

Joanna Perzyńska

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

ZASTOSOWANIE METODY HELLWIGA DO WYZNACZANIA WAG PROGNOZ KOMBINOWANYCH

Streszczenie: W artykule przedstawiono propozycję zastosowania metody wskaźników pojemności informacyjnej Hellwiga do wyznaczania wag prognoz kombinowanych. Ilustracją rozważań o charakterze teoretycznym jest przykład empiryczny, w którym prognozy indywidualne oraz kombinowane wyznaczono dla zmiennej ekonomicznej wykazującej wahania sezonowe. Dokładność prognoz kombinowanych z wagami Hellwiga porównano z dokładnością prognoz kombinowanych wyznaczonych za pomocą metody średniej arytmetycznej oraz wybranych metod złożonych.

Słowa kluczowe: prognozy indywidualne, prognozy kombinowane, wskaźniki pojemności informacyjnej, wagi prognoz, błędy prognoz.

1. Wstęp

W literaturze statystyczno-ekonometrycznej poświęconej prognozowaniu dominuje podejście polegające na wyborze najlepszej metody predykcji lub najlepszego predyktora. Można jednak podać wiele przykładów, gdy wybór ten nosi znamiona arbitralności. Jeżeli dokona się wyboru „najlepszego” równania, to po upływie okresu prognozowanego często okazuje się, że trafność zbudowanych na jego podstawie prognoz jest niższa niż na podstawie odrzuconych predyktorów o nieznacznie gorszych własnościach predyktywnych. Jednym z możliwych wyjść z tej sytuacji jest budowa prognoz kombinowanych (łączonych, mieszanych, złożonych) będących kombinacjami prognoz indywidualnych otrzymanych za pomocą różnych metod lub klas modeli. Najprostsza forma prognozy kombinowanej przyjmuje postać średniej ważonej z wagami subiektywnie dobranymi przez prognostę bądź też jednakowymi. Podstawowym zadaniem jest wyznaczenie wartości wag w taki sposób, aby otrzymana prognoza kombinowana miała błąd mniejszy od błędów jej prognoz składowych. Ponieważ w momencie wyznaczania prognozy kombinowanej nie wiadomo, dla której z prognoz indywidualnych błędy *ex post* będą najmniejsze, dlatego też bardzo często dokładność prognozy kombinowanej porównuje się z dokładnością nie najlepszej, lecz przeciętnej prognozy indywidualnej [Armstrong 2001; Greszta, Maciejewski 2005].

W artykule zostanie przedstawiona propozycja zastosowania metody wskaźników pojemności informacyjnej Hellwiga do wyznaczania wag prognoz kombinowanych. W toku badań empirycznych zweryfikowana zostanie hipoteza mówiąca, że otrzymane w ten sposób prognozy kombinowane charakteryzują się większą dokładnością niż prognozy przeciętne będące średnią arytmetyczną ich prognoz składowych.

2. Metody badawcze

Niech $f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{mT}$ będą różnymi prognozami indywidualnymi wartości zmiennej Y w okresie T . Prognoza kombinowana wartości y_T będąca liniową kombinacją m prognoz indywidualnych ma postać:

$$f_{cT} = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{iT} \quad (1)$$

przy założeniu:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad (2)$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, m$ ($m \geq 2$); f_{cT} – prognoza kombinowana; f_{iT} – i -ta prognoza składowa; λ_i – waga i -tej prognozy składowej.

Jeżeli wagi wszystkich prognoz składowych są jednakowe, czyli wynoszą:

$$\lambda_i = \frac{1}{m}, \quad (3)$$

wówczas prognoza złożona (1) jest średnią arytmetyczną prognoz indywidualnych. Metoda średniej arytmetycznej (AM – *Arithmetic Mean*) obok mediany zaliczana jest do prostych metod ważenia prognoz, które stosowane są w oderwaniu od błędów prognoz indywidualnych z poprzednich okresów, pozostałe metody to tzw. metody złożone [Greszta, Maciejewski 2005].

Do grupy metod złożonych należy m.in. metoda wariancji-kowariancji (VC – *Variance-Covariance*) polegająca na minimalizacji wariancji błędu prognozy kombinowanej [Bates, Granger 1969; Granger, Newbold 1974]. Wagi wyznaczone za jej pomocą dane są wzorem:

$$\lambda = \frac{\Sigma^{-1}1}{1'\Sigma^{-1}1}, \quad (4)$$

gdzie: Σ – macierz wariancji-kowariancji błędów prognoz składowych.

Szacując macierz Σ na podstawie próby, otrzymujemy estymatory jej elementów o postaci:

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it} e_{jt}, \quad (5)$$

gdzie: e_{it} – błąd prognozy składowej f_{it} .

Oszacowanie wag prognozy kombinowanej metodą wariancji-kowariancji jest równoważne estymacji równania regresji ERLS (*Equality Restricted Least Squares*):

$$y_t = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{it} + \xi_t \quad (6)$$

za pomocą metody najmniejszych kwadratów przy warunku pobocznym (2) [Granger, Ramanathan 1984].

W sytuacji, gdy wagi wyznaczone za pomocą powyższych metod przyjmują wartości ujemne, można zastosować następujące ich modyfikacje:

- metodę Batesa i Grangera (BG) będącą szczególnym przypadkiem metody VC przy założeniu zerowej korelacji pomiędzy błędami prognoz składowych, w której wagi szacuje się na podstawie wzoru:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it}^2 \right)^{-1}}{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{jt}^2 \right)^{-1}}, \quad (7)$$

- metodę regresji NERLS (*Nonnegativity Equality Restricted Least Squares*) przy warunkach pobocznych:

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1. \quad (8)$$

Zaproponowana w niniejszym artykule metoda polega na wykorzystaniu do oszacowania wag prognozy kombinowanej wskaźników pojemności informacyjnej Hellwiga wyznaczonych na podstawie równania regresji (6). W równaniu tym zmienną objaśnianą jest zmienna prognozowana, a zmiennymi objaśniającymi są wygasłe prognozy indywidualne. Liczba wszystkich możliwych kombinacji ze zbioru M prognoz indywidualnych, z których można utworzyć prognozy kombinowane zawierające od dwóch do M prognoz składowych, wynosi $2^M - M - 1$. Dla każdej kombinacji prognoz składowych można wyznaczyć wskaźniki ich indywidualnej pojemności informacyjnej na podstawie wzoru:

$$h_{ki} = \frac{r_i^2}{1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |r_{ij}|}, \quad (9)$$

- gdzie: k – numer kombinacji prognoz indywidualnych ($k = 1, 2, \dots, 2^M - M - 1$; $M \geq 2$),
 m_k – liczba indywidualnych prognoz składowych w k -tej kombinacji ($m_k \in \{2, \dots, M\}$),
 i – numer prognozy składowej w k -tej kombinacji ($i = 1, 2, \dots, m_k$),
 h_{ki} – wskaźnik indywidualnej pojemności informacyjnej i -tej prognozy składowej w k -tej kombinacji,
 r_i – współczynnik korelacji liniowej między i -tą prognozą składową a prognozowaną zmienną,
 r_{ij} – współczynnik korelacji liniowej między i -tą a j -tą prognozą składową.

Dziąc wartości wskaźników indywidualnej pojemności informacyjnej poszczególnych prognoz składowych w danej kombinacji przez wskaźnik jej integralnej pojemności informacyjnej, otrzymujemy unormowane wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, które można przyjąć jako wagi w prognozie kombinowanej:

$$\lambda_{ki} = \frac{h_{ki}}{H_k}, \quad (10)$$

- gdzie: λ_{ki} – waga i -tej prognozy składowej w k -tej kombinacji,
 H_k – wskaźnik integralnej pojemności informacyjnej Hellwiga k -tej kombinacji prognoz składowych określony wzorem:

$$H_k = \sum_{i=1}^{m_k} h_{ki}. \quad (11)$$

Nieujemne wartości wag w prognozie (1) można interpretować jako procentowe udziały prognoz składowych w prognozie kombinowanej. Wagi wyznaczone na podstawie wzoru (10) zapewnią zatem, że większy udział w prognozie kombinowanej będą mieć prognozy indywidualne o większej pojemności informacyjnej.

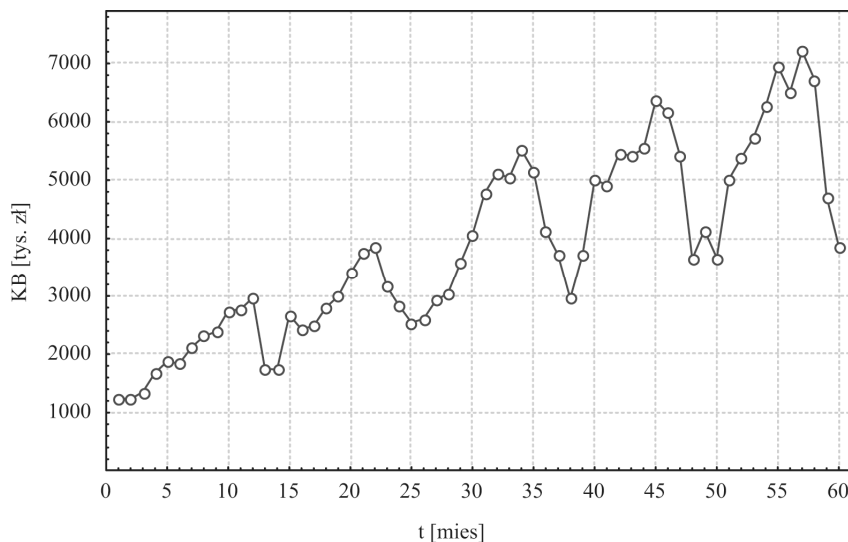
3. Przykład empiryczny

3.1. Materiał badawczy

Modelowaniu predyktywnemu i prognozowaniu poddano koszty całkowite produkcji betonu komórkowego (KB) w przedsiębiorstwie A. Szereg czasowy wartości zmiennej KB (w tys. zł) obejmował 60 miesięcy (lata 2000-2004). Kształtowanie się prognozowanej zmiennej przedstawiono na rys. 1.

Jako zmienne objaśniające w modelach przyczynowo-opisowych przyjęto: sprzedaż (SP) oraz produkcję (PR) przedstawiające odpowiednio sprzedaż oraz produkcję

betonu komórkowego w przedsiębiorstwie A. Prognozowana zmienna KB oraz zmienne objaśniające charakteryzują się występowaniem wahań sezonowych. W tabeli 1



Rys. 1. Kształtowanie się zmiennej KB

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Oceny wskaźników sezonowości zmiennych KB, PR i SP w okresie estymacyjnym $t = 1, 2, \dots, 36$

Miesiąc	KB	PR	SP
I	73,98	47,20	75,51
II	73,55	51,68	57,36
III	77,03	56,65	69,15
IV	79,48	83,79	74,25
V	91,67	109,25	100,36
VI	102,32	110,30	112,16
VII	113,11	126,04	121,88
VIII	120,20	126,25	123,08
IX	119,07	135,92	131,63
X	128,97	140,60	138,99
XI	118,84	108,65	109,42
XII	101,77	103,67	86,20
Maks. – min.	55,42	93,40	81,63

Źródło: obliczenia własne.

zestawiono oceny wskaźników sezonowości badanych zmiennych za okresy miesięczne. Wskaźniki te wyznaczono dla okresu estymacyjnego $t = 1, 2, \dots, 36$ przy założeniu multiplikatywnego charakteru wahań sezonowych.

Zmienna prognozowana KB charakteryzuje się silnym natężeniem sezonowości, różnica pomiędzy maksymalną i minimalną wartością ocen wskaźników sezonowości wynosi dla niej 55,42 p. p. Koszty produkcji betonu komórkowego swoje maksimum sezonowe osiągają w październiku, a minimum w lutym.

Zmienne objaśniające PR oraz SP również charakteryzują się silnym natężeniem sezonowości, ich amplitudy ocen wskaźników sezonowości wynoszą odpowiednio 93,40 p. p. oraz 81,63 p. p. Zmienna SP swoje ekstrema sezonowe osiąga w tych samych miesiącach co zmienna objaśniana KB. Zmienna PR swoje maksimum sezonowe również przyjmuje w październiku, natomiast minimum w styczniu.

3.2. Prezentacja i ocena wyników badań

W procesie modelowania predyktywnego i prognozowania zmiennej KB wykorzystano modele należące do sześciu klas: klasyczne (MK) i hierarchiczne (H) modele szeregu czasowego, klasyczne (P) i hierarchiczne modele przyczynowo-opisowe (PH), modele Holta-Wintersa ($HWin\alpha\beta\gamma$) oraz sztuczne sieci neuronowe (ANN). W etapie wstępnym, na podstawie danych pochodzących ze skróconego okresu estymacyjnego obejmującego 48 obserwacji, oszacowano równania różniące się (w zależności od klasy modeli): zmienną objaśniającą, postacią analityczną trendu, rodzajem wahań sezonowych, wielkościami stałych wygładzania, strukturą sieci neuronowych. Na podstawie oszacowanych modeli wyznaczono prognozy wygaśnię dla horyzontu dwunastomiesięcznego i poddano analizie ich dokładność. Następnie z każdej z sześciu klas modeli wybrano po jednym modelu o najlepszych własnościach predyktywnych. Były to: MK_{tp} , $H62_{tp}$, P_{tsp}/SP , $PH26_{tsp}/SP$, $HWin117$ oraz ANN/SP (gdzie: t – trend liniowy, s – stałe parametry przy zmiennej objaśniającej, p – periodyczny składnik sezonowy, SP – zmienna objaśniająca). Na ich podstawie wyznaczono prognozy *ex post* (odpowiednio: f_{1t} , f_{2t} , f_{3t} , f_{4t} , f_{5t} , f_{6t}) na 12 kolejnych okresów ($t = 49, 50, \dots, 60$). Stanowiły one prognozy składowe 57 prognoz kombinowanych określonych wzorem (1) dla $m = 2, 3, \dots, 6$. Oceny przeciętnych względnych błędów ($MAPE_{49-60}$) indywidualnych prognoz składowych zestawiono w tab. 2.

Tabela 2. Oceny błędów prognoz składowych

Prognoza składowa	$MAPE_{49-60}$ [%]
f_1	13,04
f_2	13,49
f_3	5,42
f_4	5,62
f_5	7,60
f_6	8,83

Źródło: obliczenia własne.

Dla każdej kombinacji m prognoz składowych wyznaczono prognozy kombinowane z wagami otrzymanymi na podstawie metody wariancji-kowariancji (VC), Bateśa-Grangera (BG), regresji (NERLS), zaproponowanej modyfikacji metody Hellwiga (mH) oraz średniej arytmetycznej prostej (AM). Do oszacowania wag prognoz kombinowanych (z wyjątkiem metody AM, w której przyjmuje się równe wagi) wykorzystano dwa źródła informacji: wartości prognoz *ex post* oraz ich błędów (wariant W1) oraz wartości teoretyczne modeli indywidualnych, na podstawie których wyznaczono prognozy składowe i wartości ich reszt (wariant W2). Ze względu na obszerność wyników w tab. 3 przedstawiono wartości wag dla wybranych prognoz kombinowanych (Fc) (cyfra za skrótem nazwy metody oznacza wariant).

Tabela 3. Wartości wag dla wybranych prognoz kombinowanych

Fc	VC1	BG1	NERLS1	mH1	VC2	BG2	NERLS2	mH2
f ₂₄	-0,130	0,271	0,000	0,400	-0,011	0,271	0,000	0,483
	1,130	0,729	1,000	0,600	1,011	0,729	1,000	0,517
f ₃₅	0,936	0,807	0,936	0,540	0,989	0,879	0,989	0,554
	0,064	0,193	0,064	0,460	0,011	0,121	0,011	0,446
f ₁₂₃	0,000	0,206	0,000	0,296	0,000	0,205	0,000	0,328
	0,000	0,180	0,000	0,267	0,000	0,165	0,000	0,322
	1,000	0,614	1,000	0,437	1,000	0,630	1,000	0,350
f ₂₃₅	-0,064	0,191	0,000	0,257	-0,020	0,172	0,000	0,335
	0,977	0,653	0,936	0,408	0,999	0,728	0,989	0,367
	0,087	0,156	0,064	0,335	0,021	0,100	0,011	0,298
f ₁₂₃₄	0,081	0,139	0,000	0,216	0,000	0,142	0,000	0,244
	-0,176	0,121	0,000	0,193	0,000	0,114	0,000	0,240
	1,023	0,414	1,000	0,303	1,000	0,437	1,000	0,260
	0,072	0,326	0,000	0,288	0,000	0,307	0,000	0,256
f ₁₂₄₅	0,129	0,203	0,000	0,222	0,351	0,262	0,122	0,256
	-0,379	0,177	0,000	0,200	-0,355	0,183	0,000	0,244
	1,184	0,476	0,860	0,314	0,966	0,449	0,878	0,271
	0,066	0,144	0,140	0,264	0,038	0,106	0,000	0,229
f ₁₃₄₅₆	-0,060	0,120	0,000	0,166	0,026	0,145	0,000	0,202
	1,242	0,358	0,575	0,218	1,403	0,432	0,989	0,211
	-0,662	0,282	0,000	0,209	-0,508	0,249	0,000	0,206
	0,224	0,086	0,180	0,191	0,054	0,059	0,011	0,182
	0,256	0,154	0,245	0,216	0,025	0,115	0,000	0,199
f ₁₂₃₄₅₆	0,155	0,109	0,000	0,141	0,034	0,132	0,000	0,168
	-0,363	0,095	0,000	0,127	-0,114	0,093	0,000	0,160
	0,147	0,324	0,575	0,192	1,292	0,391	0,989	0,178
	1,070	0,255	0,000	0,183	-0,296	0,226	0,000	0,173
	0,004	0,078	0,180	0,164	0,058	0,054	0,011	0,152
	-0,013	0,139	0,245	0,193	0,026	0,104	0,000	0,169

Źródło: obliczenia własne.

Analizując informacje zawarte w tab. 3, można zauważyć, że wagi wyznaczone dla tych samych kombinacji prognoz indywidualnych, lecz za pomocą różnych metod, na ogół przyjmują różne wartości. Różnią się również wagi wyznaczone za pomocą tych samych metod, ale na podstawie różnych źródeł informacji. Wagi oszacowane za pomocą metod VC1 i VC2 w większości przypadków są ujemne lub większe od jedności. W pozostałych metodach zawsze otrzymano nieujemne wagi, co wynika z definicji. W wielu przypadkach (głównie dla metod NERLS1 i NERLS2, sporadycznie dla VC1 i VC2) otrzymano predyktory kombinowane, w których pewne wagi wynoszą 0, co *de facto* oznacza redukcję liczby ich prognoz składowych. W skrajnych sytuacjach jedna z wag jest równa 1, a pozostałe wynoszą 0, w wyniku czego zbiór prognoz indywidualnych ulega zredukowaniu do tylko jednej składowej. Nie można wskazać konkretnych kombinacji (jeśli chodzi zarówno o liczbę, jak i o rodzaj prognoz składowych), w których rozstępy wartości wag zawsze będą najmniejsze albo największe. Potwierdza to konieczność budowy prognoz złożonych dla różnych kombinacji prognoz indywidualnych. Duże zróżnicowanie wartości wag wskazuje na zasadność stosowania innych metod niż średnia arytmetyczna, w której przyjmuje się jednakowe wagi dla wszystkich prognoz składowych.

W tabeli 4 zestawiono przeciętne względne błędy $MAPE_{49-60}$ prognoz kombinowanych. Na podstawie informacji zawartych w tabeli wyznaczono odsetki prognoz kombinowanych o błędach nie większych od błędów prognoz przeciętnych (tj. prognoz kombinowanych będących średnimi arytmetycznymi tych samych prognoz składowych) dla poszczególnych metod oraz rozważanych dwóch wariantów. Wyniki zestawiono w tab. 5.

Z analizy informacji zawartych w ostatniej kolumnie tab. 5 (przedstawiającej odsetki dla wszystkich 57 wyznaczonych prognoz kombinowanych zawierających od 2 do 6 prognoz indywidualnych) wynika, że odsetki prognoz kombinowanych o błędach nie większych od błędów prognoz przeciętnych są bardzo wysokie dla wszystkich metod z obu wariantów – przyjmują one wartości z przedziału od 70,2% dla metody VC1 do 100,0% dla metody mH1.

W obu wariantach najwyższe wartości odsetek otrzymano dla zaproponowanej modyfikacji metody Hellwiga – wynoszą one odpowiednio 100 i 98,2%. Oznacza to, że wszystkie lub prawie wszystkie prognozy kombinowane z wagami Hellwiga były bardziej (lub tylko w pojedynczych przypadkach tak samo) trafne niż prognozy kombinowane będące średnimi arytmetycznymi tych samych prognoz składowych.

Analizując informacje zawarte w tab. 5, można ponadto zauważyć, że w obu wariantach odsetki prognoz kombinowanych z wagami wyznaczonymi za pomocą metod BG i NERLS rosną wraz ze zwiększaniem liczby prognoz składowych w kombinacji. Dla $m = 5$ i $m = 6$ odsetki wynoszą 100%, co oznacza, że wszystkie prognozy kombinowane wyznaczone za pomocą tych metod charakteryzowały się nie mniejszą dokładnością niż prognozy przeciętne. W przypadku metody Hellwiga sytuacja taka miała miejsce dla wszystkich kombinacji w wariantcie W1 oraz dla kombinacji co

Tabela 4. Oceny błędów MAPE₄₉₋₆₀ prognoz kombinowanych (w %)

Fc	AM	VC1	BG1	NERLS1	mH1	VC2	BG2	NERLS2	mH2	Fc	AM	VC1	BG1	NERLS1	mH1	VC2	BG2	NERLS2	mH2
f_{12}	13,07	14,16	13,05	13,04	13,05	13,04	13,05	13,04	13,07	f_{246}	6,72	5,19	5,74	4,89	5,01	5,73	5,96	5,62	6,23
f_{13}	8,98	4,47	7,11	5,42	7,58	5,42	7,07	5,42	8,29	f_{256}	7,15	5,73	6,58	5,62	5,58	5,99	7,06	5,99	6,88
f_{14}	8,94	5,21	7,57	5,36	7,39	6,41	7,67	6,41	8,20	f_{245}	5,53	6,20	5,22	6,20	5,39	5,48	5,26	5,41	5,37
f_{15}	10,10	11,37	10,56	11,37	9,65	12,92	11,25	12,92	9,86	f_{346}	4,19	6,21	4,53	6,21	4,11	5,52	4,66	5,42	4,14
f_{16}	7,41	6,86	6,86	6,86	6,81	7,58	7,56	7,58	7,41	f_{356}	4,76	4,70	4,62	4,70	4,60	5,93	4,69	5,41	4,59
f_{23}	9,08	4,40	7,22	5,42	8,40	5,42	6,90	5,42	8,58	f_{456}	4,72	5,17	4,50	5,17	4,47	5,55	4,50	5,61	4,66
f_{24}	9,20	4,24	7,49	5,62	8,44	5,25	7,48	5,62	9,07	f_{2344}	8,90	7,69	7,14	5,42	8,18	5,42	7,12	5,42	8,67
f_{25}	9,88	10,59	10,16	10,59	9,50	12,19	10,60	12,19	10,02	f_{2335}	9,23	7,22	7,73	5,36	8,59	5,34	7,71	5,41	9,05
f_{26}	7,49	6,56	6,62	6,56	6,63	7,03	7,14	7,03	7,47	f_{1236}	8,07	7,49	6,76	5,32	7,25	5,49	6,93	5,42	7,99
f_{34}	5,30	6,25	5,31	5,42	5,30	5,42	5,32	5,42	5,30	f_{1245}	9,24	7,51	8,03	5,13	8,65	6,27	8,54	6,41	9,08
f_{35}	5,98	5,36	5,41	5,36	5,39	5,39	5,33	5,39	5,35	f_{1246}	8,05	7,73	6,91	5,87	7,26	5,64	7,23	6,29	7,98
f_{36}	4,16	5,32	4,31	5,32	4,12	5,51	4,45	5,42	4,13	f_{1256}	8,35	8,15	7,97	5,41	7,61	6,73	8,75	6,97	8,21
f_{45}	5,91	5,13	5,46	5,13	5,56	5,52	5,43	5,52	5,60	f_{1445}	7,33	5,90	6,24	5,36	6,73	5,61	6,41	5,41	7,20
f_{46}	3,99	4,81	4,11	4,81	3,83	5,88	4,21	5,62	3,85	f_{1346}	6,13	6,14	5,54	5,32	5,06	5,47	5,71	5,42	6,10
f_{56}	5,61	5,62	5,75	5,62	5,57	5,78	5,82	5,78	5,57	f_{1356}	6,55	3,50	5,85	4,70	6,18	5,86	6,09	5,41	6,44
f_{23}	10,32	5,42	8,10	5,42	8,99	5,42	7,98	5,42	9,49	f_{1456}	6,52	6,79	5,90	5,41	6,16	6,93	6,41	6,93	6,42
f_{24}	10,34	7,72	8,59	5,36	9,61	5,62	8,65	6,41	9,48	f_{2345}	7,16	5,88	6,14	5,36	6,67	5,41	6,15	5,41	7,03
f_{25}	10,83	12,82	11,15	11,37	10,11	12,83	11,60	12,86	9,11	f_{2446}	6,30	5,99	5,51	5,32	5,14	5,46	5,61	5,42	6,25
f_{26}	9,04	8,02	8,31	6,86	7,96	7,29	8,92	7,38	8,91	f_{2356}	6,59	4,68	5,74	4,70	5,27	5,25	5,76	5,41	6,41
f_{334}	7,66	5,42	6,42	5,42	5,78	5,42	6,43	5,42	6,96	f_{2456}	6,56	3,83	5,78	5,46	6,07	5,08	5,98	5,61	6,49
f_{335}	8,26	3,51	6,83	5,36	7,42	5,60	6,87	5,41	7,80	f_{3456}	4,76	6,48	4,67	4,70	4,60	5,41	4,72	5,41	4,64
f_{336}	6,58	4,80	5,76	5,32	5,26	5,47	5,98	5,42	6,11	f_{123445}	8,27	7,43	6,91	5,36	7,68	5,41	7,03	5,41	8,09
f_{445}	8,22	3,96	7,06	5,13	6,03	7,42	7,55	6,41	6,28	f_{123446}	7,50	7,68	6,30	5,32	6,83	5,46	6,43	5,42	7,33
f_{446}	6,53	5,09	5,81	5,09	5,50	6,29	6,12	6,29	6,43	f_{123356}	7,66	7,16	6,65	4,70	6,79	5,36	6,81	5,41	7,30
f_{456}	7,10	5,41	6,77	5,41	6,59	7,61	7,67	7,61	6,90	f_{124456}	7,64	7,53	6,77	5,41	7,04	6,11	7,27	6,22	7,29
f_{234}	7,77	5,42	6,34	5,42	7,07	5,42	6,28	5,42	7,66	f_{124456}	6,21	6,32	5,55	4,70	5,92	5,55	5,77	5,41	6,09
f_{235}	8,12	4,01	6,64	5,36	7,25	4,71	6,56	5,41	8,00	f_{234456}	6,24	5,98	5,47	4,70	5,25	5,38	5,56	5,41	5,97
f_{236}	6,70	5,76	5,70	5,32	5,70	5,50	5,85	5,42	6,15	f_{123456}	7,19	7,68	6,17	4,70	6,66	5,39	6,41	5,41	7,07
f_{245}	8,04	3,01	6,88	5,13	6,53	4,81	7,12	5,61	7,08										

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5. Odsetki prognoz kombinowanych o błędach nie większych od błędów średniej arytmetycznej prognoz składowych

Wariant	Metoda	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 2-6$
W1	VC1	53,3	80,0	80,0	66,7	0,0	70,2
	BG1	60,0	90,0	100,0	100,0	100,0	86,0
	NERLS1	60,0	80,0	100,0	100,0	100,0	82,5
	mH1	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
W2	VC2	53,3	75,0	86,7	100,0	100,0	75,4
	BG2	53,3	85,0	93,3	100,0	100,0	80,7
	NERLS2	53,3	75,0	86,7	100,0	100,0	75,4
	mH2	93,3	100,0	100,0	100,0	100,0	98,2

Źródło: opracowanie własne na podstawie tab. 4.

najmniej trzech prognoz indywidualnych w wariacie W2. Wynika stąd, że przy szacowaniu wag za pomocą metody wskaźników pojemności informacyjnej Hellwiga (mH) nieznacznie lepszym źródłem informacji niż teoretyczne wartości modeli indywidualnych były wyznaczone na ich podstawie prognozy indywidualne.

4. Podsumowanie

Przeprowadzone badania empiryczne potwierdziły przydatność zaproponowanej modyfikacji metody wskaźników pojemności informacyjnej Hellwiga do wyznaczania wag prognoz kombinowanych. W przeciwieństwie do metody średniej arytmetycznej, w której przyjmuje się jednakowe wagi dla wszystkich prognoz składowych, wartości wag oszacowanych za pomocą zaproponowanej metody były zróżnicowane, co wskazuje na zasadność jej stosowania. Ponadto wyznaczone na podstawie metody Hellwiga wagi zawsze (niezależnie od liczby prognoz składowych w kombinacji) należały do przedziału (0,1), natomiast dla zastosowanych metod złożonych (wariancji-kowariancji i regresji) w wielu przypadkach otrzymano wagi równe 0 i 1, w wyniku czego zbiór prognoz składowych ulegał zredukowaniu (w skrajnych sytuacjach nawet do tylko jednej prognozy indywidualnej).

Prognozy kombinowane z wagami wyznaczonymi na podstawie metody Hellwiga charakteryzowały się dużą dokładnością. W większości przypadków okazały się one bardziej trafne niż prognozy przeciętne. Ponadto spośród wszystkich zastosowanych metod najwyższe odsetki prognoz kombinowanych o błędach nie większych od błędów prognoz przeciętnych otrzymano dla zaproponowanej modyfikacji metody wskaźników pojemności informacyjnej Hellwiga.

Literatura

- Armstrong J., *Principles of Forecasting: a Handbook for Researchers and Practitioners*, Kluwer Academic Publishers, Boston 2001.
- Bates J., Granger C., *The combination of forecasts*, „Operational Research Quarterly” 1969, no 20.
- Granger C., Newbold P., *Experience with forecasting univariate time series and the combination of forecasts*, „Journal of the Royal Statistical Society, A” 1974, no 137.
- Granger C., Ramanathan R., *Improved methods of combining forecasts*, „Journal of Forecasting” 1984, no 3.
- Greszta M., Maciejewski W., *Kombinowanie prognoz gospodarki Polski*, „Gospodarka Narodowa” 2005, no 5-6.

THE APPLICATION OF HELLWIG'S METHOD TO THE ESTIMATION OF THE WEIGHTS OF COMBINED FORECASTS

Summary: In the paper, the author presents the application of Hellwig's method to the estimation of the weights of combined forecasts. The empirical example, in which individual and combined forecasts are determined for economic variable with seasonal fluctuations, is the illustration of theoretical considerations. The accuracy of combined forecasts with Hellwig's weights is compared with the accuracy of arithmetic mean of their component forecasts.

Keywords: individual forecasts, combined forecasts, indicators of information capacity, forecasts errors, forecasts weights.