PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 1 (1201) 2008
Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka

Joanna Dębicka

Edyta Mazurek

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

KOMERCYJNE UBEZPIECZENIE OD RYZYKA UTRATY PRACY – ANALIZA SKŁADKI NETTO NA POLSKIM RYNKU ZATRUDNIENIA*

1. Wstęp

Zasiłki dla bezrobotnych zazwyczaj mają charakter okresowego świadczenia o ustalonej wysokości, dlatego w krajach zachodnich oprócz obowiązkowych ubezpieczeń od ryzyka utraty pracy istnieją dobrowolne ubezpieczenia, które są uzupełnieniem systemu zabezpieczenia socjalnego bezrobotnych. W Polsce, zgodnie z ustawą o działalności ubezpieczeniowej (por. [20]), wyodrębnia się dwa działy ubezpieczeń: Dział I – „Ubezpieczenia na życie" oraz Dział II – „Pozostałe ubezpieczenia osobowe oraz ubezpieczenia majątkowe". Ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy należą do 16. kategorii ubezpieczeń Działu II nazywanej „Ubezpieczanie różnych ryzyk finansowych". Na terenie Polski działają firmy ubezpieczeniowe, które w swojej ofercie mają ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy (nazywane potocznie ubezpieczeniem od bezrobocia) przeznaczone dla osób zaciągających kredyt hipoteczny, budowlano-hipoteczny, konsumpcyjny, samochodowy bądź jako limit kredytowy na rachunku osobistym lub na karcie kredytowej. Przedmiotem takiego ubezpieczenia jest ryzyko utraty stałego źródła dochodu wskutek utraty pracy i brak możliwości spłaty rat kredytu lub w przypadku karty kredytowej spłat minimalnych należności wymaganych przez bank. W takich sytuacjach towarzystwo ubezpieczeniowe zobowiązuje się w imieniu ubezpieczonego spłacać należności

---

* Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w okresie IX 2003-XI 2005 jako projekt badawczy nr 0216/H02/2003/25.

według warunków określonych w polisie. Wysokość składki w tego typu ubezpieczeniach zależy od wysokości kredytu i średnich stałych dochodów kredytobiorcy uzyskanych w okresie ostatnich 6 miesięcy poprzedzających wykupienie ubezpieczenia.

Z badań (np. [2; 8; 13]) wynika, że ryzyko utraty pracy i szansa ponownego znalezienia zatrudnienia zależy nie tylko od wykonywanego zawodu, ale także od innych cech charakteryzujących ubezpieczonego, takich jak: wiek, płeć, wykształcenie, liczba dzieci na utrzymaniu itp. Zauważmy, że określenie składki ubezpieczeniowej na podstawie tego typu cech jest charakterystyczne dla ubezpieczeń życiowych należących do Działu I. Jednak istnieją pewne wyjątki od tej reguły. Mianowicie niektóre ubezpieczenia wypadkowe i zdrowotne (w szczególności ubezpieczenie na wypadek zgonu na skutek wypadku, ubezpieczenie w razie inwalidztwa na skutek wypadku lub choroby, ubezpieczenie od obrażeń cielesnych łącznie z utratą zdolności do zatrudnienia) formalnie zaliczane są do ubezpieczeń nieżyciowych (Dział II), lecz gdy stanowią uzupełnienie ubezpieczenia na życie, zaliczane są do ubezpieczeń na życie (Dział I). Wymienione ubezpieczenia zdrowotne i wypadkowe w zależności od sytuacji można traktować jak ubezpieczenia osobowe lub dodatkowe ubezpieczenia na życie, dlatego w artykule zaproponowano, aby w podobny sposób określić ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy. W takim przypadku sposób wyznaczania składki, a także ogólne warunki ubezpieczenia powinny być określane analogicznie jak w ubezpieczeniach zdrowotnych i wypadkowych.

W punkcie 2 przedstawiono koncepcję ubezpieczenia od bezrobocia oraz określono warunki ubezpieczenia reprezentowane przez zbiór parametrów Γ. Ponadto klasyczny model wielostanowy określony dla ubezpieczenia od bezrobocia został zaadaptowany do warunków reprezentowanych przez Γ. Następnie w punktach 3 i 4 zaproponowano sposób obliczania składek oparty na reprezentacji macierzowej uzyskanej w pracach [6] i [7]. W punkcie 5 przeanalizowano wysokości składki ubezpieczeniowej w przypadku indywidualnego i grupowego dodatkowego ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy. Obliczeń numerycznych dokonano na podstawie danych dotyczących osób zarejestrowanych jako bezrobotne w latach 2000-2004 zamieszkujących Jelenią Górę i powiat jeleniogórski.

2. Ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy

2.1. Ogólna koncepcja ubezpieczenia

Idea dobrowolnego ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy polega na tym, że osoba pracująca, chcąca dodatkowo (poza świadczeniami otrzymywanymi z Funduszu Pracy) zabezpieczyć się finansowo od skutków utraty pracy, może zawrzeć umowę z firmą ubezpieczeniową. W wyniku takiej umowy ubezpieczyciel, w zamian za otrzymywane składki, zobowiązuje się w okresie, kiedy ubezpieczony będzie bezrobotny, wypłacać miesięcznie ustalone kwoty osobie ubezpieczonej.

Ważnym punktem warunków ogólnych ubezpieczenia jest zdefiniowanie sytuacji, w jakiej następuje wypłata świadczenia ubezpieczeniowego. Może być ona określona analogicznie jak w ubezpieczeniach zabezpieczających spłatę kredytu, gdzie ubezpieczony, który w czasie trwania kredytu utraci źródło stałego dochodu, uzyska status osoby bezrobotnej oraz prawo do zasiłku dla bezrobotnych, otrzymuje świadczenie pozwalające na spłatę kredytu w okresie poszukiwania pracy. Wypowiedzenie umowy o pracę następuje zazwyczaj w ostatnim dniu miesiąca, więc ubezpieczony ma status bezrobotnego, gdy nie ma pracy na koniec miesiąca lub umowa o pracę kończy się ostatniego dnia miesiąca, a ubezpieczony nie podpisał nowej umowy o pracę z pierwszym dniem następnego miesiąca. Dodatkowo, jeżeli osoba ubezpieczona ma prawo do zasiłku dla bezrobotnych, to jego wypłaty dokonywane są na końcu każdego miesiąca, podczas trwania okresu bezrobocia, jednak nie dłużej niż ustalony przez Urząd Pracy czas. W oczywisty sposób oznacza to także, iż ubezpieczony żyje. W przeciwnym razie (tzn. gdy ubezpieczony pracuje lub umarł w ostatnim miesiącu) firma ubezpieczeniowa nic nie wypłaca.

Podobnie jak w ubezpieczeniach na życie oraz ubezpieczeniach zdrowotnych i wypadkowych, wypłata świadczenia możliwa jest tylko wtedy, gdy ubezpieczony nie przyczynił się świadomie do utraty pracy (np. został zwolniony z pracy za porozumieniem stron lub z jego winy, brał udział w strajku lub zamieszkach, wyjechał poza obszar Unii Europejskiej na dłużej niż 90 dni). Do warunków ubezpieczenia mogą być wprowadzone różnego rodzaju wykluczenia, w wyniku których ubezpieczyciel nie będzie wypłacał świadczenia. Do takich wykluczeń mogą należeć np. sytuacje, w których ubezpieczony: stracił pracę w wyniku zwolnień grupowych lub realizacji planu restrukturyzacji zakładu; będzie wykonywał pracę zarobkową mając status bezrobotnego; utraci pracę w wyniku katastrofy, wojny itp., ponadto uzyskał prawo do emerytury, renty lub zasiłku przedemerytalnego.

Zakładamy, że wysokość świadczenia w ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy jest ustalana przez ubezpieczonego. Renta miesięczna może być równa miesięcznemu zarobkowi ubezpieczonego lub jego części. Ponadto wysokości świadczeń mogą się różnić w kolejnych miesiącach trwania bezrobocia (renta malejąca lub rosnąca).

Umowa ubezpieczenia jest zawierana na okres jednego roku (12 miesięcy). Po upływie tego czasu może być odnowiona.

W przypadku ubezpieczeń kredytów, gdy ubezpieczony podejmuje pracę i ponownie utraci źródło dochodu, może skorzystać z kolejnych 12 świadczeń miesięcznych, jeżeli przez okres co najmniej 6 miesięcy jest nieprzerwanie zatrudniony (lub prowadzi działalność gospodarczą) oraz w tym czasie regularnie opłaca składki i raty kredytu. W proponowanym dobrowolnym ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy zakładamy, że w czasie trwania okresu ubezpieczenia ubezpieczony ma prawo do powtórnego świadczenia, jeżeli ponownie uzyska status bezrobotnego niezależnie od tego, ile miesięcy trwał okres aktywności zawodowej między okresami braku zatrudnienia.

2.2. Określenie warunków i przestrzeni stanów w ubezpieczeniu

Rozważmy ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy, w którym ubezpieczyciel wypłaca rentę, gdy ubezpieczony ma status bezrobotnego. Renta płacona jest zgodnie z warunkami umowy ubezpieczenia (do momentu, gdy ubezpieczony nie znajdzie pracy albo przez ustalony w polisie czas, np. do końca okresu ubezpieczenia lub przez 3, 6 albo 9 miesięcy). Natomiast ubezpieczony jest zobowiązany do opłaty składek. Częstotliwość opłaty składek zależy od warunków umowy ubezpieczenia. Rozpatrzone zostaną dwie możliwości: składka jednorazowa płatna w momencie zawarcia ubezpieczenia i składka okresowa płacona w równych odstępach czasu przez ubezpieczonego podczas trwania umowy ubezpieczenia, gdy jest on zatrudniony. Jak w każdym ubezpieczeniu, świadczenie wypłacane jest jedynie wtedy, gdy spełnione są warunki ogólne i szczegółowe ubezpieczenia (które są integralną częścią polisy ubezpieczeniowej). Warunki te zostaną określone analogicznie jak w przypadku ubezpieczeń zdrowotnych (np. [10; 17; 19]).

Niech (n_1, n_2) oznacza okres ubezpieczenia, w którym zajście zdarzenia ubezpieczeniowego powoduje rozpoczęcie wypłacania renty. Symbolem n_1 oznacza się tzw. czas karencji liczony od początku okresu ubezpieczenia. W ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy jedynie w szczególnych przypadkach można przyjąć, że $n_1 \neq 0$. Może to być np. liczba brakujących miesięcy zatrudnienia wymagana do uzyskania prawa do zasiłku w razie utraty pracy. Natomiast w przypadku ubezpieczeń terminowych najczęściej przyjmuje się, że $n_2 = n$, gdzie n oznacza długość okresu ubezpieczenia (w tym wypadku n = 12 miesięcy).

Przez f oznacza się okres odroczenia (liczony od momentu uzyskania przez ubezpieczonego statusu bezrobotnego), który określa minimalny okres, w ciągu którego ubezpieczony jest bezrobotny, poprzedzający wypłatę pierwszego świadczenia. W ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy $f = 0$ oznacza, że świadczenia wypłacane są niezwłocznie po uzyskaniu przez ubezpieczonego statusu bezrobotnego. Innym wariantem może być przyjęcie, że f jest równe okresowi otrzymywania zasiłku dla bezrobotnych, np. 6 lub 12 miesięcy (w zależności od cech charakteryzujących ubezpieczonego, jego sytuacji rodzinnej oraz regionu Polski). Wtedy dobrowolne ubezpieczenie umożliwia ubezpieczonemu uzyskiwanie środków do życia przez okres dłuższy niż świadczenia gwarantowane przez Fundusz Pracy.

Maksymalny okres płacenia renty przez ubezpieczyciela (liczony od momentu pierwszej wypłaconej renty) oznaczany jest przez s. W ubezpieczeniach od ryzyka utraty pracy najczęściej przyjmuje się, że s = 12 lub 6 miesięcy.

W niektórych ubezpieczeniach istnieje dodatkowa klauzula zgodnie, z którą renta może być wypłacana nie dłużej niż do osiągnięcia przez ubezpieczonego określonego wieku. Niech więc r oznacza moment wstrzymania wypłat renty (liczony od początku okresu ubezpieczenia). Na przykład renta może być płacona jedynie do momentu osiągnięcia przez ubezpieczonego wieku emerytalnego. W tej sytuacji, jeżeli przyjmiemy, że r_0 jest wiekiem emerytalnym, a x wiekiem osoby przystępującej do ubezpieczenia, to mamy $r = \max\{(r_0 - x)\cdot 12, 0\}$. Jeżeli $x > r_0$, to $r = 0$, co automatycznie oznacza, że takie ubezpieczenie nie może być zawarte. Często w ubezpieczeniach terminowych warunki ubezpieczenia umożliwiają wypłatę renty jedynie do końca okresu ubezpieczenia, wtedy $r = n$. Ponadto, aby sensowne było rozważanie ubezpieczenia, r powinno być tak dobrane, aby $r > f$ (gdyż w wyniku umowy ubezpieczenia niemożliwa by była wypłata świadczenia) oraz $r > n_2$ (gdyż okres odpowiedzialności ubezpieczenia kończyłby się wcześniej, niż przewidują to warunki umowy).

Przyjmuje się (por. [10]), że warunki ubezpieczenia reprezentowane są przez uporządkowaną piątkę parametrów i oznaczane przez $\Gamma = [n_1, n_2, f, s, r]$. Parametry n_1 oraz f ograniczają z dołu, a parametry n_2, s, r ograniczają z góry długość okresu, w którym ubezpieczony może pobierać rentę w czasie pozostawania bez pracy. Jeżeli $n_1 = f = 0$ oraz $n_2 = s = r = \infty$, to renta może być wypłacana, począwszy od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia aż do śmierci ubezpieczonego (w razie utraty zatrudnienia przez ubezpieczonego). W przypadku ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy wypłacanie świadczenia do śmierci ubezpieczonego jest jedynie hipotetyczną możliwością, w praktyce nie stosowaną. Dlatego w dalszych rozważaniach uwzględniane będą ubezpieczenia, dla których $s < \infty$ i / lub $r < \infty$.

W tabeli 1 określone zostały warunki ubezpieczenia Γ dla wybranych ubezpieczeń od ryzyka utraty pracy. Dla tych przykładowych ubezpieczeń w punkcie 5 wyznaczone zostały składki netto.

Tabela 1. Γ dla przykładowych ubezpieczeń od ryzyka utraty pracy

Lp.	Opis ogólnych warunków ubezpieczenia	$\Gamma = [n_1, n_2, f, s, r]$
1	Terminowe 12-miesięczne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy, w którym renta płacona jest w czasie okresu bezrobocia przez cały okres jego trwania, jednak nie dłużej niż do końca okresu ubezpieczenia.	$[0, 12, 0, \infty, 12]$
2	Terminowe 12-miesięczne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy. Warunki ubezpieczenia umożliwiają ubezpieczonemu pobranie maksymalnie 12 rent w czasie jednego okresu bezrobocia. Ponadto renty nie mogą być wypłacone ubezpieczonemu, jeżeli osiągnie wiek emerytalny.	dla mężczyzn: $[0, 12, 0, 12, \max\{(65-x)\cdot 12, 0\}]$ dla kobiet: $[0, 12, 0, 12, \max\{(60-x)\cdot 12, 0\}]$
3	Terminowe 12-miesięczne ubezpieczenie od ryzyka utraty pracy. Warunki ubezpieczenia umożliwiają ubezpieczonemu pobranie maksymalnie 6 rent w czasie jednego okresu bezrobocia. Pierwsza renta zostaje wypłacona po skończeniu pobierania przez ubezpieczonego zasiłku dla bezrobotnych, który przysługuje mu przez okres 6 miesięcy. Ponadto renty nie mogą być wypłacone ubezpieczonemu, jeżeli osiągnie wiek emerytalny.	dla mężczyzn: $[0, 12, 6, 6, \max\{(65-x)\cdot 12, 0\}]$ dla kobiet: $[0, 12, 6, 6, \max\{(60-x)\cdot 12, 0\}]$

Źródło: opracowanie własne.

W teorii ubezpieczeń wielostanowych (np. [10; 17; 19]) każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy umowa ubezpieczenia (np. ubezpieczony stracił pracę), odpowiada stan, w jakim znalazł się ubezpieczony. Zbiór wszystkich N możliwych stanów nazywa się przestrzenią stanów i oznacza się przez $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Ponadto para (i, j), gdzie $i \neq j$ oraz $i, j \in S$, oznacza bezpośrednie przejście ze stanu i do stanu j, natomiast T jest zbiorem wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami. Wówczas para (S, T), opisująca wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w życiu ubezpieczonego w okresie objętym umową ubezpieczenia, nazywana jest modelem wielostanowym. W ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy model wielostanowy jest postaci

$$(S, T) = (\{1, 2, 3\}, \{(1,2); (2,1); (1,3); (2,3)\}),$$

gdzie elementy przestrzeni stanów S określone są następująco:

1 – stan oznaczający, że ubezpieczony żyje i pracuje,

2 – stan oznaczający przypadek, że ubezpieczony żyje i nie pracuje,

3 – stan oznaczający śmierć ubezpieczonego.

Analogiczny opis takiego ubezpieczenia wraz z graficzną ilustracją przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi znaleźć można w [6; 7; 16; 17].

Przez $X(t)$ oznaczać będziemy stan polisy w chwili t trwania ubezpieczenia, gdzie argument t oznacza t-ty miesiąc trwania ubezpieczenia. Przyjmujemy, że $\{X(t): t = 1, 2, 3, \dots\}$ jest dyskretnym procesem stochastycznym, dla którego zakładamy, że $X(0) = 1$ (tzn. w momencie przystąpienia do ubezpieczenia, ubezpieczony pracuje). Ponadto przyjmuje się, że $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym łańcuchem Markowa (por. [11; 12; 15; 21; 22; 23]).

2.3. Przepływy pieniężne

W wyniku realizacji umowy ubezpieczenia powstają określone płatności dokonywane przez ubezpieczonego (składki) i ubezpieczyciela (świadczenia). W czasie trwania ubezpiecznia płatności te tworzą przepływy pienieżne między ubezpieczycielem a ubezpieczonym.

Zauważmy, że ze względu na specyfikę ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy w analizie przepływów pienieżnych muszą być uwzględnione takie sytuacje, w których wypłata świadczeń rentowych może być dokonywana po upływie okresu ubezpieczenia n. Ponadto w czasie pobytu procesu $\{X(t)\}$ w stanie 2 świadczenia nie muszą być wypłacane ze względu na okres odroczenia pierwszej wypłaty, co oznacza, że wypłata świadczenia zależy od czasu spędzonego przez proces $\{X(t)\}$ w stanie 2. Wszystkie tego typu sytuacje reprezentowane są przez Γ i muszą być uwzględnione w analizie przepływów wynikających z realizacji umowy ubezpieczenia.

Świadczenie rentowe w ubezpieczeniu od ryzyka utraty pracy wypłacane jest wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są wszystkie warunki ubezpieczenia, niech więc n^{Γ} oznacza *okres przepływów pieniężnych wynikających z warunków umowy ubezpieczenia* Γ. Zauważmy, że ostatnim momentem trwania umowy ubezpieczenia, w którym utrata pracy umożliwia rozpoczęcie wypłaty renty, jest moment n_2. Wtedy firma ubezpieczeniowa po odczekaniu okresu odroczenia f będzie wypłacać rentę s razy. Uwzględniając moment wstrzymania wypłat r, otrzymujemy

$$n^{\Gamma} = \min\{n_2 + s + f - 1, r\}.$$

W celu uwzględnienia tego, że moment wypłaty świadczenia z tytułu utraty pracy zależy od czasu pozostawania bez pracy, zaproponowano odpowiednie rozszerzenie przestrzeni stanów S. Zauważmy, że w warunkach ubezpieczenia Γ z realizacją świadczeń związany jest parametr f odpowiadający za czas odroczenia pierwszej wypłaty oraz parametr s określający maksymalną liczbę wypłat. Ponadto liczba wypłat jest ograniczana przez czas zatrzymania r oraz maksymalny moment odpowiedzialności ubezpieczyciela n_2.

Sposób rozszerzenia przestrzeni stanów jest analogiczny do sposobu stosowanego w przypadku ubezpieczeń zdrowotnych (por. [1; 10]) oraz ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy opisanego w [7]. W tym przypadku rozszerzenie przestrzeni stanów polega na podzieleniu stanu 2 na $f + s + 1$ stanów. Pierwszych f stanów $2_f^{(1)}$, $2_f^{(2)}$, ..., $2_f^{(f)}$ odpowiada liczbie miesięcy, jakie muszą upłynąć, zanim zostanie wypłacone pierwsze świadczenie rentowe. Kolejne s stanów $2_s^{(1)}$, $2_s^{(2)}$, ..., $2_s^{(s)}$ odpowiada liczbie miesięcy, w których mogą być wypłacane renty. Ostatni stan $2_{>f+s}$ oznacza, że ubezpieczony jest bezrobotny przez okres dłuższy niż $f+s$ miesięcy. W rezultacie, zamiast stanu 2 powstaje $f+s+1$ następujących stanów $2_f^{(1)}$, $2_f^{(2)}$, ..., $2_f^{(f)}$, $2_s^{(1)}$, $2_s^{(2)}$, ..., $2_s^{(s)}$, $2_{>f+s}$. Wtedy rozszerzona ($N+s+f$-elementowa) przestrzeń stanów jest postaci

$$S^R = \left\{1, 2^{(1)}, 2^{(2)}, \ldots, 2^{(f+s+1)}, 3, \ldots, N\right\},$$

gdzie

$$2^{(i)} = \begin{cases} 2_f^{(i)}, & \text{dla } 1 \le i \le f, \\ 2_s^{(i-f)}, & \text{dla } f < i \le f+s, \\ 2_{>f+s}, & \text{dla } i = f+s+1. \end{cases}$$

Zauważmy, że liczba stanów, na jakie został podzielony stan 2, jest ograniczona z góry przez parametry r oraz n_2. Wobec tego *przestrzeń stanów* S^{Γ} *uwzględniająca warunki umowy ubezpieczenia* Γ jest postaci

$$S^{\Gamma} = \left\{1, 2^{(1)}, 2^{(2)}, \ldots, 2^{(\gamma)}, 3, \ldots, N\right\},$$

gdzie

$$\gamma = \begin{cases} \min\{f+s, r\}, & \text{gdy } f+s \geq n_2, \\ \min\{f+s, r\}+1, & \text{gdy } f+s < n_2. \end{cases} \tag{1}$$

Liczebność zbioru S^{Γ} wynosi $N^{\Gamma} = N - 1 + \gamma$, gdzie γ dana jest wzorem (1).

W przypadku ubezpieczenia opisanego w punkcie 1 tab. 1 otrzymujemy: $N^{\Gamma} = n^{[0, 12, 0, \infty, 12]} = 12$ oraz $N^{\Gamma} = n^{[0, 12, 0, \infty, 12]} = 14$. Natomiast w przypadku pozostałych ubezpieczeń opisanych w tab. 1 n^{Γ} oraz N^{Γ} dla mężczyzn są odpowiednio równe

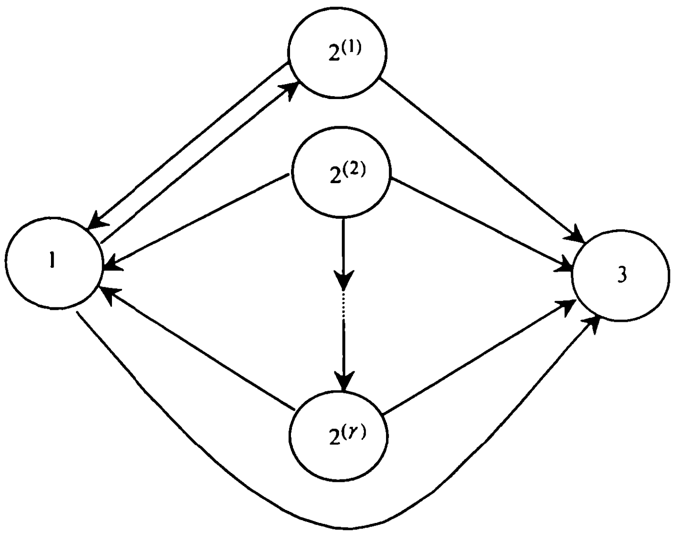
$$n^{\Gamma} = \begin{cases} 23, & \text{dla } x < 64, \\ 12, & \text{dla } x = 64, \\ 0, & \text{dla } x > 64, \end{cases} \text{ oraz } N^{\Gamma} = \begin{cases} 14, & \text{dla } x \leq 64, \\ 0, & \text{dla } x > 64 \end{cases}$$

i analogicznie dla kobiet

$$n^{\Gamma} = \begin{cases} 23, & \text{dla } x < 59, \\ 12, & \text{dla } x = 59, \\ 0, & \text{dla } x > 59, \end{cases} \text{ oraz } N^{\Gamma} = \begin{cases} 14, & \text{dla } x \leq 59, \\ 0, & \text{dla } x > 59. \end{cases}$$

Zmiana przestrzeni stanów powoduje zmianę zbioru T na T^{Γ}.

Ilustracją graficzną rozszerzonej przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi dla ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy, w którym warunki określone są przez Γ jest rys. 1.



Rys. 1. Schemat $\left(S^{\Gamma}, T^{\Gamma}\right)$ dla ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy

Z nową przestrzenią stanów związane jest zdefiniowanie nowego procesu $\left\{X^{\Gamma}(t)\right\}$, który przybiera wartości z przestrzeni stanów S^{Γ}. O procesie $\left\{X^{\Gamma}(t)\right\}$ zakłada się, że jest niejednorodnym łańcuchem Markowa.

Zauważmy, że analiza przepływów pieniężnych wynikających z umowy ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy, której warunki zostały określone przez Γ wymaga, aby zamiast rozważania składek i swiadczeń w modelu (S, T) przez okres n, analizować przepływy pieniężne w modelu wielostanowym $\left(S^{\Gamma}, T^{\Gamma}\right)$ przez okres n^{Γ}.

3. Zaktualizowane łączne przepływy pieniężne

3.1. Postać macierzowa momentów Z

Ocena wysokości przyszłego świadczenia, które będzie musiał wypłacić ubezpieczyciel z tytułu sprzedanego ubezpieczenia, oraz określenie tzw. dodatku bezpieczeństwa (inaczej dodatku na ryzyko, czyli części składki przeznaczonej na pokrycie niekorzystnych odchyleń w przebiegu zdarzeń losowych) są niezbędne do wyznaczenia składki ubezpieczeniowej netto. W tym celu konieczna jest znajomość momentów Z zaktualizowanych łącznych przyszłych przepływów pieniężnych powstałych w wyniku realizacji umowy ubezpieczenia.

Do obliczenia momentów Z wykorzystana zostanie macierzowa reprezentacja modelu ubezpieczenia wielostanowego wprowadzona w pracach [6] i [7], której zastosowanie stało się możliwe po wprowadzeniu modelu wielostanowego $\left(S^{\Gamma}, T^{\Gamma}\right)$ oraz n^{Γ}.

Niech l oznacza l-tą osobę w grupie liczącej L osób, której odpowiada proces $\{X_l(t)\}$. Przy założeniu, że zmienne losowe X_l dla $l = 1, 2, 3, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie oraz funkcja dyskontująca $\upsilon(k)$ jest ustalona, momenty zaktualizowanych łącznych przyszłych przepływów pieniężnych są następującej postaci (por. [7]):

$$\mathrm{E}(Z) = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \operatorname{Diag}\left(\mathbf{C}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S}, \tag{2}$$

$$\mathrm{E}\left(Z^2\right) = \sum_{k_1=0}^{n^{\Gamma}} \sum_{k_2=0}^{n^{\Gamma}} \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_{k_1+1} \mathbf{I}_{k_1+1}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}\mathbf{P}(k_1, k_2) \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_{k_2+1} \mathbf{I}_{k_2+1}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}. \tag{3}$$

W przypadku stopy procentowej modelowanej przez proces stochastyczny, zakłada się, że $Y(t)$ oraz $X_1, X_2, \ldots, X_L$ spełniają następujące założenia:

Z1. Zmienne losowe X_l dla $l = 1, 2, 3, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie.

Z2. Pod warunkiem, że znane są wartości procesu stopy procentowej $Y(t)$ dla $t = 0\, 1, \ldots, n^{\Gamma}$, zmienne losowe Z_l są niezależne o jednakowym rozkładzie.

Z3. Zmienne losowe X_l ($l = 1, 2, 3, \ldots$) oraz $Y(t)$ są niezależne.

Z4. Wszystkie momenty losowej funkcji dyskontującej $e^{-Y(t)}$ są skończone.

Wtedy momenty zaktualizowanych łącznych przyszłych przepływów pieniężnych dane są następującymi wzorami (por. [6]):

$$\mathrm{E}(Z) = \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \operatorname{Diag}\left(\mathbf{C}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S}, \tag{4}$$

$$\mathrm{E}\left(Z^2\right) = \sum_{k_1=0}^{n^{\Gamma}} \sum_{k_2=0}^{n^{\Gamma}} \mathbf{I}_{k_2+1}^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_{k_1+1} \mathbf{I}_{k_1+1}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}\mathbf{P}(k_1, k_2) \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_{k_2+1}, \tag{5}$$

$$\mathrm{E}(Z_1 Z_2) = \left(\operatorname{Diag}\left(\mathbf{C}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S}\right)^{\mathrm{T}} \Delta \left(\operatorname{Diag}\left(\mathbf{C}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S}\right). \tag{6}$$

We wzorach (2)-(6) macierz $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{\left(n^{\Gamma}+1\right) \times N^{\Gamma}}$ opisuje wszystkie możliwe przepływy pieniężne powstające w okresie trwania umowy ubezpieczenia (por. punkt 3.2). Natomiast wektor $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{\left(n^{\Gamma}+1\right)}$ oraz macierze $\mathbf{M}$ i $\Delta \in \mathbf{R}^{\left(n^{\Gamma}+1\right) \times \left(n^{\Gamma}+1\right)}$ związane są ze stopą procentową (por. punkt 3.4). Ponadto macierze $\mathbf{P}(k_1, k_2) \in \mathbf{R}^{(n^{\Gamma}+1)\times(n^{\Gamma}+1)}$ oraz $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{(n^{\Gamma}+1)\times N^{\Gamma}}$ określane są na podstawie rozkładu procesu $\{X(t)\}$ (por. punkt 3.3). Pozostałe wektory są wielkościami pomocniczymi, mianowicie $\mathbf{S} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n^{\Gamma}+1}$ oraz $\mathbf{I}_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n^{\Gamma}+1}$, a Diag(**B**) jest macierzą diagonalną, której elementami przekątnej, są elementy przekątnej macierzy **B**.

W następnych punktach tego paragrafu przedstawione zostały postacie macierzy (niezbędnych do wyznaczenia momentów *Z*) w przypadku ubezpieczeń od bezrobocia opisanych w tab. 1, które są przedmiotem analizy numerycznej w punkcie 5.

Rozważmy ubezpieczenie ryzyka utraty pracy, w którym a_k jest rentą płaconą za okres $[k, k+1)$ $(k = n_1, n_1 + 1, \ldots, n^{\Gamma} - 1)$ jeżeli ubezpieczony w momencie $k + 1$ jest bezrobotny.

Rozpatrywać będziemy osoby, które mają jeszcze ponad rok do wieku emerytalnego (tzn. $x < 64$ dla mężczyzn oraz $x < 59$ dla kobiet).

3.2. Przepływy pieniężne

Przepływy pieniężne w ubezpieczeniu określone są w macierzy **C**, której element $c_{ki} = c_i(k)$ oznacza przepływ pieniężny realizowany w momencie k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n^{\Gamma})$ jeżeli proces $\{X^{\Gamma}(t)\}$ jest w tym momencie w stanie i $(i = 1, 2, \ldots, N^{\Gamma})$.

Postacie macierzy **C**, zawierające jedynie świadczenia oznaczane są przez $\mathbf{C}_b$. Niech dla przykładowych ubezpieczeń określonych w tab. 1 macierze $\mathbf{C}_b$ oznaczone będą odpowiednio $\mathbf{C}_b^1$, $\mathbf{C}_b^2$, $\mathbf{C}_b^3$. Wówczas

$$\mathbf{C}_b^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_9 & a_{10} & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_9 & a_{10} & a_{11} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{13\times 14},$$

$$
\mathbf{C}_b^2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_9 & a_{10} & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_9 & a_{10} & a_{11} & 0 \\
0 & 0 & a_1 & \dots & a_9 & a_{10} & a_{11} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_9 & a_{10} & a_{11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{10} & a_{11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{11} & 0
\end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{24\times 14}.
$$

Macierz $\mathbf{C}_b^3$ ma taki sam rozmiar jak macierz $\mathbf{C}_b^2$, różni się od macierzy $\mathbf{C}_b^2$ jedynie tym, że w kolumnach od 2 do 7 występują same zera, tzn. $a_0 = a_1 = a_2 = = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, co jest związane z okresem odroczenia f.

3.3. Struktura probabilistyczna

Proces $\left\{X^{\Gamma}(t)\right\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa, więc macierze $\mathbf{D}$ oraz $\mathbf{P}(k_1, k_2)$ można zapisać przy użyciu wektora rozkładu początkowego $\mathbf{P}(0) = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{1\times N^{\Gamma}}$ oraz ciągu macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}(0)$, $\mathbf{Q}(1)$, ..., $\mathbf{Q}\left(n^{\Gamma} - 1\right)$, gdzie $\mathbf{Q}(k) = \left(q_{ij}(k)\right)_{i,\,j=1}^{N^{\Gamma}}$ a

$$
q_{ij}(k) = \mathrm{P}\left(X^{\Gamma}(k+1) = j \,\middle|\, X^{\Gamma}(k) = i\right).
$$

Zależności między macierzami opisane są m.in. w pracach [6; 7].

Zauważmy, że we wszystkich przykładach opisanych w tab. 1, stan 2 został podzielony dokładnie na 12 stanów. Oznacza to, że macierze prawdopodobieństw przejść dla procesu $\left\{X^{\Gamma}(t)\right\}$ są analogiczne do tych określonych dla procesu $\left\{X^{R}(t)\right\}$ zdefiniowanego w pracy [7].

W przykładach numerycznych w punkcie 5 do estymowania prawdopodobieństw $q_{ij}(k)$ wykorzystane zostały modele logitowe opisane w [8]. W przypadku niektórych ubezpieczeń opisanych w tab. 1 mamy $n^{\Gamma} + 1 = 24$, więc ciąg macierzy prawdopodobieństw przejść powinien być estymowany na podstawie danych pochodzących z dwóch kolejnych lat. Na podstawie danych z wcześniejszego roku estymuje się macierze $\mathbf{Q}(0)$, $\mathbf{Q}(1)$, ..., $\mathbf{Q}(11)$, a dane z następnego roku służą do określania macierzy $\mathbf{Q}(12)$, $\mathbf{Q}(13)$, ..., $\mathbf{Q}(23)$. W przykładach numerycznych w punkcie 4 wykorzystane zostały prawdopodobieństwa określone w [14], a estymowane na podstawie danych dotyczących osób zarejestrowanych jako bezrobotne w Jeleniej Górze i powiecie jeleniogórskim w latach 2000-2004.

3.4. Stopa procentowa

W przypadku stałej stopy procentowej dany jest wektor funkcji dyskontującej $\mathbf{V} = \left(\upsilon(0), \upsilon(1), \ldots, \upsilon\left(n^{\Gamma}\right)\right) \in \mathbf{R}^{\left(n^{\Gamma}+1\right)}$, gdzie $\upsilon(k) = \upsilon^{k} = (1+i)^{-k}$, natomiast i oznacza miesięczną stopę procentową.

W przykładach numerycznych przyjęto, że $i = 0{,}003274$. Daje to roczną stopę procentową w wysokości 4%.

Jeżeli $Y(t)$ oznacza stopę procentową w okresie $[0, t]$, to wektor funkcji dyskontującej jest postaci $\mathbf{Y} = \left(e^{-Y(0)}, e^{-Y(1)}, \ldots, e^{-Y\left(n^{\Gamma}\right)}\right) \in \mathbf{R}^{\left(n^{\Gamma}+1\right)}$. Wtedy wektor wartości oczekiwanych ma postać $\mathbf{M} = \left(\mathrm{E}\left(e^{-Y(0)}\right), \mathrm{E}\left(e^{-Y(1)}\right), \ldots, \mathrm{E}\left(e^{-Y\left(n^{\Gamma}\right)}\right)\right) \in$ $\in \mathbf{R}^{\left(n^{\Gamma}+1\right)}$, macierz mieszanych momentów oznaczona jest przez $\Delta = \left(\delta_{ij}\right)_{i,\,j=1}^{n^{\Gamma}+1}$, gdzie $\delta_{ij} = \mathrm{E}\left(e^{-Y(i)}e^{-Y(j)}\right)$, a macierz kowariancji przez $\mathbf{R} = \left(r_{ij}\right)_{i,\,j=1}^{n^{\Gamma}+1}$, gdzie $r_{ij} = \mathrm{Cov}\left(e^{-Y(i)}, e^{-Y(j)}\right)$.

W przykładach numerycznych założono, że $Y(t)$ jest gausowskim procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach i dodatnim dryfie (por. np. [3; 5; 18]). Ponadto przyjęto, że $\mu_R = \mathrm{E}(Y(12))$ oznacza średnią roczną stopę procentową, a $\sigma_R = \sqrt{\mathrm{Var}(Y(12))}$ zmienność opisującą fluktuacje stopy procentowej wokół μ_R. Rozpatrzone zostały dwa (stosowane w analizie ubezpieczeń) specjalne przypadki procesu $Y(t)$ przy założeniu, że $\mu_R = 0{,}04$ oraz $\sigma_R = \sqrt{0{,}005}$. Pierwszy z nich zakłada, że $Y(t)$ modelowany jest przez proces Wienera $W(t)$ ($W(0) = 0$, $\mathrm{Var}(W(t)) = t$), a wtedy (por. [5])

$$Y(t) = Y_W(t) = 0{,}006455W(t) + 0{,}003333t. \tag{7}$$

W drugim przypadku założono, że $Y(t)$ modelowany jest przez proces Orsteina-Uhlenbecka, a wówczas (por. [5])

$$Y(t) = Y_{OU}(t) = 0{,}001895\int_0^t U(s)ds + 0{,}003333t, \tag{8}$$

gdzie $\{U(s), s \geq 0\}$ jest procesem Orsteina-Uhlenbecka z funkcją kowariancji $R(t) = e^{-0{,}008333t}$.

Określenie elementów macierzy **M**, **Δ** oraz **R** można znaleźć w [5] w Lemacie 1 dla $Y_W(t)$ oraz w Lemacie 2 dla $Y_{OU}(t)$.

4. Składka netto i jej zmienność

Zgodnie z zasadami matematyki aktuarialnej (por. [4; 9; 17]) składkę netto wyznacza się w taki sposób, aby spełnione było *równanie wartości składek netto*. Zgodnie z tym równaniem, korzystając z zapisu macierzowego, jednorazową składkę netto π dla danej umowy można zapisać jako (por. [6; 7])

$$\pi = \mathrm{E}(Z_b) = \begin{cases} \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Diag}\left(\mathbf{C}_b\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S} \text{ dla stałej stopy procentowej,} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Diag}\left(\mathbf{C}_b\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S} \text{ dla stochastycznej stopy procentowej,} \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{C}_b$ jest macierzą przepływów pieniężnych uwzględniającą jedynie świadczenia ubezpieczeniowe.

Innym sposobem wyznaczania jednorazowej składki netto jest zasada odchylenia standardowego

$$\pi = \mathrm{E}(Z_b) + \alpha\sqrt{\mathrm{Var}(Z_b)}, \tag{9}$$

gdzie Z_b oznacza zaktualizowaną wartość świadczeń, a α pewną stałą. Ponadto $\mathrm{Var}(Z_b) = \mathrm{E}(Z_b^2) - \mathrm{E}^2(Z_b)$ a momenty zmiennej losowej Z_b liczone są przy założeniu, że $\mathbf{C} = \mathbf{C}_b$ ze wzorów (2)-(3) w przypadku stałej stopy procentowej, oraz ze wzorów (4)-(5) w przypadku, gdy stopa procentowa modelowana jest przez proces stochastyczny. We wzorze (9) wyrażenie $\alpha\sqrt{\mathrm{Var}(Z_b)}$ nazywane jest dodatkiem bezpieczeństwa (inaczej dodatkiem na ryzyko), służącym do zgromadzenia funduszu przeznaczonego na pokrycie losowych odchyleń od przebiegu ubezpieczenia.

Niech p oznacza wysokość okresowej składki netto płatnej z góry (np. na początku każdego miesiąca) przez n_2 miesięcy. Oznacza to, że ubezpieczony płaci składkę o stałej wysokości do końca okresu odpowiedzialności ubezpieczyciela.

W przypadku stałej stopy procentowej składkę okresową p wyznacza się z następującej równości (por. [7]):

$$p = \frac{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Diag}\left(\mathbf{C}_b\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S}}{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{I} - \sum_{k=n_2}^{n^\Gamma}\mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{D}\mathbf{I}_1^{N^\Gamma}}, \tag{10}$$

gdzie $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{\left(n^\Gamma+1\right)\times\left(n^\Gamma+1\right)}$ jest macierzą identycznościową i $\mathbf{I}_1^{N^\Gamma} = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{N^\Gamma+1}$. W przypadku stochastycznej stopy procentowej we wzorze (10) w miejsce wektora **V** wstawiony jest wektor **M**.

Istotnym elementem w określaniu jednorazowej składki netto w ubezpieczeniu grupowym jest liczba osób w jednorodnej (ze względu na wiek i warunki ubezpieczenia Γ) grupie L osób. Okazuje się, że wysokość składki określonej wzorem (9) jest niższa dla liczniejszej grupy. Wynika to z tego, że wraz ze wzrostem liczebności grupy maleje wariancja przypadająca na jedną osobę w grupie, mianowicie (por. [6])

$$\lim_{L\to\infty}\mathrm{Var}\left(\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}Z_{b,l}\right) = \begin{cases} 0, & \text{dla stałej stopy procentowej,} \\ \left(\mathrm{Diag}\left(\mathbf{C}_b\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\,\mathrm{Diag}\left(\mathbf{C}_b\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{S}, & \text{dla stochastycznej stopy procentowej,} \end{cases}$$

gdzie $Z_{b,l}$ oznacza zaktualizowaną wartość łącznych przyszłych przepływów pieniężnych określoną dla l-tej osoby w grupie.

5. Analiza wysokości składki

5.1. Opis danych

Na potrzeby tego paragrafu dokonano obliczeń w celu zbadania zależności wysokości składki od możliwych cech opisujących potencjalnych ubezpieczonych oraz jej zmienności w czasie. Ze względu na obszerny materiał w artykule zamieszczone zostały tylko najbardziej interesujące przykłady, które obrazują pewną tendencję.

Analizie poddano grupę osób w wieku 20-60 lat, które mają prawo do zasiłku dla bezrobotnych (tylko te osoby mogą wykupić komercyjne ubezpieczenie). Ponadto badana kohorta charakteryzowana jest przez następujące cechy: płeć (mężczyzna, kobieta), znajomość języków obcych, miejsce zamieszkania (miasto, wieś), wykształcenie (podstawowe, zawodowe, średnie, wyższe), liczba dzieci (co najwyżej dwoje, minimum troje), stan zdrowia (inwalida lub nie), sekcja zatrudnienia (według Polskiej Klasyfikacji Działalności). Cechy te były brane pod uwagę przy określaniu prawdopodobieństw w macierzy **Q** (por.[8; 14]). W przykładach wykorzystane zostały prawdopodobieństwa znalezienia pracy oszacowane na podstawie danych dotyczących osób bezrobotnych zamieszkujących Jelenią Górę i powiat jeleniogórski w latach 2000-2004 (por. [14]). Natomiast prawdopodobieństwa straty pracy wyznaczono na podstawie danych z roczników statystycznych z lat 2000-2004 ze względu na klasyfikację wykonywanego zawodu. Do analizy wybrane zostały trzy sekcje Polskiej Klasyfikacji Działalności (PKD):

- H – hotele i restauracje,
- J – pośrednictwo finansowe,
- N – służba zdrowia i opieka społeczna

oraz trzy typy ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy. Warunki ubezpieczenia określone zostały w tab. 1 przez zbiór Γ:

- typ 1 – odpowiadający $\Gamma = [0, 12, 0, \infty, 12]$,
- typ 2 – dla którego Γ dla mężczyzn jest postaci $\left[0, 12, 0, 12, \max\{(65-x)\cdot 12, 0\}\right]$,

a dla kobiet $\left[0, 12, 0, 12, \max\{(60-x)\cdot 12, 0\}\right]$,

- typ 3 – dla którego Γ dla mężczyzn jest postaci $\left[0, 12, 6, 6, \max\{(65-x)\cdot 12, 0\}\right]$,

a dla kobiet $\left[0, 12, 6, 6, \max\{(60-x)\cdot 12, 0\}\right]$.

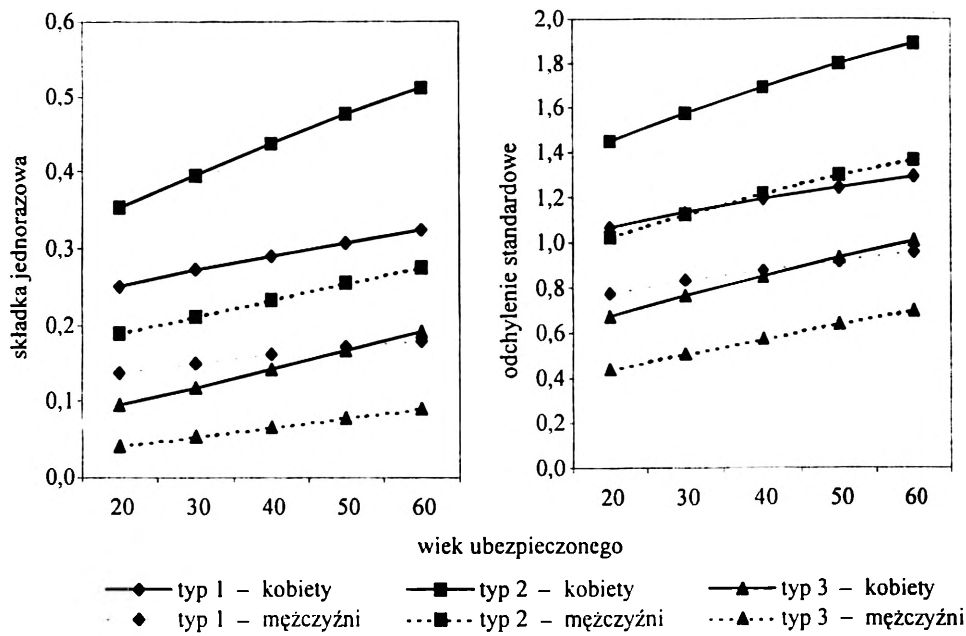
Założono, że świadczenie z tytułu bezrobocia jest równe 1 jednostce tzn. $a_0 = a_1 = \ldots a_{11} = 1$ (por. punkt 3.3).

Przyjęto, że ubezpieczyciel monitoruje rynek na bieżąco i w styczniu każdego roku przeprowadza badania dotyczące charakterystyki osób zarejestrowanych jako bezrobotne. Na ich podstwie wyznaczane są prawdopodobieństwa w macierzach **Q**(k) określanych dla danego roku. Ponadto założono, że składki obliczane są dla ubezpieczeń zawartych w styczniu danego roku.

5.2. Składka a typ ubezpieczenia

Celem tego punktu jest analiza wielkości składki oraz odchylenia standardowego dla wprowadzonych w tab. 1 trzech typów ubezpieczeń. Obliczeń dokonano dla grupy potencjalnych ubezpieczonych, którzy znają co najmniej jeden język obcy, mieszkają w mieście, mają wykształcenie wyższe, co najwyżej 2 dzieci na utrzymaniu i nie są inwalidami. Ponadto pracują w zawodzie sklasyfikowanym do sekcji hotele i restauracje według PKD. Rysunek 2 jest ilustracją graficzną wpływu wieku ubezpieczonego, płci oraz typu ubezpieczenia na wysokość jednorazowej składki netto oraz odchylenia standardowego w 2003 r.

Niezależnie od wieku i płci ubezpieczonego, zarówno składka jednorazowa, jak i odchylenie standardowe określone dla ubezpieczenia typu 3 są najniższe, a dla typu 2 najwyższe. Zależność ta związana jest z tym, że maksymalna gwarantowana liczba rent w ubezpieczeniu typu 3 jest równa 6, a w ubezpieczeniu typu 2 jest równa 12. Natomiast warunki ubezpieczenia typu 1 umożliwiają pobranie przez ubezpieczonego od 1 do 12 rent, dlatego składki za tego typu ubezpieczenie są droższe niż ubezpieczenie typu 3, ale tańsze niż ubezpieczenie typu 2.



Rys. 2. Wysokość składki i zmienność, a typ ubezpieczenia

Źródło: obliczenia własne.

Ponadto niezależnie od typu ubezpieczenia składki i odchylenie standardowe określone dla kobiet są wyższe niż dla mężczyzn.

5.3. Składka a model stopy procentowej

W tym punkcie zanalizowany został wpływ wyboru modelu stopy procentowej na wysokość składki netto i odchylenia standardowego zarówno dla pojedynczej osoby jak i w przypadku grupy. Obliczenia zawarte w tab. 2 zostały wykonane dla mężczyzn, którzy znają co najmniej jeden język obcy, mieszkają w mieście, mają wykształcenie wyższe i co najwyżej 2 dzieci oraz nie są inwalidami. Ponadto pracują w sekcji hotele i restauracje według PKD. Założono, że przez opisane wyżej osoby zostało wykupione w 2003 r. ubezpieczenie typu 2.

Zauważmy, że zastosowanie do obliczania składki netto oraz odchylenia standardowego modeli stopy krótkoterminowej ($Y_W(t)$, $Y_{OU}(t)$) niewiele zmienia wysokość obliczanych wielkości w stosunku do tych wyznaczonych przy założeniu stałej stopy procentowej. Gdyby świadczenie miesięczne było równe 1000 zł, wówczas różnica w składce dotyczyłaby jedynie groszy. Dlatego w dalszych rozważanich będą analizowane tylko przykłady ze stałą stopą procentową.

Tabela 2. Model stopy procentowej a składka i zmienność

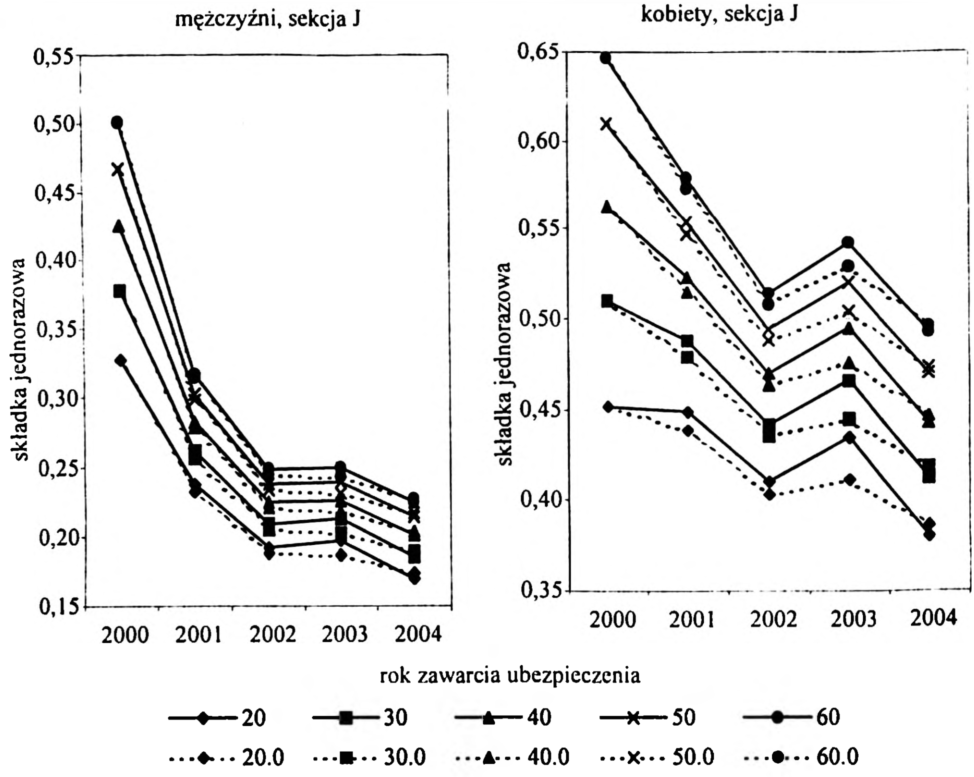
	Składka jednorazowa			Odchylenie standardowe			Odch. st. dla $L \to \infty$	
wiek \ Stopa procentowa	stała	$Y_W(t)$	$Y_{OU}(t)$	stała	$Y_W(t)$	$Y_{OU}(t)$	$Y_W(t)$	$Y_{OU}(t)$
20	0,188216	0,188137	0,188137	1,025927	1,025661	1,025691	0,003236	0,003385
25	0,199715	0,199630	0,199629	1,074379	1,074096	1,074134	0,003464	0,003647
30	0,211329	0,211237	0,211238	1,122130	1,121831	1,121876	0,003696	0,003915
35	0,222892	0,222794	0,222795	1,168656	1,168341	1,168393	0,003929	0,004185
40	0,234316	0,234211	0,234213	1,213703	1,213373	1,213432	0,004160	0,004455
45	0,245402	0,245292	0,245294	1,256697	1,256352	1,256418	0,004386	0,004720
50	0,256018	0,255902	0,255904	1,297318	1,296959	1,297033	0,004604	0,004975
55	0,266091	0,265969	0,265972	1,335426	1,335053	1,335134	0,004812	0,005220
60	0,275204	0,275076	0,275080	1,369927	1,369542	1,369629	0,005002	0,005444
65	0,283277	0,283144	0,283149	1,400642	1,400246	1,400339	0,005170	0,005644

Źródło: obliczenia własne.

Wraz ze wzrostem liczebności grupy L maleje odchylenie standardowe przypadające na jedną osobę w grupie. W tab. 2 fakt ten ilustrują dane w czterech ostatnich kolumnach. Zauważmy, że mniejsze odchylenie standardowe gwarantuje $Y_W(t)$ niż $Y_{OU}(t)$. Ponadto wraz z wiekiem osoby ubezpieczającej się rośnie jednorazowa składka oraz odchylenie standardowe.

5.4. Składka a znajomość języków obcych

Do analizy wpływu znajomości języków obcych na wysokość składki netto wybrane zostało ubezpieczenie typu 1. Na rysunkach 3-5 wykresy przedstawiają wpływ znajomości języków obcych na wysokość jednorazowej składki netto w zależności od wieku, płci, roku zawarcia ubezpieczenia oraz sekcji zatrudnienia (odpowiednio H, J, N). W legendzie zamieszczonej pod rysunkami x oznacza osobę w wieku x znającą co najmniej 1 język obcy, a x.0 osobę w wieku x, która nie zna żadnego języka obcego. W każdym z rozpatrywanych przypadków można zaobserwować brak wpływu znajomości języka obcego na wysokość składki w 2000 r. Natomiast w latach 2001-2003 wyższą składkę płaciłyby osoby, które znały co

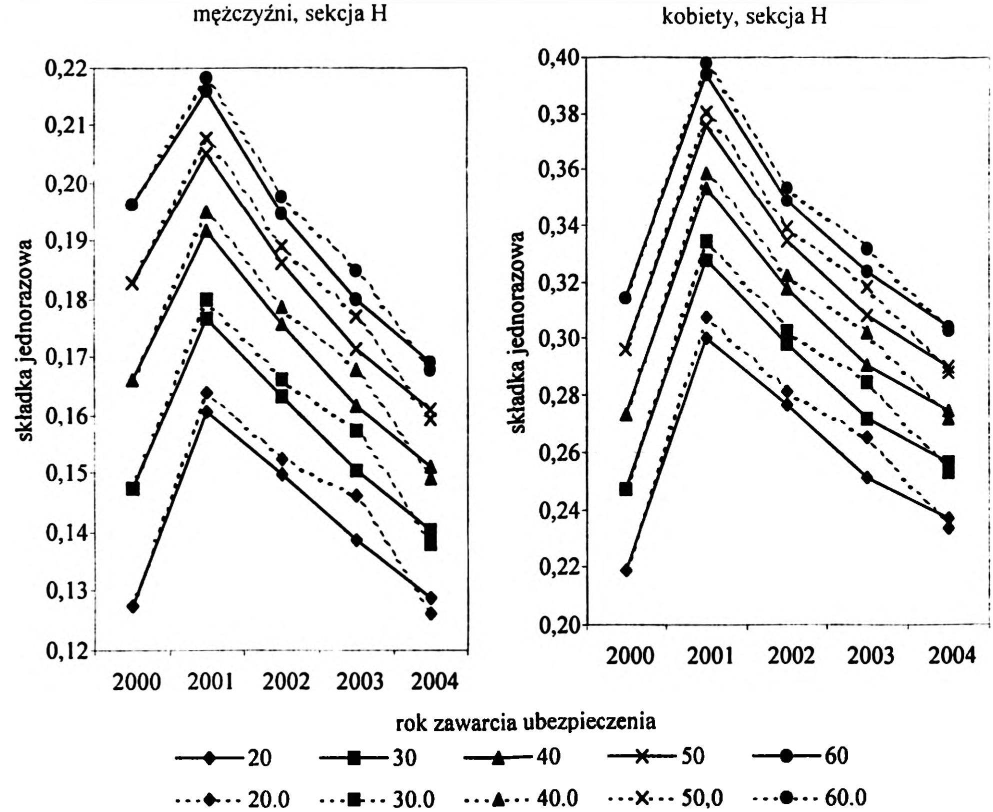


Rys. 3. Znajomość języków obcych, a składka jednorazowa (sekcja J)

Źródło: opracowanie własne.

najmniej jeden język obcy i były zatrudnione w sekcji J, oraz osoby, które nie znały żadnego języka obcego i były zatrudnione w sekcji H lub N. Sytuacja ta się odwróciła w 2004 r. w przypadku wszystkich trzech rozważanych sekcji, przy czym różnica w wysokości składki między osobami, które znają język obcy lub nie, zmniejszyła się i jest nieznaczna.

Wśród osób znających co najmniej 1 język obcy składka dla mężczyzn jest niższa od składki dla kobiet niezależnie od sekcji zatrudnienia. Przeciętne (ze względu na wiek ubezpieczonego) wartości określające o ile procent składka dla mężczyzn jest niższa od składki dla kobiet (tzn. $\frac{\text{składka dla kobiety} - \text{składka dla mężczyzny}}{\text{składka dla kobiety}} \cdot 100\%$) w zależności od sekcji zatrudnienia i roku zawarcia ubezpieczenia przedstawione zostały na rys. 6. Okazuje się, że ze względu na płeć ubezpieczonego najbardziej zróżnicowane są składki osób pracujących w sekcji N, a najmniej – osób zatrudnionych w sekcji H. Ponadto dla osób, które nie znają żadnego języka obcego, analogiczny wykres wygląda podobnie.

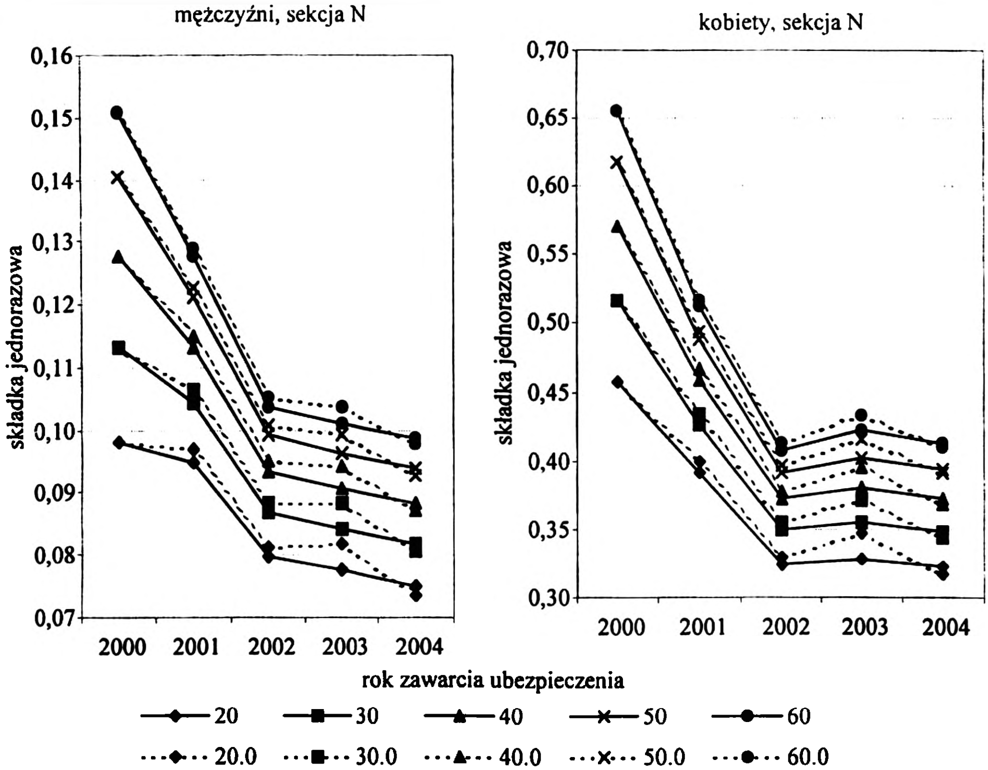


Rys. 4. Znajomość języków obcych, a składka jednorazowa (sekcja H)

Źródło: opracowanie własne.

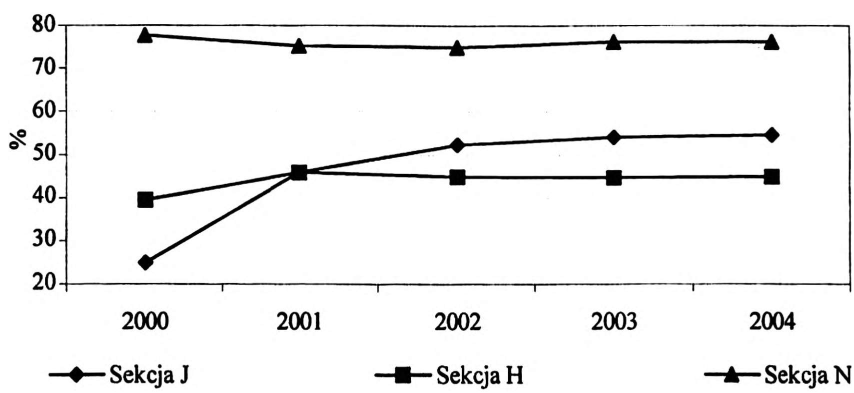
5.5. Składka a miejsce zamieszkania

Do analizy wpływu miejsca zamieszkania na wysokość składki netto i odchylenia standardowego wybrane zostało ubezpieczenie typu 2. Na rysunku 7 wykresy przedstawiają wysokość składki okresowej dla mężczyzn pracujących w sekcjach H oraz N. Okazuje się, że niezależnie od wieku, sekcji zatrudnienia oraz roku wykupienia ubezpieczenia osoby mieszkające na wsi musiałyby za to samo ubezpieczenie zapłacić wyższą składkę niż osoby mieszkające w mieście. Różnice w składce między osobami mieszkającymi na wsi i w mieście z roku na rok zmniejszają się, podobnie jak wysokość składki okresowej. Ponadto osoby zatrudnione w sekcji H muszą płacić wyższą składkę niż osoby zatrudnione w sekcji N. W tym punkcie analiza składki dla kobiet została pominięta, gdyż ich sytuacja jest analogiczna do sytuacji mężczyzn, z tą różnicą, że za takie samo ubezpieczenie kobiety musiałyby zapłacić wyższą składkę.



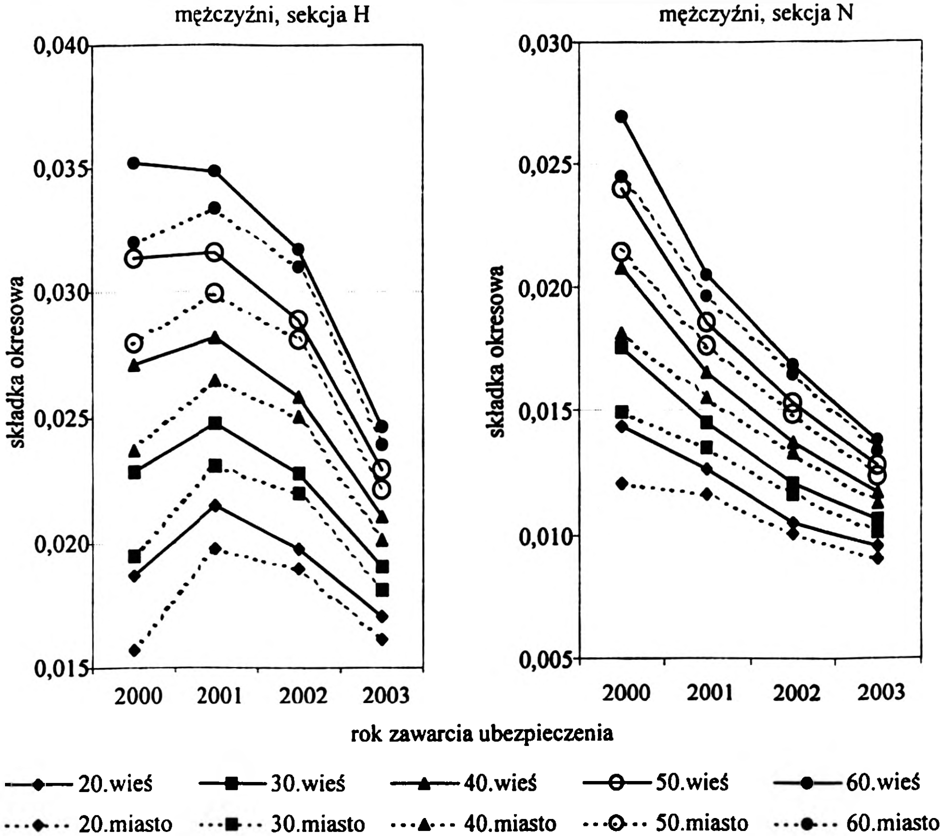
Rys. 5. Znajomość języków obcych, a składka jednorazowa (sekcja N)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Przeciętna różnica między składką dla kobiet i składką dla mężczyzn

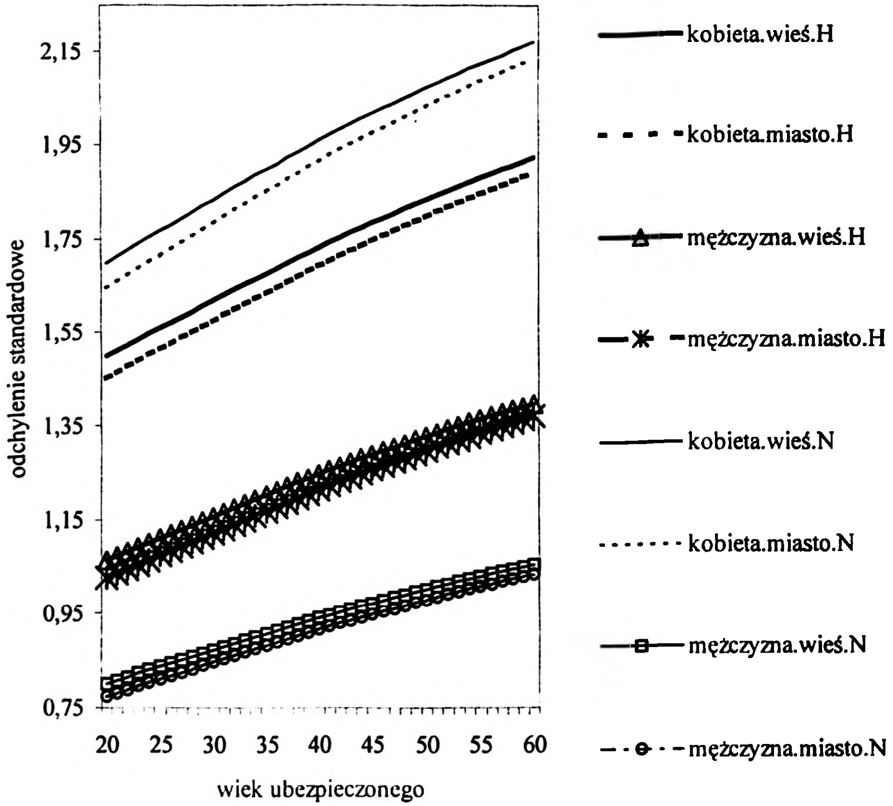
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 7. Miejsce zamieszkania a składka okresowa

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 8 przedstawione zostały wartości odchylenia standardowego obliczone dla kobiet i mężczyzn zatrudnionych w sektorach H i N w zależności od miejsca zamieszkania. Odchylenie standardowe dla kobiet jest większe niż dla mężczyzn, przy czym niezależnie od płci rośnie wraz z wiekiem. Podobnie jest z miejscem zamieszkania dla osób pracujących na wsi odchylenie standardowe jest wyższe niż dla osób pracujących w mieście. Oznacza to, że mieszkańcy wsi są bardziej narażeni na niekorzystne skutki bezrobocia niż mieszkańcy miast. Ponadto dla osób zatrudnionych w sektorze H odchylenie standardowe jest niższe niż dla osób zatrudnionych w sektorze N, a stąd wynika, że zatrudnieni w sekcji H mogą liczyć na niższą składkę niż zatrudnieni w sekcji N.



Rys. 8. Miejsce zamieszkania a odchylenie standardowe

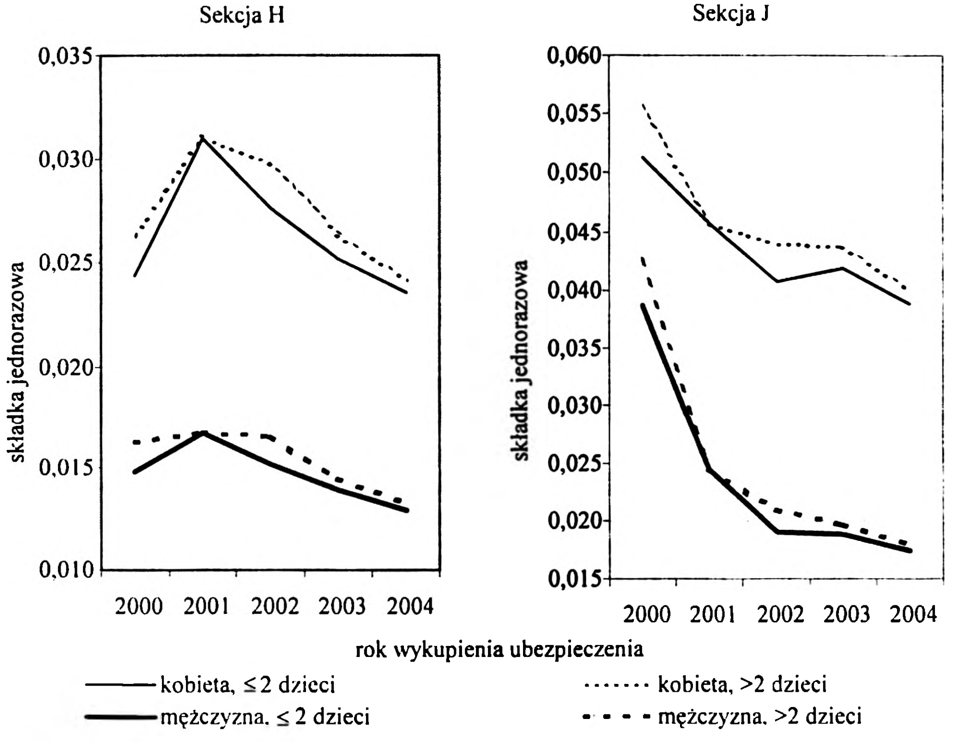
Źródło: opracowanie własne.

5.6. Składka a liczba dzieci na utrzymaniu

Wpływ liczby dzieci na wysokość składki jednorazowej został analizowany dla osoby w wieku 40 lat mieszkającej w mieście, mającej wykształcenie średnie. Składka została policzona dla ubezpieczenia typu 1.

Wpływ płci osoby ubezpieczonej oraz liczby dzieci w rodzinie na wysokość składki jednorazowej został przedstawiony na rys. 9. Okazuje się, że także w tym przypadku składki dla kobiet są wyższe niż składki dla mężczyzn. Zawsze składka osób, które mają co najwyżej dwoje dzieci, jest niższa niż osób z rodzin wielodzietnych. Szczególne znaczenie (w latach 2000-2004) miało to w latach 2000 oraz 2002, kiedy te różnice okazały się największe. W 2001 r. liczba dzieci nie miała wpływu na wysokość składki.

Natomiast różnica w wysokości składki między osobami z większą i mniejszą liczbą dzieci na utrzymaniu od 2002 r. stopniowo się zmniejszała. Oznacza to, że wpływ liczby dzieci na wysokość składki ubezpieczeniowej netto był z roku na rok mniejszy. Ponadto osoby zatrudnione w sekcji H mogłyby liczyć na niższe składki niż osoby zatrudnione w sekcji J.



Rys. 9. Liczba dzieci na utrzymaniu, a odchylenie standardowe

Źródło: opracowanie własne.

5.7. Zakres składek

Z przeprowadzonych badań wynika, że wpływ badanych cech na wysokość składki jest bardzo zróżnicowany i niejednorodny, np. ustalona cecha może mieć odmienny wpływ na wysokość składki w dwóch grupach zatrudnionych w różnych sekcjach PKD. W celu zbadania możliwego zakresu rozpiętości wysokości składki oraz jego zmian w czasie rozważone zostało ubezpieczenie typu 1 zawarte w 2000 i 2004 r. Składki zostały obliczone dla osób w wieku od 20 do 60 lat (zarówno dla kobiet, jak i mężczyzn), które w razie utraty pracy mają prawo do pobierania zasiłku. Badania wykazały, że pomijając wiek, płeć oraz sekcję PKD, na najniższą i najwyższą składkę mogłyby liczyć osoby o określonych cechach. W tabeli 3 cechy te zostały opisane w zależności od roku zawarcia ubezpieczenia.

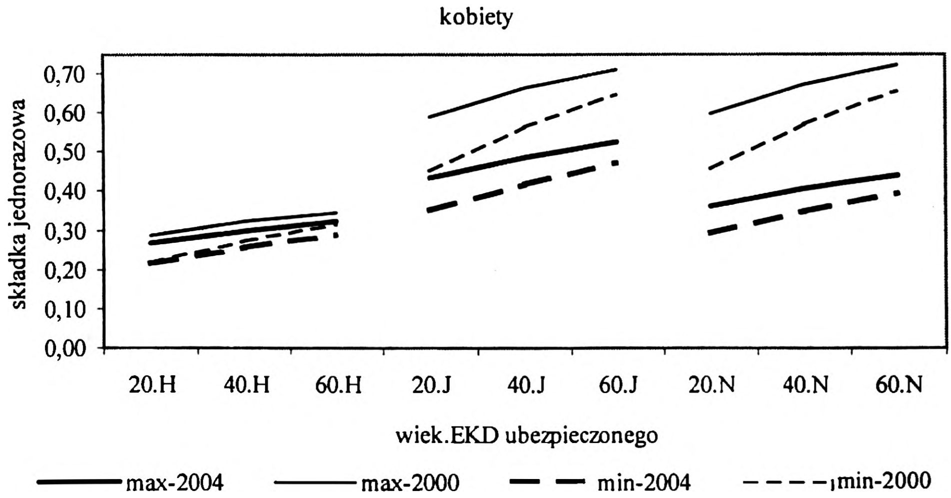
Tabela 3. Cechy charakteryzujące ubezpieczonych z najniższą i najwyższą składką

Rok	Cechy ubezpieczonego	Składka minimalna	Składka maksymalna
2000	miejsce zamieszkania	miasto	wieś
	wykształcenie	wyższe	maksymalnie średnie
	liczba dzieci	0-2	3 i więcej
	inwalida	nie	tak
2004	znajomść języka obcego	nie zna żadnego	zna co najmniej jeden
	miejsce zamieszkania	miasto	wieś
	wykształcenie	średnie	zawodowe
	liczba dzieci	0-2	3 i więcej
	inwalida	tak	nie

Źródło: opracowanie własne.

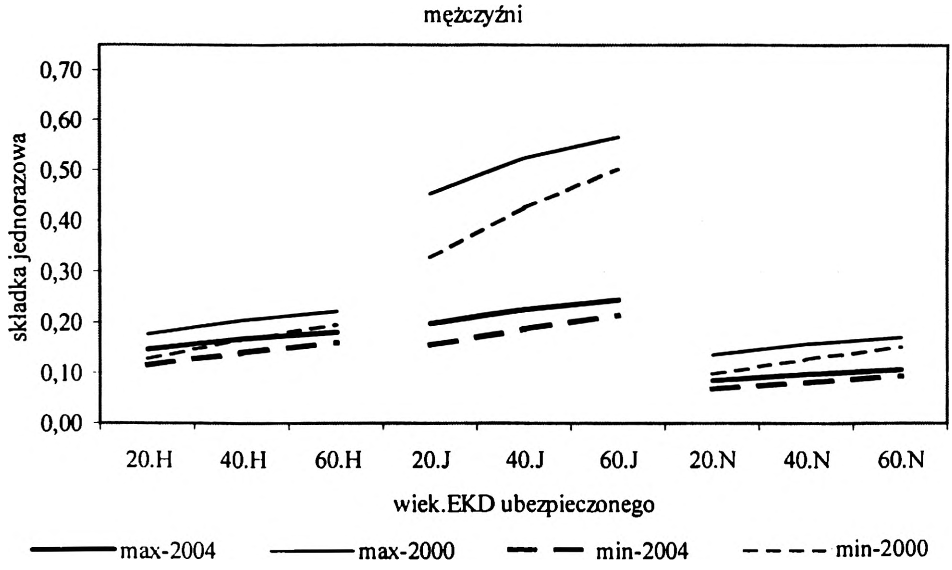
Zauważmy, że zespół cech opisujących osoby płacące najwyższą i najniższą składkę zmienia się w czasie. Ponadto wysokość składki nie zawsze zależy od tych samych cech, np. w 2000 r. w przeciwieństwie do 2004 r. wysokość składki nie zależała od znajomości języków obcych.

Na rysunkach 10 i 11 przedstawiony został (odpowiednio dla kobiet i mężczyzn) możliwy zakres składek jednorazowych dla osób w wieku 20, 40 i 60 lat z podziałem na sekcje zatrudnienia i rok zawarcia ubezpieczenia.



Rys. 10. Możliwy zakres wysokości składek jednorazowych w przypadku kobiet.

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 11. Możliwy zakres wysokości składek jednorazowych w przypadku mężczyzn

Źródło: opracowanie własne.

Okazuje się, że niezależnie od wieku, płci i sekcji zatrudnienia wysokość składek w 2004 r. jest niższa niż w 2000 r. Na najmniejszy spadek wysokości składek mogłyby liczyć osoby zatrudnione w sekcji H, a na szczególnie duży spadek wysokości składki – mężczyźni zatrudnieni w sekcji J. Ponadto im osoba starsza, tym różnica między składką maksymalną a składką minimalną jest mniejsza.

Można także zaobserwować, że we wszystkich przypadkach zakres wysokości składek w 2004 r. jest dużo mniejszy niż w 2000 r. Przykładowo przy założeniu, że wysokość świadczenia z tytułu bezrobocia jest równa 1000 złotych, największa różnica między składką maksymalną a składką minimalną w 2000 r. była równa 140,95 zł (20 lat, kobieta, sekcja N), a w 2004 r. zmniejszyła się do 84,55 zł (20 lat, kobieta, sekcja J).

6. Podsumowanie

Najistotniejszy wpływ na wysokość składki ubezpieczeniowej netto ma wiek i płeć ubezpieczonej osoby. Ponadto bardzo ważnym czynnikiem jest rodzaj zatrudnienia, czyli sektor w jakim pracuje ubezpieczona osoba. Mniejsze znaczenie (szczególnie w 2004 r. w stosunku do 2000 r.) mają takie czynniki jak znajomość języków, wykształcenie, miejsce zamieszkania, liczba dzieci na utrzymaniu. Jednak wciąż osoby mieszkające w mieście, mające nie więcej niż 2 dzieci mogłyby liczyć na niższą składkę.

Przeprowadzona analiza wskazuje na zmieniające się w czasie zależności wysokości składki od cech charakteryzujących osoby wyrażające chęć wykupienia ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy. I chociaż wysokość i zakres składek maleją, to chcąc oferować ubezpieczenie od ryzka utraty pracy o składkach, których wysokość jest realnie dostosowana do aktualnie panujących warunków na rynku pracy niezbędne jest monitorowanie wpływu różnych czynników na szansę znalezienia czy utraty zatrudnienia.

Podziękowanie

Autorki pragną podziękować Dyrekcji Powiatowego Urzędu Pracy w Jeleniej Górze, za wyrażenie zgody na udostępnienie danych dotyczących osób zarejestrowanych jako bezrobotne w powiecie jeleniogórskim oraz Jeleniej Górze w latach 2000-2004. Szczególne podziękowania kierujemy do Pana Eryka Łukaszewicza za przygotowanie bazy umożliwiającej wykorzystanie danych zgodnie z ustawą o ochronie danych osobowych.

Literatura

[1] Amsler M.H., *Sur la modélisation des risques vie par les chaênes de Markov*, [w:] *Transactions of the 18th International Congress of Actuaries*, vol. 5, München 1968, s. 731-746.

[2] Belzil Ch., *Unemployment insurance and subsequent job duration: job matching vs unobserved heterogonity*, „Journal of Applied Econometrics" Sept.-Oct. 2001, s. 619-636.

[3] Beekman J.A., Fuelling C.P., *One approach to dual randomness in life insurance*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1993, vol. 76, no. 2, s. 173-182.

[4] Bowers N.L., Gerber H.U., Hichmann J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Illinois 1986.

[5] Dębicka J., *Moments of the cash value of future payment streams arising from life insurance contracts*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2003, no. 33, s. 533-550.

[6] Dębicka J., *Macierzowa reprezentacja modelu ubezpieczenia wielostanowego ze stochastyczną stopą procentową*. Raporty Techniczne Katedry Statystyki i Cybernetyki Ekonomicznej, TR-40, Wroclaw 2004.

[7] Dębicka J., *Macierzowa reprezentacja ubezpieczenia wielostanowego z niejednorodnym łańcuchem Markowa*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1108, AE, Wrocław 2006, s. 244-265.

[8] Dębicka J., Mazurek E., *Analiza czasu pozostawania bez zatrudnienia na polskim rynku pracy* [przyjęte do druku w: „Ekonomista"].

[9] Gerber H.U., *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Zurich 1990.

[10] Haberman S., Pitacco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall/CRC, 1999.

[11] Hoem J.M., *Markov chain models in life insurance*, „Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik" 1969, vol. IX, s. 91-107.

[12] Hoem J.M., *The versality of the Markov chain as a tool in the mathematics of life insurance*. [w:] *Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries*, vol. R, Helsinki 1988, s. 171-202

[13] Mazurek E., *Statystyczna analiza czasu trwania bezrobocia i optymalnego wyboru oferty pracy*. Rozprawa doktorska, Wrocław 2000.

[14] Mazurek E., *Bezrobocie – system zasiłków w ubezpieczeniu społecznym*, http://uczelnia.ae.wroc.pl/admin/visual/pracownik.asp?PID=3986.

[15] Norberg R., *Reserves in life and pension insurance*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1991, vol. 74, no. 1, s. 1-22.

[16] Ostasiewicz W. (red.), *Metodologia pomiaru jakości życia*, AE, Wrocław 2002..

[17] Ostasiewicz W. (red), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, AE, Wrocław 2004.

[18] Parker G., *Two stochastic approaches for discounting actuarial function*, „Astin Bulletin" 1994, vol. 24, no. 2, s. 167-181.

[19] Pitacco E., *Actuarial models for princing disability benefits: Towards a unifying approach*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1995, vol. 16, s. 39-62.

[20] *Ustawa z dnia 28 lipca 1990 roku o działalności ubezpieczeniowej*, DzU nr 50, poz. 344 z późn. zm.

[21] Waters H.R., *An approach to the study of multiple state models*, „Journal Institute of Actuaries" 1984, vol. 111, part II, no. 448, s. 363-374.

[22] Wolthuis H., *Life insurance mathematics (The Markovian model)*, CAIRE Education Series, no. 2, Bruxelles 1994.

[23] Wolthuis H., *Actuarial equivalence*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1994, no. 15, s. 163-179.

INDIVIDUAL UNEMPLOYMENT INSURANCE – THE ANALYSIS OF NET PREMIUM ON THE POLISH EMPLOYMENT MARKET

Summary

A model for an individual insurance for financial consequences of unemployment is proposed. Analogously to the notation used in description of disability insurances, insurance conditions are presented in the set of parameters Γ. Net premiums are calculated according to the method used in life insurances. Cash flows arising from unemployment insurances, the probabilistic and interest rate structure are presented in matrix notation, where dimensions of appropriate matrices are adopted to insurance conditions Γ.

Numerical examples of premiums (for an individual insurance and portfolio of policies) are based on data taken from Labour Department in Jelenia Góra for years 2000-2004.