Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej 72
Seria: Monografie 13

Ewaryst Rafajłowicz

Mag.

Dobór sterowań optymalnych w identyfikacji systemów liniowych o parametrach rozłożonych

Wrocław 1986

A 4115 I

PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Engineering Cybernetics
No 72 of the Technical University of Wrocław No 72

Monographs No 13 1986

Ewaryst RAFAJŁOWICZ

Choice of optimum input signals in linear distributed — parameter systems identification

Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej 72

Seria:
Monografie 13

Ewaryst Rafajłowicz

Dobór sterowań optymalnych w identyfikacji systemów liniowych o parametrach rozłożonych

Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1986

Recenzenci
Edward KĄCKI
Jerzy KLAMKA

Redaktor naczelny
Jerzy CIEKOT

Redaktor naukowy
Mieczysław KULISZEWSKI

Opracowanie redakcyjne
Maria KOPEĆ

Korekta
Maria IZBICKA

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1986

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324 – 9786

Nakład 170 + 70 egz. Ark. wyd. 10. Ark. druk. 8¾. Papier offset. kl. III, 70 g, B1.
Oddano do druku w lipcu 1986 r. Druk ukończono we wrześniu 1986 r.
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 2970/86 – Cena zł 150,–

Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej
Nr 72 Politechniki Wrocławskiej Nr 72
Monografie Nr 13 1986

Ewaryst RAFAJŁOWICZ*

sterowanie optymalne,
identyfikacja,
system o parametrach rozłożonych,
planowanie eksperymentu

DOBÓR STEROWAŃ OPTYMALNYCH W IDENTYFIKACJI SYSTEMÓW LINIOWYCH O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Monografia dotyczy zagadnień doboru sterowań maksymalizujących dokładność identyfikacji w liniowych systemach o parametrach rozłożonych. Zaproponowano metodykę formułowania takich problemów oraz systematyczną drogę znajdowania sterowań optymalnych. Uwaga skupiona została na kryteriach typu D- oraz L-optymalności i na analizie zagadnień w dziedzinie częstotliwości. Dla kryteriów tych uzyskano warunki konieczne i dostateczne optymalności, które pozwoliły na scharakteryzowanie częstotliwościowo-przestrzennej struktury sterowań optymalnych oraz na analityczne ich wyznaczenie dla pewnych klas zagadnień. Warunki te stanowią też podstawę do konstrukcji numerycznych algorytmów znajdowania sygnałów sterujących. Wykazano zbieżność takiego algorytmu dla kryterium D-optymalności i podano wyniki jego testowania na przykładzie równania przewodnictwa ciepła. Badano różne warianty podstawowych problemów, różniące się ograniczeniami na przestrzenną formę dopuszczalnych sterowań. Zaproponowano także alternatywne podejście w postaci adaptacyjnego algorytmu doboru sterowań optymalnych. Wykazano jego zbieżność oraz poddano go szerokiej weryfikacji symulacyjnej.

SPIS CZĘŚCIEJ UŻYWANYCH OZNACZEŃ
(LIST OF SYMBOLS)

Wszystkie występujące w pracy wektory uważa się za kolumnowe (all vectors are treated as column vectors)

R^k - k-wymiarowa przestrzeń euklidesowa (k-dimensional Euclidean space)

Ω - obszar w R^k (spatial domain in R^k)

* Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, 50-370 Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27.

Γ - brzeg zbioru Ω (boundary set of Ω)

$\varkappa, x \in R^k$ - wektory współrzędnych przestrzennych (spatial coordinates)

t - zmienna reprezentująca czas (time variable)

$a \in R^r$, $r \geqslant 1$ - wektor identyfikowanych parametrów obiektu (vector of unknown parameters to be identified)

$q(\varkappa, t; a)$ - stan obiektu w punkcie $\varkappa$ i chwili t zależny od wektora a (system state at $\varkappa$, t, dependent on the vector a)

$g(\varkappa, x, t; a)$ - funkcja Greena obiektu - odpowiedź impulsowa w punkcie $\varkappa$ na punktowe wymuszenie w punkcie x (Green's function - impulse response at $\varkappa$ on excitation at x)

$k(\varkappa, x, t; a) \triangleq \operatorname{grad}_a g(\varkappa, x, t; a)$, grad - operator gradientu (grad - gradient operator)

$\triangleq$ - równość z definicji (definition symbol)

$\mathcal{F}$ - transformata Fouriera względem argumentu czasowego (Fourier transform with respect to time variable only)

$K(x, j\omega) \triangleq \mathcal{F}[k(\varkappa_1, x, .; a)]$ - argumenty $\varkappa_1$ i a jako ustalone zostają pominięte (fixed arguments $\varkappa_1$ and a are not indicated)

ω - częstotliwość (frequency variable)

$\delta(.)$ - dystrybucja delta - Diraca (the Dirac delta function)

Ω_u - zbiór punktów oddziaływania sterowania (set of admissible points of control action)

Ω_p - zbiór punktów, w których dopuszczalne są pomiary stanu obiektu (set of points, where measurements can be made)

$\varkappa_i \in \Omega_p$, $i=1,2,\ldots,I$ - położenie punktów pomiarowych (positions of sensors)

$u(x,t)$ - wartość sterowania w punkcie $x \in \Omega_u$ i chwili t (control variable at x,t)

$$\xi(\varkappa) \triangleq \sum_{i=1}^{I} \delta(\varkappa - \varkappa_i), \quad \xi_o(\varkappa) \triangleq \delta(\varkappa - \varkappa_1)$$

$R_u(x,y,\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} u(x,t)u(x,t+\tau)dt$ - funkcja autokorelacji sygnału sterującego (autocorrelation function of input signal u)

$S_u(x,y,j\omega) \triangleq \mathcal{F}[R_u(x,y,.)]$ - widmowa gęstość mocy sterowania - skrót WGMS - (power spectral density of control)

$\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\Psi}$ - klasa dopuszczalnych WGMS (set of admissible densities S_u)

M_T - macierz informacyjna zadania estymacji wektora a na podstawie obserwacji o czasie trwania T (information matrix of estimating a from data record length T)

$M(S_u, \xi)$ - uśredniona macierz informacyjna zdefiniowana jako $\lim_{T \to \infty} M_T/T$ (averaged information matrix, defined as $\lim_{T \to \infty} M_T/T$)

"$'$" - transpozycja macierzy (the transposition sign)

"s^c" - liczba zespolona sprzężona względem s (the conjugate complex number of s)

$H(j\omega) \triangleq \int_{\Omega_u} K(x, j\omega) K^{'}(x, -j\omega) dx$

det [.] - wyznacznik macierzy kwadratowej (the determinant of a square matrix)

tr [.] - ślad macierzy (the trace of a matrix)

λ_{max} [.] - maksymalna wartość własna macierzy o rzeczywistych wartościach własnych (the largest eigenvalue of a matrix with real eigenvalues).

WSTĘP

W tytule tej monografii współwystępują nazwy trzech nurtów z zakresu automatyki:

a) sterowania optymalnego,

b) identyfikacji,

c) obiektów o parametrach rozłożonych.

Jednakże celem doboru sterowania nie jest - jak w klasycznej teorii - osiągnięcie pożądanego zachowania się trajektorii stanu lub wyjścia obiektu, lecz dokonanie najdokładniejszej - w danych warunkach - jego identyfikacji. Należy przy tym zaznaczyć, że możliwie dokładna identyfikacja parametrów obiektu może być celem samym w sobie - wtedy, gdy prowadzona jest ona na potrzeby poznawcze - bądź też celem pośrednim - wtedy, gdy znajomość opisu obiektu służyć ma zaprojektowaniu układu sterowania, zapewniającego pożądane zachowanie się jego stanu lub wielkości wyjściowych.

Trzeci element w tytule pracy wskazuje, że badania dotyczyć będą systemów o parametrach rozłożonych (SPR), tzn. takich obiektów, których

adekwatny w danym zastosowaniu opis matematyczny wymaga uwzględnienia nie tylko czasowej, ale także przestrzennej zmienności współrzędnych stanu. Obiekty, których zachowanie można dostatecznie dokładnie modelować posługując się tylko funkcjami czasu, będą nazywane systemami o parametrach skupionych (SPS), chociaż termin ten nie jest tak rozpowszechniony w literaturze jak poprzedni.

Aby umiejscowić tematykę niniejszej pracy w dotychczasowym dorobku automatyki i dziedzin pokrewnych, przyjrzyjmy się zestawieniu. Zawiera ono wybór monografii i(lub) prac przeglądowych podsumowujących etapy rozwoju poszczególnych poddziedzin. Numery cytowań zaczynające się od cyfry 0 dotyczą bibliografii zamieszczonej po wstępie, pozostałe - bibliografii na końcu niniejszej monografii:

I. Optymalizacja stanu ustalonego procesu (znajdowanie ekstremum funkcji wielu zmiennych z ograniczeniami). Podstawowe idee tego kierunku sięgają początków rachunku różniczkowego; podsumowanie późniejszych wyników i algorytmów znaleźć można między innymi w pracy [010].

II. Identyfikacja charakterystyki statycznej obiektu (estymacja parametrów funkcji regresji). Kierunek ten datować można od prac Gaussa (kontynuowanych potem przez Markowa) na temat metody najmniejszych kwadratów. Bardziej współczesne wyniki, uwzględniające dorobek statystyki, zawierają m.in. prace: [040], [034], [012], [038].

III. Planowanie eksperymentu (planowanie optymalne ze względu na dokładność estymacji funkcji regresji lub jej parametrów) [44], [034], [021], [019], [033], [035].

1. Teoria sterowania dynamicznych SPS (wybór monografii prezentujących rozwój w ostatnich 25 latach) [04], [03], [041], [043], [037], [016], [042], [026].

2. Identyfikacja dynamiki SPS (wybór monografii) [034], [012], [040], [013].

3. Dobór sterowań optymalnych ze względu na jakość identyfikacji SPS [65], [27], [132].

i) teoria sterowania SPR (wybór monografii): [06], [027], [032], [039], [07], [02], [18], [020], [08], [05], [022], [018], [09],

ii) identyfikacja SPR (podajemy tu tylko prace przeglądowe - większy wybór w bibliografii na końcu rozprawy): [77], [024], [023], [78],

iii) dobór sterowań optymalnych ze względu na jakość identyfikacji SPR[*].

---

[*] Dla ułatwienia zestawienie powtórzono w tab. 1.1.

Wybór prac nie jest kompletny. Zwłaszcza nie wyróżniono w nim odpowiednich zagadnień dla SPR badanych w stanie ustalonym, gdyż liczba prac na ten temat jest stosunkowo mała. Podane zestawienie ma jedynie stanowić ilustrację następujących spostrzeżeń:

a) w punkcie iii) nie zacytowano żadnych prac, gdyż brak jest tutaj nie tylko opracowań monograficznych, ale także prac przeglądowych (jeśli nie liczyć krótkiego przeglądu dokonanego przez autora w pracy [35]); przegląd kilku zaledwie, znanych autorowi, prac z tego zakresu dokonano w p. 1.3;

b) chronologia rozwoju tematyki jest zgodna ze wzrostem numerów w każdej z klas opisu obiektów; stwierdzić można, że powodem rozwoju identyfikacji w każdej z grup były trudności w praktycznym zastosowaniu wyników teorii sterowania (lub optymalizacji); z kolei praktyczne bariery na jakie napotykała lub napotyka obecnie teoria identyfikacji powoduje rozwój badań w punktach o numerach trzy;

c) rozwój badań w każdej z podanych grup był uwarunkowany osiągnięciem odpowiedniego stopnia dojrzałości przez teorię funkcji, równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, oraz zapotrzebowaniem na coraz bardziej dokładne formy opisu w naukach inżynierskich;

d) badania w punktach oznaczonych tym samym numerem rozpoczynały się w przytoczonej kolejności i ze znacznymi odstępami czasu między sobą; występowanie różnic czasowych między nimi tłumaczyć można faktem, iż rozwój nie dokonywał się na zasadzie prostych uogólnień, lecz wymagał rozwinięcia istotnie nowych metod badawczych; dobrą ilustracją jest tutaj porównanie metod badawczych i wyników w p. 1 oraz i), gdzie na przykład okazało się, że tak fundamentalne pojęcie jak sterowalność SPS musi zostać inaczej zdefiniowane, by stać się w pełni przydatne w SPR (por. pracę [022]);

e) badania w zakresie identyfikacji SPR nie zostały dotychczas podsumowane w formie monograficznej; jednakże zawartość cytowanych w p. ii) prac przeglądowych pozwala stwierdzić, że poddziedzina ta osiągnęła stopień rozwoju umożliwiający intensyfikację badań w p. iii);

Zarysowany stan badań, a zwłaszcza wnioski a, b i e, stanowiły jedną z motywacji do podjęcia przez autora prac związanych z metodami doboru sterowań w identyfikacji SPR. Drugim z czynników, który o tym zadecydował były - pojawiające się w różnych dziedzinach techniki - prace aplikacyjne, w których dostrzegano potrzebę racjonalnego doboru sterowań używanych w trakcie identyfikacji. Najczęściej kierowano się w nich względami prostoty realizacji sterowania lub łatwości identyfikacji, pomijając jej dokładność. Zatem prace te nie mogły dać wskazań dla badań i wyników przedstawianych w tej rozprawie. Przykłady kilku prac tego typu przedstawiono w p. 1.3.

Tabela 1.1

Problematyka badawcza	Statyczne systemy o parametrach skupionych	Dynamiczne systemy o parametrach skupionych	Statyczne i dynamiczne systemy o parametrach rozłożonych
Regulacja i sterowanie optymalne	I Podsumowanie głównych nurtów, np. w [010]	1 Wybór monografii: [03] [04],[016], [026],[037], [041],[042], [043]	i) Wybór monografii: [02], [05],[06],[07],[08], [09],[018],[020],[022], [027],[032],[039],[18].
Identyfikacja	II Wybór monografii: [012],[034], [038],[040]	2 Wybór monografii: [012],[013], [034],[040]	ii) Prace przeglądowe: [023],[024],[77],[78]
Dobór sterowań optymalnych ze względu na jakość identyfikacji	III Wybór monografii i prac przeglądowych: [019],[021], [033],[034], [035],[44]	3 [65],[27], [132]	iii)

Uwaga: W powyższej tabeli przez dobór sterowania optymalnego w odniesieniu do obiektów badanych w stanie ustalonym (statycznych) rozumieć należy odpowiednie zadanie optymalizacji.

Powyższe zestawienie wskazuje na związki tematyki rozprawy z innymi poddziedzinami automatyki. I tak, dobór sterowań służy możliwie dokładnej identyfikacji obiektu, co z kolei pozwala na dokładniejsze nim sterowanie. Jednocześnie metodyka wypracowana w teorii sterowania SPR może być, w pewnym zakresie, przydatna w rozwiązywaniu problemów przedstawionych w tej rozprawie. Innego rodzaju są związki występujące między problematyką punktów III, 3 oraz iii. Głównym elementem wspólnym są tu wskaźniki (kryteria) jakości identyfikacji, za pomocą których ocenia się przydatność sterowań w identyfikacji. Ich jednolitość wynika z przyjęcia podstawowych pojęć statystyki (teorii estymacji) do konstrukcji wskaźnika jakości. Umożliwia to korzystanie z wielu wyprowadzonych w p.

III schematów i wzorów, zwłaszcza dotyczących obliczania pochodnych funkcjonałów od macierzy informacyjnych.

Zarysowane związki tematyki rozprawy z innymi poddziedzinami mają raczej charakter metodologiczny. Zanim zostaną wypunktowane cechy specyficzne tej tematyki, wyjaśnić warto różnicę terminologii użytej w p. III oraz 3 oraz iii. Termin "planowanie eksperymentu" ukształtował się historycznie w statystyce matematycznej. Współczesną teorię optymalnego planowania eksperymentu zapoczątkowały prace Kiefera i Wolfowitza [45], [44]. Teoria ta zajmuje się optymalnym doborem wartości czynników wpływających na funkcję regresji, tak by maksymalizować miarę dokładności estymacji jej parametrów. Zastosowana w identyfikacji charakterystyki statycznej obiektu teoria ta pozwala dobierać sterowanie stałe w czasie, najkorzystniejsze z punktu widzenia dokładności identyfikacji [033],[034]. W odniesieniu do identyfikacji obiektów badanych w stanie ustalonym termin "planowanie eksperymentu" wydaje się adekwatny, gdyż wartości wejść są praktycznie jedynymi wielkościami, na które eksperymentator może mieć wpływ. Sytuacja zmienia się, jeżeli są identyfikowane charakterystyki dynamiczne obiektu o parametrach skupionych lub rozłożonych. Teoretycznie eksperymentator może mieć wpływ nie tylko na przebieg w czasie (i przestrzeni) sygnałów sterujących, ale także na częstotliwość próbkowania, sposób filtrowania, rodzaj i rozmieszczenie czujników pomiarowych itp. Wszystkie te czynniki mają wpływ na dokładność identyfikacji. W tej sytuacji wydaje się celowe traktowanie ich wszystkich jako elementów składowych planu eksperymentu. Konwencja ta, stosowana w całej pracy, spowodowała wydzielenie problematyki doboru sterowań w p. 3 oraz iii. Takie rozróżnienie terminologiczne spowodowało, że tytułem "Experiment design" były opatrywane tylko te publikacje autora, które oprócz doboru sterowań dotyczyły także rozmieszczenia czujników pomiarowych, prace [83],[84],[85]. Warto zaznaczyć, że badania równoczesnego doboru kilku elementów szeroko rozumianego planu eksperymentu znajdują się we wczesnej fazie. W odniesieniu do SPS znanych jest tylko kilka prac [68],[27],[132]. W tej sytuacji celowe wydawało się zbadanie najpierw problematyki doboru sterowań w identyfikacji SPR i doprowadzenie jej do etapu skonstruowania użytecznych algorytmów.

Zasadniczymi elementami odróżniającymi problematykę tej pracy od teorii sterowania SPR są:

a) kryteria doboru sterowań, które tutaj są funkcjonałami macierzy kowariancji (lub informacyjnej) oszacowań parametrów obiektu,

b) technika otrzymywania warunków optymalności, której specyfika wynika stąd, że kryteria zależą od pewnych tylko charakterystyk sterowania - na przykład od przestrzenno-czasowej funkcji autokorelacji sterowania.

Różnice te powodują, że otrzymuje się sterowania optymalne o innym charakterze niż w teorii klasycznej. Co więcej, w p. 3.4 pokazano, że bezpośrednie zastosowanie rachunku wariacyjnego prowadzi do tak słabego warunku koniecznego optymalności, że spełniony jest on przez nieskończenie wiele funkcji. Sytuacja taka spowodowała konieczność innego formułowania problemów i szukania nowych metod ich rozwiązywania.

Istotne różnice między tematyką rozprawy a problematyką 3 wynikają z:

A. Zależności sterowania i opisu obiektu od zmiennych przestrzennych, zmieniających się na ogół w ograniczonym obszarze,

B. Jakościowych różnic w reakcjach SPS i SPR na pobudzenia zewnętrzne.

Powyższe różnice powodują, że podstawowy aparat analizy harmonicznej wykorzystywany w p. 3 okazał się tutaj niewystarczający i musiał zostać rozszerzony o elementy teorii równań całkowych z jądrem symetrycznym. Wymagało to pewnego dopasowania tej teorii do sytuacji, w której jądro zależy nieliniowo od parametru oznaczającego częstotliwość. Okazało się także, że zmienne przestrzenne i parametr częstotliwości na ogół nie dają się rozdzielić w rozwiązaniu optymalnym.

Wobec podanych różnic i istnienia w literaturze kilku tylko prac z tego zakresu, rozprawa niniejsza została oparta w całości na opublikowanych wcześniej pracach [83],[86],[82],[84],[95],[100] lub dotychczas nie publikowanych wynikach badań autora. Stanowi więc ona usystematyzowane podsumowanie pewnego, stanowiącego zamkniętą całość, etapu badań własnych optymalnego doboru sterowań w identyfikacji SPR.

Podejmując te badania przed kilku laty autor stanął wobec konieczności nałożenia sobie pewnych ograniczeń, gdyż liczba problemów jakie w praktyce mogą się pojawić jest bardzo duża. Ponieważ stosowane są różne formy opisu SPR, wystąpić mogą różne ograniczenia na dopuszczalne sterowania. Oprócz tego znaczna jest liczba kryteriów optymalności mających jasny sens statystyczny. W tej sytuacji uzasadnione wydawało się wybranie kryterium D-optymalności przy ograniczeniu na średnią moc sterowania jako problemu podstawowego, który został zbadany szczegółowo (rozdz. 2). Następnie w rozdz. 3 pokazano, że podobne podejście pozwala uwzględnić inne ograniczenia przestrzennego przebiegu sterowania oraz uzyskać warunki konieczne i dostateczne optymalności dla całej klasy kryteriów liniowych względem odwrotności macierzy informacyjnej.

W celu uniezależnienia wyników od konkretnej klasy równań o pochodnych cząstkowych wybrano opis obiektu za pomocą funkcji Greena jako podstawowy w rozdz. 2 i 3. Opis ten jest często stosowany w różnych dziedzinach techniki [114],[71],[43], oraz teorii sterowania SPR [09]. W pracy [08] są zawarte obszerne tablice zawierające funkcje Greena

większości stosowanych równań o pochodnych cząstkowych. Wyniki tej rozprawy stosować można także wtedy, gdy funkcja ta nie jest dana w postaci jawnej, lecz wartości jej uzyskuje się numerycznie. Zalety opisu w postaci funkcji Greena zostały wypunktowane w pracy [017]. Opis ten, będący uogólnieniem pojęcia odpowiedzi impulsowej, wydaje się naturalny dla automatyków i jednocześnie zbliżony w zakresie zastosowań do abstrakcyjnego opisu za pomocą teorii półgrup operatorów [02], [018], [18]. Dodatkową jego zaletą, z punktu widzenia tej pracy, jest jawne występowanie w nim zmiennych przestrzennych, co ułatwia analityczne przedstawienie częstotliwościowo-przestrzennej struktury sterowań optymalnych. Prócz tego umożliwia on objęcie jednym formalizmem matematycznych oddziaływań sterowań rozłożonych, brzegowych itp. przez odpowiednie, dla danego typu sterowania, zdefiniowanie funkcji Greena.

Znaczna część wyników rozprawy ma charakter asymptotyczny w tym sensie, że obowiązują one dla długiego (teoretycznie nieskończonego) czasu obserwacji. W praktyce wystarcza, by czas ten był kilkakrotnie dłuższy od dominującej stałej czasowej obiektu. Dzięki temu założeniu uzyskano konstruktywne wyniki pozwalające na analityczne obliczanie optymalnych sterowań lub skonstruowanie algorytmów numerycznych. Inne powody przyjmowania tego założenia przedstawiono w p. 1.2.

Jako podstawę oceny dokładności identyfikacji parametrów obiektu w rozdz. 2 i 3 przyjęto macierz informacyjną Fishera. Ocenę wad i zalet tego podejścia przedstawiono w p. 1.3. O jego przyjęciu zadecydowało to, że uzyskane sterowania optymalne nie zależą od użytej metody identyfikacji, jeśli tylko ta ostania gwarantuje asymptotyczną efektywność estymatorów. Alternatywne podejście zaprezentowano w rozdz. 4. Polega ono na asymptotycznym oszacowaniu macierzy kowariancji estymatorów uzyskanych konkretną metodą estymacji i przy dowolnym, ustalonym sterowaniu. A następnie na doborze odpowiedniego sterowania. Rozdział 4 ilustruje jednocześnie możliwości adaptacyjnego doboru ciągu sterowań. Potrzeba stosowania adaptacji wynika stąd, że otrzymywane sterowania optymalne często zależą od nieznanych, identyfikowanych parametrów obiektu. Powoduje to trudności w realizacji sterowania optymalnego. Trudności te, typowe również dla zadań w p. 3) powodują, że do realizacji optymalnego sterowania w rozdz. 2 i 3 potrzebna jest pewna informacja aprioryczna o nieznanych parametrach. Problem ten przedyskutowano szczegółowo w p. 1.2. Należy jednak podkreślić, że informacja aprioryczna nie jest potrzebna, jeżeli funkcja Greena obiektu zależy liniowo od nieznanych parametrów (klasę takich obiektów oznacza się w pracy symbolem $\mathcal{L}$). Obiekty tej klasy zajmują w rozprawie wyróżnione miejsce, gdyż zarówno do oceny dokładności ich identyfikacji, jak i realizacji optymalnych sterowań, nie są potrzebne żadne przybliżenia.

Dokonamy teraz krótkiego przeglądu treści rozprawy. Rozdział 1 ma charakter wstępny i zawiera praktyczne przykłady SPR, wykorzystywane w całej pracy. Sformułowano w nim także klasę rozpatrywanych zadań identyfikacji ze szczególnym naciskiem na ocenę jej dokładności. Na tej podstawie sformułowano zadania rozpatrywane w pracy. Dokonano także analizy kilku prac o tematyce zbliżonej do problematyki rozprawy. W podrozdziale 2.1 zbadano podstawowe własności uśrednionej macierzy informacyjnej i wyrażono ją w formie zależnej od widmowej gęstości mocy sterowania. Wyniki te pozwalają formułować różne zadania doboru tej gęstości, również takie, których w pracy nie badano. Pozostała część rozdziału 2 poświęcona jest szczegółowej analizie zadania D-optymalnego doboru sterowań z ograniczeniem na uśrednioną, względem zmiennych przestrzennych, moc sygnału sterującego. Otrzymano warunki konieczne i dostateczne optymalności (p. 2.2), które pozwoliły wyjaśnić strukturę częstotliwościowo-przestrzenną sterowania optymalnego i zaproponować sposoby jego realizacji (p. 2.3). Równoległe wyniki dla całej klasy kryteriów L-optymalności przedstawiono w p. 3.2. Rozdział 2 kończy się propozycją algorytmu numerycznego, który zbadano teoretycznie (p. 2.4) i przetestowano na przykładzie identyfikacji parametrów równania przewodnictwa ciepła (p. 2.5). Rozdział 3 ma bardziej przeglądowy charakter. Sformułowano w nim kilka zadań D-optymalnego doboru sterowań przy innych niż w rozdz. 2 ograniczeniach i podano warunki optymalności. Przykłady ich zastosowania do analitycznego znajdowania sterowań zestawiono w p. 3.3. Podrozdział ten zawiera także wyniki badań symulacyjnych, które ilustrują jak dużą dokładność identyfikacji można osiągnąć przez zastosowanie sterowania optymalnego. Podrozdział 3.4 zawiera wstępne rozpoznanie specyfiki analogicznych zadań przy skończonym horyzoncie obserwacji.

Alternatywne w stosunku do rozdz. 2 i 3 podejście, zaproponowane w rozdz. 4, omówiono już wcześniej. Warto tylko wskazać, że pomimo istotnych różnic w sformułowaniu zadania, warunki optymalności uzyskuje się podobnie jak w p. 2.2. W rozdziale tym przedstawiono również wyniki symulacyjnej weryfikacji podejścia adaptacyjnego.

W spisie literatury na końcu pracy podano wszystkie, znane autorowi, prace o tematyce zbliżonej do problematyki rozprawy, a więc także te, w których dokładności identyfikacji SPR uzyskuje się przez odpowiednie rozmieszczenie czujników pomiarowych. Bibliografia ta nie pretenduje natomiast do kompletności w opisach, sterowaniu i identyfikacji SPR. Liczba prac na ten temat jest tak duża, że wymieniono tylko ważniejsze monografie i prace przeglądowe oraz publikacje pośrednio lub bezpośrednio wykorzystane w rozprawie.

Przyjęto zasadę, że dowody wyników wcześniej opublikowanych nie są przytaczane, natomiast dowody wyników pomocniczych zamieszczono w dodatkach na końcu rozdziałów.

CYTOWANA LITERATURA

[01] ATHANS P., FALB L., Optimal Controls, McGraw-Hill, New York 1966.

[02] BALAKRISHNAN A.V., Applied Functional Analysis, Springer Verlag, 1976.

[03] BELLMAN R.E., Adaptive Control Processes, Princeton University Press, 1961.

[04] BELLMAN R.E., Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.

[05] BUTKOVSKIJ A.G., PUSTYLNIKOV A.M., Teorija podvižnogo upravlenija sistemami z raspredelonnymi parametrami, Nauka, Moskva 1980.

[06] BUTKOVSKIJ A.G., Teorija optimalnogo upravlenija sistemami z raspredielonnymi parametrami, Nauka, Moskva 1965.

[07] BUTKOVSKIJ A.G., Metody upravlenija sistemami z raspredelonnymi parametrami, Nauka, Moskva 1975.

[08] BUTKOVSKIJ A.G., Charakteristiki sistem z raspredelonnymi parametrami, Nauka, Moskva 1979.

[09] BUTKOVSKIJ A.G., Some new Results in Distributed Parameter System Control, An Overview, Large Scale Systems vol. 6, pp. 187-202, 1984.

[010] CEA J., Optymalizacja, teoria i algorytmy, PWN, Warszawa 1976.

[011] CYPKIN A.Z., Osnovy informacjonnoj teorii identifikacji, Nauka, Moskva 1984.

[012] EYKHOFF P., System Identification, Wiley, 1974.

[013] EYKHOFF P., ed., Trends and Progress in System Identification, Pergamon Press, Oxford; New York 1981.

[014] FELDBAUM A.A., Osnovy teorii optimalnych avtomatičeskich sistem, Nauka, Moskva 1966.

[015] FELDBAUM A.A., Teorija dualnogo upravlenija, Avtomatika i Telemechanika No 9,11, 1960.

[016] FINDEISEN W., Technika Regulacji Automatycznej, PWN, Warszawa 1965.

[017] GILLES E.D., KNOPP U., Review "Structural Theory of Distributed Systems" by Butkovskij Publ. Horwood Chichester 1983, Automatica vol. 21, pp. 215-220, 1985.

[018] GORECKI H., FUKSA S., KORYTOWSKI A., MITKOWSKI W., Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości, PWN, Warszawa 1983.

[019] HARTMANN K., LEZKI E., SHAFER W., Statistiche Versuchsplannung und Ausvertung in der Stoffwirtschaft, Veb Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1974.

[020] JEGOROV A.I., Optimalnoe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi procesami, Nauka, Moskva 1978.

[021] KACPRZYŃSKI B., Planowanie eksperymentu-podstawy matematyczne, WNT, Warszawa 1974.

[022] KLAMKA J., Sterowalność układów dynamicznych - przegląd problemów: Arch. Aut. i Telemech. t. XXVI, z. 2, pp. 279-309, 1981.

[023] KUBRUSLY C.S., MALEBRANCHE H., A Survey on Optimal Sensors and Controllers Location in DPS, Proc. 3-rd Ifac Symp. On Control of DPS, Toulouse 1982.

[024] KUBRUSLY C.S., Distributed Parameter System Identification, A Survey, Int. J. Control., vol. 26, no 4, pp. 509-535, 1977.

[025] KUBRUSLY C.S., CURTAIN R.F., Identification of Noisy Distributed Parameter Systems Using Stochastic Approximations, Int. J. Control vol. 25, pp. 441-453, 1977.

[026] KWAKERNAK H., SIVAN R., Linear Optimal Control Systems, Wiley Interscience, New York 1972.

[027] LIONS J.L., Controle Optimal de Systemes Governes Par Des Equations Aux derivees Partielles, Dunod Paris, 1968.

[028] LIONS J.L., Some Aspects of Modelling Problems in Distributed Parameter Systems, Lec. Notes in Contr. Inf. Sci. vol. 1, pp. 11--42, 1978.

[029] LIONS J.L., Asymptotic Methods in the Optimal Control of Distributed Systems, Automatica vol. 14, pp. 199-211, 1978.

[030] LIONS J.L., STRAUSS W.A., Some Non-Linear Evolution Equations, Bull. Soc. Math. France vol. 93, pp. 43-96, 1965.

[031] LIONS J.L., MAGENES E., Problemes aux Limites non Homogenes et Applications, Dunod Paris, 1968.

[032] MALANOWSKI K., Zagadnienia sterowania optymalnego dla układów opisywanych równaniami cząstkowymi, skrypt AGH Kraków 1973.

[033] MAŃCZAK K., Technika planowania eksperymentu, WNT, Warszawa 1976.

[034] MAŃCZAK K., Identyfikacja wielowymiarowych obiektów sterowania, WNT, Warszawa 1971.

[035] PAZMAN A., Some Features of the Optimal Experiment Design Theory - A Survey, Math. Operat. und Stat. Ser. Stat vol. 11, pp. 415-446, 1980.

[036] PAZMAN A., Optimum Experimental Designs with Lack of a Priori Information I, Kybernetika vol. 11, pp. 355-367, 1975.

[037] PONTRIAGIN L.S., Matematiceskaja teorija optimalnych processov, Nauka, Moskva 1961.

[038] RAJBMAN M.S., ČADEEV W.M., Postroenie modelej processow proizvodstva, Energija, Moskva 1975.
[039] ROLEWICZ S., Analiza funkcjonalna i teoria sterowania, PWN, Warszawa 1974.
[040] SAGE A.P., MELSA J.L., System Identification, Academic Press, New York 1971.
[041] SZPARKOWSKI Z., Zarys teorii regulacji układów liniowych, PWT, Warszawa 1960.
[042] TAKAHASHI Y., RABINS M.J., AUSLANDER D.M., Control and Dynamic Systems, Addison Wesley Inc. Philipines, 1970.
[043] WĘGRZYN S., Podstawy automatyki, PWN, Warszawa 1961.
[044] WIERZBICKI A., Modele i wrażliwość układów sterowania, WNT, Warszawa 1977.

Autor dziękuje wszystkim osobom, które zapoznały się z maszynopisem tej pracy. Ich opinie i uwagi wpłynęły na sposób prezentacji materiału.

1. FORMUŁOWANIE ZADAŃ DOBORU STEROWAŃ W IDENTYFIKACJI OBIEKTÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Po ukazaniu się przeglądowej pracy [77], w literaturze na temat identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych przyjęło się wyróżnianie etapów procedury identyfikacji. Mimo, że podział na etapy jest w dużym stopniu umowny, to ułatwia on organizację badań i prezentację ich wyników. Na potrzeby niniejszej pracy wyróżnimy następujące główne etapy.

Etap 1. Sformułowanie matematycznego opisu badanego procesu z dokładnością do nieznanych parametrów podlegających identyfikacji.

Etap 2. Wybór metody identyfikacji i ocena jej dokładności.

Etap 3. Dobór sterowań i ewentualnie innych czynników tak, by dokładność identyfikacji osiągnęła zadaną wartość lub była maksymalna.

Etap 4. Wykonanie pomiarów i obliczenie oszacowań nieznanych parametrów.

Etap 5. Weryfikacja hipotez przyjętych w etapie 1; podjęcie decyzji o zakończeniu procedury identyfikacji lub o jej powtórzeniu.

W niniejszej rozprawie zajmować się będziemy etapem 3. Jednakże sformułowanie konkretnych zadań doboru sterowań maksymalizujących dokładność identyfikacji zależy od rozstrzygnięć przyjętych na wcześniejszych etapach. Dlatego omówimy je bardziej szczegółowo w tym rozdziale.

Jeszcze raz podkreślamy umowność powyższego podziału, wynikającą ze ścisłych związków między poszczególnymi elementami procedury identyfikacji. Zwłaszcza dyskusyjna jest kolejność etapów 2 i 3 i wrócimy do niej w p. 1 oraz w rozdz. 4, gdzie okaże się, że przy adaptacyjnym doborze sterowań etapy 2, 3 i 4 wielokrotnie się powtarzają.

1.1. Opis matematyczny obiektów o parametrach rozłożonych

Decyzja o tym, czy badany proces traktować jako obiekt o parametrach rozłożonych (tzn. czy do jego opisu niezbędne są zmienne stanu zależne od współrzędnych przestrzennych i ewentualnie czasu), czy też wystarczająco dokładne jest traktowanie go jako obiektu o parametrach skupionych, tylko w prostych przypadkach może być podjęta a priori. W sytuacjach bardziej złożonych właściwe wydaje się traktowanie procesu jako obiektu o parametrach rozłożonych i dopiero po identyfikacji jego parametrów podjęcie prób uproszczenia otrzymanego opisu.

Formowanie równań opisujących badany proces jest domeną poszczególnych dyscyplin naukowych i, mimo prób [121], [61], nie w pełni poddaje się formalizacji. W niniejszej rozprawie przyjmować będziemy, że równania opisujące proces zostały już otrzymane: bądź to przez szczegółową analizę, bądź też przyjęcie, na podstawie posiadanych informacji, że badany proces można opisać znanymi równaniami. Niezależnie od drogi uzyskania równań procesu zawierają one nieznane parametry (współczynniki), których wartości zależą od konkretnego procesu.

Podane zostaną przykłady równań o pochodnych cząstkowych i procesów, które za ich pomocą można opisać. Przytaczane równania są znane oraz stosowane w poszczególnych dziedzinach techniki i pełnią w tej pracy rolę wielokrotnie używanych przykładów, wskazując jednocześnie potencjalne zastosowania. Są one przy tym tak dobrane, że reprezentują poszczególne klasy równań o pochodnych cząstkowych i typowe własności ich rozwiązań.

Stosowane będą następujące podstawowe oznaczenia:
$\varkappa = [\varkappa^{(1)}, \varkappa^{(2)}, \ldots, \varkappa^{(l)}]^T \in R^l$, wektor współrzędnych przestrzennych, $q(\varkappa,t)$ - zmienna stanu obiektu w punkcie $\varkappa$ w chwili t, $u(\varkappa,t)$ - wymuszenie zewnętrzne oddziałujące na proces w punkcie $\varkappa$ i chwili t (dalej odgrywać ono będzie rolę sterowania). $a = [a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r)}]^T$ - wektor nieznanych parametrów. Gdy potrzebne będzie jawne wskazanie zależności stanu obiektu q nie tylko od $\varkappa, t$, lecz także od wektora parametrów a, używane będzie oznaczenie $q(\varkappa,t;a)$. Średnik w oznaczeniu tym podkreśla, że zależność q od $\varkappa, t$ ma inne źródło niż zależność od a, która jest wynikiem parametrycznej zależności r.r.cz. od współczynników charakteryzujących badany proces. Podobna konwencja używana

będzie w stosunku do innych funkcji zależnych od a, bez powtarzania komentarza.

Przez $g(\varkappa,x,t;a)$ oznaczać będziemy odpowiedź impulsową badanego procesu, zwaną też jego funkcją Greena. Jest ona zdefiniowana dla procesów opisywanych liniowymi i stacjonarnymi r.r.cz. jako odpowiedź w punkcie $\varkappa$ w chwili t na wymuszenie w postaci impulsu jednostkowego (delty Diraca), przyłożone w punkcie x (por. np. [115],[08]). Podkreślić należy, że odpowiedź impulsowa jest obliczana przy zerowych warunkach początkowych oraz spełnieniu jednorodnych warunków brzegowych występujących w opisie procesu.

Uwaga 1.1.1

Spotyka się również inne równoważne określenie funkcji Greena w problemach brzegowo-początkowych dla r.r.cz. Jest ona definiowana jako suma tzw. rozwiązania podstawowego i funkcji spełniającej jednorodne r.r.cz. z warunkami brzegowymi i początkowymi. Przyjęte przez nas określenie jest bliższe określeniu odpowiedzi impulsowej dla obiektów o parametrach skupionych, mającemu tradycje w automatyce.

Za pomocą odpowiedzi impulsowej rozwiązanie r.r.cz. przy wymuszeniu u oraz zerowych warunkach początkowych i jednorodnych warunkach brzegowych przedstawić można w postaci (por. np. [115], [114]):

$$q(\varkappa,t) = \int_0^t \int_\Omega g(\varkappa,x,t-\tau;a)u(x,\tau)dx\,d\tau, \tag{1.1.1}$$

gdzie $\Omega \subset R^1$ jest otwartym jednospójnym obszarem, w którym zachodzą przestrzenne zmiany badanego procesu. Ponieważ g jest odpowiedzią impulsową fizycznego procesu, więc zakładać będziemy, że spełnia ona tzw. warunek fizykalnej realizowalności, tzn.

Z_1) $$g(\varkappa,x,t;a) = 0 \text{ dla } t < 0;\ \varkappa,x \in \Omega .$$

Zamiennie z odpowiedzią impulsową posługiwać się będziemy jej transformatą Fouriera względem czasu, określoną wzorem:

$$\tilde{G}(\varkappa,x,j\omega;a) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(\varkappa,x,t;a)e^{-j\omega t}dt. \tag{1.1.2}$$

Warunki jakie powinny spełniać funkcje g, u, G, aby zagwarantować istnienie całek w (1.1.1), (1.1.2) i we wzorze (1.1.3) podane zostaną w dalszej części rozdziału. Funkcja $\tilde{G}$, zwana dalej transmitancją widmową między punktami x i $\varkappa$, pozwala zapisać (1.1.1) w postaci:

$$\tilde{q}(\varkappa,j\omega) = \int_\Omega G(\varkappa,x,j\omega;a)u(x,j\omega)dx, \tag{1.1.3}$$

gdzie $\tilde{q}(\varkappa, j\omega)$ i $\tilde{u}(x, j\omega)$ są odpowiednio transformatami Fouriera sygnałów $q(\varkappa,.)$ i $u(x,.)$ względem argumentu czasowego.

P r z y k ł a d 1.1

Rozważmy obiekt opisany równaniem pierwszego rzędu typu hiperbolicznego:

$$\frac{\partial q(\varkappa,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial q(\varkappa,t)}{\partial \varkappa} + aq(\varkappa,t) = u_1(\varkappa,t) \tag{1.1.4}$$

dla $\varkappa \in \Omega \triangleq (0,L)$ i $t > 0$ z zerowym warunkiem początkowym $q(\varkappa,0) \equiv 0$, gdzie $v > 0$ i $L > 0$ są zadanymi parametrami. Równanie (1.1.4) uzupełniane jest warunkiem brzegowym, na przykład o postaci:

$$q(0,t) = u_2(t),\ t > 0. \tag{1.1.5}$$

Równanie (1.1.4) jest używane do opisu wielu procesów. Przykładowo uważa się, że dostatecznie dokładnie dla zastosowań opisuje ono:

a) proces nagrzewania materiałów w piecach tunelowych (por. np. [06]), wówczas q interpretowane jest jako temperatura, v jako prędkość przesuwania się materiału, a u_1 jako intensywność nagrzewania,

b) proces suszenia izolatorów ceramicznych w piecu tunelowym przy podobnej jak wyżej interpretacji parametrów [122] z tym, że $u_1(\varkappa,t)$ jest intensywnością ogrzewania przez palniki gazowe rozłożone w sposób ciągły wzdłuż pieca,

c) reaktor rurowy, w którym intensywność reakcji przybliża się składnikiem $a_1.q$, natomiast q jest stężeniem reagentu, u_2 jest stężeniem reagentu na wlocie reaktora, zaś $u_1 = 0$ (por. [23]),

d) proces rozprzestrzeniania się i rozpadu zanieczyszczenia o stężeniu q w rzece przy założeniu, że prędkość nurtu v jest na tyle duża, by można było pominąć dyfuzję wzdłuż nurtu.

Względna łatwość znajdowania rozwiązań równania (1.1.4) powoduje, że zagadnienie identyfikacji parametrów nie nastręcza większych trudności, zwłaszcza jeżeli możliwe jest zastosowanie oryginalnej techniki zaproponowanej w pracy [122], a opartej na wykorzystaniu pomiarów z ruchomego czujnika.

Nietrudno sprawdzić, że rozwiązanie zadania (1.1.4), (1.1.5) i równania (1.1.4) z jednorodnym warunkiem brzegowym po zastąpieniu u_1 przez $u(\varkappa,t) = \delta(\varkappa)\,u_2(t) + u_1(\varkappa,t)$ są takie same. $\delta(\varkappa)$ oznacza dystrybucję zwaną deltą Diraca, a rozwiązania należy rozumieć w sensie dystrybucyjnym (por. np. [108]). Transmitancja widmowa między punktami $x, \varkappa \in \Omega$ procesu (1.1.4), (1.1.5), gdy $u_2 \equiv 0$, ma postać (por. [08]):

$$G(\varkappa,x,j\omega;a) = 1(\varkappa-x)\,\exp\left[-\frac{j\omega+a}{v}(\varkappa-x)\right], \tag{1.1.6}$$

gdzie $1(x)$ jest funkcją skoku jednostkowego (funkcją Heaviside'a). Z punktu widzenia dalszych rozważań istotna jest różniczkowalność (1.1.6) względem parametru a.

Poprawność (1.1.6) wynika stąd, że operator określony formalnym wzorem

$$(Ah)(x) \triangleq -v \frac{\partial h(x)}{\partial x} - ah(x), \tag{1.1.7}$$

a zdefiniowany na zbiorze $D(A) \triangleq \{h: h \in H^1[0,1], h(0) = 0\}$ o wartościach w $L^2(\Omega)$ jest infinityzemalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów, co udowodniono w pracy [18] na s. 24. W monografii tej znaleźć też można potrzebne definicje przestrzeni Sobolewa H^1 i generatora półgrupy oraz inne.

P r z y k ł a d 1.2

Równanie przewodnictwa ciepła w ośrodku jednowymiarowym ma postać:

$$\frac{\partial q(\varkappa,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 q(\varkappa,t)}{\partial \varkappa^2} - a_2 q(\varkappa,t) + u(\varkappa,t) \tag{1.1.8}$$

dla $\varkappa \in \Omega \triangleq (0,\pi)$ i $t > 0$. Wyprowadzenie tego równania można znaleźć w wielu źródłach (np. [61], [43], [20]). W równaniu tym q interpretowane jest jako temperatura ośrodka, u jest intensywnością źródeł ciepła (np. przy nagrzewaniu indukcyjnym), a_1 jest temperaturowym współczynnikiem przewodnictwa (por. [61]). Współczynnik a_2 natomiast charakteryzuje intensywność wymiany ciepła z otoczeniem o temperaturze 0. Zwykle przyjmuje się, że a_1, a_2 są parametrami stałymi. Równanie to jest używane jako składnik opisu wielu procesów takich, jak nagrzewanie wlewków przed walcowaniem [06], nagrzewanie się złoża katalizatora w reaktorach chemicznych [20], suszenie płyt betonowych itp. Przy innej interpretacji zmiennych ma ono również zastosowanie do opisu procesów dyfuzji wód gruntowych [56] oraz zanieczyszczeń [48].

Teoria tego równania jest jedną z lepiej opracowanych. Wyniki dotyczące istnienia, jednoznaczności i regularności jego rozwiązań, przy różnych warunkach brzegowych, znaleźć można przykładowo w pracy [108], [110], [031] (w sformułowaniu wariacyjnym) oraz w pracach [18], [113] (w języku teorii półgrup). Dlatego podane zostaną tutaj tylko fakty ilustrujące założenia przyjmowane w rozdz. 1-3.

Przy warunkach brzegowych typu Dirichleta:

$$q(0,t) = 0, \quad q(\pi,t) = 0 \text{ dla } t > 0, \tag{1.1.9}$$

odpowiedź impulsowa obiektu (1.1.8) ma postać (por. np. prace [18], [115]):

$$g(\varkappa,x,t;a) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k(a)t} v_k(x)v_k(\varkappa), \tag{1.1.10}$$

gdzie $a \triangleq [a_1,a_2]^T$, $v_k(x) = \sqrt{2/\pi}\ \sin(kx); k=1,2, \ldots,$ natomiast

$$\lambda_k(a) = a_1k^2 + a_2,\ k=1,2, \ldots . \tag{1.1.11}$$

Podobnie, z warunkami brzegowymi typu Neumena

$$\left.\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0 \text{ dla } t > 0, \tag{1.1.12}$$

odpowiedź impulsowa ma postać (1.1.10), przy czym $v_0(x) = \sqrt{1/\pi}$, $v_k(x) = \sqrt{2/\pi}\cos(kx)$; $k=1,2,\ldots$ (por. [18], [115]), a sumowanie należy zacząć od $k = 0$.

Można wykazać, że szereg w (1.1.10) jest różniczkowalny względem $\varkappa$ i t oraz, że pochodne można otrzymać różniczkując pod znakiem sumy we wzorze (1.1.10) (por. np. [115]).

Z naszego punktu widzenia istotna jest również różniczkowalność względem a_1,a_2 oraz możliwość otrzymania pochodnych przez różniczkowanie szeregu w (1.1.10) "wyraz po wyrazie". Można to udowodnić wprost, lecz w tym przypadku nie jest to potrzebne - wystarczy zauważyć, że funkcja g we wzorze (1.1.10) zależy od parametrów a_1,a_2 w taki sam sposób jak od t.

W monografii [039] pokazano w jaki sposób sprowadzać różne zagadnienia brzegowe niejednorodne dla równania (1.1.8) do zagadnień z jednorodnymi warunkami brzegowymi.

U w a g a

W powyższym przykładzie funkcje własne $v_k(\varkappa)$, $k=1,2, \ldots$ operatora $a_1(\partial^2/\partial\varkappa^2) - a_2$ z warunkami brzegowymi (1.1.9) lub (1.1.12) nie zależą od wektora a. Natomiast wartości własne (1.1.11) zależą od a liniowo. Własności te zachodzą dla ogólniejszej klasy operatorów (por. [82]) i były przez autora wielokrotnie wykorzystywane w różnych zadaniach identyfikacji i doboru sterowań (por. prace [90], [85], [99]).

P r z y k ł a d 1.3

Przykład ten jest nieco inny niż dwa poprzednie, gdyż obejmuje pewną klasę procesów. Przytaczamy go w celu wskazania, że wyniki rozprawy mogą być stosowane w zadaniach estymacji parametrów w zależnych od zmiennych przestrzennych współczynnikach r.r.cz.

Rozważmy obiekt opisany równaniem

$$\frac{\partial q(\varkappa,t)}{\partial t} = B_\varkappa q(\varkappa,t) + \varepsilon\cdot b(\varkappa;a)q(\varkappa,t) + u(\varkappa,t) \tag{1.1.13}$$

dla $t > 0$ i $\varkappa \in \Omega \subset R^1$; gdzie $B_\varkappa$ jest znanym operatorem, którego określenie zawiera jednorodne warunki brzegowe (zwłaszcza jako $B_\varkappa$ można przyjąć operator występujący w przykładzie 1.1 lub 1.2). Zakładamy, że zmienny współczynnik $b(\varkappa;a)$ w (1.1.13) ma postać:

$$b(\varkappa;a) = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \varphi_i(\varkappa), \tag{1.1.14}$$

gdzie $\varphi_i(.) : \Omega \to R$, $i=1,2, \ldots ,r$, jest zadanym układem liniowo niezależnych funkcji, natomiast $a = [a_1,a_2, \ldots ,a_r]^\nabla$ jest wektorem stałych parametrów podlegających identyfikacji. Zauważmy, że przez odpowiedni wybór $\{\varphi_i(.)\}$ wyrażenie (1.1.14) z dowolną zadaną dokładnością aproksymować może przestrzenną zmienność współczynnika. Figurujący w (1.1.13) parametr liczbowy ε jest tzw. "małym parametrem" o znanej wartości. Jego obecność pozwala zastosować znaną technikę perturbacyjną (por. np. monografię [41]) do znalezienia reprezentacji rozwiązania (1.1.13). Praktyczne przykłady zastosowania tej techniki w zadaniach identyfikacji znaleźć można w pracy autora [98], a jej walorom teoretycznym w identyfikacji nieliniowych r.r.cz. jest poświęcona praca [96].

Zgodnie z metodą perturbacyjną, odpowiedzi impulsowej obiektu (1.1.13) poszukiwać będziemy w postaci:

$$g(\varkappa,x,t;a) = k_o(\varkappa,x,t) + \varepsilon f(\varkappa,x,t;a) + O(\varepsilon), \tag{1.1.15}$$

gdzie $O(\varepsilon)$ oznacza człony rzędu mniejszego niż ε. Występująca w (1.1.15) funkcja k_o jest odpowiedzią impulsową procesu opisanego równaniem:

$$\frac{\partial q(\varkappa,t)}{\partial t} = B_\varkappa q(\varkappa,t) + u(\varkappa,t), \quad \varkappa \in \Omega, \quad t > 0 \tag{1.1.16}$$

i wobec znajomości $B_\varkappa$ zakładamy, iż jest ona znana, natomiast funkcja f podlegać będzie określeniu. Podkreślić należy, że istnienie odpowiedzi o postaci (1.1.15), jak i stosowane dalej przekształcenia, wymagają ścisłego uzasadnienia w każdym rozpatrywanym przypadku. Uzasadnienie takie trudno podać bez sprecyzowania operatora $B_\varkappa$ oraz funkcji $\{\varphi_i\}$ i dlatego dalszy wywód traktować trzeba tylko jako wzorzec postępowania formalnego. W postępowaniu tym (począwszy od (1.1.15)) człony rzędu $O(\varepsilon)$ będziemy pomijać bez komentarza.

Po podstawieniu (1.1.15) do (1.1.13) i skorzystaniu z określenia k_o otrzymamy dla f następujące równanie:

$$\frac{\partial f(\varkappa,x,t;a)}{\partial t} = B_\varkappa f(\varkappa,x,t;a) + b(\varkappa;a) \quad k_o(\varkappa,x,t) \tag{1.1.17}$$

dla $\varkappa \in \Omega$ i $t > 0$. W równaniu tym ostatni człon pełni taką samą rolę jak wymuszenie zewnętrzne. Spostrzeżenie to pozwala zapisać odpowiedź impulsową (1.1.13) w postaci:

$$g(\varkappa,x,t;a) = k_0(\varkappa,x,t) + \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{r} a_i k_i(\varkappa,x,t), \tag{1.1.18}$$

gdzie dla $i=1,2, \ldots ,r$

$$k_i(\varkappa,x,t) = \int_0^t \int_\Omega k_0(\varkappa,y,t-\tau)\varphi_i(y)k_0(y,x,\tau)dyd\tau. \tag{1.1.19}$$

Zauważmy, że (1.1.18) obowiązuje z dokładnością do członów rzędu $O(\varepsilon)$, ale jeśli ich pominięcie jest dopuszczalne, to jest ono bardzo dogodne w identyfikacji (por. [98]).

Inne przykłady wskazujące na możliwości zastosowań rezultatów rozprawy w zadaniach identyfikacji parametrów r.r.cz. typu hiperbolicznego oraz w przypadkach dwu- i trójwymiarowych obszarów przestrzennych znaleźć można w pracach autora [85],[93].

Przejdźmy do sformułowania podstawowych założeń dotyczących opisu matematycznego identyfikowanego procesu, które obowiązywać będą w rozdz. 2 i 3. Założenia te opatrywać będziemy komentarzami dotyczącymi zakresu ich stosowalności lub możliwości ich osłabienia kosztem komplikacji wzorów.

Powyższe przykłady wskazują, że posługiwanie się odpowiedzią impulsową i wzorami (1.1.1) oraz (1.1.2) pozwala prosto wyrazić wpływ sterowania u na stan q, oraz że w wielu ważnych przypadkach odpowiedź impulsowa g dana jest jawnym wyrażeniem zależnym od nieznanych parametrów $a_1, a_2, \ldots ,a_n$. Znajomość analitycznej postaci funkcji g w tej pracy nie jest konieczna. Wystarczy posługiwać się jej przybliżeniem numerycznym, otrzymywanym w wyniku wielokrotnego rozwiązania równania procesu dla różnych położeń wymuszenia punktowego.

Mimo opracowania kilku grup skutecznych metod numerycznych dla r.r.cz. (por. np. prace [25],[42]) obliczenie odpowiedzi impulsowej może być czaso- i pamięciochłonne. Jednakże w zadaniach identyfikacji taki nakład obliczeniowy może być opłacalny ze względu na konieczność wielokrotnego obliczania odpowiedzi obiektu dla różnych wartości parametrów i sterowań. Dlatego przyjmujemy następujące założenie:

Z_2) Odpowiedź impulsowa $g(\varkappa,x,t;a)$ badanego procesu jest znana z dokładnością do wektora stałych parametrów $a \in R^r$. Oznacza to, że dana jest funkcja $g : (\Omega \times \Omega \times R \times \mathcal{A}) \to R$, gdzie $\Omega \subset R^1$ jest otwartym jednospójnym obszarem współrzędnych przestrzennych proce-

su, natomiast $\mathcal{A} \subset R^r$ jest zbiorem dopuszczalnych parametrów i takim, że dla pewnego $a^0 \in \mathcal{A}$ funkcja $g(\varkappa, x, t; a^0)$ jest odpowiedzią impulsową badanego procesu. Wektor a^0, nazywamy w dalszym ciągu wektorem parametrów badanego obiektu, podlegać będzie estymacji na podstawie pomiarów.

Przyjęcie powyższego założenia wynika stąd, że równania procesu otrzymuje się w wyniku zastosowania praw zachowania masy, energii itp. oraz wielokrotnie weryfikowanych związków konstytutywnych.

Po identyfikacji założenie to powinno zostać ponownie zweryfikowane (por. wstęp do niniejszego rozdziału). Zbiór dopuszczalnych parametrów odzwierciedla posiadaną informację aprioryczną o nieznanych parametrach.

U w a g a 1.1.2

Parametry $a \in \mathcal{A}$ są zwykle istotnymi charakterystykami materiałów i są często mierzone, a nawet tablicowane, co pozwala czasem zawęzić zbiór $\mathcal{A}$ do pewnego otoczenia ich wartości nominalnych, oznaczanych dalej przez $\bar{a}$.

W celu uwzględnienia występujących w zastosowaniach ograniczeń w możliwościach pomiarowych i w oddziaływaniu na proces, w zbiorze Ω wyróżnimy dwa podzbiory Ω_p i Ω_u, interpretowane odpowiednio jako zbiór punktów, w których możliwe jest dokonywanie pomiarów stanu q i dopuszczalnych punktów oddziaływania sterowania u.

Z_3) Zbiory Ω_p i Ω_u są domknięte i ograniczone w R^1.

Z_4) Przyjmować będziemy, że $u(\varkappa, t)$ jest zerem dla $\varkappa \notin \Omega_u$ oraz, że dla każdego T skończonego całka

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\Omega_u} u^2(x,t)\,dx\,dt$$

istnieje i jest skończona; T jest długością przedziału obserwacji.

Z_5) Dla każdego $a \in \mathcal{A}$, $\varkappa \in \Omega_p$ funkcja $g(\varkappa, x, t; a)$ jest ciągła względem tych argumentów dla prawie wszystkich $(x,t) \in \Omega_u \times [0,T]$.

Z_6) Istnieje funkcja $F : \Omega_u \times [0,T] \to R^+$ taka, że dla wszystkich $a \in \mathcal{A}$, $\varkappa \in \Omega_p$ $|g(\varkappa, x, t; a)| \leqslant F(x,t)$, dla której całka

$$\int_0^T \int_{\Omega_u} F^2(x,t)\,dx\,dt$$

istnieje i jest skończona.

Uwzględniwszy określenie zbiorów Ω_p i Ω_u, odpowiedź obiektu (1.1.1) przy zerowych warunkach początkowych i jednorodnych warunkach brzegowych zapisać można w postaci:

$$q(\varkappa,t) = \int_0^t \int_{\Omega_u} g(\varkappa,x,\tau;a)u(x,t-\tau)dxd\tau \qquad (1.1.20)$$

dla $\varkappa \in \Omega_p$ i $t > 0$.

U w a g a 1.1.3

Założenia Z_3 i Z_6 zapewniają ciągłość wyrażenia podcałkowego w (1.1.20) względem $\varkappa \in \Omega_p$ i $a \in \mathcal{A}$ dla prawie wszystkich (x,t) oraz jego majoryzację przez $|u(x,t)|\cdot F(x,t)$. To ostatnie wyrażenie jest, na mocy nierówności Schwartza oraz Z_4 i Z_6, funkcją całkowalną na $\Omega_u \times [0,T]$. Własności te wyczerpują założenia twierdzenia (por. [110] tw. 45, str. 51) zapewniającego istnienie całki w (1.1.20) i jej ciągłość względem $\varkappa \in \Omega_p$ i $a \in \mathcal{A}$.

Posługiwanie się transmitancją widmową $\tilde{G}$ wymaga przyjęcia założenia gwarantującego istnienie całki w (1.1.2). Warunkiem dostatecznym, który to zapewnia jest

Z_7) Dla każdego $\varkappa \in \Omega_p$, $x \in \Omega_u$, $a \in \mathcal{A}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\varkappa,x,t;a)|dt < \infty$$

Jednocześnie założenie to zapewnia stabilność badanego obiektu (por. np. [36],[114]).

Jeżeli dostępne są pomiary, to powyższe założenia Z_1-Z_7 pozwalają na identyfikację. Nie umożliwiają one jednak oceny jakości identyfikacji, bez której uzyskane oszacowania parametrów są tylko zestawem liczb. Ocena dokładności oszacowań wymaga znajomości wrażliwości stanu q na zmiany parametrów $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Analizy pojęcia wrażliwości w układach sterowania dokonano w pracy [044]. W monografii tej opracowano też ogólną metodykę badania wrażliwości. Dla celów tej rozprawy wystarczające jest ograniczenie się do wyrażenia wrażliwości przez pochodne $\partial q/\partial a_i$ $i=1,2,\ldots,r$. Aby zapewnić ich istnienie i możliwość obliczenia na podstawie przyjętych danych, potrzebne będą następujące założenia.

Z_8) Pochodne $\partial g(\varkappa,x,t;a)/\partial a_i$, oznaczane dalej przez $k_i(\varkappa,x,t;a)$, $i=1,2,\ldots,r$, istnieją i są ciągłymi funkcjami wektora $a \in \mathcal{A}$ dla prawie wszystkich wartości $\varkappa \in \Omega_p$, $x \in \Omega_u$, $t \in [0,T]$.

Z_9) Istnieją funkcje $f_i : \Omega_p \times \Omega_u \times [0,T] \longrightarrow R^+$ takie, że dla każdego $a \in \mathcal{A}$ $|k_i(\varkappa,x,t;a)| \leqslant f_i(\varkappa,x,t)$, dla których całki

$$\int_{\Omega_u} \int_0^T f_i^2(\varkappa,x,t)dxdt, \quad i=1,2, \ldots ,r$$

istnieją i są skończone dla wszystkich $\varkappa \in \Omega_p$.

Z_{10}) Istnieją stałe $0 < C_i < \infty$ takie, że dla każdego $\varkappa \in \Omega_p$, $x \in \Omega_u$, $a \in \mathcal{A}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k_i(\varkappa,x,t;a)|dt \leqslant C_i \quad i=1,2, \ldots ,r .$$

U w a g a 1.1.4

Założenie Z_8 zapewnia różniczkowalność względem a_i, $i = 1,2, \ldots$ $\ldots ,r$ wyrażenia podcałkowego w (1.1.20). Nierówność Schwarza oraz Z_4 i Z_9 pozwalają stwierdzić, iż wyrażenie to jest majoryzowane przez funkcję całkowalną. W ten sposób spłenione są założenia twierdzenia o różniczkowalności całki względem parametrów (por. [110], tw. 46, s. 52). Na mocy tego twierdzenia istnieją pochodne $y_i(\varkappa,t) \triangleq \partial q(\varkappa,t;a)/\partial a_i$ $i=1,2, \ldots ,r$ i można je otrzymać przez różniczkowanie pod całkami w wyrażeniu (1.1.20), tzn.

$$y_i(\varkappa,t) = \int_0^t \int_{\Omega_u} k_i(\varkappa,x,\tau;a)u(x,t-\tau)dxd\tau . \tag{1.1.21}$$

Założenie Z_{10} zapewnia istnienie transformaty Fouriera funkcji $k_i(\varkappa,x,.;a)$.

Podsumowując; badany proces jest opisany przez związek

$$q(\varkappa,t;a) = \int_0^t \int_{\Omega_u} g(\varkappa,x,\tau;a)u(x,t-\tau)dxd\tau . \tag{1.1.22}$$

Obowiązuje on przy zerowych warunkach początkowych. Założenie to przyjęto ze względu na asymptotyczny charakter wyników rozdz. 2 i 3, w których warunki początkowe nie odgrywają roli. Wcześniej pokazano też, że przyjęcie w (1.1.22) jednorodnych warunków brzegowych jest dopuszczalne, gdyż ewentualne sterowania brzegowe mogą być formalnie włączone w sterowanie rozłożone u. Z procesem (1.1.22) związany jest wektor wrażliwości $y(\varkappa,t;a) \triangleq [y_1(\varkappa,t;a), \ldots ,y_r(\varkappa,t;a)]^T$, który można obliczyć następująco:

$$y(\varkappa,t;a) = \int_0^t \int_{\Omega_u} k(\varkappa,x,\tau;a)u(x,t-\tau)dx d\tau, \qquad (1.1.23)$$

gdzie $k(\varkappa,x,t;a) \triangleq [k_1(\varkappa,x,t;a), \ldots ,k_r(\varkappa,x,t;a)]^\nabla$.

W klasie procesów, które można opisać przez związek (1.1.22), wyróżnimy ważną, z punktu widzenia identyfikacji, podklasę o odpowiedziach impulsowych postaci:

$$g(\varkappa,x,t;a) = k_0(\varkappa,x,t) + \sum_{i=1}^{r} a_i k_i(\varkappa,x,t), \qquad (1.1.24)$$

gdzie funkcje $k_i(\varkappa,x,t)$ $i=0,1,2, \ldots ,r$ są znane, natomiast stałe parametry a_i $i=1,2, \ldots ,r$ nie są znane i podlegają identyfikacji. Podklasę tę nazywać będziemy klasą $\mathcal{L}$ ze względu na afiniczną zależność g od wektora a.

Ze względu na interpretację dalszych wyników podkreślić należy, że dla obiektów z klasy $\mathcal{L}$ wektor wrażliwości $y(\varkappa,t;a)$ oraz wektor $k(\varkappa,x,t;a)$ nie zależą od wektora a (w takiej sytuacji argument ten będziemy opuszczać). Przykład 1.3 pozwala nadać jedną z możliwych interpretacji fizycznych opisom z klasy $\mathcal{L}$.

Ograniczenie się do systemów stacjonarnych powoduje, że przyjęty tutaj przedział obserwacji $[0,T]$ jest umowny. W rozdziale drugim i częściowo w trzecim wygodniejsze będzie przyjęcie przedziału obserwacji o postaci $[-T/2,T/2]$. Wówczas przedziały całkowania $[0,T]$ występujące we wzorach tego rozdziału należy odpowiednio zmienić.

1.2. Pomiary, sformułowanie zadania estymacji i ocena jej dokładności

W podrozdziale tym przedstawimy założenia dotyczące pomiarów stanu obiektu. Na ich podstawie sformułujemy zadanie identyfikacji obiektu opisanego w p. 1.1. Jak się okaże, identyfikacja polegać będzie na estymacji wektora parametrów obiektu. Takie sformułowanie zadania identyfikacji pozwala skorzystać ze znanych w teorii estymacji wyników dotyczących oszacowania dokładności identyfikacji za pomocą nierówności Rao-Cramera. W dalszej części podrozdziału przedyskutowane zostaną możliwości praktycznego wykorzystania oszacowania Rao-Cramera w problemie doboru sterowań z punktu widzenia jakości identyfikacji.

W podrozdziale tym występujące zakłócenia sformułowano w klasyczny sposób jako addytywne zakłócenia pomiarowe. Formalizacja zakłóceń w postaci niemierzalnego sygnału oddziałującego, podobnie jak sterowanie na badany obiekt, wymaga innego podejścia do zadania identyfikacji i doboru sterowań. Dlatego problem ten przedstawiamy osobno w rozdz. 4.

Pomiary. W pracach na temat identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych problem adekwatnej matematycznej formalizacji mierzonych wielkości jest jednym z najczęściej dyskutowanych (por. prace [104],[6], [1],[77]). Ze względów teoretycznych wygodne byłoby przyjęcie tzw. pomiarów rozłożonych, dokonywanych we wszystkich punktach przestrzennych pewnego obszaru. Pomiar taki bywa jednak wykonalny jedynie w rzadkich przypadkach. Dlatego zwykle przyjmuje się, że pomiary są dokonywane w oddzielnych punktach przestrzennych (por. np. [16],[49],[52]). Jednakże i to bardziej realistyczne podejście wymaga zastrzeżenia, że rozmiary czujników są na tyle małe w zestawieniu z przestrzenną zmiennością mierzonych sygnałów, iż można je pominąć.

Posługiwanie się pojęciem pomiaru punktowego może powodować również trudności teoretyczne, jeżeli jako przestrzeń stanów przyjmie się klasę funkcji, dla których trudno zdefiniować pojęcie wartości funkcji w punkcie.

Dzięki przyjętym w p. 1.1 założeniom trudność ta w naszym przypadku nie wystąpi, gdyż stan q jest ciągłą funkcją zmiennych przestrzennych $\varkappa \in \Omega_p$ (por. uwaga 1.1.3), dla której wartość w punkcie jest dobrze określona.

Na podstawie powyższych rozważań przyjmujemy, że dostępne pomiary stanu obiektu mają postać:

$$f_i(t) = q(\varkappa_i, t; a^0) + \varepsilon_i(t); \quad i = 1,2, \dots ,I; \quad t \in [0,T], \qquad (1.2.1)$$

Znaczenie użytych w (1.2.1) symboli jest następujące:

- $\varkappa_i \in \Omega_p$, $i = 1,2,\dots,r$ - punkty rozmieszczenia czujników pomiarowych
- $q(\varkappa_i, t; a^0)$ - stan badanego obiektu w punkcie $\varkappa_i$ w chwili t, dla pewnego nieznanego wektora parametrów $a^0 \in \mathcal{A}$,
- $\varepsilon_i(\cdot)$, $i = 1,2, \dots ,r$ - zakłócenia pomiarowe, których charakter zostanie dalej określony,
- $f_i(\cdot)$, $i = 1,2, \dots ,r$ - rezultaty pomiarów stanowiące podstawę estymacji wektora a^0.

O zakłóceniach pomiarowych zakładamy, że są realizacjami procesów stochastycznych i dla uproszczenia przyjmujemy klasyczne warunki:

Z_{11}) $\varepsilon_i(\cdot)$ jest procesem stochastycznym zwanym gaussowskim szumem białym (por. [125]) o wartości oczekiwanej 0 i skończonej wariancji $\sigma^2 = 1$, $i = 1,2, \dots ,r$.

Z_{12}) Procesy $\varepsilon_i(\cdot)$ $i=1,2, \dots ,r$ są procesami stochastycznie niezależnymi.

Nie będziemy wprowadzać osobnych oznaczeń do rozróżnienia procesów stochastycznych i ich realizacji; rozróżnienie będzie wynikało z kontekstu. Gdy mowa będzie o przetwarzaniu wyników pomiarów w celu otrzymania przybliżonych liczbowych wartości nieznanych parametrów (estymat), wówczas będziemy mieć do czynienia z konkretnymi realizacjami procesów stochastycznych. Jeśli natomiast przed dokonaniem pomiarów obliczać będziemy oszacowania potencjalnej dokładności estymacji, to $\varepsilon_i(\cdot)$ oraz $f_i(\cdot)$ są procesami stochastycznymi.

U w a g a 1.2.1

Założenie Z_{11} można osłabić kosztem komplikacji wzoru dla macierzy informacyjnej. W pracy [87] pokazano, że jeżeli rozkłady zakłóceń w poszczególnych chwilach nie są gaussowskie, to macierz informacyjna różni się od podanej we wzorze (1.2.4) funkcyjnym mnożnikiem, który formalnie można uwzględnić modyfikując odpowiedź impulsową obiektu. Podobny zabieg formalny pozwala uwzględnić ewentualną zależność wariancji zakłócenia pomiarowego od położenia czujnika. Podkreślić należy, że przyjęcie założenia o rozkładach prawdopodobieństwa zakłóceń jest konieczne ze względu na możliwość oszacowania a priori dokładności identyfikacji i jej zależności od sterowania.

W Z_{11} w celu skrócenia zapisów przyjęto $\sigma^2 = 1$. Wariancja ta pojawia się jako stały mnożnik w macierzy informacyjnej i jej wartość ma wpływ na samą dokładność estymacji, ale nie wpływa ona na wyniki przedstawione w rozdz. 2 i 3 (jej wartość może nawet nie być znana).

<u>Sformułowanie zadania identyfikacji</u>. Jak stwierdziliśmy we wstępie do tego podrozdziału, przy przyjętych założeniach zagadnienie identyfikacji sprowadza się do problemu estymacji wektora parametrów obiektu $a^o \in \mathcal{A}$. Estymacji dokonuje się na podstawie znajomości:

a) opisu obiektu (1.1.20) z uwzględnieniem zerowych warunków początkowych i brzegowych,

b) pomiarów $f_i(\cdot)$, $i = 1,2, \ldots ,I$,

c) wybranego wcześniej i użytego w trakcie pomiarów sterowania u.

Zadanie identyfikacji polega na podaniu odwzorowania Ψ_T, przekształcającego pomiary $F(\cdot) \triangleq [f_i(\cdot), i = 1,2, \ldots ,I]$ w estymatę a_T wektora a^o z uwzględnieniem pozostałych danych. Przed dokonaniem pomiarów $f_i(\cdot)$, $i = 1,2, \ldots ,I$ są procesami stochastycznymi, natomiast $a_T = \Psi_T(F(\cdot))$ jest wektorem losowym zwanym estymatorem.

Jak wiadomo (por. np. prace [103], [131]), rozkład prawdopodobieństwa estymatora powinien koncentrować się wokół szacowanej wartości a^o, przynajmniej gdy $T \to \infty$. Wyrazem tego są wymagania asymptotycznej nieobciążoności estymatora i możliwie małych wariancji estymatorów poszczególnych elementów wektora a^o. Przy pewnych warunkach regularności, któ-

rych nie będziemy tu omawiać, estymatory uzyskane metodą największej wiarygodności (NW) spełniają omówione wymagania (por. prace [87], [89], gdzie zagadnienia te były szczegółowo badane dla obiektów o parametrach rozłożonych). Przy założeniach Z_{11}, Z_{12} estymator największej wiarygodności $\hat{a}_T$ jest taki sam, jak estymator minimalizujący następujące wyrażenie względem $a \in \mathcal{A}$:

$$J_T(a) = \sum_{i=1}^{I} \int_0^T [f_i(t) - q(x_i,t;a)]^2 dt, \qquad (1.2.2)$$

gdzie q dana jest przez (1.1.20). A więc, $\hat{a}_T$ jest równocześnie tzw. estymatorem najmniejszej sumy kwadratów.

U w a g a 1.2.2

W monografii [125] wyprowadzono wzór pozwalający obliczyć logarytm ilorazu wiarygodności, który od (1.2.2) różni się o wyrażenie nie będące funkcją wektora $a \in \mathcal{A}$.

Trudnemu zagadnieniu minimalizacji (1.2.2) w odniesieniu do różnych klas obiektów o parametrach rozłożonych poświęcono bardzo wiele prac (por. prace [9], [30], [74], [78], gdzie zawarto przeglądy literatury na ten temat). Metod identyfikacji polegających na minimalizacji (1.2.2) nie będziemy tu omawiać. Dla celu niniejszej monografii istotne jest to, że istniejące metody są dostatecznie skuteczne, a w odniesieniu do klasy obiektów $\mathcal{X}$ minimalizacja (1.2.2) sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych.

<u>Dokładność estymacji - granica Rao-Cramera</u>. Przyjęty schemat pomiarów (1.2.1) oraz Z_{11}, Z_{12} pozwalają zastosować znane wyniki statystyki procesów stochastycznych (por. prace [10], [125], [60]) do oszacowania dokładności estymacji. Przytoczymy zarys tych wyników, które będą dalej potrzebne.

Podstawowy wynik to nierówność Rao-Cramera, którą podajemy w wersji asymptotycznej, tzn. dla dużych czasów obserwacji T. Stwierdza ona, że macierz kowariancji dowolnego asymptotycznie nieobciążonego estymatora $\tilde{a}_T$, oznaczana przez $\mathrm{cov}(\tilde{a}_T)$, spełnia nierówność

$$\mathrm{cov}(\tilde{a}_T) \geqslant M_T^{-1} \qquad (1.2.3)$$

przy T na tyle dużym, by można było pominąć obciążenie estymatora. W (1.2.3) M_T oznacza macierz informacyjną Fishera określoną w (1.2.4), natomiast znak nierówności w (1.2.3) należy rozumieć w ten sposób, że $\mathrm{cov}(\tilde{a}_T) - M_T^{-1}$ jest macierzą nieujemnie określoną.

W cytowanych monografiach okazuje się, że macierz informacyjna Fishera (MIF) ma w rozważanym zadaniu estymacji następującą postać:

$$M_T = \sum_{i=1}^{I} \int_0^T y(\varkappa_i, t; a^o) y^{\nabla}(\varkappa_i, t; a^o) dt, \tag{1.2.4}$$

gdzie wektor wrażliwości y jest obliczany zgodnie z (1.1.23), przy czym

$$k_i(\varkappa, x, t; a^o) = \left. \frac{\partial g(\varkappa, x, t; a)}{\partial a_i} \right|_{a=a^o}, \quad i=1,2, \ldots ,r. \tag{1.2.5}$$

W cytowanych monografiach MIF jest wyprowadzana dla problemu estymacji wektora parametrów na podstawie obserwacji sygnału, zależnego od parametrów i czasu, mierzonego w obecności szumu. Poprawność zastosowania tych wyników do rozważanego tu zadania wynika stąd, że schemat pomiarów (1.2.1) można w ten sam sposób interpretować, a zależność od zmiennych przestrzennych dana jest przez wyrażenie (1.1.23).

W pracy [84] wyprowadzono wzór pozwalający obliczyć MIF w zadaniu estymacji dla obiektów o parametrach rozłożonych przy punktowych pomiarach dokonywanych w dyskretnych chwilach czasu. Dokonanie przejścia granicznego w tym wzorze daje wyrażenie (1.2.4), gdy odległość między chwilami pomiarów maleje do zera.

Następujące uwagi mają istotne znaczenie dla sformułowania zadań rozpatrywanych w rozdz. 2 i 3 oraz interpretacji uzyskanych rozwiązań.

U w a g a 1.2.3

W zadaniu estymacji parametrów obiektu z klasy $\mathcal{L}$ macierz kowariancji estymatora NW ma postać:

$$\mathrm{cov}(\hat{a}_T) = M_T^{-1}, \tag{1.2.6}$$

sam estymator jest nie obciążony dla skończonych wartości T. Wzór (1.2.6) oznacza, że w tym przypadku w nierówności Rao-Cramera osiągana jest równość, a więc $\hat{a}_T$ jest estymatorem efektywnym. Podkreślić należy, że dla obiektów z klasy $\mathcal{L}$, M_T nie zależy od nieznanych parametrów $a^o \in \mathcal{A}$.

U w a g a 1.2.4

Gdy $g(\varkappa, x, t; a)$ zależy od $a \in \mathcal{A}$ nieliniowo, znak równości w nierówności Rao-Cramera może być osiągnięty tylko asymptotycznie, gdy $T \to \infty$. Własność ta jest charakterystyczna dla estymatorów asymptotycznie efektywnych (por. np. [10], [103]), do których należy estymator NW $\hat{a}_T$. Zachodzi wtedy zbieżność rozkładu $\sqrt{T}(a_T - a^o)$ do rozkładu normalnego o średniej zero i macierzy kowariancji $(M_T/T)^{-1}$, gdy $T \to \infty$. Oznacza to, że estymator NW zapewnia asymptotycznie najlepsze przetworzenie danych pomiarowych.

Uprzedzając dyskusję w 1.3 rozważmy możliwość wykorzystania MIF do skonstruowania wskaźnika jakości estymacji, służącego doborowi sterowań. Jak wynika z uwagi 1.2.3, dla obiektów z klasy $\mathcal{L}$ odpowiednio dobrany funkcjonał MIF może służyć jako wskaźnik jakości estymacji, którego wartość dla danego sterowania u, obliczyć można przed dokonaniem pomiarów. Co więcej, wzór (1.2.6) obowiązuje dla T skończonych.

Gdy parametryzacja w $g(\varkappa,x,t;a)$ jest nieliniowa, sytuacja znacznie się komplikuje. Powodem jest brak w teorii estymacji ogólnej metody obliczania dokładnej macierzy kowariancji estymatorów parametrów dla skończonych T. Z wyników przytoczonych w uwadze 1.2.4, często proponuje się korzystać z M_T^{-1} jako przybliżenia dla dużych T, macierzy kowariancji estymatorów (por. prace [22],[34],[35]). Jednakże w rozważanym przypadku nieliniowej parametryzacji macierz M_T zależy od wektora a^o nieznanych parametrów. Utrudnia to ocenę dokładności estymacji przed dokonaniem pomiarów - a co za tym idzie - utrudnia skonstruowanie wskaźnika jakości doboru sterowań optymalizujących jakość identyfikacji. W literaturze [27],[65],[132] na temat doboru sterowań z punktu widzenia jakości identyfikacji obiektów o parametrach skupionych występuje analogiczna trudność. W celu jej pokonania w cytowanych pracach zostały zaproponowane i zaakceptowane podejścia, które skrótowo przedstawimy, gdyż będziemy się nimi także posługiwać. Podczas prezentacji tych podejść używać będziemy oznaczenia $M_T(u;a)$ w celu wskazania zależności macierzy, danej wzorem (1.2.4), od wektora parametrów $a \in \mathcal{A}$ i sterowania u. Należy przy tym podkreślić, że w oznaczeniu tym wektor $a \in \mathcal{A}$ odgrywa rolę wektora zmiennych, natomiast $M_T(u;a)|_{a=a^o}$ dane jest wzorem (1.2.4). W celu skrócenia wzorów używamy (1.2.4) z a^o zastąpionym przez wektor zmiennych $a \in \mathcal{A}$ do określenia $M_T(u;a)$. W dalszej części rozprawy zależności M_T od $a^o \in \mathcal{A}$ nie będziemy wskazywać jawnie.

Zapowiadane podejścia uszeregować można w zależności od rodzaju informacji aprioryczneej, posiadanej o wektorze $a^o \in \mathcal{A}$.

1. Promień zbioru $\mathcal{A}$ jest na tyle mały, że elementy $M(u;a)$ zmieniają się w niewielkim stopniu przy zmianach $a \in \mathcal{A}$. Wówczas jako podstawę oceny dokładności estymacji przyjmuje się macierz $M_T(u;\bar{a})$, gdzie $\bar{a} \in \mathcal{A}$ jest wybranym wektorem wartości nominalnych dla estymowanych parametrów (por. uwaga 1.1.2). Przy tak dużej informacji aprioryczneej problem polega na dokładnej estymacji $a^o \in \mathcal{A}$. Pomimo opisowego zakreślenia obszaru stosowalności podejście to jest najczęściej spotykane w literaturze (por. np. [27],[64]-[68]), gdyż jest proste w zastosowaniu, a prócz tego stanowi podstawowy element innych podejść.

2. Podejście bayesowskie. Jak wiadomo, podejście to jest stosowane wtedy, gdy wektor a^o traktować można jako realizację wektora loso-

wego o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa określonym na σ-ciele podzbiorów zbioru $\mathcal{A}$. Dyskusję możliwości zastosowań tego podejścia do problemów identyfikacji znaleźć można w wielu podręcznikach (por. np. [012],[013], a w odniesieniu do identyfikacji SPR - w [118]). Przyjąwszy kwadratową funkcję strat, estymator bayesowski w rozważanym tu zadaniu estymacji określamy jako takie odwzorowanie $\check{\Psi}_T$, które minimalizuje średnie ryzyko $J_B(\Psi_T)$ dane wzorem:

$$J_B(\Psi_T) = \underset{a,F}{E}\,[(a-\Psi_T(F(.)))^T W(a-\Psi_T(F(.)))] \tag{1.2.7}$$

w klasie wszystkich mierzalnych odwzorowań zbioru pomiarów w $\mathcal{A}$.

We wzorze (1.2.7) W jest zadaną rxr dodatnio półokreśloną macierzą wagową. Zakładając, że T jest na tyle duże, by można było pominąć obciążenie estymatora bayesowskiego, otrzymamy następujące wyrażenie dla minimalnego ryzyka:

$$J_B(\check{\Psi}_T) = \underset{a}{E}\,[\mathrm{tr}(W\,\mathrm{cov}(\check{a}))], \tag{1.2.8}$$

gdzie $\mathrm{cov}(\check{a})$ jest macierzą kowariancji estymatora bayesowskiego $\check{a} = \check{\Psi}_T(F(.))$. Korzystając z uwag 1.2.3 i 1.2.4 macierz $\mathrm{cov}(\check{a})$ można zastąpić przez $M_T^{-1}(u;a)$, co daje

$$J_B(\check{\Psi}_T) = \underset{a}{E}\,[\mathrm{tr}(WM_T^{-1}(u;a)]. \tag{1.2.9}$$

W podrozdziale 1.3 okaże się, że wskaźnik jakości (1.2.9) należy do klasy wskaźników liniowych względem M_T^{-1}. W pracy [27] zaleca się nawet stosowanie zamiast (1.2.9) uproszczonego wskaźnika o postaci:

$$\mathrm{tr}\,[WM_T^{-1}(u;\bar{\bar{a}})], \tag{1.2.10}$$

gdzie $\bar{\bar{a}} \in \mathcal{A}$ jest wartością średnią rozkładu apriorycznego. Tamże sugeruje się używanie wzorów (1.2.9) lub (1.2.10) przy innej niż kwadratowa funkcja strat z macierzą W wybraną jako jej hesjan.

3. Podejście adaptacyjne. Jeżeli informacja aprioryczna jest zbyt mała, by można było zastosować podejście 1 lub 2, to do oceny dokładności identyfikacji wykorzystać można informacje zdobywane na bieżąco. W celu naszkicowania tego podejścia w jego najprostszej wersji przypuśćmy, że procedura identyfikacji i oceny jej dokładności jest powtarzana wielokrotnie na podstawie kolejno dokonywanych obserwacji o dostatecznie długim czasie trwania T.

Niech dalej $a_n \in \mathcal{A}$ oznacza estymatę wektora parametrów uzyskaną w wyniku identyfikacji na n-tym etapie. Wówczas do oszacowania macierzy kowariancji estymatora na (n+1)-szym stapie, ale przed wykonaniem

(n+1)-szej serii pomiarów, użyć można macierzy $M_T^{-1}(u;a_n)$. Odpowiednio dobrany funkcjonał tej macierzy może też służyć do odpowiedniego doboru sterowania $u^n(.)$, które będzie użyte w (n+1)-szym etapie. Możliwe są przy tym różne warianty wykorzystania zgromadzonych dotychczas pomiarów. Jedna z możliwych procedur tego typu zostanie zbadana w rozdz. 4 z punktu widzenia jej zbieżności. Różni się ona od powyższego schematu założeniem o dokonywaniu pomiarów w dyskretnych chwilach czasu.

W literaturze (por. [22],[35]) proponuje się także podejście minimaksowe, polegające na używaniu funkcjonałów macierzy $M_T^{-1}(u;a)$ z wyborem najmniej korzystnym wektora $a \in \mathcal{A}$. Podejścia tego nie będziemy stosować, gdyż często daje ono zbyt pesymistyczne oceny jakości identyfikacji.

Warto rozważyć także następujące podejście:

4. Opiera się ono na możliwości niemal dokładnego obliczenia macierzy $M_T(u;a)$ dla $a = a^o$, pomimo braku znajomości a^o. Z sytuacją taką mamy do czynienia wtedy, gdy $M_T(u;a^o)$ zależy od a^o jedynie przez pewne funkcje, które można zmierzyć bezpośrednio z obiektu. Słowo "niemal" w przedostatnim zdaniu odnosi się do dokładności pomiaru. Ilustrację stanowić będzie przykład w p. 3.3, gdzie pokażemy, że $M_T(u;a^o)$ wyrazić można za pomocą funkcji Greena obiektu $g(\varkappa,x,t;a^o)$. Dla $x \in \Omega_u$ i $\varkappa \in \Omega_p$ funkcję tę można bezpośrednio zmierzyć (na ogół tylko w punktach dyskretnych i wtedy potrzebna jest jej aproksymacja). Znajomość jej pozwala obliczyć $M_T(u,a^o)$ i dobrać odpowiednie dla identyfikacji a^o sterowanie. Zwracamy uwagę, że dokładna identyfikacja a^o jest celowa, nawet wtedy, gdy $g(\varkappa,x,t;a^o)$ dla $x \in \Omega_u$, $\varkappa \in \Omega_p$ można stosunkowo dokładnie zmierzyć, ponieważ miary zbiorów Ω_u i Ω_p są na ogół dużo mniejsze niż miara zbioru Ω, na którym jest opisany badany proces. Zatem, jeśli zidentyfikujemy a^o i wstawimy do r.r.cz., to otrzymamy opis zachowania obiektu w całym zbiorze Ω.

Podsumowanie.

W podrozdziale 1.2 sformułowano zadanie identyfikacji dla obiektów o parametrach rozłożonych. Przy przyjętych założeniach sprowadza się ono do problemu estymacji wektora nieznanych parametrów. Przedyskutowano zagadnienie oceny dokładności estymacji, a ściślej mówiąc, obliczania i szacowania macierzy kowariancji estymatorów parametrów. Dla celów tej pracy przyjmujemy macierz M_T^{-1} jako podstawę oceny dokładności, przy czym dla obiektów z klasy $\mathcal{L}$ ocena ta jest dokładna, nawet dla T skończonych. Nie zależy ona od wektora nieznanych parametrów i przy ustalonym sterowaniu dokładność ta nie może być poprawiona przez zastosowanie innej metody estymacji. Podczas identyfikacji obiektów, których odpowiedź zależy nieliniowo od nieznanych parametrów, macierz M_T^{-1} daje asym-

ptotyczną ocenę dokładności. W tym przypadku w dalszej części pracy przyjmować będziemy, że macierz $M_T(u;a)$ jest obliczana dla pewnego wektora $\tilde{a} \in \mathcal{A}$, który - w zależności od dopuszczalnego w danej sytuacji podejścia 1, 2 lub 3 - jest interpretowany jako

1. $\tilde{a} = \bar{a}$ - nominalny wektor parametrów,
2. $\tilde{a} = \bar{\bar{a}}$ - wartość średnia rozkładu prawdopodobieństwa a priori,
3. $\tilde{a} = a_n$ - uzyskane na wcześniejszych etapach identyfikacji oszacowanie nieznanych parametrów.

W przypadkach 1 i 2 dobór sterowania, dokonany na podstawie funkcjonału macierzy $M_T(u;\tilde{a})$, jest jednorazowy i przeprowadzony jest przed eksperymentem. Natomiast w przypadku 3 sterowanie dobierane jest wielokrotnie w sposób adaptacyjny na podstawie ciągu macierzy $M_T(u;a_n)$ $n=0,1, \ldots$, przy czym a_0 jest wybranym punktem początkowym. Podejścia 1-3 pozwalają interpretować sterowanie obliczane w rozdz. 2 i 3 bądź jako sterowanie stosowane jednokrotnie (jeżeli informacja aprioryczna pozwala zastosować podejście 1 lub 2, bądź jako sterowanie obliczone w n-tym etapie identyfikacji, a stosowane w etapie (n+1)-szym. Wskaźnik jakości (1.2.9) będzie uwzględniony w p. 3 jako szczególny przypadek wskaźnika liniowego względem M_T^{-1}.

W rozdziałach 2 i 3 wektor $\tilde{a} \in \mathcal{A}$ będzie miał ustalone wartości (w przypadku 3 dotyczy to jednego etapu) i dlatego w oznaczeniu macierzy M_T nie będzie on jawnie wskazywany.

Należy jeszcze zwrócić uwagę, że elementy macierzy M_T zależą także od rozmieszczania czujników pomiarowych $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_I$. W celu skrócenia zapisów wprowadzimy formalnie dyskretną "gęstość" pomiarów $\xi(\varkappa)$, zdefiniowaną jako

$$\xi(\varkappa) = \sum_{i=1}^{I} \delta(\varkappa - \varkappa_i), \tag{1.2.10}$$

gdzie $\delta(.)$ jest dystrybucją Diraca.
Dalej $\xi(.)$ występować będzie tylko w wyrażeniach podcałkowych, więc użycie wzoru (1.2.10) nie będzie powodować nieporozumień. Z powyższego określenia oraz z zasady obliczania M_T dla odpowiedniego wektora $\tilde{a} \in \mathcal{A}$ otrzymamy dla macierzy informacyjnej, danej wzorem (1.2.4), następujące wyrażenie

$$M_T(u,\xi) = \int_{\Omega_p} \int_0^T y(\varkappa, t; \tilde{a})\, y'(\varkappa, t; \tilde{a})\, \xi(\varkappa)\, d\varkappa\, dt. \tag{1.2.11}$$

We wzorze tym wskazano jawnie zależność M_T od rozmieszczenia czujników, a pominięto jawne wskazywanie wektora a.

W dalszej części pracy rozmieszczenie czujników pomiarowych będzie dowolne, lecz ustalone. Przy ustalonej liczbie czujników I zbiór wszystkich dopuszczalnych rozmieszczeń $\xi(.)$ postaci (1.2.10) będzie oznaczany przez Ξ. Od wybranego lub narzuconego przez warunki eksperymentu rozmieszczenia $\xi \in \Xi$ wymagać będziemy tylko, by istniało sterowanie dopuszczalne u takie, że $\det M_T(u,\xi) > 0$ dla dostatecznie dużego T. Warunek ten stosunkowo łatwo jest spełnić, jak wskazują na to wyniki prac autora [83],[95],[84] (używane tam określenie zbioru Ξ było inne, lecz wyniki łatwo przetransformować).

1.3. Przegląd problematyki racjonalnego doboru sterowań w identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych i sformułowanie zadań optymalnego doboru sterowań

Założenia przyjęte w poprzednich podrozdziałach pozwalają sformułować różne zadania doboru sterowań w celu maksymalizacji dokładności identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych. Przed ich prezentacją dokonamy krótkiego przeglądu i próby systematyzacji występujących w literaturze podejść do problemu racjonalnego doboru sterowań w zadaniach identyfikacji. Analiza tych podejść pokaże jak duże są nie zbadane jeszcze obszary i będzie jednocześnie motywować wybór i sformułowanie zadań rozpatrywanych w tej rozprawie. Sformułowanie tych zadań wymaga przyjęcia konkretnych funkcjonałów oceniających jakość poszczególnych sterowań. Istniejące w tym zakresie wzorce, pochodzące z teorii planowania eksperymentu dla estymacji parametrów funkcji regresji [34],[44],[035], [033], również wymagają analizy, a ich mnogość zmusza do dokonania selekcji.

Przegląd problematyki racjonalnego doboru sterowań w zagadnieniach identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych.

Użyty termin "racjonalny dobór sterowań" jest jedynym jaki się nasuwa, aby oddać różnorodność spotykanych w literaturze podejść oraz nowych zagadnień, które jak się wydaje, warto w przyszłości zbadać. Z tego względu poniższy przegląd nie pretenduje do kompletności, tym bardziej, że pojedyncze prace na ten temat pojawiają się w różnych dziedzinach techniki, na przykład w mechanice ośrodków ciągłych, teorii przewodnictwa ciepła, technologii chemicznej itp. Jednocześnie liczba prac na ten temat - publikowanych w czasopismach z szeroko rozumianej teorii sterowania - jest na tyle mała, że brak jest wyczerpującej pracy przeglądowej (jeżeli nie liczyć krótkiego przeglądu w [95]).

Jako podstawę systematyzacji przyjmiemy cel, któremu służy odpowiedni dobór sterowania w zadaniu identyfikacji obiektu o parametrach rozłożonych. Cele te mogą być następujące:

1. Dobór sterowania w taki sposób, by zapewnić identyfikowalność nieznanych parametrów obiektu. Przez identyfikowalność rozumie się teoretyczną możliwość rozróżnienia elementów dowolnej pary różnych parametrów na podstawie znajomości sterowań i innych wymuszeń oraz dostępnych pomiarów (por. prace [46], [117]). W większości prac zakłada się przy tym brak zakłóceń pomiarowych, natomiast jeżeli dopuszcza się ich występowanie, to rozróżnialność zestawów parametrów rozumie się albo w sensie asymptotycznym, albo jako rozróżnialność funkcji wiarygodności pomiarów [87]. Jak wiadomo, identyfikowalność parametrów tego samego obiektu zależy od tego, jakie wielkości mogą być mierzone, od miejsca rozmieszczenia czujników pomiarowych oraz od użytych sterowań. W przypadku identyfikacji współczynników r.r.cz. zależnych od współrzędnych przestrzennych na podstawie pomiarów w dyskretnych punktach przestrzennych znanych jest wiele twierdzeń o braku identyfikowalności, bez względu na wybór sterowania (por. np. prace [106], [117], [17], [13]). Nawet jeżeli uda się teoretycznie zapewnić identyfikowalność zmiennych w przestrzeni parametrów, to nieuchronnie zaokrąglenia numeryczne podczas ich identyfikacji powodują faktyczną nierozróżnialność współczynników o istotnie różnych przebiegach (por. pracę [106]). Sytuacja znacznie się poprawia, gdy nieznane parametry są stałe lub, gdy mamy do czynienia z przypadkami typu opisanego w przykładzie 1.3. Zapewnienie identyfikowalności jest wówczas znacznie łatwiejsze (por. np. prace [119], [9]) i można ją uzyskać przez zastosowanie całych klas sterowań spełniających określone warunki. Problem doboru sterowania najlepszego przy wybranym wskaźniku jakości nabiera znaczenia.

Identyfikowalność współczynników zależnych od stanu obiektu jest zagadnieniem najsłabiej zbadanym ze względu na nieliniowość r.r.cz. opisujących takie przypadki. Dla tzw. słabo nieliniowych r.r.cz. w pracy [96] podano warunki dostateczne na sterowanie i sposób zagęszczania pomiarów, zapewniające identyfikowalność w sensie średniokwadratowym współczynnika zależnego od stanu obiektu, zaproponowano także algorytm identyfikacji.

2. Dobór sterowania w taki sposób, by zmniejszyć trudności obliczeniowe związane z identyfikacją parametrów. Wobec trudności ze znalezieniem lub numerycznym obliczeniem rozwiązań r.r.cz. jako funkcji nieznanych parametrów wybiera się szczególne postacie, prostych w realizacji technicznej sterowań, dla których rozwiązania takie łatwo jest znaleźć. Do najczęściej proponowanych sterowań należą sygnały sinusoidalne lub stałe w czasie, oddziałujące na obiekt w izolowanych punktach przestrzennych. Taki cel doboru sterowań jest szczególnie rozpowszechniony w badaniach przewodnictwa cieplnego (por. [71], [58] wraz z cytowaną tam

bibliografią). W propozycjach tych dokładność identyfikacji, którą można uzyskać za pomocą proponowanych sterowań, jest zwykle pomijana.

3. Dobór sterowań pod kątem testowania hipotez o wartościach parametrów SPR. Ten potrzebny kierunek badań jest reprezentowany jedynie w pracy [53] (zawarte tam wyniki zostały przytoczone także w pracy [138]). W pracach tych jest rozważany problem takiego doboru sterowania brzegowego, by maksymalizować moc testu statystycznego w celu dyskryminacji między dwoma zadanymi zestawami parametrów obiektu. Nakłada się przy tym ograniczenie na energię dopuszczalnych sterowań.

4. Dobór sterowania tak, by maksymalizować odpowiednio dobrany wskaźnik dokładności identyfikacji obiektu o parametrach rozłożonych. Znane autorowi prace z tego zakresu, które ukazały się w czasopismach omówione zostaną w porządku chronologicznym.

W pracy [82] rozważano problem doboru stałego w czasie wymuszenia rozłożonego w taki sposób, by maksymalizować dokładność identyfikacji szczególnego rodzaju parametrów obiektu, mianowicie wartości własnych opisującego go operatora. Zakładano przy tym, że badany obiekt znajduje się w stanie ustalonym, a jako wskaźnik dokładności identyfikacji przyjęto wyznacznik macierzy informacyjnej. Analogiczne zagadnienie, lecz z uwzględnieniem zależności stanu obiektu i sterowania od czasu, badano w pracach [85], [84] dla obiektów opisywanych r.r.cz. typu hiperbolicznego i parabolicznego. W pracy [80] sformułowano problem doboru sterowania maksymalizującego wyznacznik macierzy informacyjnej i rozwiązano dwa przykłady. Pierwszy z nich dotyczył jednowymiarowego zagadnienia przewodnictwa ciepła, a drugi równania drgań struny. W pracy tej nie podjęto próby podania ogólnej metody wyznaczania optymalnych sterowań, a rozważone przykłady podejścia takiego nie sugerują, gdyż zakłada się w nich z góry przestrzenny przebieg sterowania, a dobiera jedynie jego przebieg w czasie.

Odnotować warto także prace [124], [50], pomimo że nie dotyczą one bezpośrednio rozpatrywanych tu zagadnień. W pierwszej, rozważa się problem optymalnego doboru rozłożonego warunku początkowego tak, by maksymalizować dokładność identyfikacji stałego współczynnika przewodnictwa ciepła. Wydaje się jednak, że przykład ten ma przede wszystkim charakter teoretyczny ze względu na trudności ze zrealizowaniem zadanego warunku początkowego - jeśli natomiast jego realizacja jest możliwa, to dlaczego nie próbować wykorzystać jej także w późniejszych chwilach do sterowania. Druga z tych prac zawiera uogólnienie znanych wyników Kiefera i Wolfowitza z teorii planowania eksperymentu dla przypadku, gdy punktami planu są elementy pewnej przestrzeni funkcyjnej. We wstępie do tej pracy uogólnienie to motywuje się między innymi potrzebami

identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych. Jednakże dalsza część pracy przynosi czytelnikowi rozczarowanie brakiem zastosowania jej wyników w tej dziedzinie. Przyczyn można się dopatrzeć w przyjętym w tej pracy podejściu i założeniach, które były konieczne, by tak bezpośredniego uogólnienia dokonać. Najważniejsze z tych założeń to wymaganie zwartości zbioru macierzy informacyjnych, osiągalnych za pomocą jednopunktowych planów. W ogólnym przypadku założenie to można spełnić tylko wtedy, gdy zbiór planów jednopunktowych jest zbiorem zwartym.

Wymagania tego nie spełniają najczęściej spotykane zbiory sterowań dopuszczalnych i to zarówno w odniesieniu do obiektów o parametrach skupionych, jak i rozłożonych. Najprostszym przykładem negatywnym jest tu zbiór sterowań o ograniczonej energii, który - jako kula w przestrzeni Hilberta - zwarty nie jest (por. np. pracę [62]).

Późniejszych prac autora na ten temat [83],[86],[97],[100], nie będziemy tu referować, gdyż zawarte w nich wyniki stanowią podstawę rozdz. 2 i 3.

Powyższy przegląd głównych nurtów, jakie występują w literaturze na temat doboru sterowań w identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych, nasuwa następujące wnioski:

a) występuje duże rozproszenie badań na ten sam w istocie temat w różnych dziedzinach techniki,

b) zbliżone do siebie nurty 3 i 4 znajdują się w początkowej fazie rozwoju,

c) wydaje się, że wraz z rozwojem techniki komputerowej i algorytmów numerycznego rozwiązywania r.r.cz. rola nurtu 2 będzie stopniowo maleć,

d) wyniki osiągane w badaniach identyfikowalności (por. p.1) dają rezultaty jakościowe, a nie bezpośrednie wskazania co do wyboru sterowań; z drugiej strony optymalny w sensie p. 4, dobór sterowań automatycznie zapewnia identyfikowalność, jeżeli wskaźnik jakości jest odpowiednio wybrany.

Wymienione wnioski wpłynęły na wybór zakresu tej pracy.

Uwagi na temat formułowania zadań optymalnego doboru sterowań w identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych

Przy założeniu znajomości opisu obiektu z dokładnością do nieznanych parametrów, dokładność jego identyfikacji zależy od użytej metody estymacji parametrów oraz od szeroko rozumianych warunków eksperymentu, na które składają się: użyte sterowanie, liczba i rozmieszczenie czujników pomiarowych oraz ich rodzaj, sposób wstępnej obróbki i kwantyzacji pomiarów, wielkość i rodzaj zakłóceń i wiele innych trudnych do sprecyzowania. Wpływ eksperymentatora na wybór warunków eksperymentu

jest zwykle ograniczony. Jeżeli jednak identyfikacja obiektu jest prowadzona z zamiarem późniejszego nim sterowania, to eksperymentator powinien mieć wpływ na wybór sygnału sterującego użytego w procesie identyfikacji - brak takiej możliwości oznaczałby również niemożność późniejszej automatycznej regulacji lub sterowania tym obiektem. Zagadnieniami doboru pozostałych warunków eksperymentu nie będziemy się w tej pracy zajmować, gdyż zbadanie ich łącznego wpływu na dokładność estymacji nie wydaje się na obecnym etapie możliwe, a próby ujęć częściowych rozbiłyby spójność rozważań. Zauważymy tylko, że w pracach autora [83], [85], [95] podejmowano próby łącznej optymalizacji rozmieszczenia czujników pomiarowych i wyboru sterowania. Wyniki zawarte w tych pracach dają obraz jakościowy zagadnienia i podstawy do dalszych badań, jednakże pełna algorytmizacja takiego podejścia daleka jest od ukończenia.

Zakładamy więc, że eksperymentator może wybrać metodę identyfikacji i sterowanie, które będzie użyte jako sygnał testujący w trakcie identyfikacji, natomiast pozostałe warunki eksperymentu są ustalone i nie podlegają wyborowi. W tej sytuacji nasuwają się dwie różne możliwości sformułowania problemu decyzyjnego:

I. Ustalić metodę identyfikacji, obliczyć lub oszacować zapewnianą przez nią dokładność estymacji jako funkcjonału od sygnału sterującego, a następnie maksymalizować ten funkcjonał przez dobór sterowania z pewnego zbioru dopuszczalnego.

II. Wybrać metodę identyfikacji, która przy dowolnym lecz ustalonym sterowaniu zapewnia największą dokładność estymacji, obliczyć lub oszacować tę dokładność, a następnie dokonać jej maksymalizacji przez wybór odpowiedniego sterowania.

Metodologia wypracowana w klasycznej teorii planowania eksperymentu (por. prace [22], [44], [34]) sugeruje podejście II. Jak wskazują wyniki przytoczone w p. 1.2, podejście to można zrealizować również w rozważanych w tej pracy zadaniach i będziemy je traktować jako podejście podstawowe.

Wydaje się jednak, że w zagadnieniach identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych warto rozważać również podejście I ze względu na duże nakłady czasu komputerowego, jakie są wymagane do obliczania estymat metodami gwarantującymi asymptotyczną efektywność. Stosowalności tego podejścia można więc bronić w przypadku, gdy wybiera się prostą obliczeniowo i rozpowszechnioną metodę identyfikacji - jaką w zakresie obiektów o parametrach rozłożonych jest metoda funkcji modulujących (por. pracę [123]).

Na zakończenie warto jeszcze poddać krytycznej analizie możliwości zastosowania tzw. podejścia dualnego (por. [014]), aby ostrzec przed jego pozorną, zdaniem autora, atrakcyjnością. Podejście to polega na

podwójnej roli, jaką ma w nim spełniać wybierane etapowo sterowanie. Ma ono być dobierane tak, by minimalizować straty powstałe na skutek niedokładnego spełniania celu sterowania i jednocześnie dostarczać maksimum informacji o nieznanych parametrach sterowanego obiektu. Podwójna rola spełniana przez sterowanie tłumaczy nazwę tego podejścia. Najpełniej zostało ono opisane w pracy [015], przy czym w monografii tej ograniczono się do zadań dla obiektów o parametrach skupionych. Wobec zawartych tam wyników wysunąć można następujące zastrzeżenia i wątpliwości:

1. Wymagane jest istnienie i znajomość rozkładu prawdopodobieństwa, zgodnie z którymi zostały wylosowane wartości nieznanych parametrów opisu obiektu. Jak wiadomo taka interpretacja wartości nieznanych parametrów nie zawsze jest możliwa, a nawet jeśli jest ona dopuszczalna, to rozkład aprioryczny nie zawsze jest znany.

2. Wobec podwójnej roli jaką spełnia sterowanie, dokładność identyfikacji parametrów nie może być większa niż wtedy, gdy sterowanie dobierane jest tak, by maksymalizować wskaźnik dokładności identyfikacji. Co więcej, czas uzyskania zadowalających pod względem dokładności oszacowań parametrów może być bardzo długi, a żadne jego oszacowania nie są znane.

3. Podejście dualne opiera się na przyjętej na stałe funkcji strat, oceniającej jakość sterowania. W praktyce zdarza się natomiast, że cel sterowania tym samym obiektem może ulegać zmianom w czasie (i to nawet w okresie doby, np. w systemie energetycznym). W takiej sytuacji posiadanie dokładnego opisu matematycznego obiektu zapewnia większą elastyczność w projektowaniu układu regulacji, czy też w doborze jego parametrów wraz ze zmianą celu sterowania.

4. Podejście dualne prowadzi do tak skomplikowanych obliczeń, że jego autorom i propagatorom nie udało się wyjść poza najprostsze akademickie przykłady. Cechą charakterystyczną tego podejścia jest zwykle konieczność dokonywania obliczeń kolejnych wartości sterowań w czasie rzeczywistym. Jednakże wielokrotny wzrost mocy obliczeniowej komputerów - jaki się w tym czasie dokonał - nie jest wystarczający (autorowi nie jest znana żadna publikacja donosząca o praktycznym zastosowaniu tego podejścia).

Próba rozszerzenia podejścia dualnego na klasę obiektów o parametrach rozłożonych pogłębiłaby tylko podane trudności (z wyjątkiem 1).

Od kilku lat obserwuje się w literaturze renesans podejścia adaptacyjnego. Jeden z jego nurtów polega także na kombinacji metod teorii sterowania i identyfikacji parametrów. Jednakże sterowanie jest wybierane tylko ze względu na jakość regulacji, a identyfikacja dokonywana niejako przy okazji - bez nacisku na jej jakość. Dlatego nie będziemy

podejścia tego omawiać. W rozdziale 4 zaproponujemy inną wersję adaptacyjnego doboru sterowań, nakierowaną na maksymalizację dokładności identyfikacji.

Kryteria optymalności sterowań w zadaniu identyfikacji obiektu o parametrach rozłożonych

W podrozdziale 1.2 stwierdziliśmy, że macierz kowariancji

$$\mathrm{cov}(\hat{a}_T) = M_T^{-1}(u, \xi), \tag{1.3.1}$$

przy czym zależność ta obowiązuje dla obiektów z klasy $\mathcal{X}$ przy T skończonym, a dla ogólnej klasy rozważanych obiektów jest to równość asymptotyczna, gdy $T \to \infty$. Przed sformułowaniem zadań doboru u wybrać należy odpowiedni funkcjonał macierzy $\mathrm{cov}(\hat{a}_T)$, mający statystyczną interpretację miary rozrzutu oszacowań parametrów. W klasycznej teorii planowania eksperymentu (por. prace [22], [34]) znanych jest wiele takich funkcjonałów - zwanych tam kryteriami optymalności. Nazwy tej i innych terminów tej teorii będziemy używać w dalszym ciągu.

Najbardziej rozpowszechnione jest kryterium D-optymalności. Zgodnie z nim sterowanie u spośród sterowań dopuszczalnych należy tak wybierać, by maksymalizować

$$\det M_T(u, \xi), \tag{1.3.2}$$

gdzie det [.] oznacza wyznacznik macierzy. Statystyczna interpretacja tego kryterium, klarownie przedstawiona w pracy [033], polega na tym, że objętość V elipsoidy koncentracji estymatora $\hat{a}_T$ ma postać

$$V = C/[\det M_T(u, \xi)]^{1/2}, \tag{1.3.3}$$

gdzie C jest pewną stałą. A więc maksymalizacja (1.3.2) oznacza minimalizację objętości V.

Powodem, dla którego zwracamy tutaj szczególną uwagę na kryterium D-optymalności, jest niezmienniczość D-optymalnego sterowania przy liniowych, nieosobliwych przekształceniach wektora $k(\varkappa, x, t)$ we wzorze (1.1.23). W teorii r.r.cz. przekształceń takich często się dokonuje w celu zapisania równania w zmiennych bezwymiarowych (por. [40]). Okazuje się też (por. [34]), że w klasie funkcjonałów spełniających pewne, naturalne w teorii eksperymentu warunki, funkcjonał niezmienniczy względem powyższych przekształceń musi być rosnącą funkcją $\det M_T(u, \xi)$. Oznacza to, że inne znane kryteria optymalności, oznaczane jako A, E Q, własności niezmienniczości mieć nie będą, jeśli nie są równoważne wskaźnikowi D-optymalności. Nie oznacza to ich całkowitej dyskwalifikacji, jednakże nie będziemy ich w dalszym ciągu omawiać. Pominiemy również

zagadnienie związków między D-optymalnością a analogonem kryterium G--optymalności. Wykazanie takich związków nie jest trudne i będą one widoczne z przebiegu dowodów w rozdz. 2.

W celu zaznaczenia, że znajdowanie optymalnego sterowania odbywa się przy ustalonym rozmieszczeniu czujników pomiarowych $\xi \in \Xi$, używać będziemy terminu "sterowanie D_ξ-optymalne" na oznaczenie sterowania maksymalizującego wskaźnik (1.3.2). Gdy pomiary odbywają się w jednym punkcie przestrzennym, sterowanie takie będzie nazywane D_0-optymalnym.

W rozdziale 3 pokażemy, że wyniki otrzymane dla kryterium D "podpowiadają" drogę ich uogólnienia na całą klasę kryteriów zwanych L-optymalnymi.

Rozszerzając wprowadzone w klasycznej już monografii [22] pojęcie L-optymalności na rozważany tutaj przypadek, nazwiemy L-optymalnym także dopuszczalne sterowanie, które minimalizuje

$$L\left[M_T^{-1}(u,\xi)\right], \tag{1.3.4}$$

przy czym $L[M_T^{-1}]$ przyjmujemy ∞, gdy $\det M_T = 0$.

W wyrażeniu (1.3.4) L jest ciągłym funkcjonałem, który spełnia następujące warunki:
dla dowolnych kwadratowych $r \times r$ macierzy A, B i skalara c

$$L[A+B] = L[A] + L[B]; \quad L[cA] = cL[A], \tag{1.3.5}$$

oraz dla A nieujemnie określonej

$$L[A] \geqslant 0. \tag{1.3.6}$$

Przykładem funkcjonału z tej klasy jest

$$L\left[M_T^{-1}(u,\xi)\right] = \operatorname{tr}\left[W\cdot M_T^{-1}(u,\xi)\right], \tag{1.3.7}$$

gdzie tr [.] oznacza ślad macierzy, natomiast W jest zadaną $r \times r$ nieujemnie określoną macierzą wagową. Jeżeli $W = I_r/r$, gdzie I_r jest $r \times r$ macierzą jednostkową, to (1.3.7) ma interpretację średniej wariancji estymatorów poszczególnych parametrów (zakładając spełnienie (1.3.1) wraz z następującym po tym wzorze omówieniem). Z innym przykładem tego kryterium spotkaliśmy się już w p. 1.2. Można podać dalsze przykłady związane z minimalizacją punktowej lub średniej wariancji zmiennej losowej $\hat{q}_T(\varkappa,t) \triangleq q(\varkappa,t;\hat{a}_T)$. Zapis ten oznacza, że we wzorze (1.1.20) w miejsce wektora nieznanych parametrów $a^0 \in \mathcal{A}$ wstawić należy jego estymator otrzymany metodą NW. Przykłady te, chociaż są ważne pominiemy, gdyż wyrażenie w celu obliczenia var $\hat{q}_T(\varkappa,t)$ jest dość skomplikowane, nawet dla obiektów z klasy $\mathcal{L}$.

Podsumowanie

W końcowej części podrozdziału zarysowane zostały zadania rozpatrywane w rozdz. 2 i 3, gdzie zostaną podane ich precyzyjne sformułowania uwzględniające ograniczenia na dopuszczalne sterowania. Podane zostały interpretacje statystyczne stosowanych dalej kryteriów D i L-optymalności. Rozpatrywane zadania zostały przedstawione na tle szerszej problematyki i stanu literatury. Z przeglądu wynika, że problematyka ta jest potencjalnie bardzo szeroka, a poszczególne jej nurty reprezentowane często przez pojedyncze prace. Spowodowało to konieczność dokonania wyboru pewnych tylko klas zagadnień, gdyż mnożąc liczbę statystycznie uzasadnionych kryteriów przez liczbę typów często spotykanych ograniczeń na sterowania, z ewentualnym rozbiciem na poszczególne typy r.r.cz., otrzymuje się dziesiątki zadań. Dokonany wybór ma, w zamyśle autora, dać rozeznanie w możliwych podejściach oraz dać wskazówki do formułowania i rozwiązywania innych zadań tego typu.

2. STEROWANIA D-OPTYMALNE - ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA

W rozdziale tym zostaną przedstawione wyniki, jakie można uzyskać stosując podejście częstotliwościowe do problemu znajdowania sterowań D_ξ-optymalnych. Problem ten sformułowano ogólnie w p. 1,3, a tutaj zostanie on sprecyzowany przez nałożenie ograniczenia na średnią moc i zakres częstotliwości dopuszczalnych sterowań. Przedtem w p. 2.1 zbadane zostaną własności macierzy informacyjnej, wyrażonej w dziedzinie częstotliwości. W podrozdziale 2.2 zostaną wyprowadzone konieczne i dostateczne warunki D_ξ-optymalności widmowej gęstości mocy sterowania. Pozwolą one w p. 2.3 zbadać strukturę częstotliwościowo-przestrzenną optymalnej gęstości widmowej mocy i odpowiadającego jej sygnału sterującego. Wyniki te posłużą następnie w p. 2.4 do skonstruowania algorytmu numerycznego, pozwalającego obliczyć dowolnie dokładne przybliżenie sterowania optymalnego. Wykazana zostanie zbieżność tego algorytmu, a jego walory obliczeniowe poddane będą analizie za pomocą przykładów obliczeniowych w p. 2.5.

Uzyskanie wyników przedstawionych w tym rozdziale możliwe było dzięki zastosowaniu przekształcenia Fouriera względem argumentu reprezentującego czas. Zgodnie z wypracowanymi już w automatyce nawykami badawczymi, podejście częstotliwościowe bywa stosowane jako pierwsze podczas próby analizy nowych zagadnień. Jego zastosowanie jest uwarunkowane możliwością przyjęcia nieskończenie długiego horyzontu obserwacji (w stosowanej tutaj notacji $T \to \infty$) oraz stacjonarnością charakterystyk badanego systemu. W praktyce oznacza to, że horyzont obserwacji

musi być wielokrotnie dłuższy od największej ze stałych czasowych obiektu, tak by zdążyły zaniknąć wszystkie przebiegi przejściowe.

Formalnym wyrazem zaniku składowych przejściowych jest przyjmowane dalej założenie, że odpowiedź obiektu ma postać:

$$q(\varkappa,t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{\Omega_u} g(\varkappa,x,\tau;a)\, u(x,t-\tau)dx d\tau , \qquad (2.0.1)$$

gdzie znaczenie symboli jest takie same jak w p. 1.1 (por. wzór (1.1.22)). Wówczas wektor wrażliwości oblicza się według wzoru (por. również (1.1.23)):

$$y(\varkappa,t;a) = \int_{-\infty}^{t}\int_{\Omega_u} k(\varkappa,x,\tau;a)u(x,t-\tau)dx d\tau \qquad (2.0.2)$$

lub w równoważnej postaci:

$$y(\varkappa,t;a) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_u} k(\varkappa,x,t-\tau;a)u(x,\tau)dx d\tau , \qquad (2.0.3)$$

gdyż wektor k( ) ma składowe równe zeru, gdy argument czasowy jest ujemny.

Ponieważ obiekt identyfikacji (2.0.1) jest stacjonarny, więc położenie punktu początku obserwacji nie wpływa na wyniki analizy. W celu uzyskania symetrii następnych wzorów przyjmiemy przedział obserwacji o postaci (-T/2,T/2). Wymagać to będzie oczywistej zmiany w granicach całkowania w niektórych wzorach rozdz. 1.

Kończąc rozważania wstępne podkreślamy, że dopuszczalne sygnały sterujące są funkcjami tylko zmiennych przestrzennych i czasu i nie mają charakteru pól losowych. Formalne podobieństwo występujących w tym rozdziale wzorów do wzorów korelacyjnej teorii procesów stochastycznych nie powinno być mylące. Zwracamy jednak uwagę, że możliwe jest rozszerzenie zbioru sygnałów dopuszczalnych do klasy sygnałów losowych. Rozszerzenia takiego nie dokonujemy, gdyż jak pokazano w pracy autora [84], w rozważanym tu przypadku nie uzyskuje się w ten sposób poprawy jakości identyfikacji. Nie oznacza to jednak, że dopuszczanie losowych sterowań nie jest w ogóle celowe, na co zwrócimy uwagę w rozdz. 4.

2.1. Podstawowe własności macierzy informacyjnej

Zgodnie z rozważaniami p. 1.2 macierz informacyjna zadania identyfikacji, przy ustalonej gęstości pomiarów ξ i dla przedziału obserwacji (-T/2,T/2), ma postać (por. (1.2.11)):

$$M_T(u,\xi) = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{\Omega_p} y(\varkappa,t)y^{\nabla}(\varkappa,t)\xi(\varkappa)d\varkappa dt, \qquad (2.1.1)$$

gdzie y(.) jest określona przez (2.0.2).

Ze wzoru (2.1.1) wynikają łatwo następujące własności macierzy M_T:

M_1) M_T jest macierzą symetryczną i dodatnio półokreśloną,

M_2) Jeżeli $T_2 > T_1$ to $M_{T_2} - M_{T_1}$ jest macierzą dodatnio półokreśloną.

Ostatnia własność oznacza, że przy każdym wskaźniku jakości identyfikacji $\Phi(M_T)$ spełniającym warunek $\Phi(M_T^{\nabla}) > \Phi(M_T^{\wedge})$, gdy macierz $M_T^{\nabla} - M_T^{\wedge}$ jest nieujemnie określona, celowe jest wydłużanie czasu obserwacji T. Co więcej, dla sygnałów sterujących, takich że $\| y(\varkappa,t)\| > 0$ dla prawie wszystkich $\varkappa,t$ (względem miary Lebesgue'a) zachodzić będzie nieograniczony wzrost diagonalnych elementów M_T, gdy $T \to \infty$. Zatem, gdy $T \to \infty$, jako miarę jakości identyfikacji przyjąć należy funkcjonał określony na odpowiednio zdefiniowanej, uśrednionej macierzy informacyjnej M zamiast samej macierzy M_T. Właściwy dobór macierzy M, tak by odpowiadała ona intuicji średniego tempa przyrostu informacji i, aby przy $T \to \infty$ elementy jej były skończone, zależy od określenia klasy dopuszczalnych sygnałów wejściowych.

Dopuszczalne sygnały sterujące i uśredniona macierz informacyjna

W rozdziale 2 zakładamy, że do klasy dopuszczalnych sygnałów sterujących U należą wszystkie funkcje określone na $\Omega_u \times R$ takie, że w poniższych wzorach istnieją granice i zachodzi:

$$\forall_{x\in\Omega} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(x,t)dt < \infty \qquad (2.1.2)$$

oraz

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{\Omega_u} u^2(x,t)dxdt \leqslant 1. \qquad (2.1.3)$$

Zauważmy, że sygnały spełniające (2.1.2) są naturalnym uogólnieniem zależnych od czasu sygnałów o ograniczonej mocy średniej (por. [120]) i zachowamy dla nich tę samą terminologię.

Dla $u \in U$ i funkcji wrażliwości (2.0.2) spełniających założenie (2.1.3) odpowiednie jest następujące określenie.

Definicja 2.1. Uśrednioną macierzą informacyjną M nazywa się wyrażenie:

$$M = \lim_{T\to\infty} M_T/T . \qquad (2.1.4)$$

W dalszej części pracy termin "uśredniona macierz informacyjna" bywa zastępowany skrótem UMI.

Poprawność tej definicji wykażemy wprost, obliczając granicę (2.1.4) i pokazując jej skończoność. W tym celu zdefiniujemy funkcję $R_u : \Omega_u \times \Omega_u \times R \longrightarrow R$, gdy $u \in U$, następującym wzorem:

$$R_u(x,y,\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(x,t+\tau)u(y,t)dt \qquad (2.1.5)$$

Zauważmy, że R_u jest funkcją korelacji wzajemnej dwóch (deterministycznych) sygnałów $u(x,.)$ i $u(y,.)$ (por. [120]), a poprawność jej określenia wynika z nierówności Schwarza i ze wzoru (2.1.2). Spostrzeżenie to pozwala natychmiast wypisać proste własności funkcji R_u (por. [120] p. 2.7):

$R_1)$ $R_u(x,y,\tau) = R_u(y,x,-\tau)$

$R_2)$ $R_u(x,x,0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(x,t)dt$

$R_3)$ $|R_u(x,x,\tau)| \leqslant R_u(x,x,0)$

$R_4)$ $|R_u(x,y,\tau)| \leqslant [R_u(x,x,0)R_u(y,y,0)]^{1/2}$

Z określenia R_u oraz (2.0.3), (2.1.1) i (2.1.4) otrzymamy

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_u} \int_{\Omega_u} w(x,y,\tau,\nu)R_u(x,y,\nu-\tau)dxdyd\nu d\tau , \qquad (2.1.6)$$

gdzie macierz $w(\ )$ jest zdefiniowana wzorem:

$$w(x,y,\tau,\nu) = \int_{\Omega_p} k(\varkappa,x,\tau)k^{\nabla}(\varkappa,y,\nu)\xi(\varkappa)d\varkappa . \qquad (2.1.7)$$

W trakcie obliczania macierzy M zostały wykonane formalnie dwie operacje wymagające uzasadnienia ich poprawności. Pierwsza z nich to zamiana kolejności całkowania. Poprawność jej wykonania wynika z twierdzenia Fubiniego (por. np. [110]) na mocy założenia Z_{10} i ograniczoności zbiorów Ω_u i Ω_p. Druga to przejście graniczne $T\to\infty$ pod znakami całek występujących we wzorze (2.6). Wobec założenia Z_{10} i wzoru (2.2.1) poprawność tej operacji wynika z twierdzenia Lebesgue'a o majoryzowanej zbieżności (por. np. [110]).

Uzasadnienie poprawności definicji 2.1 wymaga jeszcze wykazania skończoności wyrażenia występującego po prawej stronie w (2.1.6). W tym celu zauważmy, że wystarczy pokazać ograniczoność tr(M), gdyż

wraz z M_1 implikuje ona skończoność wszystkich elementów diagonalnych M i ponadto

$$|m_{ik}| \leqslant (m_{ii} \cdot m_{kk})^{1/2}. \tag{2.1.8}$$

W (2.1.8) przez m_{ik} oznaczono elementy M.

Z (2.6), (2.7), R_4 dostajemy:

$$tr(M) \leqslant \int_{\Omega_p} \left[\int_{\Omega_u} \int_{-\infty}^{\infty} \|k(\varkappa,x,\tau)\| \, d\tau \cdot R_u^{1/2}(x,x,0)dx \right]^2 \xi(\varkappa)d\varkappa . \tag{2.1.9}$$

Zastosowanie do (2.1.9) nierówności Schwarza oraz własności R_2 wraz z (2.1.3) i założeniem Z_{10} dowodzi, że $tr(M) \leqslant C \cdot |\Omega_u| < \infty$, gdzie $|\Omega_u|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru Ω_u. Ze znanej nierówności (por. [11]) $(\det M)^{1/r} \leqslant tr\, M/r$ otrzymamy:

M_3) Dla wszystkich $u \in U$ i $\xi \in \Xi$ uśrednione macierze informacyjne mają wspólnie ograniczone wyznaczniki, przy czym ograniczająca je stała zależy tylko od k, Ω_u i r.

<u>Widmowa gęstość mocy sygnału sterującego</u>

Podamy teraz, istotny dla tego i następnego rozdziału, wzór wyrażający macierz M w dziedzinie częstotliwości. Istotną rolę w tym przedstawieniu odgrywa funkcja:

$$S_u(x,y,j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_u(x,y,\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau , \tag{2.1.10}$$

określona na $\Omega_u \times \Omega_u \times R$, będąca transformatą Fouriera funkcji $R_u(x,y,.)$, w której $x,y \in \Omega_u$ są parametrami. Warunki wystarczające do istnienia transformaty, jak i prawdziwości wzoru na jej odwrócenie

$$R_u(x,y,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(x,y,j\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega \tag{2.1.11}$$

są znane (por. np. [120]), więc nie będziemy ich przytaczać. Własności funkcji S_u, którą nazywać będziemy gęstością spektralną sygnału sterującego, zostaną podane nieco dalej.

Po podstawieniu wzoru (2.1.11) do (2.1.6) i dokonaniu zamiany kolejności całkowań otrzymamy następujący wzór macierzy M, którą w dalszym ciągu oznaczać będziemy przez $M(S_u,\xi)$ w celu podkreślenia jej zależności od S_u i ξ

$$M(S_u,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_u} \int_{\Omega_u} W(x,y,j\omega;\xi)S_u(x,y,j\omega)dxdyd\omega. \tag{2.1.12}$$

We wzorze (2.1.12) przez $W(x,y,j\omega;\xi)$ oznaczono macierz określoną wzorem:

$$W(x,y,j\omega;\xi) = \int_{\Omega_p} \bar{K}(\varkappa,x,j\omega)\bar{K}^{\nabla}(\varkappa,y,-j\omega)\xi(\varkappa)d\varkappa , \tag{2.1.13}$$

gdzie

$$\bar{K}(\varkappa,x,j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} k(\varkappa,x,\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau . \tag{2.1.14}$$

Wypiszmy od razu własność macierzy $M(S_u,\xi)$ wynikającą z definicji 2.1 i M_1:

M_4) $M(S_u,\xi)$ jest macierzą rzeczywistą, symetryczną i dodatnio półokreśloną.

Badanie następnych jej własności poprzedzimy zestawieniem podstawowych faktów dotyczących S_u. Bezpośrednio ze wzoru (2.1.10) otrzymujemy:

S_1) $S_u^c(x,y,j\omega) = S_u(x,y,-j\omega)$, gdzie z^c oznacza liczbę zespoloną sprzężoną z liczbą z.

S_2) $S_u(x,y,+j\omega) = S_u(y,x,-j\omega) = S_u^c(y,x,j\omega)$.

Interpretacja $R_u(x,y,.)$ jako funkcji korelacji sygnałów $u(x,.)$ i $u(y,.)$ oraz (2.1.10) pozwala interpretować S_u jako widmo wzajemne gęstości mocy tych sygnałów, rozumiane podobnie jak w pracy [120] § 6.9.

W cytowanej monografii udowodniono również potrzebne w dalszym ciągu własności, które w stosowanych tu oznaczeniach mają postać:

S_3) $S_u(x,y,j\omega) = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \cdot \tilde{u}_T(x,j\omega)\tilde{u}_T(y,-j\omega)\right]$,

gdzie $\tilde{u}_T(x,j\omega)$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $u_T(x,.)$ zdefiniowanej wzorem

$$u_T(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{dla } |t| \leqslant T/2 \\ 0 & \text{dla } |t| > T/2 \end{cases} ,$$

natomiast $x \in \Omega_u$ jest traktowane jak parametr.

S_4) Wartości $S_u(x,x,j\omega)$ są rzeczywiste i zachodzi

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{\Omega_u} u^2(x,t)dxdt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_u} S_u(x,x,j\omega)dxd\omega .$$

Ostatnia własność nasuwa interpretację $S_u(x,x,j\omega)$ jako gęstości rozkładu średniej mocy sygnału $u(x,.)$ w dziedzinie częstotliwości $\omega \in R$. W związku z tą interpretacją i zamiarem stosowania S_u jako zmiennej decyzyjnej w zadaniach doboru sterowań należy pamiętać, iż w praktyce można wytwarzać jedynie sygnały o ograniczonym widmie częstotliwości. Dlatego też będziemy zakładać, że dopuszczalne są jedynie takie sygnały sterujące $u \in U$, dla których $u_T(x,j\omega) = 0$ dla wszystkich x,T, jeśli $|\omega| > \omega_0$, gdzie $\omega_0 > 0$ jest zadaną maksymalną częstotliwością, którą można osiągnąć. Przy tym założeniu mamy:

S_5) $S_u(x,y,j\omega) = 0$ dla $|\omega| > \omega_0$

Ponadto z własności S_4, S_5 i wzoru (2.4) otrzymamy:

S_6) $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \int_{\Omega_u} S_u(x,x,j\omega)dx d\omega \leqslant 1 .$$

<u>Definicja 2.2</u>. Klasę wszystkich gęstości widmowych sygnałów sterujących $u \in U$, dla których zachodzą własności S_5 i S_6, oznaczać będziemy przez $\mathcal{S}$, a jej elementy będą nazywane gęstościami widmowymi dopuszczalnych sygnałów sterujących.

Przyjęta notacja nie uwidacznia zależności $\mathcal{S}$ od ω_0 i Ω_u, gdyż elementy te będą ustalone.

Odnotujemy ważną własność zbioru $\mathcal{S}$, wynikającą bezpośrednio z własności S_5 i S_6:

S_7) Zbiór $\mathcal{S}$ jest zbiorem wypukłym.

Oto dwa, używane w dalszej części pracy przykłady sygnałów o postaci:

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t), \quad \int_{\Omega_u} v^2(x)dx \leqslant 1,$$

których gęstości są elementami $\mathcal{S}$, por. [120], p. 6.9.

1. Jeśli $w(t) = 1(t)$ - skok jednostkowy, to

$$S_u(x,y,j\omega) = 2\pi\, v(x)v(y) \cdot \delta(\omega). \tag{2.1.15}$$

2. Dla $w(t) = \cos(\omega_1 \cdot t)$, $0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_0$

$$S_u(x,y,j\omega) = \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]\, v(x) \cdot v(y). \tag{2.1.16}$$

Przykłady te wskazują, że zbiór $\mathcal{S}$ zawiera elementy będące deltami Diraca zmiennej ω. Ponieważ jednak w dalszych rozważaniach S_u występują tylko pod całkami, przeto zachowamy tę rozpowszechnioną konwencję.

Inne podejście polegające na posługiwaniu się dystrybuantą widmową i całką Lebesgue'a-Stiltjesa byłoby znacznie bardziej skomplikowane wobec występowania równocześnie całek po $x,y \in \Omega_u$. Zauważmy jeszcze, że gęstości widmowe sterowań oddziałujących w jednym punkcie przestrzennym $x_1 \in \Omega_u$ i mające postać $u(x,t) = \delta(x-x_1)\cdot\eta(t)$, nie są elementami $\mathcal{S}$, można je natomiast przybliżać gęstościami z $\mathcal{S}$ (przypadek, gdy wymuszenia punktowe są dopuszczalne rozpatrzymy w p. 3.1).

Klasa $\mathcal{S}$ jest na tyle szeroka, że oprócz sygnałów o rozdzielonych zmiennych, zawiera także gęstości sygnałów typu fali bieżącej. Na przykład dla $x \in R$, S_u odpowiadająca $u(x,t) = \psi(x-ct)$ jest elementem przy odpowiednich ograniczeniach nałożonych na funkcję ψ.

Następne własności funkcji S_u badać będziemy w tych miejscach, gdzie będą one potrzebne.

Dalsze własności uśrednionych macierzy informacyjnych

Teraz natomiast wrócimy do badania własności uśrednionych macierzy informacyjnych. Badania te wykonamy przy dowolnym, lecz ustalonym $\xi \in \Xi$.

Dla ustalonego $\xi \in \Xi$ zdefiniujemy zbiór $\mathcal{M}_\xi = \{M_\xi : M = M(S_u,\xi), S_u \in \mathcal{S}\}$ wszystkich realizowanych UMI. Ze wzoru (2.1.12) i S_7 otrzymujemy natychmiast:

M_5) Zbiór $\mathcal{M}_\xi$ jest zbiorem wypukłym.

M_6) Zbiór $\mathcal{M}_\xi$ można jedno-jednoznacznie odwzorować na zbiór $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ wektorów w przestrzeni $R^{r(r+1)/2}$ utworzony z uporządkowanych w ustalony sposób elementów macierzy $M(S_u,\xi)$, leżących nad górną przekątną i na niej. Co więcej, odwzorowanie takie zachowuje również operację tworzenia kombinacji wypukłej elementów $\mathcal{M}_\xi$, co oznacza, że $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ jest również zbiorem wypukłym.

M_7) Zbiór $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ jest zbiorem ograniczonym w $R^{r(r+1)/2}$ przy założeniu ograniczoności elementów $\bar{K}(\varkappa,x,j\omega)$ na $\Omega_u \times [-\omega_o,\omega_o]$ dla wszystkich $\varkappa \in \Omega_p$.

Dowody tej i następnej własności są analogiczne do dowodów klasycznej teorii dla obiektów skupionych i nie będziemy ich przytaczać (por. np. [22],[27]).

M_8) Zbiór $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ jest zbiorem domkniętym przy założeniu o domkniętości Ω_u i założeniu ciągłości elementów wektora $\bar{K}(\varkappa,x,j\omega)$ na zbiorze $\Omega_u \times [-\omega_o,\omega_o]$ dla wszystkich $\varkappa \in \Omega_p$.

Ostatnie z przytoczonych własności pozwalają łatwo wnioskować o istnieniu rozwiązań zadań optymalnego doboru $S_u \in \mathcal{S}$ przy dowolnym ciągłym na $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ wskaźniku jakości identyfikacji.

Podsumowanie

W podrozdziale 2.1 wprowadzono pojęcie uśrednionej macierzy informacyjnej. Wykazano, że zależy ona od odpowiednio zdefiniowanej widmowej gęstości mocy sygnału sterującego. Przy ograniczonej mocy średniej i ograniczonym paśmie dopuszczalnych sygnałów sterujących, odpowiadające im widmowe gęstości mocy tworzą zbiór wypukły $\mathcal{S}$. Osiągalny za pomocą $S_u \in \mathcal{S}$ zbiór macierzy informacyjnych okazał się wypukły, domknięty i ograniczony. Własności te tworzą podstawę do sformułowania i znajdowania rozwiązań różnych zadań doboru sterowań, nie tylko tych rozważanych w dalszej części rozprawy.

2.2. Sformułowanie problemu doboru D-optymalnej gęstości spektralnej sterowania i warunki optymalności

W podrozdziale tym sformułowane zostanie pierwsze z rozważanych w rozprawie zadań optymalnego doboru sterowań. Wyniki p. 2.1 wskazują, że UMI zależy od użytego sterowania przez widmową gęstość mocy sygnału sterującego S_u. Dlatego sformułujemy problem doboru sterowania jako problem D-optymalnego wyboru S_u, a następnie (w p. 2.3) zostaną podane sposoby znajdowania czasowych przebiegów sterowań realizujących optymalną S_u. Za dopuszczalne sterowania uznawać będziemy tylko te, których moc jest ograniczona (por. wzór (2.4)). Ograniczymy się tutaj do przypadku, gdy położenie czujników pomiarowych, scharakteryzowane przez $\xi \in \Xi$, jest ustalone i nie podlega wyborowi. Z sytuacją taką można się spotkać wtedy, gdy identyfikuje się instalację z istniejącym układem pomiarowym, a rozmieszczenie dodatkowych czujników jest zbyt kosztowne.

Sformułowanie zadania D-optymalnego doboru sterowań o ograniczonej mocy średniej

Uzasadnienie wyboru wyznacznika macierzy informacyjnej jako wskaźnika jakości identyfikacji podano w p. 1.3. Natomiast w p. 2.1 umotywowano (za pomocą własności S_4, S_5, S_6) wybór klasy $\mathcal{S}$ jako zbioru dopuszczalnego sygnałów o ograniczonym paśmie $[-\omega_0, \omega_0]$ i ograniczonej mocy średniej. Celowe jest zatem zbadanie następującego problemu:

P r o b l e m 1

Przy ustalonym rozkładzie pomiarów $\xi \in \Xi$ znaleźć $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ takie, że

$$\sup_{S_u \in \mathcal{S}} \det M(S_u, \xi) = \det M(\hat{S}_u, \xi) \tag{2.2.1}$$

Uwaga 2.2.1

Aby uniknąć rozważania trywialnych przypadków w dalszej części tego rozdziału zakładać będziemy, że $\xi \in \Xi$ wybrano tak, by istniała $S_u \in \mathcal{S}$,

dla której $\det M(\hat{S}_u,\xi) > 0$. Przy tym założeniu również $\det M(\hat{S}_u,\xi) > 0$ i, bez zmniejszenia ogólności przyjmiemy, że ze zbioru $\mathcal{M}_\xi$ usunięto wszystkie osobliwe macierze, a ze zbioru $\mathcal{S}$ wszystkie S_u takie, że $\det M(S_u,\xi) = 0$. Gdyby $\xi \in \Xi$ nie spełniało powyższego warunku, wówczas dla wszystkich $S_u \in \mathcal{S}$ zachodziłoby $\det M(S_u,\xi) = 0$, tzn. przy tym rozkładzie pomiarów obiekt nie byłby identyfikowalny.

Na podstawie powyższego założenia oraz monotoniczności funkcji logarytm, możemy przeformułować wzór (2.2.1) w równoważny sposób:

$$\sup_{S_u \in \mathcal{S}} \Phi(M(S_u,\xi)) = \Phi(M(\hat{S}_u,\xi)), \tag{2.2.1'}$$

gdzie Φ jest określona na zbiorze wszystkich dodatnio określonych macierzy wzorem $\Phi(M) \triangleq \ln \det M$.

Takie postawienie problemu sugeruje od razu istnienie jego rozwiązania, tzn. istnienie $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$, dla którego supremum we wzorze (2.2.1) jest osiągane, gdyż na podstawie własności M_5-M_8 p. 2.1 otrzymujemy:

$$\sup_{S_u \in \mathcal{S}} \det M(S_u,\xi) = \sup_{M \in \mathcal{M}_\xi} \det M \tag{2.2.2}$$

oraz

$$\sup_{M \in \mathcal{M}_\xi} \det M = \sup_{\bar{m} \in \bar{\mathcal{M}}_\xi} \det \Psi(\bar{m}), \tag{2.2.3}$$

gdzie $\Psi : \bar{\mathcal{M}}_\xi \to \mathcal{M}_\xi$ przyporządkowuje wektorowi $\bar{m} \in \bar{\mathcal{M}}_\xi$ macierz według przepisu podanego w M_6. Odwzorowanie Ψ jest ciągłe przy dowolnym wyborze normy wektora w $R^{r(r+1)/2}$ i normy macierzy $r \times r$-wymiarowych, gdyż w przestrzeniach skończenie wymiarowych wszystkie normy są równoważne, a odwzorowanie Ψ polega na przeindeksowaniu wektora $\bar{m}$ zgodnie z M_6. Na podstawie wzorów (2.2.2), (2.2.3) oraz M_7 i M_8, wobec ciągłości wyznacznika jako funkcji elementów macierzy, otrzymujemy problem optymalizacji ciągłej funkcji na zbiorze zwartym $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ w przestrzeni skończenie wymiarowej. Na mocy twierdzenia Weierstrassa istnieje $\hat{\bar{m}} \in \bar{\mathcal{M}}_\xi$, dla którego jest osiągane supremum we wzorze (2.2.3) po prawej stronie. Zatem dla $\hat{M} \triangleq \Psi(\hat{\bar{m}})$ jest osiągane również supremum we wzorze (2.2.2).

Ponieważ $\hat{M} \in \mathcal{M}_\xi$, więc na mocy definicji tego zbioru istnieje co najmniej jedno $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ takie, że $\hat{M} = M(\hat{S}_u,\xi)$. Udowodniliśmy, więc własność:

P_{11}) Problem (2.2.1) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze $\mathcal{S}$.

Własność ta pozwala wprowadzić określenie:

<u>Definicja 2.2.1</u>. Każde $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ spełniające (2.2.1) będzie nazywane D_ξ-optymalną widmową gęstością mocy sygnału sterującego.

Zauważmy, że dla macierzy $\hat{M} \in \mathcal{M}_\xi$ równość $\hat{M} = M(S_u, \xi)$ zachodzić może dla różnych $S_u \in \mathcal{S}$. Jednakże na mocy M_5 i ścisłej wklęsłości funkcji $\Phi(M)$ na zbiorze $\mathcal{M}_\xi$ łatwo wywnioskować, że:

P_{12}) Dla wszystkich D_ξ-optymalnych $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ zachodzi $\hat{M} = M(\hat{S}_u, \xi)$, tzn. D_ξ-optymalna UMI jest jedyna.

Z P_{12} i z (2.12) otrzymujemy bezpośrednio

P_{13}) Zbiór wszystkich D_ξ-optymalnych $S_u \in \mathcal{S}$ jest zbiorem wypukłym.

Wyniki pomocnicze

W wyprowadzonych w dalszej części pracy warunkach optymalności dla problemu 1 występować będzie funkcja $Q_\xi(x,y,j\omega;S_u) : \Omega_u \times \Omega_u \times [-\omega_0,\omega_0] \longrightarrow C$ określona, przy ustalonych $S_u \in \mathcal{S}$ i $\xi \in \Xi$, wzorem:

$$Q_\xi(x,y,j\omega;S_u) = \mathrm{tr}[W(x,y,j\omega;\xi)M^{-1}(S_u,\xi)] =$$
$$= \int_{\Omega_p} \bar{K}^{\nabla}(\varkappa,y,-j\omega)M^{-1}(S_u,\xi)\bar{K}(\varkappa,x,j\omega)\xi(\varkappa)d\varkappa, \qquad (2.2.4)$$

We wzorze (2.2.4) uwzględniono uwagę 2.2.1, a druga równość wynika z (2.1.13).

Zbadamy podstawowe własności funkcji Q_ξ. Bezpośrednio z jej określenia i z (2.1.13) oraz (2.1.14) dostaniemy:

Q_1) $\forall \omega \in [-\omega_0,\omega_0]\, Q_\xi(x,y,j\omega;S_u) = Q_\xi^c(y,x,j\omega;S_u) = Q_\xi(y,x,-j\omega;S_u)$ gdzie z^c oznacza liczbę zespoloną sprzężoną względem $z \in C$.

Q_2) Przy dowolnym ustalonym $\omega \in [-\omega_0,\omega_0]$ funkcja Q_ξ jest dodatnio określona w tym sensie, że dla każdej funkcji $f : \Omega_u \longrightarrow C$, której moduł jest całkowalny z kwadratem na Ω_u, zachodzi nierówność

$$\int_{\Omega_u}\int_{\Omega_u} Q_\xi(x,y,j\omega;S_u)f(x)f^c(y)dxdy > 0, \qquad (2.2.5)$$

jeżeli $f \neq 0$.

Przyjmując Q_ξ jako jądro, zbadajmy problem wartości własnych równania całkowego:

$$\mu(\omega)\varphi(x,j\omega) = \int_{\Omega_u} Q_\xi(x,y,j\omega;S_u)\varphi(y,j\omega)dy. \qquad (2.2.6)$$

W równaniu tym $\omega \in [-\omega_0,\omega_0]$ odgrywa rolę parametru. Dlatego też w oznaczeniu wartości własnych $\mu(\omega)$ i funkcji własnych $\varphi(x,j\omega)$ wskazano jawnie zależność od ω.

Uwaga 2.2.2

Zarówno $\mu(\omega)$, jak i $\varphi(x,j\omega)$ w (2.2.6), zależą także od ξ i S_u. Aby nie komplikować zapisów, zależność ta nie będzie wskazywana w nota-

cji, dopóki nie będzie to konieczne. Sprecyzowania wymaga jeszcze przestrzeń, w której poszukiwane będą funkcje własne (2.2.6). Ze względu na własność Q_3 naturalne jest przyjęcie, że $\forall_\omega \ \varphi(.,j\omega) \in L^2(\Omega_u)$.

Q_3) Dla każdego $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$

$$\int_{\Omega_u}\int_{\Omega_u} |Q_\xi(x,y,j\omega;S_u)|^2 dxdy < \infty ,$$

przy założeniu, że $\int_{\Omega_u} \|\bar{K}(\varkappa,x,j\omega)\|^2 dx < \infty$ dla wszystkich $\varkappa \in \Omega_p$.

Z własności Q_1, Q_2, Q_3 wynika, że (2.2.6) jest zagadnieniem wartości własnych dla równania całkowego z symetrycznym (hermitowskim) i dodatnio określonym jądrem. Teoria takich równań jest dobrze opracowana (por. prace [128],[75],[62]). Pozwala to od razu przytoczyć podstawowe rezultaty dotyczące (2.2.6), potrzebne do wyprowadzenia warunków D-optymalności (por. pracę [75], p. 16).

Q_4) Istnieje co najmniej jedna niezerowa funkcja własna i wartość własna równania (2.2.6).

Q_5) Dla wszystkich $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$ wartości własne (2.2.6) $\mu(\omega)$ są rzeczywiste i nieujemne.

Q_6) Równanie (2.2.6) ma, dla każdego $|\omega| \leqslant \omega_0$, co najwyżej przeliczalny ciąg wartości własnych $\mu_1(\omega), \mu_2(\omega), \ldots$ (w ciągu tym każda wartość własna występuje tyle razy, ile wynosi jej krotność), a odpowiadający mu ciąg funkcji własnych $\varphi_1(x,j\omega), \varphi_2(x,j\omega), \ldots$ można wybrać tak, by był on ortonormalny, tzn.

$$\forall_{|\omega| \leqslant \omega_0} \int_{\Omega_u} \varphi_i(x,j\omega)\varphi_k^c(x,j\omega)dx = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k, \end{cases} \qquad (2.2.7)$$

dla $i,k = 1,2, \ldots$.

Q_7) Na mocy własności Q_3 maksymalna wartość własna równania (2.2.6) istnieje i jest ograniczona. W dalszym ciągu będzie ona oznaczana przez $\mu_{max}(\omega;Q_\xi)$.

W dalszym ciągu potrzebna będzie własność ciągłości zależności wartości własnych (2.2.6) od parametru ω. Można ją wywnioskować wprost z ogólnych twierdzeń teorii operatorów zwartych. Udowodnimy ją jednak w sposób bardziej elementarny w Dodatku 2E przy założeniu, że składowe wektorów $\bar{K}(\varkappa_i,x,j\omega)$, $i=1,2, \ldots$, są ciągłymi funkcjami na zbiorze $\Omega_u \times [-\omega_0, \omega_0]$.

Q_8) Przy powyższym założeniu $\mu_1(\omega), \mu_2(\omega), \ldots, \mu_p(\omega), \ldots$ są ciągłymi funkcjami $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$.

Potrzebna nam będzie również następująca nierówność, wynikająca z tzw. ekstremalnych własności wartości własnych równań całkowych z symetrycznym i dodatnio określonym jądrem (por. pracę [75], § 16):

Q_9) Dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\Omega_u)$ (o wartościach w C) zachodzi:

$$\forall_{\omega \leqslant \omega_0} \int_{\Omega_u} \int_{\Omega_u} Q_\xi(x,y,j\omega;S_u) f(x) f^c(y)\,dx\,dy \leqslant \mu_{max}(\omega;Q_\xi) \tag{2.2.8}$$

przy założeniu, że $\int_{\Omega_u} |f(x)|^2 dx \leqslant 1$.

Uwaga 2.2.3

Przyjęta we wzorze (2.2.6) konwencja definiowania wartości własnych jest rozpowszechniona w zagadnieniach spektralnej teorii operatorów (por. np. prace [41], [62]). W teorii równań całkowych spotyka się (por. np. pracę [128]) również inną konwencję, w której μ są nazywane liczbami charakterystycznymi, a $1/\mu$ wartościami własnymi.

Do wyprowadzenia warunków optymalności potrzebny będzie następujący rezultat, który w szczególnym przypadku $\xi_0(\varkappa) = \delta(\varkappa-\varkappa_1)$ udowodniono w pracy [86].

L e m a t 2.2.1. Jeżeli są spełnione założenia Z_1-Z_{12} z rozdz. 1, z uwzględnieniem uwagi 2.2.1, to przy ustalonym $\xi \in \Xi$ dla każdego $S_u \in \mathcal{S}$ zachodzi nierówność:

$$\sup_{|\omega| \leqslant \omega_0} \mu_{max}(\omega;Q_\xi) \geqslant r, \tag{2.2.9}$$

gdzie $r = \dim(a)$ jest liczbą estymowanych parametrów, natomiast $\mu_{max}(\omega;Q_\xi)$ oznacza maksymalną, przy danym ω, wartość własną w (2.2.6). Dowód tego lematu wynika z następujących równości:

$$\begin{aligned} r &= \mathrm{tr}\left[M^{-1}(S_u,\xi)M(S_u,\xi)\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\int_{\Omega_u}\int_{\Omega_u} Q_\xi(x,y,j\omega;S_u)\cdot S_u(x,y,j\omega)\,dx\,dy\,d\omega. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Korzystając z (2.2.10) oraz z twierdzenia Lebesgue'a (o majoryzowanej zbieżności [110]), możemy S_u w (2.2.10) zastąpić wyrażeniem podanym w własności S_3, a następnie skorzystać z (2.2.8), co po ponownym zastosowaniu S_3 daje:

$$r \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\left[\mu_{max}(\omega;Q_\xi)\int_{\Omega_u} S_u(x,x,j\omega)\,dx\right]d\omega. \tag{2.2.11}$$

Teza lematu wynika bezpośrednio z (2.2.11) po skorzystaniu z własności S_6 i Q_8.

Nierówności (2.2.9) można nadać interpretację statystyczną. Wskazuje ona na to, że uśredniona po ξ wariancja oszacowania stanu obiektu przy pobudzeniu sinusoidalnym jest ograniczona od dołu. Nie będziemy dokładniej precyzować i uzasadniać tej interpretacji, gdyż nie będziemy z niej korzystać i zajęłoby to zbyt dużo miejsca.

Warunek konieczny i dostateczny D-optymalności

Wobec wypukłości zbioru $\mathcal{S}$ i wklęsłości funkcji Φ w (2.2.1), pierwszy etap wyprowadzenia warunków D_ξ-optymalności polega na skorzystaniu ze znanego w teorii optymalizacji twierdzenia (por. np. pracę [010]), które przytaczamy w stosowanej tu notacji. Jeżeli $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ jest D_ξ-optymalne, to dla każdego S_u^0 zachodzi:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi(M(S_u^\alpha, \xi))\Big|_{\alpha=0+} \leqslant 0, \tag{2.2.12}$$

gdzie $S_u^\alpha(x,y,j\omega) \triangleq (1-\alpha)S_u(x,y,j\omega) + \alpha \cdot S_u^0(x,y,j\omega)$, (2.2.13)

dla $\alpha \in [0,1]$. Zapis (2.2.12) należy interpretować w ten sposób, że po wykonaniu różniczkowania po α brana jest prawostronna granica, gdy $\alpha \to 0$.

Warunek (2.2.12) był wielokrotnie wykorzystywany w zadaniach doboru sterowań w identyfikacji obiektów skupionych (por. np. prace [22], [27], [35]).

Ścisła wklęsłość $\Phi(M(S_u,\xi))$ jako funkcjonału S_u, pozwala wykazać, że jeżeli (2.2.12) zachodzi dla każdego $S_u^0 \in \mathcal{S}$, to $\hat{S}_u$ jest D_ξ-optymalne. Tak sformułowany warunek jest jednak trudny do sprawdzenia i zastosowania do konstruowania algorytmów numerycznych. Dlatego też w każdym tego typu zadaniu dąży się do znalezienia takiej wariacji S_u^0, która po wstawieniu do wzoru (2.2.12) dałaby warunek konieczny i dostateczny optymalności S_u. Forma takiej wariacji zależy od konkretnego problemu i musi być każdorazowo "odgadnięta". Pokażemy, że dla problemu 1 odpowiednie S_u^0 ma postać:

$$S_u^0(x,y,j\omega) = \hat{\varphi}(x,-j\omega)\hat{\varphi}(y,+j\omega)\pi[\delta(\omega+\omega^0) + \delta(\omega-\omega^0)] \tag{2.2.13}$$

gdzie $\hat{\varphi}(x,j\omega)$ jest funkcją własną równania (2.2.6) z jądrem $\hat{Q}_\xi(x,y,j\omega) = \triangleq Q_\xi(x,y,j\omega;\hat{S}_u)$, odpowiadającą maksymalnej wartości własnej $\hat{\mu}_{max}(\omega) \triangleq \mu_{max}(\omega;\hat{Q}_\xi)$. Częstotliwość $\omega^0 \in [-\omega_0,\omega_0]$ występująca we wzorze (2.2.13) jest dowolna, lecz ustalona. Własności Q_1-Q_9 pozwalają stwierdzić poprawność określenia (2.2.13) i fakt, że $S_u^0 \in \mathcal{S}$.

Do wykonania obliczeń w (2.2.12) potrzebne będą jeszcze dwie własności:

Q_{10}) Jeżeli $\varphi(x,j\omega)$ jest funkcją własną równania (2.2.6), odpowiadającą

wartości własnej $\mu(\omega)$, to istnieje funkcja własna $\tilde{\varphi}(x,j\omega)$ odpowiadająca tej samej wartości własnej i taka, że: $\tilde{\varphi}^c(x,j\omega)=\tilde{\varphi}(x,-j\omega)$. Dlatego w dalszym ciągu będziemy uważać, że wszystkie funkcje własne (2.2.6) $\varphi_k(x,j\omega)$, $k=1,2,\ldots$ mają tę własność.

Q_{11}) Wartości własne we wzorze (2.2.6) są symetrycznymi funkcjami $\omega\in[-\omega_0,\omega_0]$, tzn. $\mu_k(-\omega)=\mu_k(\omega)$, $k=1,2,\ldots$

Dowody Q_{10} i Q_{11} mają charakter algebraiczny i podane zostaną w Dodatku.

Po zróżniczkowaniu we wzorze (2.2.12) otrzymamy:

$$\operatorname{tr}\left[M^{-1}(\hat{S}_u,\xi)M(S_u^0,\xi)\right]\leqslant r, \tag{2.2.14}$$

(por. pracę [22], gdzie podano wzory różniczkowania wyznacznika).

Wstawienie wzoru (2.2.13) do (2.2.14) i skorzystanie z wzoru (2.2.6) oraz (2.2.7) i własności Q_{10}, Q_{11} pozwala uzyskać warunek

$$\mu_{max}(\omega^0,\hat{Q}_\xi)\leqslant r, \tag{2.2.15}$$

gdzie $\hat{Q}_\xi(x,y,j\omega)\triangleq Q_\xi^c(x,y,j\omega;\hat{S}_u)$. Warunek ten jest spełniony dla wszystkich $\omega^0\in[-\omega_0,\omega_0]$ co, wobec lematu 2.2.1 prowadzi do wniosku, że warunkiem koniecznym D_ξ-optymalności $\hat{S}_u\in\mathcal{S}$ jest, by

$$\sup_{|\omega|\leqslant\omega_0}\left[\mu_{max}(\omega;\hat{Q}_\xi)\right]=r. \tag{2.2.16}$$

Pokażemy, że (2.2.16) jest również dostateczne dla D_ξ- optymalności $\hat{S}_u\in\mathcal{S}$. W tym celu załóżmy, że (2.2.16) zachodzi, ale $\hat{S}_u\in\mathcal{S}$ nie jest D_ξ-optymalne, tzn. istnieje $\tilde{S}_u\in\mathcal{S}$ takie, że $\hat{S}_u\neq\tilde{S}_u$ oraz

$$\Phi(M(\tilde{S}_u,\xi))>\Phi(M(\hat{S}_u,\xi)). \tag{2.2.17}$$

Utwórzmy $\tilde{S}_u^\alpha\triangleq[(1-\alpha)\hat{S}_u+\alpha\cdot\tilde{S}_u]\in\mathcal{S}$ dla $\alpha\in[0,1]$. Wobec ścisłej wklęsłości Φ i (2.2.17) zachodzi nierówność:

$$\forall_{\alpha\in(0,1]}\ \Phi((1-\alpha)M(\hat{S}_u,\xi)+\alpha\cdot M(\tilde{S}_u,\xi))>\Phi(M(\hat{S}_u,\xi)). \tag{2.2.18}$$

Po podzieleniu obu stron (2.2.18) przez $\alpha>0$ i wykonaniu przejścia granicznego $\alpha\to 0+$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi(M(\tilde{S}_u^\alpha,\xi))\Big|_{\alpha=0+}>0, \tag{2.2.19}$$

Po wykonaniu różniczkowania we wzorze (2.2.19) uzyskamy nierówność:

$$r<\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\iint_{\Omega_u}\hat{Q}_\xi(x,y,j\omega)\tilde{S}_u(x,y,j\omega)\,dx\,dy\,d\omega. \tag{2.2.20}$$

Lewą stronę tej nierówności oszacować można od góry stosując argumenty takie same jak w dowodzie lematu 2.2.1, co daje

$$r < \sup_{|\omega| \leq \omega_0} [\mu_{max}(\omega; \hat{Q}_\xi)] . \tag{2.2.21}$$

Nierówność ta jest jednak sprzeczna z (2.2.16), a otrzymana sprzeczność dowodzi dostateczności tego warunku. W ten sposób udowodnione zostało twierdzenie (podane w pracy [35] bez dowodu).

TWIERDZENIE 2.2.1. Przy założeniach Z_1-Z_{12} warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ było D-optymalną widmową gęstością mocy sygnału sterującego, jest spełnienie warunku (2.2.16), w którym oznaczenia są takie jak w lemacie 2.2.1, natomiast $\hat{Q}_\xi(x,y,j\omega) \triangleq Q_\xi(x,y,j\omega;\hat{S}_u)$. Rezultat ten stanowi podstawę dla bardziej szczegółowych wyników tego i następnego rozdziału.

W zasadzie można na jego podstawie skonstruować algorytm numeryczny znajdowania dowolnie dokładnego przybliżenia dla $\hat{S}_u$, działający w zbiorze $\mathcal{S}$. Zbiór $\mathcal{S}$ jest jednak zbiorem funkcji wielu zmiennych, zatem implementacja komputerowa takiego algorytmu wymagałaby pamięci o bardzo dużej pojemności. Dlatego autor poszukiwał innej drogi konstrukcji takiego algorytmu numerycznego. Podejście takie zostanie zaproponowane w p. 2.4 na podstawie wniosków z twierdzenia 2.2.1, sformułowanych w następnym podrozdziale.

Podsumowanie

W podrozdziale 2.2 sformułowano zadanie D_ξ-optymalnego doboru widmowej gęstości mocy sygnału sterującego i udowodniono istnienie jego rozwiązania. Wyprowadzono także warunek konieczny i dostateczny optymalności, korzystając z wyników teorii równań całkowych.

2.3. Częstotliwościowo-przestrzenna struktura optymalnej widmowej gęstości mocy sygnału sterującego

W podrozdziale tym przedstawione zostaną wnioski z twierdzenia 2.2.1, pozwalające znajdować $\hat{S}_u$ analitycznie w prostszych przypadkach, i bezpośrednio stosowane do skonstruowania algorytmu numerycznego. Ze względu na konieczność stosowania skomplikowanych zapisów przyjmiemy w celu ich uproszczenia, że $\xi(\varkappa) = \delta(\varkappa-\varkappa_0)$, $\varkappa_0 \in \Omega_p$, tzn. że pomiary są dokonywane tylko w jednym punkcie $\varkappa_0$.

Na wybór punktu $\varkappa_0 \in \Omega_p$ nie nakłada się ograniczeń z wyjątkiem spełnienia warunków sformułowanych w uwadze 2.2.1. Problem 1 z $\xi(\varkappa) = \delta(\varkappa-\varkappa_0)$ nazywać będziemy problemem D_0-optymalnego doboru widmowej gęstości mocy sygnału sterującego.

Struktura D_0-optymalnej widmowej gęstości mocy

Twierdzenie 2.2.1 sugeruje, że $\hat{S}_u$ powinno być w jakiś sposób związane z funkcją własną równania (2.2.6), odpowiadającą maksymalnej wartości własnej tego równania. Wykażemy słuszność tej hipotezy. W tym celu zbadamy czy można tak dobrać funkcję $s(\omega) : [-\omega_0, \omega_0] \to R^+$, by

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = \hat{\varphi}(x,-j\omega)\hat{\varphi}(y,j\omega)s(\omega) \tag{2.3.1}$$

była dopuszczalna i spełniała warunki twierdzenia 2.2.1. We wzorze (2.3.1) przez $\hat{\varphi}(x,j\omega)$ oznaczono funkcję własną równania (2.2.6), odpowiadającą maksymalnej wartości własnej. Przy czym jako jądro (2.2.6) wybrano $Q_{\xi_0}(x,y,j\omega;\hat{S}_u)$, w którym $\xi_0(\varkappa) = \delta(\varkappa-\varkappa_0)$, natomiast $\hat{S}_u$ ma postać (2.3.1). Pozwala to zapisać (por. (2.2.4)):

$$Q_{\xi_0}(x,y,j\omega;\hat{S}_u) = K^{\nabla}(y,-j\omega)M^{-1}(S_u,\xi_0)K(x,j\omega), \tag{2.3.2}$$

gdzie $K(x,j\omega) \triangleq \bar{K}(\varkappa_0,x,j\omega)$. Po podstawieniu wzoru (2.3.1) do (2.1.12) otrzymamy:

$$M(S_u,\xi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} s(\omega)\hat{K}(j\omega)\hat{K}^{\nabla}(-j\omega)d\omega, \tag{2.3.3}$$

gdzie $\hat{K}(j\omega) \triangleq \int_{\Omega_u} K(x,j\omega)\hat{\varphi}(x,-j\omega)dx.$

Aby $\hat{S}_u$ określone przez (2.3.1) było elementem $\mathcal{S}$ wystarczy, by:

a) $s(\omega)$ była funkcją symetryczną, tzn. $s(-\omega) = s(\omega)$ dla $\omega\in[-\omega_0,\omega_0]$ i nieujemną,

$$\text{b)}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} s(\omega)d\omega \leqslant 1. \tag{2.3.4}$$

Łatwo sprawdzić, że wobec własności Q_6 warunki a,b gwarantują spełnienie własności S_5 i S_6 przez (2.3.1), jeżeli $s(\omega) = 0$ dla $|\omega| > \omega_0$. Wybierzmy funkcję $s(\omega)$ w (2.3.1) w taki sposób, by była ona rozwiązaniem następującego problemu

$$\sup \det\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{K}(j\omega)\hat{K}^{\Delta}(-j\omega)s(\omega)d\omega\right], \tag{2.3.5}$$

gdzie supremum we wzorze (2.3.5) dotyczy wszystkich takich $s(.)$, które spełniają a oraz b.

Problem ten, jak łatwo zauważyć, można interpretować jako zadanie D-optymalnego doboru widmowej gęstości mocy sterowania dla obiektu o parametrach skupionych, mającego szczególną postać. Mianowicie, transformata Fouriera wektora wrażliwości na zmiany parametrów tego obiektu

powinna być równa $\hat{K}(j\omega)$. Ta ciekawa interpretacja pozwala skorzystać z uzyskanych niedawno wyników (por. prace [65],[27]), charakteryzujących rozwiązanie problemu (2.3.5). W cytowanych pracach wykazano, że funkcja $\hat{s}(.)$, dla której osiągane jest we wzorze (2.3.5) supremum istnieje oraz, że $\hat{s}(.)$ jest rozwiązaniem problemu (2.3.5) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\sup_{|\omega| \leqslant \omega_0} [\hat{K}^T(-j\omega)\hat{M}^{-1}\hat{K}(j\omega)] = r , \tag{2.3.6}$$

gdzie

$$\hat{M} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{K}(j\omega)\hat{K}^T(-j\omega)\hat{s}(\omega)d\,\omega. \tag{2.3.7}$$

Uwaga 2.3.1

W monografii [27] udowodniono, że w zadaniu doboru sterowań dla obiektów o parametrach skupionych, dla każdej gęstości widmowej mocy $s(\omega)$, spełniającej warunki a oraz b, istnieje gęstość $\tilde{s}(\omega)$ o postaci:

$$\tilde{s}(\omega) = \pi \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left[\delta(\omega + \omega_i) + \delta(\omega - \omega_i)\right] ,$$

dająca tę samą macierz informacyjną co gęstość $s(\omega)$. W powyższym wzorze $\omega_i \in [0,\omega_0]$, $\alpha_i \geqslant 0$; $i=1,2,\ldots,p$ oraz $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \leqslant 1$. Wskaźnik sumowania p można przy tym wybrać tak, by $p \leqslant r(r+1)/2+1$.

Zauważmy, że $\hat{M} = M(\hat{S}_u,\xi_0)$ dla $\hat{S}_u$ postaci (2.3.1) z funkcją $s(.)$ zastąpioną przez $\tilde{s}(.)$. Powyższe spostrzeżenia pozwalają udowodnić następujące

TWIERDZENIE 2.3.1. Niech będą spełnione założenia twierdzenia 2.2.1 z $\xi(x) = \xi_0(x) = \delta(x-x_0), x_0 \in \Omega_p$. Jeżeli $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ ma postać:

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = \hat{\varphi}(x,-j\omega)\hat{\varphi}(y,j\omega)\hat{s}(\omega), \tag{2.3.8}$$

gdzie znaczenie symboli jest takie jak we wzorze (2.3.1), a $\hat{s}$ spełnia warunek (2.3.6), to gęstość ta jest D_0-optymalna.

W celu udowodnienia tego twierdzenia zapiszmy wyrażenie dla maksymalnej wartości własnej równania (2.2.6)

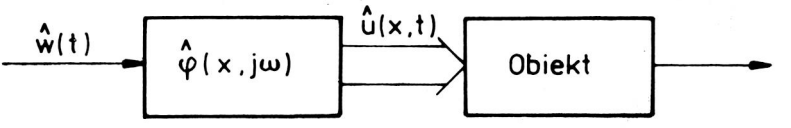
$$\hat{\mu}(\omega)\hat{\varphi}(x,j\omega) = \int_{\Omega_u} Q_{\xi_0}(x,y,j\omega;\hat{S}_u)\hat{\varphi}(y,j\omega)dy, \tag{2.3.9}$$

gdzie $\hat{S}_u$ dane jest wzorem (2.3.8). Mnożąc obie strony wzoru (2.3.9) przez $\hat{\varphi}(x,-j\omega)$ i całkując względem $x \in \Omega_u$ otrzymamy po skorzystaniu z (2.3.2):

$$\mu(\omega) = \hat{K}^{\nabla}(-j\omega)M^{-1}(\hat{S}_u, \xi_o)\hat{K}(j\omega) \ . \qquad (2.3.10)$$

Ponieważ (2.3.6) jest spełnione z założenia, więc $\sup \hat{\mu}(\omega) = r$, co wobec twierdzenia 2.2.1 kończy dowód optymalności (2.3.8).

Pomimo że na tym etapie nie potrafimy efektywnie wyliczy $\hat{\varphi}(x,j\omega)$ i $\hat{s}(\omega)$ (będzie o tym mowa dalej), to celowe jest podanie schematu ideowego urządzenia realizującego D_o-optymalny sygnał sterujący $\hat{u}(x,t)$ o gęstości mocy (2.3.8). Aby to zrobić, potrzebny nam będzie sygnał $\hat{w}: R \to R$ (zależny tylko od czasu) taki, że jego widmową gęstością mocy jest $\hat{s}(\omega)$. Łatwo zauważyć, że sygnał taki po przejściu przez filtry o transmitancjach widmowych $\hat{\varphi}(x,j\omega)$ oraz $\hat{\varphi}(y,j\omega)$, w których $x,y \in \Omega_u$ są parametrami, będzie miał wzajemną gęstość widmową mocy (2.3.8). Wynik tych spostrzeżeń ilustruje schemat ideowy na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Realizacja optymalnego sygnału sterującego $\hat{u}(x,t)$; $\hat{W}(t)$ - sygnał o gęstości mocy $\hat{s}(\omega)$; $\hat{\varphi}(x,j\omega)$ - transmitancja filtru o rozłożonym wyjściu

Fig. 2.1. Realization of the optimal input signal $\hat{u}(x,t)$; $\hat{W}(t)$ - signal with the power spectral density $\hat{s}(\omega)$; $\hat{\varphi}(x,j\omega)$ - transfer function of a filter with distributed filter

<u>Istnienie parametryzowalnej D_o-optymalnej gęstości widmowej</u>

Wyniki poprzedniego punktu dają strukturalny obraz D_o-optymalnej gęstości widmowej. Strukturę tę zbadamy teraz bardziej szczegółowo, dążąc do uzyskania takiej postaci $\hat{S}_u$, która byłaby prostsza w obróbce komputerowej i realizacji technicznej.

Zauważmy, że równanie (2.3.9) z jądrem (2.3.2) należy do klasy równań całkowych ze zdegenerowanym jądrem (por.[75]). Jak wiadomo, funkcje własne takiego równania są liniowymi kombinacjami funkcji określających zdegenerowane jądro. W naszym przypadku współczynniki w liniowych kombinacjach mogą zależeć od ω jako od parametru, gdyż zależy od niego $K(x,j\omega)$. Zatem, funkcji własnych (2.3.9) szukać będziemy w postaci:

$$\varphi(x,j\omega) = c^{\nabla}(-j\omega)K(x,j\omega). \qquad (2.3.11)$$

Aby funkcje takie spełniały warunek unormowania, wektor $c(j\omega) \in C^r$ powinien spełniać

$$\forall_{\omega\in[-\omega_o,\omega_o]}\ c^{\nabla}(-j\omega)H(j\omega)c(j\omega) = 1, \qquad (2.3.12)$$

gdzie $r \times r$ hermitowska macierz

$$H(j\omega) \triangleq \int_{\Omega_u} K(x,j\omega)K^{\nabla}(x,-j\omega)dx \ . \tag{2.3.13}$$

Po podstawieniu wzoru (2.3.11) do (2.3.9), pomnożeniu obu stron (2.3.9) przez wektor $K^{\nabla}(x,-j\omega)$ i scałkowaniu obustronnie po Ω_u otrzymamy, po skorzystaniu z wzorów (2.3.2) i (2.3.13),

$$\hat{\mu}(\omega)\hat{c}\ (-j\omega)H(j\omega) = \hat{c}^{\nabla}(-j\omega)H(j\omega)M^{-1}(\hat{S}_u,\xi_o)H(j\omega), \tag{2.3.14}$$

gdzie $\hat{c}(j\omega) \in C^r$ jest wektorem odpowiadającym funkcji własnej $\hat{\varphi}(x,j\omega)$, określonym poprzez (2.3.11).

Zależność (2.3.14) zachodzi nie tylko dla maksymalnej wartości własnej, lecz dla wszystkich wartości własnych równania całkowego. Zauważmy, że (2.3.14) jest tzw. uogólnionym problemem wartości własnych (por. [55]) dla pary macierzy $H(j\omega)$ i $H(j\omega)M^{-1}(\hat{S}_u,\xi_o)H(j\omega)$, a $\hat{\mu}(\omega)$ i $\hat{c}(-j\omega)$ są maksymalną wartością własną tego problemu. W ten sposób otrzymujemy wprost z twierdzenia 2.2.1:

<u>Wniosek 2.3.1</u>

a) Warunkiem koniecznym i dostatecznym D_o-optymalności $\hat{S}_u$ jest, by

$$\sup_{|\omega|\leqslant \omega_o} [\hat{\mu}(\omega)] = r, \tag{2.3.15}$$

gdzie $\hat{\mu}(\omega)$ jest maksymalną wartością własną uogólnionego problemu wartości własnych (2.3.14);

b) jeśli dodatkowo macierz $H(j\omega)$ jest nieosobliwa dla każdego $\omega \in [-\omega_o,\omega_o]$, to warunek konieczny i dostateczny optymalności ma postać:

$$\sup_{|\omega|\leqslant \omega_o} \lambda_{max}[H(j\omega)M^{-1}(\hat{S}_u,\xi_o)] = r, \tag{2.3.16}$$

gdzie $\lambda_{max}[\cdot]$ oznacza maksymalną wartość własną macierzy. Równocześnie, z twierdzenia 2.3.1 otrzymujemy:

<u>Wniosek 2.3.2</u>. D_o-optymalna $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ ma postać:

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = K^{\nabla}(x,-j\omega)\hat{c}(j\omega)\hat{c}^{\nabla}(-j\omega)K(y,j\omega)\hat{s}(\omega), \tag{2.3.17}$$

gdzie $\hat{s}(\omega)$ jest takie jak w twierdzeniu 2.3.1 po zastąpieniu $\hat{\varphi}(x,j\omega)$ przez $\hat{c}^{\nabla}(-j\omega)K(x,j\omega)$, natomiast $\hat{c}(j\omega)$ jest wektorem własnym problemu (2.3.14), odpowiadającym maksymalnej wartości własnej $\hat{\mu}(\omega)$. W przypadku b wniosku 2.3.1 $\hat{c}(j\omega)$ jest wektorem własnym macierzy $H(j\omega)M^{-1}(S_u,\xi_o)$, odpowiadającym jej maksymalnej wartości własnej.

Zgodnie z powyższymi wnioskami oraz na podstawie wzorów (2.3.6) i (2.3.7), gęstość widmowa $\hat{s}(\omega)$ w (2.3.17) jest taka, że

$$\sup_{|\omega|\leqslant \omega_o} [c^{\nabla}(-j\omega)H^{\nabla}(-j\omega)\hat{M}^{-1}H(j\omega)\hat{c}(j\omega)] = r, \tag{2.3.18}$$

gdzie

$$\hat{M} \triangleq M(\hat{S}_u, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} H(j\omega)\hat{c}(j\omega)\hat{c}^{\nabla}(-j\omega)H^{\nabla}(-j\omega)\hat{s}(\omega)d\omega \qquad (2.3.19)$$

Korzystając z łatwego do sprawdzenia faktu, że $H^{\nabla}(j\omega) = H(-j\omega)$ oraz (2.3.14) i (2.3.12) stwierdzamy, iż warunki (2.3.18) i (2.3.15) są tożsame. Zatem zakładanie warunku (2.3.18) nie jest potrzebne. Po podsumowaniu dotychczasowych wyników wraz z uwagą 2.3.1 stwierdzamy, że jedno z D_0-optymalnych $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ ma postać:

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = K^{\nabla}(x,-j\omega)\hat{c}(j\omega)\hat{c}^{\nabla}(-j\omega)K(y,j\omega) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i [\, \delta(\omega - \hat{\omega}_i) + \delta(\omega + \hat{\omega}_i)], \qquad (2.3.20)$$

przy czym wielkości występujące w tym wzorze powinny spełniać następujące warunki:

O_1) $\hat{\omega}_i \in [-\omega_0, \omega_0]$, $\omega_i \neq \omega_k$, $\hat{\alpha}_i \geqslant 0$, $k,i=1,2,\ldots,p$, $\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i \leqslant 1$,

O_2) $\hat{c}(j\omega)$ jest wektorem własnym problemu (2.3.14), odpowiadającym jego maksymalnej wartości własnej $\hat{\mu}(\omega)$ i unormowanym zgodnie ze wzorem (2.3.12).

O_3) Zmienne występujące w O_1 powinny być tak dobrane, by był spełniony warunek (2.3.15).

O_4) Odpowiadająca wzorowi (2.3.20) UMI ma postać:

$$M(\hat{S}_u, \xi_0) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Re}\, H(j\hat{\omega}_i)\hat{c}(j\hat{\omega}_i)\hat{c}^{\nabla}(-j\hat{\omega}_i)H^{\nabla}(-j\hat{\omega}_i)\hat{\alpha}_i, \qquad (2.3.21)$$

natomiast p można wybrać tak, by

$p \leqslant r(r+1)/2$.

Podczas wyprowadzania (2.3.21) skorzystaliśmy z następujących własności:

$$H^c(j\omega) = H(-j\omega), \quad \hat{c}^c(j\omega) = \hat{c}(-j\omega), \qquad (2.3.22)$$

które łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

Rozważmy możliwości generowania sygnału $\hat{u}(x,t)$, $x \in \Omega_u$, $t \in R$ o widmowej gęstości mocy (2.3.20). W tym celu zauważmy (por. [120]), że widmową gęstość mocy:

$$\hat{s}(\omega) = \pi \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i \left[\delta(\omega - \hat{\omega}_i) + \delta(\omega + \hat{\omega}_i) \right] \tag{2.3.23}$$

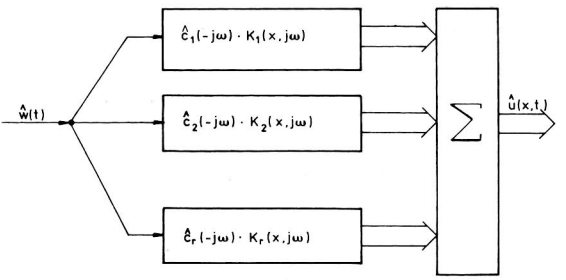
posiada sygnał "skupiony":

$$\hat{w}(t) = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\hat{\alpha}_i} \sin(\hat{\omega}_i t). \tag{2.3.24}$$

Spostrzeżenie to pozwala wskazać dwa sposoby generowania sterowania o gęstości widmowej (2.3.20).

S p o s ó b 1

jest uszczegółowieniem schematu z rys. 2.1 i polega na przetworzeniu sygnału $\hat{w}(t)$ za pomocą filtru o transmitancji $\hat{\varphi}(x,j\omega) = \hat{c}^{\nabla}(-j\omega) \times$ $\times K(x,j\omega)$. Obrazuje to rys. 2.2.



Rys. 2.2. Struktura filtru z rys. 2.1

Fig. 2.2. Internal structure of the filter given in fig. 2.1

Na wyjściu tego filtru otrzymamy sygnał o postaci:

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{p} \hat{\beta}_i(x) \sin\left[\hat{\omega}_i t + \hat{\gamma}_i(x) \right], \tag{2.3.25}$$

gdzie

$$\hat{\beta}_i(x) = \sqrt{\hat{\alpha}_i} \cdot \left| \hat{c}^{\nabla}(-j\hat{\omega}_i)\, K(x,j\hat{\omega}_i) \right|, \tag{2.3.26}$$

$$\hat{\gamma}_i(x) = \mathrm{Arg}\left[\hat{c}^{\nabla}(-j\hat{\omega}_i)\, K(x,j\hat{\omega}_i) \right], \tag{2.3.27}$$

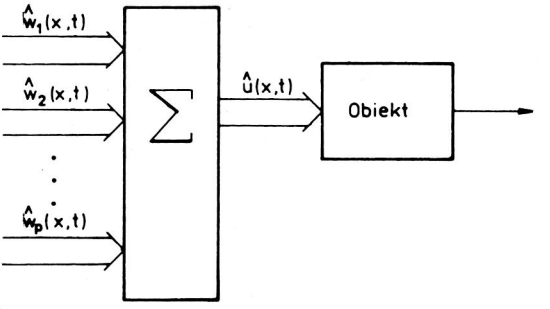
natomiast Arg[z] oznacza argument liczby zespolonej z. Fakt, że otrzymany w taki sposób sygnał ma gęstość widmową mocy $\hat{S}_u$ uzasadniliśmy już wcześniej.

S p o s ó b 2

polega na generowaniu bezpośrednio sygnału rozłożonego (2.3.25) (por. rys. 2.3).

Porównanie rys. 2.2 z rys. 2.3 wskazuje, że techniczne realizacje podanych sposobów będą równoważne. W pierwszym przypadku potrzebny

jest generator skupionego sygnału w(.) i filtr o skupionym sygnale wejściowym oraz rozłożonym sygnale wyjściowym. W drugim sposobie rozłożone sygnały $\hat{w}_i(x,t) \triangleq \hat{\beta}_i(x)\sin(\hat{\omega}_i t + \hat{\gamma}_i(x))$ i=1,2, ... ,p są, przed podaniem ich na obiekt, sumowane za pomocą "rozłożonego" sumatora.



Rys. 2.3. Alternatywny sposób realizacji sterowania optymalnego $\hat{W}_i(x,t) = \hat{\beta}_i(x)\cos(\hat{\omega}_i t + \hat{\gamma}_i(x))$

Fig. 2.3. Alternative way of the optimal control realization, $\hat{W}_i(x,t) = \hat{\beta}_i(x)\cos(\hat{\omega}_i t + \hat{\gamma}_i(x))$

Warte odnotowania, chociaż zgodne z intuicją, jest występowanie w obu sposobach realizacji transformaty Fouriera wektora wrażliwości wyjścia na zmiany parametrów $K(x,j\omega)$. Dyskusja na temat realizacji optymalnego sterowania będzie kontynuowana w p. 2.4.

Na zakończenie tego podrozdziału zwrócić warto uwagę, że różne sygnały u realizować mogą tę samą $\hat{S}_u$. Łatwo na przykład sprawdzić, że sygnał (2.3.25), w którym $\hat{\gamma}_i(x)$ zastąpiono przez $\hat{\gamma}_i(x) + \varphi$, i=1,2, ... ,p, realizuje tę samą gęstość $\hat{S}_u$.

Podsumowanie

W podrozdziale 2.3 zbadano strukturę częstotliwościowo-przestrzenną optymalnej gęstości widmowej mocy sygnału sterującego. Wyniki te posłużą dalej do budowy algorytmu numerycznego do jej obliczania. Przedyskutowano również dwie możliwości realizacji sterowania zapewniającego optymalną gęstość widmową mocy.

2.4. Algorytmy numeryczne obliczania D_o-optymalnego sygnału sterującego

Wyniki podrozdziałów 2.2 i 2.3 pozwalają skonstruować algorytmy numeryczne do obliczania D_o-optymalnej widmowej gęstości mocy sygnału sterującego oraz samego sygnału sterującego. Algorytmy te są iteracyjne i generują ten sam ciąg macierzy informacyjnych, co pozwala się skupić na udowodnieniu zbieżności tylko jednego z nich. Różnią się one natomiast pod względem wymagań objętości pamięci podczas ich komputerowej realizacji i dlatego implementowany był drugi z tych algorytmów. Zaletą jego jest możliwość implementacji na komputerach osobistych, jeśli wys-

tępuje kilka identyfikowanych parametrów. Można uważać, że pierwszy z zaproponowanych algorytmów bardziej odpowiada sposobowi 1 z p. 2.3 realizacji sterowania, chociaż za pomocą drugiego można również obliczyć potrzebne wartości po wykonaniu dodatkowych obliczeń. Podkreślić należy, że algorytmy stosowane do obliczania sterowań optymalnych podczas identyfikacji obiektów skupionych nie mogą być tutaj stosowane, gdyż nie pozwalają one obliczyć wektorów $\hat{c}(\hat{\omega}_i)$ $i=1,2,\ldots,p$ potrzebnych do skonstruowania filtru $\hat{\varphi}(x,j\omega)$. Zgromadzone wcześniej doświadczenie zostanie oczywiście wykorzystane w proponowanych algorytmach.

Opis algorytmu

Idea większości algorytmów znajdowania sterowań, optymalnych z punktu widzenia jakości identyfikacji w obiektach skupionych statycznych i dynamicznych (por. prace [15],[22],[127],[65]), bliska jest idei metody kierunków dopuszczalnych (por. np. pracę [010]). Jednakże ogólność idei metody kierunków dopuszczalnych pozwala na dużą dowolność wyboru zarówno kierunku poszukiwań, jak i długości kroku podczas opracowywania konkretnych algorytmów, co z kolei wpływa na ich efektywność obliczeniową. Dlatego w cytowanych pracach zawarto propozycje różnych algorytmów, a konstruowane każdorazowo dowody ich zbieżności zawierają różne zestawy założeń.

Proponowane tutaj algorytmy są również oparte na idei metody kierunków dopuszczalnych, przy czym sugestia wyboru lokalnie najlepszego kierunku poszukiwań zawarta jest w dowodzie twierdzenia 2.2.1. Przechodząc do prezentacji algorytmu wprowadźmy następujące oznaczenia: Niech $S_n(x,y,j\omega)$ będzie widmową gęstością mocy sygnału sterującego, uzyskaną w n-tym kroku algorytmu (w celu uproszczenia oznaczeń pomijamy subskrypt u w oznaczeniu tej gęstości). Niech dalej $M_n = M(S_n,\xi_0)$ będzie UMI uzyskaną w n-tym kroku, natomiast $\mu_n(\omega)$ i $c_n(j\omega)$ będą oznaczać maksymalną wartość własną i odpowiadający jej wektor własny w następującym uogólnionym problemie wartości własnych:

$$\mu(\omega)c^{\nabla}(-j\omega)H(j\omega) = c^{\nabla}(-j\omega)H(j\omega)M_n^{-1}H(j\omega). \tag{2.4.1}$$

Zakłada się, że wektory $c_n(j\omega)$ są normowane tak, by spełniony był warunek (2.3.12).

Przez ω^n oznaczymy rozwiązanie zadania maksymalizacji:

$$\max_{|\omega|\leqslant\omega_0} \mu_n(\omega) = \mu_n(\omega^n), \tag{2.4.2}$$

natomiast $\lambda_n = \mu_n(\omega^n)$.

ALGORYTM 2.1

Krok 0. Wybrać $S_0 \in \mathcal{S}$ o postaci (2.3.20) (z oczywistą zmianą oznaczeń) w taki sposób, by $M_0 \triangleq M(S_0,\xi_0)$ była nieosobliwa. Położyć $n = 0$.

Krok 1. Obliczyć $c_n(j\omega)$ i $\mu_n(\omega)$, $\omega\in[-\omega_0,\omega_0]$ zgodnie z powyższymi definicjami.

Krok 2. Rozwiązać problem (2.4.2) znajdując ω^n i λ_n.

Krok 3. Obliczyć następne przybliżenie widmowej gęstości mocy:

$$S_{n+1}(x,y,j\omega) = (1-\alpha^n)S_n(x,y,j\omega) + \alpha^n K(x,-j\omega)c_n(j\omega)c_n^{\nabla}(-j\omega)\times$$
$$\times K(y,j\omega)\cdot\pi\cdot[\ \delta(\omega+\omega^n) + \delta(\omega-\omega^n)], \qquad (2.4.3)$$

gdzie

$$\alpha^n \triangleq (\lambda_n - r)/[(\lambda_n - 1)\ r]\ . \qquad (2.4.4)$$

Krok 4. Obliczyć M_{n+1} według wzoru:

$$M_{n+1} = (1-\alpha^n)M_n + \alpha^n\ \mathrm{Re}[H(j\omega^n)c_n(j\omega^n)c_n^{\nabla}(-j\omega^n)H(-j\omega^n)]. \qquad (2.4.5)$$

Krok 5. Jeżeli $\lambda_n = r$ stop, w przeciwnym razie podstawić $n = n + 1$ i przejść do kroku 1.

Powyższy algorytm nie może być komputerowo implementowany nie tylko dlatego, że może on generować nieskończony ciąg S_n, $n = 1,2, \ldots$, lecz przede wszystkim ze względu na dużą objętość pamięci komputera potrzebną do przybliżonego pamiętania $c_n(j\omega)$ i $\mu_n(\omega)$ dla $\omega\in[-\omega_0,\omega_0]$. Powyższa wersja jest jednak dogodna do pokazania jego własności i udowodnienia zbieżności ciągu $\det M_n$ $n = 1,2, \ldots$ do $\det M(\hat{S}_u,\xi_0)$. Przedstawiony niżej dowód zbieżności będzie jednak zachowywał swą moc dla następnej, łatwiejszej w implementacji, wersji algorytmu, gdyż generuje on ten sam ciąg macierzy M_n, $n = 1,2, \ldots$.

Zbieżność algorytmu

Przed przystąpieniem do dowodu zbieżności algorytmu 2.1 podamy kilka uwag na temat jego funkcjonowania. Z lematu 2.2.1 i wniosku 2.3.1 wynika, że jeśli S_n nie jest D_0-optymalna, to $\lambda_n > r \geqslant 1$. Nierówność ta uzasadnia warunek stopu w kroku 5 oraz pozwala zauważyć, że obliczane zgodnie ze wzorem (2.4.4) $\alpha^n\in(0,1)$. To zaś zapewnia, że $S_n\in\mathcal{S}$, $n = 1,2, \ldots$, gdyż zbiór ten jest wypukły. Co więcej, wszystkie S_n mają postać (2.3.20). Można wykazać, że wybór α^n zapewnia lokalnie największy przyrost wartości funkcji celu. Dowód tego stwierdzenia jest rachunkowo skomplikowany i opiera się na bezpośrednim zróżniczkowaniu funkcji celu. Pominiemy go, gdyż nie będzie on wykorzystywany. W Dodatku podane są dowody następujących lematów:

L e m a t 2.4.1. Dla ciągu macierzy M_n, $n = 0,1, \ldots$, generowanego przez algorytm 2.4.1, zachodzi równość:

$$\frac{\det M_{n+1}}{\det M_n} = \frac{w(\lambda_n)}{w(r)}\ ,\ n = 0,1,2, \ldots\ , \qquad (2.4.6)$$

gdzie $w(\eta) \triangleq \eta^r/(\eta-1)^{r-1}$ dla $\eta > 1$.

L e m a t 2.4.2. W każdej iteracji algorytmu 2.4.1 zachodzi nierówność:

$$\det M_n \geqslant \det M(\hat{S}_u, \xi_o) \cdot \exp[-\lambda_n + r], \tag{2.4.7}$$

$n = 0,1,2, \ldots$.

Wzór (2.4.7) jest uogólnieniem nierówności podanej w pracy [22]. Jest ona cenna, gdyż pozwala wnioskować o odległości między $\det M_n$ a wartością optymalną (bez znajomości tej ostatniej) na podstawie wyliczanej przez algorytm 2.4.1 wartości λ_n.

TWIERDZENIE 2.4.1. Niech $S_o \in \mathcal{S}$ o postaci (2.3.20) będzie dowolne lecz takie, że $\det M(S_o, \xi_o) > 0$. Dla ciągu macierzy M_n, $n = 1,2, \ldots$, generowanego przez algorytm 2.4.1 zachodzi jedna z dwóch możliwości, albo

$$\lim_{n\to\infty} \det M_n = \det M(\hat{S}_u, \xi_o), \tag{2.4.8}$$

albo ciąg ten kończy się na wyrazie N-tym i wtedy $\det M_N = \det M(\hat{S}_u, \xi_o)$.

D o w ó d . Drugi z członów alternatywy jest prawie oczywisty, gdyż zgodnie z krokiem 5 algorytm może się zatrzymać tylko wtedy, gdy $\lambda_N = r$. Zgodnie z wnioskiem 2.3.1 jest spełniony wówczas warunek optymalności. Dlatego w dowodzie (2.4.8) możemy przyjąć (por. lemat 2.2.1), że

$$\lambda_n > r, \; n = 0,1,2, \ldots . \tag{2.4.9}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja $w(\eta)$, zdefiniowana w lemacie (2.4.1), jest ściśle rosnąca gdy $\eta > 1$. Zatem z lematu tego i wzoru (2.4.9) wnioskujemy, że $w(\lambda_n) > w(r)$, co daje:

$$\det M_{n+1} > \det M_n, \; n=0,1,2, \ldots \tag{2.4.10}$$

Ciąg $\det M_n$, $n = 0,1,2, \ldots$, jako ściśle rosnący i ograniczony przez $\det M(\hat{S}_u, \xi_o) < \infty$, jest zbieżny. Co więcej, wobec nieosobliwości M_o oraz (2.4.10) $\lim_{n\to\infty} \det M_n > 0$. Wobec zbieżności ciągu $\det M_n$, nierówności $\lambda_n > r$, ciągłości i ścisłej monotoniczności funkcji $w(\eta)$ dla $\eta > 1$, na podstawie wzoru (2.4.6) wnioskujemy, że $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = r$. Wystarczy teraz powołać się na lemat 2.4.2, aby uzasadnić tezę twierdzenia.

Twierdzenie 2.4.1 nie rozstrzyga problemu zbieżności ciągu S_n $n = 0,1,2, \ldots$. Stosując je do (2.4.1) wraz z wynikami perturbacyjnej teorii wartości i wektorów własnych macierzy (por. [41]) można pokazać, przy odpowiednich założeniach, że $\lim_{n\to\infty} c_n(j\omega) = \hat{c}(j\omega)$ dla $\omega \in [-\omega_o, \omega_o]$,

gdzie $\hat{c}(j\omega)$ zdefiniowano w p. 2.3. Na podstawie twierdzenia Helly'ego (por. pracę [103]) można wykazać, że z ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie wzorem:

$$s_{n+1}(\omega) = s_n(\omega)\cdot(1-\alpha^n) + \pi[\delta(\omega-\omega^n)+\delta(\omega+\omega^n)],\ n = 0,1,\ldots \qquad (2.4.11)$$

można wybrać podciąg $s_{n_k}(\omega)$, $k = 1,2,\ldots$ taki, że $\int_{-\omega_0}^{\omega} s_{n_k}(\omega)d\omega$ jest zbieżny dla prawie wszystkich $\omega \in [-\omega_0,\omega_0]$ do dystrybuanty $\int_{-\omega_0}^{\omega} \hat{s}(\omega)d\omega$. We wzorze (2.4.11) przez $s_0(\omega)$ oznaczono gęstość widmową o postaci (2.3.23), występującą w $S_0 \in \mathcal{S}$. Szczegółów powyższego postępowania nie podajemy, gdyż z wyników tych nie będziemy korzystać. Prócz tego wydaje się, że problem zbieżności S_n $n = 0,1,2,\ldots$ nie jest w praktyce tak ważny jak wynik twierdzenia 2.4.1, gdyż na każdym etapie algorytmu 2.4.1 posiadamy S_n o możliwej do oszacowania, dzięki lematowi 2.4.2, jakości. Zagadnienie realizacji S_n omówimy w następnym podrozdziale.

Implementowalna wersja algorytmu

Generowaną przez algorytm 2.1 w N-tej iteracji gęstość widmową S_N zapisać można ogólnie w postaci:

$$S_N(x,y,j\ ) = \sum_{n=-p}^{N} \beta_n^N \varphi_n(x,-j\omega)\varphi_n(y,j\omega)\pi[\delta(\omega-\omega^n)+\delta(\omega+\omega^n)], \qquad (2.4.12)$$

gdzie $\varphi_n(x,j\omega) \triangleq K^{\nabla}(x,-j\omega)\cdot c_n(j\omega)$. We wzorze (2.4.12) wprowadzono ujemne indeksy do oznaczenia wartości ω^n, $c_n(j\omega)$ itp., występujących w początkowej gęstości S_0. Wartości nieujemnych współczynników β_n^N nie podajemy, gdyż ważna jest dla nas tylko postać wyrażenia (2.4.12). Wartości te zależą od współczynników w S_0 oraz od α^n $n = 1,2,\ldots,N$ i można je rekurencyjnie wyznaczyć z (2.4.3). Bez straty ogólności będziemy przyjmować, że pary $\omega^n, c_n(j\omega)$ $n = 1,2,\ldots,N$, występujące w (2.4.12) są różne. Jeżeli tak nie jest, to przez prosty zabieg, zwany dalej sklejaniem, a polegający na zsumowaniu β_n^N przy powtarzających się członach, można do żądanej sytuacji doprowadzić. Następnie w celu uproszczenia przyjmiemy, że $\omega^n \neq \omega^m$, gdy $n \neq m$.

Jak już wykazywaliśmy, jeden z sygnałów sterujących, oznaczamy w dalszym ciągu przez u_N, realizujący (2.4.12) ma postać:

$$u_N(x,t) = \sum_{n=-p}^{N} \tilde{\beta}_n^N(x)\ \sin[\omega^n t + \gamma_n^N(x)], \qquad (2.4.13)$$

gdzie

$$\tilde{\beta}_n^N(x) \triangleq \sqrt{\beta_n^N}\cdot|K^{\nabla}(x,-j\omega^n)c_n(j\omega^n)|, \qquad (2.4.14)$$

$$\gamma_n^N(x) = \mathrm{Arg}[K^{\nabla}(x,-j\omega^n)c_n(\ j\omega^n)]. \qquad (2.4.15)$$

Zauważmy, że sygnał (2.4.13) jest w pełni określony przez $K(x,j\omega)$, która jest zadana, oraz przez wektory

$$\bar{\omega}_N \triangleq [\omega^{-p}, \ldots, \omega^{-1}, \omega^{o}, \ldots, \omega^{N}]^{\nabla},$$

$$\bar{\beta}_N \triangleq [\beta^N_{-p}, \ldots, \beta^N_{-1}, \beta^N_{o}, \ldots, \beta^N_N]^{\nabla}$$

i macierz

$$C_N \triangleq [\bar{c}_{-p}, \ldots \bar{c}_{-1}, \bar{c}_o, \ldots, \bar{c}_N], \text{ gdzie } \bar{c}_n \triangleq c_n(j\omega^n).$$

Podany zestaw danych wystarcza również do obliczenia M_N zgodnie ze wzorem (2.4.5). Nie jest natomiast potrzebna znajomość wektorów funkcji $c_n(j\omega)$ $\omega \in [-\omega_o, \omega_o]$, $n = -p, \ldots, 0, 1, \ldots, N$. Pozwala to zaproponować łatwo implementowalną wersję algorytmu 2.4.1. Podczas jej prezentacji zakładać będziemy, że dysponujemy iteracyjnym algorytmem znajdowania maksimum funkcji jednej zmiennej na podstawie znajomości jej wartości w kolejno generowanych punktach. Znanych jest wiele metod tego typu (por. pracę [010]) gwarantujących dużą szybkość zbieżności. Przy danej jedynie algorytmicznie ciągłej funkcji $f : I \to R$ i domkniętym przedziale $I \subset R$, działanie wielu metod tej grupy opisać można symbolicznie wzorem $\eta_{k+1} = MAX(\bar{\eta}_k, \bar{f}_k)$, gdzie η_k jest k-tym przybliżeniem położenia maksimum, natomiast $\bar{\eta}_k \triangleq [\eta_o, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}]^{\Delta}$, $\bar{f}_k \triangleq [f(\eta_o), \ldots, f(\eta_{k-1})]^{\Delta}$. Zakładać dalej będziemy, że dla dowolnego $\eta_o \in I$ $\lim_{k\to\infty} \eta_k = \arg [\max_{\eta \in I} f(\eta)]$.

ALGORYTM 2.2

Wybrać $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ występujące w warunkach stopu.

Krok 0. Wybrać sterowanie początkowe, określone zestawem $\bar{\omega}_o, \bar{\beta}_o, C_o$ tak, by $\det M_o > 0$ i podstawić $n = 0$.

Krok 1. Wybrać $\omega^n_o \in [-\omega_o, \omega_o]$ i podstawić $k = 0$.

Krok 2. Obliczyć μ^n_k oraz $\bar{c}^n_k \in C^r$, będące maksymalną wartością własną i odpowiadającym jej wektorem własnym w problemie

$$\mu\, \bar{c}^* H(j\omega^n_k) = \bar{c}^* H(j\omega^n_k) M_n^{-1} H(j\omega^n_k), \tag{2.4.16}$$

gdzie $\bar{c}^*$ oznacza wektor sprzężony i transponowany do $\bar{c} \in C^r$.

Krok 3. Obliczyć $\omega^n_{k+1} = MAX(\bar{\omega}^n_k, \bar{\mu}^n_k)$.

Krok 4. Jeżeli $|\omega^n_{k+1} - \omega^n_k| \leqslant \varepsilon_1$, podstawić $\omega^n = \omega^n_k$ oraz $\lambda_n = \mu^n_k$, $\bar{c}_n = \bar{c}^n_k$ i przejść do kroku 5. W przeciwnym razie położyć $k = k + 1$ i przejść do kroku 2.

Krok 5. Obliczyć α^n zgodnie ze wzorem (2.4.4) i przemnożyć wektor $\bar{\beta}_n$ przez $(1-\alpha^n)$; podstawić $\beta_n = \alpha^n$. Utworzyć zestaw parametrów sterowania u_{n+1} następująco: $\bar{\beta}_{n+1} = [\bar{\beta}^{\nabla}_n | \beta_n]^{\nabla}$, $\bar{\omega}_{n+1} = [\bar{\omega}^{\nabla}_n, \omega^n]^{\nabla}$, $C_{n+1} = [C_n | c_n]$.

Krok 6. Obliczyć nową UMI

$$M_{n+1} = (1-\alpha^n)M^n + \alpha^n \operatorname{Re}[H(j\omega^n)\bar{c}_n\bar{c}_n^* H(j\omega^n)]. \qquad (2.4.17)$$

Jeżeli $\lambda_n - r > \varepsilon$, położyć $n = n + 1$ i przejść do kroku 1. W przeciwnym razie stop.

Porównanie algorytmów 2.1 i 2.2 wskazuje, że przez dobór dostatecznie małych ε, ε_1 można uzyskać dowolnie bliskie przebiegi ciągów $\det M_n$ $n=1,2,\ldots$, generowanych przez te algorytmy. Na podstawie twierdzenia 2.4.1 można wnioskować, że gdy $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ oraz $n \to \infty$, również algorytm 2.2 generuje ciąg $\det M_n$ $n = 1,2,\ldots$ zbieżny do wartości optymalnej. Natomiast, gdy wartości ε, ε_1 są małe lecz skończone i posiadamy oszacowanie jakości algorytmu MAX, wówczas skorzystać możemy z lematu 2.4.2 w celu otrzymania oszacowania po zatrzymaniu algorytmu 2.2 w N-tym kroku. Zauważmy też, że mając M_N obliczyć można $\Psi_N(x,j\omega) = K^{\nabla}(x,-j\omega)c_N(j\omega)$, jeżeli sterowanie optymalne ma być realizowane zgodnie ze sposobem 1. W tym celu należy rozwiązać problem (2.4.1) dla $\omega \in [-\omega_0,\omega_0]$ jednokrotnie.

W komputerowej realizacji algorytmu 2.2, jako procedury MAX użyto metody złotego podziału, natomiast krok 2 był realizowany za pomocą metody Jacobiego (por. pracę [101]).

Podsumowanie

W podrozdziale 2.4 zaproponowano algorytm obliczeniowy, pozwalający obliczać D_0-optymalną gęstość widmową mocy sygnału sterującego z dowolną, z góry zadaną, dokładnością. Wykazana została jego zbieżność. Zaproponowano również, łatwą do implementacji w komputerach osobistych, wersję algorytmu. Jego zaletą jest możliwość korzystania ze skończenie parametryzowalnej wersji optymalnego sterowania, której istnienie wcześniej udowodniono. Wyniki badań zachowania się algorytmu w konkretnych sytuacjach będą przedstawione w następnym podrozdziale.

2.5. Testowanie algorytmu numerycznego

Algorytm 2.2 opisany w p. 2.4, napisany został w języku FORTRAN i poddany testowaniu na μ-komputerze IMP 85. Celem tych badań była praktyczna ocena jego szybkości zbieżności oraz zbadanie wpływu błędów w wyborze parametrów nominalnych na wartość wskaźnika jakości sterowania D_0.

Opis przykładu testującego

Do badań wybrano obiekt opisany w przykładzie 1.2 z warunkami brzegowymi (1.1.9). Transformata Fouriera funkcji wrażliwości jego stanu na zmiany $a = [a_1, a_2]^{\nabla}$ ma postać:

$$K(x,j\omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{v_k(x)v_k(\varkappa_1)}{(j\omega + \lambda_k^2(a))^2}, \tag{2.5.1}$$

gdzie $\alpha_k \triangleq [k^2,1]^{\nabla}$, natomiast $\varkappa_1 \in [0, \pi]$ jest położeniem czujnika pomiarowego. Występująca w algorytmie 2.2 macierz $H(j\omega)$ jest wówczas następująca:

$$H(j\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_k^{\nabla} \frac{v_k^2(\varkappa_1)}{(\omega^2 + \lambda_k^2(a))^4}. \tag{2.5.2}$$

Ze względu na dużą szybkość zbieżności szeregu (2.5.2) w programie sumowanie ucinano na 10 wyrazie.

<u>Jakościowa ocena szybkości zbieżności algorytmu 2.2</u>

Tabela 2.1 zawiera zestawienie wartości det M_n i λ_n (zdefiniowanych w p. 2.4) w poszczególnych iteracjach algorytmu 2.2.

Tabela 2.1

Numer iteracji	Przebieg I		Przebieg II		Przebieg III	
n	det M_n	λ_n	det M_n	λ_n	det M_n	λ_n
0	2.81E-5	77461.9	0.1072	26.0909	596.06	60.8432
1	0.5435	2.6787	0.7033	2.4255	6729.81	3.8839
2	0.5766	2.5804	0.7253	2.0429	7061.62	3.6004
5	0.6386	2.3055	0.7222	2.0171	8798.66	2.0291
10	0.6725	2.2064	0.7223	2.0118	8800.46	2.0009
15	0.6888	2.1256	0.7223	2.0113		
20	0.6976	2.0835				
25	0.7026	2.0776				

Przebiegi I i II tej tabeli uzyskano dla nominalnych wartości parametrów wynoszących $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ przy różnych punktach startowych. Natomiast przebieg III otrzymano dla wartości nominalnych $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.1$, co wyjaśnia istotną różnicę między osiągniętymi wartościami det M_n po zatrzymaniu się algorytmu. W warunku stopu algorytmu używano wartości $\varepsilon, \varepsilon_1 = 0.001$.

Tabela 2.1 i inne przebiegi algorytmu, które nie są tu przytaczane, pozwalają na następujące wnioski:

1. Szybkość zależności algorytmu 2.2 jest typowa dla metod najszybszego spadku i jest bardzo duża w początkowych iteracjach - daleko od optimum - i maleje wraz ze zbliżaniem się do niego.

2. Po kilku iteracjach - pięciu w tab. 2.1 - uzyskuje się dobre przybliżenie parametrów sterowania optymalnego.

Wpływ wyboru nominalnych wartości parametrów na jakość sterowania

Jak już wskazywano, sterowanie optymalne zależą od wartości parametrów obiektu, jeśli jego opis nie należy do klasy $\mathcal{L}$. Jako najprostszą z metod pokonywania tej trudności zaproponowano w p. 1.3 zastąpienie nieznanego wektora $a^o \in \mathcal{A}$ przez wektor parametrów nominalnych $\bar{a} \in \mathcal{A}$. Prowadzi to do pewnego pogorszenia jakości estymacji w stosunku do dolnej granicy Rao-Cramera, osiągalnej jedynie asymptotycznie. W celu jakościowej oceny stopnia tego pogorszenia wykonano obliczenia według następującego schematu:

1. Dla obiektu z przykładu 1.2, o wektorze wrażliwości (2.5.1), obliczono za pomocą algorytmu 2.2 współczynniki optymalnej gęstości widmowej sygnału sterującego $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$. Przyjęto przy tym parametry nominalne $\bar{a}_1 = 1$, $\bar{a}_2 = 0.1$. W rezultacie uzyskano następujące współczynniki charakteryzujące sterowanie optymalne, gdy położenie czujnika $x_1 = \pi/2$:

$$\hat{c}_1 = \begin{bmatrix} 0.077 \\ -1.44 \end{bmatrix}, \quad \hat{c}_2 = \begin{bmatrix} 0.45 \\ -1.54 \end{bmatrix}, \quad \hat{c}_3 = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.62 \end{bmatrix}, \quad \hat{c}_4 = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.64 \end{bmatrix},$$

$\hat{\alpha}_i = 0.25$; $\hat{\omega}_i = 0$, $i = 1,2,3,4$. Wartość $\det M_n$ przy tych wartościach wynosi 0.3.

2. Obliczano wartość $\det M(\hat{S}_u, \xi_o)$ przy założeniu, że prawdziwe wartości parametrów obiektu różne są od nominalnych $\bar{a}_1$ i $\bar{a}_2$ (tab. 2.2, wiersz 2). Uzyskano w ten sposób ocenę jakości sterowania optymalnego przy nominalnym wektorze $\bar{a}$, zastosowanego do identyfikacji obiektu o parametrach a_1^o, a_2^o. W wierszu 3 tab. 2.2 podano także uzyskane w tych warunkach wartości $\lambda_{max}(M(\hat{S}_u, \xi_o))$.

Tabela 2.2

Parametry obiektu	a_1^o	1	1	1	1,5	2	2
	a_2^o	0.2	0.5	0.	0.1	0.1	0.2
Dokładność identyfikacji przy $\hat{S}_u$	det M	0.25	0.16	0.364	6.35E-2	2.07E-2	1.88E-2
	λ_{max}	2.02	2.099	2.32	2.24	2.28	2.22
Dolna granica Rao-Cramera przy S_u^o	det M	0.25	0.16	0.37	6.39E-2	2.09E-2	1.9E-2
	λ_{max}	2.01	2.01	2.01	2.016	2.01	2.019
N^o		1	2	7	10	10	11

N^o - liczba iteracji potrzebnych do znalezienia S_u^o po starcie z $\hat{S}_u$

3. W celu ocenienia straty jakości identyfikacji, jakie daje postępowanie opisane w p. 2, obliczano również widmową gęstość mocy sterowania optymalnego przy wartościach parametrów a_1^o, a_2^o, oznaczaną dalej przez S_u^o. Odpowiadające jej wartości det $M(S_u^o, \xi_o)$ oraz wartości $\lambda_{max}(M(S_u^o, \xi_o))$ zawierają wiersze 4 i 5 w tab. 2.2. Jako punktu startowego do obliczania współczynników S_u^o używano wartości z punktu 1 charakteryzujące $\hat{S}_u$. Przedostatni wiersz tab. 2.2 podaje liczbę iteracji algorytmu 2.2, jaka była potrzebna do uzyskania S_u^o z warunkiem stopu $\varepsilon = 0.01$ przy starcie z $\hat{S}_u$. Liczba ta daje więc pewien pogląd na różnice między S_u i S_u^o.

Obliczenia opisane w p. 2 i 3 powtarzano dla różnych wartości a_1^o, a_2^o (wiersz 1).

Analiza tab. 2.2 sugeruje, że

i) wybór wartości nominalnych nie jest krytyczny dla jakości sterowania, gdyż wartości det $M(\hat{S}_u, \xi_o)$ praktycznie nie różnią się od wartości det $M(S_u^o, \xi_o)$, stanowiących w danych warunkach, nieprzekraczalną granicę dokładności - osiągalną jedynie asymptotycznie.

ii) Różnice między $\bar{a}_1$ i a_1^o w większym stopniu wpływają na jakość identyfikacji niż różnice między $\bar{a}_2$ i a_2^o.

Podsumowanie

Badania numeryczne algorytmu 2.2 pozwalają stwierdzić, że stanowi on wystarczająco łatwe i pewne w zastosowaniach narzędzie do obliczania dowolnie dokładnych przybliżeń D-optymalnej gęstości widmowej mocy sterowania. Ewentualne dalsze badania powinny się koncentrować na modyfikacjach zwiększających szybkość zbieżności algorytmu w bezpośrednim otoczeniu optimum.

Badania wpływu doboru wartości parametrów nominalnych na jakość identyfikacji wskazują, że nawet 100% "pomyłki" w wyborze ich wartości tylko w niewielkim stopniu na jakość tę wpływa. Podkreślić jednak należy, iż niedokładności w wyborze parametrów nominalnych wpływają tylko na wartości współczynników w widmowej gęstości mocy sterowania, pozostawiając jego "kształt" bez zmiany. Wniosek, że wskaźnik jakości identyfikacji jest w ogóle mało wrażliwy byłby jednak zbyt pochopny, gdyż - jak wskazują badania symulacyjne przytoczone w rozdz. 3 - wskaźnik ten jest bardzo wrażliwy na "kształt" sterowania.

DODATEK 2A

Dowód własności Q_{11}:

Niech $\mu(\omega)$ i $\varphi(x, j\omega)$ spełniają wzór (2.2.6), tzn.

$$\mu(\omega)\varphi(x,j\omega) = \int_{\Omega_u} Q_\xi(x,y,j\omega;S_u)\varphi(y,j\omega)dy. \qquad (2.A.1)$$

Mnożąc obie strony (2.A.1) przez $\varphi(x,-j\omega)$ i całkując po Ω_u otrzymamy (por. Q_6):

$$\mu(\omega) = \int_{\Omega_u}\int_{\Omega_u} Q_\xi(x,y,j\omega;S_u)\varphi(y,j\omega)\varphi(x,-j\omega)dxdy. \qquad (2.A.2)$$

Po podstawieniu w tym równaniu $-\omega$ w miejsce ω otrzymamy, na mocy własności Q_1 i (2.2.4),

$$\mu(-\omega) = \int_{\Omega_u}\int_{\Omega_u} Q_\xi^c(x,y,j\omega;S_u)\varphi(y,-j\omega)\varphi(x,j\omega)dxdy = \mu^c(\omega). \qquad (2.A.3)$$

Jednakże wartości własne (2.2.6) są rzeczywiste, a więc (2.A.3) dowodzi własności Q_{11}.

DODATEK 2B

<u>Dowód własności Q_{10}:</u>

Niech $\varphi(x,j\omega),\mu(\omega)$ spełnia wzór (2.2.6). Wówczas na mocy Q_{11} oraz Q_1 i (2.2.4) mamy

$$\mu(\omega)\varphi^c(x,-j\omega) = \int_{\Omega_u} Q_\xi(x,y,j\omega)\varphi^c(y,-j\omega)dy. \qquad (2.B.1)$$

Po dodaniu tej równości stronami do wzoru (2.2.6) i zdefiniowaniu $\tilde{\varphi}(x,j\omega) = \varphi(x,j\omega) + \varphi^c(x,-j\omega)$ otrzymujemy tezę własności Q_{10}.

DODATEK 2C

<u>Dowód lematu 2.4.1:</u>

Zgodnie ze wzorem (2.4.5)

$$M_{n+1} = (1-\alpha^n)\left[M_n + \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n}\,\mathrm{Re}(d_n d_n^*)\right], \qquad (2.C.1)$$

gdzie $d_n \triangleq H(j\omega^n)c_n(j\omega^n)$.
Lub inaczej

$$M_{n+1} = (1-\alpha^n)\left[M_n + \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n}\,D_n D_n^\nabla\right], \qquad (2.C.2)$$

gdzie D_n jest $r \times 2$ macierzą rzeczywistą o kolumnach $\mathrm{Re}(d_n)$ oraz $\mathrm{Im}(d_n)$. Zastosowanie znanego lematu (por. np. prace [55], [27]) do (2.C.2) daje

$$\det M_{n+1} = (1-\alpha^n)^r \cdot \det M_n \cdot \det\left[I_2 + D_n^{\nabla} M_n^{-1} D_n\right], \tag{2.C.3}$$

gdzie I_2 jest 2×2 macierzą jednostkową.

Bezpośrednie obliczenie drugiego z wyznaczników w (2.C.3) prowadzi do wzoru

$$\det\left[I_2 + D_n^{\nabla} M_n^{-1} D_n\right] = 1 + \mathrm{Re}\left[d_n^* M_n^{-1} d_n\right] \tag{2.C.4}$$

Po wstawieniu ω^n do (2.4.1) i pomnożeniu obu stron tego wzoru przez $c(j\omega^n)$ otrzymamy, po skorzystaniu z warunku unormowania dla $c(j\omega^n)$:

$$\mathrm{Re}\left[d_n M_n^{-1} d_n\right] = \lambda_n. \tag{2.C.5}$$

Po wstawieniu (2.C.4), (2.C.5) oraz (2.4.4) do (2.C.3) otrzymujemy, po prostych przekształceniach algebraicznych, tezę lematu 2.4.1.

DODATEK 2D

<u>Dowód lematu 2.4.2:</u>

Rozważmy funkcję $\Gamma(\alpha) \triangleq \ln \det M(S_n^{(\alpha)}, \xi_0)$, gdzie dla $\alpha \in [0,1]$ $S_n^{(\alpha)}(x,y,j\omega) \triangleq (1-\alpha) S_n(x,y,j\omega) + \alpha \hat{S}_u(x,y,j\omega)$. Rozwijając ją w szereg Taylora otrzymamy

$$\Gamma(1) - \Gamma(0) = \left.\frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\Gamma(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\tilde{\alpha}}, \tag{2.D.1}$$

gdzie $\tilde{\alpha}$ jest pewnym punktem odcinka $(0,1)$. Ze ścisłej wklęsłości funkcji $\ln\det[.]$ na zbiorze $\mathcal{M}\xi_0$ wynika, że $d^2\Gamma(\alpha)/d\alpha^2 \leqslant 0$ dla $\alpha \in (0,1)$. Nierówność ta wraz z (2.D.1) daje nierówność:

$$\Gamma(1) - \Gamma(0) \leqslant \left.\frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{2.D.2}$$

Dotychczasowy przebieg dowodu jest taki sam jak dowód analogicznej nierówności w klasycznym planowaniu eksperymentu (por. pracę [22]). Dalsza jego część jest specyficzna dla rozważanego zadania. Obliczmy

$$\left.\frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -r + \mathrm{tr}\left[M^{-1}(S_n,\xi_0) M(\hat{S}_u,\xi_0)\right], \tag{2.D.3}$$

Oznaczmy $Q_n(x,y,j\omega) \triangleq Q\,\xi_0(x,y,j\omega;S_n)$. Wówczas

$$\mathrm{tr}\left[M^{-1}(S_n,\xi_0) M(\hat{S}_u,\xi_0)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\int_{\Omega_u}\int_{\Omega_u} Q_n(x,y,j\omega) S_u(x,y,j\omega)\,dx\,dy\,d\omega \tag{2.D.4}$$

Korzystając z ekstremalnych własności wartości własnych równania całkowego (2.2.6) z jądrem Q_n oraz z S_3 i S_6 oraz z twierdzenia Lebesgue'a o majoryzowanej zbieżności, prawą stronę (Z.D.4) oszacować można od góry przez $\sup_{|\omega|\leqslant\omega_0} \mu_n(\omega)$. Przez $\mu_n(\omega)$ oznaczono maksymalną wartość własną równania całkowego (2.2.6) z jądrem Q_n. W podrozdziale 2.3 udowodniono, że $\mu_n(\omega)$ są jednocześnie wartościami własnymi w problemie (2.4.1). Zatem prawą stronę (2.D.4) oszacować można od góry przez λ_n. Stąd oraz z (2.D.3) i (2.D.2) otrzymamy nierówność

$$\Gamma(1) - \Gamma(0) \leqslant - r + \lambda_n \tag{2.D.5}$$

równoważną tezie lematu 2.4.2.

DODATEK 2E

<u>Dowód własności Q_8 z p. 2.2:</u>

W celu pokazania ciągłości funkcji $\mu_1(\omega), \ldots, \mu_p(\omega)$ na $[-\omega_0, \omega_0]$ przenalizujemy postać jądra Q_ξ danego wzorem (2.2.4). W tym celu zauważmy, że $M^{-1}(S_u,\xi)$ - jako macierz symetryczną i dodatnio określoną - przedstawić można w postaci $M^{-1}(S_u,\xi) = B\cdot B^\nabla$, gdzie B jest pewną $r\times r$ nieosobliwą macierzą (zależy ona oczywiście od S_u i ξ, ale zależności tej, dla skrócenia zapisów, nie wskazujemy). Oznaczmy przez $f_i(x,j\omega)$ wektor kolumnowy $B^\nabla \bar{K}(x_i,x,j\omega)$; $i=1,2, \ldots, I$. Niech

$$\bar{f}(x,j\omega) \triangleq [f_1^\nabla(x,j\omega), f_2^\nabla(x,j\omega), \ldots, f_I^\nabla(x,j\omega)]^\nabla.$$

Wówczas, przy ustalonych S_u i ξ, (2.2.4) zapisać można w postaci:

$$Q_\xi(x,y,j\omega;S_u) = \bar{f}^\nabla(y,-j\omega)\bar{f}(x,j\omega), \tag{2.E.1}$$

co oznacza, że równanie (2.2.6) jest równaniem całkowym ze zdegenerowanym jądrem. Z teorii takich równań (por. np. [75]) wiadomo, że funkcji własnych równania (2.2.6) poszukiwać należy w postaci $\varphi(x,j\omega) = b^\nabla(j\omega)f(x,j\omega)$, gdzie wektor $b(j\omega)$ podlegać będzie określeniu. Po wstawieniu tego wyrażenia do wzoru (2.2.6), pomnożeniu obu stron przez $\bar{f}^\nabla(x,-j\omega)$ i scałkowaniu po Ω_u, otrzymamy:

$$\mu(\omega)b^\nabla(j\omega)F(j\omega) = b^\nabla(j\omega)F(j\omega)F(j\omega), \tag{2.E.2}$$

gdzie $F(j\omega) \triangleq \int_{\Omega_u} \bar{f}(x,j\omega)\bar{f}^\nabla(x,-j\omega)dx$. Jeżeli oznaczymy przez $\bar{b}(j\omega)$ wektor $F^\nabla(j\omega)b(j\omega)$ to, na podstawie (2.E.2) stwierdzimy, że wartości własne równania (2.2.6) są równocześnie wartościami własnymi w następującym problemie algebraicznym

$$\mu(\omega)\bar{b}(j\omega) = F^{\nabla}(j\omega)\bar{b}(j\omega); \qquad (2.E.3)$$

o ich własnościach można wnioskować na podstawie macierzy $F(j\omega)$. Aby dowieść własności Q_8 wystarczy teraz zauważyć, iż z założenia o ciągłości elementów wektorów $\bar{K}(\varkappa_i, x, j\omega)$ $i = 1, 2, \ldots, I$ na zbiorze $\Omega_u \times [-\omega_0, \omega_0]$ wynika ciągłość elementów macierzy $F(j\omega)$ dla $|\omega| \leqslant \omega_0$ (por. tw. 44, [110]). Ciągłość zależności wartości własnych (2.E.3) na zbiorze $[-\omega_0, \omega_0]$ jest w tych warunkach gwarantowana przez tw. 5.1, rozdz. II monografii [41].

3. ZADANIA OPTYMALNEGO DOBORU STEROWAŃ PRZY DODATKOWYCH OGRANICZENIACH I KIERUNKI UOGÓLNIEŃ

Rozdział 1 i p. 2.1 dają podstawy do formułowania wielu różnych zadań doboru sterowań z uwzględnieniem różnych funkcjonałów jakości i dodatkowych ograniczeń. Celem tego rozdziału jest pokazanie, że szczegółowa analiza jednego z takich problemów dokonana w rozdz. 2, "podpowiada" właściwe podejścia do innych zadań. Z konieczności rozdział ten będzie miał bardziej syntetyczny charakter. Dokonany w nim wybór zadań ma, w zamyśle autora, zilustrować możliwości nakładania dodatkowych lub innych niż rozpatrywane w rozdz. 2 ograniczeń na dopuszczalne sterowania. Drugi z celów to pokazanie możliwości rozszerzania wyników na inne kryteria optymalności oraz prowadzenie poszukiwań optymalnego sterowania przy skończonym horyzoncie obserwacji.

3.1. Dobór D_0-optymalnych filtrów wejściowych oraz sygnałów o zadanej strukturze przestrzennej

Ograniczenia nakładane w rozdz. 2 na dopuszczalne gęstości mocy sygnałów sterujących wykluczały z rozważań wymuszenia oddziałujące na obiekt w poszczególnych punktach przestrzennych. Ponieważ sterowania takie są często łatwiejsze w realizacji technicznej, warto rozważyć zadanie optymalnego doboru sterowań w klasie sygnałów zwierającej również wymuszenia punktowe. Wyniki prezentowane w tym podrozdziale zostały opublikowane w pracy autora [100] i dlatego są podawane bez dowodów. Zwracamy uwagę, że w pracy tej używana była nieco inna terminologia, mianowicie zamiast terminu "filtr wejściowy" używano nazwy "urządzenie sterujące" (wykonawcze). Wydaje się, że używany tutaj termin nieco lepiej oddaje ideę doboru zestawu transmitancji widmowych zależnych od zmiennych przestrzennych.

W dalszej części podrozdziału będzie rozważany problem doboru D_0-optymalnego sterowania, mającego zadaną strukturę przestrzenną, tzn. wyborowi podlegać będą tylko częstotliwościowe charakterystyki sterowania.

Problem doboru D_0-optymalnych filtrów wejściowych i ich wymuszeń

W podrozdziale tym będą stosowane oznaczenia wprowadzone w rozdz. 2. Rozważmy klasę widmowych gęstości mocy sterowań o postaci:

$$S_u(x,y,j\omega) = \sum_{k=1}^{K} \phi_k(x,j\omega)\phi_k(y,-j\omega)s_k(\omega) , \tag{3.1.1}$$

przy czym

1. funkcje $\phi_k : \Omega_u x[-\omega_0,\omega_0] \longrightarrow C$ są takie, że

$$\forall_{|\omega| \leqslant \omega_0} \int_{\Omega_u} |\phi_k(x,j\omega)| dx = 1, \; k = 1,2, \ldots ,K, \tag{3.1.2}$$

2. funkcje $s_k : [-\omega_0,\omega_0] \longrightarrow R^+$ spełniają warunek

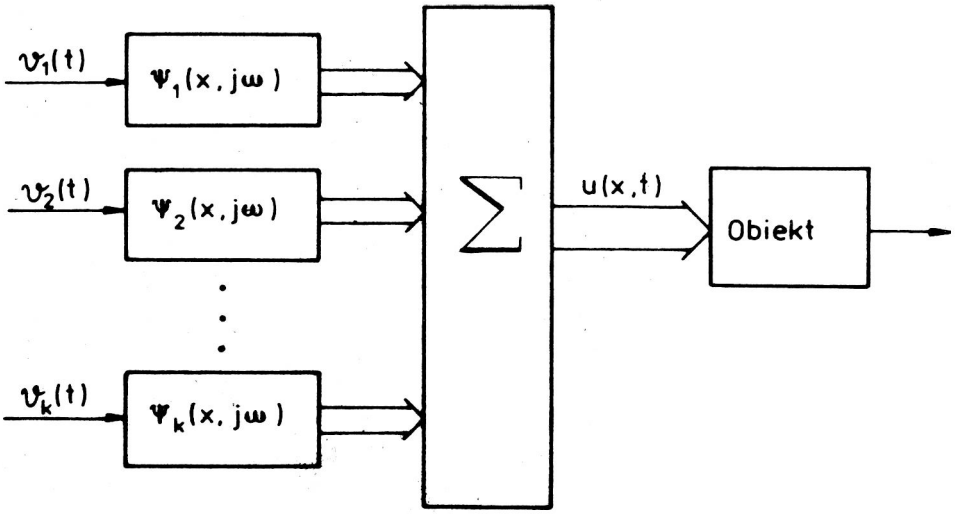
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=1}^{K} s_k(\omega) d\omega \leqslant 1. \tag{3.1.3}$$

We wzorach (3.1.1)-(3.1.3) liczba składników K może być różna dla różnych gęstości widmowych, przy czym dopuszcza się przypadek $K = \infty$. Klasa gęstości spełniających warunki równań (3.1.1)-(3.1.3) oznaczana będzie przez $\mathcal{S}\Psi$. W pracy [100] pokazano, że każdą widmową gęstość mocy rozłożyć można w szereg typu (3.1.1) z odpowiednio dobranymi ϕ_k i s_k, $k = 1,2, \ldots ,K$ (dowód jest oparty na rozwinięciu w S_u w szereg funkcji własnych równania całkowego z jądrem S_u). Formuła (3.1.1) pozwala interpretować S_u jako widmową gęstość mocy sumy sygnałów otrzymywanych na wyjściu filtrów o transmitancjach $\phi_k(x,j\omega)$ i pobudzanych nieskorelowanymi sygnałami skupionymi o widmowych gęstościach mocy $s_k(\omega)$, $k = 1,2, \ldots ,K$ (uzasadnienie tej interpretacji podano w pracy [100], a jej ilustrację graficzną pokazuje rys. 3.1).

Zauważmy, że do $\mathcal{S}\Psi$ należą gęstości o postaci:

$$S_u(x,y,j\omega) = \sum_{k=1}^{K} \delta(x-x_k)\delta(y-x_k)s_k(\omega), \tag{3.1.4}$$

odpowiadające nieskorelowanym sterowaniom przyłożonym w punktach x_k, $k = 1,2, \ldots ,K$ i mającym widmowe gęstości mocy $s_k(\omega)$, $k = 1,2, \ldots ,K$, które spełniają p. 2. Nietrudno zauważyć, że S_u w postaci (3.1.4) nie należą do klasy $\mathcal{S}$ zdefiniowanej w rozdz. 2.



Rys. 3.1. Częstotliwościowo-przestrzenna struktura dopuszczalnych sygnałów sterujących z klasy $\mathcal{S}\Psi$; $v_k(t)$ - sygnał o widmowej gęstości mocy $s_k(\omega)$; $k=1,2, \ldots ,K$

Fig. 3.1. Spatial and frequency domain structure of admissible input signals from $\mathcal{S}\Psi$ class; $v_k(t)$ - signal with the power spectral density $s_k(\omega)$; $k=1,2, \ldots ,K$

<u>P r o b l e m 3.1</u>

Przy ustalonym położeniu czujnika $\varkappa_o \in \Omega_p$ znaleźć widmową gęstość mocy sygnału sterującego $S_u \in \mathcal{S}\Psi$ taką, że

$$\sup_{S_u \in \mathcal{S}\Psi} \det M(S_u, \xi_o) = \det M(S_u, \xi_o). \tag{3.1.5}$$

Mamy więc do czynienia z problemem znajdowania D_o-optymalnej widmowej gęstości mocy sterowania w klasie $\mathcal{S}\Psi$. Aby uniknąć rozpatrywania trywialnych przypadków, przyjmujemy założenie analogiczne jak w uwadze 2.2.1. Jak pokazuje twierdzenie 3.3.1, zmiana klasy dopuszczalnych gęstości z $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}\Psi$, przy tym samym wskaźniku jakości identyfikacji, prowadzi do jakościowo innych rozwiązań optymalnych.

TWIERDZENIE 3.3.1. Niech będą spełnione założenia Z_1-Z_{12} i niech elementy wektora $K(x,j\omega)$ będą ciągłymi i liniowo niezależnymi funkcjami na $\Omega_u \times [-\omega_o,\omega_o]$. Wówczas $\check{S}_u \in \mathcal{S}\Psi$ jest rozwiązaniem problemu (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{x \in \Omega_u} \sup_{|\omega| \leqslant \omega_o} [K^{\nabla}(x,-j\omega)M^{-1}(\check{S}_u,\xi_o)K(x,j\omega)] = r \,. \qquad (3.1.6)$$

Co więcej, jedno z rozwiązań optymalnych ma postać (3.1.4) z odpowiednio dobranymi $\check{x}_1, \check{x}_2, \ldots, \check{x}_k$ oraz z $\check{s}_k(\omega) = \check{\alpha}_k \cdot \pi \cdot [\delta(\omega-\check{\omega}_k) + \delta(\omega+\check{\omega}_k)]$, gdzie

$$|\check{\omega}_k| \leqslant \omega_o, \ \check{\alpha}_k \geqslant 0; \ k=1,2, \ldots ,K, \ \sum_{k=1}^{K} \check{\alpha}_k = 1.$$

W powyższych wzorach K można wybrać tak, by $K \leqslant r(r+1)/2$.

Zauważmy, że jeżeli $\check{\omega}_k \neq \check{\omega}_l$, $k,l = 1,2, \ldots ,K$, to jedno ze sterowań realizujących optymalną gęstość S_u, określoną w twierdzeniu 3.3.1 ma postać:

$$\check{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \sqrt{\check{\alpha}_k} \cdot \delta(x-\check{x}_k)\sin(\check{\omega}_k t) \,. \qquad (3.1.7)$$

Jest to więc sterowanie oddziałujące punktowo, tzn. poszukiwane transmitancje filtrów mają postać $\delta(x-\check{x}_k)$ i są one pobudzane harmonicznymi sygnałami sterującymi.

Zauważmy, że warunek optymalności (3.1.6) jest formalnie taki sam jak warunek D-optymalności w klasycznym problemie planowania eksperymentu (por. [22]). Ta formalna analogia pozwala bezpośrednio zastosować algorytmy wyznaczania D-optymalnych planów eksperymentu, opracowane przez Wynna [127] i Fedorowa [22], do znajdowania optymalnych wartości $\check{x}_k$, $\check{\omega}_k$, $\check{\alpha}_k$; $k = 1,2, \ldots ,K$. Algorytmy te są na tyle znane, że nie ma potrzeby ich tutaj przytaczać. Przykłady zastosowania twierdzenia 3.1 do analitycznego wyznaczania optymalnych wartości $\check{x}_k$, $\check{\omega}_k$, $\check{\alpha}_k$: $k=1,2, \ldots ,K$ będą podane w p. 3.3.

<u>Dobór D_o-optymalnych sterowań o zadanej strukturze przestrzennej</u>

Warunki techniczne i ekonomiczne nie zawsze pozwalają na stosowanie sterowań rozłożonych o dowolnych charakterystykach przestrzennych. Oddziaływanie na obiekt może być ograniczone do zadanych punktów przestrzennych, lub tylko do brzegu obszaru przestrzennego. Matematycznym wyrazem takich ograniczeń jest przyjęcie, że dopuszczalne sterowania mają postać:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{K_1} u_k(t)g_k(x) = g^{\nabla}(x)\cdot u(t), \qquad (3.1.8)$$

gdzie $g(x) \triangleq [g_1(x),g_2(x),\ldots,g_{K_1}(x)]^{\nabla}$ jest zadanym wektorem liniowo niezależnych funkcji określonych na Ω_u, natomiast $u(t) = [u_1(t),u_2(t),$

... ,$u_{K_1}(t)]^T$ jest wektorem sterowań, które podlegają wyborowi. W podrozdziale 1.1 zwracano uwagę na możliwość uwzględnienia sterowań brzegowych przez odpowiedni wybór $g(x)$. Przyjąwszy formalnie $g_k(x) = \delta(x-x_k)$, $x_k \in \Omega_u$; $k=1,2, \ldots ,K_1$ uwzględnić można również sterowania punktowe (w odróżnieniu od problemu 3.1 zarówno położenie x_k, $k = 1,2, \ldots ,K_1$, jak i samo $K_1 < \infty$, są teraz zadane i nie podlegają optymalizacji). W dalszej części tego podrozdziału przyjmować będziemy te same założenia, które obowiązywały w rozdz. 2 z tą tylko różnicą, że na sterowania $u_k(t)$, $k=1,2, \ldots ,K_1$, określone w przedziale $[-T/2,T2]$, nakładane będą następujące ograniczenia:

1. Następujące granice istnieją i są skończone

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_k^2(t)dt < \infty , \quad k=1,2, \ldots ,K_1. \tag{3.1.9}$$

2. Funkcje korelacji wzajemnej

$$r_{kl}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_k(t)u_l(t+\tau)dt; \quad k,l=1,2, \ldots ,K_1 \tag{3.1.10}$$

są $\mathcal{F}$-transformowalne, a ich transformaty

$$p_{kl}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{kl}(\tau)\exp[-j\omega\tau]d\tau \tag{3.1.11}$$

są równe zeru poza przedziałem $[-\omega_0,\omega_0]$, gdzie $\omega_0 > 0$ jest zadane.

3. Sumaryczna średnia moc jest ograniczona, tzn.

$$\sum_{k=1}^{K_1} r_{kk}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \mathrm{tr}[P(j\omega)]\, d\omega \leqslant 1, \tag{3.1.12}$$

gdzie $P(j\omega)$ jest macierzą o elementach $p_{kl}(j\omega)$; $k,l=1,2, \ldots ,K_1$. Klasa wszystkich macierzy $P(j\omega)$, dla których są spełnione warunki 1-3, oznaczana będzie przez $\mathcal{P}$. Łatwo sprawdzić, że dla sterowań postaci (3.1.8) widmowa gęstość mocy $S_u(x,y,j\omega)$, określona w rozdz. 2, dana jest wzorem:

$$S_u(x,y,j\omega) = g^T(x)P(j\omega)g(y). \tag{3.1.13}$$

Po podstawieniu jej do wzoru (2.1.12) określającego UMI otrzymamy, przy założeniu jednopunktowego pomiaru $\xi_0(\varkappa) = \delta(\varkappa-\varkappa_1)$,

$$M(S_u, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \Gamma(j\omega) P(j\omega) \Gamma^{\nabla}(-j\omega) d\omega, \tag{3.1.14}$$

gdzie $r \times K_1$ macierz określona jest wzorem

$$\Gamma(j\omega) \triangleq \int_{\Omega_u} K(x, j\omega) g^{\nabla}(x) dx . \tag{3.1.15}$$

Przypominamy, że $K(x,j\omega) \triangleq \bar{K}(\varkappa_1, x, j\omega)$ zależy od $\varkappa_1$, co powoduje zależność Γ od położenia czujnika. Zgodnie z wcześniejszą umową zależności tej jawnie nie wskazujemy.

Otrzymane wzory pozwalają sformułować zadanie D_0-optymalnego doboru macierzy gęstości widmowych sterowań w zagadnieniu identyfikacji wektora parametrów $a \in \mathcal{A}$, przedstawionym w p. 1.3.

<u>P r o b l e m 3.2</u>

Przy ustalonym położeniu czujnika pomiarowego $\varkappa_1 \in \Omega_p$ znaleźć taką macierz $P^0 \in \mathcal{P}$, dla której

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \det M(S_u, \xi_0) = \det M(S_u^0, \xi_0), \tag{3.1.16}$$

przy czym zależność S_u od P dana jest wzorem (3.1.13), natomiast $S_u^0(x,y,j\omega) = g^{\nabla}(x)\, P^0(j\omega) g(y)$. W pracy [83] udowodniono następujący warunek optymalności:

TWIERDZENIE 3.1.2. Macierz $P^0(j\omega)$ jest rozwiązaniem problemu 3.2 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{|\omega| \leqslant \omega_0} \lambda_{max} [\, \Gamma^{\nabla}(-j\omega) M^{-1}(S_u^0, \xi_0) \Gamma(j\omega) \,] = r, \tag{3.1.17}$$

gdzie $S_u^0(x,y,j\omega) = g^{\nabla}(x)\, P^0(j\omega) g(y)$, natomiast $\lambda_{max}[\cdot]$ oznacza największą wartość własną macierzy hermitowskiej zawartej w nawiasach.

Na podstawie tego warunku skonstruować można algorytm obliczeniowy według podobnych zasad jak w rozdz. 2 z tym, że tutaj zagadnienie jest znacznie prostsze. Przykłady analityczne zastosowania warunku (3.1.17) zostaną podane w p. 3.3.

Na zakończenie tego podrozdziału rozważmy szczególny przypadek problemu 3.2. Przyjmijmy $K_1=1$ oraz $g_1(x) = \delta(x-x_1)$. Wówczas $\Gamma(j\omega) = K(x_1, j\omega)$ jest wektorem kolumnowym, który można interpretować jako transformatę Fouriera funkcji wrażliwości obiektu o odpowiedzi impulsowej $g(\varkappa_0, x_1, t; a)$. Formalnie obiekt taki potraktować można jako obiekt o parametrach skupionych, o jednym wejściu w punkcie x_1 i jednym wyjściu w punkcie $\varkappa_0$. Jako wniosek z twierdzenia 3.1.2 otrzymujemy wówczas następujący warunek konieczny i dostateczny optymalności

$$\sup_{|\omega| \leqslant \omega_0} [\, \Gamma^{\nabla}(-j\omega) M^{-1}(S_u^o, \xi_0) \Gamma(j\omega) \,] = r.$$

Jest on oczywiście taki sam jak warunek optymalności w analogicznym zadaniu dla obiektu skupionego (por. prace [27],[64],[65]). Można więc powiedzieć, że twierdzenie 3.1.2 jest uogólnieniem niedawno osiągniętych wyników dla SPS na obiekty o parametrach rozłożonych. Podkreślić jednak należy, że stwierdzenie to dotyczy tylko tego problemu. Inne problemy rozważane w tej pracy nie mogą być traktowane jako uogólnienia w podobnym sensie, gdyż dobiera się w nich strukturę czasową lub częstotliwościową oraz przestrzenną sygnału sterującego, przy czym ta ostatnia nie ma swego odpowiednika w obiektach o parametrach skupionych.

Podsumowanie

W podrozdziale 3.1 zbadano dwa zadania D_0-optymalnego doboru sterowań. Różnią się one od problemu 2.1 ograniczeniami na dopuszczalne widmowe gęstości mocy. I tak, w przypadku pierwszym nałożono ograniczenia na całki po zmiennych przestrzennych z modułu rozwinięcia ortogonalnego szukanej gęstości widmowej (problem 3.1), a w przypadku drugim - przestrzenny przebieg sterowania był z góry zadany (problem 3.2). W obu przypadkach podane zostały konieczne i dostateczne warunki optymalności.

3.2. Problem L-optymalnego doboru sterowań

Celem tego podrozdziału jest wskazanie innego niż w p. 3.1 kierunku uogólnień wyników rozdziału 2. Kierunek ten to wybór innych funkcjonałów macierzy informacyjnej niż kryterium D-optymalności. W podrozdziale 1.3 został wyjaśniony statystyczny sens klasy kryteriów liniowych, czyli kryteriów L-optymalności. Podane zostaną również warunki optymalności dla tej klasy kryteriów, przy tych samych ograniczeniach na sterowania, które przyjmowano w problemie 2.1.

Sformułowanie problemu

Badany problem jest analogiem zadania znajdowania sterowań D_0-optymalnych, tzn. zakładamy, że pomiary są dokonywane w jednym punkcie $\varkappa_1 \in \Omega_p$ spełniającym wymagania uwagi 2.2.1, zatem $\xi_0(\varkappa) = \delta(\varkappa - \varkappa_1)$. Jako dopuszczalne widmowe gęstości mocy sterowań przyjmujemy gęstości z klasy $\mathcal{S}$. Przy tych założeniach możemy korzystać ze wszystkich wyników rozdz. 2, dotyczących UMI. Zwłaszcza korzystać będziemy z wyrażenia $M(S_u, \xi_0)$ danego wzorem (2.1.12).

P r o b l e m 3.3

Przy zadanym ξ_0 znaleźć $\tilde{S}_u \in \mathcal{S}$ takie, że

$$\inf_{S_u \in \mathcal{S}} L[M^{-1}(S_u, \xi_0)] = L[M^{-1}(\tilde{S}_u, \xi_0)]. \tag{3.2.1}$$

Wobec założonej w p. 1.3 ciągłości funkcjonału L [.] oraz zwartości zbioru $\mathcal{M}_\xi$ (por. p. 2.1) istnienie rozwiązania problemu 3.3 jest zagwarantowane.

W celu sformułowania warunków optymalności rozważmy równanie całkowe z $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$ jako parametrem:

$$\mu(\omega)\varphi(x, j\omega) = \int_{\Omega_u} \tilde{Q}(x, y, j\omega)\varphi(y, j\omega)dy, \tag{3.3.2}$$

gdzie

$$\tilde{Q}(x, y, j\omega) \triangleq L[\tilde{M}^{-1}K(x, j\omega)K^{\nabla}(y, -j\omega)\tilde{M}^{-1}] \tag{3.2.3}$$

natomiast $\tilde{M} \triangleq M(\tilde{S}_u, \xi_0)$.

Uwaga 3.2.1

Zakładamy, że są spełnione wymagania uwagi 2.2.1, co implikuje istnienie w $\mathcal{M}_{\xi_0}$ nieosobliwej macierzy informacyjnej. Z przyjętego w p. 1.3. założenia, że dla osobliwych macierzy L [.] przyjmuje wartość nieskończoną, wynika nieosobliwość $M(\tilde{S}_u, \xi_0)$.

Łatwo sprawdzić, że własności wartości i funkcji własnych równania (3.2.2) pokrywają się z własnościami Q_1-Q_{11} p. 2.2 i nadal będziemy z nich korzystać. Przez $\tilde{\mu}(\omega)$ oznaczmy maksymalną wartość równania (3.2.2) przy danym $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$. Natomiast $\tilde{\varphi}(x, j\omega)$ będzie funkcją własną odpowiadającą tej wartości własnej (lub jedną z takich funkcji, jeżeli jest ich więcej).

Warunki optymalności

Twierdzenie 3.2.1 podajemy bez dowodu, gdyż jest on podobny do dowodu twierdzenia 2.2.1.

TWIERDZENIE 3.2.1. Niech spełnione będą założenia p. 1.3 dotyczące funkcjonału L. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $\tilde{S}_u \in \mathcal{S}$ było rozwiązaniem problemu (3.3), jest

$$\sup_{|\omega| \leqslant \omega_0} \tilde{\mu}(\omega) = L[\tilde{M}^{-1}]. \tag{3.2.4}$$

Obliczenie wartości własnych równania całkowego może być trudne. Dlatego do sprawdzenia warunku użyteczny jest następujący wniosek:

Wniosek 3.2.1. Niech miarą jakości identyfikacji będzie funkcjonał o ogólnej postaci $L[M^{-1}] = tr[M^{-1}W]$, gdzie W jest zadaną dodatnio okreś-

loną $r \times r$ macierzą. W warunkach twierdzenia 3.2.1 gęstość $\tilde{S}_u \in \mathcal{S}$ jest L-optymalna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość (3.2.4), przy czym $\tilde{\mu}(\omega)$ występujące w tym warunku jest największą z wartości własnych w następującym problemie

$$\mu(\omega)c^{*}(-j\omega)H(j\omega) = c^{*}(-j\omega)H(j\omega)\tilde{M}^{-1}W\tilde{M}^{-1}H(j\omega), \tag{3.2.5}$$

gdzie $c(j\omega)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\mu(\omega)$.

Do końca tego podrozdziału zakładamy, że założenia powyższego wniosku są spełnione.

<u>Wynik pomocniczy</u>

W celu dokładniejszego scharakteryzowania $\tilde{S}_u$ potrzebny nam będzie pewien wynik pomocniczy. W tym celu oznaczmy przez $\tilde{c}(j\omega)$ wektor własny zagadnienia (3.2.5), odpowiadający jego maksymalnej wartości własnej $\tilde{\mu}(\omega)$ (lub jeden z takich wektorów, jeśli jest ich więcej). Wobec jednorodności (3.2.5) wektor ten można unormować w taki sposób, że

$$\forall_{\omega \in [-\omega_0, \omega_0]} \; \tilde{c}^{*}(-j\omega)H(j\omega)c(j\omega) = 1. \tag{3.2.6}$$

Przez bezpośrednie wstawienie można sprawdzić, że funkcja $\tilde{\varphi}(x,j\omega) = \triangleq \tilde{c}^{*}(-j\omega)K(x,j\omega)$ jest funkcją własną równania całkowego (3.2.2), odpowiadającą wartości własnej $\tilde{\mu}(\omega)$ oraz, że

$$\forall_{\omega \in [-\omega_0, \omega_0]} \int_{\Omega_u} |\varphi(x,j\omega)|^2 dx = 1. \tag{3.2.7}$$

Wprowadźmy oznaczenia $\tilde{K}(j\omega) \triangleq \int_{\Omega} K(x,j\omega)\cdot\tilde{\varphi}(x,-j\omega)dx$. Natomiast przez Σ oznaczmy klasę rzeczywistych funkcji określonych na $[-\omega_0,\omega_0]$ i takich, że:

$$s(\omega) \geqslant 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} s(\omega)d\omega \leqslant 1, \quad s(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > \omega_0 \tag{3.2.8}$$

Elementy klasy Σ będą interpretowane jako gęstości widmowe mocy sygnałów będących funkcjami czasu. Aby móc rozpatrywać sygnały harmoniczne, do Σ zaliczymy także gęstości o postaci:

$$s(\omega) = \sum_{k=1}^{K_0} \alpha_k \cdot \pi \cdot [\,\delta(\omega-\omega_k) + \delta(\omega+\omega_k)], \tag{3.2.9}$$

gdzie $\sum_{k=1}^{K_0} \alpha_k \leqslant 1, |\omega_k| \leqslant \omega_0, \alpha_k \geqslant 0;\ k=1,2,\ \ldots\ ,K_0,$

przy czym K_0 może być różne dla różnych gęstości.

Rozważmy następujące zadanie pomocnicze:
Znaleźć $\tilde{s} \in \Sigma$ takie, że

$$\inf_{s \in \Sigma} \operatorname{tr}[\tilde{m}^{-1}(s)W] = \operatorname{tr}[\tilde{m}^{-1}(\tilde{s})W], \tag{3.2.10}$$

gdzie

$$\tilde{m}(s) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \tilde{K}(j\omega)\tilde{K}^{*}(-j\omega)s(\omega)d\,\omega. \tag{3.2.11}$$

Zadaniu (3.2.10) nadać można interpretację problemu L-optymalnego doboru sterowania przy identyfikacji pewnego obiektu o parametrach skupionych. Ponieważ z interpretacji tej nie będziemy korzystać, potraktujemy zadanie to formalnie.

Można wykazać, że jeżeli elementy wektora $\tilde{K}(j\omega)$ są ciągłymi funkcjami $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$, to rozwiązanie zadania (3.2.10) istnieje, a warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $\tilde{s} \in \Sigma$ było rozwiązaniem optymalnym, jest

$$\sup_{|\omega| \leqslant \omega_0} \operatorname{tr}[\tilde{m}^{-1}(\tilde{s})\tilde{K}(j\omega)\tilde{K}^{*}(-j\omega)\tilde{m}^{-1}(\tilde{s})W] = \operatorname{tr}[\tilde{m}^{-1}(\tilde{s})W]. \tag{3.2.12}$$

Dowód wzoru (3.2.12) pomijamy, gdyż jest on w swej idei podobny do dowodu podanego w pracy [27] dla zadania D-optymalnego doboru sterowania w identyfikacji obiektu o parametrach skupionych.

<u>Struktura częstotliwościowo-przestrzenna L-optymalnego sterowania</u>

Na podstawie powyższego wyniku pomocniczego podać można analog wyniku z p. 2.3.

<u>Wniosek 3.2.2</u>. Niech będą spełnione założenia poczynione we wniosku 3.2.1. Wówczas L-optymalna gęstość widmowa mocy sygnału sterującego, będąca rozwiązaniem zadania (3.2.1), ma następującą postać:

$$\tilde{S}_u(x,y,j\omega) = \tilde{\varphi}(x,-j\omega)\,\tilde{\varphi}(y,j\omega)\cdot\tilde{s}(\omega), \tag{3.2.13}$$

gdzie $\tilde{s}(\omega)$ spełnia warunek (3.2.12). Co więcej, widmową gęstość mocy $\tilde{s}(\omega)$, będącą gęstością sygnału zależnego tylko od czasu, można wybrać spośród funkcji o postaci (3.2.9). Występująca we wzorze (3.2.13) funkcja $\tilde{\varphi}(x,j\omega)$ jest funkcją własną równania całkowego (3.2.2), odpowiadającą jego maksymalnej wartości własnej $\tilde{\mu}(\omega)$.

Dowód tego wniosku sprowadza się do bezpośredniego sprawdzenia warunku (3.2.4) z użyciem wzoru (3.2.5) i (3.2.12). W tym miejscu można powtórzyć wszystkie uwagi na temat realizacji L-optymalnego sterowania, jakie dotyczyły D_0-optymalnego sterowania w p. 2.3. Z porównania wzorów (3.2.13) i (2.3.8) widać, że częstotliwościowo-przestrzenna

struktura tych sterowań jest taka sama. Różnią się one natomiast wartościami współczynników wzmocnień i częstotliwościami harmonicznych wymuszeń.

Podsumowanie

W podrozdziale 3.2 otrzymano warunki konieczne i dostateczne optymalności sterowań dla klasy liniowych kryteriów optymalności. Zbadano także ogólną strukturę przestrzenno-częstotliwościową optymalnej gęstości mocy sterowania. Widoczna jest równoległość uzyskanych tutaj wyników z wynikami rozdz. 2. Przedstawione wyniki mogą być podstawą konstrukcji algorytmu obliczeniowego, analogicznego do zaproponowanego w p. 2.4. Przykłady zastosowania uzyskanych wyników do analitycznego konstruowania optymalnych sterowań zostaną podane w p. 3.3.

3.3. Analityczne wyznaczanie sterowań optymalnych w identyfikacji wybranych klas obiektów

Celem tego podrozdziału jest pokazanie możliwości zastosowania wyników rozdz. 2 i p. 3.1, 3.2 do analitycznego wyznaczania optymalnych gęstości widmowych mocy sterowań w identyfikacji pewnych klas obiektów. Przytaczane tu wyniki stanowią albo skonkretyzowanie wcześniejszych wyników w zastosowaniu do węższych klas obiektów, albo dotyczą przykładowych obiektów. Przykłady starano się konstruować w taki sposób, by dla danego zadania identyfikacji otrzymać sterowania, które są optymalne przy wyborze różnych wskaźników jakości i(lub) różnych ograniczeniach. Nie chodzi tu o porównanie wyników, gdyż każde z uzyskanych sterowań jest najlepsze w ściśle określonym sensie. Na podstawie takiego zestawienia można się jednak ogólnie zorientować, jaki wpływ na postać sterowania optymalnego ma opis obiektu i zadanie identyfikacji w zestawieniu z wpływem na wynik kryterium optymalności i ograniczeń.

Dobór optymalnych sterowań w identyfikacji współczynnika zależnego od zmiennych przestrzennych

Zastosujmy otrzymane dotychczas wyniki w zadaniu identyfikacji obiektu opisanego w przykładzie 1.3. Skonkretyzujmy występujący tam, w równaniu (1.1.13), operator $B_\varkappa$ i przyjmijmy, że w klasie funkcji różniczkowalnych i przyjmujących wartość zero dla $\varkappa = 0$ ma on postać

$$B_\varkappa h(\varkappa) = v \frac{\partial h(\varkappa)}{\partial \varkappa} + \alpha \cdot h(\varkappa), \quad \varkappa \in \Omega \triangleq (0,\infty), \tag{3.3.1}$$

gdzie $v > 0$ i α są zadanymi parametrami.

Przyjmijmy także, że $\Omega_u = [0,\varkappa_1]$, gdzie $\varkappa_1 > 0$ jest zadanym położeniem czujnika pomiarowego. Przy przyjętych w przykładzie 1.3 założe-

niach wektor wrażliwości względem identyfikowanych $a_1, a_2, \ldots, a_r$, $K(x,j\omega)$ ma następującą postać, którą otrzymuje się z transformaty Fouriera wzoru (1.1.18):

$$K(x,j\omega) = \int_{\Omega} G_0(\varkappa_1,y,j\omega)G_0(y,x,j\omega)\varphi(y)dy \ , \tag{3.3.2}$$

gdzie $\varphi(y) = [\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_r(y)]^{\mathrm{T}}$.

W równaniu (3.3.2) $G_0(\varkappa,x,j\omega)$ jest określona jako transformata Fouriera odpowiedzi w punkcie $\varkappa$ na pobudzenie impulsowe w punkcie x, obiektu opisanego równaniem (1.1.6), z $B_{\varkappa}$ danym przez wzór (3.3.1). Łatwo sprawdzić, że odpowiedź ta ma postać (por. [08]):

$$G_0(\varkappa,x,j\omega) = -\frac{1}{v}\, 1(\varkappa - x)\, \exp\left[-\frac{j\omega+\alpha}{v}(\varkappa - x)\right]. \tag{3.3.3}$$

Zatem po wykonaniu całkowania we wzorze (3.3.2) otrzymujemy

$$K(x,j\omega) = -\frac{1}{v}\, 1(\varkappa_1 - x)\cdot\exp\left[-\frac{j\omega+\alpha}{v}(\varkappa_1 - x)\right]\cdot\Psi(x), \tag{3.3.4}$$

gdzie $\Psi(x) \triangleq \int_x^{\varkappa_1} \varphi(y)dy$.

Wzór (3.3.4) pozwala obliczyć UMI przy dowolnej gęstości widmowej mocy sterowania i można przystąpić do formułowania różnych zadań doboru sterowań. Zaczniemy od zadania doboru D_0-optymalnego sterowania w klasie $\mathcal{S}$. Warunki optymalności w tym zadaniu formułuje się w terminach macierzy $H(j\omega)$, określonej wzorem (2.3.13). Tutaj ma ona postać:

$$H(j\omega) = \frac{1}{v^4}\int_0^{\varkappa_1} \Psi(x)\Psi'(x)\exp\left[-\frac{2\alpha}{v}(\varkappa_1 - x)\right]dx \ . \tag{3.3.5}$$

Konkretna postać tej macierzy zależy od wybranego wcześniej wektora $\varphi(x)$, a jej liczbowe wartości nie są dla dalszych rozważań istotne. Ważne są natomiast następujące własności tej macierzy:

1. Macierz $H(j\omega)$ jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona przy założeniu liniowej niezależności składowych wektora $\varphi(x)$.
2. Macierz ta nie zależy od ω i dlatego będzie oznaczana przez H.

Wykażemy, że optymalne rozwiązanie zadania (2.2.1) ma postać:

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = \frac{1}{r}\, K'(x,-j\omega)\, H^{-1}K(y,j\omega)s(\omega), \tag{3.3.6}$$

gdzie $K(x,j\omega)$ jest określone przez wzór (3.3.4), natomiast $s(\omega)$ jest dowolnym elementem klasy Σ określonej w p. 3.2 lecz takim, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} s(\omega)d\omega = 1. \tag{3.3.7}$$

Na przykład przyjąć można $s(\omega) = \pi[\delta(\omega+\hat{\omega}) + \delta(\omega-\hat{\omega})]$ z dowolnym $\hat{\omega}\in(0,\omega_0)$, co odpowiada sinusoidzie o częstotliwości $\hat{\omega}$. Przynależność gęstości (3.3.6) do klasy $\mathcal{S}$, wynika z równości:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\int_{\Omega_u} \hat{S}_u(x,x,j\omega)dxd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} tr[H^{-1}H]\frac{s(\omega)}{r}d\omega = 1, \tag{3.3.8}$$

przy czym ostatnia równość zachodzi na mocy równania (3.3.7).

Aby wykazać optymalność $\hat{S}_u$, wystarczy sprawdzić warunek (2.3.16) wniosku 2.3.1. W tym celu zauważmy, że dla $\hat{S}_u$ i $\xi_0 = \delta(\varkappa-\varkappa_1)$ mamy

$$M(\hat{S}_u,\xi_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\frac{1}{\pi}HH^{-1}Hs(\omega)d\omega = \frac{1}{r}H. \tag{3.3.9}$$

Zatem dla wszystkich $\omega\in[-\omega_0,\omega_0]$

$$\lambda_{max}\left[H(\frac{1}{r}H)^{-1}\right] = r, \tag{3.3.10}$$

co kończy dowód.

Rozważmy teraz zadanie L-optymalnego doboru sterowania w tym samym problemie identyfikacji. Jako wskaźnik jakości wybierzmy $L[M^{-1}] = tr[M^{-1}]$. Pokażemy, że rozwiązaniem problemu 3.3 (zadanie 3.2.1) jest gęstość widmowa o postaci:

$$\tilde{S}_u(x,y,j\omega) = K^*(x,-j\omega)H^{-3/2}K(y,j\omega)s(\omega)/tr[H^{-1/2}], \tag{3.3.11}$$

gdzie $s\in\Sigma$ jest dowolna lecz taka, że zachodzi równanie (3.3.7).

We wzorze (3.3.11) operacje podnoszenia macierzy symetrycznych i dodatnio określonych do potęg ułamkowych jest zdefiniowana w przyjęty w algebrze sposób (por. np. [55]). Przynależność S_u do $\mathcal{S}$ sprawdza się podobnie jak we wzorze (3.3.8). Dla równania (3.3.11) i $\xi_0(\varkappa) = \delta(\varkappa-\varkappa_1)$ mamy:

$$\tilde{M} \triangleq M(\tilde{S}_u,\xi_0) = H^{1/2}/tr[H^{-1/2}]. \tag{3.3.12}$$

W celu pokazania optymalności (3.3.11) skorzystamy z wniosku 3.2.1. Ze względu na własności 1 i 2 macierzy H oraz przyjęte kryterium, występujący w tym wniosku warunek optymalności można zapisać w postaci

$$\lambda_{max}[H\tilde{M}^{-2}] = tr[\tilde{M}^{-1}]. \tag{3.3.13}$$

Wstawienie wzoru (3.3.12) do (3.3.13) pozwala stwierdzić, że warunek dostateczny optymalności jest dla (3.3.11) spełniony.

W podsumowaniu obu powyższych przykładów stwierdzić należy, że otrzymane optymalne gęstości widmowe sterowań nie zależą od nieznanych parametrów, a więc mogą być obliczone bez posiadania wiedzy apriorycznej o nieznanych parametrach. Można je zatem obliczyć przed eksperymentem i w jego trakcie nie zachodzi potrzeba uaktualnienia stosowanych sterowań, ponieważ badany obiekt należy do klasy $\mathcal{X}$ obiektów liniowych względem parametrów, dla których proponowane w tej pracy podejście jest dokładne.

Optymalne sterowanie w przykładowych zadania identyfikacji jednego parametru stałego

W przypadku identyfikacji jednego parametru ($r = 1$) w r.r.cz. zadanie doboru sterowania upraszcza się w tym sensie, że kryteria D- i L-optymalności oraz wiele innych, prowadzą do maksymalizacji skalarnej wielkości $M(S_u,\xi_o)$ względem S_u. Różne rozwiązania otrzymuje się tylko przez nałożenie różnych ograniczeń na S_u. Względna prostota zadań doboru sterowania w tym przypadku nie powinna przesłaniać ich roli praktycznej. Jak wiadomo, zadanie estymacji pojedynczego parametru w r.r.cz. może być trudne eksperymentalnie i obliczeniowo. Dlatego też w wielu dziedzinach techniki, np. w teorii przewodnictwa ciepła [71] identyfikacja jednego parametru skupia główną uwagę badaczy.

Jako elementarne wnioski z odpowiednich twierdzeń rozdziału 2, p. 3.1 i 3.2 wskazać można jawną postać rozwiązania optymalnego dla $r = 1$.

Wniosek 3.3.1. W zadaniu identyfikacji jednego parametru rozwiązanie zadania maksymalizacji $M(S_u,\xi_o)$ względem S_u ma postać:

1. Dla $S_u \in \mathcal{S}$

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = \frac{1}{H_o(\omega)} K(x,-j\omega)K(y,j\omega)\pi[\delta(\omega+\hat{\omega})+\delta(\omega-\hat{\omega})], \tag{3.3.14}$$

gdzie $H_o(\omega) \triangleq \int_{\Omega_u} |K(x,j\omega)|^2 dx$, natomiast $\hat{\omega} = \arg \sup_{|\omega| \leqslant \omega_o} H_o(\omega)$.

2. Dla $S_u \in \mathcal{S}\Psi$

$$\check{S}_u(x,y,j\omega) = \delta(x-\check{x})\,\delta(y-\check{x})\pi[\delta(\omega+\check{\omega})+\delta(\omega-\check{\omega})], \tag{3.3.15}$$

gdzie $\check{x} \in \Omega_u$, $\check{\omega} \in [-\omega_o, \omega_o]$ są punktami, w których jest osiągane supremum funkcji $|K(x,j\omega)|^2$ względem obu argumentów.

Zastosowania powyższych wyników ilustrują następujące przykłady.

P r z y k ł a d 3.1 (kontynuacja przykładu 1.1)

W celu otrzymania funkcji $K(x,j\omega)$ należy zróżniczkować obie strony (1.1.6), co dla ustalonego położenia czujnika $x_1 > 0$ daje

$$K(x,j\omega) = 1(\varkappa_1-x)\,\frac{(\varkappa_1-x)}{v}\exp\left[-\frac{j\varkappa+a}{v}(\varkappa_1-x)\right]. \qquad (3.3.16)$$

Przyjmijmy $\Omega_u = [0,\varkappa_1]$ oraz $\Omega_p = \{\varkappa_1\}$. Wówczas, zgodnie z wnioskiem 3.3.1, p. 1, $\hat{S}_u$ dane jest wzorami (3.3.14) i (3.3.16), przy czym $\hat{\omega}\in[0,\omega_0]$ jest dowolne, gdyż $H_0(\omega) = (1/3)\varkappa_1^3\exp[2a\varkappa_1/v]$ nie zależy od ω. Jedną z możliwych realizacji takiej S_u otrzymuje się w wyniku przetworzenia sygnału $\sin(\hat{\omega}t)/H_0^{1/2}(\hat{\omega})$ za pomocą filtru o transmitancji (3.3.16) i podaniu tak otrzymanego sterowania na obiekt. Zauważmy, że w tym przypadku $K(x,j\omega)$ zależy od nieznanego parametru a. Należy więc zastosować jedno z podejść zaproponowanych w p. 1.2, w celu pokonania tej trudności. Warto w tym miejscu zilustrować podejście 4. Wymaga to przedstawienia wzoru (3.3.16) w nieco innej postaci, którą otrzymuje się przez zróżniczkowanie obu stron (1.1.4) względem a. Dostajemy w ten sposób r.r.cz. dla $\partial q(\varkappa,t;a)/\partial a$ z jednorodnym warunkiem brzegowym. Równanie to, wraz z równaniem (1.1.4), pozwala przedstawić (3.3.16) w postaci równoważnej:

$$K(x,j\omega) = -\int_0^{\varkappa_1}\tilde{G}(\varkappa_1,y,j\omega)\tilde{G}(y,x,j\omega)\,dy, \qquad (3.3.17)$$

gdzie $\tilde{G}(\varkappa,x,j\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej obiektu w punkcie $\varkappa$ na punktowe wymuszenie w punkcie x. Jeżeli poziom zakłóceń nie jest zbyt duży, to funkcję tę można zmierzyć i po wstawieniu jej do wzoru (3.3.17) otrzymać potrzebną transmitancję filtru z "prawdziwą" wartością parametru $a = a^0$.

Zauważmy, że dla naszych celów pomiarów funkcji $\tilde{G}(\varkappa,x,j\omega)$ wystarczy dokonać dla $\omega = \hat{\omega}$ i dla x ze zbioru $\Omega_u = [0,\varkappa_1]$. Zatem jej znajomość nie wystarcza do pełnego opisu zachowania się obiektu dla $x > \varkappa_1$ i $\varkappa \neq \varkappa_1$. Natomiast po dokładnej estymacji parametru a^0 i wstawieniu go do równania (1.1.4) otrzymuje się opis obiektu w pełnym zakresie zmienności sterowań i zmiennej przestrzennej.

Rozważmy teraz sytuację z p. 2 wniosku 3.3.1. Jak łatwo sprawdzić, optymalne wartości we wzorze (3.3.15) są następujące:

$$\check{x} = \begin{cases}(\varkappa_1 - a/v), & \text{jeżeli } \varkappa_1 > a/v\\ 0, & \text{w przeciwnym razie,}\end{cases} \qquad (3.3.18)$$

natomiast $\check{\omega}\in[0,\omega_0]$ jest dowolne.

P r z y k ł a d 3.2 (kontynuacja przykładu 1.2)

Rozważmy równanie obiektu (1.1.8) zakładając brak wymiany ciepła z otoczeniem, tzn. $a_2 = 0$, i przyjmując warunki brzegowe (1.1.9). Identyfikacji podlegać będzie parametr a_1, przy czym $\varkappa_1 = \pi/2$, natomiast

$\Omega_u = [0, \pi]$. Po zróżniczkowaniu (1.1.10) względem a_1 i obliczeniu transformaty Fouriera otrzymamy:

$$K(x,j\omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)v_k(\varkappa_1)k^2}{(j\omega + a_1k^2)^2}, \tag{3.3.19}$$

gdzie $v_k(x) = \sqrt{2/\pi}\ \sin(kx)$.

Korzystając z ortonormalności ciągu v_k, $k=1,2, \ldots$ otrzymamy

$$H_0(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 \sin^2(\varkappa_1)}{(\omega^2 + k^4a_1^2)^2}. \tag{3.3.20}$$

Maksimum tej funkcji na zbiorze $[-\omega_0, \omega_0]$ jest osiągane, gdy $\hat{\omega} = 0$. Zatem, zgodnie z punktem 1 wniosku 3.3.1,

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = \frac{2\pi}{H_0(0)} K(x,-j\omega)K(y,j\omega)\cdot\delta(\omega). \tag{3.3.21}$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że optymalną wartość $M(\hat{S}_u, \xi_0)$ otrzymuje się także dla

$$\hat{\hat{S}}_u(x,y,j\omega) = \frac{2\pi}{H_0(0)} K(x,0)K(y,0)\delta(\omega), \tag{3.3.22}$$

a więc jest ona także optymalna. Dodatkową jej zaletą jest łatwiejsza realizacja optymalnego sterowania o gęstości (3.3.22). Sterowanie takie ma postać:

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1(t)}{2\beta}\cdot\begin{cases} x \text{ dla } x \in [0,\pi/2] \\ \pi - x \text{ dla } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \tag{3.3.23}$$

$1(t)$ jest funkcją Heviside'a, natomiast β jest współczynnikiem normującym.

Sterowanie (3.3.23) jest sterowaniem optymalnym przy długim czasie obserwacji ($T \to \infty$). Aby zbadać jego jakościowe własności przy skończonych wartościach T i porównać zapewnioną przez nie jakość identyfikacji z jakością uzyskiwaną przy innych sterowaniach, wykonano badania symulacyjne. Oprócz sygnału $\hat{u}$ do badań wybrano sterowania:

a) $u(x,t) = W\cdot 1(t)$, $x \in \Omega$,

b) $u(x,t) = W\cdot \sin x\cdot 1(t)$,

gdzie W jest współczynnikiem normującym.

Przy każdym z powyższych sterowań badania symulacyjne przeprowadzano następująco:

1. Dla wartości $a_1 = 1$ obliczano odpowiedź obiektu na wybrane sterowanie (przy zerowych warunkach początkowych). Następnie odpowiedź tę próbkowano z odstępem $\tau = 0.02$, a do otrzymanych wartości $q(x_1, t_l)$, $l=1,2, \ldots ,L$ dodawano zakłócenia pomiarowe generowane przez generator liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym w przedziale $[-2,2]$. Otrzymane w ten sposób wartości traktowano tak, jak pomiary obiektu otrzymane w punkcie $x_1 = \pi/2$.

2. Na podstawie "pomiarów" uzyskanych w p. 1 dokonywano identyfikacji parametru a_1, minimalizując odchylenie średniokwadratowe. Otrzymane w ten sposób oszacowanie $\hat{a}$ zapamiętywano.

3. Punkty 1 i 2 powtarzano 20-krotnie, zmieniając jedynie realizację zakłóceń pomiarowych. Z uzyskanych w ten sposób 20 wartości $\hat{a}$ obliczano empiryczną średnią $\tilde{E}\,\hat{a}$ i wariancję $\widetilde{var}\,\hat{a}$.

Punkty 1-3 powtarzano następnie z różną liczbą pomiarów L, dobierając przy tym współczynnik W w taki sposób, by $\int_0^T \int_\Omega u^2(x,t)dxdt = 1$. Otrzymane wyniki podsumowano w tab. 3.1.

Tabela 3.1

Liczba pomiarów L \ Sygnał sterujący		Sterowanie optymalne (3.3.23)	$u(x,t)=1(t)$, $x \in \Omega$	$u(x,t)=1(t)\cdot \sin x$
5 w = 354	$\tilde{E}\hat{a}$	0.916	0.982	0.908
	$\widetilde{var}\hat{a}$	0.024	0.144	0.072
10 w = 500	$\tilde{E}\hat{a}$	1.0036	1.007	0.985
	$\widetilde{var}\hat{a}$	1.08E-3	9.05E-3	0.002
20 w = 705	$\tilde{E}\hat{a}$	0.994	0.930	0.996
	$\widetilde{var}\hat{a}$	1.39E-4	0.062	1.52E-4

Analiza tej tabeli pozwala na następujące wnioski:

i) wariancja oszacowania parametru a_1 przy sygnale optymalnym jest mniejsza niż przy pozostałych sterowaniach,

ii) strata jakości identyfikacji przy sygnale b jest znacznie mniejsza niż przy sterowaniu a,

iii) dokładność estymacji uzyskiwana przy sterowaniu a i 20 pomiarów jest prawie 3-krotnie gorsza niż przy stosowaniu sterowania optymalnego i tylko 5 pomiarach,

iv) obciążenie estymatora uzyskanego przy sterowaniu optymalnym staje się pomijalnie małe już przy 10 pomiarach.

Zauważmy, że "kształt" sterowań (3.3.23) i b jest zbliżony, natomiast sterowanie a różni się od nich istotnie. Tym tłumaczyć można spostrzeżenie we wniosku ii). Spostrzeżenie to jest ważne z praktycznego punktu widzenia. Świadczy ono bowiem o małej wrażliwości dokładności identyfikacji na małe odchylenia od sterowania optymalnego, a więc małe błędy w jego realizacji są dopuszczalne. Jednocześnie występuje duża wrażliwość dokładności identyfikacji na znaczniejsze odchylenia przebiegu sterowania od sterowania optymalnego, co świadczy o celowości jego starannego doboru.

Powyższe wnioski mają charakter jakościowy i ograniczony zakres stosowania, jednakże uzyskanie odpowiednich wyników analitycznie nie wydaje się możliwe ze względu na trudności w otrzymaniu jawnej zależności var $\hat{a}$ od sterowania przy skończonym T.

W przykładzie tym badano jedynie wpływ przestrzennego przebiegu sterowania na jakość identyfikacji, gdyż istotny wpływ przebiegu sygnałów w czasie został udokumentowany w badaniach obiektów o parametrach skupionych [37],[67].

P r z y k ł a d 3.3

W obu poprzednich przykładach punktem wyjścia było r.r.cz. Z równania tego była obliczana odpowiedź impulsowa obiektu z dokładnością do parametrów. Droga taka jest typowa, ale nie jedyna. Alternatywne podejście polega na sformułowaniu hipotezy o postaci odpowiedzi impulsowej i możliwie dokładnej identyfikacji jej parametrów. Przyjmijmy, że odpowiedź impulsowa $g(\varkappa,x,t;a)$ zdefiniowana w p. 1,2, ma własność:

$$\forall_{t>0} \quad g(\varkappa,x,t;a) = g(x,\varkappa,t;a) \tag{3.3.24}$$

charakteryzującą obiekty przestrzennie jednorodne (por. np. [115]). W tej sytuacji celowe jest przyjęcie, że

$$g(\varkappa,x,t;a) = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i(x)\varphi_i(\varkappa)e_i(t), \tag{3.3.25}$$

gdzie $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1,2, \ldots ,r$ jest znanym układem funkcji ortonormalnych w Ω_u, natomiast $e_i(t)$, $i = 1,2, \ldots ,r$ są znanymi liniowo niezależnymi funkcjami na R^+. Zadanie identyfikacji podlega identyfikacji $a_1,a_2, \ldots$ $\ldots ,a_r$ na podstawie opisu obiektu (1.1.20) i pomiarów (1.2.1).

Rozważmy zadanie D_0-optymalnego doboru sterowania w klasie $\mathcal{S}$, tzn. problem 2.2.1. Zakładamy przy tym, że położenie czujnika $\varkappa_1 \in \Omega_p = \Omega_u$ jest tak dobrane, by $\varphi_i^2(\varkappa_1) \neq 0$, $i=1,2, \ldots ,r$. Przyjmujemy też, że $e_i(t) = 0$ dla $t < 0$ i że funkcje te są $\mathcal{F}$-transformowalne, a ich transformaty oznaczymy przez $\overline{e_i}(j\omega)$; $i = 1,2, \ldots ,r$. Wówczas

$$K(x,j\omega) = [\varphi_1(x)\varphi_1(\varkappa_1)\overline{e}_1(j\omega),\ldots,\varphi_r(x)\varphi_r(\varkappa_1)\overline{e}_r(j\omega)]^{\nabla}. \qquad (3.3.26)$$

Wykażemy, że rozwiązanie optymalne ma postać:

$$\hat{S}_u(x,y,j\omega) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\varphi_i(y)\pi\,[\,\delta(\omega+\hat{\omega}_i)+\delta(\omega-\hat{\omega}_i)\,]\ , \qquad (3.3.27)$$

gdzie $\hat{\omega}_i = \arg \sup\limits_{|\omega|\leqslant\omega_0} |\overline{e}_i(j\omega)|^2$; $i=1,2,\ldots,r$.

Odpowiadająca mu UMI jest dana wzorem:

$$M(\hat{S}_u,\xi_0) = \frac{1}{r}\,\mathrm{diag}\,[\,\varphi_i^2(\varkappa_1)|\overline{e}_i(j\omega_i)|^2;\ i=1,2,\ldots,r\,]. \qquad (3.3.28)$$

Ponieważ dla wzoru (3.3.26) macierz $H(j\omega)$, określona wzorem (2.3.13), ma postać:

$$H(j\omega) = \mathrm{diag}\,[\,\varphi_i^2(\varkappa_1)|\overline{e}_i(j\omega)|^2,\ i=1,2,\ldots,r\,], \qquad (3.3.29)$$

więc warunek optymalności (2.3.16) przyjmuje postać:

$$r\cdot\sup_{|\omega|\leqslant\omega_0}\ \max_{1\leqslant i\leqslant r}\ [|\overline{e}_i(j\omega)|^2/|\overline{e}_i(j\hat{\omega}_i)|^2] = r. \qquad (3.3.30)$$

Wobec odpowiedniego wyboru $\hat{\omega}_i$ jest on oczywiście spełniony.

Zakładając, że $\hat{\omega}_i \neq \hat{\omega}_l$; $i,l = 1,2,\ldots,r$, sygnał sterujący realizujący optymalną gęstość (3.3.27) ma postać:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\sin(\hat{\omega}_i t)\cdot\beta\ , \qquad (3.3.31)$$

gdzie β jest czynnikiem normującym.

Zauważmy, że badana w tym przykładzie klasa obiektów jest podklasą klasy $\mathcal{L}$, więc otrzymane sterowanie optymalne nie zależy od nieznanych parametrów i może być stosowane bez informacji apriorycznej o nich.

Podsumowanie

Przytoczone przykłady pokazują, że uzyskane wyniki teoretyczne mogą być stosowane w identyfikacji współczynników zależnych od zmiennych przestrzennych oraz w identyfikacji parametrów r.r.cz. (przykłady 3.1 i 3.2). Pokazano ponadto, że dla szerokiej klasy zagadnień podać można rozwiązanie analityczne (przykład 3.3, w którym nie zakładano konkretnych postaci funkcji $\varphi_i(\cdot)$ i $e_i(\cdot)$, $i=1,2,\ldots,r$ ani kształtu i wymiarowości zbioru Ω_u). Ponadto wnioski 3.1 i 3.2 podają rozwiązanie optymalne w razie identyfikacji jednego parametru.

3.4. Dobór sterowań D-optymalnych w dziedzinie czasowo-przestrzennej

Podstawą wyników rozdz. 2 i p. 3.1-3.3 było sformułowanie zadań doboru sterowań w dziedzinie częstotliwościowo-przestrzennej. W podrozdziale tym sformułowane zostanie zadanie D_ξ-optymalnego doboru sterowania w dziedzinie czasowo-przestrzennej. Celem naszym jest raczej pokazanie trudności jakie się tu spotyka niż pełne rozwijanie tego podejścia. Należy zaznaczyć, iż na trudności tego samego rodzaju natknięto się już wcześniej w analogicznych zadaniach dla dynamicznych obiektów o parametrach skupionych (por. [65], [27], [37]) i dotychczas nie zostały one pokonane. To tłumaczy także proporcje między obu podejściami w niniejszej pracy. Nie oznacza to jednak deprecjacji badań w dziedzinie czasowo-przestrzennej, a jedynie potrzebę poszukiwania innych ich sformułowań. Jedna z takich możliwości zaproponowana zostanie w rozdz. 4.

Sformułowanie zadania

Rozważmy obiekt opisany równaniem (1.1.20) i przyjmijmy w celu uproszczenia wzorów, zerowe warunki początkowe (nie jest to istotne ograniczenie, gdyż koniec trajektorii w zadaniu sterowania jest swobodny). Zadanie identyfikacji tego obiektu polega na oszacowaniu wektora parametrów a^0 na podstawie pomiarów (1.2.1). W odróżnieniu od wcześniej rozpatrywanych zadań, od czasu obserwacji T nie wymagamy, by był on bardzo długi. W tej sytuacji ocena dokładności identyfikacji na podstawie macierzy informacyjnej Fishera (MIF) jest dokładna dla obiektów z klasy $\mathcal{L}$, natomiast przy nieliniowej parametryzacji daje ona ocenę od dołu macierzy kowariancji ocen. Zadanie D_ξ-optymalnego doboru sterowania $u(.,t)$, $t \in [0,T]$ polegać więc będzie na znalezieniu $\hat{u}(.)$ takiego, że

$$\sup_{u \in U_T} \det M_T(u,\xi) = \det M_T(\hat{u},\xi), \tag{3.4.1}$$

gdzie $M_T(u,\xi)$ dana jest wzorem (1.2.11), natomiast $\xi \in \Xi$ jest ustalonym rozmieszczeniem czujników pomiarowych. We wzorze (3.4.1) U_T jest zbiorem sterowań dopuszczalnych w trakcie eksperymentu. Aby móc porównać wyniki tego podrozdziału z poprzednim, przyjmiemy, że U_T ma postać:

$$U_T = \left\{ u(.) : \int_0^T \int_{\Omega_u} u^2(x,t)dxdt \leqslant 1 \right\}. \tag{3.4.2}$$

Aby uniknąć rozważania trywialnych przypadków, o rozkładzie pomiarów $\xi \in \Xi$ zakładamy, że jest on tak dobrany, iż $\det M_T(u,\xi) > 0$ dla pewnego $u \in U_T$. Wówczas także $M_T(\hat{u},\xi)$ jest macierzą nieosobliwą.

Na sterowania dopuszczalne nie nakładamy tutaj ograniczeń szerokości zajmowanego przez nie pasma częstotliwości. Ograniczamy się do poszukiwania sterowania optymalnego w układzie otwartym, tzn. bez sprzężenia zwrotnego. Uzasadnienie tego ograniczenia podano w pracy [27] w odniesieniu do analogicznego problemu dla obiektów o parametrach skupionych. Wykazano tam, że dokładność identyfikacji przy sterowaniu w układzie zamkniętym nie może być większa niż przy sterowaniu w układzie otwartym, przy czym stwierdzenie to odnosi się do zagadnień z ograniczeniami na sterowanie. Analiza dowodu podanego w pracy [27] pozwala stwierdzić, że powyższa własność ma charakter strukturalny, tzn. niezależny od tego, czy obiekt traktuje się jako skupiony czy też rozłożony. Przytoczone tu spostrzeżenia wpłynęły też na rozpatrywanie w rozdz. 2 i p. 3.1-3.3 sterowań w układzie otwartym.

<u>Warunki konieczne D_ξ-optymalności sterowania</u>

Przy poczynionych założeniach zagadnienie istnienia rozwiązania optymalnego problemu (3.4.1) jest stosunkowo proste. Założenie Z_6 pozwala stwierdzić, że operatory całkowe (1.1.21), traktowane jako operatory w $L^2(D)$, $D \triangleq \Omega_u \times (0,T)$, są pełnociągłe (por. np. [62]). Oznacza to, że ograniczony zbiór U_T odwzorowywany jest przez nie w zbiory zwarte. Te z kolei przekształcane są, zgodnie ze wzorem (1.2.11), za pomocą ciągłych operatorów w zbiór $\mathcal{M}_\xi^T \triangleq \{(M: M=M_T(u,\xi), u \in U_T)\}$. Zbiór ten jest również zwarty, gdyż złożenie operatora ciągłego i pełnociągłego daje operator pełnociągły (por. np. [62]). Zatem problem (3.4.1) jest poszukiwaniem ekstremum funkcji ciągłej (wyznacznika) na zwartym zbiorze $\mathcal{M}_\xi^T$ w przestrzeni skończenie wymiarowej; zadanie to ma rozwiązanie.

Wobec własności wyznacznika łatwo zauważyć, że rozwiązanie optymalne w (3.4.1) leży na brzegu zbioru U_T, tzn. w zbiorze

$$U_T^o = \left\{ u(.) : \int_0^T \int_{\Omega_u} u^2(x,t)dxdt = 1 \right\}. \tag{3.4.3}$$

Aby je scharakteryzować, utwórzmy funkcjonał Lagrange'a.

$$\Lambda(u,\gamma) = \ln \det M_T(u,\xi) + \gamma \cdot \left[\int_0^T \int_{\Omega_u} u^2(x,t)dxdt - 1 \right], \tag{3.4.4}$$

gdzie $\gamma \in R$ jest mnożnikiem Lagrange'a.

Jak wiadomo (por. [010]), jeżeli $\hat{u} \in U_T^o$ jest rozwiązaniem optymalnym, to istnieje takie $\hat{\gamma}$, że pierwsza wariacja $\Lambda(u,\hat{\gamma})$ względem u w punkcie $\hat{u}$ jest równa zeru. Pomijając żmudne lecz standardowe obliczenia dostajemy stąd, że warunkiem koniecznym optymalności funkcji $\hat{u}(.)$ jest, by spełniała ona równanie całkowe:

$$\hat{\gamma}\, u(x,t) = \int_0^T \int_{\Omega_u} \hat{P}(x,t,y,\nu)u(y,\nu)dy,d\nu, \qquad (3.4.5)$$

gdzie

$$\hat{P}(x,\tau,y,\nu) \triangleq \int_0^T \int_{\Omega_u} k^{\nu}(\varkappa,x,t-\tau;a^0)\hat{M}_T^{-1}k(\varkappa,y,t-\nu)\xi(\varkappa)d\varkappa dt, \quad (3.4.6)$$

natomiast $\hat{M}_T \triangleq M_T(\hat{u},\xi)$.

Oznacza to, że rozwiązanie optymalne $\hat{u}$ jest funkcją własną równania (3.4.5), odpowiadającą wartości własnej $\hat{\gamma}$. Zauważmy, że jądro (3.4.6) jest jądrem symetrycznym i dodatnio określonym. Wynika stąd (por. [75]), że równanie ma w ogólnym przypadku przeliczalnie wiele ortogonalnych funkcji własnych. Jednocześnie nie wiadomo, która z nich odpowiada wartości własnej $\hat{\gamma}$. Świadczy to o słabości warunku koniecznego uzyskanego metodą klasycznego rachunku wariacyjnego. Istotnie mocniejszy jest następujący warunek optymalności.

TWIERDZENIE 3.4.1. Jeżeli $\hat{u}$ jest rozwiązaniem problemu (3.4.1), to funkcja ta jest funkcją własną równania całkowego (3.4.5), odpowiadającą maksymalnej wartości własnej tego równania $\hat{\gamma} = r$ (to jest, liczbie estymowanych parametrów).

Dowód tego twierdzenia zamieszczono w Dodatku 3. Zaletą tego warunku koniecznego optymalności wynika stąd, że wskazuje on jednoznacznie $\hat{u}$ jako funkcję własną odpowiadającą maksymalnej wartości własnej. Co więcej wiadomo, że krotność każdej z wartości własnych (3.4.5) jest skończona, gdyż (wobec Z_6) operator całkowy w $L^2(D)$ z jądrem $\hat{P}$ jest pełnociągły (por. [62]).

Mimo zalet tego warunku optymalności nie udaje się ustalić, czy jest on warunkiem dostatecznym optymalności. Trudność w badaniach jest związana ze skomplikowaną strukturą zbioru $\mathcal{M}_\xi^T$. Twierdzenie 3.4.1 pozwala jednak skonstruować algorytm numeryczny zbieżny do jednej z funkcji własnych (3.4.5), odpowiadającej $\hat{\gamma} = r$. Nie podajemy go, gdyż byłby on podobny do algorytmu 2.1, lecz znacznie trudniejszy w implementacji, gdyż równanie (3.4.5) nie jest na ogół równaniem ze zdegenerowanym jądrem. Uniemożliwia to znalezienie skończenie wymiarowej parametryzacji sterowania optymalnego, a co za tym idzie - algorytm taki operować musi w nieskończenie wymiarowej przestrzeni funkcyjnej. Co więcej, na każdym jego kroku trzeba byłoby znajdować maksymalną wartość własną równania (3.4.5). Powyższe trudności ominąć można przez przybliżenia jąder typu (3.4.6) jądrami zdegenerowanymi, a wtedy przebieg algorytmu byłby podobny do algorytmu 2.1.

Podsumowanie

W podrozdziale 3.4 sformułowano zadanie D_ξ-optymalnego doboru sterowania w zadaniu identyfikacji z ograniczonym horyzontem obserwacji (T ograniczone). Uzyskano warunek konieczny optymalności sterowania, który pozwala numerycznie znajdować skończony zbiór sterowań, zawierający sterowanie optymalne.

Porównując przedstawione w tym podrozdziale podejście do problemu w dziedzinie czasowo-przestrzennej z podejściem częstotliwościowo-przestrzennym zaproponowanym we wcześniejszych podrozdziałach stwierdzić należy, że jest ono znacznie mniej efektywne. Dlatego też powinno ono być stosowane tylko wtedy, gdy czas obserwacji T jest bardzo krótki (porównywalny ze stałymi czasowymi obiektu) i nie może być wydłużony. Jednocześnie spodziewać się należy, że numeryczne znajdowanie sterowań optymalnych w dziedzinie czasowo-przestrzennej wymagać będzie bardzo dużych nakładów obliczeniowych, porównywalnych z nakładem obliczeniowym potrzebnym do uzyskania sterowań optymalnych systemami o parametrach rozłożonych z klasycznymi kryteriami jakości, z uwzględnieniem wzrostu liczby równań obiektu o równania wrażliwości. Ponoszenie tak dużych kosztów na przygotowanie oprogramowania oraz na wykonanie obliczeń może być uzasadnione tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z bardzo kosztownymi eksperymentami. W przeciwnym razie bardziej opłacalne może okazać się poniesienie kosztów przedłużenia eksperymentu i zastosowanie podejścia opisanego we wcześniejszych podrozdziałach tej pracy. Z tych też względów zrezygnowano z zamieszczania przykładu ilustracyjnego, gdyż musiałby on - z konieczności - mieć charakter szkolny. Warto tylko zwrócić uwagę, że sterowania optymalne w dziedzinie czasowo-przestrzennej często mają postać sygnałów typu wykładniczego. W pracy autora [88] zaproponowano podejście w dziedzinie częstotliwości, dopuszczające stosowanie sygnałów wielomianowych w trakcie identyfikacji. Praca ta dotyczy identyfikacji obiektów o parametrach skupionych i celowe wydaje się podjęcie próby uogólnienia zawartych w niej wyników na sygnały typu wykładniczego oraz na obiekty o parametrach rozłożonych.

Uwagi o możliwościach uogólnień rezultatów rozdz. 3

Podrozdział ten kończy przegląd głównych problemów optymalnego (z punktu widzenia jakości identyfikacji) doboru sterowań na podstawie funkcjonałów macierzy informacyjnej Fishera. Wszystkie te problemy mieszczą się w jednolitym formalizmie używanym w rozdz. 2 i 3. Warto więc w tym miejscu zwrócić uwagę na kilka, prawie oczywistych, możliwości zastosowania całości wyników rozdz. 2 i 3 w sytuacjach innych niż opisane dotychczas.

1. O zbiorze Ω_u zakładaliśmy dotychczas, że jego wymiar jest równy liczbie zmiennych przestrzennych. Jeżeli ograniczenia praktyczne pozwalają na realizację sterowań tylko w zbiorze punktów przestrzennych o mniejszym wymiarze (np. tylko na brzegu zbioru Ω, lub tylko na pewnych krzywych), to wszystkie dotychczasowe wyniki mogą być zastosowane - zmienić jedynie należy interpretację całek we wzorach (1.1.22) i (1.1.23) oraz zastąpić występujące w nich funkcje g(.) oraz k(.) analogicznymi funkcjami odpowiedzi obiektu na wymuszenia punktowe, oddziałujące w zbiorze o zmniejszonym wymiarze.

Zmiany wymaga wówczas interpretacja zmiennych przestrzennych w funkcjach $S_u(x,y,j\omega)$ i związany z tym problem realizacji tej gęstości za pomocą odpowiedniego sterowania.

2. Prezentując dotychczasowe wyniki zakładaliśmy, że stan obiektu w punkcie $\varkappa \in \Omega_p$ i chwili t jest wielkością skalarną. W celu zastosowania wyników rozdz. 2 i 3 wtedy, gdy stan obiektu jest wektorem d-wymiarowym, wystarczy rozszerzyć wektor $\varkappa$ o jeszcze jedną składową m, oznaczającą numer mierzonej zmiennej stanu $m = 1,2, \ldots ,d$. Zbiór Ω_p zamienić wówczas należy zbiorem $\Omega_p \times \{1,2, \ldots ,d\}$ we wszystkich wzorach. Jasne jest, że wtedy jest wymagana znajomość (w formie analitycznej lub algorytmu numerycznego) d funkcji odpowiedzi impulsowych obiektu z tym, że są traktowane one jako jedna funkcja z rozszerzoną o jeden liczbą argumentów.

DODATEK 3A

<u>Dowód Twierdzenia 3.4.1</u>

Sterowanie optymalne $\hat{u}$ jest, jak to pokazano, jedną z funkcji własnych (3.4.5). Niech $w \in U_T^0$ będzie również funkcją własną tego równania, odpowiadającą innej niż $\hat{\gamma}$ wartości własnej. Z teorii równań całkowych typu (3.4.5) wiadomo, że wówczas $\langle \hat{u},w \rangle = 0$, gdzie $\langle .,. \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w $L^2(D)$. Wynika stąd, że dla $\alpha \in [0,1]$

$$u_\alpha \triangleq \left[\sqrt{(1-\alpha)}\hat{u} + \sqrt{\alpha} \cdot w \right] \in U_T^0.$$

Optymalność $\hat{u}$ pozwala stwierdzić, że

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \det M_T(u_\alpha, \xi)\Big|_{\alpha=0} \leqslant 0, \tag{3.A.1}$$

co, po zróżniczkowaniu i skorzystaniu z własności $\langle \hat{u},w \rangle = 0$, daje nierówność

$$\gamma_w \leqslant r, \tag{3.A.2}$$

gdzie γ_w jest wartością własną równania (3.4.5), odpowiadającą funkcji własnej w. Ponieważ w była wybrana dowolnie wśród funkcji własnych (3.4.5), więc (3.A.2) pokazuje, że wszystkie wartości własne (3.4.5) nie przekraczają r. W celu zakończenia dowodu wystarczy teraz pokazać, że $\hat{\gamma} = r$, a odpowiadającą jej funkcją własną jest $\hat{u}$. Wynika to z następującego ciągu równości:

$$r = \mathrm{tr}\left[M_T^{-1}(\hat{u},\xi)M_T(\hat{u},\xi)\right] =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_u} \int_0^T \int_{\Omega_u} \hat{P}(x,\tau,y,\nu)\hat{u}(x,\tau)\hat{u}(y,\nu)dxd\tau dyd\nu = \hat{\gamma}. \qquad (3.A.3)$$

4. ADAPTACYJNY DOBÓR CIĄGU STEROWAŃ W IDENTYFIKACJI STOCHASTYCZNYCH OBIEKTÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Rozdział ten różni się pod następującymi względami od dwóch poprzednich:

1. Identyfikowany obiekt jest pobudzany na wejściu szumem o charakterze losowym i w tym sensie jest on obiektem stochastycznym (w rozdz. 2 i 3 występowały tylko zakłócenia pomiarowe).

2. Dopuszcza się sterowania o charakterze losowym, co przy przyjętych ograniczeniach ma wpływ na jakość identyfikacji (w poprzednich rozdziałach równie dobrą jakość identyfikacji można było osiągnąć za pomocą odpowiednio dobranych sterowań zdeterminowanych).

3. W związku z p. 2 dopuszcza się generowanie sterowania w układzie ze sprzężeniem zwrotnym (niecelowość takiego podejścia w poprzednio rozpatrywanych zadaniach wyjaśniono w p. 3.4).

4. Obiekt jest opisany równaniem "hybrydowym" z czasem dyskretnym i zmiennymi przestrzennymi zmieniającymi się w pewnym obszarze (poprzednio upływ czasu był modelowany zmienną ciągłą, chociaż nie było to istotnym ograniczeniem).

5. Inna jest zasada tworzenia wskaźnika jakości identyfikacji, który służy potem do doboru sterowania.

6. Ograniczenie w zadaniu doboru sterowania dotyczy średniej mocy stanu obiektu, a nie energii czy mocy samego sterowania.

Powyższy zestaw różnic raz jeszcze uwidacznia różnorodność zadań, jakie mogą się pojawiać w różnych sytuacjach.

Celowość stosowania podejścia adaptacyjnego do doboru sterowań uzasadniano w rozdz. 1. Przypomnijmy tylko, że potrzeba taka wynika z zależności dokładności identyfikacji od wartości identyfikowanych

parametrów. Co, przy braku informacji apriorycznej o parametrach prowadzi do adaptacyjnego schematu doboru ciągu sterowań, postępującego za wzrostem informacji o nieznanych parametrach. Koniecznym uzupełnieniem tego schematu jest rekurencyjny algorytm identyfikacji, który zostanie w skrócie opisany.

Podkreślić należy, że dobór ciągu sterowań odbywa się tutaj w dziedzinie czasowo-przestrzennej. Jednakże proponowane podejście jest inne niż w p. 3.4, które było dostosowane do ogólnego podejścia naszkicowanego w rozdz. 1.

Z konieczności zostaną dokonane pewne zmiany w oznaczeniach, a pewne symbole wystąpią ponownie w nowym, ściśle określonym znaczeniu.

4.1. Opis obiektu i ocena dokładności jego identyfikacji

W podrozdziale tym zostanie podany opis identyfikowanego obiektu i warunków pomiaru jego stanu. Zaproponowana zostanie rekurencyjna, stochastyczna wersja algorytmu znanej metody funkcji modulujących (por. pracę [123]). Podajemy ją jako element procedury adaptacji, pomimo że rozprawa ta nie dotyczy bezpośrednio metod identyfikacji. Następnie poddana zostanie analizie dokładność identyfikacji w zależności od charakterystyk probabilistycznych użytego sterowania, co stanowić będzie podstawę do sformułowania zadania w następnym podrozdziale.

Opis obiektu identyfikacji

Rozważmy obiekt opisany następującym równaniem różnicowym:

$$q_{n+1}(x) = A_x(a)q_n(x) + u_n(x) + e_n(x), \quad x \in \Omega , \tag{4.4.1}$$

obowiązującym dla $n = \dots -1,0,1, \dots$. W równaniu tym $q_n(x)$ oznacza stan (skalarny) obiektu w chwili n-tej w punkcie przestrzennym $x \in \Omega \subset R^k$. Analogicznie $u_n(x)$ i $e_n(x)$ oznaczają - odpowiednio - sterowanie i zakłócenie niemierzalne, których własności zostaną później określone. W (4.1.1) $A_x(a)$ oznacza operator różniczkowania względem zmiennych przestrzennych. Zależy on od wektora $a \in R^r$ nieznanych parametrów, które podlegać będą identyfikacji.

Zakładamy, że operator ten ma następujące własności:

A_1) $A_x(a) : V_K \longrightarrow V_K$, gdzie V_K jest skończenie lub nieskończenie wymiarową podprzestrzenią $L^2(\Omega)$ (w przypadku drugim kładziemy $K=\infty$).

A_2) Operator ten ma postać

$$A_x(a) = Q_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i Q_i ,$$

gdzie $Q_i : V_K \longrightarrow V_K$, $i=0,1,2, \ldots ,r$ są znanymi operatorami różniczkowania względem zmiennych przestrzennych.

A_3) Funkcje własne $v_k \in V_K$, $k=1,2, \ldots ,K$ operatora $A_x(a)$ są ortonormalne w $L^2(\Omega)$ i rozpinają V_K, jeśli K jest skończone, lub tworzą układ zupełny w $L^2(\Omega)$, jeśli $K = \infty$.

A_4) Wartości własne λ_k operatora $A_x(a)$, $A_x(a)v_k = \lambda_k v_k$ są rzeczywiste i $|\lambda_k| \leqslant 1$, $k = 1,2, \ldots ,K$.

Zarówno v_k, jak i λ_k mogą zależeć od a, lecz nie będzie to uwidocznione w notacji. Przykład operatora spełniającego warunki A_1-A_4 podany zostanie w dalszej części rozdziału.

Opis obiektu typu (4.1.1) jest używany w pracach na temat sterowania optymalnego (por. [130]).

O zakłóceniach $e_n(.)$ zakładamy, że $e_n(.) \in V_K$, $n = \ldots -1,0,1, \ldots$ oraz, że są one elementami losowymi (definicję elementu losowego można znaleźć np. w pracy [109]) o wartości średniej zero i jednakowych rozkładach (nie zakładamy, że są one gaussowskie).

Ponadto zakładamy, że

I_1) Dla każdego $f \in V_K$ zmienne losowe $\langle f,e_n(.)\rangle$, $n = \ldots -1,0,1, \ldots$ są wzajemnie niezależne.

I_2) Dla każdego ustalonego $n = \ldots, -1,0,1, \ldots$ i dowolnych $f_1,f_2, \ldots \in V_K$ zmienne losowe $\langle f_1,e_n(.)\rangle, \langle f_2,e_n(.)\rangle, \ldots$ są wzajemnie niezależne.

I_3) Dla $n = \ldots -1,0,1, \ldots$ $E\left[\langle e_n(.),v_k\rangle\right]^2 = \sigma_k^2 < \infty$, $k=1,2, \ldots ,K$, gdzie E oznacza wartość oczekiwaną.

Własności te pozwalają interpretować $e_n(.)$ jako zakłócenia będące szumem białym w czasie i przestrzeni. We wzorach występujących w I_1-I_3 $\langle .,. \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w $L^2(\Omega)$.

O ciągu sterowań $u_n(.) \in V_K$, $n = \ldots -1,0,1, \ldots$ również zakładamy, że jest on ciągiem elementów losowych o wartościach oczekiwanych zero i jednakowych rozkładach. Przyjmujemy, że eksperymentator może dobierać statystyczne własności tego ciągu, a w szczególności wybierać może funkcję $R_u(x,y,n) \triangleq E\left[u_n(x)u_{n+m}(y)\right]$. Dopuszcza się przy tym możliwość generowania u_n w układzie ze sprzężeniem zwrotnym z tym, że $u_n(.)$ może zależeć tylko od stanów $q_{n-1}(.), q_{n-2}(.), \ldots$. Jednocześnie zakłada się, że elementy losowe $u_n(.)$ i $e_n(.)$ (o tym samym numerze) są niezależne.

<u>Wielkości mierzone</u>

W odróżnieniu od rozdz. 1 przyjmujemy, że są mierzone pewne funkcjonały stanu obiektu. Dokładniej zestaw mierzonych wielkości jest następujący:

$$y_n = \langle q_n(\cdot),\varphi\rangle, \tag{4.1.2}$$

$$f_n^i = \langle q_n(\cdot),Q_i^* \varphi\rangle \quad i=0,1, \ldots ,r \tag{4.1.3}$$

$$\tilde{u}_n = \langle u_n(\cdot),\varphi\rangle, \tag{4.1.4}$$

przy czym wartości te są znane dla $n = 0,1, \ldots ,N-1$.

W powyższych wzorach $\varphi \in V_K$ jest znaną funkcją, która może być wybierana przez eksperymentatora lub narzucona przez warunki pomiaru. W (4.1.3) Q_i^* oznacza operator sprzężony względem Q_i (por. [62]), określony zależnością:

$$\forall_{f,g \in V_K} \langle Q_i f,g\rangle = \langle f,Q_i^* g\rangle . \tag{4.1.5}$$

Przyjęta tutaj postać pomiarów wymaga komentarzy:

1. Założono, że pomiary formalnie są wykonywane bez zakłóceń; nie jest to jednak zbyt istotne ograniczenie, gdyż przez formalne podstawienie ewentualne zakłócenia pomiarowe można włączyć do zakłóceń $\{e_n\}$ (w dalszej części pracy uważać będziemy, że zabieg taki został już dokonany, chociaż w praktyce jego wykonanie może być łatwiejsze z użyciem wzoru (4.1.6)).

2. W pewnych przypadkach pomiar funkcjonałów stanu obiektu (takich jak momenty typu $\int x^m q_n(x)dx$) jest dokonywany wprost; w innych - pomiary postaci (4.1.2)-(4.1.4) traktować należy jako wartości teoretyczne, aproksymowane w praktyce przez wyrażenia typu

$$\sum_{i=1}^{I} W_i q_n(x_i)\varphi(x_i),$$

gdzie x_i, $i = 1,2, \ldots ,I$ oznaczają położenie czujników punktowych, natomiast W_i, $i = 1,2, \ldots ,I$ są wagami formuły kwadraturowej przybliżającej całkę.

<u>Algorytm identyfikacji</u>

Przedstawiany tutaj algorytm jest nową, rekurencyjną wersją metody funkcji modulującej. Opis jej w skrócie podajemy, gdyż służy ona tutaj jako jeden z elementów procedury adaptacyjnej.

Pomnóżmy obie strony (4.1.1) przez $\varphi \in V_K$ i scałkujmy po Ω. Z wzorów (4.1.2)-(4.1.5) otrzymamy

$$y_{n+1} = f_n^T a + f_n^0 + \tilde{u}_n + \tilde{e}_n, \tag{4.1.6}$$

gdzie $f_n^T \triangleq [f_n^1,f_n^2, \ldots ,f_n^r]^T$, $\tilde{e}_n \triangleq \langle e_n(\cdot),\varphi\rangle$;

$n = 0,1, \ldots ,N-1$. Dalej $\tilde{\sigma}^2 \triangleq E(\tilde{e}_n^2)$.

Estymator a_N wektora $a \in R^r$ otrzymamy przez minimalizację

$$J_N(a) = \sum_{n=0}^{N-1} (\tilde{y}_n - f_n^{\nabla} a)^2 \tag{4.1.7}$$

względem a, przy czym $\tilde{y}_n \triangleq y_n - f_n^o - \tilde{u}_n$. Aby zapisać a_N w postaci rekurencyjnej, zdefiniujemy macierz

$$P_N = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f_n f_n^{\nabla} \right]^{-1}, \tag{4.1.8}$$

przy czym określenie to obowiązuje dla $N \geqslant r$ oraz takich, że macierz w nawiasach kwadratowych jest nieosobliwa. Niech dalej $G_{N+1} \triangleq P_N \cdot f_N / /(1-f_N^{\nabla} P_N f_N)$ będzie wektorem wzmocnień. Wówczas dla dostatecznie dużych N,

$$a_{N+1} = a_N + G_N(\tilde{y}_N - f_N^{\nabla} a_N). \tag{4.1.9}$$

Jest to znany zapis rekurencyjny (por. np. [27]) dla wektora minimalizującego wyrażenie typu (4.1.7). Wzór ten należy jeszcze uzupełnić znanym rekurencyjnym wyrażeniem dla P_N (por. [27]).

<u>Ocena dokładności estymacji</u>

Dla dokonania oceny dokładności estymatora a_N potrzebne jest założenie statystycznej regularności badanego procesu. Najprostszym w stosowaniu założeniem tego typu jest następujące

$$\lim_{N \to \infty} [NP_N]^{-1} = E[f_n f_n^{\nabla}] \text{ z prawdopodobieństwem } 1 \tag{4.1.10}$$

Zauważmy, że wobec stacjonarności ciągów $\{e_n\}, \{u_n\}$ oraz obiektu, również ciągi $\{q_n\}$ i $\{f_n\}$ są stacjonarne. Zatem prawa strona (4.1.10) nie zależy od n, a warunkiem dostatecznym na to, by (4.1.10) było spełnione, jest ergodyczność ciągu $\{q_n\}$. Z (4.1.3) otrzymujemy:

$$P \triangleq E[f_n f_n^{\nabla}] = \iint_{\Omega\,\Omega} R_q(x,y)\psi(x)\psi^{\nabla}(y)dxdy, \tag{4.1.11}$$

gdzie $R_q(x,y) \triangleq E[q_n(x)q_n(y)]$, $\psi(x) = [\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_r(x)]$, natomiast $\psi_i(.) = Q_i^{*} \varphi(.)$. Załóżmy, że R_q jest taka, że

$$\forall_{\substack{f \in V_K \\ f \neq 0}} \iint_{\Omega\,\Omega} R_q(x)f(x)f(y)dxdy > 0. \tag{4.1.12}$$

Wówczas, jeżeli $\Psi_i(.)$ $i=1,2, \ldots, r$ są liniowo niezależne, to macierz P jest nieosobliwa (por. (4.1.11)).

TWIERDZENIE 4.1.1. Przy powyższych założeniach oraz $N \to \infty$, ciąg $\sqrt{N}(a_N - a)$ jest zbieżny według rozkładu od wektora losowego o rozkładzie normalnym o wektorze średnich równym zeru i macierzy kowariancji $\tilde{\sigma}^2 \cdot P^{-1}$.

Dowód zamieszczono w Dodatku 4A.

Podsumowanie

W podrozdziale 4.1 sformułowano zadanie identyfikacji stochastycznego obiektu o parametrach rozłożonych. Zaproponowano rekurencyjną wersję metody funkcji modulujących otrzymywania oszacowań nieznanych parametrów. Zbadano asymptotyczną dokładność estymacji, a otrzymany wynik stanowić będzie podstawę sformułowania zadania doboru funkcji korelacji stanu obiektu tak, by dokładność tę maksymalizować.

4.2. Optymalna funkcja korelacji stanu i jej adaptacyjna realizacja

W poprzednim podrozdziale pokazano, że macierz kowariancji asymptotycznego rozkładu estymatora a_N zależy od funkcji korelacji stanu $R_q(x,y)$. Celowe jest zatem rozważenie optymalnego jej doboru. Jedno z zadań tego typu rozwiązane zostanie w tym podrozdziale. Następnie przedyskutowany zostanie problem realizacji optymalnej funkcji korelacji stanu za pomocą odpowiednio dobranego sterowania. Jak się okaże, sterowanie takie uzyskuje się przez odpowiednie przetworzenie ciągu losowego generowanego poza obiektem z tym, że sposób jego przetworzenia zależy od bieżących wartości oszacowań parametrów a te zależą od pomiarów we wcześniejszych krokach algorytmu. Jest to zatem układ ze sprzężeniem zwrotnym spełniającym funkcję adaptacyjną.

Ograniczenia

Ze wzoru (4.1.11) i twierdzenia 4.1.1 wynika, że ze względu na dokładność estymacji, spośród dwóch funkcji $R_q(x,y)$ i $\alpha \cdot R_q(x,y)$, $\alpha > 1$, korzystniejsza jest druga. Jednakże względy praktyczne zmuszają nas do nałożenia na nią pewnego ograniczenia. Przyjmiemy, że ma ono postać:

$$\int_\Omega R_q(x,x)dx \leqslant \varepsilon_0, \tag{4.2.1}$$

gdzie $\varepsilon_0 > 0$ jest zadaną stałą. Fizyczny sens tego ograniczenia wynika stąd, że dla stacjonarnego i ergodycznego ciągu $\{q_n\}$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzi:

$$\int_\Omega R_q(x,x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_\Omega q^2(x)dx . \tag{4.2.2}$$

Zatem (4.2.1) można interpretować jako ograniczenie na uśrednioną po czasie i przestrzeni energię stanu obiektu.

Uwaga 4.2.1

Zwracamy uwagę, że stałej $\varepsilon_0 > 0$ nie można dobierać całkiem dowolnie, gdyż uśredniona energia ciągu $\{q_n\}$ zależy nie tylko od $\{u_n\}$, ale także od energii ciągu zakłóceń $\{e_n\}$. Dlatego wartość ε_0 powinna być nie mniejsza od pewnej stałej. Do zagadnienia tego wrócimy w dalszej części rozdziału.

W sformułowanym niżej zadaniu funkcja R_q będzie zmienną decyzyjną. Należy więc na nią nałożyć ograniczenia, ponieważ jest to funkcja korelacji wzajemnej rodziny zmiennych losowych $q_n(x)$ i $q_n(y)$, $x,y \in \Omega$. Ograniczenia te to

R_1) $\forall_{x,y} \quad R_q(x,y) = R_q(y,x)$,

R_2) Funkcja R_q jest dodatnio określona, tzn. zachodzi dla niej (4.1.12).

Klasę funkcji R_q spełniających (4.2.1) oraz R_1, R_2 oznaczać będziemy przez $\mathcal{R}$.

Sformułowanie zadania D-optymalnego doboru funkcji R_q

Twierdzenie 4.1.1 oraz interpretacja kryterium D-optymalności, podana w rozdz. 1 stanowią uzasadnienie następującego sformułowania problemu:

P r o b l e m 4.2.1

Przy ustalonej funkcji $\varphi \in V_K$ znaleźć taką $\hat{R}_q \in \mathcal{R}$, dla której

$$\sup_{R_q \in \mathcal{R}} \det P(R_q) = \det P(\hat{R}_q), \tag{4.2.3}$$

przy czym zależność macierzy P od funkcji R_q jest określona wyrażeniem (4.1.11).

Zagadnieniem optymalnego doboru funkcji $\varphi \in V_K$ nie będziemy się w tej pracy zajmować (pewne wskazówki dają wyniki badań symulacyjnych zamieszczone w p. 4.3. Założymy jedynie, że φ jest tak dobrana, że dla pewnego $R_q \in \mathcal{R}$ macierz $P(R_q)$ jest nieosobliwa.

Warunek konieczny i dostateczny optymalności R_q

Przed przystąpieniem do sformułowania twierdzenia pozwalającego rozstrzygać o D-optymalności R_q potrzebny będzie następujący lemat:

L e m a t 4.2.1. Niech $R_q \in \mathcal{R}$ będzie taka, że macierz $P(R_q)$ jest nieosobliwa. Niech dalej $H(x,y;R_q) \triangleq \psi'(x)P^{-1}(R_q)\psi(y)$ przy $\psi(x)$ określonym tak jak w p. 4.1. Wówczas równanie całkowe

$$\lambda \cdot h(x) = \int_\Omega H(x,y:R_q)h(y)dy, \tag{4.2.4}$$

posiada skończoną liczbę rzeczywistych wartości własnych, a dla największej z nich, oznaczanej dalej przez $\lambda_{max}(H)$, zachodzi

$$\varepsilon_0 \cdot \lambda_{max}(H) \geqslant r. \tag{4.2.5}$$

gdzie r jest liczbą estymowanych parametrów.

Dowód podajemy w dodatku 4B.

TWIERDZENIE 4.2.1. Zdefiniujmy $\hat{H}(x,y) = H(x,y;\hat{R}_q)$. Wówczas, $\hat{R}_q \in \mathcal{R}$ jest rozwiązaniem (4.2.3) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varepsilon_0 \lambda_{max}(\hat{H}) = r. \tag{4.2.6}$$

W dowodzie korzysta się z lematu 4.2.1 i jest on podobny do dowodu twierdzenia 2.2.1, dlatego zostanie pominięty.

<u>Jawne wyrażenie dla D-optymalnej funkcji R_q</u>

Z twierdzenia 4.2.1 otrzymujemy

<u>Wniosek 4.2.1</u>. Jeżeli funkcje $\Psi_i(.)$ $i=1,2,\ldots,r$ są liniowo niezależne, to rozwiązaniem (4.2.3) jest

$$\hat{R}_q(x,y) = \Psi^T(x)D^{-1}\Psi(y), \tag{4.2.7}$$

gdzie

$$D \triangleq r\int_{\Omega} \Psi(x)\Psi^T(x)dx/\varepsilon_0, \tag{4.2.8}$$

co więcej

$$P(\hat{R}_q) = D\ \varepsilon_0^2/r^2.$$

Dowód polega na bezpośrednim sprawdzeniu warunku optymalności (4.2.6) i będzie pominięty.

Rozważmy teraz problem możliwości realizacji $\hat{R}_q$ za pomocą odpowiednio dobranego ciągu sterowań $\{u_n\}$. W tym celu potrzebny będzie związek między $R_q(x,y)$ a $R_u(x,y) \triangleq E(u_n(x)\cdot u_n(y))$, $x,y \in \Omega$. Po pomnożeniu stron (4.1.1) przez $q_{n+1}(y)$ i obliczeniu wartości oczekiwanej, po skorzystaniu z założeń o ciągach losowych $\{e_n\}$ i $\{u_n\}$ z p. 4.1, otrzymamy

$$R_q(x,y) = A_x(a)A_y(a)R_q(x,y) + R_u(x,y) + R_e(x,y); x,y \in \Omega, \tag{4.2.9}$$

gdzie $R_e(x,y) \triangleq E[e_n(x)e_n(y)]$. Po wstawieniu (4.2.7) do (4.2.9) otrzymamy formalne równanie, które powinna spełniać poszukiwana funkcja R_u, oznaczana dalej przez $\hat{R}_u$. Równanie to ma postać:

$$\hat{R}_u(x,y) = \bar{v}^T(x)T(a)\bar{v}(y), \tag{4.2.10}$$

gdzie $\bar{v}(x) \triangleq [v_1(x),v_2(x),\ldots,v_K(x)]^T$, natomiast

$$T(a) \triangleq C^T D^{-1} C - \Lambda C^T D^{-1} C \Lambda - \Sigma. \tag{4.2.11}$$

We wzorze tym $\Lambda \triangleq \mathrm{diag}[\lambda_k, k = 1,2, \ldots ,K]$, $\Sigma \triangleq \mathrm{diag}[\sigma_k^2, k = 1,2, \ldots ,K]$, natomiast macierz C o wymiarach $r \times K$ ma elementy zdefiniowane wzorami $c_{ik} = \langle \phi_i, v_k \rangle$; $i = 1,2, \ldots ,r$; $k = 1,2, \ldots ,K$. Wzór (4.2.10) nazwaliśmy wzorem formalnym, gdyż wprawdzie określona nim funkcja $\hat{R}_u$ wstawiona do (4.2.9) daje w wyniku $R_q = \hat{R}_q$, jednakże nie mamy gwarancji, że jest ona funkcją autokorelacji pewnego ciągu $\{u_n\}$. Aby tak było, macierz T(a) powinna być dodatnio określona. Ponieważ $|\lambda_k| < 1$ $k = 1,2, \ldots ,K$, zapewnić to można przez wybór dostatecznie dużej wartości ε_0 występującej w ograniczeniu (4.2.1) i (4.2.8).

Dalej uważać będziemy, że wybór taki jest możliwy, gdyż w przeciwnym razie zadanie nasze nie jest poprawnie postawione (w tym sensie, że dopuszczalne energie stanu obiektu byłyby mniejsze niż energia stanu wywoływana przez oddziaływanie zakłóceń).

Wzór (4.2.10) wymaga jeszcze dwóch komentarzy. Gdy $K = \infty$, wszystkie macierze i wektory stają się nieskończenie wymiarowe i wówczas wzór ten należy interpretować jako formę kwadratową w przestrzeni l^2-ciągów sumowalnych w drugiej potędze. Użyte oznaczenie T(a) podkreśla zależność od wektora nieznanych parametrów a (gdyż zależą od niego wartości własne λ_k).

<u>Realizacja sterowania o funkcji korelacji $\hat{R}_u$</u>

Macierz T(a), jako symetryczna i dodatnio określona, może być przedstawiona w postaci (por. [55]) $T(a) = W(a)W^T(a)$, gdzie W(a) jest pewną $K \times K$ macierzą. Nasuwa się zatem następujący sposób realizacji ciągu sterowań o funkcji korelacji przestrzennej $\hat{R}_u(x,y)$:

$$\hat{u}_n(x) = \bar{v}^T(x)W(a)\nu_n, \quad n = \ldots -1,0,1, \ldots \tag{4.2.12}$$

gdzie ν_n jest ciągiem stochastycznie niezależnych wektorów losowych K-wymiarowych o jednakowych rozkładach, wartościach oczekiwanych zero i nieskorelowanych składowych o jednostkowych wariancjach. Sterowanie realizujące optymalną $\hat{R}_q$ jest więc stochastyczne.

Trudność w realizacji tego sterowania polega na nieznajomości wektora a. Zgodnie z metodami opisanymi w p. 1.3 można go zastąpić przez wartość nominalną $\bar{a}$, uzyskując w ten sposób zbliżone do optymalnego sterowanie w układzie otwartym.

Druga możliwość polega na zastosowaniu podejścia adaptacyjnego, które teraz krótko przedstawimy.

W celu uproszczenia przyjmujemy dodatkowe założenie:

A_5) Funkcje własne operatora $A_x(a)$ nie zależą od wektora a, tzn. $\partial V_k(x)/\partial a_i = 0$ $i=1,2, \ldots ,r$, $k = 1,2, \ldots ,K$.

Klasa takich operatorów była używana jako modelowa w kilku pracach autora [85], [90], [97]. Należą do niej operatory postaci A_2 takie, że v_k

jest równocześnie funkcją własną wszystkich Q_i $i = 0,1, \ldots ,r$, tzn.

$$Q_i v_k = \alpha_{ik} v_k;\ i=0,1, \ldots ,r;\ k=1,2, \ldots ,K \tag{4.2.13}$$

dla pewnych liczb α_{ik}, Oznaczmy $\bar{\alpha}_k \triangleq [\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots ,\alpha_{rk}]^{\nabla}$. Zachodzą wtedy równości:

$$\lambda_k = \alpha_{ok} + \bar{\alpha}_k^{\nabla} a,\ k=1,2, \ldots ,K \tag{4.2.14}$$

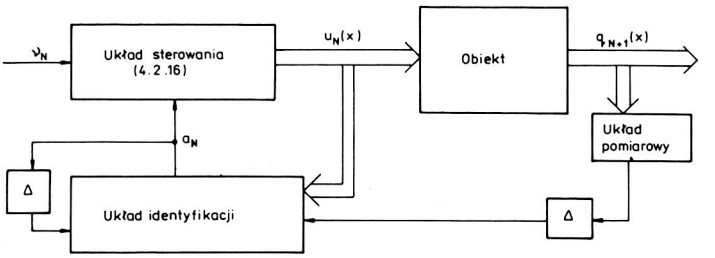
(dowód znaleźć można w pracy [82]).

Przy założeniu A_5 algorytm adaptacyjnego wyboru ciągu sterującego otrzymuje się przez zastąpienie w (4.2.10) i (4.2.12) wektora a przez jego oszacowanie, co daje

$$\hat{R}_u^N(x,y) = \bar{V}^{\nabla}(x) T(a_N) \bar{v}(y) \tag{4.2.15}$$

$$u_N(x) = \bar{v}^{\nabla}(x)\ W(a_N) v_N; \tag{4.2.16}$$

gdzie a_n jest określone wzorem (4.1.9) a ciąg $\{v_n\}$ ma takie same własności jak w (4.2.12). Ze względu na rekurencyjną formę estymatora a_N, wzór (4.2.16) obowiązuje dla $N = r, r+1, \ldots$. Proponowany w (4.2.16) sposób generowania sterowania pokazano na rys. 4.1.



Rys. 4.1. Struktura adaptacyjnego algorytmu generowania ciągu sterującego; Δ - układ opóźniający o jeden takt

Fig. 4.1. Structure of the adaptive algorithm for input signal generation: Δ - one-step delay subsystem

Prawidłowe funkcjonowanie tego układu zależy od zachowania się $\hat{R}_u^N$ w stosunku do $\hat{R}_u$, gdy $N \to \infty$. Aby zachowanie to zbadać, przepiszmy (4.2.10) z użyciem (4.2.11), w postaci

$$\hat{R}_u(x,y) = \bar{v}^{\nabla}(x)[\hat{G} - \Sigma] \cdot \bar{v}(y) - \bar{\lambda}^{\nabla} V(x) \hat{G} V(y) \bar{\lambda} \tag{4.2.17}$$

gdzie $G \triangleq C^{\nabla} D^{-1} C$, $V(x) \triangleq \mathrm{diag}[v_k(x),\ k=1,2, \ldots K]$, $\bar{\lambda} \triangleq [\lambda_1, \lambda_2, \ldots ,\lambda_K]^{\nabla}$. Zauważmy, że wobec (4.2.14) wyrażenie (4.2.17) jest kwadratową funkcją wektora a, co pozwala łatwo obliczyć jej gradient.

Z twierdzenia 4.1.1, wniosku 4.2.1 oraz znanego twierdzenia o asymptotycznym rozkładzie funkcji od estymatora asymptotycznie normalnego (por. [103]) otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 4.2.2. Przy założeniach twierdzenia 4.1.1 i wniosku 4.2.1 zmienne losowe $\sqrt{N}[\hat{R}_u^N(x,y) - \hat{R}_u(x,y)]$, gdy $N \to \infty$, są zbieżne według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym o średniej zero i wariancji

$$\sigma^2(x,y) \triangleq 2\,\frac{r^2\cdot\sigma}{\varepsilon_0^2}\, a^{\nabla}\cdot\Delta\cdot V(x)\hat{G}V(y)\cdot\Delta\cdot D^{-1}\cdot\Delta\cdot V(x)\hat{G}V(y)\cdot\Delta\cdot a,$$

gdzie $\Delta \triangleq [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_K]$.

Inaczej mówiąc, rozkład $\hat{R}_u^N(x,y) - \hat{R}_u(x,y)$ jest asymptotycznie $\mathcal{N}(0, \bar{\sigma}^2(x,y)/N)$. Wniosek zapewnia poprawne funkcjonowanie układu adaptacji, $N \to \infty$. Jego funkcjonowanie, gdy N jest skończone zostanie zbadane symulacyjnie w następnym podrozdziale.

Podsumowanie

W podrozdziale 4.2 sformułowano i w jawnej formie rozwiązano zadanie D-optymalnego doboru funkcji korelacji przestrzennej stanu obiektu. Omówiono także jej realizowalność za pomocą odpowiednio dobranego sterowania. Zaproponowano adaptacyjny algorytm doboru sterowania i pokazano, że funkcja korelacji przestrzennej otrzymanego w ten sposób sterowania jest zbieżna według rozkładu do optymalnej funkcji korelacji.

4.3. Adaptacyjny dobór sterowań w identyfikacji parametrów równania przewodnictwa ciepła - przykład symulacyjny

Wyniki podrozdziału 4.2 mają charakter asymptotyczny. Aby zbadać dokładność identyfikacji uzyskiwaną podczas ich stosowania, gdy liczba obserwacji jest skończona, wykonano dokładne badania symulacyjne. Badania te dają również wskazówki co do doboru funkcji modulującej.

Opis symulowanego obiektu

"Pomiary" do badań symulacyjnych były uzyskiwane w wyniku numerycznego modelowania następującego obiektu:

$$q_{n+1}(x) = q_n(x) + h\cdot a_1\cdot\frac{\partial^2 q_n(x)}{\partial x^2} - h a_2 q_n(x) +$$

$$+ h\cdot u_n(x) + h\, e_n(x);\ x \in \Omega \triangleq (0,1). \qquad (4.3.1)$$

Jest to półdyskretna wersja równania przewodnictwa ciepła o długości kroku czasowego $h > 0$. Warunki brzegowe dla (4.3.1) przyjęto w postaci $q_n(0) = q_n(1) = 0$ dla wszystkich n. Wówczas funkcje własne zagadnienia Sturma-Louville'a mają postać $v_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$; $k = 1,2, \ldots$

W wynikach badań symulacyjnych, które zostaną przytoczone przyjęto V_K jako podprzestrzeń $L^2(\Omega)$ rozpiętą na dwóch funkcjach własnych

(tzn. K = 2) z tym, że dobierano różne zestawy $v_{k_j}(x)$; j = 1,2. Zauważmy, że ze względu na ortogonalność funkcji własnych i wybór $\varphi \in V_K$ nie było potrzeby symulowania pozostałych współczynników rozwinięcia $q_n(x)$ w szereg względem $\{v_k\}$, gdyż zachowanie się tych współczynników i tak nie wpłynęłoby na wynik symulacji. Przy przyjętych założeniach operator $A_x(a)$, określony na V_K, ma postać:

$$A_x(a) = ha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - ha_2 \cdot I, \tag{4.3.2}$$

gdzie I jest operatorem identycznościowym, natomiast a_1 i a_2 współczynnikami podlegającymi identyfikacji. Wartości własne tego operatora, odpowiadające $\{v_k\}$, mają postać:

$$\lambda_k = 1 - a_1 k^2 \pi^2 h - a_2 h; \; k=1,2, \ldots . \tag{4.3.3}$$

Zauważmy, że operator $A_x(a)$ spełnia założenie A_5.

Zakłócenia losowe były generowane według wzoru

$$e_n(x) = e_n^{(1)} v_{k_1}(x) + e_n^{(2)} v_{k_2}(x), \tag{4.3.4}$$

gdzie $\{e_n^1\}, \{e_n^2\}$ są ciągami niezależnymi zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym na [-0.5; 0.5]. "Pomiary" były otrzymywane za pomocą funkcji modulującej

$$\varphi(x) = \beta_{k_1} v_{k_1}(x) + \beta_{k_2} v_{k_2}(x), \tag{4.3.5}$$

gdzie β_{k_1}, β_{k_2} są zmienianymi współczynnikami wagowymi. Występujące w (4.3.4), (4.3.5) i dalej funkcje v_{k_1} i v_{k_2} są tymi funkcjami, które rozpinają V_K w aktualnym eksperymencie symulacyjnym.

<u>Generacja ciągu sterowań</u>

Zgodnie z wynikami p. 4.2 sterowania były generowane według wzoru:

$$u_n(x) = \eta_n^1 v_{k_1}(x) \varepsilon_n^3 + \eta_n^2 v_{k_2}(x) \varepsilon_n^4 , \tag{4.3.6}$$

gdzie ε_n^3, ε_n^4 są ciągami niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym na odcinku od -0.5 do 0.5. Ciągi liczbowe $\{\eta_n^1\}, \{\eta_n^2\}$ wybierano

a) optymalnie, tzn. według (4.2.12) i wtedy wartości η_n^1 i η_n^2 były stałe w czasie,

b) adaptacyjnie, tzn. zgodnie z (4.2.16).

Jak stwierdzono w p. 4.2, dokładna realizacja sterowania optymalnego (4.2.12) nie jest w praktyce możliwa ze względu na nieznajomość a_1, a_2. W badaniach symulacyjnych dokładna realizacja była oczywiście

możliwa i została dokonana po to, by uzyskać punkt odniesienia do badania algorytmu adaptacyjnego i wpływu funkcji φ na dokładność identyfikacji.

Organizacja badań symulacyjnych

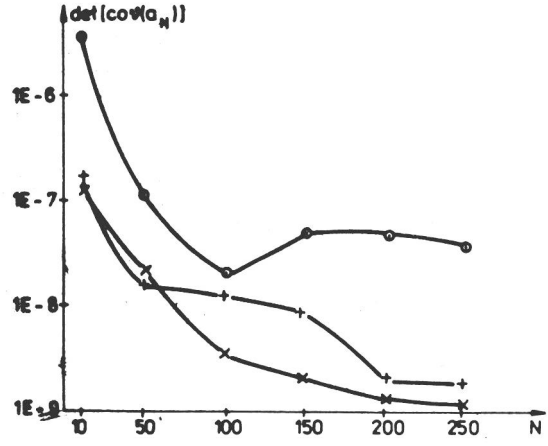
Przy ustalonym algorytmie sterowania (4.2.12) lub (4.2.16) program komputerowy wykonujący badania obliczał kolejne stany obiektu (4.3.1) i pomiary (4.1.2)-(4.1.4) z funkcją φ daną przez (4.3.5). Równolegle obliczane były kolejne oszacowania wektora parametrów a dla N = 2,3, ... ,250. Następnie cały ten proces powtarzano 20-krotnie, za każdym razem dla innej realizacji zakłóceń losowych. Otrzymywano w ten sposób 20 realizacji estymatora a_N dla ustalonego N, przy czym zmienność obserwowanych jego wartości była wynikiem jedynie oddziaływania zakłóceń.

Na podstawie tych 20 realizacji a_N obliczano:

a) empiryczną średnią $\tilde{E}a_N$, będącą oszacowaniem wartości oczekiwanej estymatora,

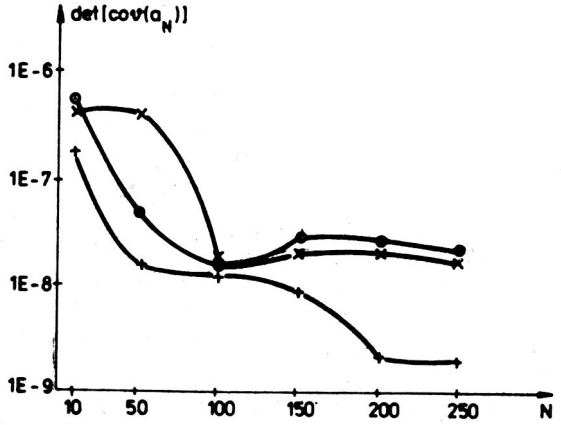
b) empiryczną macierz kowariancji $\widetilde{cov}(a_N)$ i jej wyznacznik $\det \widetilde{cov}(a_N)$.

W ten sposób uzyskiwano każdy z punktów przedstawionych na rys. 4.2-4.7.



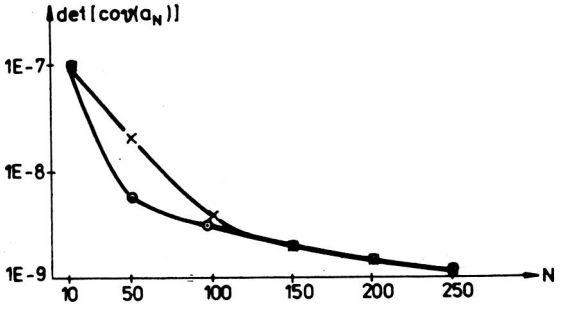
Rys. 4.2. Porównanie dokładności estymacji uzyskanej przy sterowaniu optymalnym (xxx - przebieg 1), adaptacyjnym (ooo - przebieg 2), i testowym (+++ - przebieg 5)

Fig. 4.2. Comparison of the estimation accuracy, obtained by using the optimal control (xxx - run 1), adaptive control (ooo - run 2), and testing input signal (+++ - run 5)



Rys. 4.3. Adaptacyjny dobór sterowania dla różnych wartości wstępnych oszacowań parametrów obiektu (+++ - przebieg 2, xxx - przebieg 3, ooo - przebieg 4)

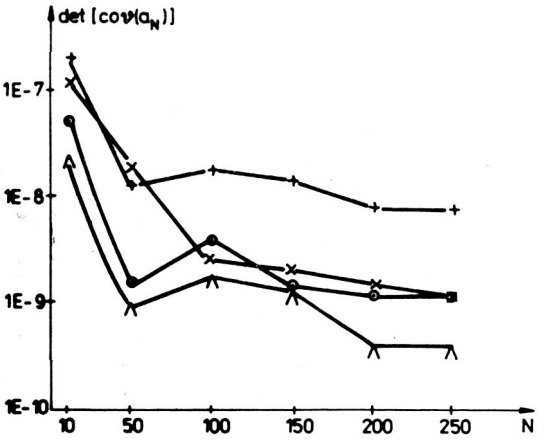
Fig. 4.3. Adaptive choice of input signal for different initial estimates of the system parameters (+++ - run 2, xxx - run 3, ooo - run 4)



Rys. 4.4. Porównanie dokładności estymacji dla różnych wag w funkcji modulującej φ (xxx - przebieg 1, ooo - przebieg 6)

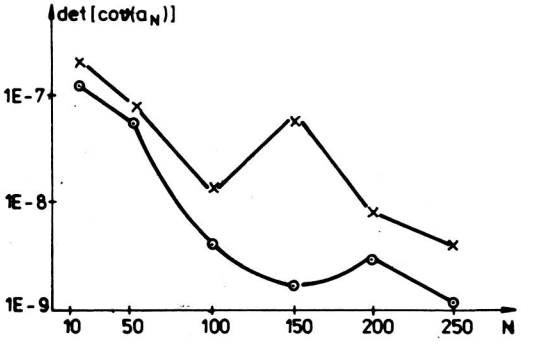
Fig. 4.4. Comparison of the estimation accuracy for different weights in the modulating function φ (xxx - run 1, ooo - run 6)

Wraz ze wzrostem N = 10,50,100, ... ,250 otrzymywano uśrednione przebiegi zachowania się estymatora przy ustalonym algorytmie sterowania i ustalonych wartościach $\beta k_1, \beta k_2$. Następnie był zmieniany algorytm stero-



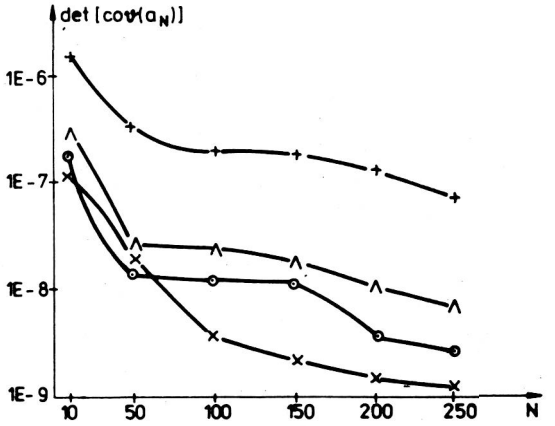
Rys. 4.5. Dokładność estymacji uzyskiwana przez zastosowanie optymalnych sterowań dla kilku różnych zestawów funkcji własnych rozpinających V_2 (ooo - przebieg 12, 111 - przebieg 13, +++ - przebieg 14, xxx - przebieg 1)

Fig. 4.5. Estimation accuracy obtained by applying the optimal control, spanned by different sets of eigenfunctions V_2 (ooo - run 12, 111 - run 13, +++ - run 14, xxx - run 1)



Rys. 4.6. Porównanie dokładności estymacji uzyskanej przy sterowaniu optymalnym (xxx - przebieg 11) i adaptacyjnym (ooo - przebieg 10) rozpiętych na funkcjach własnych V_1 i V_4

Fig. 4.6. Comparison of the estimation accuracy obtained by applying the optimal input signal (xxx - run 11) and the adaptive one (ooo - run 10) spanned by the eigenfunctions V_1 and V_2



Rys. 4.7. Dokładność estymacji przy zastosowaniu sterowania optymalnego i różnych wagach funkcji modulującej φ (ooo - przebieg 9, +++ - przebieg 8, 111 - przebieg 7, xxx - przebieg 1)

Fig. 4.7. Estimation accuracy obtained by using the optimal input signal for different weights in the modulating function φ (ooo - run 9, +++ - run 8, 111 - run 7, xxx - run 1)

wania lub jego wartości startowe i/lub funkcje własne v_{k_1}, v_{k_2} rozpinające V_K. Wartości liczbowe parametrów stosowane w każdym przebiegu przedstawiono w tab. 4.1. Numery przebiegów używane w tej tabeli są zgodne z numerami przebiegów użytymi do opisu rys. 4.2 - 4.7.

W trakcie badań "prawdziwe", nieznane wartości parametrów wynosiły $a_1 = 0.1$, $a_2 = 1$. W przebiegach 1-11 parametr $h = 0.1$, natomiast w przebiegach 12-14 parametr ten był równy 0.05. We wszystkich przypadkach warunki początkowe były zerowe.

Uwaga 4.3.1

Dla porównania przebieg nr 5 w tab. 1 uzyskano za pomocą sterowania nie będącego sterowaniem ani optymalnym, ani adaptacyjnym. Miało ono postać (4.3.6), lecz przyjęto $\varepsilon_n^3 = \varepsilon_n^4$ i wybrano $\eta_n^1 = 1$, $\eta_n^2 = 9.17$; $n=0,1,\ldots$. Te ostatnie wartości mają tę własność, że $(\eta_n^1)^2 + (\eta_n^2)^2 = (\hat{\eta}_n^1)^2 + (\hat{\eta}_n^2)^2$, gdzie $\hat{\eta}$ oznaczają wartości optymalne.

Wnioski

Analiza tab. 1 i rys. 4.2-4.7 sugeruje następujące wnioski:

1. Zastosowanie sterowania opisanego w uwadze 4.3.1 daje istotnie większą uogólnioną wariancję estymatora (det $\widetilde{\mathrm{cov}}(a_N)$) niż sterowanie optymalne i adaptacyjne (rys. 4.2).

Tabela 4.1

Numer przebiegu	Sygnał sterujący	Wagi w (4.3.5) $\beta k_1, \beta k_2$	Numery funkcji v_{k_j} rozpinających V_K	Empiryczne średnie dla N = 100	
				$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$
1	Opt.	1;1	1;2	0.099	1.03
2	Adapt. $a_1^0 = 0.05$ $a_2^0 = 0.5$	1;1	1;2	0.098	1.03
3	Adapt. $a_1^0 = 0.5$ $a_2^0 = 2$	1;1	1;2	0.091	1.07
4	Adapt. $a_1^0 = 0.5$ $a_2^0 = 1.5$	1;1	1;2	0.092	1.07
5	(4.3.6) z $\eta_n^1 = 1$ $\eta_n^2 = 9.17$	1;1	1;2	0.093	1.22
6	Opt.	10;10	1;2	0.098	1.02
7	Opt.	0.55;1.3	1;2	0.096	1.11
8	Opt.	0.22;1.4	1;2	0.089	1.37
9	Opt.	0.7;1.24	1;2	0.097	1.07
10	Opt.	1;1	1;4	0.100	0.97
11	Adapt. $a_1^0 = 0.05$ $a_2^0 = 0.5$	1;1	1;4	0.100	0.95
12	Opt.	1;1	1;4	0.099	1.04
13	Opt.	1;1	1;5	0.099	1.04
14	Opt.	1;1	2;4	0.099	1.13

Skrót opt. oznacza optymalny,
adapt. - adaptacyjny.

2. Przy stosowaniu sterowania adaptacyjnego wpływ startowych wartości parametrów a_1^0 i a_2^0 jest istotny w początkowej fazie procesu adaptacji, a potem maleje wraz z liczbą pomiarów (rys. 4.3).

3. Na rysunku 4.6 porównano uogólnioną wariancję estymatorów uzyskanych podczas sterowania optymalnego i adaptacyjnego w zależności od liczby obserwacji. Ze wzrostem tej liczby dokładność identyfikacji podczas sterowania adaptacyjnego zbliża się do dolnej granicy dokładności wyznaczonej przez przebieg optymalny.

4. Na rysunku 4.5 zilustrowano wpływ postaci zależności sterowania od zmiennej przestrzennej na dokładność identyfikacji (analiza teoretyczna w p. 4.2 nie rozstrzygnęła tego problemu do końca). Okazuje się, że najkorzystniej jest (przy φ o ustalonej postaci (4.3.5)), by V_K było rozpięte na pierwszej funkcji własnej i funkcji o najwyższym realizowalnym technicznie numerze (tutaj $\sqrt{2}\sin(5\pi x)$).

5. Wykresy na rys. 4.4 i 4.7 ilustrują wpływ stałych β_{k_1}, β_{k_2} w (4.3.5) na dokładność identyfikacji. Na podstawie rys. 4.4 sformułować można tezę, że dla dużych N absolutne wartości tych stałych nie wpływają na dokładność. Przy zachowaniu równości $\beta_{k_1}^2 + \beta_{k_2}^2 = \text{const}$ istotny okazuje się natomiast rozdział tych wzmocnień między poszczególne funkcje własne (rys. 4.7).

6. Ostatnie kolumny t. 4.1 pozwalają stwierdzić, że zarówno podczas sterowania optymalnego, jak i adaptacyjnego, obciążenie estymatorów przy N = 100 jest dostatecznie małe, jeżeli tylko wartości stałych β_{k_1}, β_{k_2} są dobrze dobrane (tzn. bez istotnego tłumienia jednej z funkcji własnych).

Podsumowanie

W podrozdziale 4.3 poddano symulacyjnej weryfikacji zaproponowany w p. 4.2 adaptacyjny algorytm doboru sterowań. Badania potwierdziły jego wysoką jakość w porównaniu z teoretycznym punktem odniesienia, jaki daje algorytm optymalny. Co więcej, wysoka jakość algorytmu adaptacyjnego ujawnia się przy stosunkowo małej liczbie kroków ($N \approx 200$).

DODATEK 4A

Dowód Twierdzenia 4.1.1

Z definicji a_N oraz z (4.1.6)-(4.1.8) wynika, że

$$\sqrt{N}(a_N - a) = (N \cdot P_N) \cdot \zeta_N, \tag{4.A.1}$$

gdzie $\zeta_N \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \tilde{e}_n$. Uwzględniwszy założenia I_1, I_2 oraz (4.1.6)

stwierdzamy, że ciąg ζ_N, N = 1,2, ... jest martyngałem, gdyż dla każdego n, f_n i $\tilde{e}_n$ są niezależne i $E\tilde{e}_n = 0$. Co więcej, warunkowa wartość oczekiwana $E[\zeta_N/\zeta_{N-1}, \ldots, \zeta_1] = 0$. Możemy teraz zastosować twierdzenie 2.3.1 (gdy t = 1) z pracy [12], aby ustalić, że ciąg ζ_N jest asymptotycznie normalny o wektorze średnich zero i macierzy kowariancji $E(\zeta_N, \zeta_N^T) = \tilde{\sigma}^2 P$. Po uwzględnieniu uwagi (4.2.1) i (4.A.1) otrzymujemy tezę twierdzenia.

DODATEK 4B

Dowód lematu 4.2.1

Zauważmy, że jądro $H(x,y;R_q)$ jest symetryczne, dodatnio określone i jest jądrem zdegenerowanym. Zatem pierwsza część tezy lematu wynika z teorii równań całkowych z jądrami tego typu (por. [75]). W celu wykazania (4.2.5) skorzystamy z twierdzenia Mercera (por. [75]) w stosunku do funkcji $R_q(x,y)$, traktowanej jako jądro równania całkowego. Z twierdzenia tego uzyskamy reprezentację

$$R_q(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k r_k(x) r_k(y), \tag{4.B.1}$$

przy czym szereg ten jest zbieżny jednostajnie w Ω, natomiast γ_k i $r_k(\cdot)$ są - odpowiednio - wartościami własnymi i funkcjami własnymi równania całkowego z jądrem R_q. Co więcej, $r_k(\cdot)$ można wybrać tak, by były one ortonormalne. Teraz nierówność (4.2.5) wynika z zależności:

$$r = \int_\Omega \int_\Omega H(x,y;R_q) R_q(x,y)\,dx\,dy \leqslant \lambda_{max}(H) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \leqslant \varepsilon_0 \lambda_{max}(H),$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z (4.2.1).

ZAKOŃCZENIE

Przed przystąpieniem do podsumowania wyników tej monografii warto zwrócić uwagę na te, rozpoczęte lub zarysowujące się, kierunki badań, które dotyczą innych aspektów problemu wpływania na dokładność identyfikacji niż rozważane w tej pracy. Są to:

1. Problemy rozmieszczenia punktów pomiarowych, tak by maksymalizować dokładność identyfikacji parametrów SPR. Były one rozpatrywane w kilku pracach autora [83]-[85] oraz w pracy [80]. Tematyka ta jest

częścią treści prac przeglądowych [023] i [95]. W pracach tych zwraca się uwagę, że badane od początku lat siedemdziesiątych zagadnienie optymalnego rozmieszczenia czujników w estymacji stanu SPR, reprezentowane np. w pracach [1],[3],[92], jest istotnie różne od rozpatrywanego w pracach [83]-[85]. Różnice te wynikają z ocen dokładności estymacji stanu i parametrów, które w różny sposób zależą od warunków eksperymentu. To powoduje, że również problem najlepszego doboru sterowania w estymacji stanu SPR na podstawie nieliniowych funkcjonałów stanu obiektu, rozpatrywany w pracy [133], jest różny od zadań rozpatrywanych w tej pracy.

2. Zagadnienia zagęszczania siatki pomiarów w taki sposób, by możliwa była nieparametryczna identyfikacja wymuszeń lub parametrów funkcyjnych w SPR (por. [81],[96],[24]). Technika badawcza użyta w tych pracach jest rozwinięciem metod nieparametrycznych używanych w identyfikacji SPS (por. np. [28],[29],[107]).

3. Zadania sterowania ruchem czujników pomiarowych w taki sposób, by uzyskać maksymalną dokładność identyfikacji SPR (por. [134]).

4. Dobór sterowań w identyfikacji SPR w sytuacji, gdy teoria badanego procesu dostarcza informacji apriorycznej. Algorytmy identyfikacji w takich sytuacjach zaproponowano w pracach [93],[94],[98].

Przedstawione problemy są komplementarne w stosunku do tematyki rozprawy i - jak się wydaje - powinny być nadal rozwijane.

Zasadnicze wyniki tej pracy podsumować można następująco:

A. Dokonano analizy kilku możliwych sformułowań zadań doboru sterowań w identyfikacji SPR i uzasadniono podejścia omówione następnie w rozprawie.

B. Założywszy nieskończony horyzont obserwacji zbadano wpływ częstotliwościowo-przestrzennej gęstości mocy sterowania użytego w trakcie identyfikacji na jej dokładność, wyrażoną przez uśrednioną macierz informacyjną.

C. Na podstawie powyższych wyników pokazano metodykę formułowania zadań optymalnego doboru sterowań przy różnych kryteriach.

D. Szczegółowo zbadano zadanie D-optymalnego doboru, z ograniczeniem na uśrednioną po czasie i przestrzeni energię sterowania. Zadanie to potraktowano jako wzorcowe i dające pewien pogląd na metodykę podejścia do innych zadań. Wyprowadzone warunki konieczne i dostateczne optymalności w tym zadaniu pozwoliły na zaproponowanie sposobów realizacji sterowania optymalnego. Realizacja jest oparta na udowodnionym w pracy twierdzeniu, że optymalne sterowania są liniowymi kombinacjami sygnałów sinusoidalnych o amplitudach zależnych od zmiennych przestrzennych. Amplitudy te z kolei są liniowymi kombinacjami funkcji wrażliwości obiektu na zmiany jego parametrów. Wyniki te dały też podstawę

do skonstruowania numerycznego algorytmu iteracyjnego. Wykazano jego zbieżność i praktyczną przydatność do szybkiego znajdowania przybliżeń sterowania optymalnego.

E. Przedstawiono wyniki dotyczące dwóch zadań D-optymalnego doboru sterowań przy innych niż w p. D ograniczeniach. W pierwszym z nich optymalne okazały się sterowania sinusoidalne oddziałujące w odpowiednio dobranych punktach. W drugim przestrzenna forma sterowania była zadana, a optymalizacji podlegały tylko charakterystyki częstotliwościowe sterowań. Udowodniono też, że zagadnienie D-optymalnego doboru sterowań w identyfikacji SPS może być potraktowane jako szczególny przypadek tego ostatniego zadania.

F. Otrzymano warunki optymalności sterowania dla tzw. liniowych kryteriów jakości, demonstrując w ten sposób szeroki zakres zastosowań wypracowanej metody badawczej.

G. Dla porównania, zbadano jedno zadanie D-optymalnego doboru sterowań z założeniem krótkiego czasu obserwacji.

H. Zaproponowano adaptacyjny algorytm generowania D-optymalnych sterowań i wykazano jego zbieżność.

Przedstawione wyniki starano się ilustrować na przykładach równań stosowanych w różnych dziedzinach techniki do opisu procesów rzeczywistych. Przykłady te ilustrują możliwości analitycznego wyznaczania sterowań do identyfikacji pewnych klas procesów lub służą udokumentowaniu (symulacyjnie) istotności wpływu przestrzennej formy sygnału sterującego na jakość identyfikacji.

Badania symulacyjne wykazały, że przez zastosowanie wyników rozprawy do zadania identyfikacji współczynnika przewodnictwa ciepła uzyskuje się dokładność od kilku do kilkuset razy większą niż za pomocą - stosowanego dotychczas w tej dziedzinie - sterowania równomiernego.

Warto zaznaczyć, że przyjęty w pracy opis SPR za pomocą funkcji Greena pozwolił na jednolite potraktowanie różnych klas sterowań. Celowe jest jednak badanie zagadnień z rozdziałów 2 i 3 dla węższych klas obiektów, co umożliwia jeszcze dokładniejszą charakteryzację sterowań optymalnych. Pogląd ten znalazł odbicie w pracach [84] i [85], gdzie wykorzystano szczególny rodzaj parametryzacji - identyfikowanymi parametrami obiektu były jego wartości własne, których znajomość pozwala na stosunkowo łatwą identyfikację innych parametrów (por. pracę [90], gdzie zaproponowano odpowiedni algorytm). Innym przykładem jest praca [97], w której D-optymalne sterowania scharakteryzowano przez własności spektralne operatora obiektu.

Wydaje się celowe kontynuowanie badań zarówno tych zagadnień, jak i wymienionych w punktach 1-3.

LITERATURA

[1] AIDARDUS S.E., GEVERS M.R., INSTALLE M.J., Optimal Sensors Allocation Strategies for a Class of Stochastic Distributed Systems, Int. J. Control vol. 22, No 2, pp. 197-213, 1975.

[2] ANGEL E., Inverse Boundary Value Problems, Elliptic Equations, J. Math. Anal. and Appl. vol. 30, pp. 86-98, 1970.

[3] ARBEL A., Sensor Placement in Optimal Filtering and Smoothing Problems, IEEE Trans. Automatic Control, vol. MC-27, no 1, pp. 94--98, 1982.

[4] ATWOOD C.L., Optimal and Efficient Design of Experiments: Ann. Math. Stat. vol. 40, no 8, pp. 1570-1602, 1969.

[5] ATWOOD C.L., Convergent Design Sequences for Sufficiently Regular Optimality Criteria, Ann. Math. Stat. vol. 4, no 6, pp. 1124-1138, 1976.

[6] BALAKRISHMAN A.V., Identification of Distributed Parameter Systems, Noncomputational Aspects, Lec. Notes in Contr. Inf. Sci. vol. 1, pp. 1-11, 1978.

[8] BANKS H.T., Representation of Solutions of Linear Functional Differential Equations, J. Diff. Equations 5, pp. 399-409, 1969.

[9] BANKS H.T., BERGER S., KUNISCH K., Cubic Spline Approximation Techniques for Parameter Estimation in Distributed Systems, IEEE Trans. Auto. Contr. vol. AC-28, pp. 773-786, 1983.

[10] BASAWA I.V., RAO B.L.S., Statistical Inference for Stochastic Processes, Academic Press, London - New York 1980.

[11] BELLMAN R., Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, 1960.

[12] BILLINGSEY P., Convergence of Probability Measures, Wiley, New York 1968.

[13] CHAVENT S., On the Identification of Distributed Parameter Systems, Proc. V IFAC Symp. Identification Darmstadt, 1979.

[14] CHAVENT G., About the Identification and Modelling of Miscible or Imiscible Displacements in Porous Media, Lec. Notes Contr. Inf. Sci. vol. 1, pp. 196-221, 1978.

[15] CHIEN-FU W., WYNN H.P., The Convergence of General Step Length Algorithms for Regular Optimum Design Criteria, Ann Stat. vol. 6, no 6, pp. 1273-1285, 1976.

[16] COLLINS P.L., KHATRI H.C., Identification of Distributed Parameter Systems Using Finite Differences, ASME Trans. J. Basic Eng. pp. 239-245, 1969.

[17] COURDESSES M., Comments on Identifiability of Spatially Varying and Constant Parameters in Distributed Systems. SIAM J. Control and Opt. vol. 21, no 3, pp. 410-412, 1983.

[18] CURTAIN R.F., PRITCHARD A.J., Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, Berlin - New York 1978.
[19] DEMIDENKO M.D., USATIVSKAJA N.P., Modelirovanie raspredelonnyj kontrol i upravlenie processami rektifikacii, Nauka, Moskva 1978.
[20] DOUGLAS J.M., Dynamika i sterowanie procesów, WNT, Warszawa 1976.
[21] FEDOROV V.V., Convex Design Theory, Math. Operat. und Stat. Ser. Stat. vol. 11, pp. 403-413, 1980.
[22] FEDOROV V.V., Teorija optimalnogo eksperimenta, Nauka, Mosva 1971.
[23] FRIEDLY J.C., Analiza dynamiki procesów, WNT, Warszawa 1975.
[24] GEORGIEV A.A., Identification of Spatially Variable Parameters in Linear Distributed Systems via Nonparametric Meth. Proc. 7 IFAC/ /IFORS Symp. on Identification York, July 1985.
[25] GODUNOV S.K., RABENKIJ V.S., Raznostnye schemy, Nauka, Moskva 1977.
[26] GOODWIN G.C., ZARROP M.B., PAYNE R.L., Coupled Design of Test Signals Sampling Intervals and Filters for System Identification, IEEE Trans. Auto. Contr. vol. AC-19, pp. 748-752, 1974.
[27] GOODWIN G.C., PAYNE L., Dynamic System Identification Experiment Design and Data Analysis, Academic Press, London 1977.
[28] GREBLICKI W., KRZYŻAK A., Nonparametric Identification of a Memoryless System with Cascade Structure, Int. J. Syst. Sci. vol. 10, pp. 1301-1310, 1979.
[29] GREBLICKI W., Nonparametric System Identification by Orthogonal Series, Probl. Contr. Inf. Theory, vol. 8, pp. 67-73, 1979.
[30] GRUSZECKI J., TRYBUS L., Zasada maksimum w identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych, Podstawy Sterowania 11, nr 37, 1972.
[31] HAJDASINSKI A.K., NIEDERLINSKI A., Multivariable System Identification, Proc. V IFAC Symp. Identification, Darmstadt 1979.
[32] HALLAGER L., GOLDSCHMIDT L., JORGENSEN S.B., Multivariable Adaptive Identification and Control of Distributed Chemical Reactor, Large Scale Systems vol. 6, pp. 323-336, 1984.
[33] HANZA M.H., SHEIRAH E., On-Line Identification of Distributed Parameter Systems, Automatica vol. 9, pp. 689-698, 1973.
[34] JERMAKOV S.M., ed. Matematičeskaja Teorija Płanirovanija Experimenta, Nauka, Moskva 1983.
[35] JOHN R.C., DRAPER M.R., D-Optimality for Regression, A Review, Technometrics vol. 17, pp. 15-23, 1975.
[36] JUMARIE G., Some Methods for Analysing the Stability and Hyperstability of Distributed Parameter Systems, Distributed Parameter Control Systems, Pergamon Press, 1982.
[37] KALABA R.E., SPINGRAN K., Optimal Inputs for Nonlinear Process Parameter Estimation, IEEE Trans Aerospace and Electr. Syst. vol. AES-10, 339-3, 1979.

[38] KANOH H., Distributed Parameter Heat Exchangers - Modelling Dynamics and Control, Distributed Parameter Control Systems, Pergamon Press, 1982.

[39] KARLIN S., STUDDEN W.J., Tchebycheff Systems, with Applications in Analysis and Statistics, Interscience, New York 1972.

[40] KASPRZAK W., LYSIK B., Analiza wymiarowa w projektowaniu eksperymentu, Ossolineum, Wrocław 1978.

[41] KATO T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag New York 1966.

[42] KĄCKI E., WOŹNIAKOWSKI M., Modelowanie analogowe, hybrydowe oraz cyfrowa symulacja maszyn analogowych, PWN, Warszawa 1979.

[43] KĄCKI E., Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice, WNT, Warszawa 1971.

[44] KIEFER J., General Equivalence Theory for Optimum Designs Approximate Theory, Ann. Statist. vol. 2, pp. 849-879, 1971.

[45] KIEFER J., WOLFOWITZ J., The Equivalence of Two Extremum Problems; Canad. J. Math. vol. 12, 1960.

[46] KITAMURA S., NAKAGIRI S., Identifiability of Spatiallyvarying and Constant Parameters in Distributed Systems of Parabolic Type, SIAM J. Control and Opt. vol. 15, no 5, 1977, pp. 785-802, 1977.

[47] KODA M., DOGRU A.H., SEINFELD J.H., Sensitivity Analysis of Partial Differential Equations with Applications. J. Computational Physics vol. 30, pp. 259-282, 1979.

[48] KODA M., SEINFELD J.H., Reconstruction of Atmospheric Pollutant Concentrations from Remote Sensing Data-Application. IEEE Trans. AC-27, no 1, 1982, pp. 74-80, 1982.

[49] KOSUT R.I., ARBEL A., KESSLER K.M., Optimal Sensor System Deisgn for State Reconstruction, IEEE Trans. AC-27, no 1, 1982, pp. 242--244, 1982.

[50] KOZŁOV V.P., Planirovanie eksperimenta w funkcjonalnych prostranstvach. W: Met. metody planirovanija eksp., Nauka, Novosybirsk 1981.

[51] KUBRUSLY C.S., Distributed Parameter System Idantification, A. Survey, Int. J. Control, vol. 26, no 6, pp. 509-535, 1977.

[52] KUBRUSLY C.S., CURTAIM R.F., Identification of Noisy Distributed Parameter Systems Using Stochastic Approximation, Int. J. Control vol. 25, pp. 441-455, 1977.

[53] KUSZTA B., SINHA N.K., Design of Optimal Input Signals for Identification of Distributed Systems, Int. J. Syst. Sci, vol. 9, pp. 1-71, 1978.

[54] KUSZTA B., SINHA N.K., Synthesis of Optimal Input Signals for System Identification, Int. J. Syst. Sci. vol. 10, pp. 251-258, 1979.

[55] LANKASTER P., Theory of Matrices, Academic Press, New York - London 1969.

[56] LAŠKO I.I., Voprosy avtomatizacji rešenija zadač filtracji na EVM, Naukova Dumka, Kiev 1977.

[57] LAUSTERER B.K., ETTELBERG E., Experimental Application of Distributed Parameter Control Theory, Distributed Parameter Control Systems, Pergamon Press, 1982.

[58] LEDEN B., HANZA M.H., SHEIRAH M.A., Different Methods for Estimating Thermal Diffusivity of a heat Process, Automatica vol. 12, pp. 445-456, 1976.

[59] LIONS J.L., Some Aspects of Modelling Problems in Distributed Parameter Systems, Lec. Notes in Contr. Inf. Sci. vol. 1, pp. 11-42, 1978.

[60] LIPCER R.S., SZIRAJEW A.W., Statystyka procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1981.

[61] LUIKOV A.V., Heat and Mass Transfer, Mir, Moskva 1980.

[62] LUSTERNIK L.A., SOBOLEV V.I., Elementy funkcjonalnogo analiza, Nauka, Moskva 1965.

[63] MALEBRANCHE H., Remarks on System Identification, 6 Congress Appl. Com. Math. S.J. Campos September, 1983.

[64] MEHRA R.K., LAINIOTIC D.S., ed., System Identification Advances and Case Studies, Academic Press, 1976.

[65] MEHRA R.K., Optimal Input Signals for Parameter Estimation in Dynamic Systems - Survey and New Results, IEEE Trans. Auto. Contr. vol. AC-19, pp. 753-768, 1974.

[66] MEHRA R.K., Optimization of Measurement Schedules and Sensor Designs for Linear Dynamic Systems, IEEE Trans. Auto Contr. vol. AC-21, pp. 55-64, 1976.

[67] NG T.S., GOODWIN B.C., PAYNE R.L., On Maximal Accuracy Identification with Output Power Constraints, IEEE Trans. Auto Contr., pp. 133-134, 1977.

[68] NG T.S., GOODWIN B.C., On Optimum Choice of Sampling Strategies for Linear Systems Identification, Int. J. Control vol. 22, no 1, pp. 459-475, 1976.

[69] NIEDERLINSKI A., Systemy cyfrowe automatyki przemysłowej t. 2 Zastosowania, WNT, Warszawa 1977.

[70] OMATU S., SEINFELD H., Brief Survey of Approaches to Deriving the Optimal Linear Distributed Parameter Filter, Large Scale Systems vol. 6, pp. 203-220, 1984.

[71] OSIPOVA V.A., Eksperimentalnoe issledovanie processov teploobmena, Energija, Moskva 1979.

[72] PERDREAUVILLE F.J., GOODSON R.E., Identification of Systems Described by Partial Differential Equations, ASME Trans. J. Basic Eng., pp. 463-468, 1966.

[73] PHILIPS R.S., Perturbation Theory for Semigroups of Operators, Trans. Am. Math. Soc. vol. 74, pp. 199-222, 1953.

[74] PILLO DI G., GRIPPO L., Application of the Epsilon Technique to the Identification of Distributed Parameter Systems, J. Opt. Theory and Appl. vol. 11, no 1, 1973.

[75] PISKOREK A., Równania całkowe, WNT, Warszawa 1980.

[76] PISZCZEK K., Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1982.

[77] POLIS M.P., GOODSON R.E., Parameter Identification in Distributed Systems, A Synthesising Overview, IEEE Proceedings vol. 64, no 1, pp. 43-61, 1976.

[78] POLIS M.P., The Distributed System Parameter Identification Problem, A Survey of Recent Results, Proc. 3-rd IFAC Symp. on Control of DPS, Toulouse 1982.

[79] PRITCHARD A.J., RYAN E.P., Control and Identification of Distributed Parameter Systems, Lec. Notes Contr. Inf. Sci. vol. 1, pp. 348-370, 1978.

[80] QURESHI Z.H., NG T.S., GOODWIN G.C., Optimum Experimental Design for Identification of Distributed Parameter Systems, Int. J. Control vol. 31, no 1, pp. 21-29, 1980.

[81] RAFAJŁOWICZ E., Nonparametric Algorithm for Input Signals Identification in Static Distributed Parameter Systems, IEEE Trans. Auto. Contr. vol. AC-29, pp. 631-633, 1984.

[82] RAFAJŁOWICZ E., Design of Experiments for Parameter Identification of the Static Distributed Systems, Systems Cience vol. 1, pp. 349-361, 1978.

[83] RAFAJŁOWICZ E., Optimal Experiment Design for Identification of Lienar Distributed Parameter Systems, IEEE Trans. Auto. Contr. vol. AC-28, pp. 806-808, 1983.

[84] RAFAJŁOWICZ E., Planowanie eksperymentu dla identyfikacji dynamicznych obiektów o parametrach rozłożonych, Arch. Automatyki i Telemech. t. XXVII, z. 1-2, 65-821, 1982.

[85] RAFAJŁOWICZ E., Design of Experiments for Eigenvalue Identification in Distributed Parameter Systems, Int. J. Control vol. 34, pp. 1079-1094, 1981.

[86] RAFAJŁOWICZ E., Optimal Input Signals for Parameter Estimation in Linear Distributed Parameter Systems, Int. J. Syst. Sci. vol. 13, pp. 799-808, 1982.

[87] RAFAJŁOWICZ E., Identyfikacja pewnej klasy obiektów o parametrach rozłożonych metodą największej wiarygodności, praca doktorska (nie publ.) Inst. Cybern. Wrocław 1979.

[88] RAFAJŁOWICZ E., Unbounded Power Input Signals in Optimum Experiment Design for Parameter Estimation in Linear System, Int. J. Control vol. 40, pp. 383-391, 1984.

[89] RAFAJŁOWICZ E., Identyfikacja pewnej klasy obiektów o parametrach rozłożonych metodą największej wiarygodności, Materiały VIII kraj. konf. aut., Szczecin 1980.

[90] RAFAJŁOWICZ E., Double Least Squares for Parameter Estimation in a Certain Class of Vibrating Systems, Proc. III Int. Conf. Systems Eng. Dayton Ohio Sept., 1984.

[91] RAFAJŁOWICZ E., SUFLETA Z., Two-level Computation Technique for a Distributed System Parameter Identification. Systems Science vol. 4, no 2, pp. 129-137, 1978.

[92] RAFAJŁOWICZ E., Optimization of Measurements for State Estimation in Parabolic Distributed Systems, Kybernetika vol. 20, no 5, 1984.

[93] RAFAJŁOWICZ E., On Distributed Parameter System Identification with a Priori Information as Constraints, Rozprawy Inżynierskie IPPT PAN vol. 32, no 4, pp. 563-573, 1984.

[94] RAFAJŁOWICZ E., Decomposition of the Least Squares Identification Algorithm on the Basis of a Two-Stage Experiment, Systems Science vol. 7, no 1, pp. 105-109, 1981.

[95] RAFAJŁOWICZ E., Optimum Experiment Design for Parameter Identification in Distributed Systems, Brief Survey. Proc. IX World IFAC Congress vol. X, Col. 14.1, 11.1, 1984.

[96] RAFAJŁOWICZ E., Nonparametric Algorithm for Identification of Weakly Nonlinear Static Distributed Parameter Systems, Systems and Control Letters vol. 4, pp. 91-96, 1984.

[97] RAFAJŁOWICZ E., Spectral Synthesis of Optimal Input Signals for Linear Distributed Parameter Systems Idantification, Int. J. Syst. Sci. vol. 16, no 6, pp. 667-675, 1985.

[98] RAFAJŁOWICZ E., Identification of Partly Unknown Systems Using Dimensional Analysis and Perturbation Methods, Studia Geotechnica et Mechanica, vol. VI, no 1, 1984.

[99] RAFAJŁOWICZ E., SPALDING G.R., Modelling and Identification of Linear Distributed Parameter Systems Using Jacobi Vectors, Systems Science vol. 9, no 3, pp. 39-46, 1983.

[100] RAFAJŁOWICZ E., Optimization of Actuators for Distributed Parameter Systems Identification, Problems of Control and Inf. Theory vol. 13, pp. 39-51, 1984.

[101] RALSTON A., Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa 1975.
[102] RAMIREZ W.F., Identification for Distributed Parameter Chemical Engineering Systems Fixed-Bed Tabular Reactors, Distributed Parameter Control Systems, Pergamon Press, 1982.
[103] RAO C.R., Linear Statistical Inference and its Applications, Wiley, New York 1973.
[104] RAY W.H., Advanced Process Control, McGraw-Hill, New York 1981.
[105] REISSENWEBER B., Parameter Identification for Distributed Parameter Systems Using Moving Probes (in German), Regelungstechnik, H. 4, s. 127-133, 1975.
[106] ROMANOV V.G., Obratnyje Zadači Matematičeskoj Fiziki, Nauka, Moskva 1984.
[107] RUTKOWSKI L., On System Identification by Nonparametric Function Fitting, IEEE Trans. Auto. Contr. vol. AC-27, pp. 225-227, 1982.
[108] SANCHEZ-PALENCIA E., Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, Springer-Verlag, Berlin - New York 1980.
[109] SAWARAGI Y., SOEDA T., OMTU S., Modelling Estimation and Their Applications for Distributed Parameter Systems, Springer Varlag, Berlin - New York 1978.
[110] SCHWARTZ Z., Metody matematyczne w fizyce, PWN, Warszawa 1984.
[111] SEIDMAN T.I., Approximation Methods for Distributed Parameter Systems, Distributed Parameter Control Systems, Pergamon Press 1982.
[112] SEINFELD J.H., KRAVARIS C., Distributed Parameter Identification in Geophysics-Petroleum Reservoirs and Aquifers, Distributed Parameter Control Systems, Pergamon Press, 1982.
[113] SCHOWALTER R.E., Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Pitman, London 1979.
[114] SKALMIERSKI B., TYLIKOWSKI A., Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.
[115] STAKGOLD I., Boundary Value Problems of Mathematical Physics, MacMillan, New York 1968.
[116] STOICA P., SODERSTROM L., A Useful Input Parametrization for Optimal Experiment Design, IEEE Trans. Auto. Contr. vol. AC-27, pp. 986-988, 1982.
[117] SUFLETA Z., Some Conditions for Identifiability of Spatially Varying Parameters in a Class of DPS, Control and Cybernetics, vol. 10, pp. 243-252, 1981.
[118] SUMAHARA Y., OHSUMI A., IMAMURA M., A Method for Parameter Identification for Linear Distributed Parameter Systems, Automatica vol. 12, pp. 245-256, 1976.

[119] SUMAHARA Y., Identification of Distributed Parameter Systems, Distributed Parameter Control Syst. Pergamon Press, 1982.
[120] SZABATIN J., Podstawy teorii sygnałów, WKiŁ, Warszawa 1982.
[121] SZŰCS E., Modelowanie matematyczne w fizyce i technice, WNT, Warszawa 1977.
[122] TRYBUS L., Regulacja optymalna liniowych symetrycznych systemów hiperbolicznych, Wyd. Pol. Rzesz., Rzeszów 1980.
[123] TZAFESTAS S.G., Identification of Stochastic Distributed Parameter Systems, Int. J. Control vol. 11, pp. 619-624, 1970.
[124] USPENSKIJ A.B., Obratnye zadači mat.-fiz. - analiz i planirowanie eksperimenta. W: "Mat. metody planirovanija eksperimenta, Nauka, Novosibirsk 1981.
[125] VAN TREES H.L., Detection Estimation and Modulation Theory, part I, Wiley, New York 1968.
[127] WYNN H.P., The Sequential Generation of D-Optimum Experimental Designs, Ann. Math. Stat. vol. 1, pp. 1655-1664, 1970.
[128] YOSIDA K., Lectures on Differential and Integral Equations Interscience, New York 1960.
[129] ZABCZYK J., A Semigroup Approach to Boundary Value Control, Proc. II IFAC Symp. Control of DPS Coventry England, 1977.
[130] ZABCZYK J., Remarks on the Control of Discrete Time Distributed Parameter Systems, SIAM J. Control, vol. 12, no 4, pp. 721-735, 1974.
[131] ZACKS S., The Theory of Statistical Inference, Wiley, New York, 1971.
[132] ZARROP M.B., Optimal Experiment Design for Dynamic System Identification, Springer Verlag, Berlin - New York 1979.

Spis literatury uzupełnionej w trakcie procesu wydawniczego

[133] LIU P.T., BONGIOVANNI P.L., Optimum Inputs for State Identification. J. Optimization Th. and Appl., vol. 45, no 2, 1985, pp. 257-264.
[134] RAFAJŁOWICZ E., Optimum Choice of Moving Sensors' Trajectories for Distributed - Parameter System Identification. International Journal of Control vol. 43, No 5, pp. 1441 - 1451, 1986.
[135] RAFAJŁOWICZ E., Adaptive Input Sequence Design for Linear Distributed - Parameter Systems Identification. Large Scale Systems Theory and Applications (praca przyjęta do druku).
[136] RAFAJŁOWICZ E., MYSZKA W., Computational Algorithm for Input Signals Optimization in Distributed - Parameter Systems. International Journal of Systems Science vol. 17, pp. 911 - 924, 1986.

[137] RAFAJŁOWICZ E., L-optimum Input Signals for Distributed - Parameter Systems Identification. Part I. Problems of Control and Information Theory vol. 15, No 1, pp 79 - 89, 1986.
[138] SINHA N.K., KUSZTA B., Modelling and Identification of Dynamic Systems. Van Nostrand Reinhold Comp., New York 1983.

Praca wpłynęła do Redakcji 1986 04.04

CHOICE OF OPTIMUM INPUT SIGNALS IN LINEAR DISTRIBUTED-PARAMETER SYSTEMS IDENTIFICATION

In the monograph a certain class of problems of optimum input signals choice in linear distributed - parameter systems (DPS) is considered. In opposite to the classical control theory, the aim of applying a reasonable chosen input signal is to maximize an identification accuracy. Identification is understood as a way of obtaining estimates of unknown system parameters, using noisy point measurements of a system state. DPS are usually described by partial differential equations (PDE) or by Green's function, which is the system response on applying pointwise impulse signal under homogeneous initial and boundary conditions. Green's function (GF) description is the basic system characteristic used in this monograph. Unknown parameters, which appaar in PDE or GF are usually interpreted as material constants, such as Young's modulus, thermal diffusivity or rate of chemical reactions. Frequently they can not be measured directly and identification techniques are used for their indirect evaluation from experimental data. Examples of this approach in various branches of engineering can be found in [19],[20],[23],[32],[58],[71]. In these papers and monographs applications of many types of ad hoc chosen input signals are reported. Signals, which are constant or harmonic in the time variable and constant or pointwise in space variables are the most frequently used examples. Their choice is usually dictated by simplicity of identification, rather than by their accuracy. Such approach to input signals choice seems to be no longer justified, since fast computers and developments in the area of identification algorithms (see [77], [78],[51] for survey papers) allow to identify relatively complex DPS under arbitrary excitations.

This situation and lack of theoretical indications concerning input signals choice in DPS identification, stimulated the author to propose an approach based on maximization of various measures of the identification accuracy by suitable input signal choice. The proposed approach has been developed in [83]-[86],[95],[97],[100]. Here, the above quoted results are collected, unified and essentially extended,

in particular in chapters 3 and 4. In our investigations guidelines of existing theory of optimum input signals choice for lumped parameter systems (LPS) identification (see [64],[65],[27],[132] for main contributions) were useful in a limited sense only. Namely, we apply the same optimality criterions i.e. D- and L-optimality criterions, which are also commonly used in optimum experiment design problems for a regression function parameter estimation (see e.g. [22],[44] for summary of this theory). On the other hand, our problems, differ from those for LPS in the same way as differ control problems for LPS and DPS. The essence of these differences is not only in the presence of spatial variables in input signals but also in the fact that spatial variables can vary in bounded domains, excluding the use of the Fourier transform.

Chapter 1.
Problems of optimum input signal choice for DPS identification

As a basic system description input - state relationship (1.1.1) is chosen (see List of symbols for definitions of variables). Examples of engineering applications are given by PDE (1.1.4), (1.1.5) and (1.1.13). Under regularity conditions Z_1-Z_{10} the sensitivity of the system state with respect to parameter changes is given by (1.1.23). Pointwise, noisy measurements, which allow parameter estimation, are of the form (1.2.1). In the monograph identification algorithms are not considered. It is only assumed that we have in our disposal an identification method, which provides asymptotically efficient parameter estimators (examples of such methods can be found in [6],[77],[78],[87],[89]). This assumption allows to use Fisher's information matrix for evaluating the best, asymptotically attainable, identification accuracy, independently on an identification method used.

Assuming that measurement noises are white in space and time, Gaussian processes, Fisher's information matrix (FIM) is given by (1.2.4), (1.2.5). Its general relationship to covariance matrix of estimates is given by (1.2.3), but for $T \to \infty$ asymptotic equality holds. It is important that strict equality (1.2.6) holds if GF depends linearily on unknown parameters. In this case FIM depends only on input signal and sensors positions i.e. it can be calculated a priori, forming a ground for our work. In general case FIM depends also on unknown parameters, leading to troubles, which appear earlier in experiment design for LPS. Typical ways of overcoming these difficulties are the following:

a) to apply nominal parameter values,

b) to use Bayes approach or mean vector of a priori parameter distribution,

c) to use adaptive approach with currently identified vector of parameters at each stage.

All of these ways lead to optimization problems of the same type (in case c) optimization is repeated at every stage of adaptive procedure).

Thus, optimization of input signals is based on FIM (1.2.11), where a is interpreted according to a, b, c, while $\xi(\varkappa)$ represents sensors positions, which are assummed to be fixed ("density" $\xi(\varkappa)$ of sensors is expressed by (1.2.10)).

In the monograph, we use two scalar functionals of FIM (1.3.2) and (1.3.7) which lead to D- and L-optimality criterions (see e.g. [21],[44] for statistical meaning of these functionals).

Chapter 2. D-optimum control - frequency domain approach

In this chapter foundations of problems formulation in the frequency domain are considered. They are based on assumption that the observation time T is large (theoretically $T \to \infty$). Optimality criterions are based on information gathered per unit of observation time, defined by (2.1.4), and further called averaged Fisher's information matrix (AFIM). The class of admissible input signals is constrained by (2.1.2), (2.1.3) and it contains signals with the spectrum in a finite interval $[-\omega_o, \omega_o]$. Expressing AFIM in the frequency domain we obtain (2.1.12). It occures that AFIM depends on input signal only through the spectral density (2.1.10). The class admissible spectral densities is denoted by $\mathcal{S}$. We remark that $\mathcal{S}$ contains generalized functions (2.1.15), (2.1.16), corresponding to Heaviside's function and harmonic function of time variable, respectively.

An element of $\mathcal{S}$ is called spectral density of input signal (SDIS). In these terms Problem 1 is formulated as (2.2.1). Existence of its solution is shown and characterized as follows.

Theorem 2.2.1. $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ is D-optimal if and only if (2.2.16) holds, where $\mu_{max}(\omega;\hat{Q})$ is the largest eigenvalue of (2.2.6) with the kernel (2.2.4), in which $\hat{S}_u$ is substituted. In (2.2.16), r is the number of estimated parameters.

Corollary 2.3.1. If $\xi(\varkappa) = \delta(\varkappa-\varkappa_o)$ i.e. measurements in one point are available then $\hat{S}_u \in \mathcal{S}$ solves Problem 1 if and only if (2.3.15) holds, where $\mu_{max}(.)$ is the largest eigenvalue in generalized algebraic eigenvalue problem (2.3.14), while $\hat{c}(j\omega)$ is the corresponding eigenvector.

Under assumptions of corollary (2.3.1), $\hat{S}_u$ is further called D_o-optimal SDIS.

Corollary 2.3.2. D_o-optimal SDIS is of the form (2.3.17), where $\hat{S}(\omega) \geqslant 0$ is a function for which (2.3.18), (2.3.19) hold and $\frac{1}{2\pi} \int \hat{S}(\omega)\, d\omega = 1$. Existence of $\hat{S}(\omega)$, is also shown, together with the fact that one can choose $\hat{S}(\omega)$ of the form (2.3.23).

One can notice that (2.3.23) can be treated as a spectral density of the signal (2.3.24). This fact and corollary (2.3.2) allow to indicate two different methods of generating an input signal (2.3.25), which posseses D_o-optimal SDIS. These methods are shown in Fig. 2.2 and in Fig. 2.3, respectively.

The above results are also used for constructing the computational algorithm for finding D_o-optimal SDIS. General idea of its performance and proof of convergence can be found in [136] while details are presented in p. 2.4. Numerical examples, summarized in Tables 2.1 and 2.2, indicate a sufficiently fast rate of the algorithm convergence and small sensitivity of Problem 1 to inaccuracies in nominal parameter choice.

Chapter 3. Problems of optimum control choice under additional constraints and ways of generalizations

In this chapter, it is shown that a large number of particular problems can be considered using results and guideliness of Chapter 2.

The first of them is to find D_o-optimal input signal of the form (3.1.1), under constraints (3.1.2), (3.1.3). It can be interpreted as the problem of finding optimal spatial filters and their input signals (see fig. 3.1). Necessary and sufficient optimality conditions are given by (3.1.6), while the optimal solution is of the form (3.1.7). It can be interpreted as pointwise spatial filters driven by harmonic excitations with appropriately chosen amplitudes and frequencies. Detailed derivation of these results can be found in [100].

In [83] another problem of D_o-optimum input signal synthesis has been considered. It differs from the one above in that, a spatial structure of excitation is prescribed and the experimenter is free in choosing its temporal behaviour. This problem is briefly discussed and it is shown that D-optimum experiment design problem for LPS identification (see e.g. [27]) can be treated as a special case. We remark that other problems considered here are not comparable with experiment design problems for LPS, since we choose not only temporal but also spatial behaviour of the input signal, which is defined in a bounded spatial domain.

Methodology proposed in Chapter 2 can be extended to other optimality criteria, which are based on AFIM. This is illustrated for the clase of L-optimality criterions, which are linear functional of AFIM inverse. Results obtained for L-optimality criterions are fully parallel in spirit to those in Chapter 2. There are however important differences in computational details (see [136]). The above results are illustrated by a number of examples. In particular identifying thermal diffusivity of a rod the optimal input is of the form (3.3.23), provided that both ends of the rod are kept at zero temperature. In Table 3.1 simulation results are summarized. They have been obtained by identifying thermal diffusivity using (3.3.23) and two other inputs, with the same energy.

At the end of this chapter, time domain synthesis of D-optimum input signals is considered. It is shown that the classical variational approach leads to a useless optimality condition. Much stronger, but only necessary optimality condition is derived in this chapter.

Chapter 4. Adaptive choice of input signals in DPS indentification

The aim of this chapter is to provide an alternative approach to the problem of input signal design for DPS identification purposes. The approach proposed here is alternative to that in chapters 2 and 3 in two respects. Namely, it is suited to a concrete identification method and it is adaptive in the sense that unknown parameters, which appear in the optimal control characteristics are replaced by their current estimates. Convergence of the adaptive scheme to the optimal input signal is proved. Extensive simulation studies confirm sufficiently fast rate of convergence of the algorithm. We do not give details here, since these results will be published in [135] as a full paper.

CONCLUDING REMARKS

In the monograph a systematic approach to the problems of optimal input signals choice for DPS identification has been proposed. Optimality criteria are based on functionals of Fisher's information matrix. A systematic way of deriving necessary and sufficient optimality conditions is elaborated and its applications are illustrated by D- and L--optimality criterions. These conditions serve also as a base for systematic constructing of numerical algorithms. It is also shown how to incorporate adaptation into the process of input signal choice. It seems that the proposed approach gives guidaliness for systematic investigations of many practical problems.

Simultaneously, influence of some other factors on DPS identification accuracy remained outside the scope of this monograph. An optimal choice of some of them is treated in the author's papers [81], [134], [96].

Verification by Marzena Łuczkiewicz

ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В монографии рассматриваются задачи оптимального, с точки зрения точности идентификации, подбора управления для систем с распределенными параметрами СРП . Предложен унифицированный подход к задачам этого типа, который включает результаты полученные автором раньше вместе с решениями задач, которые печатаются первый раз.

В первой главе излагаются основные элементы рассматриваемого класса задач. К ним принадлежит математическая модель идентифицированной системы, модель измерений и описание класса допустимых управляющих воздействий. Основная модель СРП (1.1.20) является достаточно общей. В (1.1.20) $a \in R^r$ обозначает вектор неизвестных параметров системы, $k(\cdot)$ - это импульсная переходная функция и обозначает управление, u, x - это пространственные переменные. Изменения состояния системы q проводятся в дискретных точках в присутствии белого шума (см. (1.2.1)). Точность оценивания вектора a характеризует информационная матрица Фишера дана формулой (1.2.4) и (1.1.23). В последней части этой главы приводятся статистические соображения выбора критериев D- и L-оптимальности, которые используются в следующих главах. Дан обзор возможных подходов к решению задач, рассматриваемых в монографии.

Во второй главе детально разработана задача D-оптимального подбора управления из класса сигналов с ограниченной средней мощностью и ограниченным частотным диапазоном. Этот класс сигналов допускает спектральную репрезентацию $Su(x, y, j\omega)$ и обозначается $\mathcal{S}$. Теория этой главы имеет асимптотический характер в том смысле, что время измерений T бесконечно. Мерой качества служит граница, при $T \to \infty$, информационной матрицы на единицу времени измерения. Основная задача формируется в частотной области (2.2.1) с применением (2.1.12), (2.1.13).

Для этой задачи получены необходимые и достаточные условия оптимальности (см. (2.2.16), (2.2.6)) . Эти условия ведут к двум возможным путям технической реализации оптимального управления. Они показаны на рисунках (2.1), (2.2). Предложен алгоритм для вычисления оптимального управления. Его работоспособность исследуется теоретически (см. теорема 2.2.1 и практически (см. таблица 2.1).

Целью третьей главы является обобщение результатов, полученных в предыдущей главе. Приведены результаты касающиеся D-оптимального управления в условиях, когда лишь временные компоненты сигнала подлежат влиянию экспериментатора. Было показано, что метод, используемый во второй главе, работоспособен также для точечных управлений, исследуемых раньше автором. Этот метод применяется к новой задаче L-оптимального подбора управления. Полученные результаты вполне параллельны результатам для критерия D-оптимальности. Приведены примеры аналитических решений, рассматриваемых задач.

Результаты второй и третьей глав не зависят от избранного метода идентификации потому, что обратная к информационной матрице является ковариационной матрицей любого асимптотически оптимального метода оценки параметров. Однако, полученные результаты имеют локальный характер, так как они зависят от априорной оценки неизвестных параметров.

Альтернативный подход излагается в четвертой главе, где предложен рекурентный метод оценивания. Исследуется асимптотическая точность этого метода, в зависимости от входного воздействия. Затем, вычисляется управление, которое обеспечивает максимальную точность идентификации. Оказывается, что характеристики оптимального управления зависят от неизвестных параметров, которые заступают их текущей оценкой. Таким образом получена адаптивная процедура подбора управления. В работе доказывается, что эта процедура асимптотически оптимальна. Ее работоспособность в условиях конечного горизонта измерений исследована при помощи многочисленных имитационных экспериментов. Их результаты представлены на рис. 4.1-4.7.

В заключении монографии указана связь ее результатов с другими работами авиора [81], [83]-[85], [96], которые намечают влияние других факторов, выступающих во время эксперимента, на точность идентификации.

SPIS TREŚCI

str.

Wstęp 5

1. Formułowanie zadań doboru sterowań w identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych 16

1.1. Opis matematyczny obiektów o parametrach rozłożonych 16

1.2. Pomiary, sformułowanie zadania estymacji i ocena jej dokładności 26

1.3. Przegląd problematyki racjonalnego doboru sterowań w identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych i sformułowanie zadań optymalnego doboru sterowań 35

2. Sterowania D-optymalne - analiza częstotliwościowa 43

2.1. Podstawowe własności macierzy informacyjnej 44

2.2. Sformułowanie problemu doboru D-optymalnej gęstości spektralnej sterowania i warunki optymalności 51

2.3. Częstotliwościowo-przestrzenna struktura optymalnej widmowej gęstości mocy sygnału sterującego 58

2.4. Algorytmy numeryczne obliczania D_o-optymalnego sygnału sterującego 65

2.5. Testowanie algorytmu numerycznego 71

3. Zadania optymalnego doboru sterowań przy dodatkowych ograniczeniach i kierunki uogólnień 78

3.1. Dobór D_o-optymalnych filtrów wejściowych oraz sygnałów o zadanej strukturze przestrzennej 78

3.2. Problem L-optymalnego doboru sterowań 84

3.3. Analityczne wyznaczanie sterowań optymalnych w identyfikacji wybranych klas obiektów 88

3.4. Dobór sterowań D-optymalnych w dziedzinie czasowo-przestrzennej 97

4. Adaptacyjny dobór ciągu sterowań w identyfikacji stochastycznych obiektów o parametrach rozłożonych 102

4.1. Opis obiektu i ocena dokładności jego identyfikacji 103

4.2. Optymalna funkcja korelacji stanu i jej adaptacyjna realizacja 107

4.3. Adaptacyjny dobór sterowań w identyfikacji parametrów równania przewodnictwa ciepła - przykład symulacyjny 112

Zakończenie 120

Literatura 123

CONTENTS

page

Introduction 5

1. Formulating problems of input signals choice for distributed parameter systems identification 16

   1.1. Mathematical models of distributed - parameter systems .. 16

   1.2. Measurements, formulation of the estimation problem and evaluation of its accuracy 26

   1.3. Problems of input signal choice for distributed systems identification - a review. Problems of optimal control .. 35

2. D-optimum control - frequency domain analysis 43

   2.1. Fundamental properties of the information matrix 44

   2.2. D-optimum spectral densities of input signals - problem formulation and the optimality conditions 51

   2.3. Spatial and spectral structure of the optimal control power spectral density 58

   2.4. Numerical algorithms for calculating D_o-optimal controls. 65

   2.5. Numerical algorithm testing 71

3. Optimal control under additional constraints, ways of generalizations 78

   3.1. D_o-optimal input filters and input signals with a fixed spatial structure 78

   3.2. L-optimum control choice 84

   3.3. Analytical methods of finding optimal input signals 88

   3.4. D-optimum control choice in the spatial and time domains.

4. Adaptive choice of input signals in identification of stochastic distributed systems 102

   4.1. System´s description and accuracy of its identification . 103

   4.2. Optimal state autocorrelation function and its adaptive realization 107

   4.3. Adaptive control choice in estimating parameters of the heat equation - a simulation example 112

Concluding remarks 120

References 123

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
(wydane w latach 1980—1984)

Nr 58, Monografie nr 10, W. Zamojski, *Modele niezawodnościowo-funkcjonalne systemów cyfrowych ze szczególnym uwzględnieniem systemów jednoprocesorowych*, Wrocław 1980 20,—

Nr 59, Studia i Materiały nr 29, *Problemy modelowania analogowego i cyfrowego*, Wrocław 1981 30,—

Nr 60, Monografie nr 12, M. Bazewicz, *Projektowanie systemów informatycznych*, Wrocław 1981 30,—

Nr 61, Monografie nr 11, *Programowa realizacja działań w ciałach skończonych do zastosowań w technice kodowania korekcyjnego i kryptografii*, Wrocław 1983 93,—

Nr 62, Studia i Materiały nr 30, *Problemy modelowania analogowego i cyfrowego Z2*, Wrocław 1983 32,—

Nr 63, Konferencje nr 22, *Systems Science VII*, Wrocław 1981 45,—

Nr 64, Konferencje nr 23, *Proceedings of the International School on Microcomputers and their Applications*, Wrocław 1984 115,—

Nr 65, Konferencje nr 24, *I Krajowa konferencja robotyki*, tom 1 — *Robotyka i maszynowa inteligencja*, Wrocław 1985 280,—

Nr 66, Konferencje nr 25, *I Krajowa konferencja robotyki*, tom 2 — *Mechanika i sterowanie robotów*, Wrocław 1985 300,—

Nr 67, Konferencje nr 26, *I Krajowa konferencja robotyki*, tom 3 — *Budowa i zastosowanie robotów*, Wrocław 1985 280,—

Nr 68, Konferencje nr 27, *I Krajowa konferencja robotyki*, tom 4 — *Ekonomika robotów i ekonomiczne systemy produkcyjne*, Wrocław 1985 250,—

Nr 69, Konferencje nr 28, *Microcomputers '85 — design, practice, education*, Wrocław 1985 180,—

Nr 71, Monografie nr 12, K. Tchoń, *On stable and typical properties of control systems*, Wrocław 1986 90,—

Cena zł 150,—

Subscription should be sent (at any time of the year) to:
"Ars Polona"
Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
or OR PAN, 00-901 Warszawa, PKiN, POLAND

Bank account number: NBP, VIII OM Nr 1550-6-81574 Warszawa/Poland
Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
ma stale na składzie Księgarnia Wr 49
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
oraz Wojewódzka Księgarnia Techniczna
ul. Świdnicka 8, 50-067 Wrocław

ISSN 0324-9786