

Wiesław Śródka

**Trzy lekcje
metody elementów
skończonych**

**Materiały pomocnicze do przedmiotu
wytrzymałość materiałów**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2004

Recenzent
Marek WITKOWSKI

Opracowanie redakcyjne i korekta
Maria IZBICKA

Projekt okładki
Wiesław ŚRÓDKA

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-829-5

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 817/2004.

SPIS TREŚCI

Przedmowa	5
Wstęp.....	8
Metody analizy konstrukcji	8
Metoda sił.....	9
Metoda przemieszczeń.....	13
Przykład.....	13
Metoda sił.....	14
Metoda przemieszczeń.....	17
Lekcja 1 – Obraz ogólny metody elementów skończonych.....	20
Pojęcia podstawowe klasycznej wytrzymałości materiałów i uwagi wstępne	20
Pojęcia podstawowe metody elementów skończonych.....	23
Uwagi wstępne i definicje	23
Element skończony.....	25
Stopnie swobody.....	29
Agregacja.....	34
Macierz sztywności konstrukcji.....	35
Warunki brzegowe.....	37
Algorytm MES	43
Lekcja 2 – Funkcje kształtu, transformacja układu współrzędnych, macierz sztywności elementu.....	44
Funkcje kształtu	44
Współrzędne lokalne i globalne, wzory transformacyjne	49
Odkształcenia i siły wewnętrzne w elemencie skończonym.....	50
Macierz sztywności elementu	51
Rozwiązanie układu równań kanonicznych.....	52
Reakcje	53
Lekcja 3 – Układy wielowymiarowe, błędy rozwiązania	55
Element tarczowy, trójwęzłowy.....	55
Błędy rozwiązania	58
Błąd dyskretyzacji.....	58
Błąd zaokrągleń arytmetycznych	59
Przykłady	
Przypadek szczególny – element pręta kratownicy płaskiej	62
Przykład 1 – Rozwiązanie metodą elementów skończonych.....	65
Model konstrukcji	66
Warunki brzegowe – wektor obciążeń	68
Warunki brzegowe – przemieszczenia	68
Rozwiązanie – przemieszczenia	69
Rozwiązanie – siły wewnętrzne	69
Rozwiązanie – reakcje.....	72
Przykład 2 – Jak typ elementu skończonego wpływa na dokładność rozwiązania	73
Przykład 3 – Dwa podstawowe rodzaje wykresu naprężeń.....	75
Przykład 4 – Błąd metody.....	79
Konstrukcje symetryczne.....	80

Model zbiornika	80
Koncentrator naprężenia.....	81
Keratotomia radialna rogówki.....	82
Literatura	84

PRZEDMOWA

Opracowanie to jest elementarnym wprowadzeniem do metody elementów skończonych, adresowanym do słuchaczy podstawowego kursu wytrzymałości materiałów. Może być użyteczne dla użytkownika-amatora coraz powszechniej dostępnych programów do wymiarowania konstrukcji, opartych na tej metodzie.

Łatwy dostęp do tego rodzaju oprogramowania może stworzyć iluzję równie łatwego osiągnięcia rozwiązań trudnych zadań z mechaniki. Iluzji tej można ulec z kilku powodów, a większość z nich jest konsekwencją wiary w opatrność, jaką roztaczają nad użytkownikiem twórcy coraz prostszych i przyjemniejszych w obsłudze programów komputerowych. Wiarę tę umocni jeszcze możliwość uzyskiwania tą drogą rozwiązań bez komunikatów o błędach obliczeniowych (czyli bez wiedzy o *metodzie elementów skończonych* – MES).

Otóż wiara ta (jak każda inna) pozbawiona jest racjonalnych podstaw, bowiem tak uzyskane rozwiązanie może być poprawne lub nie. Tego, czy jest poprawne, autor rozwiązywania nie znający podstaw *metody* i wytrzymałości materiałów, po prostu nie wie.

Nieprawdziwe jest oczywiście twierdzenie przeciwne, że wiedza obsługującego program o MES, musi być porównywalna z wiedzą twórców tego programu. Jednak, jak dotąd (i zapewne jeszcze przez jakiś czas), sytuacja użytkownika takiego oprogramowania wcale nie jest porównywalna z sytuacją użytkownika kalkulatora, nawet programowalnego – i nie chodzi tu o bardziej zaawansowaną „gałkologię”. Rzecz dotyczy **jakości** rozwiązania. Otóż system (program) oparty na MES oferuje wiele alternatywnych możliwości budowania modelu i równie wiele parametrów rozwiązania. Oferuje też narzędzia do badania wyników i testowania ich jakości. Jedynym przewodnikiem umożliwiającym dokonywanie wyboru między licznymi opcjami menu jest wiedza o MES (poparta wiedzą przynajmniej z teorii sprężystości i plastyczności), bowiem w każdej z tych grup zagadnień laik notorycznie popełnia błędy. To prawda, że twórcy systemu ułatwiają ten wybór przez ustawienie opcji i parametrów domyślnych. Niestety, zwykle – nawet w prostych przypadkach – wyboru **powinien** dokonać użytkownik. Zaczyna się to już przy typie elementu skończonego, a kończy na hipotezie wytrzymałościowej do wykresu naprężeń.

Wykład adresowany jest zatem do potencjalnego lub faktycznego użytkownika takiego oprogramowania, który nie zna MES, ale jest w stanie zrozumieć jej zasadnicze przesłanie.

Założenia do wykładu

1. Słuchacz zapoznał się z podstawami wytrzymałości materiałów, czyli zna najważniejsze pojęcia i równania teorii sprężystości (odkształcenia, naprężenia, przemieszczenia, siły wewnętrzne, równania konstytutywne, związki geometryczne, równania równowagi, schemat rozwiązania zadania). Dobrze by było, aby znał zasadę prac wirtualnych i miał pojęcie o metodach przybliżonych: Rayleigha–Ritza–Timoshenki i Galerkina, choć ta wiedza nie wydaje się konieczna.

2. *Lekcje* mają na celu wyrobienie u słuchacza ogólnego pojęcia o *metodzie*. Nie są one – bo nie mogą być w tym wymiarze czasowym – próbą nauczania podstaw *metody*. Stanowią jedynie pomost pomiędzy wiedzą o rozwiązaniu zamkniętym prostego zadania wytrzymałości materiałów a praktycznym użyciem programu komputerowego do rozwiązywania konstrukcji, opartego na MES. Sam *program* rozumiany jest tu jedynie jako idea i w tekście nie ma odniesień do jakiegokolwiek konkretnego produktu handlowego.

3. Zakres wykładu ograniczony jest do najprostszych zastosowań MES (układy liniowe, materiał izotropowy, podstawowe typy elementów skończonych). Dlatego wyeksponowano w nim najważniejsze aspekty praktyczne. Podstawy teoretyczne ograniczone zostały do ogólnego opisu formalizmu *metody*.

Treść wykładu podzielona jest na jednostki (*Lekcje*), tworzące tak ułożoną sekwencję, że możliwe jest zakończenie go po dowolnej jednostce. Pierwsza opisuje *metodę* ogólnie, druga przybliży wybrane fragmenty jej algorytmu w zastosowaniu do elementu jednowymiarowego, trzecia zawiera uogólnienia na dwa i trzy wymiary oraz uwagi o dokładności rozwiązań. Są jeszcze *Przykłady*, stanowią one integralną część wykładu. Opanowanie przez słuchacza wszystkich trzech jednostek ułatwi mu samodzielne studiowanie przedmiotu i ewentualne programowanie własnych obliczeń, jednak wysłuchanie pierwszej daje już ogólny obraz *metody* w całości.

Lekcja 1. opisuje poglądowo metodę. Wprowadzenie do MES jest dobrą okazją do podsumowania dotychczasowych wykładów z wytrzymałości i statyki oraz do uogólnień. Faktycznie może to być dla studiujących mechanikę nowym, atrakcyjnym obszarem zastosowania równań mechaniki ośrodka ciągłego, bo przecież na gruncie „klasyki” de Saint Venant, Lamé, Kelvin, Flamant, Boussinesq i jeszcze kilku ich kolegów, nic nie zostawili nam do rozwiązania. Dzięki metodom przybliżonym *mechanika ośrodka ciągłego* nie musi już być nauką *historii*. Fizykalna interpretacja równań użytych w MES, np. wprowadzanie warunków brzegowych do układu równań (1.4), przybliży formalizm zawarty w tym dziale mechaniki, czyniąc go namacalnym. Dla słuchaczy skazanych na stosunkowo intensywny kurs *mechaniki ośrodka ciągłego* powinno to być wyjście interesujące.

Lekcja 2. prezentuje formalną stronę *metody* – równania podstawowe i charakterystyki elementu.

Lekcja 3. zawiera pewne uogólnienia, które mogą się okazać przydatne dla czytelnika usiłującego zrobić praktyczny użytek z *Lekcji 2.*, jednak w dalszym ciągu obowiązuje tam ograniczenie do elementów skończonych, nie wymagających całkowania.

Dodany tam opis zagadnień związanych z nieliniowymi funkcjami kształtu stanowi natomiast podstawę do opanowania umiejętności całkowania.

Przykłady, to rozdział zawierający rozwiązania przydatne dla początkujących badaczy, stawiających pierwsze pewniejsze kroki na drodze zdobywania doświadczeń w samodzielnym budowaniu modeli MES.

Jeszcze uwaga o języku, którym piszę to opracowanie.

Oczywiście MES jest poważną aplikacją mechaniki i wymaga precyzji formalnej. Jeśli popadam miejscami w lekki ton, to najczęściej nie dlatego, że o tym nie pamiętam. Sądzę jednak, że poważnych prac z tego zakresu jest już niemało, a odczuwalny jest brak opracowań łatwiejszych, pisanych językiem nieco bardziej potocznym, zrozumiałym dla początkujących. Jestem przekonany, że Czytelnik z łatwością odróżni *konstrukcję rzeczywistą* od *modelu konstrukcji* utworzonego metodą elementów skończonych, choćbym to drugie także nazwał *konstrukcją*. Że odróżni rzeczywiste jej *obciążenie* i *zamocowanie* od *warunków brzegowych*, które obrazowo także nazwę obciążeniem i zamocowaniem – tak, jak odróżnia *literal* 12, którym zapisuję liczbę dwanaście od *liczby dwanaście*, będącej przecież czymś całkiem różnym od tego znaku graficznego, też nazywanego „dwanaście”.

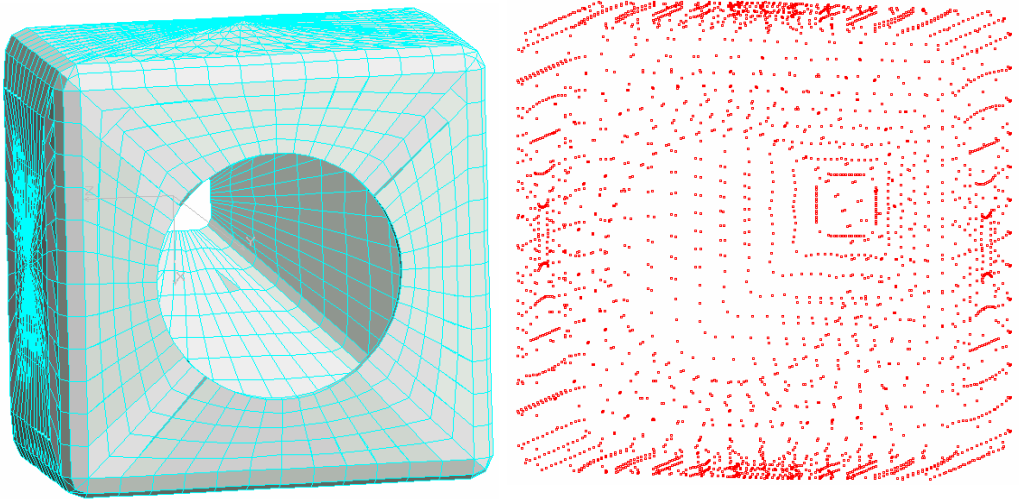
Pragnę na koniec wyrazić wdzięczność i podziękowanie moim kolegom, studentom i zainteresowanej tym tematem Doktorantce za daną mi sposobność wypróbowania na Nich tego podręcznika. Dzięki temu tekst już zyskał na poprawności. Miło mi będzie wysłuchać i uwzględnić ewentualne uwagi krytyczne Czytelnika o tym wydaniu – jeśli, oczywiście, nie przesadzi w krytyce.

Autor

WSTĘP

Metody analizy konstrukcji

Rozwiązanie zadania z mechaniki sprowadza się do zestawienia układu równań wynikających z praw mechaniki i założeń teoretycznych oraz takiego ich przekształcania w procesie rozwiązywania, by na koniec otrzymać pożądaný wynik. Do jakiego wyniku prowadzą zwykle takie obliczenia? Są dwa sposoby rozwiązania, które w efekcie końcowym dają albo pole przemieszczeń, albo pole naprężeń. Tak rozwiązywane są zadania z mechaniki ośrodka ciągłego w przestrzeni trójwymiarowej. W podejściu inżynierskim, czyli na gruncie wytrzymałości materiałów, zastosowanie drugiego sposobu prowadzi często do określenia sił, jako rezultatu rozwiązania.

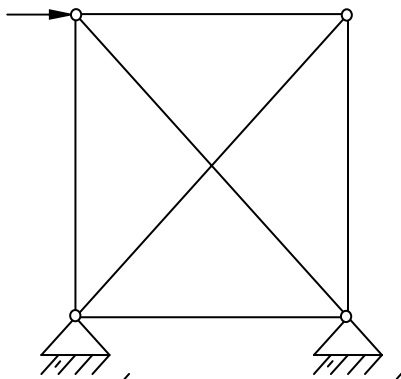


Rys. 0.1. Model zbiornika mieszarki, przygotowany do rozwiązania metodą elementów skończonych.
Po lewej – konstrukcja podzielona na elementy, po prawej widoczne są węzły, tj. „punkty”,
w których elementy łączą się między sobą

Omawiane tu metody mają zastosowanie do modeli konstrukcji, których przykłady widoczne są na rysunkach 0.1 i 0.2. Wspólną cechą obu konstrukcji jest możliwość

sprowadzenia rozwiązania do układu równań algebraicznych (liniowych). Rysunek 0.1 przedstawia model zbiornika mieszarki proszku (8 kN wsadu), złożony z ponad pięciu tysięcy elementów powłokowych. Łączą się one w węzłach pokazanych po prawej stronie. Ich liczba przekracza trzy tysiące. W każdym węźle działa 6 sił uogólnionych i tyle też jest przemieszczeń (stopni swobody), łącznie, w całym modelu, blisko dwadzieścia tysięcy niewiadomych – dwadzieścia tysięcy równań.

Rozwiązanie kratownicy widocznej na rysunku 0.2 także można sprowadzić do układu równań algebraicznych. Elementy pomiędzy węzłami są prętami prostymi w dwuwymiarowej przestrzeni, a węzły mają po dwa stopnie swobody. W konsekwencji liczba równań dla kratownicy (osiem) jest znacząco mniejsza niż dla zbiornika. Dlatego dalej, odwołując się do przykładów, pozostaniemy już przy tej drugiej skrajności, choć omawiane metody (na razie jeszcze nie nazwane) odnoszą się do obydwu rodzajów konstrukcji.



Rys. 0.2. Kratownica – konstrukcja zbudowana z elementów połączonych w węzłach, której rozwiązanie także sprowadzamy do układu równań algebraicznych

Rzeczywiste konstrukcje są odkształcalne, a własność ta jest zwykle warunkiem ich rozwiązania, ponieważ siły i przemieszczenia pozostają ze sobą w przewidywalnym związku. Znajomość tego związku, opartego na prawie, któremu podlega energia odkształcenia konstrukcji, pozwala sprowadzić zadanie do wspomnianego już układu równań algebraicznych, wiążących siły skupione (zarówno czynne, jak i bierne) z przemieszczeniami punktów ich przyłożenia. W zależności od „kierunku” zapisania równań, niewiadomymi w nich mogą być albo siły, albo przemieszczenia. Takie sformułowanie zadania nazywane jest odpowiednio *metodą sił* lub *metodą przemieszczeń*.

Metoda sił

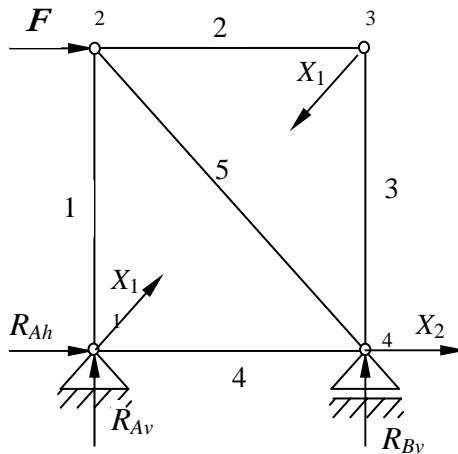
W swoim najprostszym wydaniu metoda sił jest stosowana już w statyce (dział mechaniki), jednak w sposób na tyle szczególny, że klasa rozwiązywanych zadań otrzymała specjalną nazwę: *statycznie wyznaczalnych*. Na kursie statyki, wyprzedzającym oczywi-

ście kurs wytrzymałości materiałów, uczymy się rozwiązywać takie konstrukcje, jak ta, którą przedstawiono na rys. 0.3.

Jest ona dlatego szczególna, że można ją rozwiązać (znaleźć siły bierne i wewnętrzne), nawet wtedy, gdy jest zbudowana z prętów sztywnych, na podstawie samych tylko równań równowagi statycznej. Równania te można ułożyć i rozwiązać na dwa sposoby:

1. Podział zadania na dwa etapy:

- obliczenia reakcji z równań równowagi statycznej dla *całej* konstrukcji, a następnie
- obliczenia sił w prętach z równań równowagi dla węzłów, traktując teraz reakcje jak wielkości znane.



Rys. 0.3. Konstrukcja statycznie wyznaczalna. Powstała z kratownicy na rys. 0.2 przez usunięcie jednego pręta i jednego więzu w prawej podporze

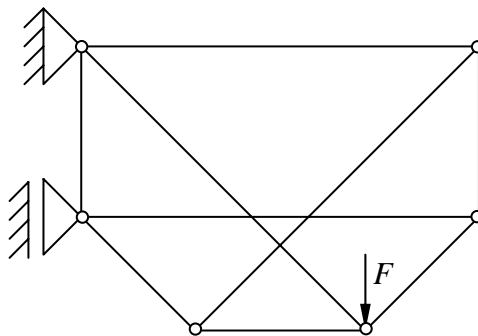
Jeżeli w jednym z tych etapów liczba niewiadomych (sił) przewyższa liczbę równań, zadanie jest nazywane statycznie niewyznaczalnym zewnętrznym lub wewnętrznym.

Ta strategia jest preferowana w obliczeniach „ręcznych”, a mnogość określeń na każdy z możliwych wariantów zadania wynika zapewne z trudu, z jakim osiągnąć byłyby wyniki. Schemat takiego rozwiązania nazywany jest metodą wydzielenia węzłów, a znajduje zastosowanie jedynie wtedy, gdy w równaniach równowagi dla kolejnych węzłów pojawiają się co najwyżej dwie niewiadome w dwuwymiarowej przestrzeni lub trzy niewiadome w przestrzeni trójwymiarowej. To czasem bardzo przykre ograniczenie, co w pełni uświadomimy sobie za chwilę (rys. 0.4).

2. Ułożenie równań równowagi dla węzłów, w których niewiadomymi – równorzędnymi – są zarówno reakcje, jak i siły w prętach. W płaskiej przestrzeni układ warunków równowagi dla kolejnych węzłów przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 w1 \quad & \begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \end{cases} \\
 w2 \quad & \begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \end{cases} \\
 w3 \quad & \begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases} \\
 & \dots
 \end{aligned}
 \tag{0.1}$$

Tak zapisany układ równań jest lepiej przygotowany do obliczeń maszynowych. Trudniej jest się dopatrzeć ewentualnej zewnętrznej lub wewnętrznej niewyznaczalności statycznej (wręcz tracą tu sens te pojęcia – układ *jest*, albo *nie jest*, statycznie wyznaczalny), za to uwalniamy się od wyżej opisanego ograniczenia metody wydzielenia węzłów. Tę strategię doceni każdy, kto spróbuje metodą wydzielenia węzłów rozwiązać kratownicę przedstawioną na kolejnym rysunku – płaską, statycznie wyznaczalną. (Od którego węzła zacząć obliczanie sił w prętach?)



Rys. 0.4. Przypadek kratownicy statycznie wyznaczalnej, nie dającej się rozwiązać metodą wydzielenia węzłów

Pojawienie się sił hiperstatycznych – nieważne czy zewnętrznych, czy wewnętrznych – wymaga dodania do układu (0.1) kolejnych równań i radykalnie zwiększa czasochłonność obliczeń wykonywanych „ręcznie”. Układ statycznie niewyznaczalny, to wówczas zagadnienie zupełnie nowe względem układu statycznie wyznaczalnego, jednak rozróżnienie to ma znaczenie wyłącznie w metodzie sił, bowiem równania równowagi zawierają właśnie siły, nie przemieszczenia.

Owe „dodatkowe” równania oparte są na innym prawie fizycznym, niż równania równowagi, pochodzą mianowicie od zasady Menabre’a. Wynika z niej, że z wszystkich możliwych do pomyślenia wartości reakcji hiperstatycznych te są rzeczywiste, które dają najmniejszą energię odkształcenia obciążonej konstrukcji n -krotnie statycznie niewyznaczalnej. Jeżeli energię odkształcenia wyrazimy za pomocą sił zewnętrznych, to różniczkując ją względem tych reakcji hiperstatycznych, otrzymamy n warunków na minimum tej funkcji – n dodatkowych równań dających teraz – łącznie z równaniami równowagi – możliwość rozwiązania ich układu. Są to równania algebraiczne, liniowe,

niejednorodne (ale konstrukcja musi być geometrycznie liniowa – o tym w *Lekcji 1*), w których niewiadomymi są poszukiwane reakcje hiperstatyczne X_i . Równania te, nazywane równaniami Maxwella–Mohra, mają zatem postać:

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots \delta_{1n} X_n &= 0, \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots \delta_{2n} X_n &= 0, \\ &\dots \\ \delta_{n0} + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots \delta_{nn} X_n &= 0.\end{aligned}\tag{0.2}$$

Zasada Menabre’a jest szczególnym przypadkiem zasady Castigliano, która z kolei pozwala nadać układowi (0.2) inną interpretację fizykalną, mianowicie każde z tych równań wyraża *przemieszczenie* punktu przyłożenia siły reakcyjnej X_p , a to jest tutaj równe zero.

Reakcje X_p (hiperstatyczne) w powyższych równaniach powołujemy do pełnienia tej roli (spośród wszystkich reakcji) dość arbitralnie, a czynimy to przez pozbawienie konstrukcji więzów będących przyczyną ich pojawienia się. Sposób ten prowadzi w konsekwencji do konstrukcji statycznie wyznaczalnej, obciążonej siłami czynnymi, z których część jest dana, a część (czyli X_p) tylko siły czynne udaje. (Wolno im, bo stoi za nimi układ (0.2).) Reszta sił biernych pozostaje nadal w równaniach równowagi statycznej.

Teraz zaczyna się zasadnicza część pracy przy wyznaczaniu współczynników δ_{pq} . Każdy z nich obliczany jest ze wzoru

$$\delta_{pq} = \int_{(L)} \frac{S^{(p)} S^{(q)}}{C} dL,\tag{0.3}$$

w którym $S^{(p)}$ jest siłą wewnętrzną (funkcją wzdłuż osi kolejnych prętów całej konstrukcji statycznie wyznaczalnej) wywołaną wprowadzeniem siły jednostkowej w miejsce siły X_p . Analogiczne znaczenie ma funkcja $S^{(q)}$. Siłą wewnętrzną $S^{(p)}$ może być moment gnący M_g lub moment skręcający M_s , lub siła normalna N (z siłą tnącą jest inaczej, ale tylko trochę), C jest sztywnością pręta odpowiednią do siły wewnętrznej (kolejno: EI_s , GI_s , EA), a całkowanie obejmuje *całą* konstrukcję, wszystkie przedziały o łącznej długości L . Indeks p przyjmuje wartości od 1 do n (liczba sił hiperstatycznych), indeks q – od 1 do n i dodatkowo 0 (dla tak zwanego stanu *podstawowego*, gdy konstrukcja statycznie wyznaczalna jest obciążona jedynie danymi – wszystkimi naraz – siłami czynnymi). Doprawdy trudno nazwać prostym ten algorytm rozwiązania, a tym samym ewentualny program obliczeń!

Problemy ze statyczną wyznaczalnością biorą się stąd, że liczba równań równowagi punktów przyłożenia sił skupionych pozostaje w prostym związku z liczbą tych punktów (np. w kratownicy płaskiej z rys. 0.2, liczba węzłów razy dwa, czyli osiem), gdy tymczasem liczba sił biernych i wewnętrznych może być do pewnego stopnia dowolnie zwiększana (porównaj kratownice z rys. 0.3 i rys. 0.2 – dla obu liczba równań równowagi statycznej jest taka sama), co prowadzi do statycznej niewyznaczalności konstrukcji, czyli konieczności korzystania z innej grupy równań, niż równowagi statycznej.

Tak duże znaczenie przypisywane metodzie sił (mierzone liczbą stron w podręcznikach wytrzymałości materiałów – w porównaniu z metodą przemieszczeń) jest skutkiem zaszło-

ści historycznych, zapoczątkowanych statyką ciała sztywnego. Zauważmy, że układ równań (0.1) jest jakościowo różny od równań „dodatkowych” (0.2), uwzględniających odkształcalność konstrukcji. Ustanowienie układu równań (0.2), czyli konieczność obliczania współczynników δ_{pq} (0.3), wymaga wielokrotnego odwoływania się do układu statycznie wyznaczalnego, podczas wzajemnego kojarzenia stanów „korekcyjnych” i stanu podstawowego. Algorytm ułożony jest tak, że wszystkie równania – w obu grupach, (0.1) i (0.2) – są niewrażliwe na przemieszczenia węzłów.

Metoda przemieszczeń

tym różni się od metody sił, że od początku i w pełni angażuje w równaniach odkształcalność konstrukcji, a nie była lubiana w przeszłości właśnie za to, że zawsze stawiała inżyniera przed koniecznością rozwiązania od razu całego, dużego układu równań (metoda sił pozwala rozwiązywać ten układ równań po kawałku, niewiadome pojawiają się w nich tak, że tworzą odrębne, małe podukłady równań, łatwe do rozwiązania). Za to algorytm obliczeniowy jest w metodzie przemieszczeń niezmiernie prosty, co dzisiaj stawia ją w pozycji uprzywilejowanej. W przypadku konstrukcji prętowej (popatrzmy przykładowo na rys. 0.5), myśl jest taka: pod wpływem obciążeń węzły kratownicy zostaną przemieszczone, ale teraz nie ograniczamy naszego zainteresowania jedynie do węzłów unieruchomionych w podporach (dla których znamy przemieszczenia), interesują nas *wszystkie* węzły, *przede wszystkim* te swobodne, bo właśnie ich przemieszczenia przyjmujemy jako niewiadome w układzie równań kanonicznych metody przemieszczeń. A dlatego są one tak interesujące, bo liczba tych niewiadomych **jest zawsze równa liczbie równań równowagi**. Choć z pozycji metody sił konstrukcja na rys. 0.5 jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna (raz zewnątrz, raz wewnątrz), to w przypadku metody przemieszczeń fakt ten nie ma żadnego znaczenia: równań równowagi jest osiem (po dwa dla każdego z czterech węzłów) i tyleż jest niewiadomych – po dwa przemieszczenia dla każdego z węzłów. (Jeśli przemieszczenie jest „wiadome”, jak w podporze, to niewiadomą staje się wywołana tym reakcja.) Tak jest zawsze i statyczna wyznaczalność lub niewyznaczalność nic tu nie znaczy – wszystkie równania są jednego pochodzenia, nie ma między nimi rozróżnienia prowadzącego do podziału na konstrukcje dające się rozwiązać z tej, czy innej grupy równań. Problem „statycznej wyznaczalności konstrukcji” w tej metodzie przejawia się w rzędzie macierzy współczynników układu równań kanonicznych. Będzie on omawiany pod koniec *Lekcji 1*.

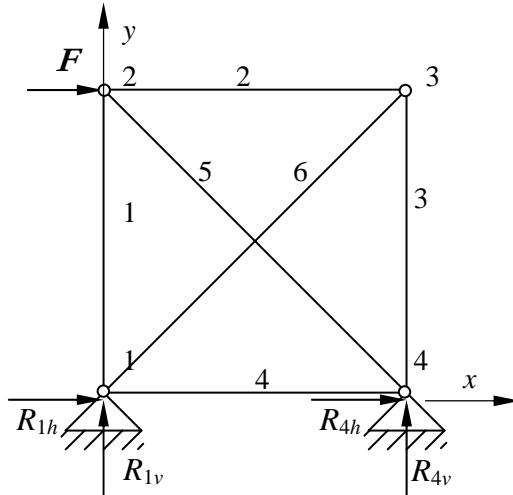
Przykład

Obliczymy reakcje i siły w prętach kratownicy (rys. 0.5) metodą sił i metodą przemieszczeń.

Dane do obliczeń zestawione są w tabeli.

Tabela 1. Definicja konstrukcji statycznie wyznaczalnej (jak na rys. 0.3)

Węzeł	Współrzędna [m]		Przemieszczenie		Siła zewnętrzna	
	x	y	u	v	x	y
1	0	0	0	0	R_{1h}	R_{1v}
2	0	1			$F = 1MN$	0
3	1	1			0	0
4	1	0		0	0	R_{4v}



Rys. 0.5. Kratownica dwukrotnie statycznie niewyznaczalna. Czynnimy ją statycznie wyznaczalną przez „uzewnętrznienie” siły w pręcie 6 i przez zamianę podpory przegubowej na przegubowo-przesuwną w węźle 4. Otrzymujemy więc schemat konstrukcji z rysunku 0.3 i dwie siły hiperstatyczne X_1 i X_2 , obliczane z układu równań (0.2)

Siłę oddziaływania pręta k łączącego węzły i oraz j (rozciganego) na i -ty węzeł, w kierunku x , obliczamy mnożąc siłę N_k w tym pręcie, przez kosinus kąta nachylenia pręta względem osi x : $N_k \cos_{ij}$, a w kierunku y – mnożąc przez sinus tego kąta: $N_k \sin_{ij}$, gdzie

$$\cos_{ij} = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}, \quad \sin_{ij} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}. \quad (0.4)$$

Metoda sił

Układ równań równowagi, zapisany wg (0.1), przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 w1 \begin{cases} N_4 \cos_{41} + X_1 \cos_{31} + N_1 \cos_{21} + R_{1h} = 0, \\ N_4 \sin_{41} + X_1 \sin_{31} + N_1 \sin_{21} + R_{1v} = 0, \end{cases} \\
 w2 \begin{cases} N_1 \cos_{12} + N_5 \cos_{42} + N_2 \cos_{32} + F = 0, \\ N_1 \sin_{12} + N_5 \sin_{42} + N_2 \sin_{32} = 0, \end{cases} \\
 w3 \begin{cases} N_2 \cos_{23} + X_1 \cos_{13} + N_3 \cos_{43} = 0, \\ N_2 \sin_{23} + X_1 \sin_{13} + N_3 \sin_{43} = 0, \end{cases} \\
 w4 \begin{cases} N_4 \cos_{14} + N_5 \cos_{24} + N_3 \cos_{34} + X_2 = 0, \\ N_4 \sin_{14} + N_5 \sin_{24} + N_3 \sin_{34} + R_{4v} = 0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{0.5}$$

Siła N_6 została zastąpiona oznaczeniem X_1 , a R_{4v} zapisano jako X_2 . Oznacza to uwolnienie kratownicy od tych dwóch więzów i wprowadzenie sił hiperstatycznych, które muszą spełnić dodatkowe równania (0.2). Zatem obok pięciu sił N_k w prętach, występują w układzie (0.5) trzy reakcje R , utrzymujące układ podstawowy (statycznie wyznaczalny) w równowadze, oraz dwie siły X_p – razem dziesięć niewiadomych. Równań równowagi jest osiem, czyli konstrukcja jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna i należy utworzyć dwa równania według (0.2):

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= 0, \\
 \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{0.6}$$

Współczynniki w równaniach (0.5) obliczymy z wyrażeń (0.4), po podstawieniu tam współrzędnych węzłów, podanych w tabeli 1. Otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \cos_{41} &= 1, & \cos_{14} &= -1, \\
 \cos_{31} &= 0,7071, & \cos_{13} &= -0,7071, \\
 \cos_{21} &= 0, & \cos_{12} &= 0, \\
 \cos_{42} &= 0,7071, & \cos_{24} &= -0,7071, \\
 \cos_{32} &= 1, & \cos_{23} &= -1, \\
 \cos_{43} &= 0, & \cos_{34} &= 0.
 \end{aligned} \tag{0.7}$$

Współczynniki w równaniach (0.6) obliczane są wg (0.3). Do tego konieczna jest znajomość trzech rozwiązań układu podstawowego, obciążonego:

- 1) jedynie siłą F (układem wszystkich sił czynnych),
- 2) jedynie siłą jednostkową zamiast X_1 ,
- 3) jedynie siłą jednostkową zamiast X_2 .

Stan podstawowy jest taki jak na rys. 0.3, dla konstrukcji tej zapisujemy zatem układ równań identyczny z (0.5), po usunięciu z niego X_1 i X_2 . Podstawiamy więc (0.7) do (0.5) i po rozwiązaniu otrzymujemy siły w układzie podstawowym – tabela 2, kolumna *Stan 0*. Małe n_k w kolumnie pierwszej oznaczają siły częściowe, tj. w kolejnych stanach od 0 do 2.

Do obliczeń przyjęto $F = 1$ MN. Następnie – zgodnie z podanym algorytmem – obciążamy kratownicę statycznie wyznaczalną siłą jednostkową, przyłożoną tak, jak siła X_1 (do węzła trzeciego w kierunku węzła pierwszego, a do węzła pierwszego –

w kierunku węzła trzeciego). Zatem układ (0.5) modyfikujemy następująco: podstawiamy oczywiście zero za siłę X_2 , usuwamy też siłę F , a X_1 zastępujemy jedynką. Po rozwiązaniu wyniki wprowadzamy do tabeli 2, kolumna *Stan 1*.

Tabela 2. Etapy rozwiązania kratownicy statycznie niewyznaczalnej

Siła	Stan 0	Stan 1	Stan 2	$L_k/(E_k A_k)$	1 – 0	2 – 0	1 – 1	1 – 2	2 – 2	Wartość siły
n_1	1	-0,7071	0	5,000 e-3	-0,00354	0	0,00250	0	0	0,558
n_2	0	-0,7071	0	5,000 e-3	0	0	0,00250	0	0	-0,442
n_3	0	-0,7071	0	5,000 e-3	0	0	0,00250	0	0	-0,442
n_4	1	-0,7071	1	5,000 e-3	-0,00354	0,005	0,00250	-0,00354	0,00500	0,000
n_5	-1,4142	1	0	7,071 e-3	-0,01	0	0,00707	0	0	-0,789
n_6	0	1	0	7,071 e-3	0	0	0,00707	0	0	0,626
R_{1h}	-1	0	-1							-0,442
R_{1v}	-1	0	0							-1,000
R_{4h}	0	0	1							-0,558
R_{4v}	1	0	0							1,000
				Suma:	-0,01707	0,00500	0,02414	-0,00354	0,00500	

Drugi – ostatni – stan korekcyjny otrzymamy po obciążeniu konstrukcji statycznie wyznaczalnej siłą jednostkową zamiast X_2 . Ponownie dostosowujemy układ (0.5) do tego obciążenia i po rozwiązaniu go wypełniamy kolumnę *Stan 2* tabeli 2.

Teraz nareszcie można przystąpić do obliczania współczynników δ_{pq} . Przepis na nie, podany w (0.3), upraszcza się mocno dla kratownicy, gdyż siła normalna w przedziałach – prętach jest stała. Zatem funkcja podcałkowa w przedziale jest także stała, a w zastosowaniu do całej konstrukcji całka zamienia się w sumę z przedziałów. Wyrażenie (0.3) wygląda teraz tak:

$$\delta_{pq} = \sum_{k=1}^6 \frac{n_k^{(p)} n_k^{(q)} L_k}{E_k A_k}. \quad (0.8)$$

W tabeli 2 podatności $L_k/(E_k A_k)$ obliczono, przyjmując jednakowy przekrój dla wszystkich prętów, równy $10^{-3} [\text{m}^2]$ i jednakowy moduł Younga $E = 2e5 \text{ MPa}$ (tylko dlatego jednakowy, aby łatwiej śledzić te obliczenia – zróżnicowanie przekrojów, a nawet modułów Younga, dla prętów nie jest tu żadnym utrudnieniem).

Należy obliczyć pięć współczynników δ_{pq} występujących w układzie równań (0.6) (wykazują one symetrię $\delta_{pq} = \delta_{qp}$, co wynika choćby z wyrażenia (0.8), zatem $\delta_{12} = \delta_{21}$). Każdy z nich kojarzy dwa stany obciążenia układu statycznie wyznaczalnego: p oraz q , np. δ_{10} jest sumą sześciu składników (patrzmy na wyrażenie (0.8)) dla kolejnych sześciu prętów, z których każdy powstał przez pomnożenie siły wewnętrznej $n_k^{(1)}$ (wywołanej w k -tym pręcie dzia-

łaniem siły jednostkowej w miejscu X_1) przez siłę $n_k^{(0)}$ (wywołaną w k -tym pręcie – tym samym – działaniem obciążenia czynnego F) i przez podatność k -tego pręta $L_k/(E_k A_k)$. Te trzy mnożone przez siebie liczby dla każdego pręta, zawarte są w tabeli 2, w kolumnach drugiej, trzeciej i piątej. Wynik mnożenia, dla każdego pręta oddzielnie, zawiera kolumna $l - 0$. Suma w tej kolumnie jest właśnie równa sumie (0.8), więc daje współczynnik δ_{l0} . Analogicznie obliczane są pozostałe współczynniki δ_{pq} , a wyniki dla stanów $p - q$ znajdujemy w kolejnych kolumnach tabeli 2. Tak więc układ równań (0.6) zapiszemy ostatecznie następująco:

$$\begin{aligned} -0,01707 + 0,02414 X_1 - 0,003536 X_2 &= 0, \\ 0,005000 - 0,003536 X_1 + 0,005000 X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (0.9)$$

Stąd $X_1 = 0,625$ MN, $X_2 = -0,558$ MN.

Ostatni już raz przygotowujemy do rozwiązania układ równań (0.5), podstawiając doń współczynniki (0.7) oraz obliczone właśnie siły X_1 , X_2 . Równania (0.6) spełniły bowiem swoje zadanie – znamy już siły hiperstatyczne, mają one teraz status sił czynnych, znanych. Do znalezienia sił biernych wystarczą zatem równania równowagi statycznej (0.5). Ich rozwiązanie dostarcza wartości sił w pięciu prętach układu statycznie wyznaczalnego oraz trzech reakcji – pokazanych na rys. 0.3 – umieszczonych w ostatniej kolumnie tabeli 2. Wytluszczone symbole n_6 i R_{4h} są siłami przyjętymi jako hiperstatyczne X_1 i X_2 . Mamy zatem siły i (po podzieleniu przez A_k) naprężenia w prętach. Nadal, niestety, nie znamy przemieszczeń konstrukcji.

Metoda przemieszczeń

Zadanie widzimy teraz tak: konstrukcję stanowią cztery węzły o współrzędnych danych w tabeli 1, których przemieszczenia w układzie x , y zależą od przyłożonych do nich sił zewnętrznych, ale przede wszystkim od połączeń sprężystych (prętów) występujących między tymi węzłami. Siły czynne są oczywiście dane, siły w prętach są skutkiem przemieszczania się węzłów (pomijamy rozszerzalność termiczną, siły masowe itd.).

Wiadomo, że siła normalna w pręcie rozciąganym pozostaje w liniowym związku z jego wydłużeniem, które liczymy jako różnicę przemieszczeń końców w kierunku osi pręta. W układzie x , y , globalnym, zależność ta wyraża się tak:

$$N_k = \frac{E_{ij} A_{ij}}{L_{ij}} \left[(u_j - u_i) \cos_{ij} + (v_j - v_i) \sin_{ij} \right]. \quad (0.10)$$

(Indeksy i , j wskazują węzły przylegające do końców pręta. Współczynnik przed nawiasem kwadratowym jest odwrotnością współczynnika użytego w metodzie sił – kolumna 5. tabeli 2.) Takich sił jest sześć:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{E_{12}A_{12}}{L_{12}} v_2 = \frac{1}{5e-3} v_2 = 200v_2, \\
N_2 &= \frac{E_{23}A_{23}}{L_{23}} (u_3 - u_2) = \frac{1}{5e-3} (u_3 - u_2) = 200(u_3 - u_2), \\
N_3 &= \frac{E_{34}A_{34}}{L_{34}} v_3 = \frac{1}{5e-3} v_3 = 200v_3, \\
N_4 &= \frac{E_{14}A_{14}}{L_{14}} 0 = 0, \\
N_5 &= \frac{E_{42}A_{42}}{L_{42}} \frac{(v_2 - u_2)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{7,071e-3 \sqrt{2}} (v_2 - u_2) = 100(v_2 - u_2), \\
N_6 &= \frac{E_{13}A_{13}}{L_{13}} \frac{(u_3 + v_3)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{7,071e-3 \sqrt{2}} (u_3 + v_3) = 100(u_3 + v_3).
\end{aligned} \tag{0.10a}$$

Wszystkie one, wraz z siłami zewnętrznymi, obciążają węzły, a te pozostają przecież w równowadze. Muszą zatem spełniać osiem następujących równań równowagi (są to faktycznie takie same równania, jak (0.5), do których podstawiamy aktualne dane):

$$\begin{aligned}
0 * 1 &+ 100 (u_3 + v_3) * 0,7071 + 200 v_2 * 0 &+ R_{1h} &= 0, \\
0 * 0 &+ 100 (u_3 + v_3) * 0,7071 + 200 v_2 * 1 &+ R_{1v} &= 0, \\
200 v_2 * 0 &+ 100 (v_2 - u_2) * 0,7071 + 200(u_3 - u_2) * 1 + 1 &= 0, \\
-200 v_2 * 1 &- 100 (v_2 - u_2) * 0,7071 + 200(u_3 - u_2) * 0 &= 0, \\
-200 (u_3 - u_2) * 1 &- 100 (u_3 + v_3) * 0,7071 + 200 v_3 * 0 &= 0, \\
-200 (u_3 - u_2) * 0 &- 100 (u_3 + v_3) * 0,7071 - 200 v_3 * 1 &= 0, \\
-0 * 1 &- 100 (v_2 - u_2) * 0,7071 + 200 v_3 * 0 &+ R_{4h} &= 0, \\
0 * 0 &+ 100 (v_2 - u_2) * 0,7071 + 200 v_3 * 1 &+ R_{4v} &= 0.
\end{aligned} \tag{0.11}$$

Porządkujemy je według niewiadomych (nagłówki określają ich położenie), a wyrazy wolne umieszczamy po prawej stronie:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{R}_{1h} & \mathbf{R}_{1v} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{R}_{4h} & \mathbf{R}_{4v} & \mathbf{F} \\
1 * \mathbf{R}_{1h} + 0 * \mathbf{R}_{1v} + 0 * \mathbf{u}_2 & & & +0 * \mathbf{v}_2 & +70,71\mathbf{u}_3 & +70,71\mathbf{v}_3 & +0 * \mathbf{R}_{4h} & +0 * \mathbf{R}_{4v} & = 0, \\
0 * \mathbf{R}_{1h} + 1 * \mathbf{R}_{1v} + 0 * \mathbf{u}_2 & & & +200 * \mathbf{v}_2 & +70,71\mathbf{u}_3 & +70,71\mathbf{v}_3 & +0 * \mathbf{R}_{4h} & +0 * \mathbf{R}_{4v} & = 0, \\
0 * \mathbf{R}_{1h} + 0 * \mathbf{R}_{1v} -270,71 \mathbf{u}_2 & & +70,71 \mathbf{v}_2 & & +200 \mathbf{u}_3 & +0 * \mathbf{v}_3 & +0 * \mathbf{R}_{4h} & +0 * \mathbf{R}_{4v} & = -1, \\
0 * \mathbf{R}_{1h} + 0 * \mathbf{R}_{1v} + 70,71 \mathbf{u}_2 & & -270,71 \mathbf{v}_2 & & +0 * \mathbf{u}_3 & +0 * \mathbf{v}_3 & +0 * \mathbf{R}_{4h} & +0 * \mathbf{R}_{4v} & = 0, \\
0 * \mathbf{R}_{1h} + 0 * \mathbf{R}_{1v} + 200 \mathbf{u}_2 & & +0 * \mathbf{v}_2 & & -270,71 \mathbf{u}_3 & -70,71 \mathbf{v}_3 & +0 * \mathbf{R}_{4h} & +0 * \mathbf{R}_{4v} & = 0, \\
0 * \mathbf{R}_{1h} + 0 * \mathbf{R}_{1v} + 0 * \mathbf{u}_2 & & +0 * \mathbf{v}_2 & & -70,71 \mathbf{u}_3 & -270,71 \mathbf{v}_3 & +0 * \mathbf{R}_{4h} & +0 * \mathbf{R}_{4v} & = 0, \\
0 * \mathbf{R}_{1h} + 0 * \mathbf{R}_{1v} + 70,71 \mathbf{u}_2 & & -70,71 \mathbf{v}_2 & & +0 * \mathbf{u}_3 & +0 * \mathbf{v}_3 & +1 * \mathbf{R}_{4h} & +0 * \mathbf{R}_{4v} & = 0, \\
0 * \mathbf{R}_{1h} + 0 * \mathbf{R}_{1v} - 70,71 \mathbf{u}_2 & & +70,71 \mathbf{v}_2 & & +0 * \mathbf{u}_3 & +200 \mathbf{v}_3 & +0 * \mathbf{R}_{4h} & +1 * \mathbf{R}_{4v} & = 0.
\end{array} \tag{0.12}$$

lub (zapisując macierzowo):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 70,71 & 70,71 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 200 & 70,71 & 70,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -270,7 & 70,71 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,71 & -270,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 & -270,7 & -70,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -70,71 & -270,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,71 & -70,71 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -70,71 & 70,71 & 0 & 200 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{1h} \\ R_{1v} \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ R_{4h} \\ R_{4v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Powód takiego zapisania współczynników układu równań staje się oczywisty dla każdego, kto stanie przed koniecznością rozwiązania choćby tak małego układu. Obliczenia wykonujemy bowiem numerycznie, a każdy program komputerowy, przed rozwiązaniem, zapyta nas właśnie o macierz współczynników i wektor prawych stron. Zapyta teraz tylko raz – w przeciwieństwie do metody sił, gdzie rozwiązania były cztery plus jedno – i poda odpowiedź:

$$\begin{Bmatrix} R_{1h} \\ R_{1v} \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ R_{4h} \\ R_{4v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,442 \\ -1,000 \\ 0,01068 \\ 0,00279 \\ 0,00847 \\ -0,00221 \\ -0,558 \\ 1,000 \end{Bmatrix} \begin{matrix} [\text{MN}] \\ [\text{MN}] \\ [\text{m}] \\ [\text{m}] \\ [\text{m}] \\ [\text{m}] \\ [\text{MN}] \\ [\text{MN}] \end{matrix}$$

Pierwsze dwie pozycje odpowiadają węzłowi pierwszemu – kierunek x i y – jak w (0.1), ale węzeł ten jest unieruchomiony, jego przemieszczenia są więc znane; w równaniach tych, jako niewiadome pozostały reakcje. Podobnie jest z ostatnimi dwiema pozycjami – dla węzła czwartego. Siły otrzymaliśmy oczywiście w MN. Cztery środkowe pozycje zajmują natomiast *przemieszczenia* węzłów 2. i 3. wyrażone w metrach.

Siły w prętach zależą od przemieszczeń, jak wynika to z wyrażeń (0.10a):

$$N_1 = 200 * 0,00279 = 0,558 \text{ MN}, \quad (\text{pręt rozciągany}),$$

$$N_2 = 200 * (0,00847 - 0,01068) = -0,442 \text{ MN}, \quad (\text{pręt ściskany}),$$

$$N_3 = 200 * (-0,00221) = -0,442 \text{ MN},$$

$$N_4 = 0,$$

$$N_5 = 100 * (0,00279 - 0,01068) = -0,789 \text{ MN},$$

$$N_6 = 100 * (0,00847 - 0,00221) = 0,626 \text{ MN},$$

a naprężenia w prosty sposób od sił. Przedstawiony algorytm dostarcza zarówno naprężenia w konstrukcji, jak i – po drodze niejako – przemieszczeń.

LEKCJA 1

Obraz ogólny metody elementów skończonych

Pojęcia podstawowe klasycznej wytrzymałości materiałów i uwagi wstępne

Na *konstrukcję* (w klasycznym znaczeniu) składają się *dźwigary* (elementarne fragmenty konstrukcji) połączone wzajemnie i *podparte* tak, że jako całość (i każdy z osobna) pozbawione są wszystkich stopni swobody. Te elementy konstrukcji zastępowane są w obliczeniach wytrzymałościowych modelami teoretycznymi. Każdy z nich ma swoją specyfikę.

Najprostszy – pręt rozciągany – jest odcinkiem w jednowymiarowym continuum (jednowymiarową „bryłą”), w którym jedyną siłą wewnętrzną jest siła normalna N , a jedynym energetycznym skutkiem jej działania – wydłużenie. Z drugiej strony, najbardziej ogólnym „elementem konstrukcyjnym” jest bryła trójwymiarowa. Siłą wewnętrzną jest w niej naprężenie σ , a jego skutkiem – odkształcenie ε . (A może odwrotnie). Pomiedzy tymi skrajnościami sytuują się belki, ramy, tarcze, płyty, powłoki z ich specyficznymi siłami wewnętrznymi (na koniec – przypominając sobie niejako, że dźwigary te istnieją jednak w przestrzeni trójwymiarowej – każdą z tych sił wewnętrznych przeliczamy na naprężenie, wspólną wszystkim siłę).

Zawsze jednak model obliczeniowy *dźwigara* jest ciągły. Oznacza to, że w obszarze konstrukcji dowolnie wybrany punkt oddziałuje z każdym innym punktem tego obszaru. A punktów jest nieskończenie wiele.

Rozwiązać konstrukcję znaczy wyznaczyć siły bierne (reakcje), funkcje sił wewnętrznych i przemieszczenia. Tym zajmujemy się już na gruncie statyki, o ile zadanie jest statycznie wyznaczalne. Ogólnie obliczenia sprowadzają się do rozwiązania układu równań różniczkowych z określonymi warunkami brzegowymi, a więc zastosowania zasad mechaniki do nieskończenie małych elementów objętościowych (tak, jak się je rozumie w analizie matematycznej). W konsekwencji oznacza to próbę zna-

lezenia funkcji przemieszczenia i naprężenia (tensorowych, często bardzo złożonych) od razu w *całym* obszarze konstrukcji (zwykle równie skomplikowanej). Oczywiście jest, że muszą to być zadania stosunkowo proste, aby możliwe było osiągnięcie rozwiązania zamkniętego. Dla zdecydowanie trudnych przypadków (a te właśnie spotykamy zwykle w życiu) brak jest niestety rozwiązań zamkniętych. Wtedy jesteśmy skazani na *metody przybliżone*, np. MES.

Na układ równań, niezbędnych do wyznaczenia pola przemieszczeń, składają się (między innymi) związki geometryczne i równania konstytutywne. Przykładowo, dla przestrzeni x, y (czyli dwuwymiarowej):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varepsilon_y, \\ \sigma_y &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_y, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

lub nieco inaczej (choć tak samo)

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad (1.2a)$$

gdzie

$$[D] = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

$\{\varepsilon\}$ – podobnie jak $\{\sigma\}$ – jest wektorem (kolumnowym),
 E, ν – stałe materiałowe.

Gdyby dołączyć tu jeszcze grupę równań równowagi (i podać warunki brzegowe – są to przecież równania różniczkowe) otrzymalibyśmy kompletny układ równań nadający się już do rozwiązania – liczba równań będzie wówczas równa liczbie niewiadomych.

Choć nominalnie możliwe, rozwiązanie osiągnąć tą drogą – przez całkowanie – zwykle nie daje się, jak już wiemy, doprowadzić do postaci zamkniętej. Na razie jed-

nak nie musimy się na tym skupiać, przyjmijmy, że – jakimś sposobem – to się udało. W rezultacie otrzymamy pole przemieszczeń

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$$

(ogólnie w trzech wymiarach) i jest to zasadniczy etap rozwiązania (na gruncie *metody* w jej najpowszechniej występującej wersji, bo rozwiązanie można też otrzymać w naprężeniach). W powyższych funkcjach u, v, w zawarta już została wszelka informacja o materiale (postać funkcji zależna jest od parametrów materiałowych) i jego geometrii. Z równań (1.1) i (1.2) wynika bowiem, że mając pole przemieszczeń konstrukcji, mamy w zasadzie wszystko: jej końcową konfigurację (czyli jej geometrię po obciążeniu), pole odkształceń i pole naprężeń. Wyznaczenie funkcji u, v, w jest zatem równoznaczne z rozwiązaniem (jeśli nie liczyć już prostych w użyciu związków (1.1) i (1.2) na drodze dochodzenia do naprężeń).

Krótką dygresja o zapisie macierzowym

Choć odkształcenie ε i naprężenie σ są tensorami *drugiego rzędu*, w metodzie elementów skończonych nie zostały potraktowane z należytym szacunkiem. Wszystkie niezależne ich składowe, w arbitralnie przyjętej kolejności (ale konsekwentnie), zostały umieszczone w jednowymiarowych tablicach (podobnie, jak przemieszczenia $\{q\}$ i siły węzłowe $\{Q\}$). Ponieważ każda z trzech grup równań – związki geometryczne, równania konstytutywne i równania równowagi – tworzy układ, który daje się interpretować jako działania algebraiczne, także i dla nich możliwy jest zapis owych działań z użyciem tablic liczbowych. Taki schemat zapisywania danych oraz wykonywanych na nich operacji jest w zadaniach mechaniki konstrukcji nazywany *macierzowym*. (Jednak jest to w dalszym ciągu zapis klasyczny, tj. w układzie współrzędnych x, y, z , w którym występujące obiekty pozbawione są tensorowego piętna.)

Tak więc dla ośrodka ciągłego w trzech wymiarach

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\},$$

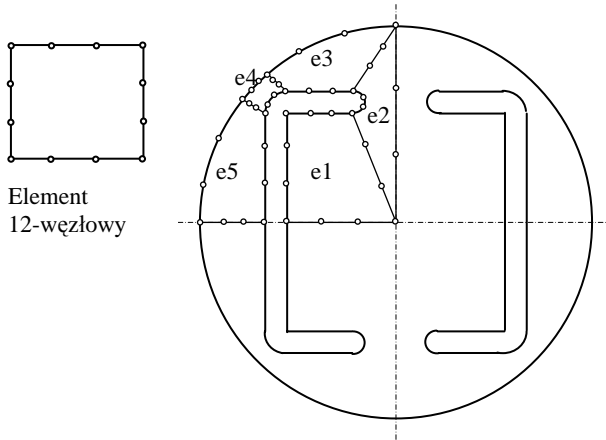
$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}.$$

Na taki zapis możemy sobie pozwolić tylko dlatego, że iloczyn (skalarowy) tych „wektorów” $\{\sigma\}^T \{\varepsilon\}$ daje (przypadkiem) wynik identyczny z iloczynem $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ – podwójną energią odkształcenia sprężystego. (MES jest metodą *energetyczną*, dla której ten iloczyn ma ogromne znaczenie.)

Są na szczęście przykłady konstrukcji z natury zdyskretyzowanych. Kratownica, choć składa się z elementów kontynualnych, jest konstrukcją, której rozwiązanie daje się sprowadzić do układu równań algebraicznych, a nie różniczkowych. W tym względzie algorytm obliczeniowy upodabnia się do stosowanego w MES. Dzieje się

tak dzięki odrębnemu rozwiązywaniu (prostych) elementów konstrukcji połączonych punktowo w całość.

Jednak w MES ta strategia rozwiązania zaszła znacznie dalej, a podział na elementy jest o wiele bardziej radykalny. Dyskretyzacji poddaje się bryły lub dźwigary o dowolnych kształtach, przy tym używane do tego elementy skończone bywają silnie zakrzywione, zdumiewająco wiernie dopasowując się do rzeczywistych powierzchni lub linii granicznych konstrukcji.



Rys. 1.1. Przykład tarczy kołowej z dwoma wycięciami ceowymi, modelowanej elementami wyższego rzędu – czworobokami o dwu węzłach pośrednich na każdym boku (rysunek po lewej). Do zdyskretyzowania tej złożonej geometrycznie konstrukcji użyto – jak widać – 20 elementów skończonych

Pojęcia podstawowe metody elementów skończonych

Uwagi wstępne i definicje

Na **konstrukcję** składają się **elementy skończone**. **Element skończony** jest arbitralnie wydzielonym fragmentem konstrukcji. Łączy się on z innymi elementami skończonymi jedynie w **węzłach**. **Węzły** są „punktami” należącymi do jednego lub więcej elementów skończonych (*więcej* – oznacza połączenie elementów). Liczba elementów i liczba węzłów jest skończona (czasem bywa bardzo mała). Na rysunku 1.2 pokazany jest przykład tarczy obciążonej i zamocowanej, następnie podzielonej na elementy skończone. Pojedynczy element jest obciążony oddziaływaniem ze strony przyległych elementów, przekazywanym za pośrednictwem wspólnych węzłów.

Węzły „diskretyzują” funkcje, które powinny być ciągłe w objętości konstrukcji (a ściślej – w objętości elementów skończonych). Wyobraźmy to sobie tak: Raz obszar

konstrukcji zamknięty w elemencie skończonym jest ciągły (klasyczne continuum) i jako taki zostaje obciążony siłami powierzchniowymi lub objętościowymi i rozwiązany ściśle. W ten sposób „element” przyjmie pewien określony kształt końcowy. Drugi raz element zostaje spreparowany tak, że jego kontynuualna struktura zostaje sprowadzona do układu punktów zastępczych, czyli węzłów. Powiązane są one między sobą tak dobranymi sprężynami, że układ tych punktów, po obciążeniu ich siłami wypadkowymi, przyjmie postać identyczną jak w poprzednim rozwiązaniu. Można powiedzieć, że element ten został zredukowany do reprezentujących go węzłów. Różnica jest taka, że w pierwszym przypadku od razu otrzymujemy *pole* przemieszczeń ośrodka, gdy tymczasem w drugim – przemieszczenia tylko tych wybranych punktów. „Ciągłości” nabierają te przemieszczenia dopiero po interpolacji pomiędzy wartościami węzłowymi, przy użyciu pewnych funkcji (prostych, przyjętych arbitralnie, nazywanych funkcjami kształtu).

Konstrukcja *podparta* jest tak, że jako całość pozbawiona jest wszystkich stopni swobody (nie jest mechanizmem).

Nazwa elementu skończonego bierze się stąd, że może on obejmować znaczne fragmenty konstrukcji. Zienkiewicz [1, str. 153] podaje przykład elementu przestrzennego (jednego) obejmującego *całą zaporę lukową*. Zwykle jednak jest ich wiele, czasem setki tysięcy. Na umiejętność wyboru między drogami ku tym skrajnościom składa się zarówno wiedza teoretyczna, jak i doświadczenie. Trudno wyobrazić sobie opcję domyślną na wybór typu elementu w systemie komputerowym, adekwatną do każdego zadania.

Dyskretyzacja konstrukcji (jej podział na elementy skończone stanowiące w przestrzeni przez węzły) ma na celu wprowadzenie *sił węzłowych* powiązanych z elementami skończonymi związkami klasycznej teorii sprężystości i w rezultacie sprowadzenie rozwiązania konstrukcji (ciągłej, przestrzennej) do układu równań algebraicznych – tak, jak to się dzieje w przypadku kratownicy. Z kompletem sił (działających tylko w węzłach), zapisywanym jako wektor $\{Q\}$ (pionowa tablica jednowymiarowa), skojarzony jest wektor przemieszczeń węzłowych $\{q\}$, nazywanych *parametrami węzłowymi* (oczywiście o tym samym wymiarze co $\{Q\}$). Pomiedzy tymi wektorami występuje liniowa zależność (1.4) (poniżej), jak przyjmuje się w MES.

Zasadniczą treścią MES są algorytmy obliczeniowe współczynników sztywności (lub podatności) między tymi wektorami. Nominalnie rzecz biorąc, taki współczynnik liczbowy występuje pomiędzy każdą współrzędną wektora przemieszczenia $\{q\}$ a każdą współrzędną wektora siły $\{Q\}$ (i umieszczony jest na odpowiedniej pozycji w macierzy $[K]$). Bywa ich czasem bardzo wiele, jednak zawsze jest to liczba skończona, czego nie można powiedzieć o ośrodku ciągłym. Natura *metody* jest natomiast taka, że najczęściej ogromna większość tych współczynników jest dla konstrukcji równa zeru. O tym, które to są współczynniki, dowiemy się nieco dalej, do tego potrzebne jest pojęcie *stopnia swobody*. Już teraz za to widać, że macierz sztywności konstrukcji $[K]$, zawierająca te współczynniki, jest kwadratowa (bo wymiary $\{q\}$ i $\{Q\}$ w równaniach (1.4) są takie same).

MES – zwykle oparta na metodzie przemieszczeń – sprowadza się do algorytmu obliczania macierzy sztywności konstrukcji $[K]$ w (liniowym) układzie równań kanonicznych

$$[K] * \{q\} = \{Q\}. \quad (1.4)$$

Jak widać, wektor parametrów węzłowych $\{q\}$ przyjęto jako niewiadome, a wektor prawych stron $\{Q\}$ stanowią siły węzłowe. „Zwykle”, bowiem MES ma także swoją wersję opartą na metodzie sił (wówczas $\{q\}$ jest wektorem prawych stron, $\{Q\}$ niewiadomymi, a $[K]^{-1}$ jest macierzą współczynników podatności między nimi), a nawet hybrydową, ale jest ona znacznie mniej rozpowszechniona (otarliśmy się o tę wersję we *Wstępie* – do niewiadomych w układzie równań (0.12) zostały tam zaliczone przemieszczenia na równi z siłami).

Równanie macierzowe (1.4) wyraża liniowy związek między przemieszczeniami węzłowymi i siłami węzłowymi. O takiej konstrukcji mówimy, że jest *układem liniowym geometrycznie* (układem Clapeyrona). Ta liniowa zależność obowiązuje zarówno dla całej konstrukcji, jak i dla elementu skończonego (a nawet dla poszczególnego węzła). Dlatego ma ona dwa zakresy zastosowania. Z perspektywy praktyki obliczeniowej najpierw tworzona jest macierz sztywności elementu $[k]_e$ w równaniu analogicznym do (1.4)

$$[k]_e * \{q\}_e = \{Q\}_e, \quad (1.4a)$$

Macierz ta jest *składnikiem* macierzy globalnej $[K]$ (jeśli konstrukcja składa się z więcej, niż jednego elementu). Współrzędne $[k]_e$ zależą wyłącznie od geometrii elementu skończonego i materiału, są więc „znane” – ich wartości obliczamy po zdefiniowaniu modelu konstrukcji, przed jego zamocowaniem, obciążeniem i oczywiście rozwiązaniem. Rozmiar macierzy $[k]_e$ jest, mówiąc obrazowo, tak mały w porównaniu z $[K]$, jak mały jest element skończony w porównaniu z konstrukcją. Porównanie to można ciągnąć dalej: podobnie jak konstrukcja tworzona jest przez dokładanie klocków – elementów skończonych, tak macierz sztywności konstrukcji $[K]$ tworzona jest przez dokładanie kolejnych macierzy sztywności elementów $[k]_e$. I to w sensie jak najbardziej dosłownym: macierze $[k]_e$ są do siebie (w pewien specyficzny sposób, opisany dalej) dodawane. Po złożeniu wszystkich klocków konstrukcja jest gotowa do zamocowania i obciążenia, tj. wprowadzenia warunków brzegowych. Każdy z tych trzech etapów wymaga oddzielnego omówienia.

Ten elementarny w swej strukturze, macierzowy zapis (1.4) stanowi – jakże skuteczne – uogólnienie równania skalarowego dla pręta liniowo-sprężystego: $(EA/L) * \Delta L = F$. Co więcej, zapis ten zachowa tę strukturę także po uwzględnieniu rozszerzalności termicznej, naprężeń wstępnych oraz sił objętościowych.

Element skończony

jest najmniejszą „dawką” konstrukcji w schemacie MES. Może być on modelem każdego rodzaju dźwigara, a więc pręta (obciążonego dowolną kombinacją sił wewnętrznych), tarczy, płyty, powłoki i bryły. Zależnie od potrzeb może przyjmować różne kształty i zawierać różne ilości węzłów. Stąd ogromna mnogość typów. W powszechnym użyciu

jest ich kilkadziesiąt. Znamienny dla MES jest jednak fakt *identycznego algorytmu obliczeniowego* dla każdego typu elementu. Ta uniwersalność jest zasadniczym powodem tak wielkiej popularności tej metody.

Element skończony to obszar, do którego stosowane są równania teorii sprężystości. Jest on faktycznie rozwiązywany jak klasyczne zadanie mechaniki ośrodka ciągłego. Różnica względem mechaniki klasycznej polega na tym, że pole przemieszczeń w jego obszarze określają bardzo proste funkcje. Są to zwykle wielomiany i to niewysokiego stopnia. Jednocześnie kształt elementu także ograniczony jest do prostych figur lub brył geometrycznych – odcinka, trójkąta, prostokąta, czworościanu, prostopadłościanu, a obciążenia przykładane są wyłącznie do węzłów jako siły skupione. Rozwiązanie takiego zadania na gruncie mechaniki klasycznej nie stanowi już problemu i w takim zakresie jest ona wykorzystana w MES.

Element skończony tym się różni od elementu objętościowego w analizie matematycznej, że funkcje w jego obszarze mogą być zdecydowanie nieliniowe (choć w praktyce jest to dość często możliwość jedynie potencjalna). Element jest więc ciągły, co nie zawsze da się powiedzieć o obciążonej konstrukcji po takim podziale. Na przykład pole przemieszczeń będzie wówczas ciągłe na pewno w obszarze każdego z elementów, a zatem i w węzłach łączących elementy. Dopuszcza się jednak tę możliwość, że pomiędzy elementami, ale poza łączącymi je węzłami, pojawią się szczeliny. Stanowi to źródło błędów metody, jednak ich wielkość, a raczej małość, jest zaskakująca – także dla znawców przedmiotu. (A właściwie tylko dla nich).

W tym miejscu należy przedstawić najbardziej chyba znamienny rys metody: do opisu rozkładu pola przemieszczeń wewnątrz elementu skończonego zastosowano kapitalny pomysł Rayleigha, modyfikowany później przez innych, do przybliżonego rozwiązywania dźwigarów, znany jako metoda Rayleigha–Ritza. Pomysł polega na przyjęciu (nieznanego przed rozwiązaniem) pola przemieszczeń w postaci szeregu

$$u(x) = \sum a_i \varphi_i(x), \quad (1.5)$$

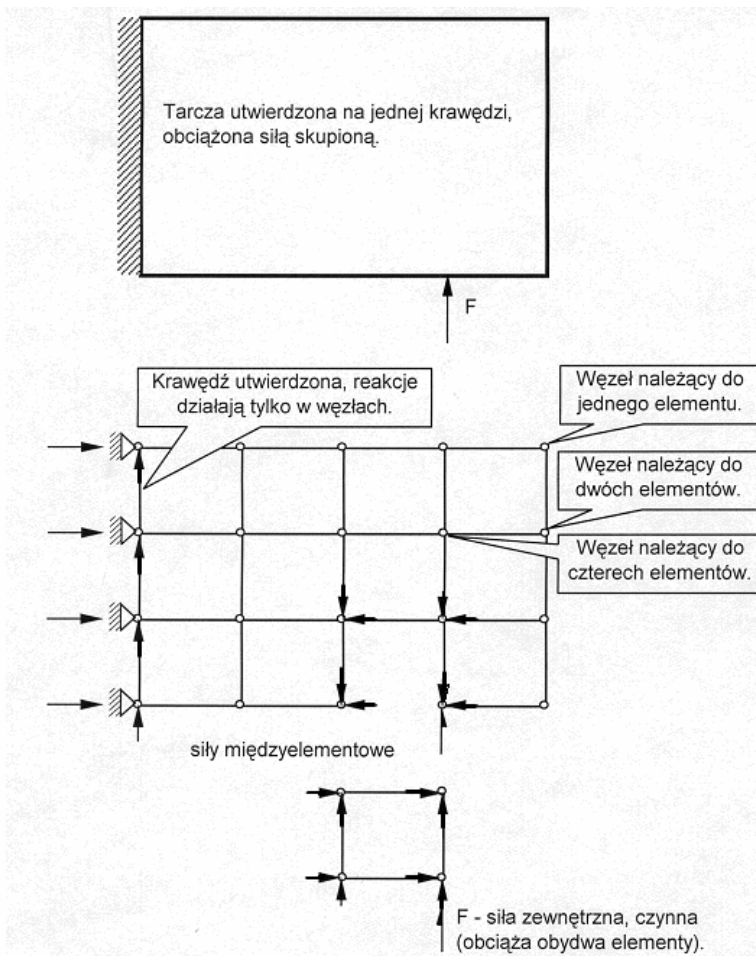
gdzie a_i są parametrami do obliczenia, a φ_i znanymi funkcjami położenia x . (Szereg można oczywiście zapisać także w przestrzeni dwu- i trójwymiarowej. W postaci danej wzorem (1.5) ma on zastosowanie do prętów.) Ściśle biorąc, liczba składników zdąża do nieskończoności, jednak w obliczeniach uwzględnia się skończoną ich liczbę. **Funkcje bazowe** φ_i , przyjmowane arbitralnie, muszą spełniać warunki brzegowe, ale poza tym mogą być dowolne. Do obliczania parametrów a_i , a tym samym rozwiązania zadania, wykorzystano fundamentalną zasadę mechaniki o minimum całkowitej energii potencjalnej układu sprężystego, z której wynika zasada prac wirtualnych.

W MES parametry a_i zyskały prostą dla inżyniera interpretację – przemieszczeń węzłów. Błąd metody jest tym mniejszy, im więcej jest parametrów a_i , a więc im drobniejszy jest podział na elementy skończone. Inna, równie ważna różnica względem metody Rayleigha–Ritza, tkwi w wielkości obszaru, w którym obowiązuje rozkład przemieszczeń (1.5). W metodzie tej opis (1.5) obejmuje *całą konstrukcję*, co mocno ogranicza możliwy zestaw

ich kształtów, nadający się do realnych obliczeń. W MES ograniczenie to odnosi się tylko do obszaru pojedynczego elementu skończonego.

Teraz trochę o „technologii” obliczeń.

Dane do obliczeń numerycznych gromadzimy w tablicach. Elementy skończone definiowane są przez numery swoich węzłów i ciąg parametrów takich, jak np. numer materiału. Tworzą one **tablicę elementów**. Ale do tego, by konstrukcja (i każdy z elementów) nabrała kształtu, węzły muszą zająć określone położenie w przestrzeni. Ich współrzędne (w układzie globalnym) są zawarte w **tablicy węzłów**. Parametry materiałowe, kryjące się pod numerem materiału, znajdują się w **tablicy materiałów**. Jest to schemat zapisywania danych wspólny dla wszystkich programów obliczeniowych.



Rys. 1.2. Tarcza prostokątna podzielona na 12 elementów skończonych. Widoczny jest układ sił po „wyjęciu” jednego elementu. Siły międzyelementowe w bilansie całkowitym redukują się. Siły zewnętrzne działające na węzły wspólne obciążają wszystkie przyległe elementy skończone

Elementom (ponumerowanym) przypisujemy pewną cechę przez podanie numeru tej cechy w tablicy-magazynie. Cechy te mogą mieć „strukturę”, np. *materiał*, to czasem całkiem długi ciąg parametrów, jeśli jest on anizotropowy. Także geometria profilu pręta wymaga niekiedy podania kilku wartości, takich, jak np. momenty bezwładności.

Dzięki takiej strategii zapisu danych łatwo jest modyfikować konstrukcję. Po jej utworzeniu, czy nawet rozwiązaniu, możliwe jest przestawianie węzłów (nadawanie konstrukcji nowego kształtu) przez zmianę ich współrzędnych lub zastępowanie jednych materiałów innymi. Zmian tych dokonuje się w tablicach elementów i węzłów. (Program można wyposażyć w procedury zdolne nawet do przebudowania elementów jednego typu na inny, np. elementów czworokątnych z węzłami w narożach z rys. 1.2 lub 1.3 na elementy dwunastowęzłowe, z dwoma węzłami pośrednimi pomiędzy narożami, jak na rys. 1.1).

Na rysunku 1.3 pokazany jest przypadek tarczy prostokątnej. Ponumerowane węzły kreuja elementy skończone w kolejnych wierszach tablicy elementów. Same węzły zdefiniowane są w tablicy węzłów. Interpretacja danych zawartych w *tablicy parametrów* zależy od użytego typu elementu. W tym przypadku, tarczy, pierwszy parametr (tak się teraz umawiamy) oznacza grubość elementu skończonego. (Gdyby to był element prętowy, umówilibyśmy się, że oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego).

Z tablicy elementów widać, że omawiana tarcza wykonana jest z jednego tylko materiału (pierwszego). Grubość natomiast rozdzielona jest tak, że w przekroju (rzut na płaszczyznę yz) tarcza przypomina dwuteownik, ponieważ dwa środkowe elementy (3 i 4) są trzy razy cieńsze od skrajnych (środkowym przydzielono grubość 5 cm, skrajnym 15 cm).

Tablica
węzłów

Nr węzła	x [m]	y [m]
1	0	6
2	2	6
3	4	6
4	0	4
5	2	4
6	4	4
7	0	2
8	2	2
9	4	2
10	0	0
11	2	0
12	4	0

Tablica
materiałów

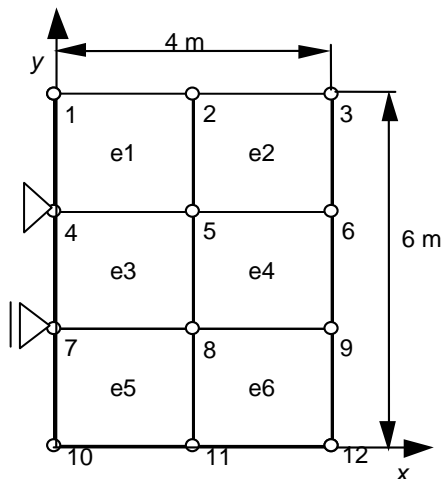
Nr zestawu	E [MPa]	ν
1	2e5	0,3
2	1e5	0,25

Tablica
parametrów

Nr zestawu	p_1 [m]	itd.
1	0,15	
2	0,05	

Tablica elementów

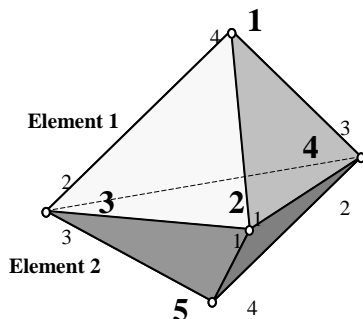
Nr elementu	Węzeł				Materiał	Grubość
	1	2	3	4		
1	1	4	5	2	1	1
2	2	5	6	3	1	1
3	4	7	8	5	1	2
4	5	8	9	6	1	2
5	7	10	11	8	1	1
6	8	11	12	9	1	1



Rys. 1.3. Tarcza prostokątna podzielona na sześć kwadratowych elementów 4-węzłowych. Węzeł 4. Jest całkowicie unieruchomiony, węzłowi 7. odebrano swobodę przemieszczenia w kierunku x

Stopnie swobody

Przemieszczenia węzłów (parametry węzłowe) należy rozumieć jako wielkości uogólnione, przypisane węzłowi. Na przykład w kontinuum trójwymiarowym węzeł ma trzy stopnie swobody: trzy przemieszczenia – jak punkt geometryczny. Odpowiadają one trzem współzrędnym siły skupionej, działającej w tym punkcie. (Zauważmy, że nie tylko siły zewnętrzne w tym rodzaju „dźwigara” mają tak elementarną interpretację. Także siły wewnętrzne, którymi są po prostu naprężenia. To coś znacznie prostszego pojęciowo, niż powiedzmy „moment skręcający w płycie, rozłożony wzdłuż linii”). Na rozmiar wektora $\{q\}_e$ elementu skończonego składają się stopnie swobody wszystkich jego węzłów. Wektor parametrów węzłowych $\{q\}_e$ ma zatem



Rys. 1.4. Konstrukcja złożona z dwóch elementów czworosiecznych, 4-węzłowych. Powiększoną czcionką oznaczone są numery globalne węzłów

$$I_{sse} = I_{we} * I_{ssw}$$

składowych,

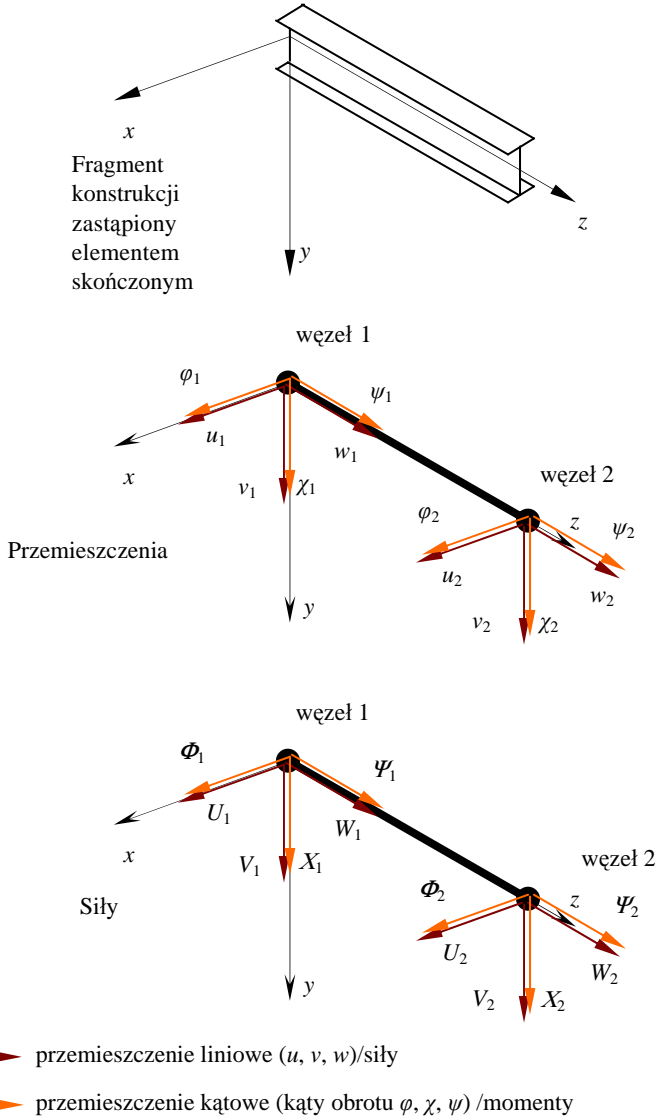
gdzie: I_{sse} – liczba stopni swobody elementu,

I_{we} – liczba węzłów elementu,

I_{ssw} – liczba stopni swobody węzła.

Wektor przemieszczeń dla najprostszego, 4-węzłowego elementu objętościowego (czworościanu z węzłami w wierzchołkach, rys. 1.4) przyjmie postać

$$\{q\}_e^T = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4\}.$$



Rys. 1.5. Przemieszczenia uogólnione elementu skończonego ramy w układzie lokalnym. Każdemu z 12 przemieszczeń odpowiada współrzędna uogólnionej siły

Kolejne węzły		Węzeł 1						Węzeł 2					
Stopnie swobody		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Węzeł 1	1	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	k_{110}	k_{111}	k_{112}
	2	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}	k_{29}	k_{210}	k_{211}	k_{212}
	3	k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}	k_{310}	k_{311}	k_{312}
	4	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}	k_{410}	k_{411}	k_{412}
	5	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}	k_{510}	k_{511}	k_{512}
	6	k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}	k_{610}	k_{611}	k_{612}
Węzeł 2	7	k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}	k_{79}	k_{710}	k_{711}	k_{712}
	8	k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}	k_{89}	k_{810}	k_{811}	k_{812}
	9	k_{91}	k_{92}	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	k_{97}	k_{98}	k_{99}	k_{910}	k_{911}	k_{912}
	10	k_{101}	k_{102}	k_{103}	k_{104}	k_{105}	k_{106}	k_{107}	k_{108}	k_{109}	k_{1010}	k_{1011}	k_{1012}
	11	k_{111}	k_{112}	k_{113}	k_{114}	k_{115}	k_{116}	k_{117}	k_{118}	k_{119}	k_{1110}	k_{1111}	k_{1112}
	12	k_{121}	k_{122}	k_{123}	k_{124}	k_{125}	k_{126}	k_{127}	k_{128}	k_{129}	k_{1210}	k_{1211}	k_{1212}

u_1	v_1	w_1	φ_1	X_1	ψ_1
u_2	v_2	w_2	φ_2	X_2	ψ_2

U_1	V_1	W_1	Φ_1	X_1	Ψ_1
U_2	V_2	W_2	Φ_2	X_2	Ψ_2

$$[k]_e \cdot \{q\}_e = \{Q\}_e$$

Współczynnik sztywności k_{113} mnożony jest przez w_1 – rzut przemieszczenia pierwszego węzła na oś z . Łącznie z 11 innymi składnikami iloczyn ten stanowi siłę X_2 – rzut wektora momentu w węźle 2 na oś y . Sztywność ta jest zatem reakcją (momentem względem osi y) w węźle 2 na jednostkowe przemieszczenie wzdłuż osi z w węźle 1. (Proste? Jeśli nie, to wykonaj mnożenie tych macierzy.)
 Po utworzeniu elementu skończonego – ale przed rozwiązaniem – nie wiem ile wynosi w_1 . Potrafię jednakże obliczyć wartość współczynnika k_{113} (i wszystkich pozostałych), bo zależy ona tylko od geometrii elementu i parametrów materiałowych (narzuconych przecież warunkami zadania).

Rys. 1.6. Równanie (1.4a) zapisane dla pojedynczego elementu ramy przestrzennej. Chociaż węzły mają w nim jeszcze numerację lokalną, to wartości współczynników w $[k]_e$ są już po transformacji według wzoru (2.9), tj. obliczone są w układzie współrzędnych globalnych i gotowe do dodania do macierzy sztywności konstrukcji

Element taki ma 12 stopni swobody i opisany jest przez 12 parametrów. Indeksy przy przemieszczeniach u, v, w (rzutach przemieszczenia węzła na osie układu współrzędnych) są numerami kolejnych węzłów (liczonych lokalnie, ponieważ numeracja w skali konstrukcji jest inna). Macierz sztywności $[k]_e$ tego elementu ma zatem wymiar 12×12 – składa się ze 144 współczynników sztywności (rys. 1.7).

Węzeł nie jest jednak, niestety, punktem geometrycznym. Jego prawdziwa natura objawia się przykładowo w elemencie belkowym (przestrzeń 2-wymiarowa). Element pręta zginanego, wytyczony dwoma węzłami, obciążony jest na końcach nie tylko siłami skupionymi (normalną – jak pręt kratownicy i tnącą), ale także momentem gnącym. Tym trzema siłami uogólnionym, w każdym z węzłów tego elementu skończonego, odpowiadają trzy przemieszczenia uogólnione: dwa przemieszczenia liniowe (siłami skupionymi) i kąt obrotu (momentowi). Taki węzeł nie tylko przemieszcza się w przestrzeni, ale również obraca! Tego nie potrafi punkt geometryczny. Jeszcze gorzej jest z węzłem elementu ramy w trójwymiarowej przestrzeni. Węzeł taki obciążony jest trzema współrzędnymi siły skupionej (normalna i dwie tnące) oraz trzema współrzędnymi momentu (skręcającego i dwiema gnącego). W rezultacie pojawia się też sześć przemieszczeń uogólnionych: trzy liniowe i trzy obroty. Wszystkie one razem, 6 przemieszczeń jednego węzła i 6 drugiego, w arbitralnie przyjętej kolejności (ale zawsze takiej samej!), ujęte są w jeden „wektor” przemieszczenia elementu. W jednym ciągu występują w nim przemieszczenia kolejno wszystkich węzłów, a w podobszarze węzła – liniowe i kątowe przemieszczenia obok siebie. Razem (znowu, choć zupełnie przypadkowo) 12 stopni swobody (rys. 1.5).

Stopnie swobody są, jak widać, najmniejszą analityczną jednostką podziału konstrukcji. W interpretacji matematycznej przejawiają swoje istnienie pod postacią wierszy i kolumn macierzy sztywności $[k]_e$. Jej rozmiary są więc równe liczbie stopni swobody elementu.

Rysunek 1.6 zawiera analityczną interpretację tego schematu: wektor przemieszczeń związany jest liniowo z wektorem sił w tym elemencie skończonym (zgodnie z (1.4a)). Macierz $[k]_e$ zawiera współczynniki proporcjonalności występujące między każdym z przemieszczeń i każdą z sił. Interpretując współczynniki sztywności sięgamy wreszcie do istoty tego równania. Co one znaczą? Współczynniki te są *udziałami*, jakie mają poszczególne przemieszczenia uogólnione elementu w każdej z jego 12 sił uogólnionych (pełnią podobną rolę, jak *liczby wpływowe* w metodzie sił). W elemencie wypreparowanym tak jak na rys. 1.5, są to *siły zewnętrzne*, ale niezależnie od tego, czy element jest rozważany oddzielnie, czy w połączeniu z resztą konstrukcji, współczynniki te pozostają takie same.

Podobnie jest z macierzą konstrukcji $[K]$ i wektorem $\{q\}$ w równaniach (1.4). Zawarte w tych macierzach kolejne bloki (podmacierze) o wymiarze lssw (rys. 1.7) przypisane są kolejnym węzłom ale teraz numerowanym globalnie. Tak więc na pozycji 13. wektora

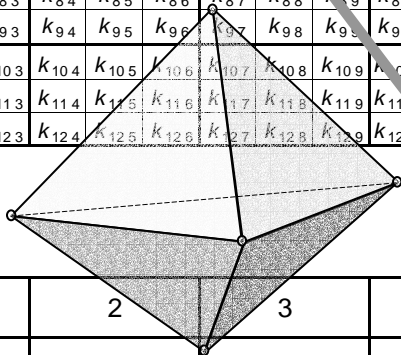
$$\{q\}^T = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4, \mathbf{u}_5, v_5, w_5\}$$

dla konstrukcji złożonej z dwóch elementów czworościennych, pokazanej na rys. 1.4, znajduje się przemieszczenie węzła 5 w kierunku x , czyli u_5 , bo jest to pierwsza pozycja (a więc współrzędna x) piątej (piąty węzeł) trójki (węzły mają po 3 stopnie

Agregacja macierzy sztywności konstrukcji złożonej z dwu elementów czworościennych (rys. 1.4)

Element 1.

węzeł lokalnie		węzeł globalnie												
		1	2	3	4									
		2	3	4	1									
		stopień swobody												
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	1	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	k_{110}	k_{111}	k_{112}
		2	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}	k_{29}	k_{210}	k_{211}	k_{212}
		3	k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}	k_{310}	k_{311}	k_{312}
		4	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}	k_{410}	k_{411}	k_{412}
2	3	5	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}	k_{510}	k_{511}	k_{512}
		6	k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}	k_{610}	k_{611}	k_{612}
		7	k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}	k_{79}	k_{710}	k_{711}	k_{712}
		8	k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}	k_{89}	k_{810}	k_{811}	k_{812}
3	4	9	k_{91}	k_{92}	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	k_{97}	k_{98}	k_{99}	k_{910}	k_{911}	k_{912}
		10	k_{101}	k_{102}	k_{103}	k_{104}	k_{105}	k_{106}	k_{107}	k_{108}	k_{109}	k_{1010}	k_{1011}	k_{1012}
		11	k_{111}	k_{112}	k_{113}	k_{114}	k_{115}	k_{116}	k_{117}	k_{118}	k_{119}	k_{1110}	k_{1111}	k_{1112}
		12	k_{121}	k_{122}	k_{123}	k_{124}	k_{125}	k_{126}	k_{127}	k_{128}	k_{129}	k_{1210}	k_{1211}	k_{1212}



KONSTRUKCJA

węzeł globalnie		stopień swobody															
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	1	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}	K_{17}	K_{18}	K_{19}	K_{110}	K_{111}	K_{112}	K_{113}	K_{114}	K_{115}
		2	K_{21}	K_{22}	K_{23}	K_{24}	K_{25}	K_{26}	K_{27}	K_{28}	K_{29}	K_{210}	K_{211}	K_{212}	K_{213}	K_{214}	K_{215}
		3	K_{31}	K_{32}	K_{33}	K_{34}	K_{35}	K_{36}	K_{37}	K_{38}	K_{39}	K_{310}	K_{311}	K_{312}	K_{313}	K_{314}	K_{315}
		4	K_{41}	K_{42}	K_{43}	K_{44}	K_{45}	K_{46}	K_{47}	K_{48}	K_{49}	K_{410}	K_{411}	K_{412}	K_{413}	K_{414}	K_{415}
		5	K_{51}	K_{52}	K_{53}	K_{54}	K_{55}	K_{56}	K_{57}	K_{58}	K_{59}	K_{510}	K_{511}	K_{512}	K_{513}	K_{514}	K_{515}
		6	K_{61}	K_{62}	K_{63}	K_{64}	K_{65}	K_{66}	K_{67}	K_{68}	K_{69}	K_{610}	K_{611}	K_{612}	K_{613}	K_{614}	K_{615}
		7	K_{71}	K_{72}	K_{73}	K_{74}	K_{75}	K_{76}	K_{77}	K_{78}	K_{79}	K_{710}	K_{711}	K_{712}	K_{713}	K_{714}	K_{715}
		8	K_{81}	K_{82}	K_{83}	K_{84}	K_{85}	K_{86}	K_{87}	K_{88}	K_{89}	K_{810}	K_{811}	K_{812}	K_{813}	K_{814}	K_{815}
		9	K_{91}	K_{92}	K_{93}	K_{94}	K_{95}	K_{96}	K_{97}	K_{98}	K_{99}	K_{910}	K_{911}	K_{912}	K_{913}	K_{914}	K_{915}
		10	K_{101}	K_{102}	K_{103}	K_{104}	K_{105}	K_{106}	K_{107}	K_{108}	K_{109}	K_{1010}	K_{1011}	K_{1012}	K_{1013}	K_{1014}	K_{1015}
		11	K_{111}	K_{112}	K_{113}	K_{114}	K_{115}	K_{116}	K_{117}	K_{118}	K_{119}	K_{1110}	K_{1111}	K_{1112}	K_{1113}	K_{1114}	K_{1115}
		12	K_{121}	K_{122}	K_{123}	K_{124}	K_{125}	K_{126}	K_{127}	K_{128}	K_{129}	K_{1210}	K_{1211}	K_{1212}	K_{1213}	K_{1214}	K_{1215}
		13	K_{131}	K_{132}	K_{133}	K_{134}	K_{135}	K_{136}	K_{137}	K_{138}	K_{139}	K_{1310}	K_{1311}	K_{1312}	K_{1313}	K_{1314}	K_{1315}
		14	K_{141}	K_{142}	K_{143}	K_{144}	K_{145}	K_{146}	K_{147}	K_{148}	K_{149}	K_{1410}	K_{1411}	K_{1412}	K_{1413}	K_{1414}	K_{1415}
		15	K_{151}	K_{152}	K_{153}	K_{154}	K_{155}	K_{156}	K_{157}	K_{158}	K_{159}	K_{1510}	K_{1511}	K_{1512}	K_{1513}	K_{1514}	K_{1515}

Element 2.

węzeł lokalnie		węzeł globalnie												
		1	2	3	4									
		2	4	3	5									
		stopień swobody												
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	1	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	k_{110}	k_{111}	k_{112}
		2	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}	k_{29}	k_{210}	k_{211}	k_{212}
		3	k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}	k_{310}	k_{311}	k_{312}
		4	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}	k_{410}	k_{411}	k_{412}
2	4	5	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}	k_{510}	k_{511}	k_{512}
		6	k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}	k_{610}	k_{611}	k_{612}
		7	k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}	k_{79}	k_{710}	k_{711}	k_{712}
		8	k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}	k_{89}	k_{810}	k_{811}	k_{812}
3	3	9	k_{91}	k_{92}	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	k_{97}	k_{98}	k_{99}	k_{910}	k_{911}	k_{912}
		10	k_{101}	k_{102}	k_{103}	k_{104}	k_{105}	k_{106}	k_{107}	k_{108}	k_{109}	k_{1010}	k_{1011}	k_{1012}
		11	k_{111}	k_{112}	k_{113}	k_{114}	k_{115}	k_{116}	k_{117}	k_{118}	k_{119}	k_{1110}	k_{1111}	k_{1112}
		12	k_{121}	k_{122}	k_{123}	k_{124}	k_{125}	k_{126}	k_{127}	k_{128}	k_{129}	k_{1210}	k_{1211}	k_{1212}

$[k_{23}]_1$

$[K_{34}]$

Tablica elementów

	w1	w2	w3	w4
e1	2	3	4	1
e2	2	4	3	5

Drugi węzeł pierwszego elementu jest globalnie węzłem trzecim.

$[k_{32}]_2$

Rys. 1.7. Indeksy współczynników macierzy sztywności elementów przeliczane są z lokalnych na globalne przy użyciu tablicy elementów. Następnie ich wartości lokowane są w tak wyznaczonych pozycjach macierzy globalnej. Podmacierz $[K_{34}]$ jest sumą podmacierzy $[k_{23}]_1$ i $[k_{32}]_2$

swobody) liczb. Macierz sztywności (całej) konstrukcji [K] ma wymiary 15×15 (konstrukcja ma 15 stopni swobody) i zawiera 225 współczynników (patrz rys. 1.7). Jak teraz, po dodaniu macierzy elementów, interpretować liczby w macierzy globalnej? Co oznacza współczynnik $K_{15\ 2}$? Zajmuje pozycję w 15 wierszu, bierze zatem udział w tworzeniu rzutu siły w węźle 5 na oś z (siła odpowiadająca 15. stopniowi swobody). Ale wyraża wpływ jedynie przemieszczenia w kierunku osi y pierwszego węzła (przemieszczenie odpowiadające 2. stopniowi swobody). Jeśli wydaje się to niejasne, wróć do opisu na rys. 1.6. Teraz jednak, w macierzy globalnej, zarówno *działanie*, jak i jego *skutek* dotyczy *konstrukcji*. Przemieszczenie odpowiadające 2. stopniowi swobody jest *wspólne dla wszystkich przyległych elementów* skończonych (przyległych do węzła 1 w numeracji globalnej), a siła odpowiadająca 15. stopniowi swobody jest *sumą sił działających na wszystkie przyległe elementy* (do węzła 5). To nic, że współczynnik $K_{15\ 2}$ jest w tym przykładzie równy zeru, a nawet, że węzły 1. i 5. nie mają przyległych elementów. Gdyby miały, przykład byłby zbyt skomplikowany. Przecwicz samodzielnie współczynnik $K_{4\ 11}$.

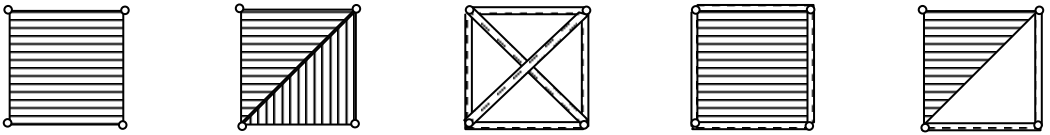
Ćwiczenie: Jaka współrzędna przemieszczenia znajduje się na 40. pozycji wektora $\{q\}$ dla konstrukcji złożonej z (minimum siedmiu) elementów ramy trójwymiarowej (rys. 1.5)? Jakim wzorem przeliczać stopień swobody na numer węzła?

Agregacja

Agregacja to proces składania elementów skończonych w konstrukcję. Algorytm jest prosty. W pętli programowej po elementach obliczane są macierze $[k]_e$ i natychmiast po utworzeniu takiej macierzy (i ewentualnej transformacji wg (2.9) – o tym w *Lekcji 2*) jest ona dodawana do macierzy globalnej, w sposób pokazany na rys. 1.7. Po wykonaniu tej pętli l_e razy (l_e – liczba elementów), proces budowania macierzy konstrukcji [K] jest zakończony.

Elementy tworzące konstrukcję nie muszą być jednego typu, jeśli jednak występują obok siebie, należy je opisać we „wspólnej przestrzeni”. Liczba stopni swobody węzła lssw w kratownicy wynosi 3, tymczasem dla elementu ramy 3D, lssw = 6. Możliwe jest utworzenie konstrukcji z obu typów elementów, ale podmacierze węzłów elementów kratownicowych muszą wtedy mieć wymiary 6×6 zamiast 3×3 . Współczynniki sztywności dla stopni swobody przypisanych przemieszczeniom kątowym będą w niej równe zeru.

Szereg typów elementów skończonych, występując obok siebie w konstrukcji, nie wymaga nawet takiego dostosowania. W dwuwymiarowym continuum węzły mają 2 stopnie swobody, tyle też mają węzły elementów tarczowych i kratownicowych 2D. Wszystkie te typy można kojarzyć zupełnie dowolnie, bez dodatkowych działań dopasowujących. Na rysunku poniżej widać cztery węzły łączone tymi elementami w różnych kombinacjach (jest tu element tarczowy 4-węzłowy, 3-węzłowy i kratownicowy 2D). Ich agregacja nie odbiega od wcześniej opisanej.



Czasami przy takim łączeniu różnych typów elementów należy liczyć się ze wzrostem błędów metody. Rysunek 1.10 pokazuje, jak do niego dochodzi. W elementach z dwoma węzłami na krawędzi, funkcja przemieszczeń zmienia się liniowo wzdłuż tej krawędzi. Dotyczy to elementów cztero- i trójwęzłowych oraz kratownicowych. Element 8-węzłowy ma jednak 3 węzły na każdej krawędzi i wzdłuż niej przemieszczenie dane jest wielomianem drugiego stopnia. Między tak różniącymi się elementami, pojawiają się szczeliny, wnosząc swój udział do energii odkształcenia ośrodka. Stanowi to oczywiście źródło błędów rozwiązania, ponieważ opiera się ono na zasadzie minimum całkowitej energii potencjalnej układu.

Macierz sztywności konstrukcji

Współczynniki sztywności konstrukcji – podobnie jak współczynniki podatności w metodzie sił – tworzą macierz *symetryczną*. Powód tej symetrii jest ten sam: twierdzenie Betti–Maxwella. Dla obliczeń numerycznych ma to ogromne znaczenie, bowiem wystarczy przechowywać w pamięci komputera jedynie połowę tej macierzy położoną po jednej stronie przekątnej głównej, wraz z tą przekątną. (Dotyczy to zresztą także macierzy sztywności elementu.) Ale jest jeszcze druga niezwykle istotna własność macierzy $[K]$.

W obszarze elementu skończonego każdy węzeł działa na wszystkie pozostałe. Dlatego zwykle współczynniki $[k_{ij}]_e$ są różne od zera. Zupełnie inaczej rzecz się ma z macierzą $[K]$. Powstaje ona przez dodawanie kolejnych macierzy elementów skończonych, jak pokazuje rysunek 1.7. I tylko tak. Jeśli zatem między węzłami i i j żaden element nie pośredniczy w przekazywaniu oddziaływań, to w ogóle nie pojawi się podmacierz współczynników $[K_{ij}]$. Na tych pozycjach pozostaną same zera! Różne od zera są tylko te podmacierze $[K_{ij}]$, których węzły i oraz j należą do *wspólnego elementu skończonego*. Rysunek 1.8 pokazuje, które komórki macierzy $[K]$ z rys. 1.7 zostały wypełnione i który z dwóch elementów ma w nich swój udział.

Konsekwencje obliczeniowe tego są równie wielkie jak te wynikające z symetrii, bowiem w praktyce oznacza to zerowanie się olbrzymich obszarów macierzy $[K]$. Popatrzmy na tarczę pokazaną na rys. 1.3. Element 1 wiąże ze sobą węzły 1, 2, 5, 4; tylko te kombinacje wskaźników generują podmacierze $[K_{ij}]$. Nie ma natomiast w tej konstrukcji żadnego powiązania między węzłami 1 i 3 lub 6, lub więcej. Te wszystkie podmacierze nie zostaną wypełnione w procesie tworzenia $[K]$, pozostaną więc macierzami zerowymi. W rezultacie macierz sztywności konstrukcji zapełni się współczynnikami różnymi od zera tylko na pozycjach pokazanych na rys. 1.9. Wyłania się z niego pewna charakterystyczna struktura macierzy sztywności konstrukcji $[K]$ – jej *pasmowość*. Różne od

zera współczynniki gromadzą się w okolicach przekątnej głównej – peryferie pozostają puste (jeśli potrafimy o to zadbać). Na samej przekątnej *wszystkie* elementy macierzy zawsze są wypełnione (i zawsze są dodatnie), bo obszar ten oznacza oddziaływania węzłów samych z sobą. To, jak daleko od przekątnej macierz zostanie wypełniona, zależy od liczby elementów, liczby węzłów, ale przede wszystkim od *sposobu ich ponumerowania*. Gdyby tarczę z rys. 1.3 przedłużyć, dokładając elementy w dół i kontynuując ten schemat numerowania węzłów, jej macierz sztywności rozrastałaby się w obu wymiarach, jednak szerokość pasma widoczna na rys. 1.9 pozostałaby nie zmieniona. Liczba *niezerowych* współczynników wzrastałaby proporcjonalnie do liczby stopni swobody konstrukcji lssk (wymiaru macierzy), a liczba *wszystkich* współczynników macierzy [K] – proporcjonalnie do *kwadratu lssk*. Jest tylko kwestią długości tej tarczy, aby przy jej wzrastaniu współczynniki zawierające jakąś treść utonęły w morzu zer! Na przykład 10 razy dłuższa tarcza będzie miała 120 węzłów, czyli 240 stopni swobody. Macierz [K] zawiera wtedy $240^2/2 + 240/2 = 28\ 920$ niezależnych współczynników, ale półpasma, złożone z $240 \times 10 = 2400$ elementów macierzy, stanowi $2400/28920 = 0,083$ – zaledwie 8,3% jej zawartości. Gdyby natomiast – odwrotnie – ponumerować węzły kolumnami zamiast wierszami (w dalszym ciągu mówimy o rys. 1.3), to liczba współczynników niezerowych co prawda nie uległaby zmianie, lecz zostałyby one rozproszone po tym morzu zer, dając pasmo o ogromnej szerokości – praktycznie równej wymiarowi macierzy [K].

Jasne jest, że próba zapamiętania *całej* macierzy [K] nie ma sensu, bo ogromną większość pamięci zajęłyby zera, z których blisko połowa jest konsekwencją symetrii. Dlatego czynimy wysiłki, aby oszczędzać pamięć komputera. Można na przykład zapamiętać jedynie *różne* od zera współczynniki K_{mn} (liczby rzeczywiste), każdy z nich opatrując dwiema współrzędnymi m, n (liczby całkowite).

Inną próbą treściwego zapełnienia pamięci przeznaczonej na [K] jest zapisywanie jedynie połowy *pasma* tej macierzy (wszak pasmo też jest symetryczne). Można więc przygotować tablicę prostokątną o szerokości równej *szerokości półpasma* i wysokości lssk, lokując w pierwszej kolumnie elementy diagonalne macierzy [K], a w następnych kolumnach, kolejne ciągi elementów macierzy [K], równoległe do przekątnej głównej. *Szerokość półpasma*, to najmniejsza szerokość tej macierzy dobrana tak, aby znalazły się w niej *wszystkie* niezerowe elementy [K]. Dla przykładu pokazanego na rys. 1.9 wynosi ona 10. Jeżeli macierz [K] zapisywana jest w pamięci komputera przez algorytm oparty na tym pomysle, to powinien on być wyposażony w procedurę *renumeracji* węzłów, bo właściwe ich ponumerowanie ma, jak już wiemy, decydujący wpływ na szerokość półpasma i w konsekwencji wielkość zajętej pamięci. Szerokość półpasma zależy od tego elementu, w którym zbiegły się numery węzłów dające największą różnicę ($w_{\max} - w_{\min}$). Wtedy szerokość ta jest równa $(w_{\max} - w_{\min} + 1) * lssw$. Wszystkie elementy na rys. 1.3 spełniają ten warunek, np. czwarty: $(9 - 5 + 1) * 2 = 10$. (Jaką szerokość półpasma otrzymamy, numerując te węzły kolumnami? A jaką, gdy tarcza rozrośnie się wertykalnie do 30 elementów, przy zachowanie tego ostatniego schematu numerowania?)

Dodajmy jeszcze, że tablica, w której zapisywane są współczynniki K_{ij} nawet nie musi być prostokątna. Do pomyslenia jest wręcz tablica jednowymiarowa, która zbudowana jest w ulubiony nasz sposób, wyniesiony z zapisu macierzowego – przez ustawianie kolejnych kolumn omawianej tablicy prostokątnej, jedna pod drugą.

Są to działania, które niewiele mają wspólnego z samą MES, raczej służą przyspieszeniu obliczeń wykonywanych przez komputer, jednak fakt redukcji liczby współczynników (przy umiejętnym numerowaniu węzłów) musi budzić sympatię do tej metody. Widoczne jest teraz, że wygłoszona wcześniej opinia o wymiarach macierzy $[K]$, jakoby kwadratowej, jest słuszna raczej w świecie platońskich idei. Rzeczywistość – jak zwykle zresztą – okazuje się wiele ciekawsza.

Warunki brzegowe

Doszliśmy w tej pozycji obliczeń MES do miejsca, w którym wiemy już jak wygląda konstrukcja, czyli macierz $[K]$, jak się ją składa z elementów, jak tworzone są same elementy. Nie wiemy tylko jak obliczyć wartości K_{ij} . I na razie jeszcze nie musimy wiedzieć. Zajmiemy się teraz *umocowaniem* tej konstrukcji i jej *obciążeniem*, czyli zagadnieniem *warunków brzegowych*.

Macierz sztywności konstrukcji $[K]$, taką otrzymujemy po agregacji, jest jak wieża Eiffla umieszczona w pustej przestrzeni: jeśli nawet przyłożę do niej jakieś siły, to nie pojawią się reakcje, bo *nie jest to obiekt statyczny*. Konstrukcja **musi zostać unieruchomiona** i poprawnie obciążona. Zaczniemy od tej drugiej części – „siłowej”. Nazywamy to *warunkami kinetycznymi*.

Chociaż przyłożenie obciążeń wewnętrznych, np. naprężeń termicznych lub własnych, nie stanowi większego wyzwania dla MES, to jednak na tym etapie ograniczymy się do sił skupionych. Są one przykładane wyłącznie w węzłach, ale wbrew nazwie wcale nie muszą to być węzły umiejscowione na brzegu. Wprowadzenie tak określonych warunków brzegowych jest niezwykle proste: poszczególne współrzędne sił czynnych lokujemy na odpowiadających im pozycjach wektora prawych stron $\{Q\}$. Co to oznacza z algebraicznego punktu widzenia?

Układ równań (1.4), z zerowym wektorem prawych stron, ma zwykle rozwiązanie trywialne (jeśli $[K]$ jest poprawnie obliczona – o tym za chwilę), tj. wektor przemieszczeń węzłowych $\{q\}$ także jest wtedy wektorem zerowym. I tego należało oczekiwać. Brak obciążeń to także brak przemieszczeń (deformacji konstrukcji). Ale samo obciążenie konstrukcji przez wprowadzenie niezerowego wektora prawych stron $\{Q\}$ wcale jeszcze nie prowadzi do możliwości rozwiązania układu (1.4), a to z tej przyczyny, że macierz $[K]$, bezpośrednio po jej utworzeniu, *jest osobliwa* (wyznacznik główny macierzy jest równy zeru). Dlaczego? Popatrzmy na to tak: gdyby nie była osobliwa,

węzeł	1			2			3			4			5		
stopnie swobody	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙			
	2	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙			[K ₁₅]
	3	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙			
2	4	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	5	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	6	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
3	7	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	8	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	9	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
4	10	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	11	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	12	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
5	13				⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	14				⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
	15				⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙

Rys. 1.8. Zawartość komórek macierzy sztywności konstrukcji [K] przedstawionej na rys. 1.4.

⊙ – współczynniki sztywności elementu 1, ⊙ – współczynniki sztywności elementu 2. Podmacierz [K₃₁] zawiera jedynie współczynniki obliczone dla elementu 1. Komórki podmacierzy [K₃₄] zawierają sumy współczynników elementu 1. i 2. Na [K₃₅] składają się wyłącznie współczynniki obliczone dla elementu 2. Podmacierz [K₁₅] jest zerowa, bo żaden element nie łączy tych dwóch węzłów

to układ tych równań miałby już rozwiązanie niezerowe (konstrukcja uległaby deformacji), a przecież nie określiliśmy jeszcze sposobu zamocowania tej orbitującej wieży. Różne zamocowania prowadzą do różnych rozwiązań! Osobliwość macierzy [K] jest właśnie świadectwem *niestabilności* konstrukcji – albo jej fragmenty mają możliwość wykonywania względnych przemieszczeń, albo konstrukcja jako całość może przemieszczać się względem globalnego układu współrzędnych.

Mocowanie wybranych węzłów konstrukcji w języku mechaniki jest nazywane wprowadzaniem warunków kinematycznych. Podobnie jak było z siłami, dotyczy to poszczególnych stopni swobody. Można więc odebrać konstrukcji (czyli pewnemu jej

węzłowi) dowolny stopień swobody, np. możliwość przemieszczenia w kierunku y . W przestrzeni trójwymiarowej, takiej konstrukcji, jak owa wieża, należy odebrać przynajmniej 6 stopni swobody, aby ustabilizować jej położenie w przestrzeni (odebranie dokładnie 6 stopni uniemożliwia jej przemieszczanie się jako ciała sztywnego); sześć, lub więcej, przemieszczeń uogólnionych musimy podać sami. A ponieważ są one ulokowane pośród innych niewiadomych, faktycznie *wydzielamy* tę część równań z układu (1.4) i narzucamy jej własne rozwiązanie. Dopiero te pozostałe tworzą układ prawdziwie niezależnych równań, który daje się już rozwiązać (powiedzmy, stanowią one konstrukcję „samą w sobie”, którą można obracać w przestrzeni jak ciało sztywne). Rząd macierzy $[K]$ jest właśnie równy ich liczbie.

Z kolei równania „wydzielone” odpowiadają tym stopniom swobody, na które nakładamy więzy, czyniąc konstrukcję stabilnie zamocowaną. Ta minimalna liczba sześciu równań, pozostając jeszcze przy akcencie paryskim, pozwala konstrukcji na kontakt ze światem zewnętrznym, ale osiągamy go przez całkowitą wymianę tych równań. Przetwarzamy je mianowicie tak, aby otrzymać oczekiwane rozwiązanie – *z góry przyjęte przemieszczenia*.

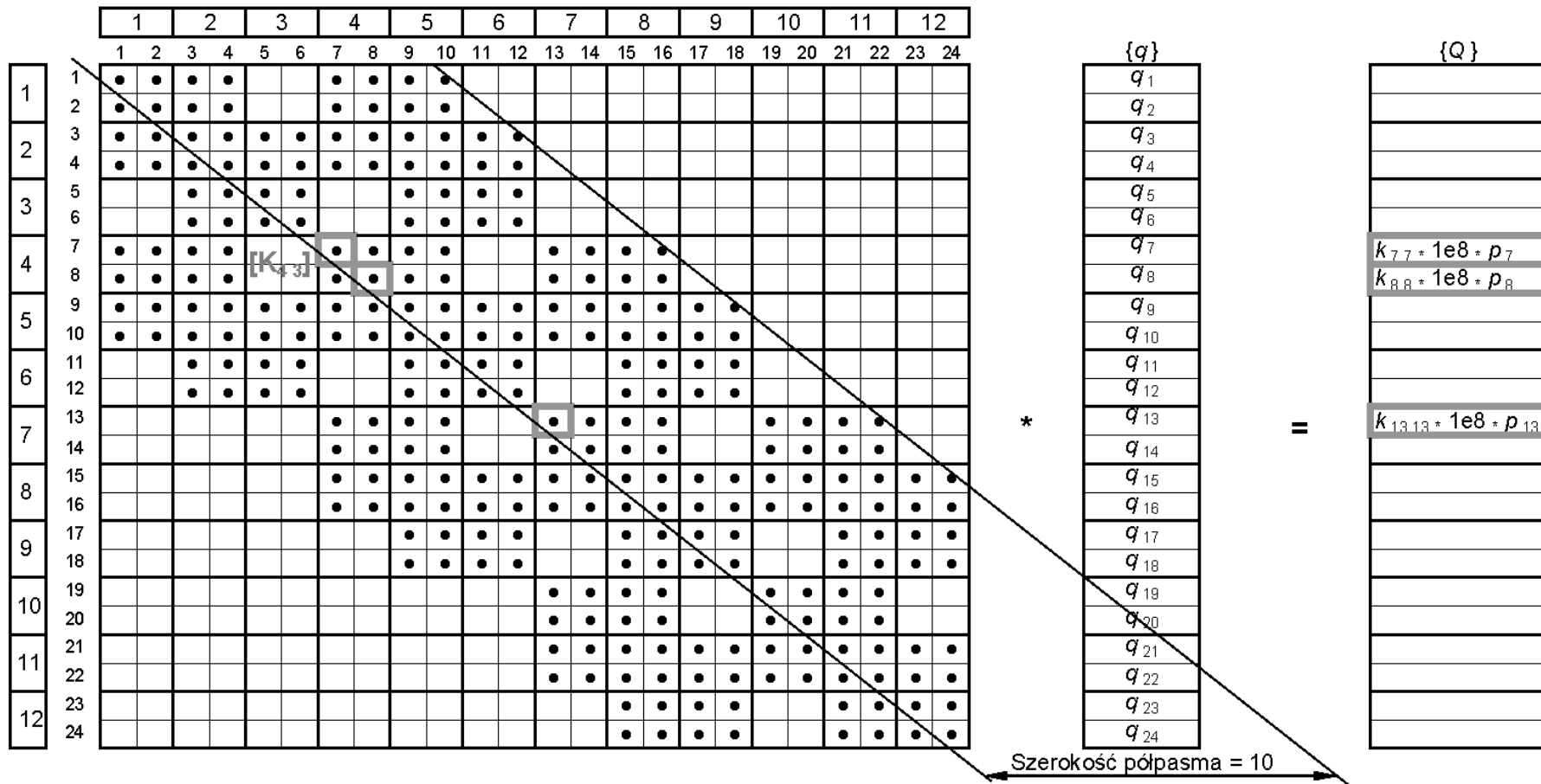
Jest kilka możliwych dróg osiągnięcia założonych przemieszczeń w wybranych węzłach. Omówimy sposób najłatwiejszy do zaprogramowania.

Na rysunku 1.3 widoczna jest tarcza zamocowana w ten sposób, że 4. węzłowi narzucamy przemieszczenia p_7 i p_8 (7. i 8. stopień swobody), a węzłowi 7. przemieszczenie p_{13} (w kierunku x). Użyte na rysunku symbole podpór sugerują, że wszystkie te przemieszczenia są równe zero (choć, oczywiście, mogą być zupełnie dowolne, ale ustalone), co oznacza unieruchomienie węzła 4., a węzłowi 7. odbieramy swobodę przemieszczeń jedynie w kierunku x . To wystarcza do stabilnego zamocowania konstrukcji w dwuwymiarowej przestrzeni. (Możemy oczywiście narzucić przemieszczenia dowolnym dalszym węzłom aż do całkowitego unieruchomienia wszystkich – jeśli ma to jakiś sens.) Modyfikacja układu równań (1.4) polega teraz na tym, że mnożymy diagonalne współczynniki macierzy $[K]$ w wierszach 7., 8. i 13. przez „dużą liczbę”, jednocześnie wprowadzając do wektora $\{Q\}$ na tych pozycjach liczby tak dobrane, aby otrzymać wymagane przemieszczenia p_i , $i = 7, 8, 13$. Na przykład po wymnożeniu k_{77} przez 10^8 , Q_7 powinno przyjąć wartość $k_{77} * 1e8 * p_7$, jak pokazuje to rysunek 1.9.

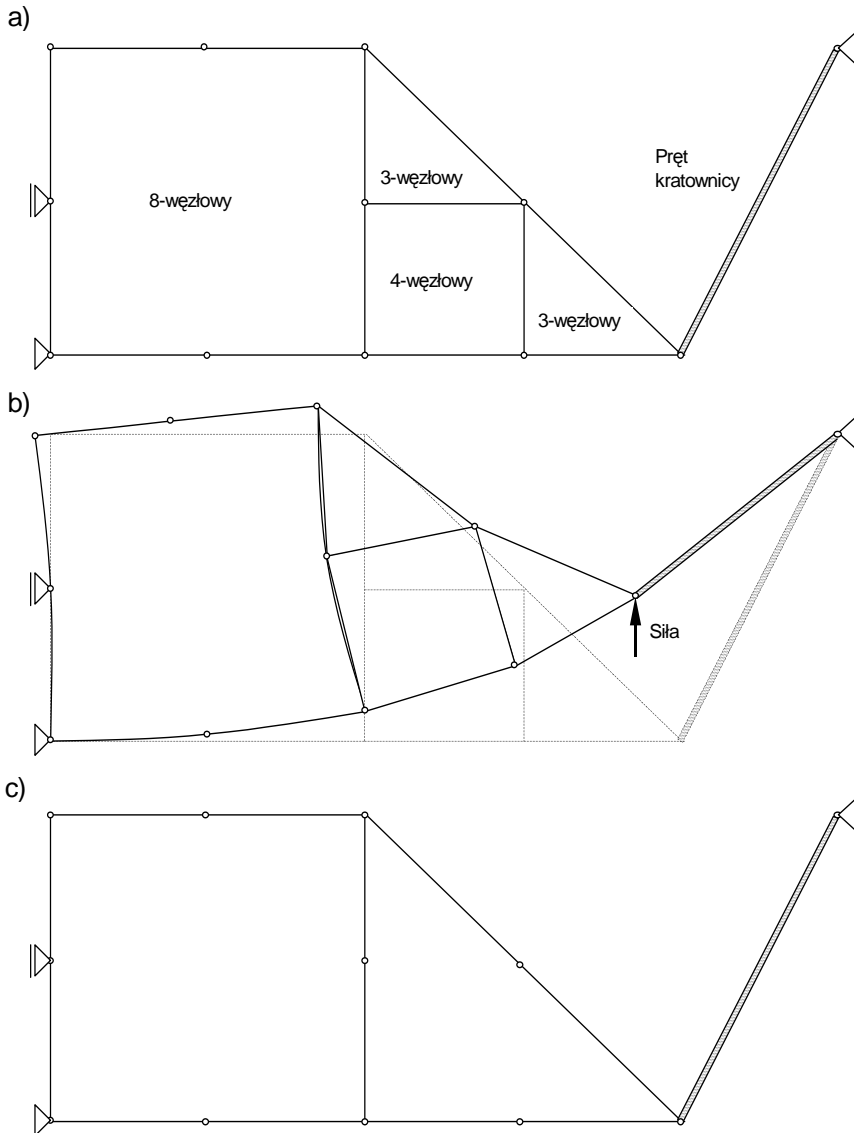
Dlaczego mielibyśmy otrzymać stąd $q_7 = p_7$? Otóż lewa strona równania 7 na rys. 1.9 zawiera teraz obok jedenastu niezerowych składników $k_{7i} * q_i$ jeden tak wielki, że pozostałe tracą w porównaniu z nim znaczenie. Równanie ma postać

$$1e8 * k_{77} * q_7 + \text{coś nieistotnego} = 1e8 * k_{77} * p_7,$$

czyli otrzymujemy stąd $q_7 \approx p_7$. I o to właśnie szło, ale zauważ, równanie to w niczym już nie przypomina równania wyjściowego. Przestało ono cokolwiek znaczyć dla konstrukcji, zapewnia jedynie spełnienie warunku brzegowego. Interpretując fizykalnie tę modyfikację, można przyjąć, że współczynnik sztywności dla 7. stopnia swobody jest teraz tak wielki, że żadna z sił Q_i ($i \neq 7$) nie jest w stanie znacząco przemieścić



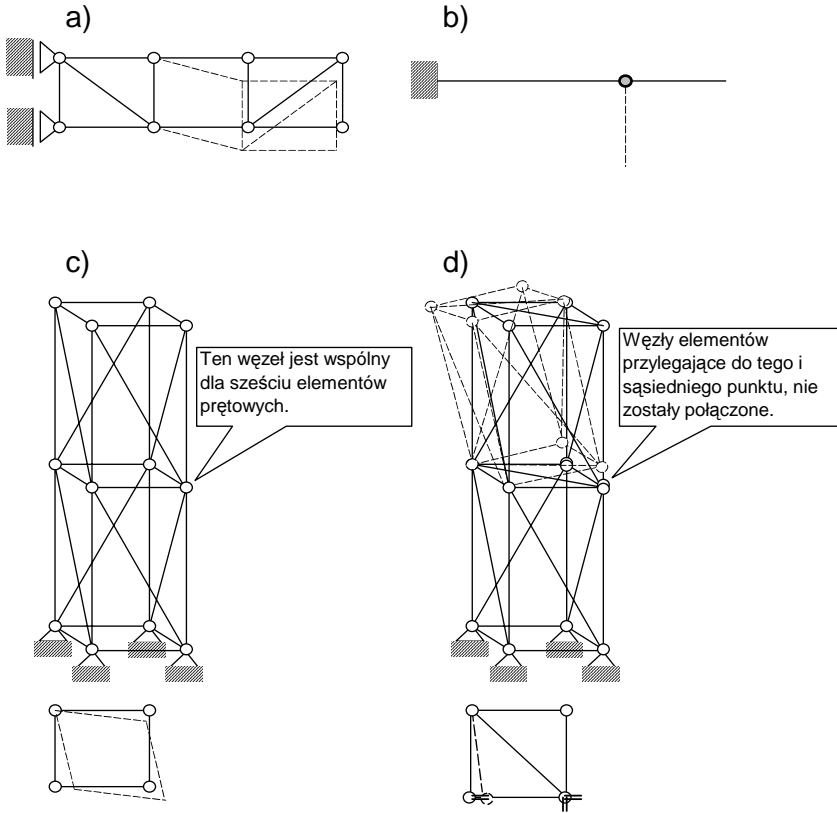
Rys. 1.9. Komórki oznaczone • są różne od zera. Ich zawartość powstała przez dodawanie macierzy sztywności elementów tarczy z rys. 1.3. Podmacierz $[K_{43}]$ jest zerowa, ponieważ węzłów 4 i 3 nie łączy żaden element. Zaznaczone szarą ramką współczynniki na przekątnej głównej mnożone są przez „dużą liczbę” $1e8$ (czyli pierwszy od góry $= k_{77} * 1e8$), ponieważ te stopnie swobody (7., 8. i 13.) zostały konstrukcji odebrane. Siły odpowiadające tym stopniom swobody zostały zastąpione wyrażeniami widocznymi w kolumnie $\{Q\}$



Rys. 1.10. W konstrukcji złożonej z elementów kwadratowych i liniowych, tj. 8-węzłowych i pozostałych, rys. a), krawędzie nie deformują się identycznie i pojawiają się szczeliny widoczne na rys. b).

Można tego uniknąć wprowadzając elementy tego samego rzędu jak na rys. c)

węzła czwartego w kierunku x . Aby jednak uzyskać wymagane przemieszczenie p_7 , przykładamy do węzła w tym kierunku (także „dużą”) siłę $Q_7 = k_{77} * 1e8 * p_7$. Tak dobrana siła przemieści węzeł (prawie dokładnie) o p_7 . Jeśli przemieszczenie ma być zerowe, to wprowadzamy siłę zerową.



Rys. 1.11. Dla każdego z tych czterech układów prętowych macierz $[K]$, po wprowadzeniu kinematycznych warunków brzegowych, nadal jest osobliwa. W schemacie a) brakuje zastrzału i więzu zapobiegającego przesuwowi pionowemu. Belce na rysunku b) brakuje zamocowania części na prawo od przegubu. Schemat c) można traktować jak fragment masztu. Konstrukcji tej brakuje sztywności zapobiegającej paczeniu się „ścianek” bocznych. Na schemacie d) mankament ten został usunięty, jednak „zapomniano” o połączeniu elementów w dwóch wskazanych węzłach

Liczba modyfikowanych równań musi być co najmniej równa liczbie więzów czyniących konstrukcję stabilną. Nie mogą to być dowolne (przypadkowo wybrane) równania, jak nie można się zdać na przypadek przy odbieraniu konstrukcji stopni swobody, by ją unieruchomić w przestrzeni. Tylko wtedy rząd macierzy zmodyfikowanej $[K]$ będzie równy liczbie (wszystkich) równań. Zmodyfikowany wektor obciążeń oznaczmy $\{Q\}$. Układ (1.4), przygotowany do rozwiązania, przyjmuje teraz nową postać:

$$[K] \{q\} = \{Q\}. \quad (1.6)$$

Nie tylko brak poprawnego zamocowania bywa przyczyną osobliwości macierzy $[K]$. Także błędy popełniane na etapie tworzenia konstrukcji. Rysunek 1.11 prezentuje szereg układów, dla których macierz $[K]$ jest osobliwa. Obok oczywistych bywają jednak błędy bardziej subtelne. Przykładem jest schemat pokazany na rys 1.11c. Poje-

dynczy moduł sprawia wrażenie kratownicy, sprawdźmy jednak, czy układ tych prętów tworzy konstrukcję dającą się obracać jako ciało sztywne:

$$(3 \text{ wymiary} * 8 \text{ węzłów}) > (16 \text{ prętów} + 6 \text{ niewiadomych podporowych}),$$

czyli (liczba równań) > (liczba niewiadomych). To jest mechanizm!

(Sprawdź tak samo kratownicę na rysunku 1.11d.)

Zatem dla konstrukcji poprawnie zbudowanej i poprawnie *zamocowanej*, macierz sztywności $[K]$ jest już nieosobliwa. Ściśle mówiąc, teraz dopiero zerowy wektor obciążenia daje to trywialne, zerowe rozwiązanie, czyli brak deformacji. Zerowy wektor $\{Q\}$ (układ jednorodny) przy osobliwej macierzy $[K]$ wcale jeszcze nie zapewnia zerowych przemieszczeń!

Algorytm MES

Obliczenia wykonywane metodą elementów skończonych można sprowadzić do następujących etapów:

1. Podział konstrukcji na elementy skończone i obliczenie dla każdego z nich macierzy sztywności elementu $[k]_e$. Ten punkt stanowi zasadniczą część *metody*.

2. Połączenie elementów skończonych w całość, co oznacza obliczenie **macierzy sztywności konstrukcji $[K]$** .

3. Wprowadzenie warunków brzegowych:

– kinetycznych, w postaci sił czynnych i ewentualnie odkształceń lub naprężeń wstępnych – w tej fazie tworzony jest **wektor obciążeń $\{Q\}$** ,

– kinematycznych, przez określenie przemieszczeń wskazanych obszarów konstrukcji – teraz modyfikowana jest macierz $[K]$ i wektor $\{Q\}$.

W tym miejscu układ równań (1.6) jest ustanowiony i gotowy do rozwiązania. Rezultatem rozwiązania jest wektor parametrów węzłowych $\{q\}$ (a więc znamy wtedy przemieszczenia konstrukcji w węzłach, lub inaczej: jej nową, „dyskretną” konfigurację, znamy jej kształt po obciążeniu, choć tylko przez nowy rozkład punktów węzłowych).

4. Obliczenie naprężeń. Tu następuje powrót do mechaniki ośrodka ciągłego: dysponując znanym już polem przemieszczeń w obszarze każdego elementu, obliczane są – oddzielnie w każdym elemencie – odkształcenia (ze związków geometrycznych) i na koniec naprężenia (z równań konstytutywnych).

5. Wyznaczenie reakcji. We wszystkich węzłach, którym nadano przemieszczenia (warunki kinematyczne) pojawiają się reakcje. Ich współrzędne są liczone oddzielnie dla każdego stopnia swobody i stanowią one różnicę pomiędzy siłą oddziaływania elementu skończonego na węzeł, a siłą czynną (jeśli występuje) $\{Q\}_b = [K]\{q\} - \{Q\}_{cz}$ – wyrażenie (2.19).

LEKCJA 2

Funkcje kształtu, transformacja układu współrzędnych, macierz sztywności elementu

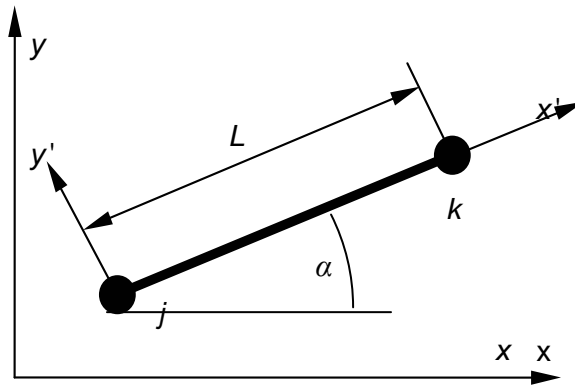
Funkcje kształtu

Pomysł Rayleigha zawarty w równaniu (1.5) implikuje wprowadzenie bardzo ważnego pojęcia w MES, tak zwanych *funkcji kształtu*. Za ich pomocą „rozprowadzane” są w obszarze elementu skończonego wartości funkcyjne dane (lub obliczane) *punktowo*, tylko w węzłach. Jako pierwszy przykład mogą posłużyć parametry węzłowe $\{q\}$. Są przemieszczeniami, ale nie zależą one od współrzędnych x, y, z – nie są funkcjami położenia. Przypisane są węzłom i indeksowane są ich numerami. Tylko tak identyfikujemy miejsce, którego kolejne przemieszczenie – parametr q_i – dotyczy, tj. przez odczytanie współrzędnych węzła x_w, y_w, z_w skojarzonego z tym przemieszczeniem. Efektem rozwiązania układu równań (1.6) jest wektor przemieszczeń węzłowych $\{q\}$, lecz przemieszczenia znamy wówczas tylko w węzłach. To bardzo wiele, ale jeszcze za mało. Elementy są przecież „skończone”, a to znaczy często, że interesujący nas punkt, w którym chcemy znać np. naprężenie, nie pokrywa się z żadnym z węzłów. Ale nawet gdyby się pokrywał, to wciąż jeszcze mało. Do obliczenia naprężenia w dowolnym punkcie niezbędna jest znajomość *pola* przemieszczeń, a nie ich wartości dyskretnych. Stąd bierze się konieczność *interpolacji* przemieszczeń *między węzłami elementu* i do tego używane są funkcje kształtu.

Każdy węzeł ma swoją funkcję kształtu N_w . Funkcja N_w może być zapisywana zarówno w układzie współrzędnych lokalnych x', y' przyjętym dla elementu, jak też współrzędnych globalnych x, y dla konstrukcji. Jej dziedziną obejmuje jedynie obszar wybranego elementu skończonego. Zwykle rolę tę pełnią *wielomiany*.

Przykładem najprostszego elementu skończonego jest pręt obustronnie przegubowy, dwuwęzłowy, dany w układzie globalnym x, y (do tworzenia kratownicy płaskiej), pokazany na rys. 2.1. Element zawarty jest pomiędzy węzłami j i k . Wszelkie związa-

ne z nim funkcje zależą jedynie od współrzędnej lokalnej x' – element istnieje jedynie w tym wymiarze. Jest faktycznie jednowymiarowy, nawet gdy umieścimy go w trójwymiarowym układzie globalnym. Należy więc znaleźć dwie funkcje kształtu $N_1(x')$ i $N_2(x')$ (numerowane lokalnie) dla elementu wytyczonego w układzie globalnym węzłami j i k .



Rys. 2.1. Układy współrzędnych – lokalny i globalny

Pamiętamy, że w węzłach dane są punktowo pewne wielkości, a naszym celem jest obliczanie ich wartości *między* węzłami. Przyjmijmy ogólnie, że jest to jakaś funkcja $\Phi(x')$ (może to być temperatura, gęstość ośrodka, powierzchnia przekroju poprzecznego, czy współrzędna x lub y wybranego punktu elementu). Podajemy zatem *liczbowe wartości* Φ_1 i Φ_2 w węzłach, a funkcje kształtu N_1 i N_2 mają działać tak:

$$\Phi(x') = N_1(x') \Phi_1 + N_2(x') \Phi_2, \quad (2.1)$$

czyli mają rozprowadzać $\Phi(x')$ pomiędzy węzłami, w których wartości Φ_i (to są liczby, nie funkcje) są znane, mnożąc każdy z tych parametrów przez odpowiadającą mu funkcję $N_i(x')$ a następnie sumując te iloczyny dla wszystkich l we węzłów elementu (tutaj $lwe = 2$):

$$\Phi(x') = \sum_{i=1}^{lwe} N_i(x') \Phi_i. \quad (2.2)$$

Widać, że rola, jaką mają do spełnienia funkcje kształtu $N_i(x')$ polega na „skalowaniu” funkcji Φ w zależności od położenia x' , tak aby w i -tym węźle osiągała ona (daną) wartość Φ_i . Między węzłami funkcje N_i także muszą wykazywać pewne własności, aby rozwiązanie układu równań (1.6) było zbieżne. Pomijając wywody matematyczne, są one następujące:

- N_i staje się równa jedności w i -tym węźle,
- w każdym innym węźle równa jest zero,
- w dowolnym położeniu pomiędzy węzłami, suma funkcji kształtu wszystkich węzłów elementu równa jest jedności.

Funkcje N_i mogą zależeć od jednej, dwu lub trzech współrzędnych – od takiej ich liczby, jak funkcja Φ . Czy widać tu podobieństwo do szeregu (1.5)? (Nie daj się zmylić brakiem konsekwencji w użyciu oznaczenia „fi”!)

Jaką postać powinny one przyjąć w naszym wypadku? Wybór jest niewielki (ściśle mówiąc żaden) – interpolacja między dwoma punktami może być w zasadzie tylko liniowa. Wielomian pierwszego stopnia w przestrzeni x' zawiera dwa współczynniki, a_1 i a_2 , aby je zatem obliczyć wystarczy utworzyć układ dwu następujących równań (w punktach węzłowych wielomian osiąga przyjęte wartości):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= a_1 + a_2 x'_1, \\ \Phi_2 &= a_1 + a_2 x'_2.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Różnica $x'_2 - x'_1 = L$ będzie dla nas długością elementu, x'_i są współrzędnymi węzłów. Stąd, po rozwiązaniu:

$$\begin{aligned}a_1 &= (\Phi_1 x'_2 - \Phi_2 x'_1) / (x'_2 - x'_1), \\ a_2 &= (\Phi_2 - \Phi_1) / (x'_2 - x'_1).\end{aligned}$$

W dowolnym punkcie elementu jest oczywiście

$$\Phi(x') = a_1 + a_2 x',$$

czyli (po podstawieniu obliczonych a_1 i a_2)

$$\Phi(x') = \frac{x'_2 - x'}{x'_2 - x'_1} \Phi_1 + \frac{x' - x'_1}{x'_2 - x'_1} \Phi_2.\tag{2.4}$$

Po porównaniu otrzymanego wyniku z (2.1) odkrywamy nasze pierwsze funkcje kształtu:

$$\begin{aligned}N_1(x') &= \frac{x'_2 - x'}{x'_2 - x'_1}, \\ N_2(x') &= -\frac{x'_1 - x'}{x'_2 - x'_1}, \quad x' \in \langle x'_1, x'_2 \rangle.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Mają one takie (bardzo przez nas pożądane) właściwości:

1. Gdy zmienna $x' = x'_1$ (czyli „jesteśmy” w pierwszym węźle), to $N_1 = 1$, a $N_2 = 0$.
2. Gdy zmienna $x' = x'_2$ (czyli „jesteśmy” w drugim węźle), to $N_1 = 0$, a $N_2 = 1$.
3. W każdym pośrednim położeniu suma tych dwóch funkcji także jest równa jedności, a każda z nich staje się proporcjonalna do odległości od przeciwnego węzła.

Widać też, że wartość Φ , dana wzorem (2.1), przy przechodzeniu od węzła 1 do 2 zmienia się liniowo od Φ_1 do Φ_2 . Dokładnie tak, jak tego chcieliśmy.

Funkcje kształtu są tak znaczącym pojęciem MES, a umiejętność operowania nimi tak ważna, że warto przećwiczyć to rozwiązanie na przykładzie rozbudowanym o ko-

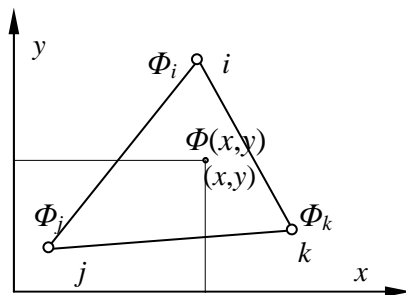
lejni wymiar. Postępując według powyższego schematu, wyznaczmy liniowe funkcje kształtu w przestrzeni dwuwymiarowej x, y dla elementu trójwęzłowego, tarczowego. Wielomian pierwszego stopnia w tym układzie współrzędnych ma postać

$$\Phi(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y.$$

Przykładowe zastosowania funkcji kształtu

Teraz, jeśli zechcemy „obciążyć” element (który jest fragmentem konstrukcji) termicznie i wyznaczyć przemieszczenia i naprężenia wywołane znanym (w wybranych punktach) rozkładem temperatury, to przypiszemy poszczególnym węzłom wartości liczbowe temperatury, np. T_1 i T_2 . Po użyciu (2.1) funkcje kształtu N_1 i N_2 „rozprowadzą” ją liniowo wzdłuż elementu.

Jeśli natomiast zadanie jest już rozwiązane i znam *przemieszczenia* tych węzłów, to mogą obliczyć wartość każdej z jego składowych w dowolnym punkcie elementu, podstawiając wartości węzłowe – ponownie – do wyrażenia (2.1). Zauważmy przy okazji, że są one także rozłożone liniowo, zatem odkształcenie, co wynika ze związków geometrycznych, jest *stałe* wzdłuż elementu. Stałe jest więc także naprężenie. **Liniowe funkcje kształtu dają w obszarze elementu stałe naprężenia** – to wniosek wart zapamiętania!



Rys. 2.2. Element trójwęzłowy (tarczowy)

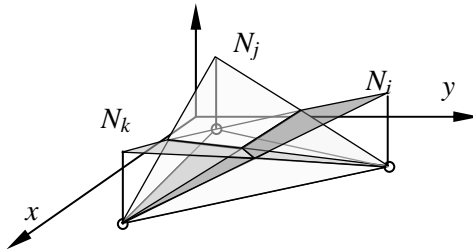
Po utworzeniu układu – tym razem – trzech równań, analogicznego do (2.3), obliczymy trzy współczynniki a_m . Po podstawieniu ich do tego wielomianu i po uporządkowaniu według Φ_i, Φ_j, Φ_k , otrzymamy odpowiednik równania (2.4) (i, j, k to numery globalne węzłów, np. 2, 255 i 17 – numery lokalne przyjmą wartości 1, 2, 3; indeksujemy je globalnie dlatego, że w tym układzie zawsze otrzymujemy rozwiązanie)

$$\Phi(x, y) = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (2.6)$$

gdzie $N_i = [x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y] / (2\Delta)$,

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix},$$

Δ jest powierzchnią trójkąta o wierzchołkach i, j, k . Funkcje kształtu dla węzłów j i k , tj. N_j i N_k , obliczamy tak samo jak N_i , wymieniając cyklicznie indeksy. Wykresem funkcji N_i jest płaszczyzna.



Rys. 2.3. Wykresy liniowych funkcji kształtu

Na Czytelnika nadal odczuwającego pragnienie tworzenia funkcji kształtu według tego schematu, czeka jeszcze element przestrzenny, czterowęzłowy – taki jak na rys. 1.4. Natomiast element czterowęzłowy ale dwuwymiarowy (czworokątny, jak na rys. 1.3), już się w tym schemacie nie mieści – wielomian pierwszego stopnia miałby przechodzić przez 4 węzły, a ma on tylko trzy współczynniki a_m w przestrzeni dwuwymiarowej. Funkcja kształtu takiego elementu musi zawierać dodatkowo jeden składnik drugiego stopnia i nie jest to już element liniowy.

Jak zauważyliśmy, użycie liniowych funkcji kształtu prowadzi do stałych naprężeń w obszarze elementu skończonego. Chociaż jest to najczęściej wykorzystywana opcja w obliczeniach prowadzonych z użyciem profesjonalnego oprogramowania (elementy trójkątne lub czworokątne z węzłami w narożach), okupiona jest ona koniecznością drobnego podziału konstrukcji na elementy skończone. Jeśli się na nią decydujemy, to zwykle dlatego, że takie typy elementów obsługiwane są w systemie przez liczniejszy zestaw procedur ułatwiających modelowanie i obliczenia. Zaczynamy się już domyślać, że są powody, aby na funkcje kształtu użyć wielomianów wyższego stopnia niż pierwszy. I faktycznie tak jest, a zakres zastosowań nieliniowych funkcji kształtu bywa zdumiewający. Obejmuje on np. *transformację współrzędnych*, przez co element prostokątny lub prostopadłościenny staje się krzywoliniowy (tak właśnie powstały elementy pokazane na rys. 1.1), a także takie wewnętrzne zakrzywienie przestrzeni w elemencie przez odpowiednie rozstawienie węzłów na jego brzegu, że pole naprężeń wymuszane prostymi stanami obciążenia imituje jego rozkład w szczelinie z ostrym karbem (ma to oczywiście znaczenie w mechanice pękania). Na razie jednak powróćmy do miejsca, w którym jesteśmy – na początek.

Współrzędne lokalne i globalne, wzory transformacyjne

Inną znaną cechą *metody* jest operowanie w dwóch układach współrzędnych: jednym lokalnym, w którym wykonywane są działania na elemencie skończonym, drugim globalnym – dla całej konstrukcji. Poza numeracją węzłów, temu dwojakiemu opisowi podlegają więc stopnie swobody i wszystkie funkcje. Dlatego bardzo często wykorzystywana jest procedura transformacji przy przechodzeniu między tymi układami, zarówno na etapie tworzenia modelu (budowania macierzy [K]), jak też jego rozwiązywania.

Zacznijmy od **transformacji wektora**. Jego współrzędne w obróconym układzie kartezjańskim powiązane są liniowo ze współrzędnymi w układzie wyjściowym (także kartezjańskim). Przyjmijmy, że transformacja dokonywana jest od układu globalnego (czyli dla konstrukcji) do układu lokalnego (dla elementu). Układ lokalny oznaczmy *primem*. Zatem

$$\{V'\} = [\alpha] \{V\}.$$

Tablica $[\alpha]$ zawiera współczynniki $\alpha_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, tj. kosinusy kątów między osiami układów obróconego i wyjściowego. W przestrzeni trójwymiarowej jest ich $3 \times 3 = 9$, w dwuwymiarowej $2 \times 2 = 4$.

Taki liniowy związek obowiązuje także przy transformacji wektora parametrów węzłowych $\{q\}$, ale macierz kosinusów kierunkowych musi zostać wówczas zmodyfikowana – tak, aby umożliwić wykonanie analogicznego mnożenia

$$\{q'\}_e = [T] \{q\}_e. \quad (2.7)$$

Macierz [T] zbudowana jest z podmacierzy. Na przekątnej głównej umieszczona jest macierz $[\alpha]$ lwe razy (lwe – liczba węzłów elementu), pozostałe pozycje zajmują podmacierze zerowe. Na przykład dla elementu dwuwęzłowego o 4 stopniach swobody (element kratownicy płaskiej) zapis ten przyjmie postać

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.8)$$

gdzie α jest kątem obrotu układu $x'y'$ względem układu xy .

Transformacji macierzy sztywności elementu dokonujemy wg nieco bardziej rozbudowanej formuły:

$$[k]_e = [T]^T [k']_e [T]. \quad (2.9)$$

Wyprowadzenie tego użytecznego wyrażenia znajdziemy m.in. u Zienkiewicza (str. 27).

Odształcenia i siły wewnętrzne w elemencie skończonym

Chociaż równania podstawowe (1.1) i (1.2) zostały użyte w MES identycznie jak to się czyni w klasycznej mechanice ośrodka ciągłego, to jednak wymagają one pewnych modyfikacji. Nie chodzi tu tylko o zapis macierzowy. Wszystkie aspekty geometrii elementu skończonego kontrolowane są przez funkcje kształtu i do roli jaką pełnią w *metodzie* musimy się teraz przyzwyczaić. Zaczniemy od pola przemieszczeń w pręcie rozciągającym, czyli w elemencie kratownicy płaskiej.

Element jako taki istnieje w jednowymiarowej przestrzeni x' . Przemieszczenia węzłów u_1 i u_2 są wprawdzie wektorami, ale teraz nie różnią się od skalarów – są także jednowymiarowe, a węzły mają po jednym stopniu swobody. Element ma zatem dwa stopnie swobody. Łatwo jest w nim opisać pole przemieszczeń, można powiedzieć – rutynowo, bo według schematu zawartego w (2.1)

$$u(x') = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \{N_1 \ N_2\} \{u_1 \ u_2\}^T = [N] \{q'\}_e. \quad (2.10)$$

Ze związków geometrycznych (1.1) jednoznacznie już wynika pole odształceń, w tym przypadku zredukowane do jednej tylko składowej

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} (N_1 u_1' + N_2 u_2') = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x'} \ \frac{\partial N_2}{\partial x'} \right] \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{Bmatrix} = [B] \{q'\}_e. \quad (2.11)$$

Macierz odształceń $[B]$ jest, jak widać, pochodną macierzy funkcji kształtu i ogólnie, dla *każdego typu elementu* i w każdym układzie współrzędnych, związki geometryczne (1.1) przyjmują *taką samą* postać jak w (2.11):

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\}_e. \quad (2.12)$$

Konkretna postać macierzy $[B]$ zależy oczywiście od typu elementu skończonego. Składają się na nią jej wymiary i zawartość, a ta właśnie za chwilę mocno ograniczy zbiór rozważanych dalej typów. Zdarza się bowiem, że elementy macierzy $[B]$ nie są *liczbami*, lecz *funkcjami* położenia, a to prostą drogą prowadzi do kłopotu, który wyłoni się z równania (2.16) – całkowania funkcji. Związana z tym komplikacja algorytmu dotyczy poszczególnego elementu, powtarza się więc w procesie obliczeń tyle razy, ile jest elementów. Jeśli jest ich bardzo wiele, jedynym ratunkiem przed nadmiernym wydłużeniem czasu obliczeń jest wynalezienie metody całkowania, dającej wynik „w kilku ruchach”. Choć niełatwe, okazuje się to wykonalne wobec wielomianów. Na pocieszenie zauważmy, że nawet gdy $[B]$ jest macierzą funkcyjną o dowolnie złożonych funkcjach x , y lub z , zależność (2.12) nadal pozostaje liniową, wyraża bowiem związek pomiędzy odształceniami a przemieszczeniami węzłowymi w punkcie o *ustalonych* współrzędnych.

Także związki fizyczne (1.2a) zapisane są ogólnie, chociaż zostały tam podane dla dwuwymiarowego continuum. Tak więc naprężenia, po uwzględnieniu (2.12), przyjmują postać

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{q\}_e \quad (2.13)$$

i, podobnie jak odkształcenia, pozostają w liniowym związku z przemieszczeniami węzłowymi $\{q\}_e$. Zauważ, że wszystkie te funkcje – przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia – dają się zapisać jako (liniowo) zależne od przemieszczeń węzłowych $\{q\}_e$. Takie właśnie funkcjonowanie układu materialnego mamy na myśli, nazywając go geometrycznie liniowym. Do zagadnień tych wrócimy w kolejnym podrozdziale.

Macierz sztywności elementu

Teraz dopiero stało się możliwe obliczanie liczbowych wartości współczynników macierzy $[k]_e$. „Przepis” na macierz sztywności elementu i zawarty w nim algorytm obliczeniowy jest *całkiem ogólny i jednakowy dla wszystkich typów elementu skończonego*.

Równania (1.4) w zastosowaniu do elementu skończonego *dowolnego typu* przyjmują postać

$$\{Q\}_e = [k]_e \{q\}_e. \quad (2.14)$$

Do obliczania współczynników macierzy sztywności $[k]_e$ stosujemy zasadę prac wirtualnych. Zasadę tę zapiszemy w jednej z alternatywnych jej postaci

$$\delta U = \delta W. \quad (2.15)$$

δU jest wariacją energii odkształcenia sprężystego, δW – wariacją pracy sił zewnętrznych. Na nasz użytek możemy założyć, że siły te są stałe. Ograniczając się jedynie do sił skupionych działających w węzłach (pomijamy np. siły wywoływane odkształceniami termicznymi lub naprężeniami wstępnymi), zapiszemy te wariacje następująco:

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \delta \{q\}_e^T \{Q\}_e.$$

V jest objętością elementu skończonego.

Czytamy to tak (od prawej strony): praca sił zewnętrznych (przyłożonych oczywiście do węzłów elementu skończonego) na wirtualnych przemieszczeniach węzłów równa jest pracy sił wewnętrznych w objętości elementu (czyli na odkształceniach będących konsekwencją tychże przemieszczeń węzłowych).

Wiemy już jak te „konsekwencje” przemieszczeń liczyć – wyrażenia (2.12) i (2.13). Wstawmy je zatem pod całkę

$$\int_V \delta ([B] \{q\}_e)^T [D] [B] \{q\}_e dV = \delta \{q\}_e^T \{Q\}_e,$$

stąd

$$\delta \{q\}_e^T \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \{q\}_e = \delta \{q\}_e^T \{Q\}_e.$$

(Macierz transponowana iloczynu $([\mathbf{B}]\{q\}_e)^T = \{q\}_e^T [\mathbf{B}]^T$, a całkowanie przebiega po objętości, zatem wektory parametrów węzłowych i ich wariacji, jako niezależne od położenia, mogą być wystawione przed znak całki.)

Równość ta zachodzi dla dowolnych przemieszczeń wirtualnych. Wynika z niej, że

$$\left(\int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right) \{q\}_e = \{Q\}_e.$$

Tak oto otrzymaliśmy najważniejsze z dotychczas napisanych równań, bo porównując je z układem (2.14) docieramy wreszcie do przepisu na macierz sztywności elementu

$$[\mathbf{k}]_e = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV. \quad (2.16)$$

Każdego typu elementu.

Omawiane tu dotychczas typy elementów skończonych, o liniowych funkcjach kształtu, dają *liczbowe* macierze odkształceń $[\mathbf{B}]$. Dzięki temu znika zupełnie problem całkowania. Nie unikniemy go jednak w większości typów, dla których $[\mathbf{B}]$ jest zwykle macierzą funkcyjną. Istnieją algorytmy szybkiego i dokładnego całkowania numerycznego, ale opanowanie ich teraz nie przybliży nas do celu, którym jest widok ogólny MES.

Rozwiązanie układu równań kanonicznych

Wiemy już, jak obliczyć macierz sztywności konstrukcji $[\mathbf{K}]$ i jak ją zmodyfikować, aby dla wybranych stopni swobody otrzymać dane wartości przemieszczeń uogólnionych. Wiemy też, jak obciążyć tę konstrukcję. Wszystkie te działania wywarły swój wpływ na układ równań kanonicznych (1.4), który teraz przyjął postać (1.6). Samo rozwiązanie tego układu można by zapisać tak:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{K}] \{q\} &= [\mathbf{K}]^{-1} \{Q\}, \\ \{q\} &= [\mathbf{K}]^{-1} \{Q\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ale będzie to tylko czczy zapis. Nikt w ten sposób – przez obliczanie macierzy odwrotnej – nie rozwiązuje prawdziwie wielkich układów równań. Rzecz w tym, że od-

wracanie macierzy wymaga zarezerwowania pamięci zarówno dla $[K]$, jak $[K]^{-1}$, a to prawie dwa razy więcej, niż np. dla procesu eliminacji Gaussa, kiedy macierz $[K]$ jest przetwarzana bez wychodzenia poza obszar zajmowanej przez nią pamięci. Ale nie to jest najgorsze. Liczba instrukcji wykonanych przy odwracaniu macierzy o wymiarach $n \times n$ jest równa 3^n i to jest już wystarczającym powodem do odrzucenia tej metody, nawet gdyby była ona numerycznie stabilna. A nie jest.

Mamy więc do czynienia z bardzo szczególnym układem równań, bowiem macierz $[K]$, poza swoimi rozmiarami, ma jeszcze kilka innych charakterystycznych właściwości: jest symetryczna, pasmowa i dodatnio określona. Oznacza to wiele istotnych ułatwień obliczeniowych. Na przykład niektóre algorytmy rozwiązywania układu równań algebraicznych, liniowych, niejednorodnych mają zastosowanie tylko wtedy, gdy macierz współczynników jest dodatnio określona (metoda Cholesky'ego). Symetria i pasmowość macierzy $[K]$ ogranicza liczbę zapamiętywanych, niezerowych jej współczynników. Pozwala także na wykorzystanie pewnych szczególnych technik rozwiązywania, np. metody frontalnej, polegającej na podejmowaniu z pamięci stałej do pamięci operacyjnej komputera jedynie części pasma współczynników, sekwencyjnym ich przetwarzaniu i ponownym lokowaniu w pamięci stałej jeszcze przed dotarciem do końca pasma – taki numeryczny wariant metody wydzielenia węzłów.

Z najczęściej stosowanych metod wymienić należy właśnie wspomniane: proces eliminacji Gaussa, metodę Cholesky'ego i metodę iteracyjną Gaussa-Seidela.

Reakcje

Omawiając we *Wstępie* przykład do metody przemieszczeń, mieliśmy sposobność przyjrzeć się rozwiązaniu, gdzie w jednym wektorze niewiadomych wystąpiły obok siebie reakcje i przemieszczenia. Co teraz otrzymujemy w rezultacie rozwiązania układu równań (1.6), gdzie lub jak poszukiwać reakcji?

Z pewnością nie znajdziemy ich w obliczonym wektorze $\{q\}$, ponieważ te pozycje, na których miałyby wystąpić siły bierne, zajmują już przemieszczenia dane warunkami kinematycznymi (techniką opisaną tutaj – ale nie zawsze tak musi być). Wektor $\{q\}$ zawiera więc *tylko* przemieszczenia i są to przemieszczenia *wszystkich* węzłów konstrukcji. Gdzie się zatem podziały te reakcje? Czy może są w wektorze $\{Q\}$ układu równań (1.6), po podstawieniu tam rozwiązania $\{q\}$ i wymnożeniu?

Gdyby było ono bezbłędne, otrzymalibyśmy oczywiście

$$[K]\{q\} - \{Q\} = \{0\}. \quad (2.18)$$

W rzeczywistości wektor po prawej stronie będzie zawierał „reszty”, które są błędami rozwiązania. Przyjmijmy jednak, że dysponujemy rozwiązaniem dokładnym – nie o błędy teraz idzie. Przyglądając się temu układowi równań, nie widzimy nic szczególnego w tym, że uzyskane z niego rozwiązanie spełnia go. Pamięamy jednak

czym jest wektor $\{Q\}$ w układzie (1.6) – to siły *czynne*. Wszystkie *dane* siły obciążające konstrukcję (czyli siły czynne), ułożone w tym wektorze, przetrwały bez żadnych zakłóceń zmiany dokonane podczas wprowadzania warunków brzegowych. Modyfikacji uległy jedynie składniki wektora $\{Q\}$ na pozycjach odpowiadających odebranym stopniom swobody. Tam właśnie powinniśmy oczekiwać reakcji, czyli sił biernych, ale zamiast nich mamy liczby, które sami wprowadziliśmy. Podobnie w macierzy $[K]$ – wiersze odpowiadające tym stopniom swobody zostały wykorzystane do ustalenia przemieszczeń. Wektor niewiadomych $\{q\}$ w układzie równań (1.6) zawiera wyłącznie przemieszczenia. Nie ma w nim miejsca na reakcje.

Na szczęście macierz $[K]$ z równań (1.4), nic o tym wszystkim nie wie. Postawiona tam przed znanym już teraz wektorem $\{q\}$ (w którym część przemieszczeń podaliśmy sami) pozwala wyznaczyć jakieś $\{Q\}$. Czym jest tak obliczony wektor obciążeń? Odpowiadając na to pytanie, przypomnijmy sobie, co opisuje układ równań (1.4). Otóż każde z nich wyraża równowagę między składową siły *zewnętrznej* w węzle, a reakcją ośrodka, czyli siłą *wewnętrzną*. Wektor $\{Q\}$ zawiera więc siły zewnętrzne bez rozróżnienia czynnych $\{Q\}_{cz}$ i biernych $\{Q\}_b$. Po ich formalnym rozdzieleniu możemy napisać

$$[K] * \{q\} = \{Q\}_{cz} + \{Q\}_b.$$

W wektorze $\{Q\}_{cz}$ pozycje zajmowane przez składniki różne od zera z reguły nie pokrywają się z takimi pozycjami w $\{Q\}_b$. Dla każdego stopnia swobody siła jest albo czynna, albo bierna. Najczęściej jednak jest równa zero. Jednoczesne wystąpienie obu sił znaczy tyle, że węzłowi odebrano swobodę przemieszczenia i jednocześnie został on w tym kierunku obciążony, co zwykle jest działaniem bezsensownym. Taka siła czynna nie wpływa ani na konstrukcję, ani na algorytm obliczeniowy, powiększa jedynie reakcję.

Ostatecznie obliczony stąd wektor reakcji

$$\{Q\}_b = [K] * \{q\} - \{Q\}_{cz}. \quad (2.19)$$

LEKCJA 3

Układy wielowymiarowe, błędy rozwiązania

Element tarczowy, trójwęzłowy

Wyznamy teraz pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń dla elementów ogólniejszych. Tarcza, jak już wiemy, jest 2-wymiarowym continuum, w którym węzeł ma dwa stopnie swobody. Przemieszczenie jest wówczas całkiem zwyczajnym wektorem o dwóch współrzędnych: $u(x, y)$ i $v(x, y)$.

Potrafimy już interpolować wielkości skalarowe pomiędzy ich wartościami węzłowymi, spróbujmy teraz zastosować formułę (2.2) do *wektora* przemieszczenia. Zapiszmy ten wektor w dowolnym punkcie o współrzędnych x, y obszaru elementu skończonego:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [N(x, y)]\{q\}_e. \quad (3.1)$$

Każde z tych dwóch równań ma strukturę wynikającą z wyrażenia (2.2). Jaka jednak konkretną postać powinna przyjąć funkcja macierzowa zapisana tu lapidarnie $[N(x, y)]$? Niestety zależy to od liczby węzłów elementu skończonego, a ta bywa w elementach tarczowych bardzo różna. Aby nie wydało się to nazbyt abstrakcyjne przyjmijmy całkiem konkretnie, że jest to zbadany wcześniej element 3-węzłowy, o węzłach i, j, k . W takim razie każdą ze składowych przemieszczenia opisuje wyrażenie (2.6):

$$u(x, y) = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k,$$

$$v(x, y) = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k,$$

stąd, po porównaniu z (3.1), wynika

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} = [\mathbf{I}N_i \mathbf{I}N_j \mathbf{I}N_k],$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Funkcja $[N]$ składa się, jak widać, z trzech podmacierzy kwadratowych, ponieważ element ma trzy węzły. Wiersze są dwa, bo wektor przemieszczenia ma dwie współrzędne.

Poćwiczmy przez chwilę wyobraźnię.

Element 12-węzłowy pokazany na rys. 1.1, ma macierz $[N]$ o wymiarach 2×24 . Liczba kolumn 24 odpowiada wymiarowi wektora $\{q\}_e$ o tej właśnie liczbie stopni swobody. Liczba wierszy nadal wynosi dwa, bo tyle współrzędnych ma wektor przemieszczenia $\{f\}$. Zatem (w numeracji lokalnej)

$$[N] = [\mathbf{I} N_1 \quad \mathbf{I} N_2 \quad \mathbf{I} N_3 \quad \dots \quad \mathbf{I} N_{12}].$$

Funkcje N_i będą oczywiście inne dla elementu 12-węzłowego, niż dla 3-węzłowego.

Macierz funkcji kształtu $[N]$ dla elementu przestrzennego, czterowęzłowego (rys. 1.4) ma trzy wiersze (trzy współrzędne wektora przemieszczenia $\{f\}$) i dwanaście kolumn, aby pasowała do wektora $\{q\}_e^T = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4\}$ podczas wykonywania mnożenia (3.1), więc

$$[N] = [\mathbf{I} N_1 \quad \mathbf{I} N_2 \quad \mathbf{I} N_3 \quad \mathbf{I} N_4],$$

lecz tym razem \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o wymiarach 3×3 . (Funkcje N_i dla tego elementu wyznaczyłeś samodzielnie wcześniej. Jeśli nie, to znajdziesz je w podręczniku, np. Zienkiewicza).

Zrób to sam

Spróbuj teraz zapisać macierz $[N]$ według tego schematu dla elementu dwuwęzłowego z rys. 1.5. Ile ma ona wierszy? Ile kolumn? No i najciekawsze: jaką algebraiczną postać przyjmą w układzie lokalnym funkcje $N_1(z)$ i $N_2(z)$? (Jeśli nie wiesz od czego zacząć, to do czasu, aż coś wymyślisz, patrz na równanie (3.1).)

Możemy już wyłączyć wyobraźnię.

Odkształcenia wynikają ze związków geometrycznych (1.1). Na przykład dla elementu 3-węzłowego (dwuwymiarowe continuum)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k) = \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} u_k$$

lub w zapisie macierzowym

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k) = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial N_k}{\partial x} \quad 0 \right\} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}.$$

Łącznie wszystkie trzy odkształcenia

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}.$$

Macierz w nawiasie prostokątnym (nazywana, jak pamiętamy, macierzą odkształceń), zawiera trzy charakterystyczne moduły – trzy podmacierze o trzech wierszach i dwóch kolumnach, identyczne w swej strukturze. Każda z nich odpowiada jednemu z trzech węzłów: i, j, k .

Zapiszmy to krótko

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{q\}_e, \quad (3.2)$$

gdzie dla elementu 3-węzłowego

$$[\mathbf{B}] = [[\mathbf{B}_i] [\mathbf{B}_j] [\mathbf{B}_k]].$$

Na przykład podmacierz

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

(Jak wyglądałaby macierz $[\mathbf{B}]$ dla elementu tarczowego ośmiowęzłowego?)

Ponieważ funkcje N_i, N_j, N_k wyznaczyliśmy wcześniej (wzory (2.6)), możemy teraz obliczyć ich pochodne. Ostatecznie mamy więc

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Po podstawieniu (3.2) do (1.2a) także naprężenia zostaną wyrażone bezpośrednio przez wektor przemieszczeń węzłowych (identycznie zresztą, jak w (2.13))

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{q\}_e. \quad (3.4)$$

Przykład 3. ilustruje użycie tych zależności.

Błędy rozwiązania

Problem dokładności rozwiązania uzyskanego metodą elementów skończonych jest zagadnieniem dużej wagi. Po pierwsze dlatego, że metoda jest z założenia przybliżona, a więc po otrzymaniu rozwiązania, pierwsze pytanie powinno brzmieć: jak bardzo przybliżona? Po drugie, przesądza o tym zakres zastosowań metody. Niestety zagadnienie to jest jednocześnie niezwykle trudne. Rozwój metody datuje się od połowy dwudziestego stulecia, ale próby oceny jakości rozwiązań obserwujemy dopiero w ostatnim ćwierćwieczu.

Ujmując rzecz najprościej, błędy rozwiązania pochodzą z dwóch źródeł:

- 1) dyskretyzacji konstrukcji,
- 2) zaokrągleń arytmetycznych.

Przyczyna pierwsza tkwi w samej metodzie elementów skończonych, a błędy stąd pochodzące zawarte są już w układzie równań kanonicznych. Druga daje o sobie znać w procesie rozwiązania tego układu równań, realizowanego, jak wiadomo, na drodze przetwarzania numerycznego (o jego jakości może świadczyć wektor „reszt” w równaniu (2.18)). Na tym się oczywiście nie kończy. Proces kumulowania obu rodzajów błędów zachodzi także w końcowej fazie obliczeń, gdy wyznaczane są naprężenia.

Zarówno w pierwszym przypadku, jak i w drugim potrafimy wpływać na wielkość błędów przez użycie odpowiednich do okoliczności metod i algorytmów obliczeniowych, ale ograniczać je możemy tylko wtedy, gdy potrafimy szacować ich wielkość.

Błąd dyskretyzacji

Poznaliśmy wcześniej niektóre przyczyny błędów metody i wiemy, że można je ograniczać na dwa sposoby: przez zwiększanie liczby parametrów użytych do opisu modelu, co przekłada się na liczbę (a w konsekwencji średni rozmiar) elementów skończonych, lub przez podwyższanie stopnia funkcji interpolacyjnych, czyli wielomianów tworzących

funkcje kształtu. Obecnie podejmiemy próbę zmierzenia błędu dyskretyzacji, ograniczając rozważania do tarczy i do pierwszego z wymienionych sposobów – zagęszczania siatki. Zasada (Melosha), na której opiera się ta próba, ma postać

$$F - \tilde{F}_i \approx c \cdot h_i^r. \quad (3.5)$$

Wyrażenie po lewej stronie jest różnicą między rozwiązaniem ścisłym a rozwiązaniem MES przy i -tym (na początku $i = 1$) podziale na elementy skończone. Po prawej, postulowana jest natura tej rozbieżności, upatrywana w h_i , czyli średniej wielkości największych elementów skończonych badanego fragmentu konstrukcji (h_i rozumianej, powiedzmy, jako średnica koła wpisanego w element) podniesionej do potęgi r . Zarówno r , jak i c nie zależą od liczby elementów. r uwzględnia rodzaj elementu skończonego (stopień wielomianów interpolacyjnych), a stała c , w zamierzeniu, zależy od „konfiguracji konstrukcji” (szczerze mówiąc, nie wiemy dokładnie jak zależy, ale na szczęście możemy sobie na to pozwolić).

Tak określony błąd metody stanowi podstawę do oszacowania jego wielkości na drodze równomiernego zagęszczania siatki elementów. Po pierwszym podziale konstrukcji na elementy skończone nie znamy oczywiście błędu opisanego równaniem (3.5), bo nie znamy stałych c i r . Ponowny podział na elementy, tym razem dwa razy mniejsze liniowo (tak, aby węzły – co drugi – nowej siatki trafiły w węzły starej), daje sposobność do wyznaczenia tego błędu poprzez ekstrapolację Richardsona, wprowadzoną z (3.5):

$$F - \tilde{F}_2 \approx \frac{\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^r - 1}. \quad (3.6)$$

Wykładnik r , badany w drodze eksperymentów numerycznych, osiąga wartości poniżej jedynki. Przyjmując pesymistycznie $r=1$ zawyżamy błąd, ale daje nam to (bezpieczne) oszacowanie od góry. Stosunek wymiarów h_1 i h_2 jest więc równy 2 i mianownik staje się po prostu jedynką. Od rozwiązania drugiego do ścisłego jest teraz bliżej, niż od rozwiązania pierwszego do drugiego. *Przykład 4* pokazuje jak to działa w praktyce.

Błąd zaokrągleń arytmetycznych

Przyzwyczajeni do idealnego świata matematyki, nie zawsze zdajemy sobie sprawę z pułapek czyhających w realnym świecie skończonych dokładności. Rozwiązaniu układu równań algebraicznych, takiego typu jak (1.6), nie zawsze towarzyszy refleksja o przydatności otrzymanego rozwiązania w tym drugim świecie. Układ równań powstaje zwykle tak, że współczynniki w nim pochodzą z pomiarów lub z obliczeń opar-

tych na takich pomiarach, albo po prostu z upraszczających rzeczywistość przewidywań teoretycznych, jak w przypadku MES. Uzyskane w ten sposób liczby znamionuje oczywiście ograniczona dokładność. Konsekwencje tego uświadomi nam następujący przykład.

Układ dwóch równań liniowych, niejednorodnych

$$\begin{aligned} -1,10 x_1 + 2,75 x_2 - 9,90 &= 0, \\ 22,11 x_1 - 55,00 x_2 + 198,44 &= 0 \end{aligned}$$

ma rozwiązanie ścisłe: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Zapisanie tych współczynników z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku sugeruje taką właśnie dokładność ich wyznaczenia. Zmienimy dwa z sześciu współczynników o jednostkę na ostatnim znaczącym miejscu. To bardzo optymistyczne zaburzenie – tylko dwa z sześciu i na ostatniej pozycji o jeden. (Takie zaburzenie musi się przecież przytrafić w realnym świecie, czyż nie?)

$$\begin{aligned} -1,11 x_1 + 2,76 x_2 - 9,90 &= 0, \\ 22,11 x_1 - 55,00 x_2 + 198,44 &= 0. \end{aligned}$$

Ten układ też ma ścisłe rozwiązanie, ale już w najmniejszym stopniu nie przypomina poprzedniego: $x_1 = 121$, $x_2 = 52,25$.

Co takiego jest w tym układzie równań, że nieznaczne zaburzenie współczynników daje tak ogromną zmianę rozwiązania? Po czym rozpoznawać takie układy?

Łatwo wyjaśnić ten efekt, interpretując geometrycznie opisywane równania. Każde z nich przedstawia linię prostą w dwuwymiarowej przestrzeni (układ tysiąca równań z tysiącem niewiadomych to tysiąc hiperpłaszczyzn w 1000-wymiarowej przestrzeni), a rozwiązaniem są współrzędne punktu przecięcia. W tym przypadku proste nachylenie są wzajemnie pod bardzo małym kątem – są prawie równoległe. Niewielka zmiana parametrów jednej z nich powoduje znaczne przesunięcie punktu przecięcia. Taki układ równań nazywany jest *źle uwarunkowanym numerycznie*. Decydujący wpływ na to uwarunkowanie ma wyznacznik główny układu, tutaj

$$D = \begin{vmatrix} -1,10 & 2,75 \\ 22,11 & -55 \end{vmatrix} = 1,10 \cdot 55 - 22,11 \cdot 2,75 = 60,5 - 60,8025 = -0,3025.$$

Jego wartość jest, jak widać, mała w porównaniu z dwiema odejmowanymi liczbami, z których powstał. Występuje on w mianownikach rozwiązań

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D},$$

gdzie

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9,9 & 2,75 \\ -198,44 & -55 \end{vmatrix} = 1,21, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1,1 & 9,9 \\ 22,11 & -198,44 \end{vmatrix} = -0,605.$$

Oczywiste jest, że z tego powodu, ogólnie biorąc, wyznacznik D nie powinien zbliżać się zaledo do zera, a im będzie dalej, tym lepiej. Skalę tej odległości wyznaczają wartości D_1 i D_2 oraz dokładność, z jaką obliczono liczby zawarte w tych wyznacznikach. Dokładność ta zależy od błędów zaokrągleń, a te z kolei od użytej maszyny cyfrowej i programu, czyli od długości słowa maszynowego w trakcie wykonywania podstawowych działań arytmetycznych.

Czytelnik zainteresowany dokładnością najczęściej stosowanych algorytmów i podstawami teoretycznymi obliczeń numerycznych powinien sięgnąć do podręcznika [2]. Znajdzie w nim wiele praktycznych rozwiązań i ciekawych przykładów analizy błędów. O błędach metody elementów skończonych traktuje m.in. praca [3].

PRZYKŁADY

Przypadek szczególny – element pręta kratownicy płaskiej

Macierz sztywności

W przestrzeni jednowymiarowej czynniki pod całką (2.16) wyrażają się szczególnie prosto. Macierz $[D]$, o wymiarach 1×1 , trudno nawet nazwać macierzą. Zarówno macierz odkształceń $[B]$, jak i wektor parametrów $\{q\}_e$ są zaledwie dwuelementowe (wyrażenie (2.11)). Wszystko tu jest aż za proste, bo jaki pożytek mamy z elementu w jednowymiarowej przestrzeni – rozwiązania dla pręta rozciąganego? Pierwsze poważne zastosowanie takiego elementu znajdujemy w przestrzeni dwuwymiarowej, budując kratownice. Ale wówczas pojawia się poważna komplikacja. Cały ten opis lokalny, czyli w układzie x' , należy transformować do układu globalnego xy , bowiem każdy element skończony wchodzący w skład kratownicy jest inaczej zorientowany w tym układzie. Można oczywiście uniknąć tej transformacji i zapisać zależności między siłami węzłowymi lub naprężeniami a przemieszczeniami węzłów, od razu w przestrzeni dwuwymiarowej. Takie rozwiązanie niemal nie wymaga odwoływania się do algebry macierzy i angażuje jedynie elementarną wiedzę z wytrzymałości materiałów, dlatego jest preferowane w podręcznikach. A jeśli tak, to pozostawmy tę drogę Czytelnikowi zainteresowanemu studiowaniem przedmiotu widzianego także z innej perspektywy. Sami spróbujmy wariantu zupełnie ogólnego – transformacji według wzorów (2.7) i (2.8).

Ponieważ macierze $[N]$, $[B]$ i $\{q\}_e$ mają teraz opisywać element skończony w przestrzeni xy , ich wymiary muszą zostać do niej dostosowane. Oznacza to, że należy zrobić w tych macierzach miejsce na drugi wymiar, czyli y . W układzie globalnym wektor przemieszczeń węzłowych wygląda tak, jak w wyrażeniu (2.8), ma cztery współrzędne. Taki też ma być w układzie lokalnym (w którym druga składowa przemieszczenia, czyli v' , nie ma żadnego wpływu na odkształcenie tego typu elementu):

$$\{q'\}_e^T = \{u'_1 \ v'_1 \ u'_2 \ v'_2\}. \quad (4.1)$$

Tak samo należy potraktować wektor sił węzłowych, będzie on więc czteroelementowy i transformowany wg formuły (2.8).

Pozostaje jeszcze macierz $[k']_e$. W układzie lokalnym $[N] = [N_1 \ N_2]$. Po podstawieniu tu funkcji kształtu N_i , obliczonych w wyrażeniach (2.5) i po zróżniczkowaniu ich według (2.11), otrzymamy macierz odkształceń elementu pręta rozciąganego

$$[B] = [N]_{,x'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

L jest długością elementu skończonego i, jak widać, macierz $[B]$ nie zależy od x' .

Macierz sprężystości $[D] = E$ (modułowi Younga).

Podstawmy to wszystko do (2.16). Otrzymamy

$$[k']_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \int_L A dx'.$$

Po wykonaniu mnożenia i całkowania

$$[k']_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Użytek jaki robimy z tej macierzy polega na mnożeniu jej przez wektor przemieszczeń węzłowych. Otrzymujemy wówczas siły węzłowe wg (2.14). Jednak w dwuwymiarowej przestrzeni xy , macierz ta musi mieć wymiary 4×4 , a jej elementy należy rozmieścić tak, aby mnożenie przez wektor (4.1) prowadziło do *czterech* sił węzłowych. Wiersze i kolumny dla drugiego, dodanego tak wymiaru w macierzy sztywności (4.3), zapelniamy zerami (sprawi to, że siły V'_1 i V'_2 będą w układzie lokalnym zawsze równe zero, dla dowolnych przemieszczeń węzłów):

$$\begin{Bmatrix} U'_1 \\ V'_1 \\ U'_2 \\ V'_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.4)$$

W takim „formatowaniu” macierzy nie ma oczywiście żadnych sztuczek. A jeśli nawet są, to już się do nich przyzwyczailiśmy. Opisana wcześniej agregacja macierzy elementów jest tego dobrym przykładem. Każda z macierzy $[k]_e$, przed dodaniem do macierzy globalnej, została właśnie tak do niej dopasowana wymiarami.

Teraz jest dobry moment na przypomnienie sobie, po co w ogóle liczymy macierze sztywności kolejnych elementów. Otóż po to, aby składać je, jak klocki, w jedną konstrukcję. Ale jest to możliwe tylko wtedy, gdy każdy z klocków jest ułożony zgodnie z wymiarami ich wspólnej przestrzeni. Czyli obliczona tak macierz sztywności elementu widoczna w (4.4) (nadal przecież w układzie lokalnym, choć już dwuwymiarowym), zanim zostanie dodana do pozostałych, musi być „obrócona” do układu globalnego. To właśnie działanie zawarte jest we wzorze (2.9). Obracamy zatem element o taki kąt α , aby przyjął on właściwą pozycję w budowanej kratownicy (rys. 2.1):

$$\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Tutaj $s = \sin(\alpha)$, $c = \cos(\alpha)$.

Po lewej wypisane są *explicite* trzy macierze z równań (2.9). [T] – macierz współczynników transformacji, wzięta została z (2.8), a $[k']_e$, umieszczona pośrodku – z układu równań (4.4). Wyrażenie otrzymane po prawej stronie jest macierzą sztywności elementu w układzie globalnym, czyli po transformacji obrotowej. Teraz można ją dodać do pozostałych macierzy elementów, składanych w jedną, globalną macierz sztywności konstrukcji.

Siły wewnętrzne

W pręcie obciążonym siłą normalną, macierz [D] ma wymiary 1×1 i zawiera tylko jedną liczbę – moduł Younga E .

Zatem naprężenie

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E [B] \{q'\}_e, \quad (4.6)$$

a siła normalna w pręcie

$$N = \sigma_x A = EA [B] \{q'\}_e, \quad (4.7)$$

EA – sztywność rozciągania pręta.

Jednak macierz [B] obliczana wg (4.2) i wektor przemieszczeń $\{q'\}_e$, zapisane są w układzie lokalnym, gdy tymczasem przemieszczenia węzłowe $\{q\}_e$ otrzymujemy po rozwiązaniu, w układzie globalnym. Aby zatem obliczyć siły wewnętrzne (4.6) i (4.7), należy teraz obrócić te przemieszczenia węzłów elementu $\{q\}_e$ do układu lokalnego, transformując je wg (2.8). W układzie lokalnym tylko współrzędna przemieszczenia u' (wzdłuż osi elementu) wpływa na jego wydłużenie, ograniczmy zatem wektor przemieszczeń węzłowych do tych dwóch stopni swobody:

$$\{q'\}_e = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

Opisane obliczenia sił wewnętrznych wykonywane są w pętli programowej po wszystkich elementach skończonych i obejmują każdorazowo:

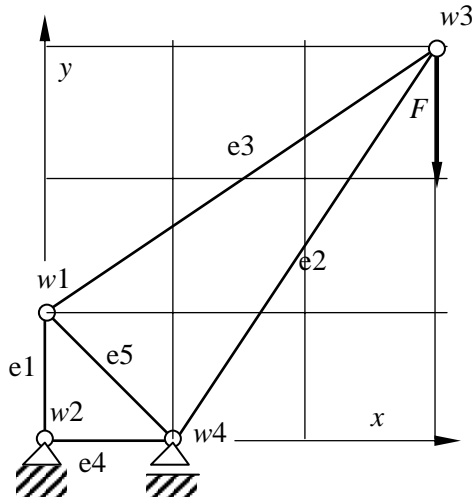
- odczytanie z otrzymanego rozwiązania $\{q\}$ przemieszczeń węzłów kolejnego elementu $\{q\}_e$,
- transformację (4.8) i następujące po niej,
- mnożenie według wzorów (4.6) lub (4.7).

Na koniec otrzymujemy dla kratownicy tabelę wypełnioną wartościami naprężeń (lub sił) dla wszystkich elementów – prętów.

Przykład 1. Rozwiązanie metodą elementów skończonych

Kratownicę widoczną na rysunku 4.1 przygotujemy do obliczeń zgodnie z przedstawionym wcześniej schematem.

Rozpoczynamy od wprowadzenia danych, czyli od wypełnienia tablic węzłów i elementów.



Rys. 4.1. Schemat kratownicy

Dane liczbowe w tablicach węzłów, elementów i sił muszą być w zgodnych jednostkach, tutaj $[x] = m$, $[E] = \text{MPa}$, $[A] = \text{m}^2$. Z tak przyjętego układu jednostek wynika, że siły należy wprowadzić w MN. Obliczone przemieszczenia i reakcje otrzymamy w m i MN.

Nie jest to, oczywiście, jedyny możliwy układ jednostek. Liczby umieszczone w kolumnie „Moduł Younga” można by przyjąć jako wyrażone w N/mm^2 – są takie same. Wówczas miarą długości będzie mm, a siły N i w takich jednostkach należałoby podstawić współrzędne węzłów, dane przemieszczenia i siły czynne. Wyniki otrzymamy także w tych jednostkach.

Przyjmijmy tę pierwszą interpretację. Mamy zatem kratownicę o wymiarach w metrach i jednakowym dla wszystkich prętów przekroju poprzecznym 10 cm^2 . Wartość modułu Younga sugeruje, że pręty wykonane są ze stali.

Model konstrukcji

Tabela 1. Tablica węzłów, warunki brzegowe

Węzeł	Współrzędne węzła		Dane przemieszczenie		Siły czynne	
	x	y	x	y	x	y
1	0	1				
2	0	0	0	0		
3	3	3				-0,05
4	1	0		0		

Tabela 2. Tablica elementów

Element	Węzły		Moduł Younga	Powierzchnia przekroju
	$w1$	$w2$	E	A
1	1	2	$2e5$	0,001
2	3	4	$2e5$	0,001
3	1	3	$2e5$	0,001
4	2	4	$2e5$	0,001
5	1	4	$2e5$	0,001

Postępując zgodnie z podanym algorytmem, należy utworzyć pięć macierzy sztywności elementów według (4.5) i dodać je tak, jak ilustruje to rys. 4.2. Struktura każdej z macierzy widocznych tam po prawej stronie (wyrażonej dla elementu już w układzie globalnym) jest zgodna z podaną w (4.5). Zawierają one mianowicie po cztery podmacierze $[k_{ij}]$ (każda o wymiarach 2×2) obliczane dla kombinacji węzłów ij , wytwarzających element skończony. Na przykład trzeci element tworzą węzły 1. i 3. Po prawej obliczona jest macierz sztywności tego elementu, a po lewej ta sama macierz

Macierze sztywności elementów w układzie globalnym

		w 1		w 2		w 3		w 4	
[k] ₁ =	w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	200,00	0,00	-200,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	0,00	-200,00	0,00	200,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

Element 1		sin(α)=		-1
Węzły		1	2	cos(α)= 0

EA/L= 200	0	0	0	0
	0	200	0	-200
	0	0	0	0
	0	-200	0	200

		w 1		w 2		w 3		w 4	
[k] ₂ =	w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w	0,00	0,00	0,00	0,00	17,07	25,60	-17,07	-25,60	
3	0,00	0,00	0,00	0,00	25,60	38,40	-25,60	-38,40	
w	0,00	0,00	0,00	0,00	-17,07	-25,60	17,07	25,60	
4	0,00	0,00	0,00	0,00	-25,60	-38,40	25,60	38,40	

Element 2		sin(α)=		-0,8321
Węzły		3	4	cos(α)= -0,5547

EA/L= 55,5	17,07	25,60	-17,07	-25,60
	25,60	38,40	-25,60	-38,40
	-17,07	-25,60	17,07	25,60
	-25,60	-38,40	25,60	38,40

		w 1		w 2		w 3		w 4	
[k] ₃ =	w	38,40	25,60	0,00	0,00	-38,40	-25,60	0,00	0,00
	1	25,60	17,07	0,00	0,00	-25,60	-17,07	0,00	0,00
	w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w	-38,40	-25,60	0,00	0,00	38,40	25,60	0,00	0,00	
3	-25,60	-17,07	0,00	0,00	25,60	17,07	0,00	0,00	
w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

Element 3		sin(α)=		0,5547
Węzły		1	3	cos(α)= 0,8321

EA/L= 55,5	38,40	25,60	-38,40	-25,60
	25,60	17,07	-25,60	-17,07
	-38,40	-25,60	38,40	25,60
	-25,60	-17,07	25,60	17,07

		w 1		w 2		w 3		w 4	
[k] ₄ =	w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	w	0,00	0,00	200,00	0,00	0,00	0,00	-200,00	0,00
	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
w	0,00	0,00	-200,00	0,00	0,00	0,00	200,00	0,00	
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

Element 4		sin(α)=		0
Węzły		2	4	cos(α)= 1

EA/L= 200	200	0	-200	0
	0	0	0	0
	-200	0	200	0
	0	0	0	0

		w 1		w 2		w 3		w 4	
[k] ₅ =	w	70,71	-70,71	0,00	0,00	0,00	0,00	-70,71	70,71
	1	-70,71	70,71	0,00	0,00	0,00	0,00	70,71	-70,71
	w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
w	-70,71	70,71	0,00	0,00	0,00	0,00	70,71	-70,71	
4	70,71	-70,71	0,00	0,00	0,00	0,00	-70,71	70,71	

Element 5		sin(α)=		-0,7071
Węzły		1	4	cos(α)= 0,7071

EA/L= 141	70,71	-70,71	-70,71	70,71
	-70,71	70,71	70,71	-70,71
	-70,71	70,71	70,71	-70,71
	70,71	-70,71	-70,71	70,71

Macierz sztywności konstrukcji (suma powyższych macierzy)

	w 1	w 2	w 3	w 4	
w	109,11	-45,11	0,00	0,00	-38,40 -25,60 -70,71 70,71
1	-45,11	287,78	0,00	-200,00	-25,60 -17,07 70,71 -70,71
w	0,00	0,00	200,00	0,00	0,00 0,00 -200,00 0,00
2	0,00	-200,00	0,00	200,00	0,00 0,00 0,00 0,00
w	-38,40	-25,60	0,00	0,00	55,47 51,20 -17,07 -25,60
3	-25,60	-17,07	0,00	0,00	51,20 55,47 -25,60 -38,40
w	-70,71	70,71	-200,00	0,00	-17,07 -25,60 287,78 -45,11
4	70,71	-70,71	0,00	0,00	-25,60 -38,40 -45,11 109,11

Współczynniki sztywności pomnożone przez $1e10$.

Rys. 4.2. Macierze sztywności elementów skończonych kratownicy płaskiej. Po prawej stronie pokazane są one po obliczeniu i transformacji do układu globalnego, po lewej jest widoczne rozmieszczenie ich elementów na tle macierzy globalnej

rozmieszczona na tle macierzy globalnej, czyli dopasowana do niej wymiarami tak, aby ją łatwo dodać do pozostałych. Po dodaniu powstaje macierz sztywności konstrukcji, widoczna na końcu, jako szósta.

Macierz ta (globalna) jest teraz kompletna, jak kompletna jest sama konstrukcja. Ale nie nadaje się ona do rozwiązania układu równań kanonicznych, ponieważ brakuje jeszcze wektora prawych stron (obciążenia konstrukcji), a poza tym jej wyznacznik główny jest równy zero (konstrukcja nie jest stabilnie zamocowana). Wprowadzamy zatem warunki brzegowe.

Warunki brzegowe – wektor obciążeń

Siłę o wartości -50 kN ($-0,05$ MN) przykładamy do węzła 3, w kierunku osi y (przeciwnie do zwrotu y). Liczba ta przypisana jest więc szóstemu stopniowi swobody konstrukcji i na tej pozycji wystąpi w wektorze prawych stron $\{Q\}$. To jedyna jego współrzędna różna od zera.

Warunki brzegowe – przemieszczenia

Stabilne zamocowanie konstrukcji osiągamy przez unieruchomienie wybranych węzłów, a ściślej – nadanie określonych wartości niektórym przemieszczeniom uogólnionym. Zgodnie z rysunkiem 4.1 i zawartością tabeli 1 w kolumnach *dane przemieszczenie*, odbieramy węzłowi 2. obydwa stopnie swobody, a węzłowi 4. swobodę przemieszczeń pionowych. Możemy to osiągnąć przez pomnożenie elementów diagonalnych macierzy sztywności konstrukcji w trzecim, czwartym (drugi węzeł) i ósmym (czwarty węzeł) wierszu przez „dużą liczbę”, tutaj przyjmijmy 10^{10} . Ponieważ oznacza to przemieszczenia równe zero, wektor prawych stron (obciążeń) pozostawimy bez zmian. Teraz układ równań jest gotowy do rozwiązania.

Gdybym (zamiast tych zerowych) wprowadził jakieś (niewielkie) przemieszczenia *różne* od zera, to wynik otrzymałbym oczywiście taki sam. Dopiero odebranie konstrukcji 4. stopnia swobody uczyni ją statycznie niewyznaczalną i doprowadzi do pojawienia się reakcji hiperstatycznej. Wtedy te dane, różne od zera przemieszczenia węzłów, obciążą wewnątrz konstrukcję. Jednak dla metody elementów skończonych fakt ten nie ma żadnego znaczenia, ponieważ rozwiązania konstrukcji statycznie wyznaczalnych i statycznie niewyznaczalnych niczym się nie różnią. Ważne jest natomiast, aby liczba więzów nałożonych na konstrukcję nie była *zbyt* mała. Możliwe jest zatem na przykład wprowadzenie szóstego elementu łączącego węzły 2. i 3., a zmiana ta nie wymaga żadnych dodatkowych działań, z wyjątkiem dodania szóstej macierzy sztywności elementu do macierzy globalnej. Z drugiej strony, odebranie konstrukcji 7. zamiast 8. stopnia swobody uczyni z niej mechanizm i macierz sztywności konstrukcji nadal będzie osobliwa.

Rozwiązanie – przemieszczenia

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy wektor przemieszczeń węzłowych $\{q\}$:

$$\{q\} = \begin{pmatrix} 0,00135 \\ 0,00050 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \\ 0,00865 \\ -0,00811 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline w \\ \hline 1 \\ \hline w \\ \hline 2 \\ \hline w \\ \hline 3 \\ \hline w \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad (4.9)$$

Zauważmy, że zgodnie z naszym życzeniem, przemieszczenia: 3., 4. i 8. są równe zeru. (Siódme też, ale to nie jest już naszą zasługą.) Punkt przyłożenia siły obniżył się o 8,11 mm (przemieszczenie dla szóstego stopnia swobody) i przesunął się w prawo o 8,65 mm, pozostałe przemieszczenia są o rząd mniejsze.

Rozwiązanie – siły wewnętrzne

Te nowe pozycje węzłów prowadzą do zmian długości elementów, a to oznacza odkształcenia i naprężenia w prętach. Zacznijmy od odkształceń. Możemy je wyznaczyć ze związków geometrycznych (2.12), jeśli potrafimy obliczyć macierz odkształceń [B].

Wyrażenie (2.12) dotyczy elementu skończonego, algorytm obliczeniowy powinien zatem zawierać pętlę po elementach od 1. do ostatniego, w której:

- 1) z rozwiązania (4.9) wybieramy wektor parametrów węzłowych $\{q\}_e$ (dla kolejnego elementu e , tutaj $e = 1, 2, \dots, 5$),
- 2) transformujemy go do układu lokalnego x' elementu, wg (2.8),
- 3) obliczamy w tym układzie macierz [B] wg (4.2),
- 4) obliczamy odkształcenie wg (2.12) (w pręcie kratownicy to tylko jedna liczba ε_x),
- 5) naprężenie w pręcie (także jedna liczba) otrzymamy po pomnożeniu tego wyniku przez moduł Younga E wg (2.13) lub bezpośrednio po kroku 3. z (4.6),
- 6) także siłę w pręcie mogą wyznaczyć zaraz po kroku 3. wg (4.7) lub mnożąc naprężenie przez powierzchnię przekroju poprzecznego.

Podana seria kroków obliczeniowych dla kolejnych elementów skończonych prowadzi w końcu do sił i naprężeń we wszystkich prętach. Na przykład element 3. o długości $L = 3,61$ zawarty jest między węzłami 1. i 3. – dla niego $\sin(\alpha) = 0,5547$, $\cos(\alpha) = 0,8321$. Z wektora $\{q\}$ – wyrażenie (4.9) – odczytujemy dla tych węzłów: $u_1 = 0,00135$, $v_1 = 0,00050$, $u_3 = 0,00865$, $v_3 = -0,00811$. Po podstawieniu do wzoru transformacyjnego (2.8), otrzymamy współrzędne przemieszczenia węzłów 1. i 3. w układzie lokalnym

$$\begin{Bmatrix} 0,00140 \\ -0,00033 \\ 0,00270 \\ -0,01155 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8321 & 0,5547 & 0 & 0 \\ -0,5547 & 0,8321 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8321 & 0,5547 \\ 0 & 0 & -0,5547 & 0,8321 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00050 \\ 0,00865 \\ -0,00811 \end{Bmatrix}.$$

$u'_1 = 0,00140$ oznacza, że rzut przemieszczenia węzła 1. (w numeracji lokalnej i globalnej – tak się złożyło) na oś pręta 3. wynosi 1,40 mm i zwrócony on jest ku węzłowi 2' (lokalnie, czyli węzłowi 3. globalnie). Rzut przemieszczenia węzła 1' na kierunek prostopadły do osi pręta 3., czyli $v'_1 = -0,33$ mm, nie wpływa na zmianę długości tego pręta i dlatego nie interesujemy się nim dalej. Wartość $u'_2 = 2,70$ mm na trzeciej pozycji jest przemieszczeniem węzła 2' (lokalnie, czyli węzła 3. globalnie) wzdłuż osi pręta 3., zwróconym identycznie jak u'_1 (czyli od węzła 1'). Wynika z tego, że węzeł 2' oddala się od węzła 1', a to oznacza, że pręt wydłuża się o $u'_2 - u'_1 = 2,70 - 1,40 = 1,30$ mm. Te dwa lokalne przemieszczenia, istotne przy obliczaniu naprężenia, dostaniemy oczywiście szybciej, wykorzystując równania (4.8).

Naprężenie w pręcie wyznaczamy z (4.6), podstawiając tam macierz [B] daną wzorem (4.2):

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q'\}_e = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = E \frac{u'_2 - u'_1}{L} = 2e5 \frac{0,0027 - 0,0014}{3,61} = 72,1 \text{ MPa}.$$

Zestawmy przemieszczenia lokalne wszystkich elementów kratownicy, obliczane wg (4.8):

Element 1

$$\begin{Bmatrix} -0,00050 \\ 0,00000 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00050 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \end{Bmatrix}.$$

Element 2

$$\begin{Bmatrix} 0,00200 \\ 0,00000 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5547 & -0,8321 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5547 & -0,8321 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0,00865 \\ -0,00811 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \end{Bmatrix}.$$

Element 3

$$\begin{Bmatrix} 0,00140 \\ 0,00270 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8321 & 0,5547 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8321 & 0,5547 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00050 \\ 0,00865 \\ -0,00811 \end{Bmatrix}.$$

Element 4

$$\begin{Bmatrix} 0,00000 \\ 0,00000 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0,00000 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \end{Bmatrix}.$$

Element 5

$$\begin{Bmatrix} 0,00060 \\ 0,00000 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7071 & -0,7071 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00050 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \end{Bmatrix}.$$

Teraz możliwe jest obliczenie naprężenia w poszczególnych elementach:

Element 1

$$\{\sigma\} = E \frac{u'_2 - u'_1}{L} = 2e5 \frac{0 - (-0,0005)}{1} = 100 \text{ MPa}.$$

Element 2

$$\{\sigma\} = 2e5 \frac{0 - 0,002}{3,61} = -108,2 \text{ MPa}.$$

Element 3

$$\{\sigma\} = 2e5 \frac{0,0027 - 0,0014}{3,61} = 72,1 \text{ MPa}.$$

Element 4

$$\{\sigma\} = 2e5 \frac{0-0}{1} = 0 \text{ MPa}.$$

Element 5

$$\{\sigma\} = 2e5 \frac{0-0,0006}{1,41} = -84,9 \text{ MPa}.$$

Zauważmy, że naprężenie liczone dla pręta ma w zasadzie sens jedynie w układzie lokalnym. Naprężenia wyrażone wzorem (3.4), czyli w elementach tarczowych, opisane są tam w układzie globalnym i w zasadzie też mają sens jedynie w tamtym układzie współrzędnych.

Rozwiązanie – reakcje

Reakcje pojawiają się dla tych stopni swobody, które „uwięziliśmy”, przypisując im ustalone przemieszczenia. Aby te reakcje wyznaczyć, wykonamy działania zapisane w (2.19). Najpierw obliczymy iloczyn $[K]*\{q\}$ macierzy sztywności konstrukcji (ostatnia z macierzy na rys. 4.2) i znanych już teraz przemieszczeń węzłowych (4.9), to znaczy obliczymy siły węzłowe (czyli siły zewnętrzne czynne i bierne):

$$\begin{bmatrix} 109,11 & -45,11 & 0,00 & 0,00 & -38,40 & -25,60 & -70,71 & 70,71 \\ -45,11 & 287,78 & 0,00 & -200,00 & -25,60 & -17,07 & 70,71 & -70,71 \\ 0,00 & 0,00 & 200,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -200,00 & 0,00 \\ 0,00 & -200,00 & 0,00 & 200,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -38,40 & -25,60 & 0,00 & 0,00 & 55,47 & 51,20 & -17,07 & -25,60 \\ -25,60 & -17,07 & 0,00 & 0,00 & 51,20 & 55,47 & -25,60 & -38,40 \\ -70,71 & 70,71 & -200,00 & 0,00 & -17,07 & -25,60 & 287,78 & -45,11 \\ 70,71 & -70,71 & 0,00 & 0,00 & -25,60 & -38,40 & -45,11 & 109,11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,00135 \\ 0,00050 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \\ 0,00865 \\ -0,00811 \\ 0,00000 \\ 0,00000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,10 \\ 0 \\ -0,05 \\ 0 \\ 0,15 \end{Bmatrix}$$

Reakcje stanowią różnicę pomiędzy otrzymanym wektorem sił zewnętrznych, a wektorem sił czynnych, zgodnie z (2.19):

$$\{Q\}_b = [K]*\{q\} - \{Q\}_{cz} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,10 \\ 0 \\ -0,05 \\ 0 \\ 0,15 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,05 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,15 \end{Bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline w \\ \hline 1 \\ \hline w \\ \hline 2 \\ \hline w \\ \hline 3 \\ \hline w \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 2. Jak typ elementu skończonego wpływa na dokładność rozwiązania

Belkę można traktować jak szczególny przypadek tarczy, dlatego elementy tarczowe nadają się do rozwiązywania belek. Mają dodatkowo tę wyższość nad elementami belkowymi, że pozwalają badać *rozkład* naprężenia w przekroju. Porównajmy jakość rozwiązania takiej konstrukcji, dyskretyzowanej elementami czterowęzłowymi, z rozwiązaniem otrzymanym dla belki złożonej z elementów ośmiowęzłowych. (Wybieramy belkę dlatego, że potrafimy ją rozwiązać. Zwykle jest to niemożliwe lub trudne dla tarczy, nawet niezbyt złożonej).

Na rysunku 4.3 widoczny jest schemat tej konstrukcji i cztery modele obliczeniowe MES. Pierwszy, B, złożony jest z 80 elementów 4-węzłowych. Daje to 105 węzłów, czyli 210 stopni swobody – 210 równań. Pierwszy z modeli 8-węzłowych, C, składa się z 4 elementów, co oznacza 23 węzły – 46 równań. Do utworzenia modelu D wystarcza 13 węzłów – 26 równań do rozwiązania, a ostatni model – ciekawostka, to element 8-węzłowy, w pojedynkę udający belkę wspornikową, obciążoną siłą skupioną.

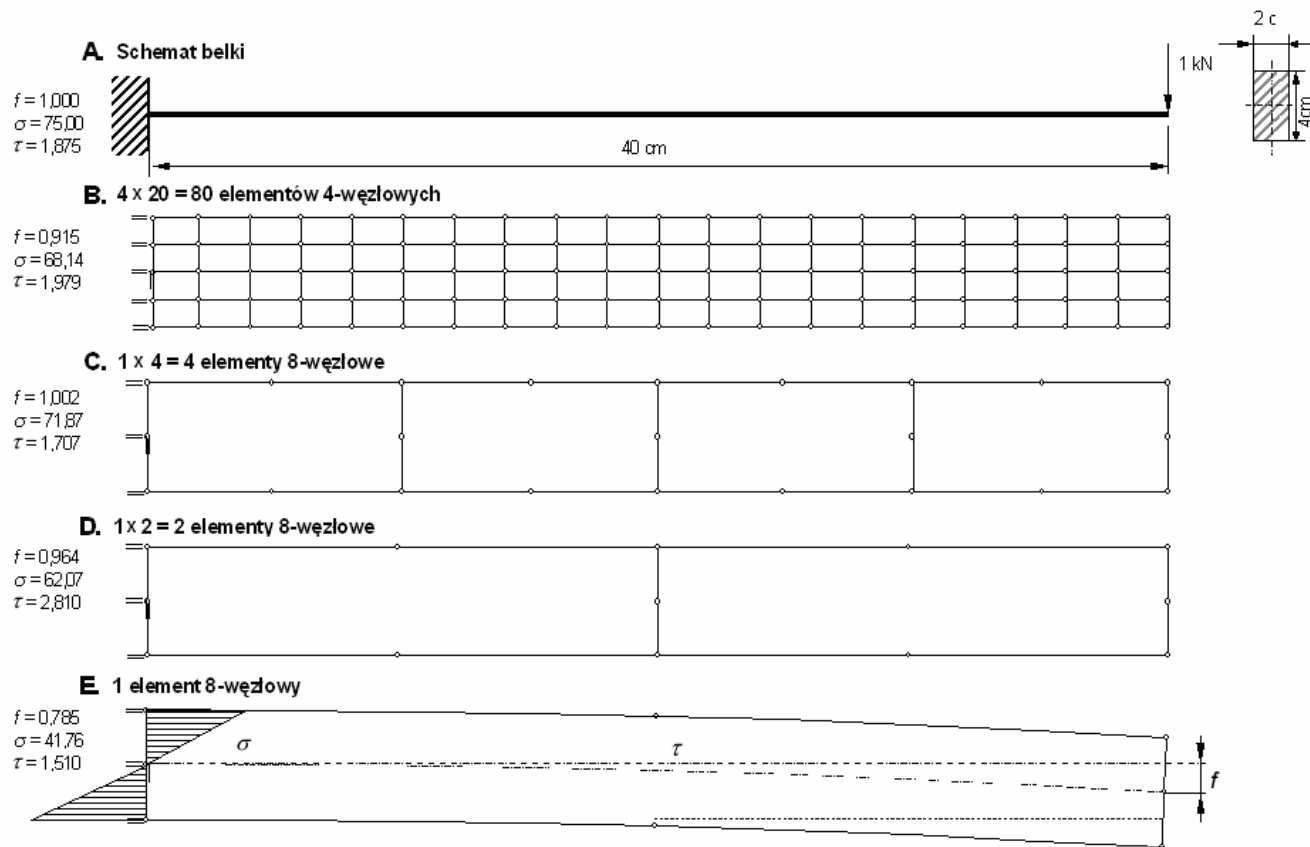
Odchylenie wyników od rozwiązania ścisłego (umówmy się, że tak będziemy nazywać rozwiązanie podane na schemacie A, otrzymane ze wzorów wytrzymałości materiałów) zawiera tabela 1.

Tabela 1

	f [mm]	σ [MPa]	τ [MPa]	$\Delta f/f$	$\Delta\sigma/\sigma$	$\Delta\tau/\tau$
A	1,000	75,00	1,875			
B	0,915	68,14	1,979	-8,5%	-9,1%	5,5%
C	1,002	71,87	1,707	0,2%	-4,2%	-9,0%
D	0,964	62,07	2,810	-3,6%	-17,2%	49,9%
E	0,785	41,76	1,510	-21,5%	-44,3%	-19,5%

Model B, utworzony z elementów 4-węzłowych, prowadzi do jednego z najlepszych wyników w tabeli, ale osiągnięcie to uzyskane zostało dzięki użyciu dużej liczby, bo 80, elementów. Porównywalny pod tym względem jest model C. Błąd obliczenia naprężeń jest podobny, zdecydowanie dokładniejsze jest tu przemieszczenie. Model C ma dalsze jeszcze zalety: zajmuje siedem razy mniej pamięci, niż model B, a czas obliczeń jest pięć razy krótszy.

Nawet model E daje sensowne wyniki, jeśli docenimy liczbę jego elementów. Nie można tego powiedzieć o analogicznym modelu złożonym z jednego elementu 4-węzłowego. Otrzymujemy dla niego (tego już w tabeli nie ma) strzałkę ugięcia $f = 0,025$ i naprężenia: $\sigma = 1,042$, $\tau = 1,250$. Są one bardzo odległe od rozwiązania ścisłego.



Rys. 4.3. Cztery modele belki wspornikowej. Porównanie obejmuje strzałkę ugięcia f [mm], naprężenie maksymalne σ i naprężenie styczne τ [MPa] w warstwie obojętnej, w połowie długości belki. Każdy z modeli B, C, D ma w tym miejscu węzeł, dla modelu E naprężenie τ obliczone zostało w środku elementu. Wartości podane na schemacie A obliczone są z wzorów wytrzymałości materiałów

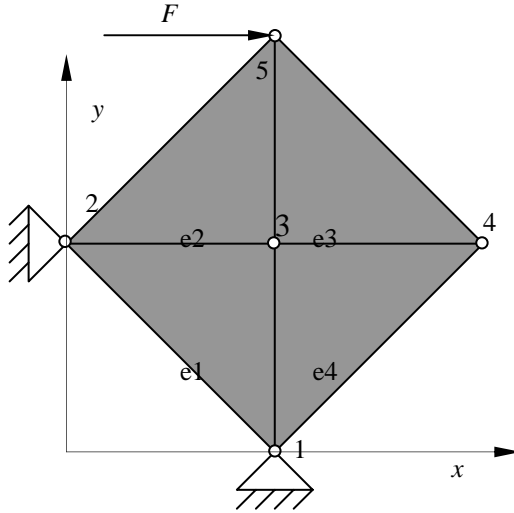
Wyższość elementów 8-węzłowych w zastosowaniu do tego zadania jest ewidentna, ale łatwo też można było tę wyższość przewidzieć. Z wytrzymałości materiałów wiemy, że naprężenia w belce z rys. 4.3 rozłożone są liniowo, zarówno wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego, jak i wzdłuż osi pręta. Taki ich rozkład faworyzuje element 8-węzłowy, ponieważ trzy węzły wzdłuż każdej z jego krawędzi oznaczają funkcję kształtu daną wielomianem drugiego stopnia. Według tej funkcji rozłożony jest wektor przemieszczenia. Odształcenia zatem i naprężenia wzdłuż krawędzi tych elementów, równoległych do krawędzi tarczy-belki, rozłożone są *liniowo*, czyli zgodnie z teoretycznym rozkładem naprężeń w konstrukcji. Stąd taka skuteczność rozwiązania. Oczywiście element tego typu tym bardziej wykaże swoją wyższość nad elementami czterowęzłowymi przy nieliniowym rozkładzie naprężenia.

Właściwe rozumienie możliwości, jakie dają elementy o różnych stopniach funkcji kształtu, pozwala optymalizować model konstrukcji w procesie dyskretyzacji. Wyniki, do których przed chwilą doszliśmy, pomogą na przykład zdecydować o typie i liczbie elementów podczas modelowania pręta zakrzywionego. Rozkład naprężenia wzdłuż wysokości przekroju jest w takim pręcie nieliniowy. Oznacza to, że teraz nie wystarczy już jeden element 8-węzłowy wzdłuż grubości. Do tego, aby „wyczuć” rozkład nieliniowy naprężenia, konieczne jest użycie przynajmniej dwóch takich elementów albo – jeśli to musi być jeden – elementu 12-węzłowego. W przeciwieństwie jednak do pręta prostego, rozkłady naprężenia w elemencie 12-węzłowym (paraboliczny) i w pręcie zakrzywionym (hiperboliczny w jego przekroju poprzecznym) nie określa ten sam typ funkcji, dlatego dokładność tego rozwiązania będzie mniejsza.

Przykład 3. Dwa podstawowe rodzaje wykresu naprężeń

Tarczę kwadratową o grubości 1 cm, stalową ($E = 2e5$ MPa), zamocowano jak na rys. 4.4 i obciążono siłą $F = 0,1$ MN. Współrzędne węzłów czterech elementów trójkątnych, na jakie została ona podzielona, oraz ich przemieszczenia otrzymane po rozwiązaniu (metodą elementów skończonych), zawarte zostały w tabeli 1. Obliczymy naprężenia w węzłach i w środkach elementów.

Ten etap obliczeń odnotowany jest jako czwarty punkt algorytmu MES podanego w zakończeniu *Lekcji 1*. Związki geometryczne (3.2), po uwzględnieniu (3.3), dają w każdym z elementów skończonych odształcenia ε_x , ε_y , γ_{xy} . Zależą one, jak widać, od przemieszczeń węzłowych, nie zależą natomiast od położenia x , y wewnątrz elementu (są takie same w węzłach i w środku elementu skończonego, ale różne w poszczególnych elementach). Obliczymy te odształcenia.



Rys. 4.4. Tarcza podzielona na cztery elementy trójkątne, trójwęzłowe

Tabela 1

Węzeł	Współrzędne m		Przemieszczenia mm	
	x	y	u	v
1	0,5	0	0	0
2	0	0,5	0	0
3	0,5	0,5	0,0648	-0,0458
4	1	0,5	0,0733	-0,1908
5	0,5	1	0,2902	-0,0567

Tabela 2

Element	Węzeł		Współrzędne m		Przemieszczenie mm			
	i	j	x	y	u	v		
e1	i	1	0,5	0	0	0	$B_{11} = 0$	$B_{22} = -2$
	j	3	0,5	0,5	0,0648	-0,0458	$B_{13} = 2$	$B_{24} = 2$
	k	2	0	0,5	0	0	$B_{15} = -2$	$B_{26} = 0$
e2	i	2	0	0,5	0	0	$B_{11} = -2$	$B_{22} = 0$
	j	3	0,5	0,5	0,0648	-0,0458	$B_{13} = 2$	$B_{24} = -2$
	k	5	0,5	1	0,2902	-0,0567	$B_{15} = 0$	$B_{26} = 2$
e3	i	5	0,5	1	0,2902	-0,0567	$B_{11} = 0$	$B_{22} = 2$
	j	3	0,5	0,5	0,0648	-0,0458	$B_{13} = -2$	$B_{24} = -2$
	k	4	1	0,5	0,0733	-0,1908	$B_{15} = 2$	$B_{26} = 0$
e4	i	4	1	0,5	0,0733	-0,1908	$B_{11} = 2$	$B_{22} = 0$
	j	3	0,5	0,5	0,0648	-0,0458	$B_{13} = -2$	$B_{24} = 2$
	k	1	0,5	0	0	0	$B_{15} = 0$	$B_{26} = -2$

Macierz [B], dana równaniem (3.3), zawiera sześć różnych liczb – pomijając zera: $B_{11} = B_{32}$, $B_{22} = B_{31}$, $B_{13} = B_{34}$, $B_{24} = B_{33}$, $B_{15} = B_{36}$, $B_{26} = B_{35}$. Należy ją wyznaczyć dla każdego z czterech elementów skończonych. Dane do obliczeń i wyniki, czyli wartości elementów macierzy odkształceń [B], zawiera tabela 2.

Teraz możliwe jest wykonanie działania przepisane równaniem (3.2):

$$[B] \quad * \quad \{q\}_e = \quad \{\varepsilon\}$$

Element 1

$$\begin{matrix} [B_i] & [B_j] & [B_k] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 0,000e+0 \\ 0,000e+0 \\ 6,475e-5 \\ -4,575e-5 \\ 0,000e+0 \\ 0,000e+0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1,30e-4 \\ -9,15e-5 \\ 3,80e-5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Element 2

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 0,000e+0 \\ 0,000e+0 \\ 6,475e-5 \\ -4,57e-5 \\ 2,902e-4 \\ -5,674e-5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1,30e-4 \\ -2,20e-5 \\ 3,59e-4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Element 3

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 2,902e-4 \\ -5,674e-5 \\ 6,475e-5 \\ -4,575e-5 \\ 7,326e-5 \\ -1,908e-4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1,70e-5 \\ -2,20e-5 \\ 1,61e-4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Element 4

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 2,902e-4 \\ -5,674e-5 \\ 6,475e-5 \\ -4,575e-5 \\ 7,326e-5 \\ -1,908e-4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1,70e-5 \\ -9,15e-5 \\ -1,61e-4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Obliczone wektory odkształceń dla każdego z czterech elementów skończonych, posłużą do wyznaczenia naprężeń. Podstawiamy zatem stałe materiałowe do (1.3) i wykonujemy mnożenie wg (1.2a):

$$[D] \text{ MPa} \quad * \quad \{\varepsilon\} \quad = \quad \{\sigma\} \text{ MPa}$$

Element 1

$$\begin{bmatrix} 220000 & 66000 & 0 \\ 66000 & 220000 & 0 \\ 0 & 0 & 77000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1,30e-4 \\ -9,15e-5 \\ 3,80e-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,5 \\ -11,6 \\ 2,9 \end{bmatrix}.$$

Element 2

$$\begin{bmatrix} 220000 & 66000 & 0 \\ 66000 & 220000 & 0 \\ 0 & 0 & 77000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1,30e-4 \\ -2,20e-5 \\ 3,59e-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,0 \\ 3,7 \\ 27,7 \end{bmatrix}.$$

Element 3

$$\begin{bmatrix} 220000 & 66000 & 0 \\ 66000 & 220000 & 0 \\ 0 & 0 & 77000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1,70e-5 \\ -2,20e-5 \\ 1,61e-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,3 \\ -3,7 \\ 12,4 \end{bmatrix}.$$

Element 4

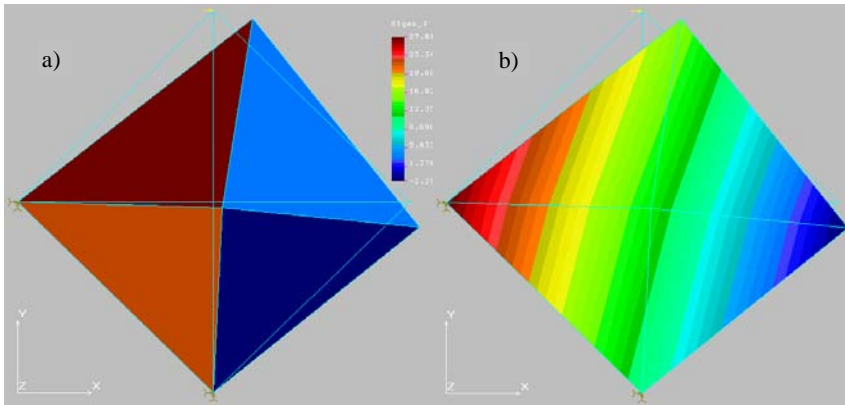
$$\begin{bmatrix} 220000 & 66000 & 0 \\ 66000 & 220000 & 0 \\ 0 & 0 & 77000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1,70e-5 \\ -9,15e-5 \\ -1,61e-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,3 \\ -19,0 \\ -12,4 \end{bmatrix}.$$

Wydawać by się mogło, że otrzymane naprężenia muszą być, jak tarasy, stopniowane w obszarach elementów skończonych. Tak jednak nie jest. Ten rodzaj wykresu naprężeń, dla elementów, jest zwykle opcją głębiej ukrytą. Domyślnie kreślony jest wykres bliższy rzeczywistości – dla węzłów. Naprężenia w węzłach obliczamy jako średnią arytmetyczną z naprężeń dla wszystkich elementów zawierających ten węzeł. Tak więc wektor naprężenia w węźle 3. jest średnią z czterech elementów, ponieważ należy on do nich wszystkich. Naprężenia w węźle 1. są średnią z naprężeń obliczonych dla elementów 1. i 4. Zestawienie tak obliczonych naprężeń dla wszystkich węzłów zawiera tabela 3. Dzięki temu naprężenia zmieniają się liniowo pomiędzy węzłami – także w obszarze jednego elementu. (A miały być tam stałe...)

Tabela 3. Naprężenia średnie w węzłach

	węzeł 1	węzeł 2	węzeł 3	węzeł 4	węzeł 5
σ_x	10,1	24,7	12,4	0,0	14,7
σ_y	-15,3	-3,9	-7,6	-11,4	0,0
σ_{xy}	-4,7	15,3	7,7	0,0	20,0

Porównajmy te dwa rodzaje wykresów – rys. 4.5.



Rys. 4.5. a) naprężenie σ_x wykreślone dla elementów, b) naprężenie σ_x wykreślone dla węzłów

Przykład 4. Błąd metody

Do sprawdzenia przewidywań ekstrapolacji Richardsona (3.6), wykorzystamy model B z rysunku 4.3. Wstępem do tych obliczeń niech będzie rozwiązanie dla tej samej belki, z dwa razy rzadszą siatką elementów w każdym wymiarze, tj. $2 \times 10 = 20$ elementów skończonych. Obliczona wtedy strzałka ugięcia wynosi $f = 0,715$ mm, naprężenie maksymalne (w przekroju utwierdzonym) $\sigma = 52,79$ MPa, a naprężenie styczne w środku $\tau = 2,600$ MPa. Te liczby uzyskane zostały po obliczeniach z podwójną precyzją, można więc przyjąć, że błędy zaokrągleń są tu stosunkowo niewielkie. Wyrażenie (3.6) ma, po uproszczeniach, postać

$$F - \tilde{F}_2 \leq \tilde{F}_2 - \tilde{F}_1. \quad (4.10)$$

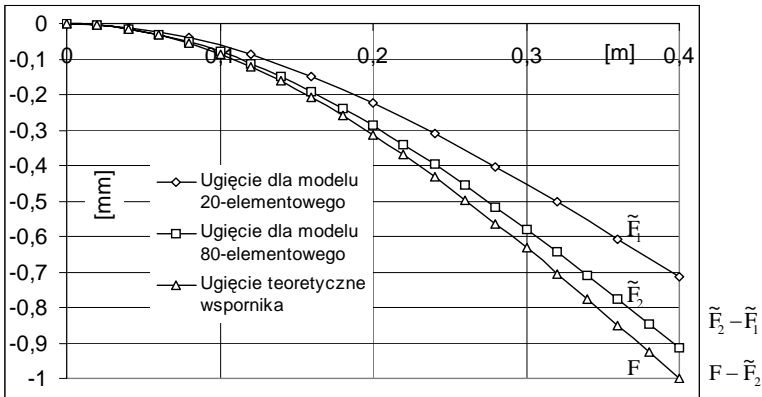
Jakość tego oszacowania potrafimy oczywiście ocenić, ponieważ znamy rozwiązanie ścisłe. Dla strzałki ugięcia f

$$\begin{aligned} 1 - 0,915 &\leq 0,915 - 0,715, \\ 0,085 &\leq 0,200. \end{aligned}$$

Dla naprężenia σ

$$\begin{aligned} 75,00 - 68,14 &\leq 68,14 - 52,79, \\ 6,86 &\leq 15,35. \end{aligned}$$

Na rysunku 4.6 można prześledzić, jak wyglądają poszczególne rozwiązania w przemieszczeniach. Widać, że największe ugięcie wykazuje linia teoretyczna. Rozwiązania MES czynią belkę sztywniejszą, niż jest faktycznie, zbliżając się,



Rys. 4.6. Linia ugięcia osi wspornika z rys. 4.3. Najniższy wykres przedstawia rozwiązanie teoretyczne, wyżej biegnie linia dla modelu złożonego z 80 elementów 4 – węzłowych (drugie rozwiązanie MES), najwyżej wykreślone jest rozwiązanie modelu podzielonego na 20 elementów 4 – węzłowych (pierwsze rozwiązanie MES). Zgodnie z nierównością (4.10) różnica między rozwiązaniem ścisłym a drugim rozwiązaniem MES ma być mniejsza, niż różnica między dwoma kolejnymi rozwiązaniami MES. I tak właśnie jest

w miarę zagęszczania siatki, do rozwiązania ścisłego od dołu (liczbowo), coraz drobniejszymi krokami. Gdybym nie znał rozwiązania ścisłego, powiedziałbym, że strzałka ugięcia znajduje się gdzieś między $0,915$ mm a $0,915 + 0,200 = 1,115$ mm (lub że wynosi jeden milimetr, plus minusz dziesięć procent).

Konstrukcje symetryczne

Dość często zdarza się zadanie, w którym konstrukcję i warunki brzegowe charakteryzuje jakaś klasa symetrii. Opłaca się wówczas wykorzystać ten fakt do uproszczenia modelu i ograniczenia wysiłku związanego z jego budową.

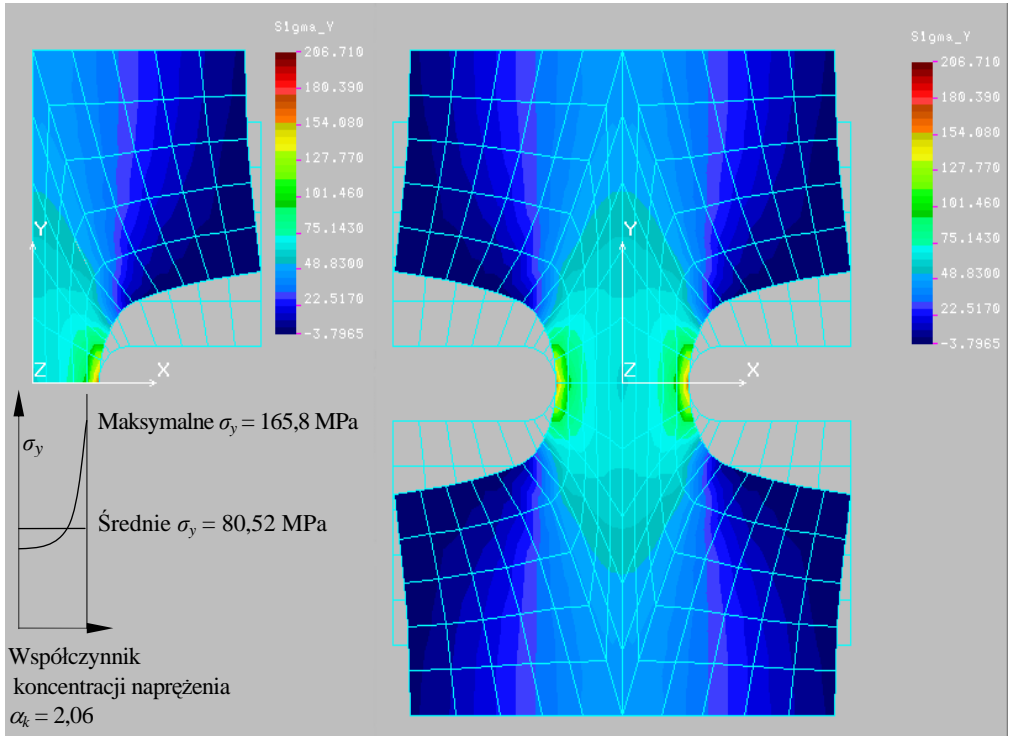
Model zbiornika

Model zbiornika pokazany na rys. 0.1 ma dwie płaszczyzny symetrii. Obciążony jest jednak ciężarem wsadu skierowanym (w najbardziej niekorzystnym, poziomym położeniu – jak na rysunku) pionowo w dół. Zamocowany jest poprzez pierścień wokół kołowego otworu. Takie warunki brzegowe w dalszym ciągu pozostawiają jeszcze pionową płaszczyznę symetrii przechodzącą przez oś zbiornika. Oznacza to, że wszystkie węzły

znajdujące się na tej płaszczyźnie nadal na niej pozostaną po obciążeniu konstrukcji – mogą się one przemieszczać w tej płaszczyźnie, ale nie mogą jej opuścić. Oba te rodzaje symetrii ułatwiają tworzenie modelu i skracają później czas obliczeń. Tak więc wystarczy zbudować ćwiartkę modelu pomiędzy obiema płaszczyznami symetrii i skopiować ją przez obrót lub odbicie lustrzane, pozostawiając do dalszych obliczeń połówkę zbiornika. Węzłom na pionowej płaszczyźnie symetrii należy następnie odebrać swobodę przemieszczeń w kierunku prostopadłym do niej. Pozostałe warunki brzegowe pozostają takie same, jak w modelu pełnym.

Koncentrator naprężenia

Prześledźmy ten tok postępowania na znacznie prostszym modelu. Do obliczenia współczynnika koncentracji naprężeń tworzymy „próbkę” z koncentratorem, według rys. 4.7.



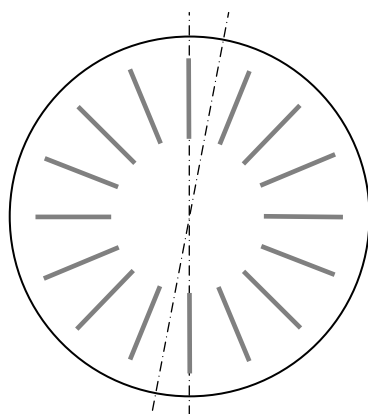
Rys. 4.7. Porównanie rozwiązań dwu wersji tego samego modelu. Zarówno przemieszczenia, jak i naprężenia są jednakowe w odpowiadających sobie węzłach. Także naprężenia w modelu pełnym wykazują „sześciocyfrową symetrię”

Można przyjąć, że mamy do czynienia z tarczą, a tarcza ta ma dwie osie symetrii. Modelujemy zatem tylko jedną czwartą tej konstrukcji. Na obu osiach symetrii należy odebrać węzłom możliwość przemieszczeń prostopadłych do tych osi (węzeł środkowy zostaje więc zupełnie unieruchomiony). Dla porównania utworzymy też pełny model. Po obciążeniu deformuje się on do postaci widocznej na rysunku. Jego kształt, jak wynika z rozwiązania pokazanego na rys. 4.7 i z porównania przemieszczeń węzłów obu wersji modelu, pokrywa się z kształtem jednej czwartej całego, zdeformowanego modelu. Także naprężenie w przekroju $y=0$, obliczone dla każdego z nich, jest, z dokładnością do sześciu cyfr znaczących, takie samo.

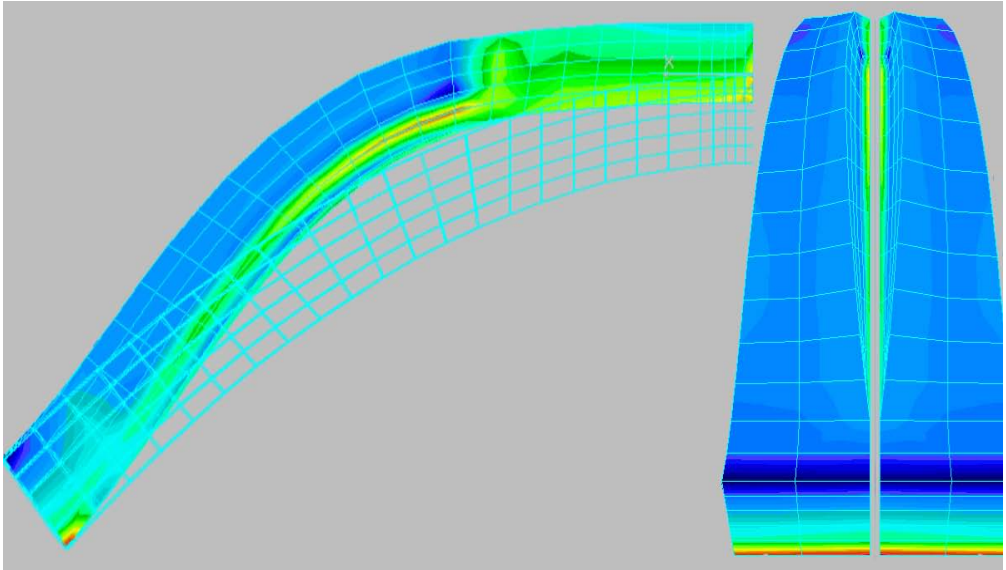
Symetria zadania jest jeszcze o tyle interesująca, że może posłużyć do oceny jakości rozwiązania. O tym mianowicie, że taka symetria występuje, wiemy tylko my – MES nie potrafi jej rozpoznać. Możemy zatem porównać wartości liczbowe naprężeń w węzłach rozmieszczonych symetrycznie.

Keratotomia radialna rogówki

Ten przykład ilustruje zastosowanie mechaniki w medycynie. Do niedawna jedną z popularniejszych metod w chirurgii refrakcyjnej oka (stosowanych przy korygowaniu mocy optycznej rogówki) była keratotomia radialna. Być może jedną z ostatnich prób jej użycia jest ten przykład. Zabieg polega na wykonaniu specjalnym skalpelem serii nacięć na rogówce, rozmieszczonych promieniowo (rys. 4.8). W konsekwencji centralna część rogówki, obciążonej ciśnieniem śródgałkowym, spłaszcza się, zmniejszając moc optyczną zewnętrznej powierzchni. Wartość korekty mocy optycznej zależy od liczby, głębokości i długości nacięć.



Rys. 4.8. Rogówka nacięta promieniowo 16 razy, tj. co $22,5^\circ$.
Płaszczyzny symetrii występują jednak co $11,25^\circ$



Rys. 4.9. Model rogówki poddanej keratotomii radialnej. Zabieg wykonywany jest na oku krótkowzrocznym. Po prawej – dwa przylegające do siebie (nieco odsunięte) kliny. Widoczne jest rozwarcie w strefie nacięcia. Po lewej – kształt rogówki po zabiegu (figura barwna), na tle konfiguracji początkowej (siatka elementów na szarym tle). Na skutek przyrostu promienia krzywizny w wierzchołku rogówki, jej moc optyczna ulega zmniejszeniu. Niebieski obszar (niskie naprężenie zredukowane) jest strefą nacięcia. Zwykle jego głębokość sięga 90% grubości rogówki

Do budowy modelu nie można użyć jakiegoś „oszczędnego” typu elementu skończonego, w rodzaju osiowosymetrycznego – zadanie jest niestety w pełni trójwymiarowe. Liczne elementy przestrzenne, w dodatku o nieliniowych funkcjach kształtu, wymagają komputera o sporej mocy obliczeniowej. Nie tylko o dużej pamięci, ale przede wszystkim z szybkim procesorem. Wykorzystanie symetrii konstrukcji jest więc jak najbardziej pożądane, a chodzi tu zarówno o czas obliczeń, jak i dokładności rozwiązania – błędy obliczeń rosną wraz ze wzrostem wielkości zadania. Jaką zatem część rogówki zamodelować?

Symetrię wykazuje ta konstrukcja względem płaszczyzn przechodzących przez oś optyczną rogówki i przez nacięcia. Powtarzają się one przy obrocie wokół osi co $22,5^\circ$. Ale jest jeszcze inna klasa płaszczyzn – połowią one kliny zawarte pomiędzy poprzednimi płaszczyznami. Najmniejszym, powtarzającym się fragmentem konstrukcji jest więc klin o kącie $11,25^\circ$. Stanowi on jedną trzydziestą drugą część całej konstrukcji. Wystarczy zamodelować ten drobny ułamek całości. Oba rodzaje płaszczyzn symetrii zaznaczono na rys. 4.8, a kształt modelu po obciążeniu (w dwóch rzutach), pokazuje rys. 4.9. Widoczny jest spadek krzywizny wierzchołka rogówki (zdeformowanej przesadnie na tym wykresie). Jeśli znam wszystkie istotne parametry geometryczne i materiałowe ludzkiej gałki ocznej, to mogę prognozować skutki *optyczne* dowolnej ingerencji chirurgicznej w geometrię rogówki.

LITERATURA

- [1] ZIENKIEWICZ O. C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
- [2] FORTUNA Z., MACUKOW B., WĄSOWSKI J., *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 1993.
- [3] RAKOWSKI G., KACPRZYK Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.