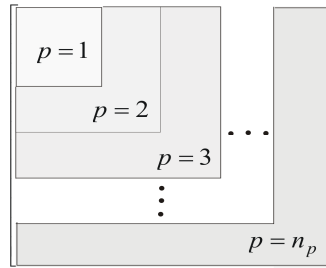
Uwzględnienia podstawowych warunków brzegowych w globalnej macierzy sztywności można dokonać przez podział wektora parametrów węzłowych układu $\hat{\mathbf{u}}_{(N \times 1)}$ na zbiór parametrów węzłowych poszukiwanych $\hat{\mathbf{u}}_p$ oraz zbiór parametrów znanych (zadanych) $\hat{\mathbf{u}}_z$, określonych przez warunki brzegowe. Przy takim podziale układ równań (3.21) systemu można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pz} \\ \mathbf{K}_{zp} & \mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_p \\ \hat{\mathbf{u}}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_z \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Zakładając, że zadane są jednorodne warunki brzegowe, a więc $\hat{\mathbf{u}}_z = \mathbf{0}$, z równań powyższych uzyskuje się:

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{K}_{pp} \hat{\mathbf{u}}_p \rightarrow \hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{Q}_p \quad (3.33)$$

Proces agregacji dla elementów hierarchicznych przebiega zasadniczo tak samo jak dla elementów o standardowych funkcjach kształtu. Macierz sztywności elementu hierarchicznego ma budowę jak na rys. 3.20 – macierz elementu rzędu $p+1$ zawiera macierz rzędu p .



Rys. 3.20. Budowa macierzy sztywności elementu hierarchicznego rzędu n_p

Macierz rzędu $p=1$ jest macierzą sztywności elementu dla standardowych funkcji kształtu. Odpowiadający jej wektor niewiadomych ma składowe będące węzłowymi stopniami swobody elementu. Pozostałe składowe wektora niewiadomych odpowiadające hierarchicznym stopniom swobody nie są wartościami rozwiązania w węzłach, na brzegu czy w środku elementu. Stąd też agregacja do macierzy globalnej dotyczy głównie podmacierzy macierzy sztywności elementu \mathbf{k}_p^e odpowiadającej rzędowi $p=1$. W przypadku gdy pochodne funkcji kształtu są ortogonalne (a tak najczęściej są one dobierane w elementach hierarchicznych), czyli:

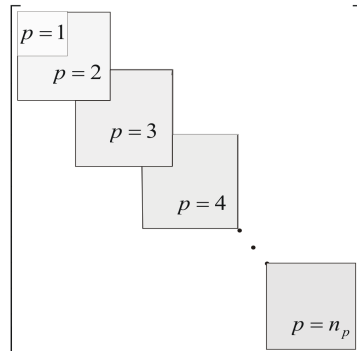
$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, dx = 0 \quad i \neq j \quad (3.34)$$

macierz sztywności \mathbf{k}_p^e zawiera elementy zerowe (rys. 3.21).

Macierz ta jest prawie diagonalna, jeżeli pochodne funkcji kształtu są wielomianami Legendre'a:

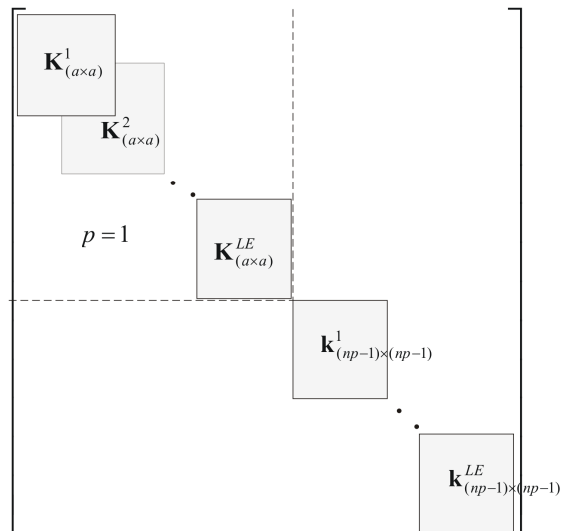
$$\mathbf{N}_p = \int P_{p-1} \, d\xi, \quad \xi(0) = \xi(1) = 0 \quad p \geq 2 \quad (3.35)$$

gdzie: $P_p = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} \left[(\xi^2 - 1)^p \right]$ - wielomian Legendre'a stopnia p .



Rys. 3.21. Macierz sztywności elementu przy ortogonalnych funkcjach kształtu

Globalna macierz sztywności przy stosowaniu tej samej rodziny elementów hierarchicznych ma postać przedstawioną schematycznie na rys. 3.22.



Rys. 3.22. Globalna macierz sztywności dla elementów hierarchicznych

3.8. Przykład – równanie różniczkowe podłoża Własowa

Dane jest równanie różniczkowe opisujące model podłoża Własowa:

$$-2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k w(x) = q(x) \quad \text{w } \Omega = (0,1), \quad (3.36)$$

gdzie: $w(x)$ – funkcja ugięcia

$q(x)$ – funkcja obciążenia gruntu

$2t, k$ – współczynniki podłoża (parametry)

Dane są następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w(1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Do rozwiązania metodą elementów skończonych jest zagadnienie brzegowe opisane równaniami (3.36), (3.37)

Transformowanie równań do postaci słabej – metoda ważonych reszduów

Jeżeli $v(x)$ jest funkcją wagową, wówczas słaba forma równania (3.36) ma postać:

$$\int_0^1 \left[-2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k w(x) - q(x) \right] v(x) dx = 0 \quad (3.38)$$

Aby otrzymać symetryczną formę słabą (dogodną do zastosowań numerycznych), do pierwszego członu równania (3.38) zostanie zastosowane całkowanie przez części:

$$\int_0^1 \left[-2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] v(x) dx = 2t \left[\int_0^1 \frac{dw(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx - \frac{dw(x)}{dx} v(x) \Big|_0^1 \right] \quad (3.39)$$

Uwzględniając w powyższym wyrażeniu warunki brzegowe (3.37), otrzymuje się:

$$\int_0^1 \left[-2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} v(x) \right] dx = 2t \int_0^1 \frac{dw(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \quad (3.40)$$

Zależność (3.38) przybierze więc postać:

$$\int_0^1 \left(2t \frac{dw(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + k w(x) v(x) \right) dx = \int_0^1 q v(x) dx \quad (3.41)$$

Wariacyjna zatem (słaba) postać równania różniczkowego (3.36) jest następująca:

Wyznaczyć $w \in V$, gdzie $V = \{v \in H_0^1(\Omega) : v(0) = 0, v(1) = 0\}$, taką że:

$$\int_0^1 \left(2t \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} + k w v \right) dx = \int_0^1 q v dx \quad \forall v \in V \quad (3.42)$$

$H^1(\Omega)$ jest przestrzenią funkcji rzeczywistych określonych na Ω , które są całkowne w kwadracie i których pierwsze pochodne są również całkowne w kwadracie. W szczególności:

$$H_0^1(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow R, v \in H^1(\Omega) \text{ i } \forall x \in \Gamma \ v(x) = 0\}$$

Na funkcję v nałożone jest więc minimalne ograniczenie: $\int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx < \infty$

(pierwsza pochodna funkcji całkowna w kwadracie).

Formę dyskretną zależności (3.42) można zapisać w postaci:

Wyznaczyć $w_h \in V_h$, gdzie $V_h \subset V$, taką że:

$$\int_0^1 \left(2t \frac{dw_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} + k w_h v_h \right) dx = \int_0^1 q v_h dx \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.43)$$

Rozwiązania przybliżonego poszukuje się zatem w przestrzeni skończenie wymiarowej V_h , która jest podprzestrzenią przestrzeni rozwiązań dokładnych. Przyjmuje się funkcję próbną w_h w postaci:

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^{LWU} a_i N_i(x), \quad (3.44)$$

gdzie LWU jest liczbą węzłów układu.

Zgodnie z podejściem Galerkin, funkcja wagowa opisana jest analogicznie:

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{LWU} b_j N_j(x), \quad (3.45)$$

gdzie $N_i(x)$ są funkcjami bazowymi (kształtu), które należy dobrać.

Podstawiając reprezentacje (3.44) i (3.45) do zależności (3.43) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [2t \left(\sum_{i=1}^{LWU} a_i \frac{dN_i}{dx} \right) \left(\sum_{j=1}^{LWU} b_j \frac{dN_j}{dx} \right) + k \left(\sum_{i=1}^{LWU} a_i N_i \right) \left(\sum_{j=1}^{LWU} b_j N_j \right)] dx = \\ & = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{LWU} b_j N_j \right) dx \end{aligned} \quad (3.46)$$

Po przekształceniu powyższa zależność przybierze postać:

$$\sum_{i=1}^{LWU} a_i \int_0^1 \left(2t \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + k N_i N_j \right) dx - \int_0^1 q N_j dx = 0, \quad (3.47)$$

$j = 1, 2, \dots, LWU$

Przyjmując oznaczenia:

$$K_{ij} := \int_0^1 2t \left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + k N_i N_j \right) dx, \quad Q_i := \int_0^1 q N_j dx, \quad (3.48)$$

związek (3.47) można zapisać wzorem:

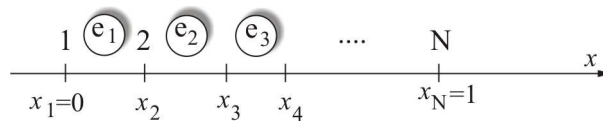
$$\sum_{i=1}^{LWU} K_{ji} a_i = Q_j, \quad (3.49)$$

lub przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{Q} \quad (3.50)$$

Dyskretyzacja MES

Obszar $\Omega = (0,1)$ zostaje podzielony na $N - 1$ podobszarów (elementów) $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ zgodnie z rys. 3.23.



Rys. 3.23. Podział obszaru $(0,1)$ na elementy skończone

Dobór przestrzeni skończenie wymiarowej V_h , w której poszukuje się rozwiązania przybliżonego

Przyjmuje się jako przestrzeń V_h , przestrzeń kawałkami ciągłych funkcji liniowych:

$$V_h = \{w_h : [0,1] \rightarrow R : w_h \text{ jest ciągła, } w_h|_{[x_k, x_{k+1}]} \text{ jest liniowa, } k = 0, \dots, LW \text{ i } w_h(0) = w_h(1) = 0\} \quad (3.51)$$

Przestrzeń V_h jest przestrzenią skończenie wymiarową, a zatem posiada bazę. Baza tej przestrzeni $\{N_1, N_2, \dots, N_{LW}\}$ dla przyjętej dyskretyzacji określona jest następująco:

$$N_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{w pozostałych przedziałach} \end{cases} \quad (3.52)$$

Są to więc liniowe funkcje kształtu Lagrange'a (por. zależność (3.13)) nazywane też funkcjami „kapeluszowymi”.

Każdą funkcję należącą do V_h można przedstawić jako liniową kombinację funkcji bazowych i współczynników, w szczególności rozwiązania przybliżonego poszukuje się zgodnie z zależnością (3.45).

Dla elementu „e” (rys. 3.23) zależność ta przybiera postać:

$$w_h^e = a_1 N_1^e + a_2 N_2^e, \quad (3.53)$$

gdzie:

$$N_1^e = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \quad N_2^e = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

są lokalnymi funkcjami kształtu dla elementu zawierającego węzły x_j i x_{j+1} .

Nakładając na rozwiązanie w_h^e wymóg $x = x_j = w_j$ i $x = x_{j+1} = w_{j+1}$, otrzymuje się: $a_1 = w_j$ oraz $a_2 = w_{j+1}$. Stąd rozwiązanie w obszarze elementu przybiera postać:

$$w_h^e = w_j N_1^e + w_{j+1} N_2^e \quad (3.54)$$

Równania MES dla elementu

Biorąc pod uwagę związek określający K_{ij} (zależność (3.46)), występującą tam całkę można przedstawić w postaci sumy całek w obszarze elementów:

$$K_{ij} = \int_0^1 2t \left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + k N_i N_j \right) dx = 2t \left[\int_0^{x_2} \left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_{x_{LW-1}}^{x_{LW}} \left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right) dx \right], \quad (3.55)$$

gdzie i, j są numerami węzłów.

Podobnie:

$$Q_j = \int_0^1 q N_j dx = \int_0^{x_2} q N_j dx + \dots + \int_{x_{LW-1}}^{x_{LW}} q N_j dx \quad (3.56)$$

Uwzględniając lokalne funkcje kształtu elementu N_i^e , zależność (3.55) i (3.56) można przedstawić następująco:

$$K_{ij} = \sum^e \int_{\Omega^e} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} dx = \sum^e k_{ij}^e \quad (3.57)$$

$$Q_j = \sum^e \int_{\Omega^e} q^e N_j^e dx = \sum^e Q_j^e$$

W zależności powyższej przyjęto oznaczenia:

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} dx, \quad (3.58)$$

$$Q_j^e = \int_{\Omega^e} q^e N_j^e dx$$

gdzie k_{ij}^e i Q_j^e są odpowiednio macierzą sztywności i wektorem obciążeń elementu.

Zależność (3.47) można zatem zapisać wzorem:

$$\sum_{i=1}^{LW} a_i (\sum^e k_{ij}^e) = \sum^e Q_j^e \quad (3.59)$$

Żądając, aby wartości funkcji w_h w kolejnych węzłach układu $(1, 2, \dots, LWU)$ wynosiły w_1, w_2, \dots, w_{LW} , czyli:

$$\begin{aligned}
 w_h(x = x_1) &= w_1 \\
 w_h(x = x_2) &= w_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 w_h(x = x_{LW}) &= w_{LW}
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= w_1 \\
 a_2 &= w_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{LW} &= w_{LW}
 \end{aligned}
 \tag{3.61}$$

Zatem zależność (3.60) przybierze postać:

$$\sum_{i=1}^{LW} w_i (\sum k_{ij}^e) = \sum Q_j^e
 \tag{3.62}$$

W zapisie macierzowym związek powyższy przedstawia się następująco:

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{Q} ,
 \tag{3.63}$$

gdzie: $\mathbf{K} = \sum k_{ij}^e$ – globalna macierz sztywności, $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_{LW}]^T$ –

wektor parametrów węzłowych układu, $\mathbf{Q} = \sum Q_j^e$ – globalny wektor obciążeń węzłowych.

Zależność (3.62) odniesiona do elementu ma postać:

$$\sum_{i=1}^{LW^e} w_i^e k_{ij}^e = Q_j^e ,
 \tag{3.64}$$

gdzie: LW^e – liczba węzłów elementu.

W zapisie macierzowym otrzymuje się związek:

$$\mathbf{k}^e \mathbf{w}^e = \mathbf{Q}^e ,
 \tag{3.65}$$

gdzie: \mathbf{k}^e – macierz sztywności elementu, \mathbf{w}^e – wektor parametrów węzłowych elementu, \mathbf{Q}^e – wektor obciążeń węzłowych elementu.

Dla przyjętego elementu liniowego, dwuwęzłowego, zależność powyższa przedstawia się następująco:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^e \\ w_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}, \quad (3.66)$$

gdzie wyraz k_{ij}^e ($i,j=1,2$) ($e=1,2,\dots,N-1$) macierzy sztywności oraz składowe Q_1^e i Q_2^e wektora obciążeń opisane są zależnością (3.58).

Równania (3.66) są równaniami MES elementu. Dla konkretnej dyskretyzacji równania te określa się dla każdego elementu. Są one podstawą do utworzenia równań układu (3.63). Postępując zatem w dalszej kolejności według algorytmu przedstawionego w rozdziale 3.2, otrzymuje się rozwiązanie MES rozpatrywanego zagadnienia.

3.9. Ogólne sformułowanie MES dla zagadnień mechaniki ciała stałego

W mechanice ciała stałego metoda elementów skończonych może być formułowana w ujęciu **przemieszczeniowym**, **naprężeniowym** lub **mieszanym** (hybrydowym). Powszechnie stosowana jest MES w ujęciu przemieszczeniowym i można ją uznać za podstawę w zagadnieniach mechaniki konstrukcji. W wersji tej, aproksymacji w obszarze elementu podlega pole przemieszczeń, stąd niewiadomymi w węzłach (parametrami węzłowymi) są uogólnione przemieszczenia. Pole naprężeń określone jest na podstawie obliczonego pola przemieszczeń. Równania równowagi i warunki brzegowe w naprężeniach spełnione są tylko w przybliżeniu (dla całego układu).

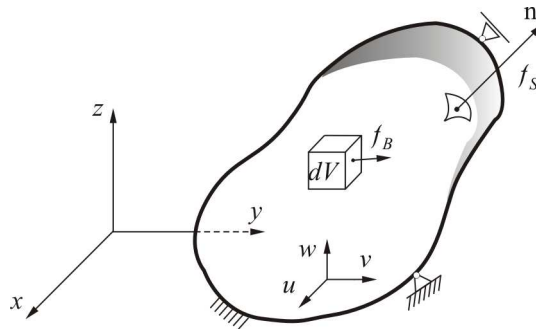
W naprężeniowej wersji MES (stosowanej na przykład do zagadnień opisanych funkcjonalnym Reissnera) parametrami węzłowymi są naprężenia. Do aproksymacji przyjmuje się tylko takie pola naprężeń w elemencie, które *a priori* spełniają równania równowagi.

Równania MES dla zagadnień mechaniki ciała stałego formułuje się na ogólnych zasadach, przedstawionych w rozdziale 3.3. Dla wersji przemieszczeniowej MES, będącej przedmiotem rozważań, równania te można uzyskać w sposób następujący:

- w **podjęciu bezpośrednim**, wykorzystując definicję macierzy sztywności używaną w metodzie przemieszczeń
- w **oparciu o zasadę prac wirtualnych**. W przypadku stosowania zasady prac wirtualnych ma się do czynienia ze słabym sformułowaniem równań równowagi. Mnożąc bowiem równania konstytutywne przez funkcje testowe, które w tym przypadku są przyjmowane jako wariacje funkcji przemieszczeń interpretowane jako przemieszczenia wirtualne, przy wykorzystaniu formuły Greena (całkowanie przez części) otrzymuje się formę całkową, która w mechanice znana jest jako zasada prac wirtualnych
- w **oparciu o energię potencjalną układu** i sformułowanie problemu minimalizacji funkcjonału na bazie twierdzenia Lagrange'a o minimum energii potencjalnej układu.

Równania równowagi MES dla zagadnień mechaniki zostaną przedstawione przy wykorzystaniu ostatniego z wymienionych podejść. Ten też sposób będzie wykorzystany w rozważanych w rozdziale 5 przykładach.

W celu sformułowania równań rozważa się w kartezjańskim układzie współrzędnych xyz ciało o objętości V i brzegu S , ograniczone więzami i poddane działaniu sił masowych i powierzchniowych (rys. 3.24).



Rys. 3.24. Ciało trójwymiarowe poddane działaniu sił masowych i powierzchniowych

W zapisie równań zostanie wykorzystana notacja macierzowa, bardziej niż wskaźnikowa dogodna przy formułowaniu algorytmów numerycznych. W notacji tej tensory rzędu drugiego – tensor naprężenia i odkształcenia są odwzorowane przez wektory kolumnowe, których składowe są niezależnymi składowymi tensorów, umieszczonymi w dowolnej (jednak konsekwentnej) kolejności.

Odształcając się pod wpływem powoli wzrastających obciążeń ciało gromadzi pewien zasób energii zwanej energią potencjalną. Dla ciała przedstawionego na rys. 3.24 wyrażenie na całkowitą energię potencjalną Π_c może być przedstawione w postaci:

$$\Pi_c = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV}_{\text{ENERGIA DEFORMACJI SPREZYSTEJ}} - \underbrace{\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}_B dV - \int_S \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_S dS}_{\text{POTENCJAŁ SIŁ ZEWNĘTRZNYCH}}, \quad (3.67)$$

gdzie: $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T$ – wektor stanu naprężenia,

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T$ – wektor stanu odkształcenia,

$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ – wektor stanu przemieszczenia,

$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z]^T$ – wektor stanu przemieszczenia powierzchni,

$\mathbf{f}_B = [f_B^x, f_B^y, f_B^z]^T$ – wektor sił masowych,

$\mathbf{f}_S = [f_S^x, f_S^y, f_S^z]^T$ – wektor sił powierzchniowych.

W warunkach równowagi statycznej ciała przy kinematycznie dopuszczalnych polach przemieszczenia, funkcjonał energii potencjalnej osiąga minimum. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału jest zerowanie się wariacji funkcjonału zgodnie z zależnością:

$$\delta \Pi_c = 0 \quad (3.68)$$

W celu wykorzystania funkcjonału (3.67) do wyprowadzenia równań MES dyskretyzuje się obszar V , dzieląc go na N nie pokrywających się elementów. Funkcjonał (3.68), jako skalar może być wówczas przedstawiony w postaci sumy odpowiednich składników:

$$\Pi_c = \Pi_c^{(1)} + \Pi_c^{(2)} + \dots + \Pi_c^{(N)} \quad (3.69)$$

$\Pi^e[\mathbf{u}^e]$ otrzymuje się odnosząc wektory występujące w zależności (3.67) do elementu „e” i przyjmując standardową aproksymację MES pola przemieszczenia w obszarze elementu:

$$\mathbf{u}^e(x, y, z) = \mathbf{N}^e(x, y, z) \boldsymbol{\delta}^e, \quad (3.70)$$

gdzie: $u_i^e \in H^1(V^e)$, ($i = x, y, z$) oraz:

$\mathbf{N}^e(x, y, z)$ – macierz funkcji kształtu o wymiarze $(3 \times SSE)$,

$\boldsymbol{\delta}^e = [\delta_1^e, \delta_2^e, \dots, \delta_{SSE}^e]^T$ – wektor parametrów przemieszczeń węzłowych elementu.

Związki geometryczne i fizyczne liniowej teorii sprężystości odniesione do elementu mają postać:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \mathbf{L} \mathbf{u}^e \\ \boldsymbol{\sigma}^e &= \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e \end{aligned} \quad (3.71)$$

gdzie \mathbf{L} i \mathbf{D} są macierzami odpowiednio operatorów różniczkowych i modułów sprężystości.

Uwzględniając w zależności (3.71)₁ związki (3.70) otrzymuje się:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B}^e \boldsymbol{\delta}^e, \quad (3.72)$$

gdzie \mathbf{B}^e jest macierzą odkształceń (opisuje odkształcenia w każdym punkcie elementu, spowodowane jednostkowym przemieszczeniem kolejnych stopni swobody węzłów).

Podstawiając do funkcjonału (3.67) odniesionego do elementu Π_c^e związki (3.71)₂ i (3.72), otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Pi_c^e &= \frac{1}{2} \int_{V^e} (\boldsymbol{\sigma}^e)^T \boldsymbol{\varepsilon}^e dV^e - \int_{V^e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}_B^e dV^e - \int_{S^e} (\tilde{\mathbf{u}}^e)^T \mathbf{f}_S^e dS^e = \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^e} (\mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{B}^e \boldsymbol{\delta}^e dV^e - \int_{V^e} (\mathbf{N}^e \boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{f}_B^e dV^e - \\ &- \int_{S^e} (\tilde{\mathbf{N}}^e \boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{f}_S^e dS^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} (\boldsymbol{\delta}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \boldsymbol{\delta}^e dV^e - \\ &- \int_{V^e} (\boldsymbol{\delta}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}_B^e dV^e - \int_{S^e} (\boldsymbol{\delta}^e)^T (\tilde{\mathbf{N}}^e)^T \mathbf{f}_S^e dS^e \end{aligned} \quad (3.73)$$

Gdy na dyskretizowany układ działają siły przyłożone w węzłach $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_{LWU}]^T$ wyrażenie (3.69) można zapisać w postaci:

$$\Pi_C = (\sum_e \Pi_C^e) - \delta^T \mathbf{P} \quad (3.74)$$

gdzie $\delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{SSU}]^T$ – wektor przemieszczeń węzłowych układu.

Warunek (3.68) można obecnie zapisać w następującej postaci:

$$\delta \Pi_C = \frac{\partial \Pi_C}{\partial \delta_1} \delta \delta_1 + \frac{\partial \Pi_C}{\partial \delta_2} \delta \delta_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_C}{\partial \delta_{SSU}} \delta \delta_{SSU} = 0 \quad (3.75)$$

Równość powyższa zachodząca dla dowolnych wariacji $\delta \delta_1, \delta \delta_2, \dots, \delta \delta_{SSU}$ prowadzi do układu równań:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial \delta} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi_C}{\partial \delta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi_C}{\partial \delta_{SSU}} \end{array} \right\} = 0 \quad (3.76)$$

Ponieważ Π_C jest funkcjonałem formy kwadratowej można zapisać pochodne dla elementu „e” w następującej postaci:

$$\frac{\partial \Pi_C^e}{\partial \delta^e} = \mathbf{k}^e \delta^e + \mathbf{F}^e \quad (3.77)$$

Minimalizujący układ równań (3.76) można zatem zapisać w postaci:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial \delta} = \mathbf{K} \delta + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.78)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_e \mathbf{k}^e \\ \mathbf{F} &= -(\sum_e \mathbf{F}^e + \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Na podstawie zależności (3.73) otrzymuje się więc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_c^e}{\partial \delta^e} = & \int_{V^e} [(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e] \delta^e dV^e - \int_{V^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}_B^e dV^e - \\ & - \int_{S^e} (\tilde{\mathbf{N}}^e)^T \mathbf{f}_S^e dS^e = \mathbf{k}^e \delta^e + \mathbf{F}^e \end{aligned}$$

gdzie:

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV^e \text{ jest macierzą sztywności elementu} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{V^e} [(\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}_B^e dV^e + \int_{S^e} (\tilde{\mathbf{N}}^e)^T \mathbf{f}_S^e] dS^e - \text{wektor równoważnych sił} \quad (3.81)$$

węzłowych od obciążeń masowych i powierzchniowych elementu

Równania (3.78) są równaniami MES równowagi układu .

Warto zwrócić jeszcze uwagę na aproksymację pola przemieszczenia opisaną zależnością (3.70). Występujące w niej funkcje kształtu powinny, jak to zostało omówione w rozdziale 3.6, spełniać warunek ciągłości i zupełności. W odniesieniu do rozważanego problemu warunek ciągłości oznacza, że przemieszczenia wewnątrz elementu i na jego brzegach powinny być ciągłe. Dotyczy to przemieszczeń uogólnionych, a więc zarówno przesuwów (translacyjne stopnie swobody) – ciągłość klasy C^0 , jak również obrotów (rotacyjne stopnie swobody) – ciągłość klasy C^1 (jeżeli kąty obrotu wyrażają się jako pochodne funkcji przemieszczeń).

Warunek zupełności wiąże się natomiast z wymogiem, aby funkcje przemieszczeń elementu mogły reprezentować jego ruch sztywny oraz stan stałych odkształceń. Elementy spełniające powyższe kryteria nazywane są elementami dostosowanymi, w przeciwieństwie do elementów niedostosowanych, dla których nie jest spełniony warunek ciągłości (na przykład niektóre elementy płytowe), a które także są z powodzeniem stosowane.

Rozdział 4

CHARAKTERYSTYKA WYBRANYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

4.1. Uwagi wstępne

W rozdziale 3.4. omówiono ogólną klasyfikację elementów skończonych. Przedstawiono również podział elementów z punktu widzenia zastosowań w mechanice konstrukcji. Podział ten obejmował elementy podstawowe, ciągłe, specjalne i makroelementy. W niniejszym rozdziale scharakteryzowane będą (specyfikowane) przykładowe elementy skończone z poszczególnych, wyżej wymienionych grup. Odpowiednio omówione będą: element belkowy, izoparametryczny element płyty wyższego rzędu, element nieskończony oraz makroelement podłoża warstwowego. Elementy te stanowią bazę w rozważanych w rozdziale 5 przykładach.

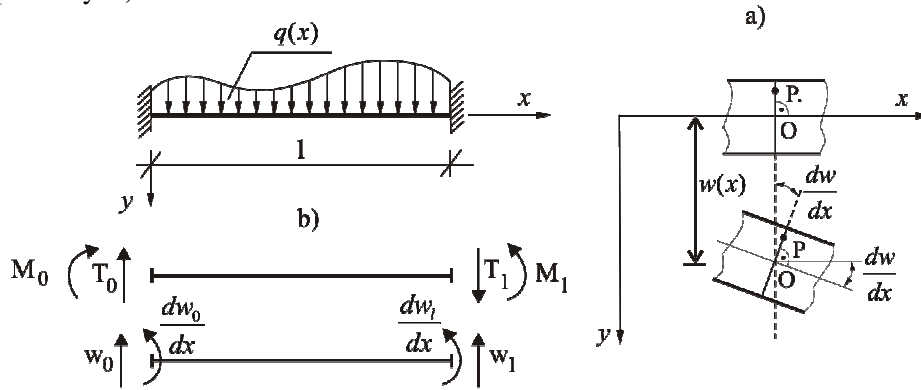
4.2. Element belkowy

Rozważa się prostoliniową belkę o długości l , stałym przekroju poprzecznym A i module sprężystości E , zginaną w płaszczyźnie xoy (rys. 4.1). Zakłada się, że belka spełnia założenia teorii Eulera-Bernoulliego, a więc pomija się wpływ sił poprzecznych na odkształcenia.

Równanie osi odkształconej belki ma znaną postać:

$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (4.1)$$

gdzie: J – moment bezwładności, $w(x)$ – funkcja ugięcia (przemieszczeń pionowych)



Rys. 4.1. Belka poddana działaniu obciążenia rozłożonego $q(x)$, prostopadłego do osi obojętnej: a) stan deformacji, b) uogólnione siły i przemieszczenia brzegowe

Związki liniowej teorii sprężystości (3.75) przybiorą obecnie dla całego układu postać (jednoosiowy stan naprężenia):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \mathbf{L} \mathbf{u} = \frac{du(x)}{dx} \\ \sigma_x &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = E(x) \varepsilon_x \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie $u(x)$ jest funkcją przemieszczeń poziomych związaną z funkcją ugięcia poprzez zależność:

$$u(x) = y \frac{dw(x)}{dx} \quad (4.3)$$

Energia deformacji sprężystej belki (por. zależność (3.68)) przyjmuje wobec związków (4.2) i (4.3) postać:

$$\begin{aligned}\Pi_d &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E \varepsilon_x^2 dA dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l E \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 \int_A y^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx\end{aligned}\quad (4.4)$$

gdzie: $J = \int_0^l y^2 dA$.

Przy założeniu stałego na długości belki modułu sprężystości podłużnej E , czyli $E(x) = const.$, zależność (4.4) przybierze postać:

$$\Pi_d = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4.5)$$

Potencjał sił zewnętrznych (zależność. 3.68) można zapisać następująco:

$$L = - \int_S \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_S dS \quad (4.6)$$

W analizowanym zagadnieniu wyraża się on następująco:

$$L = - \int_0^l q(x) w(x) dx \quad (4.7)$$

Tak więc całkowitą energię potencjalną rozpatrywanej belki opisuje zależność:

$$\Pi_c = \Pi_d + L = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q(x) w(x) dx \quad (4.8)$$

Funkcjonał energii potencjalnej belki można również zapisać w rozszerzonej postaci (rys.4.1):

$$\begin{aligned}\Pi_c = \Pi_d + L &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q(x) w(x) dx + (T_0 w_0 - \\ &- M_0 \frac{dw_0}{dx}) + (-T_l w_l + M_l \frac{dw_l}{dx})\end{aligned}\quad (4.9)$$

Związki (4.8) lub (4.9) stanowią podstawę do uzyskania równań równowagi MES elementu w oparciu o twierdzenie Lagrange'a o minimum energii potencjalnej układu i przy zastosowaniu podejścia Ritz'a (por. rozdział 3.9). Równania te można również uzyskać metodą ważonych residuów, analogicznie jak to przedstawiono w przykładzie 3.8. Analizując zwięźle ten sposób otrzymania równań, ogranicza się rozważania do wyprowadzenia formy słabej równania (4.1).

Dla funkcji wagowej $v(x)$ słaba forma równania (4.1) ma postać (por. rozdział 3.8):

$$\int_0^l \left[EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - q(x) \right] v(x) dx = 0 \quad (4.10)$$

Całkując równanie (4.10) dwukrotnie przez części otrzymuje się następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} & EJ \int_0^l \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx - \int_0^l q(x) v(x) dx + \\ & + EJ \left[\frac{d^3 w(x)}{dx^3} v(x) - \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{dv(x)}{dx} \right] \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

W rozpatrywanym zagadnieniu naturalne (statyczne) warunki brzegowe opisane są zależnościami:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} &= M_0 && \text{momenty zginające} \\ EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} &= M_l \\ EJ \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} &= T_0 && \text{siły poprzeczne} \\ EJ \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \Big|_{x=l} &= T_l \end{aligned} \quad (4.12)$$

Warunki brzegowe podstawowe (geometryczne) mają natomiast postać:

$$\begin{aligned}
w(x)|_{x=0} &= 0 \\
w(x)|_{x=l} &= 0 && \text{przemieszczenia pionowe} \\
&&& \text{(ugięcia)} \\
\frac{dw(x)}{dx}|_{x=0} &= 0 \\
\frac{dw(x)}{dx}|_{x=l} &= 0 && \text{kąty obrotu}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Uwzględniając w zależności (4.11) warunki statyczne (4.12), otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
& EJ \int_0^l \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx - \int_0^l q(x) v(x) dx + \\
& + T_0 v(x)|_l - T_0 v(x)|_0 - M_l \frac{dv(x)}{dx}|_l + M_0 \frac{dv(x)}{dx}|_0 = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Na funkcję $w(x)$ oraz $v(x)$ nałożone są ograniczenia:

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 < \infty, \quad \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 < \infty \tag{4.15}$$

czyli druga pochodna funkcji $w(x)$ i $v(x)$ całkowalne w kwadracie.

Tak więc słaba (wariacyjna) postać równania osi odkształconej belki (4.1) jest następująca:

Wyznaczyć $w \in V$,

$$\text{gdzie } V = \left\{ v \in H_0^2(\Omega) : v(0) = \frac{dv(0)}{dx} = 0, \quad v(l) = \frac{dv(l)}{dx} = 0 \right\},$$

taką, że:

$$\begin{aligned}
& EJ \int_0^l \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx = \int_0^l q(x) v(x) dx - T_l v(x)|_l - \\
& - T_0 v(x)|_0 - M_l \frac{dv(x)}{dx}|_l + M_0 \frac{dv(x)}{dx}|_0, \quad \forall v \in V
\end{aligned} \tag{4.16}$$

przy czym $\Omega = (0, l)$, $H^2(\Omega)$ jest przestrzenią funkcji rzeczywistych określonych na Ω , które są całkowalne w kwadracie aż do drugiej pochodnej.

Zależność (4.16) można zapisać w następującej formie:

Wyznaczyć $w \in V$, taką że:

$$B(w, v) = l(v) \quad , \forall v \in V \quad (4.17)$$

gdzie:

$$B(w, v) = EJ \int_0^l \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4.18)$$

$$l(v) = \int_0^l q v dx - (T_l v|_l - T_0 v|_0 - M_l \frac{dv}{dx}|_l + M_0 \frac{dv}{dx}|_0)$$

Wobec symetrycznej formy biliniowej $B(w, v)$ można zdefiniować funkcjonal:

$$F(w) = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q(x) w(x) dx + T_l w(x)|_l - T_0 w(x)|_0 - M_l \frac{dw(x)}{dx}|_l + M_0 \frac{dw(x)}{dx}|_0 \quad (4.19)$$

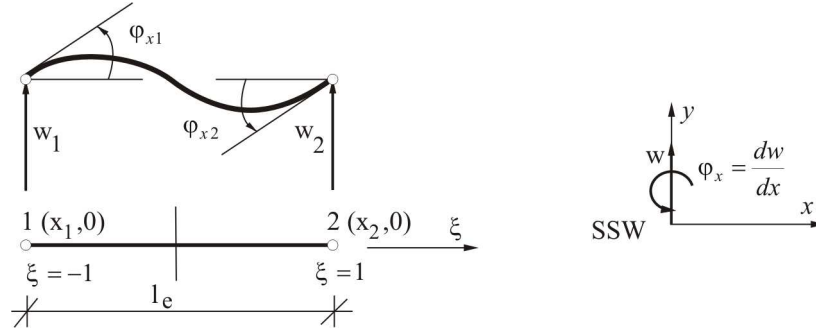
Funkcjonał (4.19) odpowiada całkowitej energii potencjalnej rozpatrywanej belki, opisanej zależnością (4.9).

W celu specyfikacji elementu belkowego dokonuje się dyskretyzacji obszaru $\Omega = (0, l)$ belki na elementy skończone zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 3.3 i analizuje się wyizolowany z układu element „e”. Element ten jest elementem prostoliniowym, dwuwęzłowym.

Z analizy funkcjonału energii potencjalnej belki (4.8), w którym występują 2. pochodne funkcji ugięcia wynika, że aby zachowana była ciągłość funkcji $w(x)$ w obszarze i wzdłuż brzegu elementu, zarówno funkcje próbne $w_h(x)$ (por. zależność (3.42)), które są aproksymacją poszukiwanej funkcji $w(x)$, jak również ich pierwsze pochodne muszą być ciągłe w obszarze i wzdłuż brzegu elementu. Potwierdza to także forma słaba (4.15), która wskazuje, że w modelu skończenie elementowym funkcje aproksymacyjne muszą być z przestrzeni $V_h \subset H^2(0, l)$. Oznacza to, że funkcje kształtu elementów muszą być klasy $C^1(0, l)$. Aby spełnić ten wymóg, należy jako niewiadome w węźle elementu (stopnie swobody węzła) przyjąć zarówno funkcję ugięcia $w(x)$ jak również jej pierwszą pochodną $\frac{dw(x)}{dx}$.

Z drugiej strony rozpatrując model fizyczny zagadnienia, widoczne jest (rys. 4.1), że przemieszczenia dowolnego punktu belki można opisać przez przemieszczenie pionowe (ugięcie) i kąt obrotu, który jest pierwszą pochodną ugięcia. Tak więc w każdym węźle elementu należy

przyjąć dwa uogólnione przemieszczenia: przemieszczenie pionowe w i kąt obrotu φ , uzyskując element o czterech stopniach swobody (SSE=4) (rys. 4.2).



Rys. 4.2. Element belkowy w lokalnym układzie współrzędnych $-1 \leq \xi \leq 1$

Zależność między współrzędną globalną x i lokalną ξ (rys.4.2) wyraża się wzorem:

$$x = x_1 + 0,5 l_e (1 + \xi) \quad (4.20)$$

Wektor przemieszczeń węzłowych elementu δ^e ma następujące składowe:

$$\delta^e = [w_1 \ \varphi_{x1} \ w_2 \ \varphi_{x2}]^T \quad (4.21)$$

Przemieszczenia pionowe aproksymuje się w obszarze elementu wielomianem 3. stopnia:

$$w^e(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 \quad (4.22)$$

Tak więc przemieszczenia uogólnione opisane są następująco:

$$\begin{Bmatrix} w^e \\ \varphi_x^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \\ 0 & \frac{2}{l_e} & \frac{4}{l_e} & \frac{6}{l_e} \xi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} \quad (4.23)$$

gdzie \mathbf{a} jest wektorem nieznanych współczynników, a \mathbf{P} – tzw. macierzą funkcyjną.

W wyrażeniu (4.23) wykorzystano związki:

$$\frac{d(\bullet)}{dx} = \frac{d(\bullet)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \quad (4.24)$$

Zależność (4.23) słuszną w obszarze elementu powinny spełniać też współrzędne punktów będących węzłami elementu:

$$\begin{Bmatrix} w_1^e \\ \varphi_{x1}^e \\ w_2^e \\ \varphi_{x2}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{2}{l_e} & -\frac{4}{l_e} & \frac{6}{l_e} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{l_e} & \frac{4}{l_e} & \frac{6}{l_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

czyli:

$$\delta^e = \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} \quad (4.26)$$

gdzie \mathbf{C} jest tzw. macierzą współrzędnych.
Na podstawie związku (4.26) otrzymuje się:

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1} \delta^e \quad (4.27)$$

Zgodnie z podejściem Ritza przyjmuje się aproksymację poszukiwanej funkcji $w(x)$ w następującej postaci:

$$w^e(x) = \mathbf{N}^e(x) \cdot \delta^e \quad (4.28)$$

Z zależności (4.23) wynika:

$$w^e = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_w \mathbf{a} \quad (4.29)$$

gdzie: $\mathbf{P}_w = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix}$.

Podstawiając do związku (4.29) równanie (4.27) otrzymuje się:

$$w^e = \mathbf{P}_w \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \delta^e \quad (4.30)$$

Porównanie zależności (4.28) i (4.30) prowadzi do następującego wyrażenia:

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{P}_w \cdot \mathbf{C}^{-1} \quad (4.31)$$

Związek (4.31) jest podstawą do wyznaczenia macierzy funkcji kształtu $\mathbf{N}^e = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$. Macierz odwrotna do macierzy współrzędnych \mathbf{C} (jeśli macierz \mathbf{C} jest nieosobliwa) ma postać:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{l_e}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{l_e}{8} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{l_e}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{l_e}{8} \\ 0 & -\frac{l_e}{8} & 0 & \frac{l_e}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{l_e}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{l_e}{8} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Na podstawie zależności (4.31) otrzymuje się zatem:

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ N_2 &= \frac{l_e}{8} - \frac{l_e}{8}\xi - \frac{l_e}{8}\xi^2 + \frac{l_e}{8}\xi^3 \\ N_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ N_4 &= -\frac{l_e}{8} - \frac{l_e}{8}\xi + \frac{l_e}{8}\xi^2 + \frac{l_e}{8}\xi^3 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Uzyskane funkcje kształtu $N_1 \div N_4$ są funkcjami kształtu Hermite'a (rys. 4.3).

Odnosząc wyrażenie na całkowitą energię potencjalną belki (4.8) do elementu „e” i uwzględniając przyjętą w obszarze belki aproksymację funkcji ugięcia (4.28) otrzymuje się:

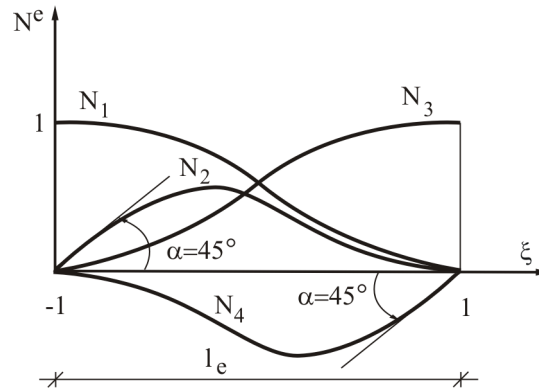
$$\begin{aligned}
\Pi_c^e &= \frac{EJ}{2} \int_{le} \left\{ \frac{d^2 [\mathbf{N}^e(x) \boldsymbol{\delta}^e]}{dx^2} \right\}^2 dx - \int_{le} q(x) \mathbf{N}^e(x) \boldsymbol{\delta}^e dx = \\
&= \frac{EJ}{2} \int_{le} \left\{ \frac{d^2 [\mathbf{N}^e(x)]}{dx^2} \boldsymbol{\delta}^e \right\}^2 dx - \int_{le} q(x) \mathbf{N}^e(x) \boldsymbol{\delta}^e dx = \\
&= \frac{EJ}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^2 [\mathbf{N}^e(\xi)]}{d\xi^2} \cdot \frac{4}{l_e^2} \boldsymbol{\delta}^e \right\}^2 \cdot \frac{l_e}{2} d\xi - \int_{-1}^1 q(\xi) \mathbf{N}^e(\xi) \boldsymbol{\delta}^e \frac{l_e}{2} d\xi
\end{aligned} \tag{4.35}$$

W zależności powyższej wykorzystano następujące związki:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\bullet)}{dx^2} &= \frac{d^2(\bullet)}{d\xi^2} \cdot \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 + \frac{d(\bullet)}{d\xi} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} \\
dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Na podstawie wyrażenia (4.35) i (3.77) otrzymuje się:

$$\frac{d\Pi_c^e}{d\boldsymbol{\delta}^e} = \begin{pmatrix} \frac{d\Pi_c^e}{dw_1} \\ \frac{d\Pi_c^e}{d\varphi_{x1}} \\ \frac{d\Pi_c^e}{dw_2} \\ \frac{d\Pi_c^e}{d\varphi_{x2}} \end{pmatrix} = \mathbf{k}^e \boldsymbol{\delta}^e + \mathbf{F}^e \tag{4.37}$$



Rys. 4.3. Funkcje kształtu elementu belkowego

Wyrazy k_{ij} macierzy sztywności \mathbf{k}^e oraz składowe F_i wektora \mathbf{F}^e występujących w zależności (4.37) przedstawiają się następująco:

$$k_{ij} = EJ \frac{8}{l_e^3} \int_{-1}^1 \left(\frac{d^2 N_i^e}{d\xi^2} \right) d\xi \quad (4.38)$$

$$F_i = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 q(\xi) N_i^e d\xi$$

Obliczając wyrazy k_{ij} otrzymuje się znaną postać macierzy sztywności elementu belkowego:

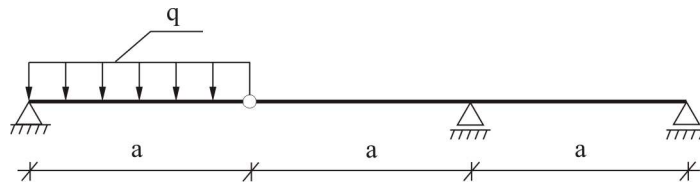
$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{12}{l_e^3} & \frac{6}{l_e^2} & -\frac{12}{l_e^3} & \frac{6}{l_e^2} \\ & \frac{4}{l_e} & -\frac{6}{l_e^2} & \frac{2}{l_e} \\ & & \frac{12}{l_e^3} & -\frac{6}{l_e^2} \\ \text{sym} & & & \frac{4}{l_e} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Na podstawie zależności (4.38)₃, dla $q(\xi) = \text{const.}$ skierowanego w dół uzyskuje się następującą postać wektora równoważnych sił węzłowych elementu:

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} -\frac{ql_e}{2} & -\frac{ql_e^2}{12} & -\frac{ql_e}{2} & \frac{ql_e^2}{12} \end{bmatrix}^T \quad (4.40)$$

4.2.1 Przykład – belka z przegubem

Do określenia jest rozkład momentów zginających i sił tnących w belce obciążonej jak na rysunku 4.4.



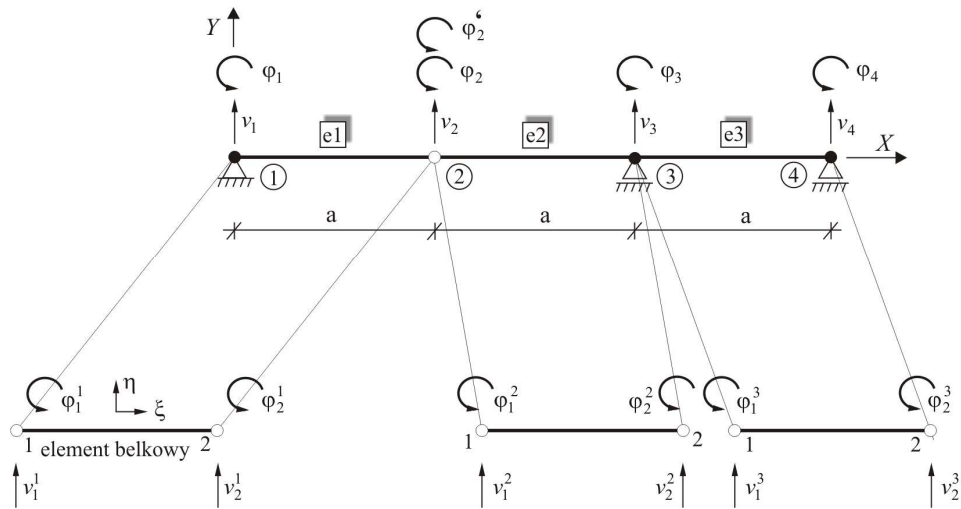
Rys. 4.4. Belka przegubowa obciążona obciążeniem ciągłym

Do rozwiązania zadania zastosowano metodę elementów skończonych. Przyjęty podział belki na elementy skończone przedstawiono na rys. 4.5, na którym zaznaczono również stopnie swobody układu w globalnym układzie odniesienia XOY.

Wektor przemieszczeń węzłowych układu w analizowanym zagadnieniu ma następującą postać:

$$\boldsymbol{\delta} = [v_1 \ \varphi_1 \ v_2 \ \varphi_2 \ \varphi_2' \ v_3 \ \varphi_3 \ v_4 \ \varphi_4]^T \quad (4.41)$$

Składowe φ_2 i φ_2' tego wektora są rotacyjnymi stopniami swobody węzła „2”. Wynikają one z istnienia w tym węźle przegubu, co implikuje nierówność $\varphi_2^1 \neq \varphi_1^2$.



Rys. 4.5. Podział belki na elementy skończone

Analiza na poziomie elementu

Macierze sztywności poszczególnych elementów przybiorą zgodnie z zależnością (4.39) formę:

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} & -\frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} \\ \frac{6}{a^2} & \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} \\ -\frac{12}{a^3} & -\frac{6}{a^2} & \frac{12}{a^3} & -\frac{6}{a^2} \\ \frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{4}{a} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

sym

Wektor równoważnych sił węzłowych ma dla elementu „1”, na którym jest przyłożone obciążenie równomiernie rozłożone następujące składowe (por. zależność 4.40)):

$$\mathbf{F}^1 = \left[-\frac{qa}{2} \quad -\frac{qa^2}{12} \quad -\frac{qa}{2} \quad \frac{qa^2}{12} \right]^T \quad (4.43)$$

Składowe wektorów równoważnych sił węzłowych dla pozostałych elementów, a więc wektorów \mathbf{F}^2 oraz \mathbf{F}^3 są – w wyniku braku obciążenia na odpowiednich elementach – równe zero.

Zgodnie z zależnością (4.37) dla poszczególnych elementów otrzymuje się:

$$\text{ELEMENT 1} \quad \frac{d\Pi_C^1}{d\delta^1} = \mathbf{k}^1 \begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \varphi_1^1 \\ v_2^1 \\ \varphi_2^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \\ -\frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\text{ELEMENT 2} \quad \frac{d\Pi_C^2}{d\delta^2} = \mathbf{K}^2 \begin{Bmatrix} v_1^2 \\ \varphi_1^2 \\ v_2^2 \\ \varphi_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\text{ELEMENT 3} \quad \frac{d\Pi_C^3}{d\delta^3} = \mathbf{K}^3 \begin{Bmatrix} v_1^3 \\ \varphi_1^3 \\ v_2^3 \\ \varphi_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

W powyższych zależnościach wskaźniki górne występujące po lewej stronie sumy odnoszą się do numeru elementu.

Analiza na poziomie układu

Równania równowagi układu, zgodnie z zależnością (4.78) mają postać:

$$\mathbf{K}_{(9 \times 9)} \cdot \boldsymbol{\delta}_{(9 \times 1)} = \mathbf{F}_{(9 \times 1)} \quad (4.47)$$

Macierz sztywności układu oraz wektor sił węzłowych układu otrzymane na drodze agregacji $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^3 \mathbf{k}^e$, $\mathbf{F} = \sum_{e=1}^3 \mathbf{F}^e$ przedstawiają zależności (4.48) i (4.49).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^2 & 0 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & 0 & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{11}^3 & k_{34}^2 + k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & 0 & k_{42}^2 & k_{43}^2 + k_{21}^3 & k_{44}^2 + k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{F} = \left[-\frac{qa}{2} \mid -\frac{qa^2}{12} \mid -\frac{qa}{2} \mid \frac{qa^2}{12} \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \right]^T \quad (4.49)$$

W zależności (4.48) uwzględniono warunki zgodności przemieszczeń:

$$\begin{aligned} v_1^1 &= v_1 & v_2^2 &= v_1^3 = v_3 \\ \varphi_1^1 &= \varphi_1 & \varphi_2^2 &= \varphi_1^3 = \varphi_3 \\ v_2^1 &= v_1^2 = v_2 & v_2^3 &= v_4 \\ \varphi_2^1 &= \varphi_2 & \varphi_2^3 &= \varphi_4 \\ \varphi_1^2 &= \varphi_2' \end{aligned} \quad (4.50)$$

W analizowanym zadaniu warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia są następujące:

$$v_1 = v_3 = v_4 = 0 \quad (4.51)$$

Uwzględnienie powyższych warunków w zależności (4.49) i (4.50) prowadzi w rezultacie do ostatecznej postaci równań równowagi układu:

$$\begin{bmatrix} k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & & 0 & 0 \\ k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 & k_{12}^2 & k_{14}^2 & 0 \\ k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & 0 & k_{22}^2 & k_{24}^2 & 0 \\ 0 & k_{41}^2 & 0 & k_{42}^2 & k_{44}^2 + k_{22}^3 & k_{24}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{42}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qa^2}{12} \\ -\frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Po przyjęciu danych: $a = 1 \text{ m}$ i $q = 1 \text{ KN/m}$ oraz po rozwiązaniu układu (4.52) otrzymuje się następujące wartości przemieszczeń węzłowych:

$$\delta = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,37498 \\ -0,33333 \\ -0,29168 \\ 0,41667 \\ 0,16667 \\ -0,08333 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \quad (4.53)$$

Obliczenie sił wewnętrznych

Siły wewnętrzne oblicza się na poziomie elementu zgodnie z zależnością:

$$\mathbf{F}'^e = -\mathbf{F}^e + \mathbf{k}^e \delta^e \quad (4.54)$$

Element „e1”:

$$\begin{Bmatrix} T_1^1 \\ M_1^1 \\ T_2^1 \\ M_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \\ \frac{qa}{2} \\ -\frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix} + EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} & -\frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} \\ & \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} \\ & & \frac{12}{a^3} & -\frac{6}{a^2} \\ & & & \frac{4}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

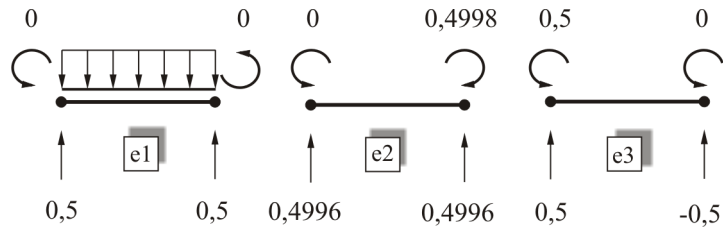
Element „e2”:

$$\begin{Bmatrix} T_1^2 \\ M_1^2 \\ T_2^2 \\ M_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} & -\frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} \\ & \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} \\ & & \frac{12}{a^3} & -\frac{6}{a^2} \\ & & & \frac{4}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} = \begin{Bmatrix} -0,4996 \\ 0 \\ 0,4996 \\ -0,4998 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

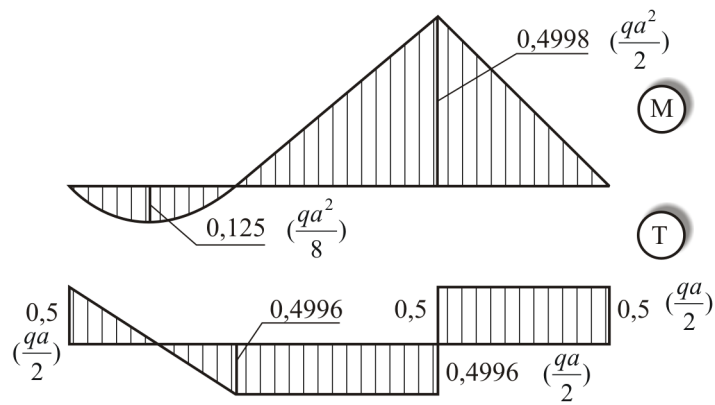
Element „e3”:

$$\begin{Bmatrix} T_1^3 \\ M_1^3 \\ T_2^3 \\ M_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} & -\frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} \\ & \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} \\ & & \frac{12}{a^3} & -\frac{6}{a^2} \\ & & & \frac{4}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

Obliczone uogólnione siły węzłowe przedstawiono dla poszczególnych elementów na rys. 4.6, natomiast końcowy rozkład momentów zginających i sił tnących w belce zobrazowano na rys. 4.7. Celem porównania otrzymanych metodą elementów skończonych rezultatów obliczeń na rysunku tym zamieszczono w nawiasach odpowiednie wartości rozwiązania dokładnego analizowanej belki.



Rys. 4.6. Uogólnione siły węzłowe dla elementów



Rys. 4.7. Rozkład momentów zginających i sił tnących w belce

4.3. Izoparametryczny element płyty średniej grubości wyższego rzędu

Cechą elementów izoparametrycznych jest to, że te same funkcje interpolacyjne użyte są do opisu zarówno geometrii elementu, jak i rozkładu pola wewnątrz elementu. Liniowe elementy izoparametryczne (w których do aproksymacji zastosowano funkcje liniowe) mają brzegi prostoliniowe. Brzegi elementów z kwadratową zmiennością funkcji kształtu i elementów wyższych rzędów są zakrzywione, co umożliwia wykorzystanie ich do modelowania obszarów o brzegach krzywoliniowych. Ważną cechą elementów izoparametrycznych jest także to, że funkcje kształtu można wyznaczyć w sposób bezpośredni, bez konieczności – jak w elementach subparametrycznych – obliczania macierzy odwrotnej do macierzy współrzędnych, czyli macierzy C^{-1} (por. zależność 4.31)).

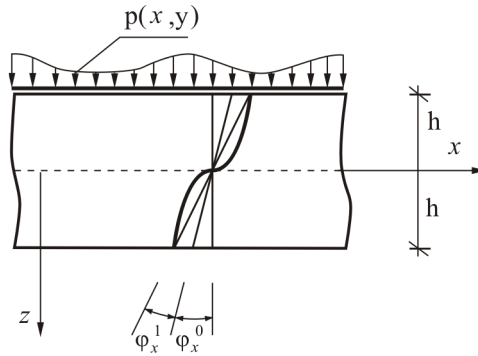
Wykorzystanie elementów izoparametrycznych w obliczeniach płyt możliwe jest zasadniczo dla płyt średniej grubości, czyli płyt, w których uwzględnia się wpływ sił poprzecznych i odkształceń postaciowych z nimi związanych na deformację płyty. Dla płyt cienkich, czyli spełniających założenia teorii Kirchhoffa zastosowanie elementów izoparametrycznych jest praktycznie niemożliwe, co wynika z trudności związanych z transformacją współrzędnych, dla której w przypadku płyt cienkich wymagana jest ciągłość klasy C^1 .

Do obliczeń płyt średniej grubości metodą elementów skończonych stworzono szereg elementów, głównie na bazie teorii Mindlina, rzadziej teorii Reissnera. W chwili obecnej elementy skończone dyskretyzujące płytę Mindlina tworzą bibliotekę szeregu profesjonalnych programów MES. Należy podkreślić, że w zakresie rozkładu pola przemieszczenia wzdłuż grubości płyty zarówno teoria płyt cienkich, Mindlina i Reissnera są teoriami o tym samym rzędzie aproksymacji. W teoriach tych przyjmuje się bowiem, że wspomniane pole przemieszczenia zmienia się w sposób liniowy. Uściślenie stanu płytowego pojawia się w tzw. teoriach wyższego rzędu [13]. Przyjmuje się w nich, że przemieszczenia zmieniają się wzdłuż grubości płyty nieliniowo, co jest zgodne z ich rzeczywistym rozkładem, o ile działają siły tnące.

Jedną z teorii wyższego rzędu, interesującą z punktu widzenia zastosowań praktycznych, jest teoria płyt średniej grubości Kujawskiego [8]. Poniżej przedstawione będą związki podstawowe tego modelu płyty, a następnie wyspecyfikowany będzie element skończony dyskretyzujący płytę średniej grubości Kujawskiego.

4.3.1. Związki podstawowe modelu płyty wyższego rzędu

Rozpatruje się jednorodną, izotropową płytę o stałej grubości, poddaną działaniu obciążenia powierzchniowego $p(x, y)$ (rys. 4.8).



Rys. 4.8. Deformacja przekroju poprzecznego płyty

W teorii Kujawskiego pole przemieszczenia określone jest następująco:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= z \varphi_\alpha^0 + f_p \varphi_\alpha^1 \\ u_z &= w^0 = w(x, y) \quad \alpha = x, y \end{aligned} \quad (4.58)$$

gdzie u_α , u_z są jego składowymi odpowiednio w kierunku osi x, y i z , natomiast φ_α^0, w^0 oraz φ_α^1 są niewiadomymi funkcjami zmiennych x, y ; $f_p = z[1 - (5z^2)/3h^2]$.

Pole przemieszczenia określone jest więc jako suma przemieszczeń zerowego ($z\varphi_\alpha^0, w^0$) i pierwszego ($f_p\varphi_\alpha^1$) rzędu. Można zauważyć, że przyjmując w wyrażeniu (4.59) $\varphi_\alpha^1=0$ otrzymuje się pole przemieszczenia, analogiczne do założeń teorii Reissnera (zerowego rzędu).

Na podstawie zależności (4.58) oraz związków Cauchy'ego otrzymuje się następujące wyrażenie na składowe pola odkształcenia:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} z (\varphi_{\alpha,\beta}^0 + \varphi_{\beta,\alpha}^0) + \frac{1}{2} f_p (\varphi_{\alpha,\beta}^1 + \varphi_{\beta,\alpha}^1) \\
\varepsilon_{\alpha z} &= \varepsilon_{\alpha z}^0 + \varepsilon_{\alpha z}^1 = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha}^0 + w_{,\alpha}) + \frac{1}{2} f_{p1} \varphi_{\alpha}^1 \\
\varepsilon_{zz} &= 0
\end{aligned} \tag{4.59}$$

gdzie $f_{p1} = (1 - \frac{15}{3} \frac{z^2}{h^2})$, $\beta = x, y$.

Pole naprężenia przyjmuje natomiast postać związków:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta}^0 + \sigma_{\alpha\beta}^1 = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} z (\varphi_{\alpha,\beta}^0 + \varphi_{\beta,\alpha}^0) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} z \varphi_{\gamma,\gamma}^0 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} f_p (\varphi_{\alpha,\beta}^1 + \varphi_{\beta,\alpha}^1) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} f_p \varphi_{\gamma,\gamma}^1 + \frac{\nu(1+\nu)}{E(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{zz} \right] \\
\sigma_{\alpha z} &= \sigma_{\alpha z}^0 + \sigma_{\alpha z}^1 = \frac{E}{2(1+\nu)} [(\varphi_{\alpha}^0 + w_{,\alpha}) + f_{p1} \varphi_{\alpha}^1]
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Składową σ_{zz} tensora naprężenia można otrzymać z układu różniczkowych równań równowagi continuum trójwymiarowego. W teorii Kujawskiego przyjmuje się analogiczną jak w teorii Reissnera postać wyrażenia określającego naprężenia σ_{zz} :

$$\sigma_{zz} = -\frac{3p}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \tag{4.61}$$

W zależnościach (4.59) i (4.60) przecinkiem oznaczono pochodne cząstkowe, przez $\delta_{\alpha\beta}$ oznaczono deltę Kroneckera, natomiast $\gamma = x, y$.

Energia deformacji sprężystej płyty (por. zależność (3.67)) przyjmuje wobec związków (4.59), (4.60) i (4.61) następującą postać wyrażoną w przemieszczeniach:

$$\begin{aligned}
\Pi_K &= \frac{D^0}{2} \iint_{\Omega_p} \left\{ \frac{1-\nu}{2} (\varphi_{\alpha,\beta}^0 \varphi_{\alpha,\beta}^0 + \varphi_{\beta,\alpha}^0 \varphi_{\beta,\alpha}^0) + \nu \delta_{\alpha\beta} \varphi_{\gamma,\gamma}^0 \varphi_{\alpha,\beta}^0 + \right. \\
&+ \left. \frac{4}{21} \left[\frac{1-\nu}{2} (\varphi_{\alpha,\beta}^1 \varphi_{\alpha,\beta}^1 + \varphi_{\beta,\alpha}^1 \varphi_{\beta,\alpha}^1) + \nu \delta_{\alpha\beta} \varphi_{\gamma,\gamma}^1 \varphi_{\alpha,\beta}^1 \right] + \right.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3(1-\nu)}{2h^2} (\varphi_{\alpha}^0 + w_{,\alpha}^0)^2 - \frac{2(1-\nu)}{h^2} (\varphi_{\alpha}^0 \varphi_{\alpha}^1 + \varphi_{\alpha}^1 w_{,\alpha}^0) + \\
& + \frac{12(1-\nu)}{3h^2} \varphi_{\alpha}^1 \varphi_{\alpha}^1 + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \delta_{\alpha\beta} (\varphi_{\alpha,\beta}^0 + \frac{1}{42} \varphi_{\alpha,\beta}^1) \} d\Omega_p
\end{aligned}$$

gdzie $D^0 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, Ω_p – obszar płyty.

Potencjał sił zewnętrznych w analizowanym zagadnieniu wyraża się następująco (por. zależność (3.68)):

$$L = - \iint_{\Omega_p} p(x, y) w(x, y) d\Omega_p \quad (4.63)$$

Całkowitą energię potencjalną rozpatrywanej płyty opisuje więc zależność:

$$\Pi_C = \Pi_K + L \quad (4.64)$$

gdzie Π_K i L określone są odpowiednio przez związki (4.62) i (4.63).

4.3.2. Specyfikacja elementu płyty wyższego rzędu

Wyrażenie (4.64) stanowi podstawę do uzyskania równań równowagi elementu skończonego. Równania te zostaną wyprowadzone na bazie twierdzenia Lagrange'a oraz przy zastosowaniu podejścia Ritza. W tym celu obszar płyty Ω_p podzielony zostaje na elementy skończone, a analizie poddany zostaje wyizolowany z układu element „e”.

Jak wynika z funkcjonału (4.63) energii deformacji sprężystej płyty wyższego rzędu, w którym występują 1. pochodne funkcji ugięcia i kątów obrotu, w modelu skończenie elementowym funkcje aproksymacyjne muszą być z przestrzeni $V_h \subset H^1(\Omega_p)$. Oznacza to, że funkcje kształtu elementu powinny być klasy $C^0(\Omega_p)$, a to umożliwia zastosowanie dla płyty wyższego rzędu elementu izoparametrycznego.

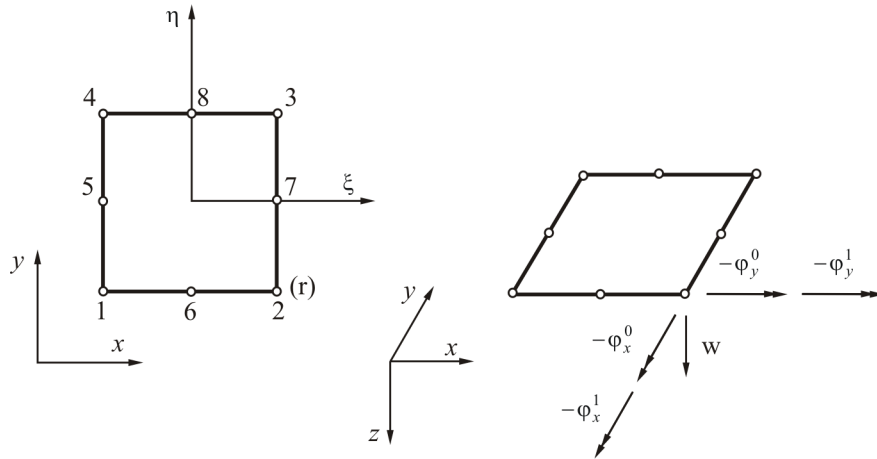
Wobec powyższego jako element skończony przyjęto ośmiowęzłowy element z serendipowskiej rodziny elementów zakrzywionych (rys. 4.9).

Jako stopnie swobody węzła przyjęto ugięcie powierzchni środkowej w oraz cztery kąty obrotu: dwa zerowego rzędu φ_x^0, φ_y^0 i dwa pierwszego rzędu φ_x^1, φ_y^1 . Tak więc wektor przemieszczeń w r -tym węźle elementu ma postać:

$$\delta_r^e = [\varphi_{xr}^0, \varphi_{yr}^0, w_r, \varphi_{xr}^1, \varphi_{yr}^1]^T \quad r = 1, 2, \dots, 8 \quad (4.65)$$

Wektor przemieszczeń wewnątrz elementu określony jest natomiast następująco:

$$\mathbf{u}^e = [\varphi_x^0, \varphi_y^0, w, \varphi_x^1, \varphi_y^1]^T \quad (4.66)$$



Rys. 4.9. Przyjęty element skończony dla płyty wyższego rzędu, $((\xi, \eta)$ – współrzędne lokalne, x, y, z – współrzędne globalne)

Geometrię elementu izoparametrycznego opisują zależności:

$$\begin{aligned} x &= \bar{\mathbf{N}} \mathbf{x} \\ y &= \bar{\mathbf{N}} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.67)$$

gdzie: $\bar{\mathbf{N}} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8]$, natomiast składowymi wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} są odpowiednio współrzędne globalne punktów węzłowych elementu.

Funkcje kształtu dla elementu o 8 węzłach opisane są zależnością:

$$\begin{aligned} N_r &= 0,25(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) & \text{dla } r = 1, 2, 3, 4 \\ N_r &= 0,5(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) & \text{dla } r = 5, 7 \\ N_r &= 0,5(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) & \text{dla } r = 6, 8 \end{aligned} \quad (4.68)$$

gdzie $\xi_0 = \xi \xi_r$, $\eta_0 = \eta \eta_r$ są nowymi zmiennymi, za pomocą których wszystkie funkcje kształtu można opisać w jednolity sposób.

Zgodnie z podejściem Ritza, związek między przemieszczeniami wewnątrz elementu a przemieszczeniami węzłowymi ma postać:

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \varphi_x^0 \\ \varphi_y^0 \\ w \\ \varphi_x^1 \\ \varphi_y^1 \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_8] \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.69)$$

przy czym:

$$\mathbf{N}_r = N_r \mathbf{I}_5 \quad (4.70)$$

gdzie \mathbf{I}_5 jest macierzą jednostkową o wymiarze (5×5) .

Odnosząc wyrażenie na całkowitą energię potencjalną płyty (4.64) do elementu, przy uwzględnieniu związków (4.69) oraz zależności

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\iint_{\Omega^e} (\bullet)(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\bullet)[x(\xi) y(\eta)] \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

w której \mathbf{J} jest macierzą Jakobiego:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_{,\xi} \\ \bar{\mathbf{N}}_{,\eta} \end{bmatrix} [\mathbf{x} \quad \mathbf{y}] \quad (4.72)$$

uzyskuje się:

$$\frac{\partial \Pi_C^e}{\partial \delta^e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi_C}{\partial \varphi_x^0} \\ \frac{\partial \Pi_C}{\partial \varphi_y^0} \\ \frac{\partial \Pi_C}{\partial w} \\ \frac{\partial \Pi_C}{\partial \varphi_x^1} \\ \frac{\partial \Pi_C}{\partial \varphi_y^1} \end{Bmatrix} = \mathbf{k}_K^e \delta^e + \mathbf{F}^e \quad (4.73)$$

gdzie macierz sztywności elementu płyty wyższego rzędu \mathbf{k}_K^e można przedstawić w następującej formie:

$$\mathbf{k}_K^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_K^{11} & \mathbf{k}_K^{12} & \cdots & \mathbf{k}_K^{18} \\ & \mathbf{k}_K^{22} & \cdots & \mathbf{k}_K^{28} \\ & & \ddots & \vdots \\ S & Y & M & \mathbf{k}_K^{88} \end{bmatrix} \quad (40 \times 40) \quad (4.74)$$

Przykładowe elementy podmacierzy \mathbf{k}_K^{rm} (5x5) określają związki:

$$\mathbf{k}_{K11}^{rm} = D^0 \iint_{\Omega^e} (N_{r,x} N_{m,x} + \frac{1-\nu}{4} N_{r,y} N_{m,y} + \frac{3(1-\nu)}{4h^2} N_r N_m) d\Omega^e$$

$$\mathbf{k}_{K12}^{rm} = D^0 \iint_{\Omega^e} (\nu N_{r,x} N_{m,y} + \frac{1-\nu}{4} N_{r,y} N_{m,x}) d\Omega^e \quad (4.75)$$

$$r, m = 1, 2, \dots, 8$$

Wektor \mathbf{F}^e (zależność 4.73) przedstawia się następująco:

$$\mathbf{F}^e = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \dots \quad \mathbf{F}_8]^T \quad (4.76)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}_r = [0 \quad 0 \quad F_r \quad 0 \quad 0]^T \quad (4.77)$$

oraz:

$$F_r = \iint_{\Omega_p} p(x, y) N_r d\Omega_p \quad (4.78)$$

Należy nadmienić, że cechą charakterystyczną sformułowanych dla płyt średniej grubości elementów skończonych, w których do aproksymacji pola przemieszczenia zastosowano funkcje spełniające ciągłość klasy C^0 , jest nadmierna sztywność w przypadku niewielkiej grubości płyty. Efekt ten znany w literaturze pod nazwą „lockingu” związany jest z koniecznością spełnienia przy małej grubości płyty warunków $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$, odpowiadających założeniom płyt cienkich Kirchhoffa. W przypadku natomiast wymienionych elementów wraz ze zmniejszaniem się ich grubości, występujące w macierzy sztywności wyrazy odpowiadające deformacji stycznej płyty stają się coraz bardziej dominujące, co powoduje, że otrzymane wyniki numeryczne są błędne. W celu ograniczenia tego niekorzystnego zjawiska wskazuje się na konieczność stosowania technik ogólnego lub selektywnego zredukowanego całkowania. Warto podkreślić, że przedstawiony element płyty wyższego rzędu nie wymaga stosowania wyżej wspomnianych technik, wykazując przy pełnym całkowaniu (3x3 punktów Gaussa) i małej grubości płyty dobrą zgodność z odpowiednimi rezultatami uzyskanymi dla płyty Kirchhoffa.

4.4. Elementy nieskończone

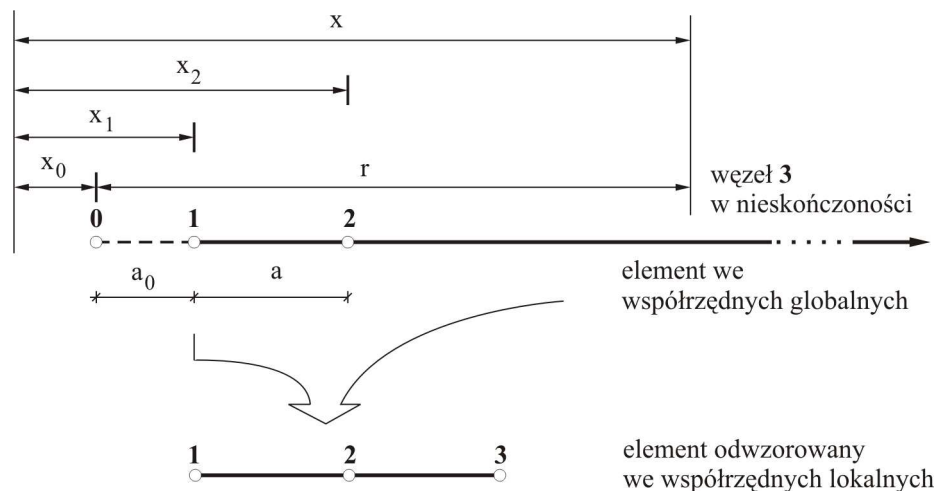
W wielu problemach naukowych i inżynierskich pojawia się potrzeba analizowania pola w obszarach nieograniczonych. Zastosowanie MES w jej klasycznej postaci do tego typu zagadnień sprowadza się do wyznaczenia dyskretnych wartości pola w odpowiednio dużym, jednak skończonym obszarze, przyjętym przy założeniu, że poszukiwane wartości pola na jego brzegach praktycznie zanikają. Prowadzi to do rozbudowanej siatki elementów i dużej liczby niewiadomych układu równań MES. Z drugiej strony przyjęcie *a priori* skończonych rozmiarów analizowanego obszaru w przypadku jego nieograniczoności może znacząco wpływać na otrzymane wyniki obliczeń. W celu rozszerzenia możliwości zastosowania MES do analizy pola w obszarach nieograniczonych – bez konieczności dyskretyzowania dużego obszaru i wystąpienia związanych z tym niedogodności – sformułowano elementy nieskończone. Elementy te, chociaż utworzone stosunkowo niedawno, zostały już umieszczone i z powodzeniem wykorzystywane w niektórych profesjonalnych programach MES (na przykład ABAQUS 2002).

4.4.1 Zasadnicza koncepcja elementów nieskończonych

W wyznaczaniu pola w obszarach nieograniczonych szczególnie przydatne – z uwagi na łatwość implementacji numerycznej i uzyskiwane wyniki – są odwzorowane elementy nieskończone („mapped infinite elements”) [9]. Idea tych elementów polega na tym, że geometria elementu jest określona przez parametryczne odwzorowanie elementu rodzimego przy użyciu funkcji kształtu wykazujących osobliwość dla ξ lub $\eta=1$ w przypadku elementu pojedynczo nieskończonego lub dla ξ i $\eta=1$ w przypadku elementu podwójnie nieskończonego. Przemieszczenia natomiast w obszarze elementu są aproksymowane przez standardowe funkcje kształtu dla elementu izoparametrycznego.

Ideę odwzorowanych elementów nieskończonych można zobrazować, prowadząc rozważania na przykładzie **jednowymiarowego elementu nieskończonego** (rys. 4.10). Element ten można odwzorować na element opisany w lokalnym układzie współrzędnych $-1 \leq \xi \leq 1$. Zależność między współrzędnymi globalnymi i lokalnymi przedstawia się następująco:

$$x(\xi) = [M_1 \quad M_2] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$



Rys. 4.10. Jednowymiarowy element nieskończony

Występujące w wyrażeniu (4.79) funkcje odwzorowujące M_1 i M_2 opisane są następująco:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{-2\xi}{1-\xi} \\
 M_2 &= \frac{1+\xi}{1-\xi}
 \end{aligned}
 \tag{4.80}$$

natomiast x_1, x_2 są odpowiednimi współrzędnymi globalnymi punktów węzłowych 1, 2 elementu.

W elementach nieskończonych geometria oraz rozkład pola przemieszczenia są odniesione do tego samego punktu lub zbioru punktów zwanych biegunami elementu. Na rys. 4.10 oznaczono je przez O. Bieguny powinny znajdować się na zewnątrz elementu, a więc $x_0 < x_1$. Zachodzą ponadto zależności:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + a_0 \\
 x_2 &= x_0 + a_0 + a
 \end{aligned}
 \tag{4.81}$$

Zakłada się przykładowo, że poszukiwaną funkcją jest funkcja ϕ , a wektor przemieszczeń węzłowych elementu ma postać:

$$\delta^e = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]^T = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]^T
 \tag{4.82}$$

Zmienność funkcji ϕ w obszarze elementu można przedstawić za pomocą standardowego wyrażenia :

$$\phi = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \delta^e
 \tag{4.83}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -0,5(1-\xi) \\
 N_2 &= (1-\xi)(1+\xi) \\
 N_3 &= 0,5(1+\xi)
 \end{aligned}
 \tag{4.84}$$

Na podstawie zależności (4.79) i (4.81) otrzymuje się:

$$\xi = \frac{-r + a_0 + a}{-r + a_0 - a}
 \tag{4.85}$$

gdzie r oznacza odległość dowolnego punktu wewnątrz elementu od bieguna O.

Przy wykorzystaniu związku (4.85) zależność (4.83) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{a}{a_0 - a + r} \cdot \frac{\frac{a + a_0}{r} - 1}{\frac{a_0 - a}{r} - 1} \cdot \phi_1 + \frac{4a}{a_0 - a - r} \cdot \frac{1 - \frac{a_0}{r}}{\frac{a_0 - a}{r} - 1} \cdot \phi_2 + \\ & + \frac{\frac{a_0}{r} - 1}{\frac{a_0 - a}{r} - 1} \cdot \frac{\frac{a + a_0}{r} - 1}{\frac{a_0 - a}{r} - 1} \cdot \phi_3 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Przyjmując w powyższym wyrażeniu $a_0 = a$, otrzymuje się:

$$\phi = \phi_3 + (-\phi_1 + 4\phi_2 - 3\phi_3) \frac{a}{r} + (2\phi_1 - 4\phi_2 + 2\phi_3) \frac{a^2}{r^2} \quad (4.87)$$

Dla zależności (4.86) i (4.87) zachodzi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \phi_3 \quad (4.88)$$

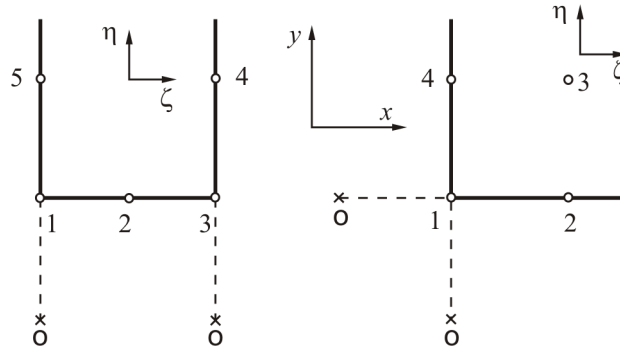
Tym samym więc warunek, że funkcja ϕ osiąga w nieskończoności wartość zero można automatycznie spełnić przez rozpatrzenie w wyrażeniu (4.83) tylko „skończonych” węzłów 1 i 2. Na podstawie związków (4.86) i (4.87) widoczne jest również znaczenie umiejscowienia bieguna O. Należy podkreślić, że dobór położenia bieguna może być zrealizowany jedynie na drodze empirycznej, przy uwzględnieniu tak geometrycznych jak i fizycznych własności danego zadania.

4.4.2. Dwuwymiarowe elementy pojedynczo i podwójnie nieskończone

Przedstawiona w podrozdziale 4.4.1 zasadnicza koncepcja odwzorowanych elementów nieskończonych znajduje odzwierciedlenie w przypadku elementów dwuwymiarowych, pojedynczo lub podwójnie nieskończonych. Przykłady takich elementów przedstawiono na rys. 4.11. Dla elementów tych przyjęto założenie, że $a_0 = a$. Element pojedynczo nieskończony przedstawiony na rys. 4.11 a) jest pięciowęzłowym, serendipowskim elementem, pochodzącym od ośmiowęzłowego serendipowskiego elementu skończonego.

Współrzędne globalne punktów 5 i 4 tego elementu określone są zależnością:

$$\begin{aligned} y_4 &= 2y_3 - y_0 \\ y_5 &= 2y_1 - y_0 \end{aligned} \quad (4.89)$$



Rys. 4.11. Dwuwymiarowe elementy nieskończone:
a) element pojedynczo nieskończony, b) element podwójnie nieskończony

Geometrię elementu opisuje wyrażenie:

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{M} \mathbf{x} \\ y &= \mathbf{M} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.90)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [M_1 \quad M_2 \quad \cdots \quad M_5] \\ \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_5]^T \\ \mathbf{y} &= [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_5]^T \end{aligned} \quad (4.91)$$

Przyjęte funkcje odwzorowujące mają postać:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{(1-\xi)(-1-\xi-\eta)}{1-\eta} \\
M_2 &= \frac{2(1-\xi^2)}{1-\eta} \\
M_3 &= \frac{(1+\xi)(-1+\xi-\eta)}{1-\eta} \\
M_4 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2(1-\eta)} \\
M_5 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{2(1-\eta)}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Można zauważyć, że dla funkcji (4.92) zachodzi zależność:

$$\eta = 1 \Rightarrow y(\xi, \eta) \rightarrow \infty \tag{4.93}$$

Element podwójnie nieskończony przedstawiony na rys. 4.11 b) jest z kolei czterowęzłowym, izoparametrycznym elementem Lagrange'a, pochodzącym od elementu skończonego Lagrange'a o dziewięciu węzłach. Analogicznie jak w przypadku elementu pojedynczo nieskończonego, współrzędne globalne punktów 4 i 2 określone są następująco:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 2x_1 - x_0 \\
y_4 &= 2y_1 - y_0
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Geometrię elementu przedstawia zależność (4.90), w której:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= [M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_4]^T \\
\mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \\
\mathbf{y} &= [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Składowe macierzy \mathbf{M} mają obecnie postać:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{4\xi\eta}{(1-\xi)(1-\eta)} \\
 M_2 &= \frac{(1+\xi)(-2\eta)}{(1-\xi)(1-\eta)} \\
 M_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{(1-\xi)(1-\eta)} \\
 M_4 &= \frac{-2\xi(1+\eta)}{(1-\xi)(1-\eta)}
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Dla przyjętych funkcji odwzorowujących (4.96) zachodzi:

$$\xi = 1 \wedge \eta = 1 \Rightarrow x(\xi, \eta) \rightarrow \infty \wedge y(\xi, \eta) \rightarrow \infty \tag{4.97}$$

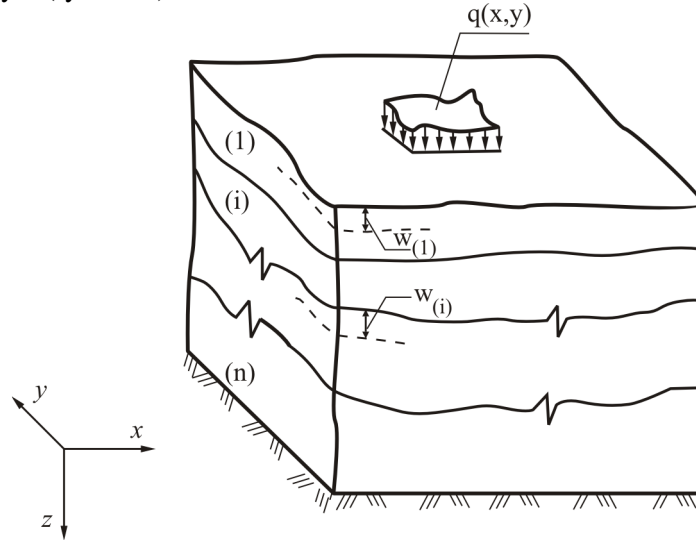
4.5. Makroelement podłoża warstwowego

Współpraca konstrukcji z dowolnie uwarstwionym podłożem gruntowym jest problemem złożonym, nawet jeżeli przyjmie się założenie, że grunty poszczególnych warstw są materiałami izotropowymi i liniowo-sprężystymi. Dość powszechnie stosowane do opisu ośrodka gruntowego w zagadnieniach interakcji konstrukcja-podłoże modele analityczne (Winklera, Pasternaka, Reissnera) okazują się tu być daleko niewystarczające. Modelują one ośrodek gruntowy często w oderwaniu od jego rzeczywistych własności mechanicznych, nie umożliwiają również uwzględnienia tej zasadniczej cechy geometrycznej podłoża, jaką jest niejednorodność strefowa w kierunku pionowym. Przy zróżnicowanych modułach ściśliwości poszczególnych warstw może to skutkować błędnymi wynikami naprężeń i odkształceń. Realistyczne oszacowania tak osiadań jak i deformacji konstrukcji spoczywającej na geometrycznie skomplikowanym układzie warstw wymagają pełnej, trójwymiarowej analizy MES, która jest z reguły zadaniem czasochłonnym i kosztownym.

Alternatywną grupę w zakresie modelowania ośrodka gruntowego w zagadnieniach interakcji, pozwalającą na osiągnięcie pewnego kompromisu między dokładnością a czasochłonnością obliczeń stanowią modele numeryczne podłoża z efektywnym modelem Kolarza-Nemeca (K-N) [6] na czele. Symulacja zachowania podłoża przez ten model pozwala na znaczne uproszczenie procesu obliczeniowego, przy wyrażeniu wszystkich niezbędnych własności podłoża, które w analizie układu konstrukcja-podłoże warstwowe nie mogą być pominięte.

4.5.1. Związki podstawowe modelu podłoża warstwowego

Punktem wyjścia do rozważań jest układ n stref obliczeniowych o zmiennych grubościach $h^{(i)}(x, y), (i=1, 2, \dots, n)$, który spoczywa na podłożu nieodkształcalnym (rys. 4.12).



Rys. 4.12. Podłoże dowolnie uwarstwione

Grunty poszczególnych warstw traktowane są jako materiały liniowo-sprężyste i niejednorodne, wyspecyfikowane w ogólności za pomocą modułów Younga i Kirchhoffa, odpowiednio $E^{(i)} = E^{(i)}(z)$ oraz $G^{(i)} = G^{(i)}(z)$. Wszystkie granice warstw geologicznych muszą być pokryte powierzchniami $z = H^{(i)}$ stref obliczeniowych, lecz nie odwrotnie.

Istotą modelu podłoża warstwowego, który oparty jest na tzw. efektywnym modelu Kolara-Nemeca są ograniczenia nałożone na przemieszczenia:

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha}^{(i)}(x, y, z) &\cong 0 & (\alpha = x, y) \\
 u_z^{(i)}(x, y, z) = w^{(i)}(x, y, z) &= w_{(i)}(x, y) \cdot f_{(i)}(x, y, z) + & (4.98) \\
 &+ w_{(i+1)}(x, y) \cdot f_{(i+1)}(x, y, z)
 \end{aligned}$$

W zależności (4.98) wskaźniki ujęte w nawiasy nie podlegają konwencji sumacyjnej. W zależności tej poszczególne symbole oznaczają:

$u_\alpha^{(i)}, u_z^{(i)}$ – przemieszczenia punktów warstwy "i" w kierunkach osi współrzędnych x, y, z ; $w_{(i)}, w_{(i+1)}$ – ugięcia odpowiednich płaszczyzn granicznych $z = H^{(i-1)}$, przy czym $H^{(0)} = 0$; $f_{(i)}, f_{(i+1)}$ – dane funkcje interpolacyjne definiujące pionowy rozkład przemieszczenia $w^{(i)}$ wewnątrz warstwy "i".
Funkcje $f_{(i)}$ oraz $f_{(i+1)}$ powinny spełniać graniczne warunki geometryczne:

$$f_{(i)} = \begin{cases} 0 & z = H^{(i-1)} \\ 1 & z = H^{(i)} \end{cases} \quad f_{(i+1)} = \begin{cases} 1 & z = H^{(i)} \\ 0 & z = H^{(i+1)} \end{cases} \quad (4.99)$$

W modelu K-N funkcje te opisane są następująco (rys. 4.13):

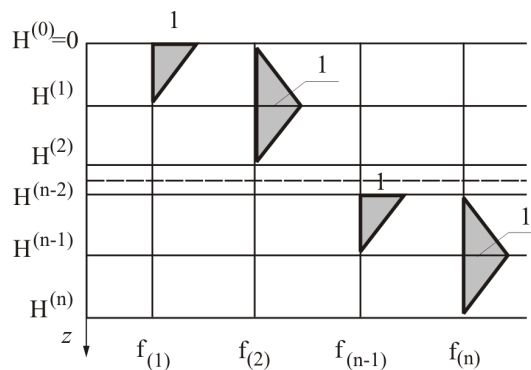
$$f_{(i)} = \frac{H^{(i)} - z}{H^{(i)} - H^{(i-1)}}, \quad f_{(i+1)} = \frac{z - H^{(i-1)}}{H^{(i)} - H^{(i-1)}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.100)$$

$$f_{(i)} = \frac{H^{(i)} - z}{H^{(i)} - H^{(i-1)}} \quad i = n$$

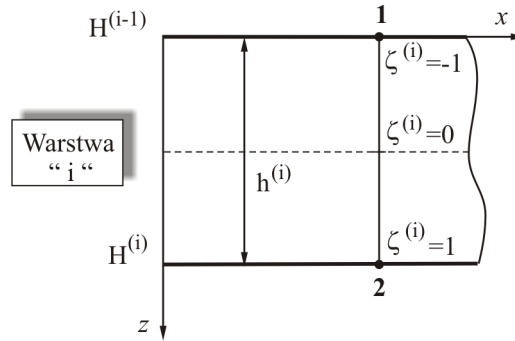
Moduł sprężystości $E^{(i)}(z)$ w obrębie warstwy uzależniony jest od modułu przypisanego powierzchni środkowej i -tej warstwy $\bar{E}^{(i)}$ w sposób następujący:

$$E^{(i)}(z) = \bar{E}^{(i)} [1 + k\xi^{(i)}] \quad , \quad -1 \leq k \leq 1 \quad (4.101)$$

gdzie: $\xi^{(i)} = \frac{z}{h^{(i)}} [z - H^{(i-1)}] - 1$ jest współrzędną lokalną i -tej warstwy (rys. 4.14).



Rys. 4.13. Wykresy funkcji opisujących rozkład ugięć wzdłuż grubości podłoża



Rys. 4.14. Globalny i lokalny układ współrzędnych i -tej warstwy

Przyjmując, że warstwy mogą mieć zmienną grubość, zakłada się, że powierzchnie graniczne są płaszczyznami dowolnie nachylonymi w stosunku do płaszczyzny xoy (rys.4.12). Można je więc opisać równaniami:

$$H^{(i)}(x, y) = a^{(i)} + b^{(i)}x + c^{(i)}y + d^{(i)}xy \quad (4.102)$$

gdzie a, b, c, d są parametrami, które wyznacza się na podstawie współrzędnych punktów leżących na odpowiedniej powierzchni granicznej.

Na podstawie zależności (4.98) oraz związków Cauchy'ego otrzymuje się następujące wyrażenia opisujące składowe pola odkształcenia:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} &= 0 \\ \varepsilon_{\alpha z}^{(i)} &= \frac{1}{2}(w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)}),_{\alpha} \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} &= (w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)}),_z \end{aligned} \quad (4.103)$$

Związki fizyczne opisujące przyjęty ośrodek można w przypadkach anizotropii zawartych w przedziale <izotropia, ortotropia> zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij}^{(i)} = G_{ij}^{(i)} \varepsilon_{ij}^{(i)} + \delta_{ij} c_{jk}^{(i)} \varepsilon_{kk}^{(i)} \quad i, j = x, y, z \quad (4.104)$$

przy czym δ_{ij} jest deltą Kroneckera.

Występujące w równaniach (4.106) parametry materiałowe $G_{ij}^{(i)}$ oraz $c_{jk}^{(i)}$ i -tej warstwy tworzą macierze:

$$\mathbf{G}^{(i)} = \begin{bmatrix} G_{xx}^{(i)} & G_{xy}^{(i)} & G_{xz}^{(i)} \\ & \vdots & \\ sym & & G_{zz}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & c_{xz}^{(i)} \\ & & \vdots \\ sym & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

W przypadku ośrodka izotropowego parametry te wyrażają się przez techniczne stałe wzorami:

$$\begin{aligned} G_{(ii)} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G_{(ij)} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \quad i \neq j \\ G_{(ij)} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(2-\nu)} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (4.106)$$

Na podstawie związków (4.103) i (4.104) otrzymuje się pole naprężenia o następujących składowych:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} &= \delta_{\alpha\beta} c_{\beta z}^{(i)} (w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)})_{,z} \\ \sigma_{\alpha z}^{(i)} &= \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(i)} (w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)})_{,\alpha} \\ \sigma_{zz}^{(i)} &= G_{\alpha 3}^{(i)} (w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)})_{,z} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Wyrażenie na energię sprężystą (por. zależność (3.67)) przyjmuje w rozpatrywanym zagadnieniu następującą postać:

$$\Pi_W = \frac{1}{2} \sum_{(i)=1}^n \iiint_{V^{(i)}} (\sigma_{zz}^{(i)} \varepsilon_{zz}^{(i)} + 2\sigma_{\alpha z}^{(i)} \varepsilon_{\alpha z}^{(i)}) dV^{(i)}, \quad (4.108)$$

która wynika z przyjętego założenia (4.98)₁.

Podstawiając do zależności (4.108) związki (4.103) i (4.107) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Pi_W &= \frac{1}{2} \sum_{(i)=1}^n \iint_{h^{(i)}} \{ G_{zz}^{(i)} [(w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)})_{,z}]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(i)} [(w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)})_{,\alpha}]^2 \} dz^{(i)} d\Omega \end{aligned} \quad (4.109)$$

gdzie przez $\int_{h^{(i)}}$ oznaczono umownie całkowanie w granicach grubości odpowiedniej warstwy.

Całkowita energia potencjalna przy uwzględnieniu pracy sił zewnętrznych ma postać:

$$\Pi_C = \Pi_W + L \quad (4.110)$$

gdzie Π_W określa zależność (4.109), natomiast potencjał sił zewnętrznych opisany jest następująco:

$$L = \sum_{(i)=1}^n \int_{V^{(i)}} q^{(i)}(x_\alpha) \cdot w^{(i)}(x, y, z) dV^{(i)} \quad (4.111)$$

4.5.2. Specyfikacja makroelementu podłoża

Związek (4.110) stanowi podstawę do uzyskania równań MES. W tym celu ciągły model podłoża zostaje podzielony wzajemnie prostopadłymi płaszczyznami pionowymi na elementy skończone (rys. 4.15) [10].

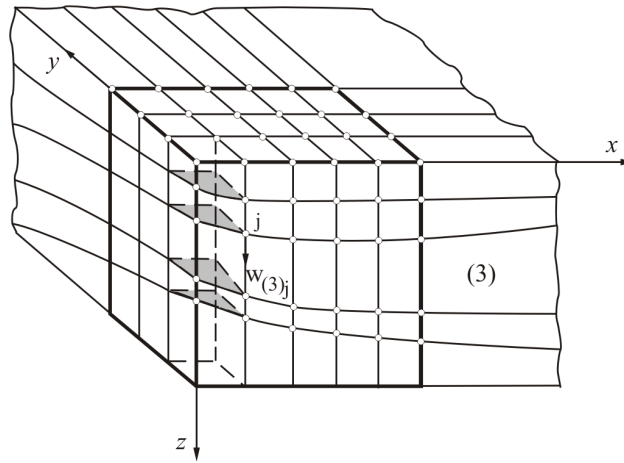
Makroelement podłoża jest zbiorem płaskich elementów skończonych pokrywających powierzchnie graniczne warstw (rys. 4.16).

Funkcjonał (4.111) można przedstawić w postaci sumy energii potencjalnych poszczególnych warstw:

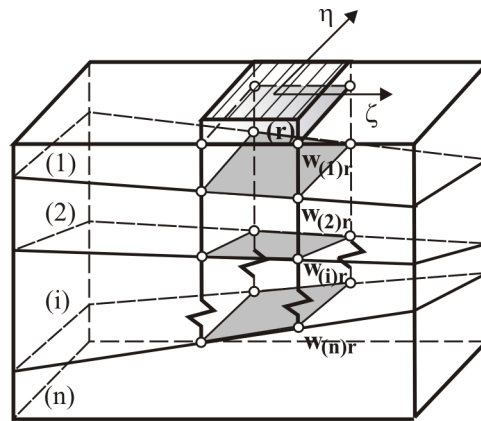
$$\Pi_W = \frac{1}{2} (\Pi_W^{(1)} + \Pi_W^{(2)} + \dots + \Pi_W^{(n)}) \quad (4.112)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Pi_W^{(i)} = & \iint_{\Omega} \int_{h^{(i)}} \{ G_{zz}^{(i)} [(w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)})_{,z}]^2 + \\ & + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(i)} [(w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)})_{,\alpha}]^2 \} dz^{(i)} d\Omega \end{aligned} \quad (4.113)$$



Rys. 4.15. Dyskretyzacja MES podłoża warstwowego



Rys. 4.16. Makroelement podłoża warstwowego

Analogicznie można przedstawić potencjał sił zewnętrznych (4.111):

$$L = L^{(1)} + L^{(2)} + \dots + L^{(n)} \quad (4.114)$$

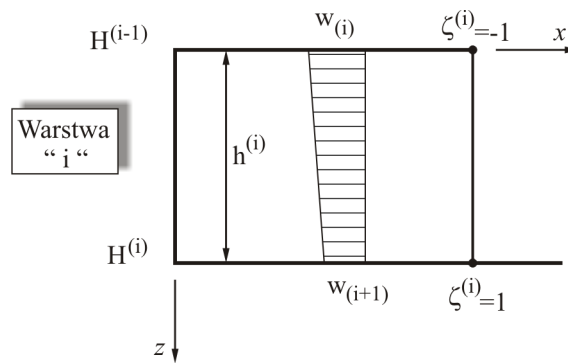
gdzie:

$$L^{(i)} = \iint_{\Omega} \int_{h^{(i)}} q^{(i)}(x, y) [w_{(i)}(x, y) f_{(i)}(x, y, z) + w_{(i+1)}(x, y) f_{(i+1)}(x, y, z)] dz^{(i)} d\Omega \quad (4.115)$$

Widoczne jest, że w funkcjonale $\Pi_W^{(i)}$ i -tej warstwy występują 1. pochodne funkcji ugięcia, a więc w modelu skończenie elementowym funkcje aproksymacyjne powinny być z przestrzeni $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Dla i -tej warstwy (rys. 4.17) przyjmuje się liniowy rozkład ugięć wzdłuż grubości warstwy, opisany funkcjami kształtu:

$$\begin{aligned} N_{(i)} &= 0,5(1 - \xi^{(i)}) \\ N_{(i+1)} &= 0,5(1 + \xi^{(i)}) \end{aligned} \quad (4.116)$$



Rys. 4.17. Liniowy rozkład przemieszczeń w obrębie i -tej warstwy

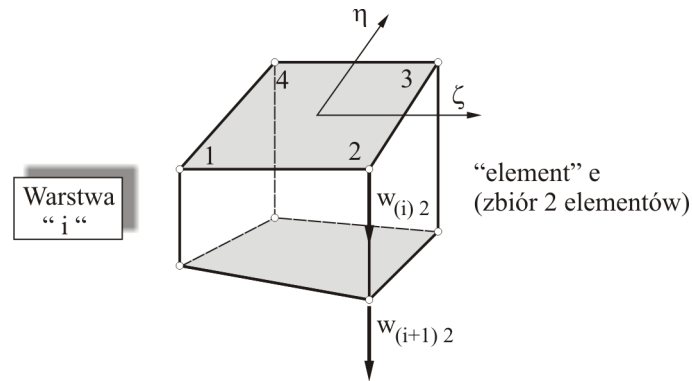
Tak więc funkcje interpolacyjne $f_{(i)}$ i $f_{(i+1)}$ określone są następująco:

$$\begin{aligned} f_{(i)} &= N_{(i)} \\ f_{(i+1)} &= N_{(i+1)} \end{aligned} \quad (4.117)$$

Ugięcie i -tej warstwy można zatem zapisać zgodnie z zależnością (por. zależność (4.98)):

$$\begin{aligned} w^{(i)}(x, y, z) &= w_{(i)}(x, y) N_{(i)} + w_{(i+1)}(x, y) N_{(i+1)} = \\ &= [N_{(i)} \quad N_{(i+1)}] \begin{Bmatrix} w_{(i)} \\ w_{(i+1)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.118)$$

W obrębie powierzchni granicznych i -tej warstwy przyjmuje się czterowęzłowe elementy prostokątne o SSW=1 (rys. 4.18).



Rys. 4.18. Elementy skończone usytuowane na powierzchniach granicznych i -tej warstwy

Wektor przemieszczeń węzłowych dla i -tej warstwy ma zatem postać:

$$\delta^{(i)} = [\delta_{(i)} \quad \delta_{(i+1)}]^T \quad (4.119)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \delta_{(i)} &= [w_{(i)1} \quad w_{(i)2} \quad \dots \quad w_{(i)r}]^T \\ \delta_{(i+1)} &= [w_{(i+1)1} \quad w_{(i+1)2} \quad \dots \quad w_{(i+1)r}]^T, \quad r = 4 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Wektor przemieszczeń węzłowych makroelementu (rys. 4.16) przedstawia się następująco:

$$\delta^M = [\delta^{(1)} \quad \delta^{(2)} \quad \dots \quad \delta^{(n-1)}]^T = [\delta_{(1)} \quad \delta_{(2)} \quad \dots \quad \delta_{(n)}]^T \quad (4.121)$$

Zgodnie z podejściem Ritza związek między przemieszczeniami wewnątrz elementu a przemieszczeniami węzłowymi opisuje zależność:

$$w_{(i)} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} w_{(i)1} \\ w_{(i)2} \\ w_{(i)3} \\ w_{(i)4} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \delta_{(i)}$$

$$w_{(i+1)} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} w_{(i+1)1} \\ w_{(i+1)2} \\ w_{(i+1)3} \\ w_{(i+1)4} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(i+1)} \quad (4.122)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,25(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= 0,25(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= 0,25(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= 0,25(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (4.123)$$

Podstawiając związki (4.117) i (4.122) do wyrażeń (4.113) oraz (4.115) odniesionych do elementu „e” otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Pi_w^{(i)e} &= \iint_{\Omega^e} \int_{h^{(i)}} \{ G_{zz}^{(i)} [(\mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(i)} N_{(i)} + \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(i+1)} N_{(i+1)})_{,z}]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(i)} [(\mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(i)} N_{(i)} + \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(i+1)} N_{(i+1)})_{,\alpha}]^2 \} dz^{(i)} d\Omega^e \end{aligned} \quad (4.124)$$

oraz:

$$L^{(i)e} = \iint_{\Omega^e} \int_{h^{(i)}} q^{(i)} [\mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(i)} N_{(i)} + \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(i+1)} N_{(i+1)}] dz^{(i)} d\Omega^e \quad (4.125)$$

Biorąc pod uwagę zależność:

$$\xi^{(i)} = \frac{z}{h^{(i)}} [z - H^{(i-1)}] - 1 \quad (4.126)$$

otrzymuje się:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi^{(i)}} \cdot d\xi^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{2} d\xi^{(i)} \quad (4.127)$$

Zatem:

$$\Pi_w^{(i)e} = \iint_{\Omega^e} \int_{h^{(i)}} (\bullet) dz^{(i)} d\Omega^e = \iint_{\Omega^e} \int_{-1}^1 (\bullet) d\Omega^e \frac{h^{(i)}}{2} d\xi^{(i)} \quad (4.128)$$

oraz:

$$L^{(i)e} = \iint_{\Omega^e} \int_{h^{(i)}} (\bullet) dz^{(i)} d\Omega^e = \iint_{\Omega^e} \int_{-1}^1 (\bullet) d\Omega^e \frac{h^{(i)}}{2} d\xi^{(i)} \quad (4.129)$$

Dokonując ścisłego całkowania analitycznego zależności (4.128) i (4.129) względem zmiennej $\xi^{(i)}$, co jest zadaniem nieskomplikowanym wobec postaci funkcji kształtu (4.116), otrzymuje się funkcjonal $\Pi_w^{(i)e}$ i potencjał sił zewnętrznych $L^{(i)e}$ zależne jedynie od współrzędnych x, y . Tak więc:

$$\begin{aligned} \Pi_w^{(i)e}(x, y, z) &\rightarrow \Pi_w^{(i)e}(x, y) \\ L^{(i)e}(x, y, z) &\rightarrow L^{(i)e}(x, y) \end{aligned} \quad (4.130)$$

Funkcjonał energii potencjalnej makroelementu przedstawia się zgodnie z zależnością (4.114) następująco:

$$\Pi_w^M = \Pi_w^{(1)e} + \Pi_w^{(2)e} + \dots + \Pi_w^{(n)e} \quad (4.131)$$

Podobnie można przedstawić potencjał sił zewnętrznych makroelementu (por. zależność (4.114)):

$$L^M = L^{(1)e} + L^{(2)e} + \dots + L^{(n)e} \quad (4.132)$$

Na podstawie zależności (3.77) uzyskuje się:

$$\frac{\partial \Pi_C^M}{\partial \delta^e} = \frac{\partial (\Pi_w^M + L^M)}{\partial \delta^e} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi_C^M}{\delta_{(1)}} \\ \frac{\partial \Pi_C^M}{\delta_{(2)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi_C^M}{\delta_{(n)}} \end{array} \right\} = \mathbf{k}_w^M \boldsymbol{\delta}^M + \mathbf{F}^M \quad (4.133)$$

gdzie macierz sztywności makroelementu \mathbf{k}_w^M można przedstawić w następującej formie:

$$\mathbf{k}_W^M = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_W^{11} & \mathbf{k}_W^{12} & \cdots & \mathbf{k}_W^{1n} \\ & \mathbf{k}_W^{22} & \cdots & \mathbf{k}_W^{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & & & \mathbf{k}_W^{nn} \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Podmacierze \mathbf{k}_W^{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) macierzy \mathbf{k}_W^M opisuje wyrażenie (w którym nie uwzględniono całkowania analitycznego względem zmiennej $\xi^{(i)}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{Wrm}^{ik} = & \iint_{\Omega^e} \sum_{(i)=1}^n \int_{h^{(i)}} \{ G_{zz}^{(i)} N_r N_m N_{(i),z} N_{(k),z} + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(i)} (N_{m,\alpha} N_{(k)} + \\ & + N_m N_{(k),\alpha}) (N_{r,\alpha} N_{(i)} + N_m N_{(i),\alpha}) \} dz^{(i)} d\Omega^e \\ & r, m = 1, 2, \dots, 4 \end{aligned} \quad (4.135)$$

Wektor \mathbf{F}^M przedstawia się natomiast następująco:

$$\mathbf{F}^M = [\mathbf{F}_{(1)} \quad \mathbf{F}_{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{F}_{(n)}]^T \quad (4.136)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}_{(i)} = [F_{(i)1} \quad F_{(i)2} \quad \cdots \quad F_{(i)4}]^T \quad (4.137)$$

oraz:

$$F_{(i)r} = \iint_{\Omega^e} \int_{h^{(i)}} q^{(i)} N_{(i)} N_r dz^{(i)} d\Omega^e \quad r = 1, 2, \dots, 4 \quad (4.138)$$

Warto nadmienić, że w odróżnieniu od przyjętego w modelu K-N rozkładu modułu sprężystości wzdłuż grubości warstwy (por. zależność (4.103)) można przyjąć opis bardziej zbliżony do rzeczywistości, zgodnie z poniższym wyrażeniem:

$$E^{(i)}(z) = E_0^{(i)} + E_1^{(i)}(z) \quad (4.139)$$

przy czym współczynniki E_0 i E_1 wyznacza się dla odpowiedniej warstwy na podstawie liniowej regresji wartości modułów uzyskanych z pomiarów na różnych głębokościach.

4.5.3. Uwagi dotyczące kalibracji parametrów modelu podłoża warstwowego

Praktyczny sens stosowania makroelementu podłoża warstwowego polega na redukcji analizy MES zagadnienia trójwymiarowego do dwóch wymiarów przy wykorzystaniu znanych funkcji rozkładu przemieszczeń pionowych wzdłuż grubości warstw. W racjonalnym makroelemente warstwowym uwzględnia się też znaną (na przykład [4]) zmienność modułów Younga $E^{(i)}$ i Kirchhoffa $G^{(i)}$ na głębokości. Innym aspektem tej operacji jest znaczne przyspieszenie procesu obliczeniowego. Zamiast trójwymiarowej siatki elementów skończonych podłoża o trzech stopniach swobody w każdym węźle stosuje się zbiór płaskich elementów na granicach warstwy o jednym stopniu swobody.

Wymienione cechy modelu wskazują na jego dużą przydatność w liniowych analizach zagadnień współpracy konstrukcji z podłożem gruntowym. Względnie miarodajna ocena użyteczności modelu wymaga jednak odniesienia się do problemu kalibracji jego parametrów. W modelu podłoża warstwowego parametrami tymi są moduł odkształcalności i moduł Kirchhoffa warstwy: $E^{(i)}$ i $G^{(i)}$. Możliwość wiarygodnej identyfikacji tych parametrów stwarzają współczesne badania penetracyjne gruntu. Wymienić tu można sondowanie statyczne CPTU (zalecane przez system europejskich norm geotechnicznych ujętych w EUROKODZIE 7), badania dylatometrem (testy DMT) względnie badania presjometryczne [4]. Przy wykorzystaniu sondy CPTU wartości parametrów geotechnicznych mierzone są w sposób ciągły na całym przelocie otworu badawczego. Uzyskane z sondowań dane pozwalają na precyzyjne określenie zarówno modułu odkształcalności na całej badanej głębokości, jak również granic warstw geotechnicznych o zbliżonych parametrach wytrzymałościowych. Eliminuje to uciążliwe poszukiwanie zależności teoretycznych zmian modułu odkształcalności, które z reguły nie odzwierciedlają jego rzeczywistego rozkładu, jako że pomija się w nich wpływ prekonsolidacji (OCR). Szczegółowy opis sposobów pozyskiwania realistycznych oszacowań modułu odkształcalności podłoża znaleźć można w pracy [4].

Rozdział 5

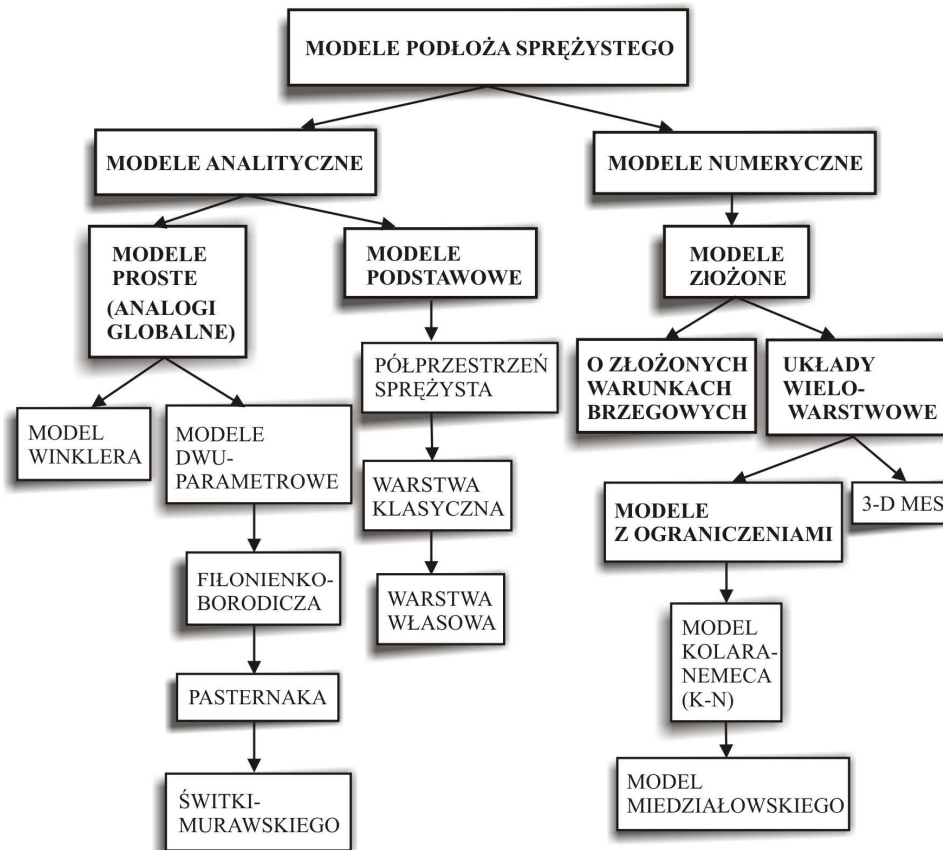
PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ MRS I MES W ANALIZIE STATYCZNEJ KONTRUKCJI POSADOWIONYCH NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

5.1. Uwagi wstępne

W niniejszym rozdziale przedstawione będą przykłady zastosowań metody różnic skończonych i metody elementów skończonych w rozwiązywaniu zarówno prostych zagadnień współpracy konstrukcji z podłożem sprężystym, jakimi są belki na podłożu Winklera, jak i zagadnień złożonych, do których niewątpliwie zaliczyć można płyty wyższego rzędu na podłożu warstwowym. Przyjęte do opisu zachowania się ośrodka gruntowego pod obciążeniem modele podłoża sprężystego, a mianowicie model Winklera, warstwa Własowa i model K-N są reprezentantami trzech zasadniczych grup modeli podłoża stosowanych w zagadnieniach interakcji konstrukcja – podłoże, tj. modeli prostych, podstawowych i złożonych. Ilustruje to schemat klasyfikacyjny modeli podłoża przedstawiony na rys. 5.1 [3].

Pierwsza grupa modeli podłoża – analogi globalne, której przedstawicielem jest model Winklera obejmuje schematy podłoża, które nie reprezentują masywu gruntowego w ścisłym sensie, a jedynie są zastępczymi układami mechanicznymi, konstruowanymi w ten sposób, aby rozkład ugięć powierzchni dość dobrze naśladował krzywe doświadczalne. Model Winklera, który jest zestawiony z wzajemnie niepowiązanych sprężyn o jednakowej

charakterystyce sprężystej, cechuje lokalność i proporcjonalność związku „obciążenie – osiadanie”, co oznacza daleko idącą idealizację rzeczywistego masywu. W rezultacie model ten nie daje pewnych oszacowań, a jego dobra zgodność z rezultatami badań doświadczalnych i bardziej precyzyjnych analiz numerycznych jest często przypadkowa.



Rys. 4.1. Schemat klasyfikacyjny modeli podłoża sprężystego stosowanych w zagadnieniach interakcji konstrukcja - podłoże

Warstwa Własowa należy do grupy modeli podstawowych, w skład której wchodzi także modele półprzestrzeni sprężystej i warstwy klasycznej. W odróżnieniu od analogów globalnych, podstawowe równania modeli tej grupy nie są zależnościami założonymi *a priori*, lecz wynikają z rozwiązania

zagadnień klasycznej teorii sprężystości dla ciała izotropowego i jednorodnego. W wyniku tego parametry E , ν tych modeli są średnimi parametrami materiałowymi, które można wyznaczyć w laboratorium lub w terenie. Modele podstawowe wykazują niezłą jakościową zbieżność do wyników pomiarów, a model Własowa jest szczególnie interesujący z uwagi na łatwość implementacji numerycznej i możliwość metodycznego doboru grubości rozpatrywanej warstwy sprężystej.

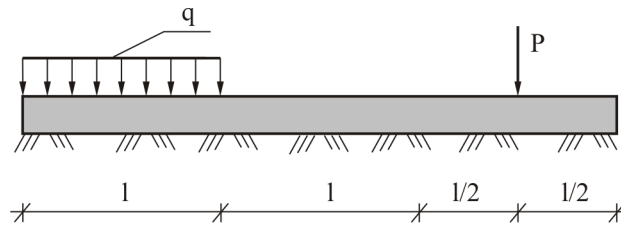
Trzecia grupa modeli – modele złożone, stanowi rozwinięcie modeli podstawowych w kierunku możliwie najlepszych aproksymacji rzeczywistego masywu gruntowego. W ramach liniowej teorii sprężystości należy wyróżnić tutaj model K-N, który stanowi energetyczny odpowiednik warstwy Własowa. Umożliwia on rozpatrzenie dowolnego uwarstwienia podłoża, jak również zmienności modułu odkształcalności wraz z głębokością. Ścisłe potraktowanie tego problemu wymagałoby zastosowania modelu strefy uwarstwionej, uwzględniającej różne parametry warstw oraz warunki zszycia na ich stykach, co prowadziłoby w rezultacie do trójwymiarowej analizy MES. Uwzględnienie uwarstwienia w modelu K-N jest nieporównywalnie prostsze, a przy tym wprowadzenie podziału na warstwy, nawet w przypadku podłoża jednorodnego zwiększa dokładność uzyskanych wyników w porównaniu z warstwą Własowa.

Warto nadmienić, że model Winklera, pomimo swoich mankamentów jest w dalszym ciągu dość powszechnie wykorzystywany w analizie zagadnień współpracy konstrukcji z podłożem gruntowym, głównie z uwagi na łatwość implementacji numerycznej. Jednak tylko wtedy, gdy odkształcalna warstwa gruntu ma małą grubość, model ten wydaje się być odpowiedni, dając wyniki zbieżne z rezultatami dla warstwy klasycznej. W chwili obecnej model Winklera wykorzystywany jest m.in. w takich programach MES jak SAP 2000, Robot, Plato 4.0 czy ABC płyta – wersja podstawowa.

Analizowane w niniejszym rozdziale modele podłoża, włącznie z przedstawionym w rozdziale 4 modelem podłoża warstwowego, cechuje sprężystość i liniowość związków „naprężenie-odkształcenie”. Powszechnie wiadomo, że związki te dla ośrodka gruntowego charakteryzują się silną nieliniowością; w świetle nowych badań trójosiowych i badań dynamicznych – także w zakresie małych i bardzo małych odkształceń [4]. Współcześnie dostrzega się potrzebę wdrażania modeli uwzględniających niesprężystość i silną nieliniowość ośrodka gruntowego do analiz obliczeniowych geotechniki. Nie oznacza to jednak całkowitej rezygnacji z sensownych modeli liniowo-sprężystych, takich jak omówiony wcześniej model warstwowy typu K-N. Jest też inny ważny powód, by stosować i doskonalić takie modele. Analizy MES i WMRS zagadnień liniowej sprężystości stanowią wszak powtarzalne, bazowe ogniwo wszystkich procedur przyrostowo-iteracyjnych, stosowanych w analizach zagadnień fizycznie nieliniowych, charakterystycznych dla ośrodków hiposprężystych, sprężysto-plastycznych, itp.

5.2. Belka spoczywająca swobodnie na podłożu Winklera - WMRS

Rozpatruje się belkę o stałym na długości module sprężystości E i przekroju poprzecznym A spoczywającą swobodnie na podłożu sprężystym (rys. 5.2). Zakłada się, że w płaszczyźnie kontaktu nie występują siły tarcia, a więzy są dwustronne. Poszukuje się rozkładu ugięć i momentów zginających w belce.



Rys. 5.2. Belka spoczywająca swobodnie na podłożu sprężystym

Równanie osi odkształconej belki (4.1) ma dla rozważanego zagadnienia postać:

$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) - q_s(x) \quad (5.1)$$

gdzie $q_s(x)$ jest odporem gruntu (reakcją podłoża).

Warunki brzegowe dla belki spoczywającej swobodnie na podłożu wyrażają się w zanikaniu sił wewnętrznych (tj. momentu zginającego i siły poprzecznej) na końcach swobodnych belki. Zachodzi zatem:

$$\begin{aligned} M|_{x=0} &= -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ M|_{x=3l} &= -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=3l} = 0 \\ Q|_{x=0} &= -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0 \\ Q|_{x=3l} &= -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=3l} = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Rozpatruje się więc zagadnienie brzegowe (1.1), w którym:

$$\begin{aligned}
 L &\equiv \frac{d^4}{dx^4} \\
 f &\equiv -(q - q_s) \\
 u &\equiv w(x)
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

przy danych warunkach brzegowych opisanych równaniami (5.2).

Model Winklera należy do analogów globalnych, istotą których jest symulacja zależności „obciążenie-ugięcie” powierzchni podłoża za pomocą zastępczego układu mechanicznego (sprężyn z membraną, warstwy ścinanej itp.). Analogi globalne abstrahują od rzeczywistej budowy masywu gruntowego, oraz od związków „naprężenie-odkształcenie” w jego punktach. W modelu tym związek między siłą (reakcją podłoża) a ugięciem ma charakter liniowo-proporcjonalny:

$$q_s = k_0 w(x) \tag{5.4}$$

gdzie k_0 jest współczynnikiem proporcjonalności (parametrem modelu).

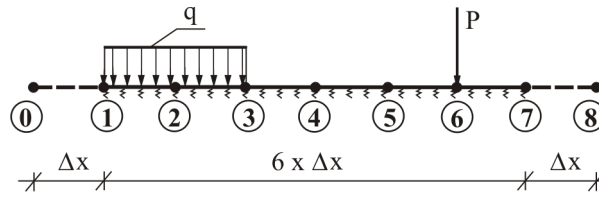
Przy uwzględnieniu związku (5.4) równanie (5.1) przybiera postać:

$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) - k_0 w(x) \tag{5.5}$$

Zależność (5.5) jest równaniem osi odkształconej belki spoczywającej na podłożu Winklera. Funkcjonał równoważny równaniu (5.5), określający całkowitą energię potencjalną belki na podłożu Winklera i będący sumą energii potencjalnej belki (2.72), pracy podłoża sprężystego i pracy sił zewnętrznych ma postać:

$$\begin{aligned}
 \Pi_C = \Pi_b + \Pi_s + L_z = & \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} k_0 \int_0^l [w(x)]^2 dx - \\
 & - \int_0^l q w(x) dx
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Funkcjonał (5.6) stanowi podstawę do zastosowania do rozwiązania sformułowanego zagadnienia brzegowego wariacyjnej metody różnic skończonych. W tym celu dokonuje się podziału belki równomierną siatką dyskretyzacyjną o boku oczka $\Delta x = l/2$ (rys. 5.3).



Rys. 5.3. Belka z naniesioną siatką dyskretyzacyjną

Dyskretna postać wyrażenia (5.6), po zastąpieniu dla każdego węzła drugiej pochodnej odpowiednim ilorazem różnicowym przybierze postać:

$$\begin{aligned} \Pi_C = \frac{1}{2} EJ \left[\sum_{k=1}^7 \left(\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} \right)^2 \Delta x_k \right] + \frac{1}{2} k_0 \sum_{k=1}^7 w_k^2 \Delta x_k - \\ - \sum_{k=1}^7 q_k w_k \Delta x_k \end{aligned} \quad (5.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = q_3 = q \\ q_4 = q_5 = q_7 = 0 \\ q_6 = \frac{P}{\Delta x} \end{aligned} \quad (5.8)$$

W zależności (5.7) Δx_k dla węzłów skrajnych „1” i „7” jest równe $0,5\Delta x$. Dla pozostałych węzłów $\Delta x_k = \Delta x$ ($k = 2, 3, \dots, 6$).

Ugięcia fikcyjne w_0 i w_8 wyznacza się z warunków brzegowych (5.2)_{1,2}:

$$\begin{aligned} M_1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_1 = 0 \Rightarrow \frac{w_2 - 2w_1 + w_0}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow w_0 = 2w_1 - w_2 \\ M_7 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_7 = 0 \Rightarrow \frac{w_8 - 2w_7 + w_6}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow 2w_7 - w_6 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Równania algebraiczne na wyznaczenie ugięć kolejnych węzłów otrzymuje się z warunku (2.79), który obecnie przybiera postać:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial w_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (5.10)$$

Przykładowo dla $i = 1$ (węzeł „1”) na podstawie zależności (5.10) otrzymuje się:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial w_1} = \frac{1}{2} EJ \left(2 \cdot \frac{w_3 - 2w_2 + w_1}{\Delta x^2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} \right) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} k_0 2w_1 \cdot 0,5\Delta x - q \cdot 0,5\Delta x = 0 \quad (5.11)$$

Stąd:

$$\frac{EJ}{\Delta x^4} (w_3 - 2w_2 + w_1) + \frac{1}{2} k_0 w_1 = \frac{q}{2} \quad (5.12)$$

Postępując analogicznie dla kolejnych węzłów siatki podziału uzyskuje się układ równań, który w zapisie macierzowym przedstawia się następująco:

$$\begin{bmatrix} D1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & D3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & & & D3 & -4 & 1 & 0 \\ & & & & D3 & -4 & 1 \\ & & & & & D2 & -2 \\ sym & & & & & & D1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{Bmatrix} = B \cdot \begin{Bmatrix} q/2 \\ q \\ q \\ 0 \\ 0 \\ P/\Delta x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

gdzie:

$$B = \frac{\Delta x^4}{EJ}, \quad D1 = 1 + \frac{B}{2} k_0, \quad D2 = 5 + B k_0, \quad D3 = 6 + B k_0$$

Dla danych:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1 \quad [m] \\ EJ &= 1,432 \cdot 10^5 \quad [N m^2] \\ k_0 &= 10^7 \quad [N/m] \\ q &= 2 \cdot 10^3 \quad [N/m] \\ P &= 10^4 \quad [N] \end{aligned} \quad (5.14)$$

otrzymuje się następujące rozwiązanie układu (5.13):

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,009 \\ 1,378 \\ 1,777 \\ 2,280 \\ 2,975 \\ 3,792 \\ 4,455 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \quad [m] \quad (5.15)$$

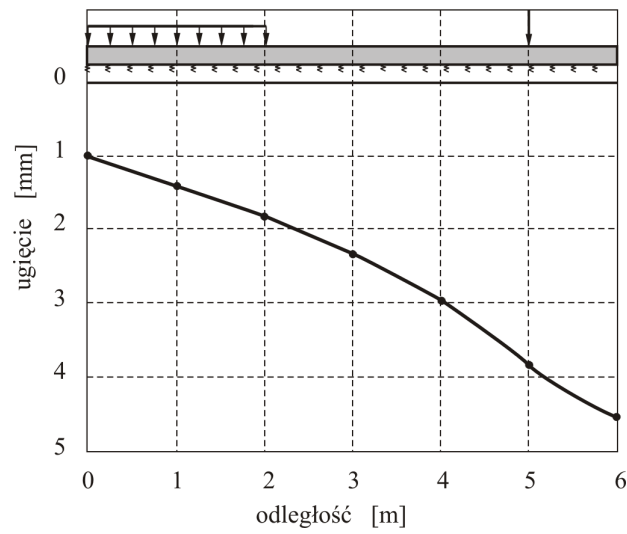
Na podstawie uzyskanych wartości ugięć (5.15) oblicza się według zależności (2.25) zapisanej różnicowo dyskretne wartości momentów zginających:

$$M_k = -EJ \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} \quad k = 2, 3, \dots, 6 \quad (5.16)$$

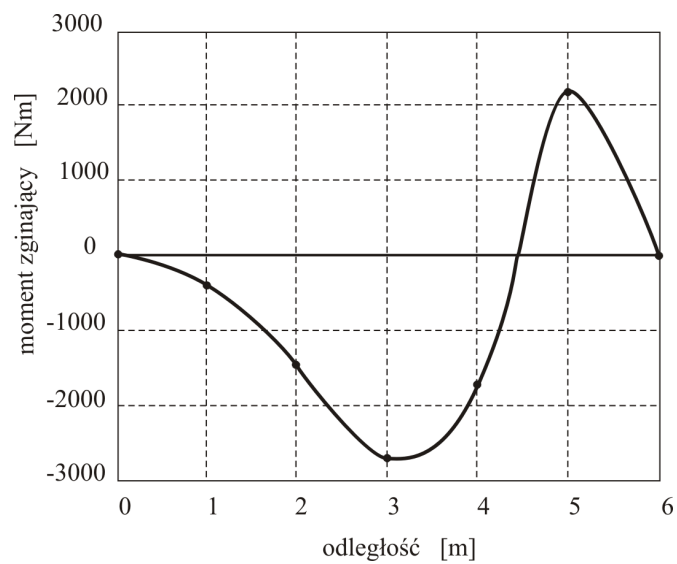
Otrzymuje się:

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -429 \\ -1489 \\ -2749 \\ -1749 \\ 2205 \end{Bmatrix} \quad [Nm] \quad (5.17)$$

Zobrazowaniem wykonanych obliczeń są wykresy linii ugięcia i momentów zginających analizowanej belki przedstawione odpowiednio na rys. 5.4 i 5.5.



Rys. 5.4. Rozkład ugięć w belce na podłożu Winklera



Rys. 5.5. Rozkład momentów zginających w belce na podłożu Winklera

5.3. Belka spoczywająca swobodnie na podłożu Własowa – WMRS

Analizuje się analogicznie jak w podrozdziale 5.2 belkę na podłożu sprężystym, przy czym jako model podłoża rozpatruje się warstwę Własowa opisaną równaniem różniczkowym (3.36). Biorąc pod uwagę przyjęty model podłoża równanie osi odkształconej belki (5.1) przybierze obecnie postać:

$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) - \left[-2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k w(x) \right] \quad (5.18)$$

Parametry k i t modelu Własowa, charakteryzujące pracę podłoża odpowiednio na ściskanie i ścinanie wyrażają się poprzez parametry materiałowe w sposób następujący:

$$k = \int_0^h G_{zz} (f, z)^2 dz$$

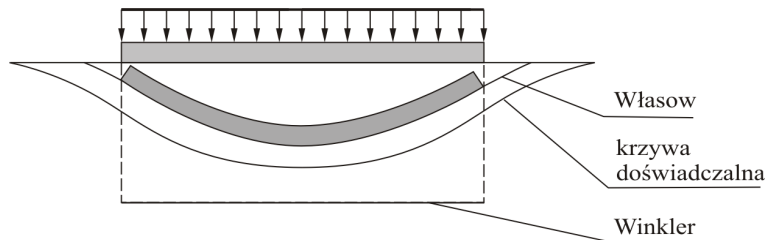
$$t = \frac{1}{2} \int_0^h G f^2 dz \quad (5.19)$$

gdzie h jest grubością warstwy, $G_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1+2\nu)}$ (por. zależność (4.106)),

natomiast f jest funkcją definiującą pionowy rozkład przemieszczenia w obrębie warstwy opisaną zależnością (4.100) dla $i=1$.

Można zauważyć, że podłoże Własowa jest szczególnym przypadkiem omówionego w podrozdziale 4.5.1 podłoża warstwowego, tj. opisują go związki dla modelu warstwowego, w którym $i=1$.

W odróżnieniu od modelu Winklera, podłoże Własowa lepiej odzwierciedla rzeczywistą nieckę osiadań pod fundamentem, co zobrazowano dla przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego na rys. 5.6.



Rys. 5.6. Porównanie rozkładu osiadań dla modelu Winklera i Własowa z krzywą doświadczalną

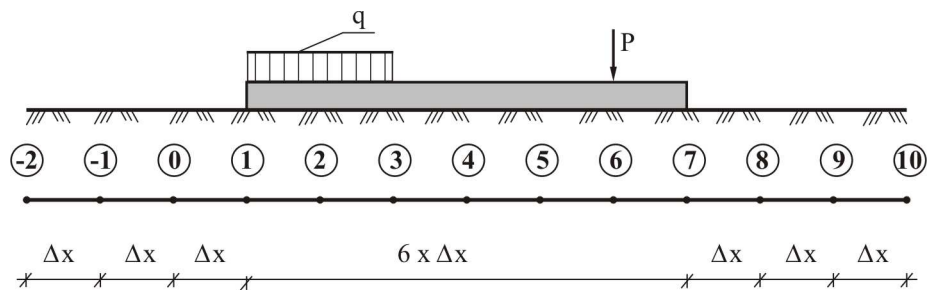
Widoczne jest, że w przypadku podłoża Winklera ugięcia rozkładają się tylko w obrysie fundamentu, podczas gdy dla modelu Własowa ugięcia zanikają w znacznej odległości od fundamentu. Wynika stąd konieczność uwzględnienia w obliczeniach konstrukcji spoczywającej na podłożu Własowa oddziaływania podłoża poza obszarem konstrukcji.

Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej układu belka-podłoże Własowa odpowiadający wyrażeniu (5.6) przyjmie obecnie postać:

$$\begin{aligned} \Pi_C = \Pi_b + \Pi_{Wt} + L = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{l_p} \{k [w(x)]^2 + \\ & + t \left[\frac{dw(x)}{dx} \right]^2\} dx - \int_0^l q w(x) dx \end{aligned} \quad (5.20)$$

gdzie przez \int_{l_p} oznaczono umownie całkowanie po długości belki i długości podłoża poza belką.

Funkcjonał (5.20) stanowi punkt wyjścia do zastosowania WMRS do rozwiązania belki posadzonej na podłożu Własowa. Dokonany w tym celu podział siatką dyskretyzacyjną belki i podłoża poza belką przedstawiono na rys. 5.7. Przyjęto przy tym, że ugięcia podłoża zanikają w odległości dwukrotnie większej od przyjętego boku oczka siatki podziału.



Rys. 5.7. Obszar belki i podłoża poza belką z naniesioną siatką dyskretyzacyjną

Zastępując w zależności (5.20) pochodne odpowiednimi ilorazami różnicowymi otrzymuje się dyskretną postać funkcyjonału energii potencjalnej układu belka - podłoże Własowa:

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \frac{1}{2} EJ \left[\sum_{k=1}^7 \left(\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k+1}}{\Delta x^2} \right)^2 \Delta x_k \right] + \frac{1}{2} k_0 \sum_{k=1}^9 w_k^2 \Delta x_k^p + \\ & + \frac{1}{2} t \left[\sum_{k=-1}^9 \left(\frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\Delta x} \right)^2 \Delta x_k^p \right] - \sum_{k=1}^7 q_k w_k \Delta x_k \end{aligned} \quad (5.21)$$

gdzie $\Delta x_1 = \Delta x_7 = \Delta x_{-1}^p = \Delta x_9^p = 0,5\Delta x$, natomiast dla pozostałych węzłów $\Delta x_k = \Delta x_k^p = \Delta x$.

Ugięciami fikcyjnymi dla belki, a więc ugięciami węzłów nie należących do obszaru belki są ugięcia w_0 i w_8 . Wyznacza się je z warunków brzegowych analogicznych do warunków (5.9). Otrzymuje się wówczas:

$$\begin{aligned} w_0 &= 2w_1 - w_2 \\ w_8 &= 2w_7 - w_6 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Intensywność obciążenia $q_1 \div q_7$ dla kolejnych węzłów określa zależność (5.8), ponadto zachodzi również:

$$w_{-2} = w_{-1} = w_9 = w_{10} = 0 \quad (5.23)$$

co jest wynikiem przyjętego założenia odnośnie zanikania ugięć poza belką. Uwzględniając w zależności (5.21) związki (5.22) i (5.23) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \frac{1}{2} EJ \left[\sum_{k=2}^6 \left(\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} \right)^2 \Delta x_k \right] + \frac{1}{2} k_0 \sum_{k=0}^8 w_k^2 \Delta x_k^p + \\ & + \frac{1}{2} t \left[\sum_{k=1}^7 \left(\frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\Delta x} \right)^2 \Delta x_k^p + \left(\frac{w_0}{2\Delta x} \right)^2 0,5\Delta x + \left(\frac{w_1}{2\Delta x} \right)^2 \Delta x + \right. \\ & \left. + \left(\frac{-w_7}{2\Delta x} \right)^2 \Delta x + \left(\frac{-w_8}{2\Delta x} \right)^2 0,5\Delta x \right] - (q_1 w_1 0,5 + q_2 w_2 + \\ & + q_3 w_3 + q_6 w_6) \Delta x \end{aligned} \quad (5.24)$$

Zależność (5.24) oraz zależność (5.10), w której przyjmuje się $i=0,1,\dots,10$ prowadzi do układu równań, umożliwiającego wyznaczenie ugięć kolejnych węzłów siatki podziału. Układ ten przedstawia związek (5.25), w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$A1 = k_0 + 0,375s, \quad A2 = -0,25s, \quad A3 = 1 + k_0B + 0,5R, \quad A4 = 1 - 0,25R$$

$$A5 = -0,25R, \quad A6 = 5 + k_0B + 0,5R, \quad A7 = 6 + k_0B + 0,5R, \quad A8 = -0,25R$$

przy czym:

$$B = \frac{\Delta x^4}{EJ}, \quad R = \frac{t \Delta x^2}{EJ}, \quad s = \frac{t}{\Delta x^2}$$

$$\begin{bmatrix} A1 & 0 & A2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A3 & -2 & A4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A5 & -2 & A6 & -4 & A4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A4 & -4 & A7 & -4 & A4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A4 & -4 & A7 & -4 & A4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A4 & -4 & A7 & -4 & A4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A4 & -4 & A6 & -2 & A8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A4 & -2 & A3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A2 & 0 & A1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5q \\ q \\ q \\ 0 \\ 0 \\ P/\Delta x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

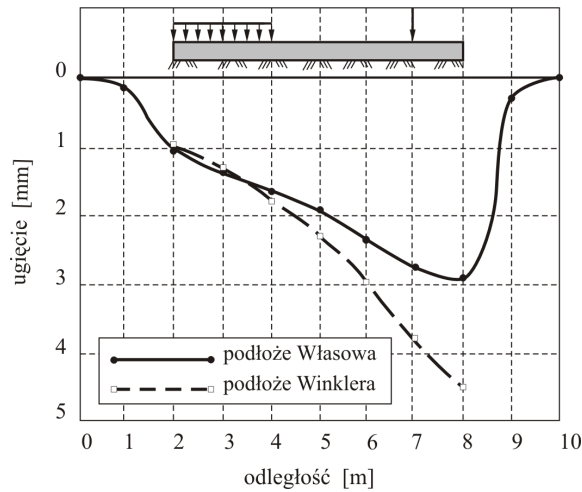
Przyjmując dane (5.14) oraz parametr podłoża $t = 0,5k_0$ otrzymuje się po rozwiązaniu układu (5.25) następujące wartości ugięć kolejnych węzłów:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,422 \\ 10,524 \\ 13,504 \\ 16,408 \\ 19,557 \\ 23,539 \\ 27,588 \\ 29,286 \\ 2,904 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-5} \quad [m] \quad (5.26)$$

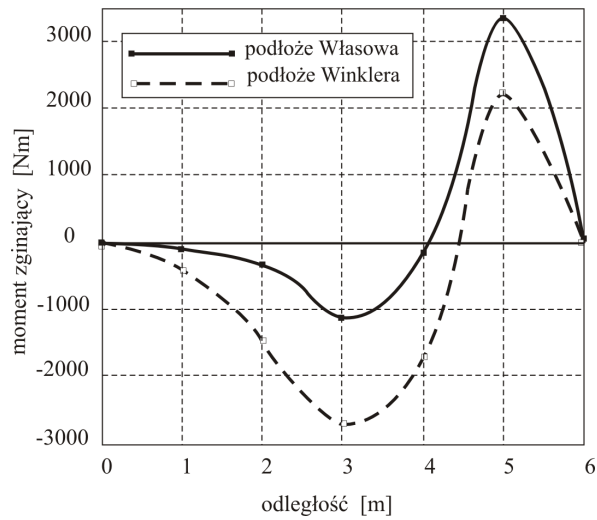
Obliczone na podstawie rozwiązania (5.26) i zależności (5.16) momenty zginające przedstawiają się natomiast następująco:

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -108 \\ -350 \\ -1129 \\ -96 \\ 3366 \end{Bmatrix} \quad [Nm] \quad (5.27)$$

Uzyskane wyniki ugięć i momentów zginających przedstawiono na rysunkach 5.8 i 5.9



Rys. 5.8 Rozkład ugięć belki i podłoża poza belką



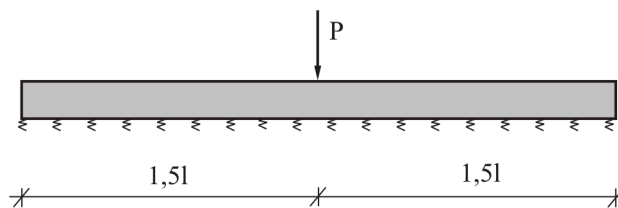
Rys. 5.9. Rozkład momentów zginających w belce

Na rysunkach (5.8) i (5.9) zamieszczono także – celem porównania – odpowiednie wartości otrzymane w podrozdziale 5.2 dla belki na podłożu Winklera. Widoczny jest istotny wpływ przyjętego modelu podłoża na rozkład ugięć i momentów zginających w belce.

5.4. Belka na podłożu Winklera z więzami jednostronnymi – WMRS

Rozważa się belkę jak w podrozdziale 5.2 przyjmując obecnie, że więzy są jednostronne. Oznacza to, że podłoże sprężyste zdolne jest przenosić tylko obciążenia ściskające i że belka może odrywać się od podłoża. Zagadnienie to, które w swojej istocie jest zadaniem nieliniowym można numerycznie rozwiązać postępując drogą kolejnych iteracji. Iteracje te praktycznie dotyczą zwalniania więzów w punktach, w których wystąpiły ujemne wartości ugięć podłoża, czyli w miejscach, gdzie konstrukcja wykazuje tendencje do odrywania się od podłoża. Tym samym więc obszar kontaktu konstrukcji z podłożem zostaje sprowadzony do obszaru rzeczywistej współpracy podłoża z konstrukcją, jako że ośrodek gruntowy nie „pracuje” na rozciąganie.

Przyjmuje się, że belka jest obciążona w środku rozpiętości siłą skupioną (rys. 5.10). Do określenia jest rozkład ugięć w belce przy założeniu więzów jednostronnych.



Rys. 5.10. Belka na podłożu Winklera

Do rozwiązania zadania zastosowano wariacyjną metodę różnic skończonych. Przyjęto analogiczną jak w podrozdziale 5.2 dyskretyzację belki (rys. 5.3). Stąd też równania na wyznaczenie ugięć kolejnych węzłów określa zależność (5.13), w której obecnie zmienia ulega wektor prawych stron w wyniku innego niż w podrozdziale 5.2 sposobu obciążenia belki. Wektor ten określony jest następująco:

$$\mathbf{F}^p = B \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = B \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P/\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

gdzie $B = \frac{\Delta x^4}{EJ}$.

Przyjmując dane:

$$\begin{aligned} EJ &= 17 \cdot 10^4 \text{ [KNm}^2\text{]} \\ P &= 30 \text{ [KN]} \\ l &= 6 \text{ [m]} \\ \Delta x &= 1 \text{ [m]} \\ k_0 &= 25 \cdot 10^4 \text{ [KN / m}^2\text{]} \end{aligned} \quad (5.29)$$

i rozwiązując układ równań (5.13) przy uwzględnieniu zależności (5.28) otrzymuje się następujące wartości ugięć belki na podłożu Winklera:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,085 \\ 0,076 \\ 0,299 \\ 0,536 \\ 0,299 \\ 0,076 \\ -0,085 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ [m]} \quad (5.30)$$

Należy zwrócić uwagę, że uzyskane wartości ugięć (5.30) dotyczą więzów dwustronnych. Widoczne jest, że w węzle „1” i „7” belka wykazuje tendencje do odrywania od podłoża (ujemne wartości ugięć). W kolejnym kroku należy więc zwolnić więzy w tych punktach, czyli rozpatrywać w węzłach „1” i „7” oddzielnie dyskretne równania ugięć belki i podłoża. Prowadzi to do modyfikacji układu równań (5.13), który przybiera obecnie formę:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & D2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & D3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & D3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & D3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & D2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_1^p \\ w_7^p \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P/\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

przy czym

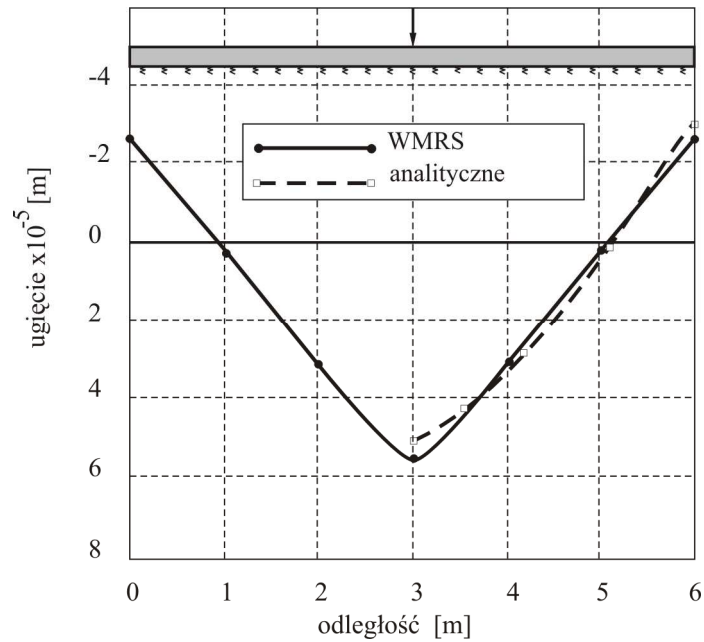
$$B = \frac{\Delta x^4}{EJ}, \quad D2 = 5 + Bk_0, \quad D3 = 6 + Bk_0,$$

natomiast $w_1 \div w_7$ oznaczają ugięcia belki, z kolei w_1^p i w_7^p ugięcia odpowiednich węzłów podłoża.

Po rozwiązaniu układu (5.31) otrzymuje się następujące wartości :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_1^p \\ w_2^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,262 \\ 0,02 \\ 0,302 \\ 0,555 \\ 0,302 \\ 0,02 \\ -0,262 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} [m] \quad (5.32)$$

Uzyskane wartości ugięć (5.32) belki na jednostronnym podłożu Winklera zobrazowano na rys. 5.11. Na rysunku tym zamieszczono także wyniki rozwiązania analitycznego [12] (w obliczu symetrii geometrii i obciążenia – dla połowy rozpiętości belki).

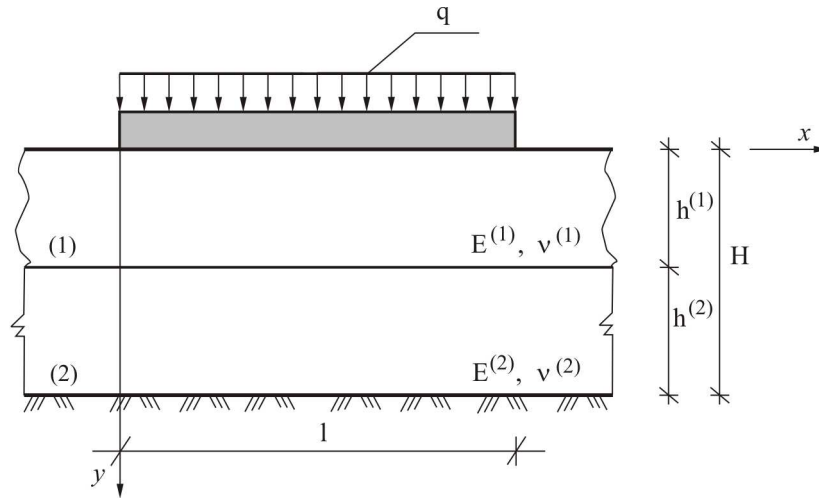


Rys. 5.11. Rozkład ugięć belki na podłożu Winklera z więzami jednostronnymi

Przy przyjętej do obliczeń stosunkowo rzadkiej siatce dyskretyzacyjnej widoczna jest dobra zgodność rozwiązania wariacyjną metodą różnic skończonych belki na jednostronnym podłożu Winklera z rozwiązaniem analitycznym.

5.5. Belka na podłożu dwuwarstwowym - MES

Rozpatrywana w poprzednich przykładach belka posadowiona jest teraz na podłożu, które jest układem dwóch poziomych warstw o różnych grubościach i różnych parametrach materiałowych. Belka poddana jest na całej długości działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego o intensywności q (rys. 5.12). Poszukuje się rozkładu ugięć w belce.



Rys. 5.12. Belka na podłożu dwuwarstwowym

Całkowitą energię potencjalną układu belka – podłoże dwuwarstwowe opisuje zależność:

$$\Pi_C = \Pi_b + \Pi_W + L \quad , \quad (5.33)$$

w której funkcjonal energii potencjalnej belki Π_b oraz potencjał sił zewnętrznych L określają odpowiednio związki (4.5) i (4.7). Energia potencjalna podłoża warstwowego Π_W (por. zależność (4.109)) przyjmuje dla rozważanego układu dwóch warstw postać:

$$\begin{aligned} \Pi_W = & \frac{1}{2} \sum_{(i)=1}^2 \int_l \int_{h^{(i)}} \left\{ G_{yy}^{(i)} \left[\left(w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)} \right)_{,y} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} G_{xy}^{(i)} \left[\left(w_{(i)} f_{(i)} + w_{(i+1)} f_{(i+1)} \right)_{,x} \right]^2 \right\} dy^{(i)} dx \end{aligned} \quad (5.34)$$

gdzie parametry $G_{yy}^{(i)}$ i $G_{xy}^{(i)}$ opisane są zgodnie ze wzorem (4.106) następująco:

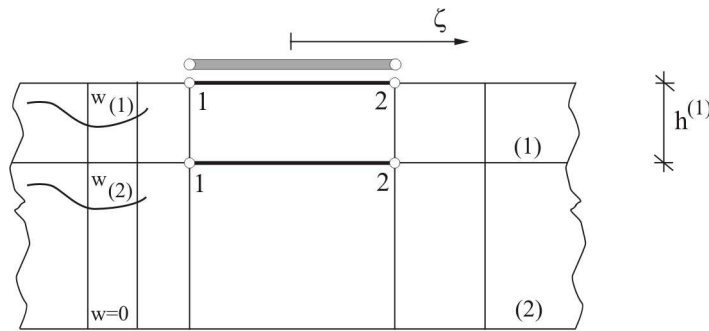
$$G_{yy}^{(i)} = \frac{E^{(i)}(1-\nu^{(i)})}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \quad , \quad G_{xy}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{2(1+\nu^{(i)})} \quad (5.35)$$

Poszukuje się funkcji ugięcia $w_{(i)}$, ($i=1,2$), które minimalizują funkcjonal (5.33) i spełniają warunki:

$$\begin{aligned} w_{(1)}(x) &\equiv w(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} w_{(1)}(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} w_{(2)}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

przy czym $w(x)$ jest ugięciem belki, $w_{(1)}$ i $w_{(2)}$ są ugięciami odpowiednich powierzchni granicznych podłoża.

Do rozwiązania sformułowanego zagadnienia brzegowego wykorzystuje się metodę elementów skończonych. Belka i podłoże dwuwarstwowe zostają podzielone liniami pionowymi, w wyniku czego zdyskretyzowany układ składa się z elementów belkowych i makroelementów podłoża, będących zbiorem dwóch liniowych elementów dwuwęzłowych (rys. 5.13).



Rys. 5.13. Makroelement podłoża warstwowego

Wektor przemieszczeń węzłowych makroelementu opisany zależnością (4.123) ma obecnie dwie składowe:

$$\delta^M = [\delta_{(1)} \quad \delta_{(2)}]^T \quad (5.37)$$

przy czym $\delta_{(1)} = [w_{(1)1} \quad w_{(1)2}]^T$, $\delta_{(2)} = [w_{(2)1} \quad w_{(2)2}]^T$.

Zgodnie z zależnością (4.122) związek między przemieszczeniami makroelementu i przemieszczeniami węzłowymi ma postać:

$$w_{(1)} = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} w_{(1)1} \\ w_{(1)2} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(1)}$$

$$w_{(2)} = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} w_{(2)1} \\ w_{(2)2} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_{(2)}$$
(5.38)

gdzie funkcje kształtu N_1 i N_2 dla elementu liniowego, dwuwęzłowego opisane są w układzie lokalnym (rys. 5.13) w następujący sposób:

$$N_1 = 0,5(1 - \xi)$$

$$N_2 = 0,5(1 + \xi)$$
(5.39)

Funkcjonał (5.33) odniesiony do układu element belkowy – makroelement podłoża ma postać:

$$\Pi_C^e = \Pi_b^e + \Pi_W^M + L^e$$
(5.40)

Podstawiając do równania (5.40) przyjęte aproksymacje: dla elementu belkowego (4.28) i dla makroelementu (5.38) oraz uwzględniając warunek tożsamości ugięć (5.36)₁ otrzymuje się na podstawie związku (3.77) następujące wyrażenie:

$$\frac{d\Pi_C^e}{d\bar{\boldsymbol{\delta}}^e} = \bar{k}_b^e \bar{\boldsymbol{\delta}}^e + \bar{k}_W^M \bar{\boldsymbol{\delta}}^e + \bar{F}_b^e$$
(5.41)

gdzie $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = [w_{1r} \ \varphi_{xr} \ w_{(2)r}]^T$, $r = 1,2$ oraz:

$$\bar{\mathbf{k}}_W^M = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_W^{11} & \bar{\mathbf{k}}_W^{12} \\ \bar{\mathbf{k}}_W^{21} & \bar{\mathbf{k}}_W^{22} \end{bmatrix}$$

przy czym:

$$\bar{k}_W^{11} = \begin{bmatrix} k_{W11}^{11} & 0 & k_{W12}^{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{W21}^{11} & 0 & k_{W22}^{11} \end{bmatrix} \quad \bar{k}_W^{12} = \begin{bmatrix} 0 & k_{W11}^{12} & k_{W12}^{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{W21}^{12} & k_{W22}^{12} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\bar{k}_W^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_{W11}^{21} & 0 & k_{W12}^{21} \\ k_{W21}^{21} & 0 & k_{W22}^{21} \end{bmatrix} \quad \bar{k}_W^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_W^{22} & k_{W12}^{22} \\ 0 & k_{W21}^{22} & k_{W22}^{22} \end{bmatrix}$$

Wektor \bar{F}_b dla obciążenia równomiernie rozłożonego odpowiada wektorowi F_b^e określonego przez zależność (4.40), powiększonemu o składowe zerowe odpowiednio do wektora $\bar{\delta}^e$. Analogiczne postępowanie należy zastosować w celu uzyskania macierzy \bar{k}_b^e ze związku (4.39).

Podmacierze \mathbf{k}_W^{ik} ($i=1,2$) otrzymuje się na podstawie zależności (4.135).

Przedstawiają się one następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{Wrm}^{ik} = & \int_i \left(G_{yy}^{(1)} N_r N_m \int_0^{h^{(1)}} N_{(1),y} N_{(k),y} dy^{(1)} + \right. \\ & + \frac{1}{2} G_{xy}^{(1)} N_{m,x} N_{r,x} \int_0^{h^{(1)}} N_{(1)} N_{(2)} dy^{(1)} + \\ & + G_{yy}^{(2)} N_r N_m \int_{h^{(1)}}^H N_{(2),y} N_{(k),y} dy^{(2)} + \\ & \left. + \frac{1}{2} G_{xy}^{(2)} N_{m,x} N_{r,x} \int_{h^{(1)}}^H N_{(2)} N_{(k)} dy^{(2)} \right) dx \quad (r, m = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Do opisu rozkładu przemieszczeń pionowych wzdłuż grubości warstw (por. zależność (5.34)) przyjmuje się funkcję liniową w pierwszej i nieliniową w drugiej warstwie (rys. 5.14):

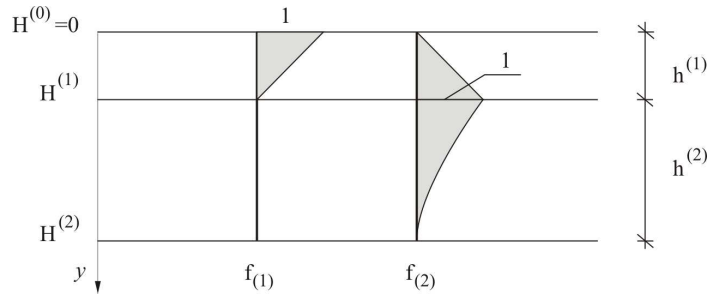
$$\begin{aligned} f_{(1)} = \frac{h^{(1)} - y}{h^{(1)}} \quad , \quad f_{(2)} = \frac{y}{h^{(1)}} \quad & y \in \langle 0, h^{(1)} \rangle \\ f_{(1)} = 0 \quad , \quad f_{(2)} = \frac{sh\gamma(H - y)}{sh\gamma h^{(2)}} \quad & y \in \langle h^{(1)}, H \rangle \end{aligned} \quad (5.44)$$

przy czym γ jest współczynnikiem zanikania przemieszczeń ($\gamma=1,25/H$),

$$sh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Zgodnie z wyrażeniem (4.117) zachodzi:

$$\begin{aligned} N_{(1)} &= f_{(1)} \\ N_{(2)} &= f_{(2)} \end{aligned} \quad (5.45)$$



Rys. 5.14. Przyjęte funkcje rozkładu przemieszczeń pionowych wzdłuż grubości warstwy

Uwzględniając związek (5.45) w zależności (5.43) oraz obliczając analitycznie całki w granicach odpowiednich warstw otrzymuje się następującą postać poszczególnych podmacierzy \mathbf{k}_{Wrm}^{ik} :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{Wrm}^{11} &= \int_l \left(\frac{G_{yy}^{(1)}}{h^{(1)}} N_r N_m + \frac{1}{2} G_{xy}^{(1)} \frac{h^{(1)}}{3} N_{r,x} N_{m,x} \right) dx \\ \mathbf{k}_{Wrm}^{12} &= \mathbf{k}_{Wrm}^{21} = \int_l \left(\frac{G_{yy}^{(1)}}{h^{(1)}} N_r N_m + \frac{1}{2} G_{xy}^{(1)} \frac{h^{(1)}}{6} N_{r,x} N_{m,x} \right) dx \\ \mathbf{k}_{Wrm}^{22} &= \int_l \left(\frac{G_{yy}^{(1)}}{h^{(1)}} N_r N_m + \frac{1}{2} G_{xy}^{(1)} \frac{h^{(1)}}{3} N_{r,x} N_{m,x} + \right. \\ &\quad \left. + G_{yy}^{(2)} A(h^{(2)}) N_r N_m + \frac{1}{2} G_{xy}^{(2)} B(h^{(2)}) N_{r,x} N_{m,x} \right) dx \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\text{gdzie: } A(h^{(2)}) = \frac{sh2\gamma h^{(2)} + 2\gamma h^{(2)}}{4\gamma sh^2 \gamma h^{(2)}}, \quad B(h^{(2)}) = \frac{sh2\gamma h^{(2)} - 2\gamma h^{(2)}}{4\gamma sh^2 \gamma h^{(2)}}.$$

Zależność (5.41) po uwzględnieniu następującego wektora parametrów węzłowych, w którym zgrupowano parametry dotyczące i -tego węzła:

$$\delta_i^{ec} = [w_i \quad \varphi_{xi} \quad w_{(2)i}]^T \quad (5.47)$$

można zapisać w postaci:

$$\frac{d\Pi_C^e}{d\delta^{ec}} = (\bar{\mathbf{k}}_b^e + \bar{\mathbf{k}}_W^M) \begin{Bmatrix} \delta_1^{ec} \\ \delta_2^{ec} \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{F}}_b^e \quad (5.48)$$

gdzie:

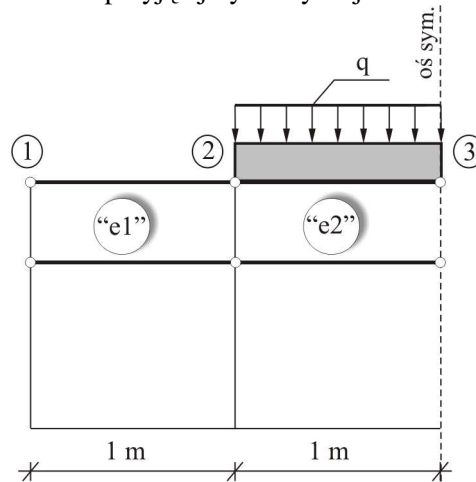
$$\bar{\mathbf{k}}_b^e = \begin{bmatrix} \frac{12}{l_e^2} & \frac{6}{l_e^2} & 0 & -\frac{12}{l_e^3} & \frac{6}{l_e^2} & 0 \\ & \frac{4}{l_e} & 0 & -\frac{6}{l_e^2} & \frac{2}{l_e} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{12}{l_e^3} & -\frac{6}{l_e^2} & 0 \\ & & & & \frac{4}{l_e} & 0 \\ \text{sym} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_W^M = \begin{bmatrix} k_{11}^{11} & 0 & k_{11}^{12} & k_{12}^{11} & 0 & k_{12}^{12} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{11}^{22} & k_{12}^{21} & 0 & k_{12}^{22} \\ & & & k_{22}^{11} & 0 & k_{22}^{12} \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & & k_{22}^{22} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

oraz:

$$\bar{\mathbf{F}}_b^e = [ql_e/2 \quad ql_e^2/12 \quad 0 \quad ql_e/2 \quad -ql_e^2/12 \quad 0]^T \quad (5.51)$$

Związek (5.48) i (3.78) stanowi podstawę do otrzymania równań równowagi MES układu N elementów belki spoczywającej na podłożu dwuwarstwowym. W celu przeprowadzenia obliczeń dokonano podziału belki i podłoża w obszarze i poza obszarem belki na elementy skończone zgodnie z rys. 5.15. Założono przy tym, że ugięcia podłoża zanikają w odległości 1 m od końców belki. Zrozumiałym jest, że przyjęty podział w praktyce obliczeniowej jest daleko niewystarczający. Celem jednak prześledzenia kolejnych etapów rozwiązania poprzestano na przyjętej dyskretyzacji.



Rys. 5.15. Przyjęty do obliczeń obszar belki i podłoża wraz z podziałem na makroelementy „e1” i „e2”.

Przyjęto następujące dane:

$$EJ = 10^2 \quad [\text{MNm}^2]$$

$$l = 2 \quad [\text{m}]$$

$$E^{(1)} = 10 \quad [\text{MPa}]$$

$$\nu^{(1)} = 0,35$$

$$G^{(1)} = 3,7 \quad [\text{MPa}]$$

$$h^{(1)} = 2 \quad [\text{m}]$$

$$E^{(2)} = 36 \quad [\text{MPa}]$$

$$\nu^{(2)} = 0,3$$

$$G^{(2)} = 13,85 \quad [\text{MPa}]$$

} glina

} piasek

$$h^{(2)} = 6 \quad [m]$$

$$\gamma = 4 \quad (5.52)$$

$$q = 0,012 \quad [MN/m]$$

Wobec przyjętych danych (5.52) macierze (5.49) i (5.50) przedstawiają się następująco:

$$\bar{\mathbf{k}}_b^e = \begin{bmatrix} 1200 & 600 & 0 & -1200 & 600 & 0 \\ & 400 & 0 & -600 & 200 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1200 & -600 & 0 \\ & & & & 400 & 0 \\ sym & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_W^M = \begin{bmatrix} 4,367 & 0 & -0,67 & -1,517 & 0 & -2,183 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 32,471 & -2,183 & 0 & 9,939 \\ & & & 4,367 & 0 & -0,67 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 32,471 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Wektor (5.51) ma natomiast składowe:

$$\bar{\mathbf{F}}_b^e = [0,006 \quad 0,001 \quad 0 \quad 0,006 \quad -0,001 \quad 0]^T \quad (5.55)$$

Otrzymany na drodze agregacji globalny układ równań MES, po uwzględnieniu warunków brzegowych (por. rys. 5.15)

$$w_1 = w_{(2)1} = 0, \quad \varphi_{x3} = 0 \quad (5.56)$$

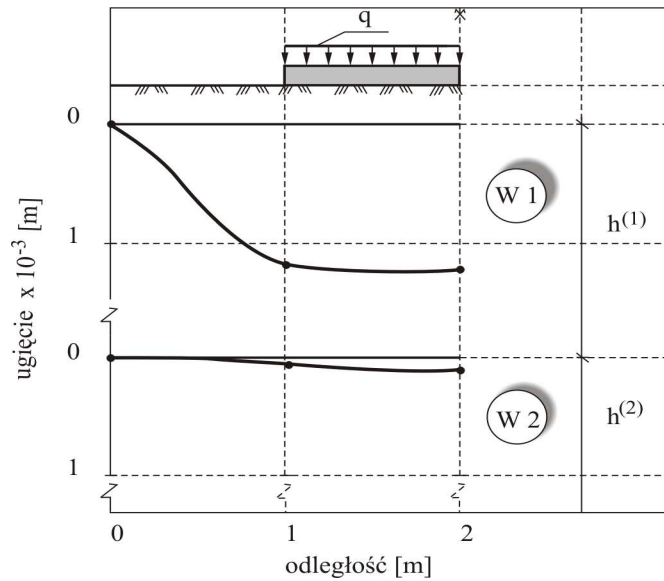
ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} 1208,734 & 600 & -1,34 & -1201,517 & -2,183 \\ & 400 & 0 & -600 & 0 \\ & & 64,942 & -2,183 & 9,939 \\ & & & 1204,367 & -0,67 \\ sym & & & & 32,471 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_{x2} \\ w_{(2)2} \\ w_3 \\ w_{(2)3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,001 \\ 0 \\ 0,006 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

Rozwiązując układ (5.58) otrzymuje się:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_{x2} \\ w_{(2)2} \\ w_3 \\ w_{(2)3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,2305 \\ 0,0228 \\ 0,0531 \\ 1,2441 \\ 0,0921 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad [m] \quad (5.58)$$

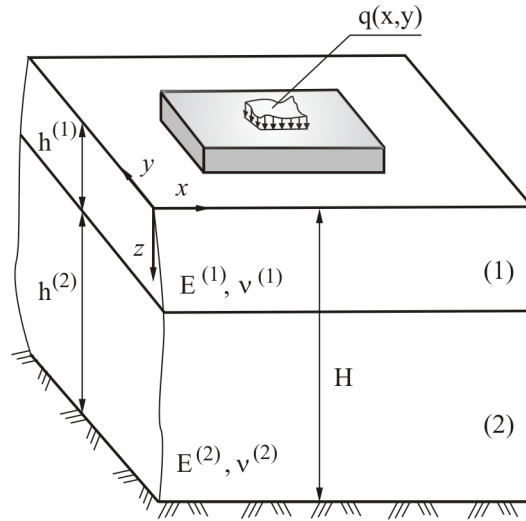
Uzyskane dyskretne wartości ugięć belki i podłoża zobrażowano na rys. 5.16.



Rys. 5.16. Ugięcia belki i podłoża

5.6. Płyta wyższego rzędu na podłożu dwuwarstwowym - MES

Rozważa się jednorodną, izotropową płytę wyższego rzędu spoczywającą swobodnie na podłożu dwuwarstwowym, poddaną działaniu obciążenia prostopadłego do powierzchni środkowej $q(x, y)$ (rys. 5.17). Analogicznie jak w poprzednich przykładach przyjmuje się założenie, że w płaszczyźnie kontaktu nie występują siły tarcia, a płyta nie może odrywać się od podłoża. Poszukuje się funkcji ugięcia powierzchni środkowej płyty.



Rys. 5.17. Płyta spoczywająca na podłożu dwuwarstwowym

Dla rozpatrywanego układu płyta-podłoże dwuwarstwowe funkcjonal całkowitej energii potencjalnej jest sumą energii deformacji sprężystej płyty, energii sprężystej podłoża i pracy sił zewnętrznych:

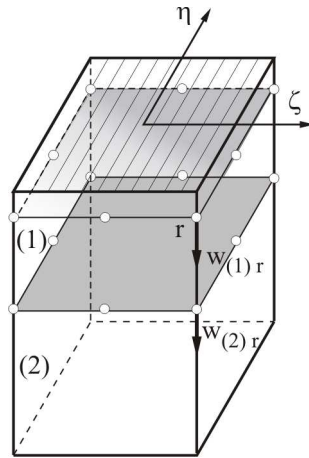
$$\Pi_C = \Pi_K + \Pi_W + L \quad (5.59)$$

gdzie Π_K , Π_W i L określone są odpowiednio przez zależności (4.62), (4.109) i (4.63).

Poszukiwane funkcje ugięcia $w_{(i)}(x, y)$, które minimalizują funkcjonal (5.59) powinny spełniać warunki analogiczne do opisanych przez związek (5.36):

$$\begin{aligned} w_{(1)}(x, y) &\equiv w(x, y) \\ \lim_{x, y \rightarrow \infty} w_{(1)}(x, y) &= 0 \\ \lim_{x, y \rightarrow \infty} w_{(2)}(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

Celem zastosowania MES do rozwiązania sformułowanego zagadnienia brzegowego górna powierzchnia podłoża, tj. powierzchnia $z=0$ (rys. 5.17) zostaje podzielona na elementy, analogiczne dla płyty i podłoża. Elementem płytowym jest 8-węzłowy element serendipowski, wyspecyfikowany w podrozdziale 4.3, natomiast makroelement podłoża składa się obecnie z dwóch 8-węzłowych elementów izoparametrycznych, co obrazuje rys. 5.18.



Rys. 5.18. Makroelement podłoża dwuwarstwowego

Wektor przemieszczeń węzłowych makroelementu podłoża opisany zależnością (5.37) ma w rozpatrywanym zagadnieniu składowe:

$$\begin{aligned}\delta_{(1)} &= [w_{(1)1} \ w_{(1)2} \ \dots \ w_{(1)8}]^T \\ \delta_{(2)} &= [w_{(2)1} \ w_{(2)2} \ \dots \ w_{(2)8}]^T\end{aligned}\quad (5.61)$$

Związek (4.122) przybiera natomiast formę:

$$\begin{aligned}w_{(1)} &= [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \delta_{(1)} = \mathbf{N} \delta_{(1)} \\ w_{(2)} &= [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \delta_{(2)} = \mathbf{N} \delta_{(2)}\end{aligned}\quad (5.62)$$

przy czym funkcje kształtu $N_1 \div N_8$ określone są wzorami (4.68).

Macierz sztywności makroelementu ma zasadniczo podobną budowę jak przedstawia to zależność (5.42), przy czym obecnie podmacierze \mathbf{k}_W^{ik} ($i=1,2$) mają następującą postać (por. związek (4.135)):

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{Wrm}^{ik} &= \int_{\Omega} \left(G_{zz}^{(1)} N_r N_m \int_0^{h^{(1)}} N_{(1),z} N_{(k),z} dz^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(1)} N_{m,\alpha} N_{r,\alpha} \int_0^{h^{(1)}} N_{(1)} N_{(2)} dz^{(1)} + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_{zz}^{(2)} N_r N_m \int_{h^{(1)}}^H N_{(2),z} N_{(k),z} dz^{(2)} + \\
& + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(2)} N_{m,\alpha} N_{r,\alpha} \int_{h^{(1)}}^H N_{(2)} N_{(k)} dz^{(2)} \Big) d\Omega \quad r, m = 1, 2, \dots, 8 \\
& \alpha = x, y
\end{aligned} \tag{5.63}$$

gdzie przez \int_{Ω} oznaczono umownie całkowanie w obszarze płyty i podłoża, natomiast parametry G_{zz} i $G_{\alpha z}$ opisuje zależność (4.106).

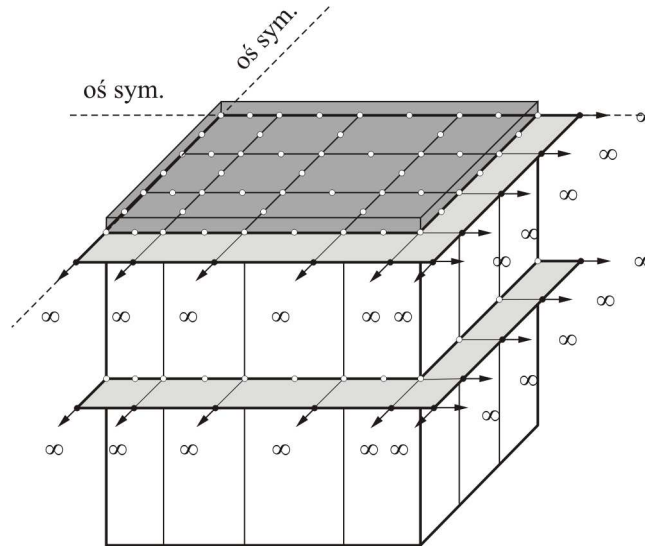
Przyjmując funkcje $f_{(1)}$ i $f_{(2)}$ definiujące rozkład przemieszczeń wzdłuż grubości podłoża według wyrażenia (5.44), przy uwzględnieniu zależności (5.45) i wykonaniu całkowania analitycznego otrzymuje się podmacierze (5.63) w następującej formie:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{Wrm}^{11} &= \int_{\Omega} \left(\frac{G_{zz}^{(1)}}{h^{(1)}} N_r N_m + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(1)} \frac{h^{(1)}}{3} N_{r,\alpha} N_{m,\alpha} \right) d\Omega \\
\mathbf{k}_{Wrm}^{12} &= \mathbf{k}_{Wrm}^{21} = \int_{\Omega} \left(-\frac{G_{zz}^{(1)}}{h^{(1)}} N_r N_m + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(1)} \frac{h^{(1)}}{6} N_{r,\alpha} N_{m,\alpha} \right) d\Omega \\
\mathbf{k}_{Wrm}^{22} &= \int_{\Omega} \left(\frac{G_{zz}^{(1)}}{h^{(1)}} N_r N_m + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(1)} \frac{h^{(1)}}{3} N_{r,\alpha} N_{m,\alpha} + G_{zz}^{(2)} A(h^{(2)}) N_r N_m \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} G_{\alpha z}^{(2)} B(h^{(2)}) N_{r,\alpha} N_{m,\alpha} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{5.64}$$

gdzie $A(h^{(2)})$ i $B(h^{(2)})$ opisane są jak w wyrażeniu (5.46).

W podrozdziale 5.5, w którym analizowano belkę na podłożu dwuwarstwowym, oddziaływanie podłoża poza belką uwzględniono dzieląc obszar podłoża wykraczający poza obrys belki na elementy skończone. Przyjęcie rozmiarów tego obszaru ma z reguły charakter intuicyjny, co powoduje, że warunek (5.36)_{2,3} może być spełniony jedynie z dużym przybliżeniem. Bardziej dokładne spełnienie tego warunku umożliwiają omówione w podrozdziale 4.4 elementy nieskończone. Elementy te w rozpatrywanym przykładzie wykorzystuje się do uwzględnienia oddziaływania podłoża dwuwarstwowego poza

płyta. Pięciowzłowe, izoparametryczne elementy pojedynczo nieskończone i czterowzłowe, izoparametryczne elementy podwójnie nieskończone (por. 4.4.2) stosuje się odpowiednio dla krawędzi swobodnych i naroży płyty. Elementy te pokrywają powierzchnie graniczne warstw w makroelementie podłoża (rys. 5.19).



Rys. 5.19. Umieszczenie elementów nieskończonych w zdyskretyzowanym układzie płyta - podłoże

Dla elementu pojedynczo nieskończonego geometria określona jest przez zależność (4.90), natomiast pole przemieszczeń w obszarze elementu opisuje wyrażenie:

$$w_{(1)} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_5] \begin{Bmatrix} w_{(1)1} \\ w_{(1)2} \\ \vdots \\ w_{(1)5} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{N}} \bar{\boldsymbol{\delta}}_{(1)} \quad (5.65)$$

$$w_{(2)} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_5] \begin{Bmatrix} w_{(2)1} \\ w_{(2)2} \\ \vdots \\ w_{(2)5} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{N}} \bar{\boldsymbol{\delta}}_{(2)}$$

gdzie $N_1 \div N_5$ są funkcjami kształtu określonymi przez związek (4.68).

Odpowiednio dla elementu podwójnie nieskończonego geometrię i aproksymację ugięcia przedstawia zależność (4.95) oraz wyrażenie:

$$w_{(1)} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_4] \begin{Bmatrix} w_{(1)1} \\ w_{(1)2} \\ \vdots \\ w_{(1)4} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(1)} \quad (5.66)$$

$$w_{(2)} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_4] \begin{Bmatrix} w_{(2)1} \\ w_{(2)2} \\ \vdots \\ w_{(2)4} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(2)}$$

przy czym funkcje kształtu $N_1 \div N_4$ opisane są następująco:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,25(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) & N_3 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \\ N_2 &= 0,5(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) & N_4 &= 0,5(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Minimalizacja całkowitej energii potencjalnej (5.59) elementu płyty wyższego rzędu na podłożu dwuwarstwowym prowadzi (por. zależność (3.77)) do związku, który dla obszaru kontaktu płyty z podłożem można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial \Pi_C^e}{\partial \boldsymbol{\delta}^e} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_K^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(48 \times 48)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(48 \times 1)} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_W^{11} & \hat{\mathbf{k}}_W^{12} \\ \hat{\mathbf{k}}_W^{21} & \mathbf{k}_W^{22} \end{bmatrix}_{(48 \times 48)} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_{(1)} \\ \boldsymbol{\delta}_{(2)} \end{Bmatrix}_{(48 \times 1)} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(48 \times 1)} \quad (5.68)$$

gdzie \mathbf{k}_W^e , $\boldsymbol{\delta}^e$ i \mathbf{F}^e określone są odpowiednio przez związki (4.74), (4.65) i (4.76), natomiast podmacierz \mathbf{k}_W^{22} wyraża się zgodnie z zależnością (5.64).

W równaniach (5.68) składowe wektora $\boldsymbol{\delta}_{(2)}$ są zgodne z opisanymi przez związek (5.61)₂, a składowe wektora $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{(1)}$ przedstawiają się następująco:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{(1)} = [0 \ 0 \ w_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ w_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ w_8 \ 0 \ 0]^T \quad (5.69)$$

przy czym uwzględniono tu warunek (5.60)₁ tożsamości ugięć płyty i górnej powierzchni ograniczającej podłoże.

Podmacierz $\hat{\mathbf{k}}_W^{11}$, występująca w wyrażeniu (5.68) ma wymiar (40×40) i wynika z powiększenia podmacierzy \mathbf{k}_W^{11} opisanej przez zależność (5.64) o elementy zerowe, odpowiednio do budowy wektora $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{(1)}$ (por. związek (4.69)). Analogicznie, podmacierze $\hat{\mathbf{k}}_W^{12}$ i $\hat{\mathbf{k}}_W^{21}$ są powiększonymi o wyrazy zerowe podmacierzami \mathbf{k}_W^{12} i \mathbf{k}_W^{21} o wymiarach odpowiednio (40×8) i (8×40) .

Uwzględnienie oddziaływania podłoża poza płytą prowadzi natomiast w odniesieniu do elementu do równań, które ogólnie można zapisać w następującej postaci:

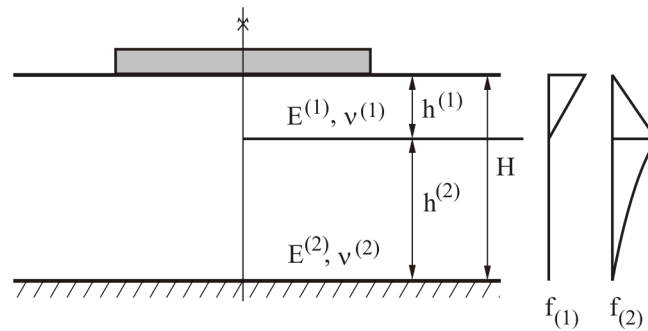
$$\frac{\partial \Pi_W^S}{\partial \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{(1)}^S \\ \boldsymbol{\delta}_{(2)}^S \end{Bmatrix}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{W_s}^{11} & \mathbf{k}_{W_s}^{12} \\ \mathbf{k}_{W_s}^{21} & \mathbf{k}_{W_s}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{(1)}^S \\ \boldsymbol{\delta}_{(2)}^S \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{(1)s}^e \\ \mathbf{F}_{(2)s}^e \end{Bmatrix} \quad (5.70)$$

gdzie podmacierze $\mathbf{k}_{W_s}^{ik}$ ($i, k = 1, 2$) określone są przez związek (5.64), w którym obecnie macierz funkcji kształtu \mathbf{N} jest równa $\bar{\mathbf{N}}$ lub $\tilde{\mathbf{N}}$ (por. wyrażenie (5.65) i (5.66)) w zależności od tego, czy element jest pojedynczo czy podwójnie nieskończony. Wektory $\boldsymbol{\delta}_{(1)}^S$, $\boldsymbol{\delta}_{(2)}^S$ występujące w równaniach (5.70) odpowiadają natomiast wektorom $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{(i)}$ lub $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{(i)}$ ($i = 1, 2$) opisanym w zależnościach (5.65) i (5.66). Przez $\mathbf{F}_{(i)s}^e$ oznaczono z kolei wektory obciążeń węzłowych elementów usytuowanych na odpowiednich powierzchniach granicznych warstw podłoża. Są one różne od wektora zerowego jedynie w przypadku, gdy w obszarze podłoża poza płytą jest przyłożone obciążenie.

Związki (5.68) i (5.70) stanowią podstawę obliczeń MES płyty na dwuwarstwowym podłożu sprężystym.

5.6.1. Płyta obciążona równomiernie na całym obszarze

Kwadratowa płyta o boku $a = 10 \text{ m}$ i grubości $h = 0,2594 \text{ m}$ poddana jest na całym obszarze działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego o intensywności $q = 0,01 \text{ MPa}$. Dane materiałowe płyty i ośrodka gruntowego są następujące:



Rys. 5.21. Schemat uwzględnienia warstw podłoża w analizowanym zadaniu

Otrzymane wyniki ugięć przedstawiono dla trzech charakterystycznych punktów A, B, C płyty (rys. 5.20) w tabelicy 5.1. W tabelicy tej porównano także uzyskane wartości z innymi rozwiązaniami numerycznymi. Widoczna jest dość dobra zgodność otrzymanych rezultatów z wynikami zamieszczonych analiz numerycznych, przy jednak stosunkowo mniejszym (w zakresie analiz MES) nakładzie pracy obliczeniowej (por. liczbę elementów).

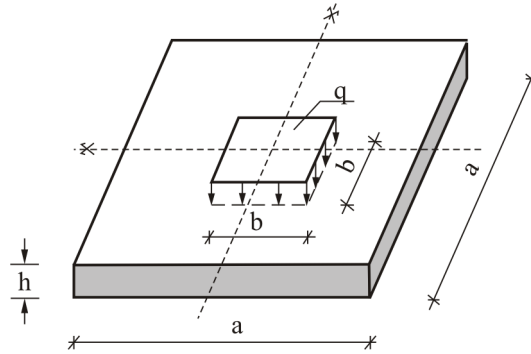
Tablica 5.1.

Ugięcia płyty spoczywającej na podłożu sprężystym.
Liczba elementów podziału ćwiartki płyty

Punkt płyty	MES-elementy nieskończone [10] 2 warstwy	MES-elementy podłoża poza płytą [7] 3 warstwy	MES/MEB [1] 1 warstwa	Półprzestrzeń sprężysta [2] 1 warstwa
Ugięcia $w \times 10^{-3} [m]$				
A	6,18	6,62	6,47	7,3
B	3,97	4,63	4,62	4,5
C	2,25	2,89	2,95	2,8
Liczba elementów $\frac{1}{4}$ płyty				
	36	144	32	36

5.6.2. Płyta obciążona centrycznie na małym obszarze

Kwadratowa płyta o boku $a = 5\text{ m}$ i grubości $h = 0,5\text{ m}$ obciążona jest w środku na niewielkim poletku obciążeniem równomiernie rozłożonym o intensywności $q = 1\text{ MPa}$ (rys. 5.22).



Rys. 5.22. Płyta obciążona centrycznie na niewielkim poletku

Dane płyty i podłoża są następujące:

$$b = 0,25 \quad [m]$$

$$E_p = 20000 \quad [MPa]$$

$$\nu_p = 0,167$$

$$E^{(1)} = E^{(2)} = 40 \quad [MPa]$$

$$\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$$

$$h^{(1)} = 3 \quad [m]$$

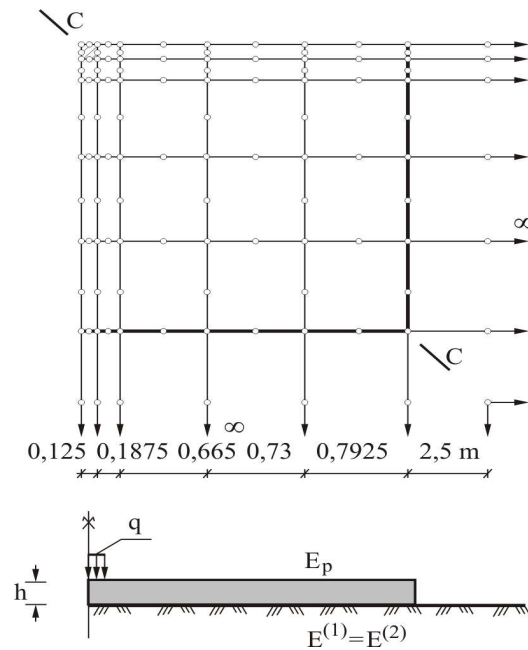
$$h^{(2)} = 7 \quad [m]$$

$$\gamma = 0,125$$

(5.72)

Do obliczenia są ugięcia płyty.

Analogicznie jak poprzednio podłoże zostaje podzielone na dwie warstwy zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 5.21. Wobec symetrii geometrii płyty i obciążenia obliczenia zostają ograniczone do ćwiartki płyty, dla której przyjmuje się podział na elementy skończone przedstawiony na rys. 5.23.



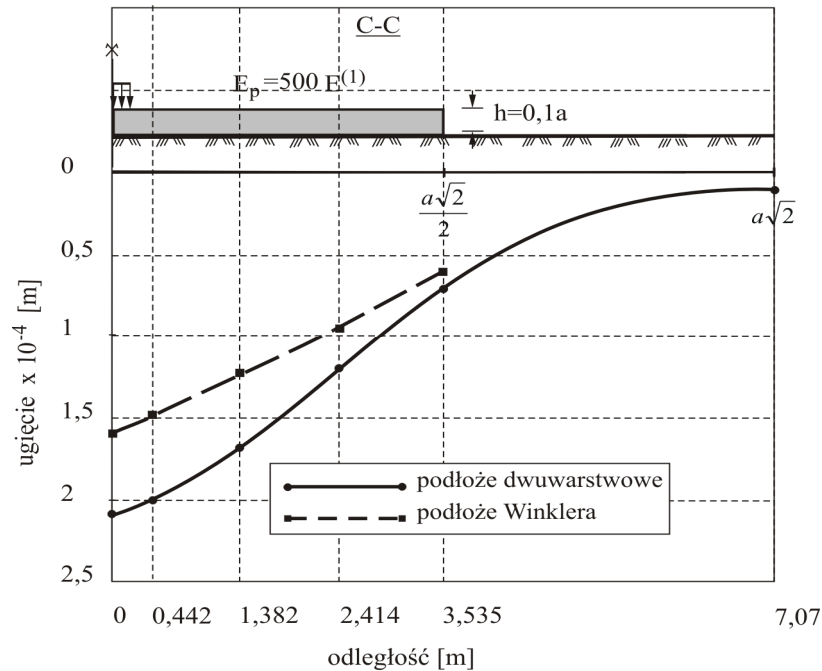
Rys. 5.23. Podział ćwiartki płyty na elementy skończone

Celem porównania rozwiązań obliczono również analogiczną płytę spoczywającą na podłożu Winklera. Współczynnik k_0 tego modelu podłoża (por. podrozdział 5.2) obliczono na podstawie wzoru [11]:

$$k_0 = \frac{2 E_s}{a \log \left(1 + 2 \frac{H}{a} \right)} \quad (5.73)$$

gdzie: $E_s = E^{(1)} = E^{(2)}$, H – całkowita grubość warstwy sprężystej, tj. $H = h^{(1)} + h^{(2)}$.

Uzyskane dla podłoża dwuwarstwowego i modelu Winklera wyniki ugięć płyty zobrazowano dla przekroju C – C (por. rys.5. 23) na rys. 5.24.



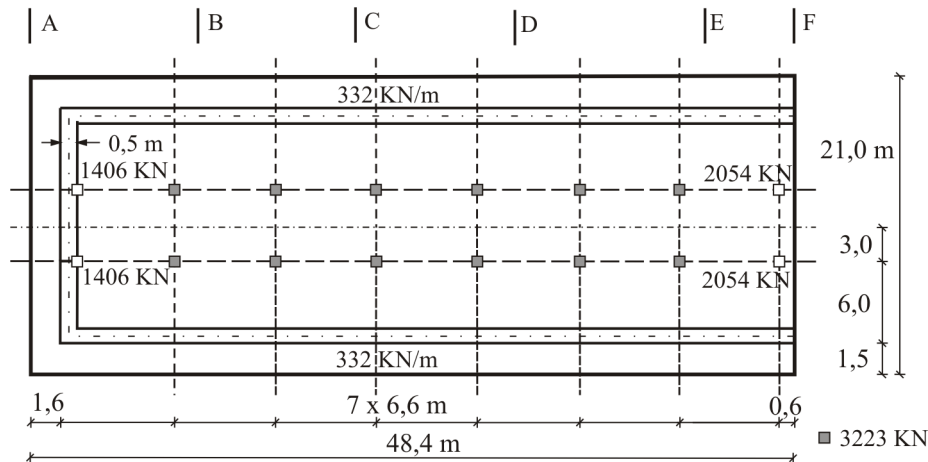
Rys. 5.24. Rozkład ugięć płyty i podłoża poza płytą

Widoczne jest, że maksymalne ugięcia płyty na podłożu Winklera są o 23% mniejsze w stosunku do odpowiednich ugięć płyty na podłożu dwuwarstwowym.

5.7. Płyta fundamentowa na podłożu dowolnie uwarstwionym - MES

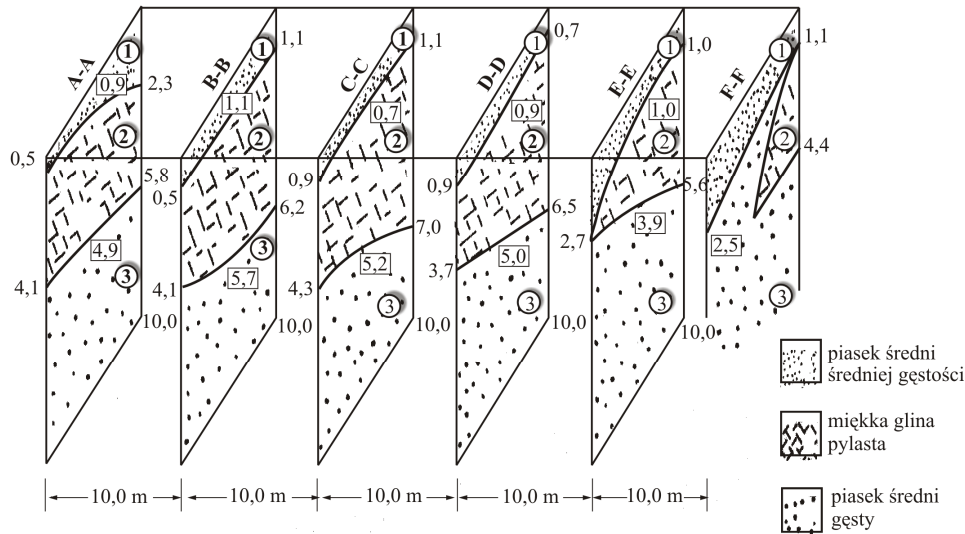
Płyta o wymiarach $48,4 \times 21,0 \times 0,6 \text{ m}$ będąca fundamentem cztero-kondygnacyjnego budynku o mieszanej konstrukcji składającej się ze ścian zewnętrznych o grubości $0,5 \text{ m}$ i przestrzennych żelbetowych ram szkieletu wewnętrznego (rys. 5.25) posadowiona jest na podłożu o dużej niejednorodności poprzecznej i znacznie zróżnicowanych modułach sprężystości poszczególnych warstw [5]. W podłożu tym ponadto na małej głębokości występuje soczewka miękkiej gliny pylastej o skomplikowanym kształcie, której grubość zmienia się znacząco od $5,9 \text{ m}$ do $0,0 \text{ m}$. Obrazuje to profil geologiczny podłoża, przedstawiony schematycznie w postaci ciągu jednakowo odległych przekrojów poprzecznych gruntu na rys. 5.26. Obciążenie płyty stanowią siły skupione

przekazywane na płytę od słupów oraz obciążenie równomiernie rozłożone o intensywności $q = 332 \text{ KN/m}$ przekazywane od ścian usztywniających (rys. 5.25). Należy określić rozkład ugięć płyty.



Rys. 5.25. Płyta fundamentowa

Do rozwiązania przedstawionego zagadnienia zginania płyty na podłożu uwarstwionym wykorzystuje się MES w ujęciu algorytmu sformułowanego w podrozdziale 5.6. Podłoże przy uwzględnieniu miejscowo usytuowanej soczewki gliny pylastej zostaje podzielone na 4 warstwy o zmiennej grubości, odpowiednio do danego profilu geologicznego. Opis zmienności grubości warstw wzdłuż osi x i y przyjmuje się według zależności (4.102). Przyjmuje się ponadto stały współczynnik Poissona dla poszczególnych warstw, ogólnie zawarty w granicach $\nu = 0,3 \div 0,35$. Moduł sprężystości 1. warstwy traktuje się jako stały na grubości warstwy $E^{(1)} = 50 \text{ MPa}$, natomiast w przypadku warstwy 2. i 3. zakłada się, że moduł ten zmienia się liniowo wzdłuż grubości zgodnie z zależnością (4.139).

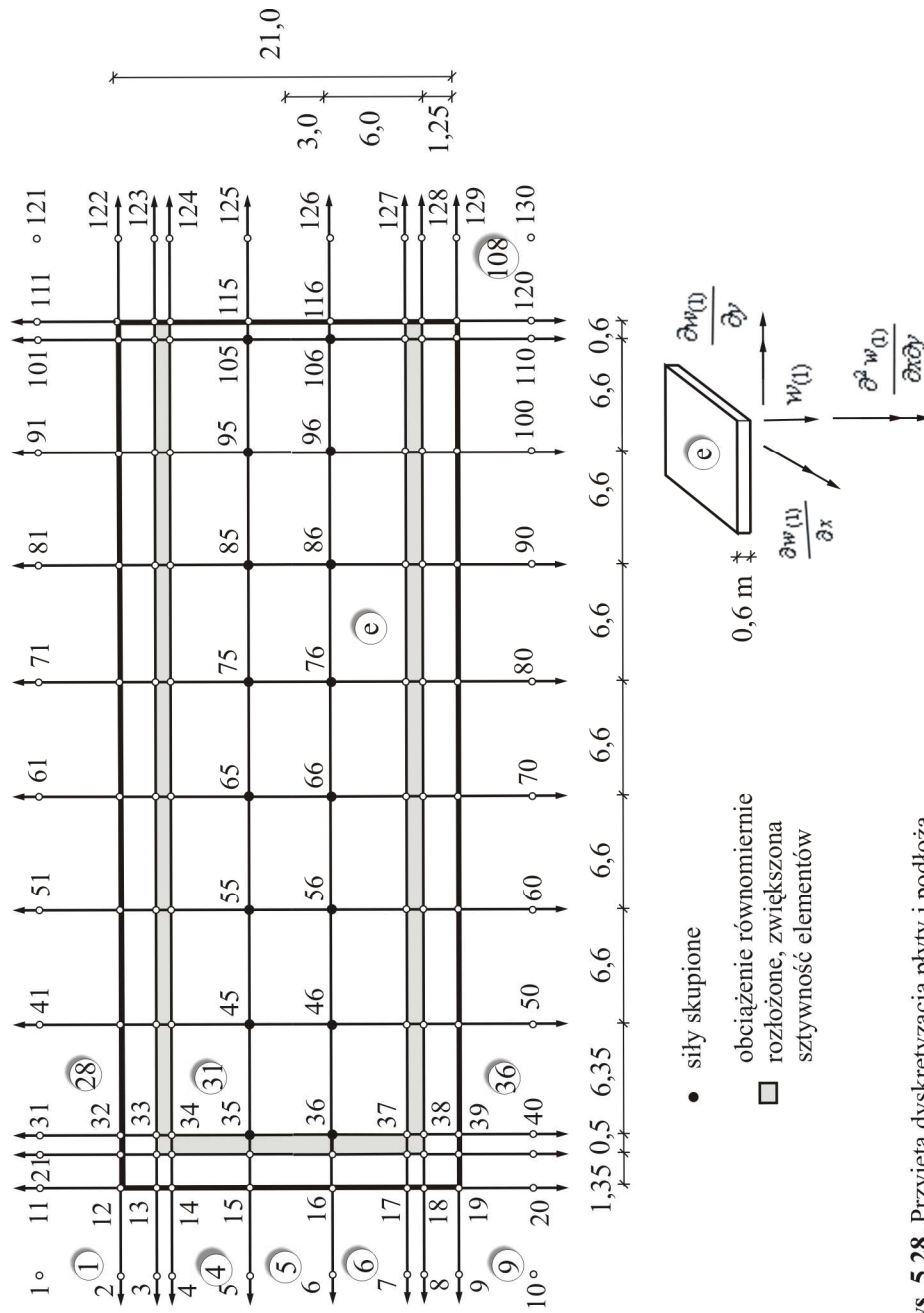


Rys. 5.26. Profil geologiczny podłoża

Występujące w zależności (4.139) współczynniki $E_0^{(i)}$ i $E_1^{(i)}$ ($i = 2, 3$) wyznacza się dla odpowiedniej warstwy na podstawie liniowej regresji wartości modułów uzyskanych z pomiarów na różnych głębokościach. Moduły te zostały oszacowane na podstawie metody ścieżek naprężeń [5]. W przypadku gliny pylastej wykorzystano doświadczalny wariant Lambego metody, dla piasku średniego posłużono się analityczną wersją metody ścieżek naprężeń, wykorzystując znany wzór Duncana-Changa [5]. Otrzymane wartości modułów odkształcalności na różnych głębokościach, jak również uzyskane na ich podstawie przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów wyrażenia opisujące zmianę modułu wzdłuż grubości odpowiedniej warstwy, tj. przedstawiono na rys. 5.27.

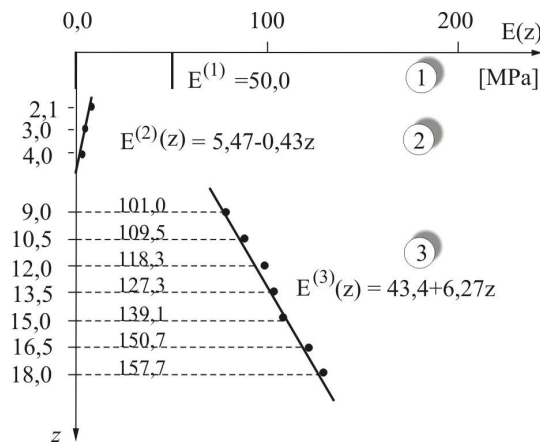
$$\begin{aligned} E^{(2)}(z) &= 5,47 - 0,43z \\ E^{(3)}(z) &= 43,4 + 6,27z \end{aligned} \quad (5.74)$$

Płyta zostaje podzielona na 70 elementów skończonych, odpowiednio do siatki kolumn szkieletu budynku. Ponadto siatka podziału na elementy zawiera elementy pod ścianami i w obszarze wsporników (rys. 5.28).



Rys. 5.28. Przyjęta dyskretyzacja płyty i podłoża

W celu uwzględnienia wpływu sztywności ścian na płytę przyjęto, że sztywności elementów pod ścianami są znacznie większe w porównaniu do sztywności pozostałych elementów. Sztywność płyty $D=370\text{ MNm}$, (moduł sprężystości płyty $E_p=2\cdot 10^4\text{ MPa}$ i współczynnik Poissona $\nu_p=0,167$), podczas gdy w obszarze pod ścianami sztywność tę przyjmuje się jako równą 10^4 MNm . Wobec bardzo małego stosunku grubości do rozpiętości płyty $h/a=0,03$ jako element płytowy przyjmuje się element płyty Kirchhoffa o 16 stopniach swobody (znany w literaturze jako element BFS16).



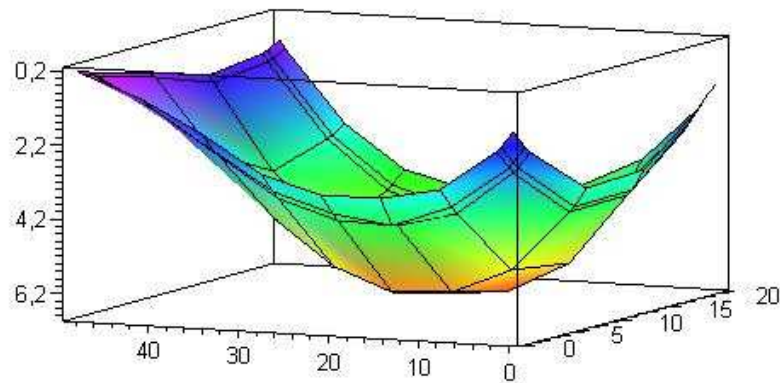
Rys. 5.27. Moduły odkształcalności poszczególnych warstw

Makroelement podłoża składa się obecnie z 4 płaskich elementów pokrywających powierzchnie graniczne warstw. Dla elementu 1. powierzchni granicznej przyjmuje się aproksymację ugięć jak dla elementu płytowego. Dla pozostałych elementów aproksymacja ta jest zgodna z zależnością (4.122). W wyniku tego makroelement posiada 28 stopni swobody: 16 na powierzchni kontaktu i 4 na każdej pozostałej powierzchni. Ponadto, w odróżnieniu od poprzednich rozważań (por. podrozdział 5.5 i 5.6), w których funkcje $f_{(i)}$ definiujące rozkład ugięć wzdłuż grubości warstwy przyjęto *a priori*, funkcje te przyjmuje się obecnie jako funkcje kształtu (por. zależność 4.116):

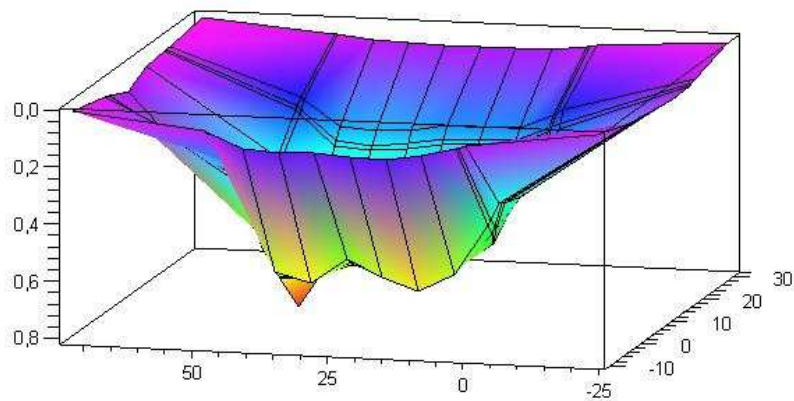
$$\begin{aligned} f_{(i)} &= N_{(i)} = 0,5(1 - \xi^{(i)}) \\ f_{(i+1)} &= N_{(i+1)} = 0,5(1 + \xi^{(i)}) \quad i = 1,2,3,4 \end{aligned} \quad (5.75)$$

Otrzymany w rezultacie model dyskretny analizowanego układu płyta fundamentowa-podłoże dowolnie uwarstwione składa się z 70 elementów

skończonych, 38 elementów nieskończonych i 130 węzłów. Globalna macierz sztywności ma wymiar $N = 784$ przy szerokości półpasma $b = 78$ i liczbie niezerowych elementów w półpaśmie wynoszącej 53372. W wyniku rozwiązania układu równań otrzymuje się wartości węzłowe ugięć płyty jak również wartości węzłowe ugięć kolejnych powierzchni granicznych warstw podłoża. Uzyskane wyniki ugięć płyty zobrazowano na rys. 5.29, natomiast na rys. 5.30 przedstawiono przykładowo rozkład ugięć powierzchni granicznej czwartej warstwy podłoża.



Rys. 5.29. Rozkład ugięć w płycie fundamentowej w $x 10^{-2}$ [m]



Rys. 5.30. Rozkład ugięć powierzchni granicznej czwartej warstwy $w_{(4)} x 10^{-2}$ [m] w obszarze i poza obszarem płyty

Maksymalne ugięcie płyty występuje w węźle 65 (rys. 5.28) i wynosi $w_{\max} = 6,78 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Widoczny jest również (rys. 5.30) wpływ soczewki miękkiej gliny pylastej na lokalne zwiększenie osiadań warstw granicznych podłoża, co odzwierciedla się nawet na dużej głębokości (czwarta warstwa podłoża).

LITERATURA

Literatura podstawowa

- [1] CICHONŃ Cz.: Metody obliczeniowe. Wybrane zagadnienia. Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2005, s. 273
- [2] CICHONŃ Cz., CECOT W., KROK J., PLUCIŃSKI P.: Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji. Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2002, s. 421
- [3] GELFAND I. M., FOMIN S.W.: Rachunek wariacyjny. PWN, Warszawa, 1979, s. 268
- [4] GŁAZUNOW J.: Metody wariacyjne. Wyd. Elbląskiej Uczelni Humanistyczno-Ekonomicznej, Elbląg, 2005, s. 404
- [5] GRABARSKI A., WRÓBEL I.: Wprowadzenie do metody elementów skończonych. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2008, s. 126
- [6] GRZYMKOWSKI R., KAPUSTA A., NOWAK I., SŁOTA D.: Metody numeryczne. Zagadnienia początkowo-brzegowe. Gliwice, 2009, s. 194
- [7] HUNTER P., PULLAN A.: FEM/BEM Notes. Univ. of Auckland, Dep. of Eng. Sci., New Zealand, 2001, s. 145
- [8] HUTTON D.: Fundamentals of finite element analysis. Mc-Graw Hill, New York, 2004, s. 488
- [9] KLEIBER M. (red.): Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. PWN, Warszawa, 1995, s. 728
- [10] MICHLIN S.G., SMOLICKI C.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. Warszawa, 1972, s. 383
- [11] RAKOWSKI G.: Metoda elementów skończonych. Wybrane problemy. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1996, s. 154

- [12] RAKOWSKI G., KACPRZYK Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005, s. 452
- [13] RUSIŃSKI E., CZMOCHOWSKI J., SMOLNICKI T.: Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000, s. 443
- [14] SEGERLIND L.J.: Applied finite element analysis. J. Wiley and Sons, 1976, s. 422
- [15] STRANG J., FIX G.: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs N. J., 1973, s. 349
- [16] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L.: The finite element method. Butterworth-Heinemann, Oxford, vol. 1, 2000, s. 689

Literatura szczegółowa

- [1] ALMEIDA V.S., PAIVA J.B.: A mixed BEM – FEM formulation for layered soil – superstructure interaction. Eng. Analysis with Boundary Elements, 28, 2004, s. 1111-1121
- [2] FRASER R.A., WARDLE L.J.: Numerical analysis of rectangular rafts on layered foundations. Geotechnique, 26, 4, 1976, s. 613-630
- [3] GRYCZMAŃSKI M.: Analytical and numerical subsoil models for soil – foundation interaction problems. Studia Geotechnica et Mechanica, 16, 3-4, 1994, s. 29-72
- [4] GRYCZMAŃSKI M.: Modele podłoża gruntowego stosowane w projektowaniu. XX Ogólnopolska Konf. „Warsztat pracy projektanta konstrukcji”, Wisła-Ustroń, 2005, s. 159-208
- [5] GRYCZMAŃSKI M., SADECKA L.: Analysis of raft foundation – arbitrarily layered subsoil interaction problem. Proc. of X European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Florence, 1991, s. 209-212
- [6] KOLAR V., NEMEC I.: Modelling of soil – structure interaction, Elsevier, North-Holland, 1989, s. 333
- [7] KOLAR V., NEMEC I.: Komplexni automatizace vypoctu interakce technických objektu. W Vyuzite vypoctovej techniki pri statickom reseni stavebných konstrukci, CSVTS, Brno, XI, 1983, s. 103-128
- [8] KUJAWSKI J.: Analiza grubych płyt i tarcz metodą elementów skończonych. Wyd. Politechniki Białostockiej, Białystok, 1979, s. 225
- [9] MARQUES M.M., OWEN D.R.J.: Infinite elements in quasi – static materially nonlinear problems. Int. J. Num. Meth. Eng., 18, 4, 1984, s. 739-751

-
- [10] SADECKA L.: A finite/infinite element analysis of thick plates on a layered foundation. *Comp. and Struct.*, 76, 5, 2000, s. 603-610
 - [11] SELVADURAI A. P. S.: Elastic analysis of soil – foundation interaction. Elsevier, Amsterdam, 1979, s. 543
 - [12] TORBACKI W.: Numerical analysis of beams on unilateral elastic foundation. *Arch. of Materials Science and Eng.*, 29, 2, 2008, s. 109-112
 - [13] WANG C. M., REDDY J. N., LEE K. H.: Shear deformable beams and plates. Elsevier, 2000, s. 296

METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH I METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH
W ZAGADNIENIACH MECHANIKI KONSTRUKCJI I PODŁOŻA

Streszczenie

W książce przedstawiono zarówno zarys dwóch uznanych i szeroko stosowanych metod rozwiązywania zagadnień brzegowych: metody różnic skończonych (MRS) i metody elementów skończonych (MES), jak również ich zastosowania w zagadnieniach mechaniki konstrukcji współpracującej z podłożem gruntowym. W opisie MRS i MES nawiązano do nowoczesnych ujęć matematycznych formułowania teorii tych metod, przedstawiając ogólne koncepcje metod, nie przytłaczające jednak swoim formalizmem matematycznym. Praca zawiera pięć rozdziałów i bibliografię zawierającą ogółem 28 pozycji, w tym 16 pozycji książkowych. Trzy pierwsze rozdziały zawierają klasyfikację metod przybliżonych rozwiązywania zagadnień brzegowych, opis MRS ujmujący sposób tworzenia schematów różnicowych, ocenę dokładności operatorów różnicowych oraz aplikację metody i problemy z tym związane w analizie statycznej belek i płyt. W części książki obejmującej te rozdziały przedstawiono także ideę MES, ogólne zasady dyskretyzacji obszarów rozwiązania, klasyfikację elementów skończonych pod względem różnorodnych kryteriów oraz sposoby formułowania równań MES zarówno przy podejściu Ritza jak i Galerkina. Znaczną uwagę poświęcono funkcjom kształtu jako aspektowi metody mającemu istotny wpływ na otrzymane rozwiązanie. Przedstawiono przykłady zastosowań MES w analizie statycznej belek i przy rozwiązywaniu równań różniczkowych II rzędu.

Część druga książki obejmująca rozdziały 4 i 5 zawiera charakterystykę wybranych elementów skończonych, takich jak element belkowy, element płyty wyższego rzędu, element nieskończony i makroelement podłoża warstwowego oraz liczne przykłady zastosowań MRS i MES w analizie belek i płyt spoczywających na podłożu sprężystym przy uwzględnieniu różnych modeli podłoża.

FINITE DIFFERENCE METHOD AND FINITE ELEMENT METHOD
IN THE STRUCTURAL AND SOIL MECHANICS PROBLEMS

Summary

In the book the acknowledged and widely used methods for solving boundary-value problem: Finite Difference Method (FDM) and Finite Element Method (FEM) have been presented together with their application to the soil-structure interaction problems. In the description of these methods one refer to the up-to-date mathematical formulations of the basic ideas of FDM and FEM.

The book contains five chapters and bibliography which include 28 items, in this 16 books. Chapters one to three comprises the classification of approximate methods of solving the boundary-value problem, the way of forming the difference schemes, the estimation of difference operator errors and application of the FDM method to the static analysis of beams and plates. In this part of the book the FEM fundamentals has been also presented. The main rules of discretization, the finite element classification from different point of view and the ways of forming the FEM equations based on Ritz and Galerkin approach have been described. The significant attention has been put on the shape functions as the aspect of the method which essentially influenced the obtained results. Two FEM examples have been presented: static analysis of beam and solving second order differential equation.

The second part of the book enclosing chapters four and five contains specification of some finite elements, such as beam element, higher-order plate element, infinite element and macroelement of layered subsoil. It contains also examples of application of FDM and FEM to the problem of beam and plate resting on the elastic foundation. This foundation has been modeled by different schemes, from most simple Winkler foundation to more complicated layered foundation.