

na prawach rękopisu

INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ

POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

RAPORTY SERII PREPRINTY NR 70

IDENTYFIKACJA PEWNEJ KLASY OBIEKTÓW

O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

METODĄ NAJWIĘKSZEJ WIAROGODNOŚCI

rozprawa doktorska

Ewaryst Rafajłowicz

Promotor:

prof. zw. dr hab.

ZDZISŁAW BUBNICKI

Słowa kluczowe: identyfikacja, obiekt o paramtrach rozłożonych,
metoda największej wiarogodności, planowanie
eksperymentu.

Wrocław 1979

Autor pragnie wyrazić podziękowania promotorowi pracy prof.dr hab. Z.Bubnickiemu za szereg cennych dyskusji merytorycznych i wskazówek udzielanych w trakcie całego procesu opracowywania rozprawy, jak również za opiekę naukową sprawowaną przez Profesora nad eksperymentalną grupą SNP, w której autor studiował. Dziękuję także wszystkim Koleżankom i Kolegom z Seminarium Systemów Sterowania za wiele uwag, które wpływały na przebieg pracy. Szczególnie wartościowe były dla autora życzliwe uwagi i dyskusje z kolegami: mgr inż. W.Myszka, dr inż. E.Nowickim, mgr inż. Z. Sufletą i koleżanką dr inż. K.Nitką.

SPIS TREŚCI

	str.
1. IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH. SFOR- MUŁOWANIE PROBLEMU PRACY	6
1.1. Wstęp	6
1.2. Określenie elementów składowych zadania identyfika- cji	17
1.2.1. Opis formalny obiektu identyfikacji	18
1.2.2. Opis wielkości mierzonych	25
1.3. Sformułowanie problemu pracy	29
2. ZGODNOŚĆ CIĄGU ESTYMATORÓW NAJWIĘKSZEJ WIAROGODNOŚCI I I- IDENTYFIKOWALNOŚĆ	34
2.1. Postać funkcji wiarogodności	34
2.2. Zgodność ciągu estymatorów. Definicje i przykłady ...	37
2.3. Warunki zgodności ciągu estymatorów w zadaniu identy- fikacji	43
2.4. Warunki identyfikowalności	56
3. ZAGADNIENIE JAKOŚCI ESTYMATORÓW I PLANOWANIE EKSPERYMENTU.	
3.1. Asymptotyczna normalność i efektywność	61
3.2. Zadanie planowania eksperymentu	76
3.2.1. Czynniki wpływające na jakość estymacji	76
3.2.2. Pojęcie planu eksperymentu i sformułowanie za- dania planowania	80
3.2.3. Uwagi o metodach znajdowania optymalnych pla- nów pomiarów	84
4. ALGORYTM OBLICZENIOWY IDENTYFIKACJI I WYNIKI JEGO TESTOWA- NIA	90
4.1. Zadanie maksymalizacji funkcji wiarogodności	90
4.1.1. Dobór metody optymalizacji	91
4.1.2. Dobór metody rozwiązywania równania obiektu	

i równań wrażliwości	98
4.2. Opis algorytmu i wyników jego testowania	103
4.2.1. Algorytm identyfikacji	103
4.2.2. Przykłady testujące	110
5. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW REAKTORA KONTAKTOWEGO UTLENIANIA DWUTLENKU SIARKI	116
5.1. Ogólna charakterystyka procesu i jego model	116
5.2. Identyfikacja parametrów reaktora	121
ZAKOŃCZENIE.....	127
LITERATURA.....	130

1. IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU PRACY

1.1. Wstęp

Począwszy od wczesnych lat sześćdziesiątych zaobserwować można szybki rozwój teorii sterowania obiektami opisywanymi równaniami o pochodnych cząstkowych. W dziedzinie tej osiągnięto znaczące rezultaty, których podsumowanie zawarte jest w szeregu monografii [21],[22],[45],[57]. Praktyczne zastosowanie tych wyników uwarunkowane jest, w znacznym stopniu, posiadaniem dostatecznie dokładnych modeli sterowanych obiektów. Znajomość opisu matematycznego istotna jest także na etapie projektowania urządzeń, w których ważną rolę odgrywa zależność przebiegu procesu od współrzędnych przestrzennych. Procesy takie są typowe na przykład dla wielu urządzeń inżynierii chemicznej takich jak reaktory przepływowe, kolumny ekstrakcyjne, wymienniki ciepła itp. [32],[56].

Obiekty, których opis matematyczny wymaga użycia funkcji zależnych od współrzędnych przestrzennych i ewentualnie czasu, nazywane są obiektami o parametrach rozłożonych [35],[53]. Powyższe określenie ma charakter względny gdyż postać modelu jest w znacznym stopniu wyznaczona przez jego późniejsze zastosowanie. W polskiej literaturze używany bywa także termin "obiekty o stałych rozłożonych". Ze względu na mniejsze rozpowszechnienie, nie będzie on w tej pracy używany.

Do opisu obiektów o parametrach rozłożonych stosuje się najczęściej równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych bądź układy takich równań [35]. Duże znaczenie tej formy opisu jest rezultatem jej uniwersalności i dość dobrego zbadania własności niektórych klas równań o pochodnych cząstkowych. Szczególnie dobrze zbadane są własności równań liniowych i quasilineowych rzędu drugiego [59],

[60]. W pracy tej rozważania ograniczono do klasy obiektów opisywanych równaniami typu parabolicznego i eliptycznego rzędu drugiego 59. Równania typu parabolicznego opisują dynamikę wielu ważnych procesów takich jak przewodnictwo ciepła, dyfuzja cząstek w płynącej cieczy lub gazie, dyfuzja cieczy w ciałach porowatych [48], [49], [32], [45]. Przebieg tych zjawisk w stanie ustalonym opisują równania typu eliptycznego [71], [61]. Przy ich pomocy opisuje się także potencjały pól elektrostatycznych i stacjonarnych pól elektrycznych przepływowych [49], przemieszczenie punktów ciał sprężystych [71] i wiele innych procesów.

Mówiąc ogólnie, problem identyfikacji danego obiektu polega na wyborze z zadanej klasy modeli (określonej często parametrycznie) takiego modelu, który najlepiej, w sensie określonego kryterium, przybliży zestaw pomiarów zdjętych w wybranych punktach obiektu [15]. Przy czym dobór klasy modeli jak i kryterium (wskaźnika) jakości identyfikacji powinien być uzależniony od posiadanej informacji apriorycznej o obiekcie i oddziaływujących na niego zakłóceń.

Powyższe, ogólne sformułowanie problemu obejmuje także identyfikację obiektów o parametrach rozłożonych. Jednakże to ostatnie zadanie posiada kilka specyficznych cech wynikających z następujących faktów:

- 1) równania różniczkowe opisujące procesy o parametrach rozłożonych uzyskuje się w wyniku wykorzystania bilansów masy, energii, pędu i innych praw fizyko-chemicznych, co powoduje, że uzyskany opis zjawiska można często uznać za dokładny, a identyfikacji podlegają tylko niektóre parametry równań;
- 2) jawna (analityczna) postać rozwiązań zagadnień brzegowych dla równań o pochodnych cząstkowych nie jest, w ogólnym przypadku, znana (nawet dla równań liniowych o stałych współczynnikach);

- 3) w tych przypadkach gdy rozwiązanie można uzyskać metodą rozdzielania zmiennych Fouriera ma ono postać nieskończonego szeregu funkcyjnego;
- 4) zależność rozwiązania równania z liniowym operatorem różniczkowym od jego parametrów jest, na ogół, nieliniowa;
- 5) pomiar stanu i wymuszenia obiektu o parametrach rozłożonych możliwy jest, na ogół, tylko w kilku punktach przestrzennych.

Wymienione czynniki mają istotny wpływ na stan badań nad identyfikacją obiektów o parametrach rozłożonych. Znaczna część prac poświęcona jest pokonaniu trudności obliczeniowych związanych z punktami 2) i 3). W pracach tych zarysowują się dwa główne podejścia, które są zresztą uogólnieniem postępowania stosowanego w identyfikacji obiektów opisywanych zwyczajnymi równaniami różniczkowymi. Pierwsze z nich polega na stosowaniu gradientowych metod optymalizacji (bądź metod teorii sterowania optymalnego w przypadku parametrów zależnych od zmiennych przestrzennych) do minimalizacji uśrednionej różnicy kwadratów między obserwacjami, a wyjściem modelu. Równanie opisujące model traktowane jest jako ograniczenie równościowe i jest ono uwzględniane poprzez:

- numeryczne rozwiązywanie w każdej iteracji przy pomocy metody Galerkina [36], niejawnego schematu metody różnic skończonych [2], [3];
- wprowadzenie kary do kryterium za nie spełnienie ograniczenia, które ma postać różnicowego przybliżenia równania cząstkowego (tzw. epsilon-technika) [8], [27].

Gradient minimalizowanej funkcji obliczany jest w tych pracach w oparciu o równania wrażliwości (otrzymane w wyniku zróżniczkowania równań stanu względem parametrów) [2] lub też przy pomocy równania sprzężonego [23], [40].

W niektórych z wyżej wymienionych prac zakłada się, że pomiary stanu obarczone są błędami losowymi o średniej zero i skończonej wariancji. Niestety w żadnej z nich nie próbowano oszacować błędu estymacji, nawet w przypadku nieskończonej liczby pomiarów. Jedynym potwierdzeniem przydatności proponowanych metod są referowane często wyniki badań symulacyjnych.

Drugie podejście polega, mówiąc najogólniej, na wstawieniu zdjętych pomiarów do obu stron przekształconego odpowiednio równania opisującego obiekt i dobraniu parametrów tak by norma różnicy między lewą a prawą stroną była minimalna. Celem dokonywanych przekształceń jest sprowadzenie równania do takiej postaci by występowały w nim tylko te wielkości, które mogą być bezpośrednio mierzone. Stosowane przekształcenia polegają na zastąpieniu pochodnych różnicami skończonymi [44]. Zastosowaniu tzw. funkcji modulujących i całkowania przez części [38], bądź też wielomianowej interpolacji danych pomiarowych [75]. Wszystkie metody tej grupy prowadzą do prostych algorytmów identyfikacji, ale wymagają pomiarów w tak dużej ilości punktów przestrzennych, że ich zastosowanie jest ograniczone.

Oprócz opisanych wyżej kierunków badań część prac dotyczy zastosowania znanych metod estymacji do identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych. Jak wiadomo (por. [15], [29]), użycie tych metod wymaga założenia, że równanie opisujące obiekt jest znane z dokładnością do wektora nieznanymi parametrów. Autorzy wielu prac, z wyjątkiem [9], dokonują przybliżenia równania o pochodnych cząstkowych równaniami różnicowymi bądź algebraicznymi i stosują metody teorii estymacji do oszacowania parametrów otrzymanych równań przybliżonych. W konsekwencji zakładają oni niejawnie, że obiekt opisany jest otrzymanymi równaniami przybliżonymi. W rezultacie, postępowanie stosowane do otrzymania oszacowań nieznanymi paramet-

rów nie różni się istotnie od metod estymacji dla obiektów o parametrach skupionych. Otrzymane tą drogą estymatory są najczęściej asymptotycznie obciążone (por. np. [81]), a oszacowanie ich dokładności i zbadanie zgodności nie wydaje się możliwe. Reprezentatywne dla tego kierunku badań są prace [81], [26], [82], w których proponuje się stosowanie aproksymacji stochastycznej. Przeprowadzone badania symulacyjne [26] ilustrują szybkość zbieżności algorytmu; w przypadku estymacji dwóch parametrów równania przewodnictwa ciepła dostatecznie dokładne oszacowania uzyskano po około 1000! pomiarów stanu w kilku punktach przestrzennych.

Zastosowanie podejścia bayesowskiego proponuje się w [9], jednakże w pracy tej zakłada się, że pomiaru stanu dokonuje się we wszystkich punktach przestrzennych. Zaletą tej pracy jest fakt, że nie dokonuje się dyskretyzacji równania obiektu co umożliwiło podanie warunków zgodności estymatora przy założeniu, że zakłócenia są gausowskie. Niestety podane warunki są praktycznie niemożliwe do sprawdzenia.

W cytowanych wyżej pracach czyni się założenie, że wymuszenia działające na obiekt są znane. Wyjątek stanowi praca [81], w której zakłada się, że dostępne są pomiary wymuszeń brzegowych z zakłóceniami o charakterze losowym.

Wielu autorów podkreśla ważność problemu doboru położenia punktów pomiarowych tak by uzyskać wysoką dokładność oszacować nieznanymi parametrów. Opublikowane dotąd prace z tego zakresu dotyczą rozmieszczenia punktów pomiarowych dla celów estymacji stanu przy znanych parametrach obiektu [78], [25], bądź też dobór położenia czujników dokonywany jest z punktu widzenia prostoty obliczenia oszacowań parametrów [75]. Jak stwierdzono w [35], proponowane podejścia na ogół nie tylko nie zapewniają dobrej dokładności oszacowań ale nie gwarantują nawet identyfikowalności parametrów

w przypadku pomiarów bez zakłóceń. Dalsze obszernie komentarze bibliograficzne znaleźć można w pracach przeglądowych [35], [53].

Warto zauważyć, że możliwości zastosowania metody największej wiarygodności do identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych nie zostały dotąd w pełni zbadane. Problem ten omawiany jest krótko w pracach Żiwogłowa [81], [82]. Proponowane podejście oparte jest na wstępnej dyskretyzacji równania o pochodnych cząstkowych, co nie pozwala na zbadanie własności estymatorów. Prace te nie zawierają także propozycji algorytmu obliczeniowego identyfikacji ograniczając się do rozważenia prostych przykładów.

Wysoka jakość estymacji uzyskiwana przy zastosowaniu metody największej wiarygodności do identyfikacji obiektów o parametrach skupionych [14], [6], [15], [29], [43] jest jednym z motywów podjęcia tematyki niniejszej pracy.

Biorąc pod uwagę zaprezentowany w skrócie stan badań i typowe warunki pomiarów, w pracy rozważa się następujące zadanie identyfikacji: na podstawie pomiarów stanu i wymuszenia w kilku punktach przestrzeni i w dyskretnych chwilach czasu, wyznaczyć oszacowania nieznanymi, stałymi parametrów wchodzących w równanie opisujące obiekt i w wymuszenie. Zakłada się, że ogólna postać wymuszenia jest znana z dokładnością do skończonej liczby nieznanymi parametrów. Typowym przykładem takiej sytuacji jest wymuszenie o postaci skończonej sumy znanych funkcji z nieznanymi współczynnikami.

O addytywnych zakłóceniach pomiarowych zakłada się, że są niezależnymi realizacjami zmiennych losowych o znanych gęstościach rozkładów prawdopodobieństwa. Poczynione założenia pozwalają zastosować metodę największej wiarygodności do estymacji nieznanymi parametrów. Jak wiadomo [79], [72], [50], estymatory parametrów rozkładu prawdopodobieństwa uzyskane metodą największej wiarygodności, na podstawie niezależnych obserwacji zmiennych losowych o tym samym

rozkładzie, są zgodne i asymptotycznie normalne z macierzą kowariancji równą dolnej granicy Rao-Cramera; o ile spełnione są pewne warunki regularności.

W zadaniu rozpatrywanym w tej rozprawie, na skutek zmian stanu obiektu i wymuszenia w czasie, "zaszumione" pomiary tych wielkości są realizacjami zmiennych losowych o niestacjonarnych rozkładach, zależnych od tego samego wektora nieznanymi parametrów. W takich warunkach estymatory największej wiarygodności nie zawsze zachowują dobre własności [50]. Można przypuszczać, że własności estymatorów największej wiarygodności w rozpatrywanym zadaniu zależą od położenia punktów pomiarowych i wymuszenia działającego na obiekt w trakcie eksperymentu.

W tej sytuacji zasadniczym celem pracy jest: zbadanie warunków, przy których estymatory największej wiarygodności parametrów obiektu rozłożonego należą do klasy estymatorów najlepszych asymptotycznie normalnych, skonstruowanie algorytmu identyfikacji i opracowanie programów pozwalających na sprawdzenie jego przydatności na wybranych przykładach.

Realizacja tego celu wymagała rozwiązania szeregu podproble-
mów. Uzyskane wyniki można podsumować następująco:

- podano warunki wystarczające dla zgodności ciągu estymatorów,
- wykazano twierdzenia ułatwiające badanie identyfikowalności,
- sformułowano warunki, przy których asymptotyczny rozkład ciągu estymatorów jest normalny o macierzy kowariancji równej odwrotności macierzy informacyjnej,
- wyprowadzono wzór na obliczanie macierzy informacyjnej przy dużej liczbie pomiarów i zbadano zależność wartości jej wyznacznika od ilości czujników pomiarowych i wymuszenia,
- sformułowano zadanie planowania eksperymentu i wskazano na możliwość jego rozwiązania dla pewnej klasy obiektów,

- opracowano algorytm identyfikacji co było związane z doborem iteracyjnej metody maksymalizacji funkcji wiarygodności i metody numerycznego rozwiązania równania cząstkowego opisującego obiekt,
- wykonano obliczenia testujące, w tym także dla danych pomiarowych pochodzących z instalacji przemysłowej; celem badań numerycznych było jakościowe określenie wpływu różnych czynników na szybkość zbieżności algorytmu.

W pracy przyjęto zasadę prezentowania wyników dla obiektów opisywanych równaniami parabolicznymi z jednoczesnym wskazywaniem zarówno na możliwości ich uogólnienia na obiekty opisywane układami równań jak i na przekształcenia, których trzeba dokonać by uzyskać analogiczne rezultaty dla obiektów opisanych równaniami typu eliptycznego.

W dalszej części rozdziału I podano formalny opis identyfikowanego obiektu wraz ze specyfikacją zakładanej informacji apriorycznej i nieznanymi parametrów. Wyróżniono przy tym pewną ważną podklasę obiektów, dla których udało się uzyskać pełniejsze rezultaty i która jest używana do ilustracji rozważań prowadzonych w całej pracy. Obiekty z tej podklasy charakteryzują się tym, że funkcje własne opisującego je operatora nie zależą od wartości nieznanymi parametrów. Opisano także warunki pomiarów i podano, obowiązujące w całej pracy, założenia poczynione o własnościach probabilistycznych zakłóceń pomiarowych. Formalne postawienie rozpatrywanych w pracy zadań kończy rozdział pierwszy.

Rozdział II poświęcony jest zbadaniu warunków gwarantujących mocną zgodność (tzn. zbieżność z prawdopodobieństwem jeden do prawdziwej wartości nieznanymi parametrów) ciągu estymatorów największej wiarygodności. Warunki te sformułowano w postaci twierdzenia poprzedzonego trzema lematami. Prosty wniosek z tego twierdzenia jest fakt asymptotycznej nieobciążoności ciągu estymatorów.

Jednym z najważniejszych warunków twierdzenia o zgodności jest założenie o identyfikowalności rozumianej jako możliwość odróżnienia dwóch różnych zestawów parametrów na podstawie jednokrotnego pomiaru stanu bez zakłóceń. Jak wskazują przytoczone przykłady, założenia tego nie można pominąć. W celu ułatwienia doboru takich warunków eksperymentu, które zapewniają identyfikowalność sformułowano dwa kryteria. Pierwsze z nich ma ogólny charakter ale może być sprawdzone, w zasadzie, tylko na drodze obliczeń numerycznych. Drugie natomiast jest łatwiejsze do sprawdzenia ale obejmuje tylko obiekty z wyróżnionej w rozdziale I podklasy.

W rozdziale III omówione zostały zagadnienia związane z jakością estymatorów. W części pierwszej tego rozdziału przedstawiono wyniki związane z dokładnością identyfikacji przy nieskończonej ilości pomiarów w ustalonych punktach przestrzeni i przy ustalonym wymuszeniu. Wyprowadzono wzór pozwalający obliczyć macierz informacyjną, której odwrotność charakteryzuje maksymalną możliwą do osiągnięcia dokładność estymacji w warunkach regularności Cramera-Rao. Udowodniono także, że macierz drugich pochodnych funkcji wiarygodności po odpowiednim unormowaniu, dąży, przy nieskończonej ilości obserwacji, do macierzy informacyjnej. Fakt ten jest istotny nie tylko z punktu widzenia dokładności estymacji ale także ze względu na konstrukcję algorytmu identyfikacji i jego własności. Najważniejszym rezultatem tego rozdziału jest twierdzenie podające warunki wystarczające na to by po unormowaniu ciąg estymatorów największej wiarygodności parametrów obiektu był asymptotycznie normalny o macierzy kowariancji równej odwrotności macierzy informacyjnej. W porównaniu z rozdziałem II warunki te nakładają mocniejsze ograniczenia zarówno na gęstość prawdopodobieństwa rozkładów zakłóceń pomiarowych, jak i na sam eksperyment. Jak można było przypuszczać, asymptotyczna dokładność estymacji zależy zarów-

no od ilości i położenia czujników pomiarowych jak i od użytego wymuszenia. Określenie tej zależności dało podstawę do postawienia zadania asymptotycznie optymalnego planowania eksperymentu. Jako kryterium optymalności planu eksperymentu przyjęto wyznacznik macierzy kowariancji ocen przy nieskończonej liczbie pomiarów.

Pomimo, że rozwiązanie tego zadania nie było pierwotnym celem pracy zbadano pewne jego aspekty w przypadku obiektów z wyróżnionej w rozdziale I podklasy dla wymuszeń stałych w czasie. Okazało się, że dla tej klasy obiektów asymptotycznie optymalny plan pomiarów nie zależy ani od wartości estymowanych parametrów ani od wymuszenia a optymalne położenie czujników można obliczać metodami opracowanymi w teorii D-optymalnego planowania dla estymacji współczynników funkcji regresji. Podano także postać stałego w czasie wymuszenia, które jest optymalne przy ograniczeniu typu energetycznego. W końcowej części rozdziału przedstawiono wyniki badań symulacyjnych, których celem było zbadanie dokładności estymacji przy skończonej liczbie pomiarów. Rezultaty tych badań potwierdziły zarówno celowość dalszych badań nad zagadnieniem planowania eksperymentu jak i wysoką jakość estymacji osiągalną już przy kilkunastu pomiarach.

W rozdziale IV zaproponowano algorytm identyfikacji i zbadano jego własności. Zasadniczą część algorytmu stanowi znana procedura iteracyjna Gaussa-Newtona maksymalizacji funkcji wiarygodności.

Użycie jej w rozważanym zadaniu uzasadnione jest zbieżnością macierzy drugich pochodnych funkcji wiarygodności do macierzy informacyjnej, co wykazano w rozdziale III. W celu rozszerzenia obszaru zbieżności procedury i zmniejszeniu nakładów obliczeń związanych z wielokrotnym rozwiązywaniem równania obiektu zaproponowano prostą metodę doboru długości kroku. Podano także warunki wystarczające globalnej zbieżności procedury Gaussa-Newtona uzupełnionej al-

gorytmem wyboru długości kroku i oszacowano szybkość zbieżności. Przedstawiono argumenty przemawiające za użyciem metody Ritza-Galerkina do numerycznego rozwiązywania równań obiektu i równań wrażliwości stanu na zmiany parametrów. Wskazane zostały także modyfikacje jakich należy dokonać, jeśli występują ograniczenia na wartości parametrów i uproszczenia zmniejszające nakład obliczeń przy estymacji dużej ilości parametrów. Wyniki badań symulacyjnych potwierdzają spodziewaną, dużą szybkość zbieżności algorytmu, zbliżoną do szybkości zbieżności metod drugiego rzędu i znaczną dokładność obliczeń. Badania te wskazują również na istotny wpływ położenia punktów pomiarowych i wymuszenia na szybkość zbieżności algorytmu. Okazuje się przy tym, że większą szybkość zbieżności uzyskuje się przy tych samych warunkach eksperymentu, które zapewniają lepszą jakość estymacji.

W rozdziale V przedstawiono próbę zastosowania zaproponowanego algorytmu do identyfikacji parametrów reaktora kontaktowego konwersji dwutlenku siarki. Opisano uproszczony model procesu konwersji i dokonano identyfikacji jego parametrów na podstawie pomiarów wykonanych w Zakładach Chemicznych "Police". Ze względu na zastosowanie uproszczonej wersji algorytmu, szybkość jego zbieżności, choć nieco mniejsza niż w przykładach testujących, jest wystarczająca w badanej sytuacji. Jednocześnie przykład pokazuje, że uogólnienie algorytmu na przypadek obiektów opisanych układem równań nie sprawia trudności.

W końcowej części pracy ustosunkowano się do przedstawionych rezultatów i wskazano kierunki dalszych badań.

Obliczenia testujące wykonywane były na maszynie cyfrowej Odra 1305 pracującej pod kontrolą systemu operacyjnego George 3. Opisy programów użytkowych napisanych w języku Fortran, zgodnie z algorytmem przedstawionym w pracy, wydane zostaną w postaci od-

rębnego raportu.

Pewnym uzupełnieniem niniejszej rozprawy są prace [67], [68]. Pierwsza z nich wskazuje możliwości zastosowania metody największej wiarygodności do identyfikacji parametrów zależnych od zmiennych przestrzennych i użycia metody dekompozycji do znajdowania oszacowań w bardziej złożonych sytuacjach. Druga zawiera opis pewnego podejścia do zadania planowania eksperymentu, które jest alternatywne w stosunku do podejścia przedstawionego w tej pracy.

Prezentowane w rozprawie wyniki badań są fragmentem prac nad identyfikacją obiektów o złożonych opisach matematycznych prowadzonych w Seminarium Systemów Sterowania pod kierunkiem prof. dr hab. Z. Bubnickiego. Oprócz problematyki obiektów o parametrach rozłożonych i jej zastosowań [63], [17], prace te koncentrują się nad zagadnieniami identyfikacji procesów o złożonej strukturze [18], [15] i identyfikacji wieloetapowej [19].

1.2. Określenie elementów składowych zadania identyfikacji

Jak stwierdzono we wstępie, z a d a n i e i d e n t y f i k a c j i polega na wyborze takiego modelu z określonej klasy, który najlepiej, w sensie przyjętego kryterium, przybliży zestaw pomiarów wejść i wyjść obiektu [15]. Sformułowanie tego zadania, oprócz wyróżnienia wejść i wyjść, wymaga sprecyzowania klasy modeli i kryterium jakości identyfikacji.

W sytuacji oddziaływania na obiekt zakłóceń o charakterze losowym i znanych rozkładach prawdopodobieństwa kryterium to jest najczęściej uśrednioną miarą odległości między wyjściami obiektu i modelu. W przypadku braku danych o rozkładach zakłóceń stosuje się kryteria empiryczne oparte o oszacowania rozkładów prawdopodo-

bieństwa lub ich momentów [16],[39].

Podobnie, określenie klasy modeli powinno być uzależnione od stopnia informacji apriorycznej posiadanej o obiekcie. W szczególności znane prawa fizyko-chemiczne mogą pozwolić na zbudowanie zestawu równań, które można uznać za dokładne, z punktu widzenia późniejszych zastosowań, odzwierciedlenie badanej klasy zjawisk zachodzących w obiekcie. Uzyskany w ten sposób zestaw równań zawiera pewne, nieznanne parametry, których wartości zależą od cech badanego obiektu.

Opisany powyżej stopień informacji apriorycznej o obiekcie, tzn. znajomość jego opisu z dokładnością do parametrów zakłada się w niniejszej rozprawie.

1.2.1. O p i s f o r m a l n y o b i e k t u i d e n t y - f i k a c j i

Używane opisy obiektów o parametrach rozłożonych mają postać równań o pochodnych cząstkowych, równań całkowych, całkowo-różniczkowych, różnicowych itp. Próby zestawienia i porównania zakresu stosowalności różnych metod opisu obiektów o parametrach rozłożonych dokonano w pracy [66]. Przeprowadzona analiza wykazała dużą uniwersalność opisu w postaci równań o pochodnych cząstkowych co tłumaczy szerokie jej stosowanie [35],[53].

W niniejszej rozprawie zakłada się, że badany obiekt jest opisany liniowym równaniem o pochodnych cząstkowych, rzędu drugiego, typu parabolicznego o stałych współczynnikach [59],[60]. Jako przypadek szczególny rozważa się także obiekt w stanie ustalonym opisany równaniem typu eliptycznego [59],[60],[61].

Zgodnie z tymi założeniami zmiany stanu obiektu opisane są równaniem:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^r a_{ij} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} + \sum_{i=1}^r a_i \frac{\partial q(x,t)}{\partial x^{(i)}} + a_0 q(x,t) +$$

$$+ u(x,t; \bar{b}) \text{ dla } x \in \Omega \text{ i } t \in (0, T) \quad (1.1)$$

uzupełnionym warunkiem początkowym:

$$q(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

i warunkiem brzegowym:

$$\mathcal{B}q(x,t) = 0 \text{ dla } x \in \Gamma \text{ i } t \in (0, T). \quad (1.3)$$

W powyższych równaniach $q(x,t)$ oznacza zmienną stanu obiektu w chwili t w punkcie przestrzeni o współrzędnych $x = [x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(r)}]^T$ (r - jest ilością współrzędnych przestrzennych; zwykle $r=1,2,3$).

Funkcja $q(x,t)$ jest określona w każdej chwili czasu $t \in (0, T)$, dla argumentów x z otwartego, jednoczynnego obszaru przestrzennego $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ o gładkim brzegu Γ , równaniem (1.1). Przebieg funkcji $q(x,t)$ zależy od stałych parametrów a_{ij} $i, j=1, 2, \dots, r$, a_i $i = 0, 1, \dots, r$, których wartości nie są znane i podlegają identyfikacji. Zachowanie się obiektu zależy także od wymuszenia rozłożonego u . W zależności od sposobu przeprowadzenia eksperymentu wyróżnione zostaną w pracy dwie sytuacje:

- eksperyment bierny, w którym eksperymentator nie ma wpływu na wymuszenie u natomiast wymuszenie to jest mierzone (por. 1.2.2) w celu wyznaczenia wektora nieznanych parametrów $\bar{b} = [b^{(1)} b^{(2)} \dots b^{(l_2)}]^T$; w szczególności badane będzie u o postaci:

$$u(x,t; \bar{b}) = \sum_{i=1}^{l_2} b^{(i)} g^{(i)}(x,t) \quad (1.4)$$

gdzie $g^{(i)}(x,t)$ $i = 1, 2, \dots, l_2$ są znanymi funkcjami liniowo niezależnymi.

- eksperyment czynny, w którym możliwe jest pobudzenie obiektu dowolnym sygnałem u z pewnego zbioru wymuszeń dopuszczalnych U.

U w a g a: Przedział obserwacji $(0, T)$ może być nieskończony. Umożliwia to badanie własności asymptotycznych przy nieskończonej ilości pomiarów. Wydaje się, że użycie litery T dla oznaczenia przedziału jak i znaku transpozycji nie powinno powodować niejasności.

O funkcji $\varphi(x)$ w warunku początkowym (1.2) zakłada się, że jest znana.

U w a g a: Jeśli przed chwilą początku obserwacji obiekt znajdował się w stanie ustalonym to w przypadku nieznanomości funkcji $\varphi(x)$ można uzyskać jej przebieg poprzez rozwiązanie zagadnienia brzegowego:

$$\sum_{i,j=1}^r a_{ij} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} + \sum_{i=1}^r a_i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^{(i)}} + a_0 \varphi(x) = -\tilde{u}(x) \quad (1.5)$$

dla $x \in \Omega$

$$B\varphi(x) = 0 \text{ dla } x \in \Gamma \quad (1.6)$$

i wtedy zależy ona od parametrów a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, r$, a_i $i = 0, 1, \dots, r$, co należy uwzględnić w algorytmie identyfikacji.

Liniowy operator B w (1.3) opisujący wpływ otoczenia na badany obiekt może mieć jedną z trzech typowych postaci [59]:

$$Bq(x, t) = q(x, t) \Big|_{\Gamma} \quad (1.7)$$

(warunek brzegowy Dirichleta)

$$Bq(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma} \quad (1.8)$$

(warunek brzegowy Neumana)

$$Bq(x, t) = \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial \bar{n}} + \hat{\alpha} q(x, t) \right) \Big|_{\Gamma} \quad (1.9)$$

(warunek brzegowy III rodzaju).

W powyższych wzorach $q(x, t)|_{\Gamma}$ oznacza obcięcie (restrykcję) funkcji do brzegu Γ a $\frac{\partial q}{\partial \bar{n}}$ jest pochodną w kierunku wektora normalnego do brzegu Γ skierowanego na zewnątrz obszaru Ω . $\hat{\alpha}$ jest stałym parametrem. Dla uproszczenia przyjmuje się, że jest on znany.

Ograniczenie się do jednorodnych warunków brzegowych nie zmniejsza ogólności rozważań gdyż przez odpowiednią zamianę zmiennych można sprowadzić warunki niejednorodne do jednorodnych [62].

Przez $\bar{a} = [a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(l_1)}]^T$ oznaczmy wektor, którego składowymi są uporządkowane parametry a_{ij} $i, j = 1, 2, \dots, r$, a_i $i = 0, 1, 2, \dots, r$. Ponieważ, zgodnie z interpretacją fizyczną współczynników a_{ij} zakładamy, że $a_{ij} = a_{ji}$ $i, j = 1, 2, \dots, r$ więc $l_1 = \frac{r(r+1)}{2} + r + 1$. Niech $\mathcal{A} \subset R^{l_1}$ będzie zbiorem parametrów \bar{a} , o którym apriori wiadomo, że zawiera nieznaną wektor parametrów obiektu \bar{a}^0 podlegający identyfikacji. Analogicznie, przez \mathcal{B} oznaczony będzie podzbiór przestrzeni R^{l_2} zawierający nieznaną wektor parametrów wymuszenia \bar{b}^0 . Wektor $\bar{\theta}$ określony wzorem:

$$\bar{\theta} = [\bar{a}^T, \bar{b}^T]^T \quad (1.10)$$

zawiera wszystkie nieznanne parametry. Jego wymiar wynosi $l = l_1 + l_2$ i apriori wiadomo, że $\bar{\theta}^0 = [\bar{a}^{0T}, \bar{b}^{0T}]^T$ należy do zbioru $\Theta \triangleq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Oznaczmy przez D_{Γ} zbiór postaci $\Omega \times (0, T)$ a przez $A(\bar{a})$ następujący formalny operator różniczkowy:

$$A(\bar{a})h = \sum_{i,j=1}^r a_{ij} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} + \sum_{i=1}^r a_i \frac{\partial h(x)}{\partial x^{(i)}} + a_0 h(x) \quad (1.11)$$

Niech $W \subset L^2(D_T)$ będzie pewną przestrzenią Hilberta dobraną w zależności od postaci warunków brzegowych i taką, że:

$$\forall \bar{a} \in \mathcal{A} \quad \forall q \in W \quad A(\bar{a})q \in L^2(D_T) \quad (1.12)$$

Wymagania takie spełniają przestrzenie Sobolewa odpowiedniego rzędu [59], [61], [57].

Wprowadzone oznaczenia pozwalają zapisać krótko zagadnienie mieszane (1.1), (1.2), (1.3) w postaci:

$$\frac{\partial q(\cdot; \bar{\theta})}{\partial t} = A(\bar{a})q(\cdot; \bar{\theta}) + u(\cdot; \bar{b}) \quad (1.13)$$

$$q(\cdot; \bar{\theta}) \Big|_{t=0} = \varphi(\cdot) \quad (1.14)$$

gdzie $q(\cdot; \bar{\theta}) \in W$. We wzorach powyższych przyjęto konwencję zapisu zależności funkcyjnej o wartościach $f(x, t)$ $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$ w formie $f(\cdot)$. Dodatkowo wskazano na jawną zależność rozwiązania q od wartości parametrów $\bar{\theta}$.

W zależności od gładkości wymuszenia i danych początkowych rozwiązanie równania (1.13), (1.14) rozumieć należy w sensie klasycznym bądź uogólnionym [59], [62]. W całej pracy obowiązywać będą następujące założenia o obiekcie (1.13), (1.14), wymuszeniu i warunku początkowym.

S1) $\forall \bar{b} \in \mathcal{B} \quad u(\cdot; \bar{b}) \in U \subset L^2(D_T)$ i prawie wszędzie w D_T $u(x, t; \bar{b})$ zależy w sposób ciągły od \bar{b}

S2) $\varphi(\cdot) \in L^2(\Omega)$

S3) równanie (1.13), (1.14) ma w przestrzeni W dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnego $\bar{a} \in \mathcal{A}$, dowolnego $u \in U$ i

$\varphi \in L^2(\Omega)$ i rozwiązanie to zależy w sposób ciągły od \bar{a}, u, φ .

Jako szczególny przypadek obiektu opisanego równaniami (1.13), (1.14) rozważane będzie jego zachowanie w stanie ustalonym. Prowadzi to do równania typu eliptycznego

$$A(\bar{a})\tilde{q}(\cdot; \bar{\theta}) = -\tilde{u}(\cdot; \bar{b}) \quad (1.15)$$

którego rozwiązanie $\tilde{q}(\cdot; \bar{\theta}) \in H \subset L^2(\Omega)$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta dobraną odpowiednio do warunków brzegowych. Wymuszenie \tilde{u} , niezależne od czasu, jest elementem przestrzeni $L^2(\Omega)$. Pozostałe założenia i oznaczenia pozostają bez zmian.

U w a g a: W sytuacji, gdy wymuszenie jest w pełni znane, tzn. gdy $\bar{\theta} = \bar{a}$, dla wskazania zależności stanu od parametrów obiektu używane będzie w pracy oznaczenie $q(x, t; \bar{a})$ zamiast $q(x, t; \bar{\theta})$.

Założenia podane w dalszej części tego podpunktu obowiązywać będą tylko w niektórych fragmentach pracy.

Wśród obiektów opisanych równaniami (1.13), (1.14) lub (1.15) wyróżnimy pewne podklasy, poprzez nałożenie dodatkowych warunków na operator $A(\bar{a})$.

PS1) Operator $A(\bar{a})$ jest symetryczny i dodatnio określony dla dowolnego $\bar{a} \in \mathcal{A}$ tzn.:

$$\forall \bar{a} \in \mathcal{A} \quad \forall h_1, h_2 \in H \quad \langle A(\bar{a})h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, A(\bar{a})h_2 \rangle$$

$$\forall \bar{a} \in \mathcal{A} \quad \exists \gamma > 0 \quad \forall h \in H \quad \langle A(\bar{a})h, h \rangle \geq \gamma \langle h, h \rangle$$

gdzie $\langle \dots \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w $L^2(\Omega)$

PS2) Niech $\lambda_1(\bar{a}), \lambda_2(\bar{a}) \dots$ będą wartościami własnymi operatora $A(\bar{a})$ przy ustalonym $\bar{a} \in \mathcal{A}$. Zakładamy, że odpowiadające im

funkcje własne tego operatora nie zależą od \bar{a} tzn. jeśli $v \in H$ jest funkcją własną operatora $A(\bar{a})$ to dla dowolnego $\bar{a}' \in \mathcal{A}$ zachodzi: $A(\bar{a}')v = -\lambda(\bar{a}')v$.

PS3) Następujące zbiory $\{h \in H : \langle A(\bar{a})h, h \rangle \leq C\}$ są zwarte w H dla dowolnego $\bar{a} \in \mathcal{A}$ i dowolnej stałej $C > 0$.

PS4) Wymuszenie $u(x, t)$ jest liniową kombinacją m funkcji własnych operatora $A(\bar{a})$ przy dostatecznie dużym m , tzn. jest ono postaci:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)v_i(x) \quad (\#)$$

Założenie PS1) gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania równań (1.13), (1.14) i (1.15) w odpowiednio dobranych przestrzeniach funkcyjnych [59], [62]. Warunki PS1) i PS3) są wystarczające na to by zbiór funkcji własnych operatora $A(\bar{a})$ był ortogonalny i zupełny w $L^2(\Omega)$, [61]. Z faktu tego wynika, że założenie PS4) nie jest bardzo ograniczające, gdyż każdą przedziałami ciągle funkcja może być aproksymowana szeregiem postaci (#) z dowolnie dużą dokładnością, jeśli tylko m jest dostatecznie duże [74].

Warunek PS2) jest spełniony dla $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ przy warunkach brzegowych I, II i III rodzaju. Zachodzi on także dla dwu i trójwymiarowych obszarów Ω o regularnych kształtach takich jak prostokąt koło itp. Warunki konieczne i wystarczające dla zachodzenia PS2) podano w [68]. W pracy tej udowodniono także, że jeśli zachodzi warunek PS2) to wartości własne operatora $A(\bar{a})$ mają postać:

$$\lambda_i(\bar{a}) = \bar{a}_i^T \bar{a} \text{ gdzie } \bar{a}_i \text{ są pewnymi wektorami nie zależącymi od } \bar{a}.$$

1.2.2. Opis wielkości mierzonych

Zagadnienie adekwatnego opisu warunków pomiarów jest jednym z centralnych problemów związanych ze sterowaniem i identyfikacją obiektów o parametrach rozłożonych [10], [35]. Z jednej strony niemożliwe jest zrealizowanie pomiaru stanu we wszystkich punktach obszaru $\Omega \cup \Gamma$, z drugiej zaś precyzyjne określenie pomiaru punktowego napotyka na trudności. Trudności te związane są z faktem, że każdy czujnik pomiarowy dokonuje uśrednienia mierzonej wielkości i to zarówno w pewnym, nieznanym, podobszarze jak i na pewnym odcinku czasu o nieznannej długości. Mimo tego pojęcie pomiaru punktowego w czasie i przestrzeni jest uważane za dostatecznie dokładną idealizację rzeczywistości [37] i zostanie przyjęte jako podstawowe w niniejszej pracy. Zakłada się, że przestrzeń rozwiązań równania cząstkowego W jest zawarta w przestrzeni funkcji ciągłych na $\Omega \times (0, T)$ przedłużalnych, z zachowaniem ciągłości, do brzegu. W związku z tym pojęcie wartości funkcji q w punkcie (x, t) jest poprawnie określone (z formalnego punktu widzenia).

O błędach pomiarów zakłada się, że są niezależnymi realizacjami pewnych zmiennych losowych.

Jak wiadomo, użycie metody największej wiarygodności do estymacji parametrów obiektu wymaga założenia, że znane są rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych reprezentujących szumy pomiarów. W praktyce założenie to można uważać za spełnione gdy jedynym źródłem zakłóceń jest czujnik pomiarowy, którego charakterystyki można zbadać przed właściwym eksperymentem dla celów identyfikacji. Prócz tego możliwe jest wykorzystywanie estymatorów otrzymanych przy założeniu pełnej znajomości rozkładów prawdopodobieństwa zakłóceń w warunkach gdy rozkłady te nie są znane a zamiast nich używa się rozkładów empirycznych. Metodyka takiego pos-

tępowania przedstawiona jest w pracach [16] i [39].

Reasumując powyższe uwagi zakłada się, że pomiar stanu można opisać następująco:

$$y_{in} = q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0) + z^n(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, I, n = 1, 2, \dots, N \quad (1.16a)$$

gdzie

x_i - położenie i -tego punktu pomiarowego $i = 1, 2, \dots, I$

t_n $n = 1, 2, \dots, N$ - zadany ciąg chwil, w których dokonuje się pomiarów

$q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0)$ - mierzona wielkość reprezentująca stan obiektu w punkcie x_i , w chwili t_n zależny od nieznanymi parametrów obiektu $\bar{\theta}^0$, wymuszenia i warunków początkowych

y_{in} - rezultat pomiaru stanu wraz z zakłóceniem pomiarowym $z^n(x_i)$

I - ilość punktów pomiarowych

N - liczba chwil, w których dokonywano pomiarów.

Rozważany będzie także przypadek gdy $N \rightarrow \infty$. W związku z tym zakłada się, że zadany ciąg chwil t_n jest taki, że $t_n \rightarrow \infty$ gdy $n \rightarrow \infty$. Oznaczenie o postaci $z^k(x)$ wskazuje, że wartość zakłócenia pomiarowego zależy od położenia punktu x i od chwili t_k , w której dokonuje się pomiaru.

W całej pracy zakłada się, że:

P1) Dla ustalonego $x \in \Omega \cup \Gamma$ wielkości $z^{k_1}(x), z^{k_2}(x) \dots$ są niezależnymi realizacjami zmiennej losowej $z(x)$ o znanej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, oznaczanej dalej przez $f_z(z; x)$

P2) Dla dowolnego układu parami różnych punktów x_1, x_2, \dots, x_k .

$z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_k)$ są niezależne.

Dla krótkości zapisów wprowadźmy oznaczenie \bar{y}_n dla pomiarów stanu uzyskanych w chwili t_n , $\bar{y}_n \triangleq [y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{In}]$ $n = 1, \dots, N$ oraz Y_N dla tablicy zawierającej rezultaty wszystkich pomiarów: $Y_N \triangleq \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1N} \\ \vdots \\ y_{IN} \end{bmatrix}$

Analogiczny opis pomiarów stanu zakłada się dla obiektu badanego w stanie ustalonym (1.15) i ma on postać:

$$y_{in} = \tilde{q}(x_i; \bar{\theta}^0) + z^n(x_i) \quad i=1,2,\dots,I, \quad n=1,2,\dots,N \quad (1.16b)$$

gdzie n oznacza kolejny numer pomiaru a pozostałe oznaczenia są takie jak dla obiektu dynamicznego. Zakłada się także spełnienie warunków P1) i P2).

Ponieważ wymuszenie rozłożone $u(x, t; \bar{b})$ zależy od wektora nieznanymi parametrów \bar{b} (por. 1.2.1) to celowy jest dodatkowy pomiar, pozwalający polepszyć jakość estymacji.

Zakłada się, że pomiary wymuszenia mają postać:

$$w_{kn} = u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0) + z^n(\xi_k) \quad k=1,2,\dots,K \quad n=1,2,\dots,N \quad (1.17)$$

gdzie:

ξ_k - położenie k -tego punktu pomiarowego, $\xi_k \in \Omega \cup \Gamma$; $k = 1, 2, \dots, K$

$u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0)$ - mierzona wielkość reprezentująca wymuszenie rozłożone działające na obiekt w chwili t_n w punkcie ξ_k , zależne od wektora nieznanymi parametrów \bar{b}^0

w_{kn} - rezultat pomiaru wymuszenia wraz z zakłóceniem pomiarowym $z^n(\xi_k)$

K - ilość punktów pomiaru wymuszenia.

O zakłóceniach pomiaru wymuszenia zakłada się, że:

P3) Dla ustalonego $\xi \in \Omega \cup \Gamma$ wielkości $z^{n_1}(\xi), z^{n_2}(\xi), \dots$ są niezależnymi realizacjami zmiennej losowej $z(\xi)$ o znanej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa oznaczonej dalej przez $f_z(z; \xi)$.

P4) Dla dowolnego układu parami różnych punktów $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ zmienne losowe $z(\xi_1), z(\xi_2), \dots, z(\xi_m)$ są niezależne.

P5) Dla dwóch dowolnych układów punktów x_1, \dots, x_k i $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ciągi zmiennych losowych $z(x_1), \dots, z(x_k)$ i $z(\xi_1), \dots, z(\xi_m)$ są

niezależne en block [58].

Zakłada się, że analogiczny opis warunków eksperymentu, wraz z założeniami P3), P4) i P5), obowiązuje dla pomiaru wymuszenia stałego w czasie działającego na obiekt opisany równaniem (1.15).

Wyniki pomiarów wymuszenia w chwili t_n oznaczane będą przez $\bar{w}_n = [w_{1n}, w_{2n}, \dots, w_{kn}]$ $n=1, 2, \dots, N$, a cała tablica takich pomiarów przez $\bar{W}_N = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_N \end{bmatrix}$.

U w a g a: Większość prezentowanych w rozprawie rezultatów, z wyjątkiem tych, które dotyczą planowania eksperymentu, daje się uogólnić na przypadek gdy pomiary stanu mają postać:

$$y_{in} = h(q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0), z^n(x_i)) \quad i=1, 2, \dots, I, \quad n=1, 2, \dots, N$$

U w a g a: W całej pracy gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $f_Z(z; x)$, $f_\xi(\xi; \xi)$ i wszystkie inne, rozpatrywane są tylko dla tych argumentów, dla których przyjmują wartości niezerowe. W związku z tym, bez komentarza, używane będą wyrażenia typu $1/f_Z(z; x)$, $\ln f_Z(z; x)$, które nie są określone tylko na zbiorach o prawdopodobieństwie zero.

W dalszej części pracy rezultaty pomiarów stanu i wymuszenia w chwili t_n oznaczane będą przez $\bar{s}_n = [\bar{y}_n, \bar{w}_n]$ a tablica wszystkich pomiarów stanu i wymuszenia przez $S_N = \begin{bmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \bar{s}_N \end{bmatrix}$

1.3. Sformułowanie problemu pracy

Jak stwierdzono we wstępie, celem rozprawy jest zbadanie niektórych własności estymatorów największej wiarygodności parametrów obiektu opisanego równaniami typu parabolicznego lub eliptycznego i skonstruowanie na tej podstawie algorytmu identyfikacji.

Na informację aprioryczną o obiekcie identyfikacji i warunkach eksperymentu, sprecyzowaną w podrozdziale 1.2, składają się:

- równania (1.13), (1.14) opisujące zależności między wymuszeniem u , warunkiem początkowym φ , wektorem nieznanymi parametrów obiektu \bar{a} i jego stanem q ,
- opis pomiarów punktowych stanu (1.16a) i wymuszenia (1.16b) wraz z charakterystykami zakłóceń pomiarowych określonymi w P1) - P5),
- warunek początkowy φ ,
- wymuszenie rozłożone $u(x, t; \bar{b}), (x, t) \in \Omega \times (0, T)$, którego postać jest znana z dokładnością do wektora nieznanymi parametrów \bar{b} ,
- zbiory \mathcal{A} i \mathcal{B} , o których wiadomo, że ich elementami są "prawdziwe", nieznanne, parametry obiektu \bar{a}^0 i wymuszenia \bar{b}^0 (nie wyklucza się możliwości, że $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{11}$, $\mathcal{B} = \mathbb{R}^{12}$).

Uzupełnieniem powyższych danych apriorycznych jest zestaw pomiarów stanu obiektu i wymuszenia S_N , wykonanych przy pewnych, nieznanymi, wartościach parametrów \bar{a}^0 i \bar{b}^0 .

Powyższa informacja aprioryczna jest wystarczająca dla obliczenia funkcji wiarygodności (zostanie to wykazane, w rozdziale II). Funkcja wiarygodności, oznaczana dalej przez $L_N(S_N; \bar{\theta})$, jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa pomiarów (obserwacji) przy założeniu, że parametry obiektu i wymuszenia mają wartości $\bar{\theta}$.

Zadanie estymacji parametrów obiektu

Ze względu na nieznaną wartość parametrów wymuszenia \bar{b} , zadania

oszacowania parametrów \bar{a} i \bar{b} należy rozpatrywać łącznie. Zgodnie z zasadą największej wiarygodności należy znaleźć taki wektor $\bar{\theta}_N^*$ dla którego:

$$\max_{\bar{\theta} \in \Theta} L_N(S_N; \bar{\theta}) = L_N(S_N; \bar{\theta}_N^*(S_N)) \quad (1.18)$$

Postać, otrzymanego tą drogą, algorytmu identyfikacji $\Psi_N(S_N)$ zależy od informacji apriorycznej a konkretna wartość oszacowania parametrów jest funkcją pomiarów:

$$\bar{\theta}_N^* = \Psi_N(S_N) \quad (1.19)$$

Biorąc pod uwagę fakt, że rozwiązanie równań obiektu na drodze analitycznej nie jest, na ogół, możliwe, nie można wyznaczyć jawnej postaci algorytmu identyfikacji (1.19). Dla celów praktycznych nie jest to zresztą konieczne. Wystarczy podać metodę obliczania $\bar{\theta}_N^*$ dla dowolnych pomiarów S_N . Podanie takiej metody oznacza rozwiązanie zadania optymalizacji (1.18) przy ograniczeniu w postaci równań obiektu (1.13), (1.14). Problemy optymalizacji tego typu są na tyle skomplikowane, że można podać jedynie procedurę iteracyjną wyznaczania ich przybliżonego rozwiązania.

W związku z tym powstaje następujący problem:

Skonstruować ciąg $\bar{\theta}_{N,1}, \bar{\theta}_{N,2}, \dots, \bar{\theta}_{N,k}, \dots$ obliczany według wzoru:

$$\bar{\theta}_{N,k+1} = \Phi_{N,k}(\bar{\theta}_{N,k}, S_N), \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (1.20)$$

który jest zbieżny do $\bar{\theta}_N^*$, przy dowolnym przybliżeniu początkowym $\bar{\theta}_{N,0}$ i dla prawie wszystkich realizacji S_N macierzy losowej \underline{S}_N o ile spełnione są pewne warunki. Podanie takiej procedury jest niejawnym sposobem podania algorytmu identyfikacji (1.19).

Zagadnienie konstrukcji algorytmu (1.20) zostało w pracy rozbite na szereg podzadań:

1) Zadanie obliczania funkcji $L_N(S_N; \bar{\theta})$ dla dowolnych wartości

argumentów S_N i $\bar{\theta} \in \textcircled{-}$.

- 2) Z zadaniem 1) wiąże się problem doboru metody numerycznego rozwiązania równania obiektu
- 3) Ograniczając klasę dopuszczalnych procedur (1.20) do algorytmów postaci:

$$\bar{\theta}_{N,k+1} = \bar{\theta}_{N,k} + \tau_k \bar{d}_k^N(\bar{\theta}_{N,k}, S_N) \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.21)$$

podać sposób doboru ciągu kierunków poszukiwań $\bar{d}_k^N(\bar{\theta}_{N,k}, S_N)$ $k=0, 1, 2, \dots$ i ciągu liczb τ_k $k = 0, 1, 2, \dots$ tak by algorytm był zbieżny i oszacować szybkość zbieżności.

- 4) Zbadać własności algorytmu na wybranych przykładach testujących i określić jakościowy wpływ warunków eksperymentu na szybkość zbieżności.

Zadaniem, pozwalającym na praktyczną weryfikację wyników pracy, jest także napisanie programów użytkowych identyfikacji metodą największej wiarygodności. Ze względu na specyfikę opisu obiektów programy te powinny obejmować:

- identyfikację parametrów obiektu dynamicznego opisanego równaniem parabolicznym
- identyfikację parametrów obiektu statycznego opisanego równaniem eliptycznym.

Programy te powinny umożliwiać również przeprowadzenie badań symulacyjnych pozwalających na zbadanie własności algorytmu identyfikacji jak również wpływu warunków eksperymentu na jakość estymacji przy skończonej liczbie pomiarów.

Zagadnienie asymptotycznej jakości estymacji

Wysoka, w porównaniu z innymi metodami, jakość estymatorów największej wiarygodności ujawnia się najwyraźniej w próbach o dużej liczności. Stąd problem zbadania asymptotycznych własności

tych estymatorów ma szczególne znaczenie. Jest on ważny także z punktu widzenia możliwości konstrukcji efektywnego algorytmu identyfikacji.

Jako pierwsze z zagadnień jakości estymacji rozważane będzie następujące zadanie.

Problem mocnej zgodności ciągu estymatorów

Jakie są warunki wystarczające, które powinny spełniać punkty pomiaru stanu x_1, x_2, \dots, x_I i wymuszenia $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K$ a także samo wymuszenie i rozkłady zakłóceń, na to by:

$$P\left\{\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\theta}_N^*(S_N) = \bar{\theta}^0\right\} = 1.$$

Z zagadnieniem tym związany jest problem identyfikowalności, który sformułowany zostanie w rozdziale II.

Problem asymptotycznej normalności i efektywności ciągu estymatorów

Podać warunki wystarczające na to by unormowany ciąg estymatorów największej wiarygodności parametrów obiektu (1.13), (1.14) i wymuszenia miał rozkład asymptotycznie normalny o średniej 0^0 i macierzy kowariancji równej odwrotności macierzy informacyjnej Fishera.

Ciąg estymatorów o powyższej własności nazywany jest asymptotycznie efektywnym lub ciągiem estymatorów najlepszych, asymptotycznie normalnych. Przy czym termin "najlepszy" należy rozumieć w odniesieniu do danych warunków eksperymentu.

Przez odpowiedni dobór położenia punktów pomiarowych i wymuszenia można kształtować własności macierzy kowariancji asymptotycznego rozkładu ciągu estymatorów $\bar{\theta}_N^*(S_N)$ $N = 1, 2, \dots$. Problem ten jest związany z planowaniem eksperymentu i zostanie sformułowany

w rozdziale III.

W obu powyższych zadaniach dążyć należy do tego, by podawane warunki wystarczające były jak najmniej ograniczające ale jednocześnie łatwe do sprawdzenia.

2. ZGODNOŚĆ CIĄGU ESTYMATORÓW NAJWIĘKSZEJ WIAROGODNOŚCI I IDENTYFIKOWALNOŚĆ

Analiza problemów pracy przedstawiona zostanie w innej kolejności niż je sformułowano w podrozdziale 1.3. Wynika to z konieczności uwzględnienia warunków zapewniających wysoką jakość estymacji przy konstruowaniu algorytmu obliczeniowego identyfikacji.

Badanie problemu zgodności estymatorów, przedstawione w tym rozdziale, poprzedzone jest wyprowadzeniem wzoru na funkcję wiarygodności (podrozdział 2.1) i analizą przyczyn, które prowadzić mogą do braku zgodności (podrozdział 2.2). Zasadnicze twierdzenie 2.1 o warunkach wystarczających dla mocnej zgodności ciągu estymatorów największej wiarygodności parametrów obiektu rozłożonego, podane w podrozdziale 2.3, poprzedzone jest trzema lematami. W lematkach tych dowodzi się ekstremalnych własności uśrednionej funkcji wiarygodności. Wnioski z twierdzenia 2.1 podają warunki asymptotycznej nieobciążoności i średniokwadratowej zbieżności ciągu estymatorów. Przeprowadzona analiza założeń twierdzenia 2.1 prowadzi do stwierdzenia, że jednym z istotnych warunków jest identyfikowalność parametrów obiektu. Zagadnieniu zbadania warunków identyfikowalności poświęcony jest podrozdział 2.4.

2.1. Postać funkcji wiarygodności

Funkcja wiarygodności, oznaczana dalej przez $L_N(S_N; \bar{\theta})$, jest gęstością łącznego rozkładu prawdopodobieństwa pomiarów (obserwacji) rozpatrywaną jako funkcja wektora nieznanymi parametrów $\bar{\theta}$,

[64], [50], [69].⁽¹⁾

⁽¹⁾ Określenie to dotyczy przypadku gdy pomiary są realizacjami zmiennych losowych typu ciągłego. Nie podajemy określenia funkcji wiarygodności dla zmiennych losowych przyjmujących wartości dyskretne, gdyż taki model zakłóceń pomiarowych wydaje się mieć znacznie mniejsze znaczenie w identyfikacji.

Pokażemy, że informacja o opisie obiektu i zakłóceniach pomiarowych sformułowana w rozdziale 1), wystarczy do wyznaczenia $L_N(S_N; \bar{\theta})$. Rozważania przeprowadzimy dla obiektu dynamicznego opisanego równaniami (1.13), (1.14).

Zapisując $L_N(S_N; \bar{\theta})$ w postaci uwzględniającej fakt, że tablica pomiarów S_N składa się z dwóch części Y_N i W_N i korzystając z definicji warunkowej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa dostaniemy:

$$L_N(S_N; \bar{\theta}) \triangleq f_{S_N}(Y_N, W_N; \bar{\theta}) = f_{W, Y}(W_N/Y_N; \bar{\theta}) f_{Y_N}(Y_N; \bar{\theta}) \quad (2.1)$$

Rozważmy poszczególne czynniki we wzorze (2.1).

Łączna gęstość pomiarów wymuszenia pod warunkiem pomiarów stanu $f_{W, Y}(W_N/Y_N; \bar{\theta})$ nie zależy od Y_N gdyż na mocy założeń P5), P3) i P1) zestawy zmiennych losowych W_N i Y_N są niezależne. Pozwala to zapisać tę gęstość w postaci $f_{W_N}(W_N; \bar{\theta})$. Łączną gęstość rozkładu prawdopodobieństwa pomiarów stanu $f_{Y_N}(Y_N; \bar{\theta})$ można przedstawić jako iloczyn gęstości rozkładów pomiarów stanu w poszczególnych chwilach $f_{\bar{y}_n}(\bar{y}_n; \bar{\theta})$ (na podstawie założenia P1)). Podobnie, warunek P3) pozwala zapisać:

$$f_{W_N}(W_N; \bar{\theta}) = \prod_{n=1}^N f_{\bar{w}_n}(\bar{w}_n; \bar{\theta}) \quad (2.2)$$

gdzie $f_{\bar{w}_n}(\bar{w}_n; \bar{\theta})$ jest łączną gęstością rozkładu prawdopodobieństwa pomiarów wymuszenia w chwili t_n .

W rezultacie (2.1) przekształciliśmy do:

$$L_N(S_N; \bar{\theta}) = \prod_{n=1}^N f_{\bar{y}_n}(\bar{y}_n; \bar{\theta}) f_{\bar{w}_n}(\bar{w}_n; \bar{\theta}) \quad (2.3)$$

Z niezależności zmiennych losowych reprezentujących zakłócenia pomiarowe w różnych punktach przestrzennych (założenia P2) i P4))

wynika że:

$$f_{\bar{y}_n}(\bar{y}_n; \bar{\theta}) = \prod_{i=1}^I f_{y_{in}}(y_{in}; \bar{\theta}) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

$$f_{\bar{w}_n}(\bar{w}_n; \bar{\theta}) = \prod_{k=1}^K f_{w_{kn}}(w_{kn}; \bar{\theta}) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

gdzie $f_{y_{in}}(y_{in}; \bar{\theta})$ i $f_{w_{kn}}(w_{kn}; \bar{\theta})$ są odpowiednio gęstościami rozkładu prawdopodobieństwa pojedynczego pomiaru stanu i wymuszenia. Gęstości te łatwo otrzymać znając $f_z(z; x)$ i $f_\zeta(\zeta; \xi)$ i opis pomiarów

$$y_{in} = q(x_i, t_n; \bar{\theta}) + z^n(x_i) \quad i=1, 2, \dots, I \quad (2.6)$$

$$w_{kn} = u(\xi_k, t_n; \bar{b}) + \zeta^n(\xi_k) \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2.7)$$

Stosując znane wzory na gęstość rozkładu zmiennej losowej uzyskanej w wyniku jednoznaczego i różniczkowalnego przekształcenia innej zmiennej losowej (por. [72]) dostaniemy:

$$f_{y_{in}}(y_{in}; \bar{\theta}) = f_z(y_{in} - q(x_i, t_n; \bar{\theta}); x_i) \quad (2.8)$$

$$f_{w_{kn}}(w_{kn}; \bar{\theta}) = f_\zeta(w_{kn} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}); \xi_k) \quad (2.9)$$

W wyniku kolejnych podstawień do (2.3) uzyskujemy ostatecznie:

$$L_N(S_N; \bar{\theta}) = \prod_{n=1}^N \left[\prod_{i=1}^I f_z(y_{in} - q(x_i, t_n; \bar{\theta}); x_i) \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^K f_\zeta(w_{kn} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}); \xi_k) \right]. \quad (2.10)$$

W dalszej części pracy korzystać będziemy z postaci $L_N(S_N; \bar{\theta})$ danej przez (2.10) lub ze skróconego zapisu:

$$L_N(S_N; \bar{\theta}) = \prod_{n=1}^N f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) \quad (2.11)$$

wynikającego wprost z (2.3) i określenia \bar{s}_n , dla

$$f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) = f_{\bar{y}_n}(\bar{y}_n; \bar{\theta}) f_{\bar{w}_n}(\bar{w}_n; \bar{\theta}) \quad n=1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

W analogiczny sposób można wyprowadzić funkcję wiarygodności dla zadania estymacji parametrów obiektu statycznego. Funkcja ta ma postać:

$$L_N(S_N; \bar{\theta}) = \prod_{n=1}^N \left[\prod_{i=1}^K f_z(y_{in} - q(x_i; \bar{\theta}); x_i) \prod_{k=1}^K f_3(w_{kn} - u(\xi_k; b); \xi_k) \right] \quad (2.12)$$

Podkreślić należy, że obliczenie wartości $L_N(S_N; \bar{\theta})$ dla danego θ wymaga rozwiązania (na ogół metodami numerycznymi) równań (1.13), (1.14) (lub też równania (1.15) dla obiektu statycznego) w celu obliczenia wartości $q(x_i, t_n; \bar{\theta})$ $i=1, 2, \dots, I$, $n=1, 2, \dots, N$.

2.2. Zgodność ciągu estymatorów. Definicje i przykłady

Zagadnienie wyboru kryteriów, które pozwalają odróżnić "dobre" estymatory od "złych" jest jednym z centralnych problemów teorii estymacji. Szeroki przegląd używanych kryteriów doboru estymatorów zawiera praca [69].

Pojęcie zgodności estymatora jest formalizacją wymagania by wraz ze wzrostem liczby obserwacji (pomiarów) estymator coraz lepiej przybliżał nieznane wartości parametrów. Ponieważ estymator, jako funkcja mierzalna zmiennej losowej, jest zmienną losową więc możliwe są różne wersje formalizacji pojęcia zgodności estymatora, w zależności od sposobu rozumienia zbieżności ciągu zmiennych lo-

sowych [58]. W pracy tej korzystać będziemy z podanych niżej definicji [69], [58].

Definicja 2.1

Ciąg estymatorów $\bar{\theta}_N(\underline{S}_N)$ $N=1,2,\dots$ jest zgodny dla wektora parametrów $\bar{\theta}^0$ gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_N P \left\{ \|\bar{\theta}_N(\underline{S}_N) - \bar{\theta}^0\| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (2.13)$$

tzn. gdy ciąg $\bar{\theta}_N(\underline{S}_N)$ jest stochastycznie zbieżny do $\bar{\theta}^0$.

Definicja 2.2

Ciąg estymatorów $\bar{\theta}_N(\underline{S}_N)$ $N=1,2,\dots$ jest mocno zgodny dla wektora parametrów $\bar{\theta}^0$ gdy $\bar{\theta}_N(\underline{S}_N)$ jest zbieżny do $\bar{\theta}^0$ z prawdopodobieństwem 1 tzn.

$$P \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\theta}_N(\underline{S}_N) = \bar{\theta}^0 \right\} = 1 \quad (2.14)$$

Ponieważ ze zbieżności z prawdopodobieństwem 1 ciągu zmiennych losowych wynika jego zbieżność stochastyczna więc z mocnej zgodności ciągu estymatorów wynika jego zgodność.

U w a g a: Czasem zamiast długiego zwrotu "... ciąg estymatorów $\bar{\theta}_N(\underline{S}_N)$ $N=1,2,\dots$ jest zgodny..." używa się skrótu "estymator $\bar{\theta}_N(\underline{S}_N)$ jest zgodny...", [64]. Taka skrócona forma używana będzie także w tej pracy, tam gdzie nie prowadzi to do niejasności.

Wiadomo, że w klasycznym zadaniu estymacji estymatory największej wiarygodności są zgodne przy stosunkowo słabych założeniach.

Poniższe przykłady pokazują, że bez nałożenia pewnych warunków estymatory mogą nie być zgodne i wskazują czynniki wpływające na zachowanie się estymatorów w rozważanym w tej pracy zadaniu.

Przykład 2.1

Niech badany obiekt opisany będzie równaniem:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = a^{(1)} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} - a^{(2)} q(x,t) + u(x,t) \quad (2.15)$$

dla $x \in (0, \pi)$ i $t \in (0, T_0)$ z warunkami brzegowymi:

$$q(0,t) = q(\pi,t) = 0 \quad t \in (0, T_0) \quad (2.16)$$

i warunkiem początkowym:

$$q(x,0) = 0 \quad x \in (0, \pi). \quad (2.17)$$

Parametry $a^{(1)}$ i $a^{(2)}$ obiektu nie są znane. Dla ich oszacowania przeprowadza się eksperyment polegający na podaniu wymuszenia o postaci:

$$u(x,t) = u(t) \sin x \quad (2.18)$$

gdzie $u(t)$ jest pewną znaną funkcją czasu i pomiary stanu obiektu w dwóch ustalonych punktach x_1, x_2 odcinka $(0, \pi)$:

$$y_{in} = q(x_i, t_n; \bar{a}) + z^n(x_i) \quad i=1,2, \quad n=1,2,\dots,N \quad (2.19)$$

Zakładamy, że zakłócenia pomiarowe spełniają warunki P1), P2) i P3).

Z rozważań przeprowadzonych w 2.1 wynika, że:

$$L_N(Y_N; \bar{a}) = \prod_{n=1}^N f_Z(y_{1n} - q(x_1, t_n; \bar{a}); x_1) f_Z(y_{2n} - q(x_2, t_n; \bar{a}); x_2) \quad (2.20)$$

Przez bezpośrednie zróżniczkowanie można sprawdzić, że:

$$q(x, t; \bar{a}) = \sin x \int_0^t e^{-(a^{(1)} + a^{(2)})\tau} u(t-\tau) d\tau \quad (2.21)$$

jest rozwiązaniem zagadnienia mieszanego (2.15), (2.16), (2.17) przy $u(x, t)$ danym przez (2.18).

Wstawienie (2.21) do (2.20) pozwala stwierdzić, że funkcja wiarygodności zależy tylko od wartości sumy $a^{(2)} + a^{(1)}$ a nie od wartości samych parametrów $a^{(1)}$ i $a^{(2)}$.

Fakt ten powoduje, że jeśli dla $a_N^{*(1)}$ i $a_N^{*(2)}$ funkcja wiarygodności osiąga maksimum globalne, to osiąga je także dla dowolnych $a_N^{(1)}$ i $a_N^{(2)}$ spełniających warunek:

$$a_N^{*(1)} + a_N^{*(2)} = a_N^{(1)} + a_N^{(2)}. \quad (2.22)$$

Zauważmy, że własność ta zachodzi dla każdego N i w związku z tym otrzymujemy wiele ciągów estymatorów największej wiarygodności. Jeśli istnieje wśród nich ciąg $\tilde{a}_N^{(1)}(\underline{y}_N)$, $\tilde{a}_N^{(2)}(\underline{y}_N)$, $N = 1, 2, \dots$ mocno zgodny to na podstawie posiadanej informacji nie można go odróżnić od ciągu $\tilde{a}_N^{(1)}(\underline{y}_N) + 100$, $\tilde{a}_N^{(2)}(\underline{y}_N) - 100$, $N = 1, 2, \dots$, który oczywiście nie jest mocno zgodny.

Skorzystanie z takich "złych" oszacowań $\tilde{a}_N^{(1)} + 100$, $\tilde{a}_N^{(2)} - 100$ w równaniu (2.15) spowoduje duże różnice między przewidywanymi a zmiennymi na obiekcie wartościami stanu, o ile tylko podane wymuszenie będzie miało inną postać niż (2.18).

Powyższy przykład ilustruje wpływ wymuszenia na zgodność estymatora największej wiarygodności. Celem następnego przykładu jest pokazanie, że równie istotne jest położenie punktów pomiarowych i ich ilość.

Przykład 2.2

Rozważmy obiekt, którego stan spełnia równanie:

$$a^{(1)} \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^{2(1)}} + a^{(2)} \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^{2(2)}} = -u(x) \quad (2.23)$$

w prostokącie $\{[x^{(1)}, x^{(2)}]^T : 0 < x^{(i)} < \pi \ i=1,2\}$, uzupełnione warunkiem brzegowym:

$$q(x) = 0 \quad \text{gdy } x^{(1)} \text{ lub } x^{(2)} \text{ równa się } 0 \text{ lub } \pi.$$

Rozwiązanie równania (2.23) przy wymuszeniu

$$u(x) = \sin x^{(1)} \sin x^{(2)} + \sin x^{(1)} \sin 2x^{(2)} \quad (2.24)$$

ma postać:

$$q(x; \bar{a}) = \frac{1}{a^{(1)} + a^{(2)}} \sin x^{(1)} \sin x^{(2)} + \frac{1}{a^{(1)} + 4a^{(2)}} \sin x^{(1)} \sin 2x^{(2)} \quad (2.25)$$

W rezultacie wielokrotnego pomiaru stanu danego przez (2.25), w punkcie $x_1 = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right]^T$ otrzymano pomiary:

$$y_{1n} = q(x_1; \bar{a}) + z^n(x_1) \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.26)$$

pozwalające obliczyć funkcję wiarygodności:

$$L_N(Y_N; \bar{a}) = \prod_{n=1}^N f_z(y_{1n} - q(x_1; \bar{a}); x_1). \quad (2.27)$$

Przypuśćmy, że $a_N^{*(1)}$ i $a_N^{*(2)}$ maksymalizują funkcję wiarygodności. Łatwo sprawdzić, że również $a_N^{(1)}$ i $a_N^{(2)}$ spełniające układ równań:

$$a_N^{(1)} + 4a_N^{(2)} = 2(a_N^{(1)} + a_N^{(2)}) \quad (2.28)$$

$$a_N^{(1)} + a_N^{(2)} = \frac{2}{2}(a_N^{(1)} + 4a_N^{(2)})$$

są równie wiarygodne i własność ta zachodzi dla dowolnego $N=1,2,\dots$. Powtarzając rozumowanie zastosowane w przykładzie 2.1 stwierdzamy, że jeden z tych ciągów nie może być zgodny i bez dodatkowej infor-

macji nie można ich rozróżnić.

Zauważmy, że umieszczenie drugiego punktu pomiarowego w złym miejscu, na przykład w punkcie $[0, \frac{\pi}{3}]^T$, nie zmienia sytuacji.

W obu przykładach zakładano pełną znajomość wymuszenia u .

W przypadku gdy wymuszenie zawiera nieznane parametry a eksperyment jest źle zaplanowany maksimum globalne funkcji wiarygodności może być osiągnięte w wielu punktach powodując brak zgodności pewnych ciągów estymatorów.

Zauważmy, że w obu powyższych przykładach przyczyną braku zgodności ciągu estymatorów największej wiarygodności jest następująca własność obiektu (ujawniająca się przy danym eksperymencie): dla pewnych wektorów parametrów $\bar{a}' \neq \bar{a}''$ zachodzi:

$$q(x_i, t_n; \bar{a}') = q(x_i, t_n; \bar{a}'') \quad i=1, 2, \dots, I, \quad n=1, 2, \dots, N \quad (2.29)$$

Obiekt, który przy danym eksperymencie ma przeciwną własność nazywać będziemy identyfikowalnym. Pojęcie to precyzuje poniższa definicja.

Definicja 2.3

Wektor parametrów a obiektu opisanego równaniem (1.13) jest identyfikowalny na podstawie znajomości stanu w chwili t_n w punktach x_1, x_2, \dots, x_I , przy danym wymuszeniu u i warunku początkowym φ , jeżeli dla dowolnych $\bar{a}', \bar{a}'' \in \mathcal{A}$ takich, że $\bar{a}' \neq \bar{a}''$, zachodzi co najmniej jedna z poniższych nierówności:

$$q(x_i, t_n; \bar{a}') \neq q(x_i, t_n; \bar{a}'') \quad i=1, 2, \dots, I \quad (2.30)$$

Pewne uwagi o definicji 2.3 i warunki wystarczające identyfikowalności podane zostaną w podrozdziale 2.4.

2.3. Warunki zgodności estymatorów największej wiarygodności w zadaniu identyfikacji

Przykłady przytoczone w poprzednim punkcie świadczą o potrzebie zbadania zgodności estymatorów największej wiarygodności stosowanych do estymacji parametrów obiektu (1.13), (1.14). Potrzeba taka wynika także z porównania postaci funkcji wiarygodności uzyskanej w punkcie 2.1 z funkcją wiarygodności w klasycznym zadaniu estymacji parametrów rozkładu zmiennej losowej na podstawie niezależnych obserwacji [50].

Jak wynika ze wzoru (2.11), rozpatrywane w rozprawie zadanie polega na estymacji wektora parametrów na podstawie niezależnych obserwacji zmiennych losowych o rozkładach zmieniających się w trakcie obserwacji ale zależnych od tego samego wektora parametrów. W pracy [50] podkreśla się potrzebę każdorazowego badania własności estymatorów największej wiarygodności przy niestacjonarnych rozkładach, gdyż nie zawsze są one zgodne, o czym świadczą zamieszczone w cytowanej pracy przykłady.

Twierdzenia o mocnej zgodności estymatorów największej wiarygodności w zadaniu estymacji sformułowanym w rozdziale 1, poprzedzimy trzema lematami.

L e m a t 2.1

Rozważmy zadanie estymacji sformułowane w podrozdziale 1.3.

Jeżeli

- a) wymuszenie działające na obiekt ma w chwili t_n następującą własność: dla dowolnych $\bar{b}', \bar{b}'' \in \mathcal{B}; \bar{b}' \neq \bar{b}''$ zachodzi co najmniej jedna z nierówności:

$$u(\xi_k, t_n; \bar{b}') \neq u(\xi_k, t_n; \bar{b}'') \quad k=1, 2, \dots, K$$

- b) dla dowolnego $\bar{b} \in \mathcal{B}$ wektor parametrów obiektu jest identyfiko-

walny w chwili t_n na podstawie znajomości stanu w punktach x_i $i=1,2,\dots,I$ przy wymuszeniu $u(x,t;\bar{b})$ i warunku początkowym φ to dla dowolnych $\bar{\theta}', \bar{\theta}'' \in \mathcal{M}$ takich, że $\bar{\theta}' \neq \bar{\theta}''$ zachodzi nierówność:

$$P_{\bar{\theta}'} \{f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}') \neq f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}'')\} > 0 \quad (2.31)$$

D o w ó d:

Przypuśćmy, że dla pewnych $\bar{\theta}'$ i $\bar{\theta}'' \in \mathcal{M}$ takich, że $\bar{\theta}' \neq \bar{\theta}''$ nierówność (2.31) nie zachodzi. Oznacza to, że dla prawie wszystkich \bar{s}_n ma miejsce:

$$f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}') = f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}'') \quad (2.32)$$

czyli, uwzględniając (2.11):

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^I f_z(y_{in} - q(x_i, t_n; \bar{\theta}'); x_i) \prod_{k=1}^K f_j(w_{kn} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}'); \xi_k) = \\ & = \prod_{i=1}^I f_z(y_{in} - q(x_i, t_n; \bar{\theta}''); x_i) \prod_{k=1}^K f_j(w_{kn} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}''); \xi_k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Równość (2.33) może zachodzić dla prawie wszystkich \bar{y}_n i \bar{w}_n tylko wtedy gdy:

$$q(x_i, t_n; \bar{\theta}') = q(x_i, t_n; \bar{\theta}'') \quad i=1,2,\dots,I \quad (2.34)$$

i równocześnie:

$$u(\xi_k, t_n; \bar{b}') = u(\xi_k, t_n; \bar{b}'') \quad k=1,2,\dots,K. \quad (2.35)$$

Między założeniem a) i warunkiem (2.35) nie wystąpi sprzeczność tylko wtedy gdy $\bar{b}' = \bar{b}'' = \bar{b}$. Na mocy określenia $\bar{\theta}$ i założenia $\bar{\theta}' \neq \bar{\theta}''$ wynika stąd, że $\bar{a}' \neq \bar{a}''$. Jednakże wtedy występuje sprzeczność, między (2.34) i założeniem o identyfikowalności w chwili t_n

przy wymuszeniu $u(x, t; \bar{b})$, dowodząca prawdziwości lematu.

c.b.d.o.

Mówiąc nieprecyzyjnie, z lematu tego wynika, że jeśli możliwe jest rozróżnienie dwóch różnych wektorów parametrów na podstawie dokładnej znajomości stanu w pewnej chwili to parametry te można rozróżnić z niezerowym prawdopodobieństwem także na podstawie pomiarów obarczonych błędem losowym.

Powtarzając powyższe rozważania można udowodnić prawdziwość analogicznego lematu dla przypadku gdy obiekt jest w stanie ustalonym.

Następny lemat daje pewną charakteryzację wektora nieznanych parametrów $\bar{\theta}^0$.

L e m a t 2.2

Niech w każdej chwili dokonywania pomiarów t_n $n=1, 2, \dots$ spełnione będą założenia a) i b) lematu 2.1 i oprócz tego warunek:
c) dla dowolnego $n=1, 2, \dots$ i dowolnych $\bar{\theta}', \bar{\theta}''$ istnieje

$$\int_{\bar{s}'_n}^{\bar{\theta}'_n} \ln f_n(\bar{s}'_n; \bar{\theta}') = \int_{R^{I+K}} \ln f_n(\bar{s}'_n; \bar{\theta}'') f_n(\bar{s}'_n; \bar{\theta}'') d\bar{s}'_n \quad (2.36)$$

Wtedy dla dowolnego $\bar{\theta} \in \Theta$, jeżeli $\bar{\theta} \neq \bar{\theta}^0$ to dla każdego $N = 1, 2, \dots$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\int_{\bar{s}'_n}^{\bar{\theta}'_n} \ln f_n(\bar{s}'_n; \bar{\theta}) - \int_{\bar{s}'_n}^{\bar{\theta}^0_n} \ln f_n(\bar{s}'_n; \bar{\theta}^0) \right] < 0 \quad (2.37)$$

D o w ó d:

Rozważmy pojedynczy element sumy (2.37):

$$E_{\underline{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \ln \left[f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta}) / f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta}^0) \right] \quad (2.38)$$

dla pewnego $\bar{\theta} \neq \bar{\theta}^0$, $\bar{\theta} \in \Theta$ i pewnego n . Ponieważ, na mocy lematu 2.1, zachodzi:

$$P_{\bar{\theta}^0} \left\{ \frac{f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta})}{f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta}^0)} \neq 1 \right\} > 0 \quad (2.39)$$

to korzystając z nierówności $\ln x < x-1$ dla $x \neq 1$, dostajemy:

$$E_{\underline{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \ln \left[\frac{f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta})}{f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta}^0)} \right] < E_{\underline{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \left[\frac{f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta})}{f_n(\underline{s}_n; \bar{\theta}^0)} - 1 \right] = 0 \quad (2.40)$$

Wielokrotne użycie nierówności (2.40) dla $n=1,2,\dots,N$, daje tezę (2.37).

c.b.d.o.

Lemat powyższy stwierdza, że, przy pewnych założeniach, wektor nieznanymi parametrów $\bar{\theta}$ jest maksimum globalnym na zbiorze Θ uśrednionego logarytmu funkcji wiarygodności, tzn.

$$\forall_{\substack{\bar{\theta} \neq \bar{\theta}^0 \\ \bar{\theta} \in \Theta}} \forall_{N=1,2,\dots} E_{\underline{s}_N}^{\bar{\theta}^0} \ln L_N(\underline{s}_N; \bar{\theta}) < E_{\underline{s}_N}^{\bar{\theta}^0} \ln L_N(\underline{s}_N; \bar{\theta}^0). \quad (2.41)$$

Fakt ten jest bardzo ważny dla dowodu mocnej zgodności ciągu estymatorów parametrów obiektu rozłożonego.

Kolejny lemat stanowi wzmocnienie nierówności (2.41). Stwierdza on, że jeżeli tylko odległość między $\bar{\theta}$ a $\bar{\theta}^0$ jest dostatecznie duża to także różnica:

$$E_{\underline{s}_N}^{\bar{\theta}^0} \ln L_N(\underline{s}_N; \bar{\theta}^0) - E_{\underline{s}_N}^{\bar{\theta}^0} \ln L_N(\underline{s}_N; \bar{\theta}) \quad (2.42)$$

jest również większa od pewnej liczby i to niezależnie od N . Oczywiście dowód takiego faktu wymaga nałożenia dodatkowych warunków

na wymuszenie i położenie punktów pomiarowych i gęstości rozkładów pomiarowych.

L e m a t 2.3

Niech spełnione będą założenia lematów 2.1 i 2.2. Niech dalej wymuszenie u i położenie punktów pomiarowych będzie takie, że:

$$d) \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\eta > 0} \forall_{\|\bar{b}' - \bar{b}''\| > \varepsilon} \forall_{n=1,2,\dots} \max_{k=1,2,\dots,K} |u(\xi_k, t_n; \bar{b}') - u(\xi_k, t_n; \bar{b}'')| > \eta \quad (2.43)$$

e) przy wymuszeniu $u(x, t; \bar{b})$, dla każdego $\bar{b} \in \mathcal{B}$, stan obiektu (1.13), (1.14) ma własność:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\hat{\eta} > 0} \forall_{\|\bar{a}' - \bar{a}''\| > \varepsilon} \forall_{n=1,2,\dots} \max_{i=1,2,\dots,I} |q(x_i, t_n; \bar{\theta}') - q(x_i, t_n; \bar{\theta}'')| > \hat{\eta} \quad (2.44)$$

f) istnieją funkcje $\nu_z(\eta; x)$, $\nu_3(\eta; \xi)$ określone dla dowolnych $x, \xi \in \Omega \cup \Gamma$ i takie, że:

$$\forall_{x \in \Omega \cup \Gamma} \forall_{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} [\ln f_z(z-\delta; x) - \ln f_z(z; x)] f_z(z; x) dz \leq -\nu_z(\delta; x), \quad (2.45)$$

$$\nu_z(\eta; x) \geq 0, \quad \nu_z(\eta; x) = 0 \Leftrightarrow \eta = 0 \quad ;$$

$$\forall_{\xi \in \Omega \cup \Gamma} \forall_{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} [\ln f_3(z-\delta; \xi) - \ln f_3(z; \xi)] f_3(z; \xi) dz \leq -\nu_3(\delta; \xi), \quad (2.46)$$

$$\nu_3(\eta; \xi) \geq 0, \quad \nu_3(\eta; \xi) = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$$

i funkcje ν_z, ν_3 są niemalejące względem $|\eta|$ dla dowolnych $x, \xi \in \Omega \cup \Gamma$.
Przy powyższych założeniach dla każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\omega > 0$ takie, że:

$$\forall_{\bar{\theta} \in \Theta} \|\bar{\theta} - \bar{\theta}^0\| > \varepsilon \Rightarrow \forall_{N=1,2,\dots} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_{\bar{s}_n^{\bar{\theta}^0}} \left[\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \right] \leq -\omega \quad (2.47)$$

U w a g a: W powyższym lemacie $\|\bar{Q}\| = \max_{i=1,2,\dots,j} |Q^{(i)}|$, $\dim |\bar{Q}| = j$

D o w ó d:

Rozważmy pojedynczy składnik sumy z tezy lematu:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\bar{s}_n^{\bar{\theta}^0}} \left[\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \right] &= \sum_{i=1}^I \mathbb{E}_{z_{in}} \left[\ln f_z(z_{in} + q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0) - \right. \\ &\left. - q(x_i, t_n; \bar{\theta}); x_i) - \ln f_z(z_{in}; x_i) \right] + \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{z_{kn}} \left[\ln f_z(z_{kn} + u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0) - \right. \\ &\left. - u(\xi_k, t_n; \bar{b}); \xi_k) - \ln f_z(z_{kn}; \xi_k) \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Metodą użytą w trakcie dowodu lematu 2.2 wykazać można, że każdy składnik sum w powyższym wzorze jest nieujemny.

Dalsze rozważania prowadzone będą dla pewnego, ustalonego $\varepsilon > 0$. Jeżeli $\|\bar{\theta} - \bar{\theta}^0\| > \varepsilon$, to możliwe są trzy, wykluczające się, możliwości:

- 1) $\|\bar{a} - \bar{a}^0\| \geq \varepsilon_1 > 0$ i $\|\bar{b} - \bar{b}^0\| \geq \varepsilon_2 > 0$ i co najmniej jedna z liczb $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ większa lub równa ε ,
- 2) $\|\bar{a} - \bar{a}^0\| > \varepsilon$ i $\|\bar{b} - \bar{b}^0\| = 0$,
- 3) $\|\bar{b} - \bar{b}^0\| > \varepsilon$ i $\|\bar{a} - \bar{a}^0\| = 0$.

Rozważmy najpierw przypadek 2). Na mocy założenia e) $\exists \eta' > 0 \|\bar{a} - \bar{a}^0\| > \varepsilon \Rightarrow |q(x_i, t_n; \bar{\theta}) - q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0)| > \eta'$ dla pewnego i . Po skorzystaniu z założenia f) dostaniemy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\ln f_z(z_{in} + q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0) - q(x_i, t_n; \bar{\theta}); x_i) - \ln f_z(z_{in}; x_i)] f_z(z_{in}; x_i) d_{z_{in}} \leq -\gamma_z(\eta'; x_i) \quad (2.49)$$

Dla różnych wartości a maksimum w założeniu e) może być osiągnięte dla różnych $i=1, 2, \dots, I$.

Największa wartość jaką może osiągnąć pierwsza suma we wzorze (2.48) wynosi $-\omega_2$, gdzie:

$$\omega_2 = \min_{i=1, 2, \dots, I} \gamma_z(\eta'; x_i) .$$

Prowadząc analogiczne rozważania dla przypadku 3), z wykorzystaniem założeń d) oraz f) otrzymamy wniosek, że dla dowolnych \bar{b} , wartość drugiej sumy we wzorze (2.48) nie jest większa niż $-\omega_3$, gdzie

$$\omega_3 = \min_{k=1, 2, \dots, K} \gamma_3(\eta''; \xi_k)$$

Istnienie odpowiedniej dla danego ξ , wartości $\eta'' > 0$ gwarantuje założenie d).

Biorąc pod uwagę nieujemność wszystkich składników we wzorze (2.48) do oszacowania w przypadku 1) można użyć wartości $-\omega_2$, jeżeli $\varepsilon_1 \gg \varepsilon$ i $\varepsilon_2 < \varepsilon$, wartości $-\omega_3$ jeżeli $\varepsilon_2 \gg \varepsilon$ i $\varepsilon_1 < \varepsilon$. W sytuacji gdy $\varepsilon_1 \gg \varepsilon$ i $\varepsilon_2 \gg \varepsilon$ prawą stronę wzoru (2.48) jest nie większa niż $-\omega$, gdzie $\omega = \min(\omega_1, \omega_2)$. Ponieważ dla różnych $\bar{\theta}$ może zajść każdy z przypadków 1)-3) to oszacowaniem nie zależącym od $\bar{\theta}$ jest wartość $-\omega$.

W ten sposób uzyskaliśmy:

$$\exists \omega > 0 \forall \|\bar{\theta} - \bar{\theta}^0\| > \varepsilon \int_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)] \leq -\omega \quad (2.50)$$

i wartość ω nie zależy od n .

T w i e r d z e n i e 2.1

Niech spełnione będą warunki:

- 1) spełnione są wszystkie założenia lematu 2.3,
- 2) gęstości rozkładów prawdopodobieństwa zakłóceń pomiarowych $f_z(z; \mathbf{x})$ i $f_z(z; \xi)$ są ciągłymi funkcjami argumentu, odpowiednio z i ξ dla $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, I$, $\xi = \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, K$,
- 3) wymuszenie $u(\mathbf{x}, t; \bar{\mathbf{b}})$ jest ciągłą funkcją wektora $\bar{\mathbf{b}} \in \mathcal{B}$ dla $\mathbf{x} = \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, $t = t_n$; $n = 1, 2, \dots$.
- 4) dla dowolnych $\bar{\theta}', \bar{\theta}'' \in \Theta$ i dowolnego $n=1, 2, \dots$ istnieje

$E_{\bar{\mathbf{s}}_n}^{\bar{\theta}'} [\ln f_n(\bar{\mathbf{s}}_n; \bar{\theta}'')]^2$ i prócz tego szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E_{\bar{\mathbf{s}}_n}^{\bar{\theta}'} [\ln f_n(\bar{\mathbf{s}}_n; \bar{\theta}'')]^2 \quad (2.51)$$

jest zbieżny.

Przy powyższych założeniach ciąg estymatorów największej wiarygodności $\bar{\theta}_N^*(\underline{\mathbf{s}}_N)$ jest mocno zgodny dla $\bar{\theta}^0$ tzn.

$$P \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\theta}_N^*(\underline{\mathbf{s}}_N) = \bar{\theta}^0 \right\} = 1$$

Idea dowodu podobna jest do tej jaką użył Wald [76] w pracy dotyczącej zgodności estymatorów największej wiarygodności w zadaniu estymacji parametrów rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie niezależnych obserwacji zmiennej losowej o tym samym rozkładzie. Jednakże ze względu na zależność gęstości $f_n(\bar{\mathbf{s}}_n; \bar{\theta})$ od n poniższy dowód różni się znacznie od klasycznego.

D o w ó d:

Rozważmy ciąg zmiennych losowych:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln f_n(\bar{\mathbf{s}}_n; \bar{\theta}) - E_{\bar{\mathbf{s}}_n}^{\bar{\theta}^0} [\ln f_n(\bar{\mathbf{s}}_n; \bar{\theta})]. \quad (2.52)$$

Zmienne losowe $\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})]$ są niezależne dla różnych n i mają zerową wartość oczekiwaną i wariancję:

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})]^2 - \left[\mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) \right]^2 \quad n=1, 2, \dots \quad (2.53)$$

Ze względu na oczywiste oszacowanie

$$\sigma_n^2 \leq \mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})]^2 \quad n=1, 2, \dots \quad (2.54)$$

i założenie 4) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sigma_n^2$ jest zbieżny.

Fakty te pozwalają zastosować mocne prawo wielkich liczb dla zmiennych losowych niezależnych o dowolnych rozkładach [58] do ciągu (2.52), co daje:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})] \right\} = 0 \quad \text{z P=1} \quad (2.55)$$

i zbieżność ta ma miejsce dla dowolnego $\bar{\theta} \in \Theta$.

Korzystając z (2.55) dwukrotnie dla $\bar{\theta}^0$ i dowolnego $\bar{\theta} \in \Theta$ otrzymamy:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \right] \right\} = 0 \quad \text{z P=1} \quad (2.56)$$

Ustalmy pewne $\varepsilon > 0$. Z lematu 2.3 wynika, że istnieje $\omega(\varepsilon) > 0$ takie, że jeśli:

$$\|\bar{\theta} - \bar{\theta}^0\| > \varepsilon \quad \text{to:} \quad (2.57)$$

$$\forall_{N=1, 2, \dots} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \right] \leq -\omega(\varepsilon). \quad (2.58)$$

Zauważmy dalej, że z (2.56) wynika stwierdzenie:

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \hat{N}(\eta) \quad \forall N \geq \hat{N}(\eta)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)] < \eta + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_{\bar{s}_n} [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)] \quad (2.59)$$

dla prawie wszystkich realizacji zmiennych losowych s_n $n=1, 2, \dots$.

Szacując dalej (2.59) z użyciem (2.58) otrzymamy:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \hat{\omega}(\varepsilon) > 0 \quad \exists \hat{N} > 0 \quad \forall \bar{\theta} \in \Theta \quad (\|\bar{\theta} - \bar{\theta}^0\| > \varepsilon \Rightarrow \forall N \geq \hat{N})$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)] \leq -\hat{\omega}(\varepsilon) \quad \text{z P=1} \quad (2.60)$$

Jako $\hat{\omega}(\varepsilon)$ można wybrać, na przykład, $\frac{1}{2}\omega(\varepsilon)$.

Otrzymana własność (2.60) stanowi ważny etap dowodu. Wynika z niej łatwo mocna zgodność ciągu estymatorów. Gdyby nie zachodziła równość:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\theta}_N^*(\underline{S}_N) = \bar{\theta}^0 \quad \text{z P=1} \quad (2.61)$$

to istniałoby $\tilde{\varepsilon} > 0$ i taki podciąg $\bar{\theta}_{N_k}^*(\underline{S}_{N_k})$ $k=1, 2, \dots$, że:

$$\forall k=1, 2, \dots \quad \|\bar{\theta}_{N_k}^*(\underline{S}_{N_k}) - \bar{\theta}^0\| > \tilde{\varepsilon} \quad (2.62)$$

dla realizacji macierzy losowych \underline{S}_{N_k} $k=1, 2, \dots$ należących do pewnego zbioru D takiego, że $P_\theta(D) > 0$.

W takim przypadku, na mocy 2.60, zachodzi:

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} [\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_{N_k}^*(\underline{S}_{N_k})) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)] < 0 \quad (2.63)$$

dla wszystkich N_k większych od pewnego N i dla wszystkich realizacji ze zbioru D .

Z drugiej strony $\bar{\theta}_N^*(\underline{S}_N)$, jako estymator największej wiarygodności, dla każdego N i $\bar{\theta} \in \Theta$ spełnia:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_N^*(\underline{S}_N)) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) \right] \geq 0 \quad \text{z } P=1 \quad (2.64)$$

Zapisując (2.64) dla $\bar{\theta} = \bar{\theta}^0$ dostaniemy:

$$\forall_{N=1,2,\dots} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_N^*(\underline{S}_N)) - \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \right] \geq 0 \quad \text{z } P=1 \quad (2.65)$$

Jednakże między (2.63) i (2.65) zachodzi sprzeczność dla wszystkich realizacji macierzy losowych \underline{S}_{N_k} $k=1,2,\dots$ należących do zbioru D ; $P_{\bar{\theta}^0}(D) > 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości (2.61).

c.b.d.o.

Dowód powyższego twierdzenia jest w znacznej mierze oparty na założeniu a) o identyfikowalności parametrów obiektu i założeniu b) o rozróżnialności parametrów wymuszenia. Przykłady 2.1 i 2.2 pokazują, że założenie o identyfikowalności jest istotne. Warunki wystarczające dla identyfikowalności zbadane zostaną w następnym podrozdziale. Tutaj zwrócimy tylko uwagę na fakt, że identyfikowalność parametrów obiektu można interpretować jako wymaganie istnienia odwzorowania odwrotnego do odwzorowania ze zbioru parametrów w zbiór wartości stanu w punktach pomiarowych. Analogicznie, warunek e) lematu 2.3 można interpretować jako wymaganie ciągłości wspomnianego wyżej odwzorowania odwrotnego. Interpretacja ta pozwala stosować twierdzenie o funkcjach uwikłanych do badania spełnienia warunku e), o ile tylko stan obiektu jest różniczkowalny względem parametrów (por. rozdział IV).

Łatwo można skonstruować przykłady pokazujące, że jeżeli warunek e) lub d) nie jest spełniony to ciąg estymatorów nie jest mocno zgodny.

Dla wielu znanych rozkładów prawdopodobieństwa funkcje γ_z i γ_ξ figurujące w założeniu f) lematu 2.3 można skonstruować za pomocą bezpośredniego scałkowania. Przykładowo - gdy

$$f_z(z; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2(x)}} \exp \left[-\frac{z^2}{2\epsilon^2(x)} \right] \text{ to funkcja } \gamma_z(\eta; x), \text{ spełniająca}$$

warunek f), dana jest wzorem:

$$\gamma_z(\eta; x) = \eta^2 / 2\epsilon^2(x), \quad x \in \mathcal{R} \cup \Gamma. \quad (2.66)$$

Warunek 4) twierdzenia 2.1 nakłada bardzo małe ograniczenia na warunki eksperymentu. Łatwo zauważyć, że jest on spełniony dla dowolnych gęstości f_z i f_ξ takich, że:

$$\mathbb{E}_z [\ln f_z(z; x)]^2 < \infty \quad \text{ i } \quad \mathbb{E}_\xi [\ln f_\xi(\xi; \xi)]^2$$

we wszystkich punktach pomiarów, o ile tylko dla dowolnego $\bar{\theta} \in \Theta$ zarówno stan obiektu jak i wymuszenie są ograniczonymi funkcjami czasu.

Na zakończenie rozważań niniejszego podrozdziału udowodnione zostaną dwie dalsze własności asymptotyczne ciągu estymatorów największej wiarygodności parametrów obiektu i wymuszenia.

W n i o s e k:

Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 2.1 i prócz tego zbiór Θ jest ograniczony to:

- 1) ciąg estymatorów $\bar{\theta}_N^*(S_N)$ jest zbieżny do $\bar{\theta}^0$ w sensie średnim i średniokwadratowym tzn.:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{S_N}^{\bar{\theta}^0} \|\bar{\theta}_N^*(S_N) - \bar{\theta}^0\|^p = 0; p=1,2 \quad (2.67)$$

2) Estymator $\bar{\theta}_N^*(S_N)$ jest asymptotycznie nieobciążony, tzn.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_{S_N}^{\bar{\theta}^0} [\bar{\theta}_N^*(S_N)] = \bar{\theta}^0 \quad (2.68)$$

D o w ó d:

Zbieżność w sensie średnim i średniokwadratowym wynika z faktu, że dla dowolnego N

$$E_{S_N}^{\bar{\theta}^0} \|\bar{\theta}_N^*(S_N) - \bar{\theta}^0\|^3 \leq d^3 \quad (2.69)$$

gdzie $d \triangleq \sup_{\bar{\theta}', \bar{\theta}'' \in \Theta} \|\bar{\theta}' - \bar{\theta}''\|$,

i ze zbieżności ciągu $\bar{\theta}_N^*(S_N)$ $N=1, 2, \dots$ do $\bar{\theta}^0$ z prawdopodobieństwem 1 (por. [69] str. 116).

Część druga wniosku jest konsekwencją części pierwszej i nierówności:

$$\|E_{S_N}^{\bar{\theta}^0} \bar{\theta}_N^*(S_N) - \bar{\theta}^0\| \leq E_{S_N}^{\bar{\theta}^0} \|\bar{\theta}_N^*(S_N) - \bar{\theta}^0\| \quad (2.70)$$

prawdziwej dla $N=1, 2, \dots$

c.b.d.o.

Warto zauważyć, że z mocnej zgodności ciągu estymatorów $\bar{\theta}_N^*(S_N)$ wynika zbieżność $q(x, t; \bar{a}_N^*(S_N))$ do $q(x, t; \bar{a}^0)$ w każdym punkcie $(x, t) \in$

$\Omega \times (0, T)$, gdy tylko stan zależy w sposób ciągły od parametrów.

2.4. Warunki identyfikowalności

Pojęciu identyfikowalność nadaje się w literaturze różne znaczenie [7], [51], [37]. Związki między różnymi znaczeniami pojęcia identyfikowalności dyskutowane są w pracy [35]. Jednocześnie efektywne warunki konieczne i/lub wystarczające dla identyfikowalności podano tylko dla liniowych obiektów o parametrach skupionych [15], [7].

Zaproponowane przez Goodsona i Kleina [37] pojęcie N-modalnej obserwowalności może ułatwić badanie identyfikowalności obiektów o parametrach rozłożonych. Niestety autorzy ograniczają się do zbadania kilku ważnych przykładów, nie podając jednak ogólnej metody postępowania. Identyfikowalność parametrów w równaniu przewodnictwa ciepła badana jest w pracy [51]. Zasadniczą wadą podanych w tej pracy warunków identyfikowalności jest możliwość ich sprawdzenia dopiero po wykonaniu eksperymentu. Jeśli okaże się, że warunki te nie są spełnione to eksperyment trzeba powtórzyć nadal nie mając gwarancji uzyskania pozytywnego rezultatu.

Niżej podane zostaną dwa warunki identyfikowalności określonej definicją (2.). Pierwszy z nich ma charakter ogólny i w większości przypadków jego spełnienie może być zbadane tylko na drodze obliczeń numerycznych.

Oznaczmy przez $\varphi^{(j)}(x, t, \bar{a})$ wrażliwość stanu względem j-tego parametru, tzn.:

$$\varphi^{(j)}(x, t, a) = \frac{\partial q(x, t; a)}{\partial a^{(j)}} \quad j = 1, 2, \dots, l_1 \quad (2.73)$$

i niech $\bar{\varphi}(x, t, \bar{a}) = [\varphi^{(1)}(x, t, a) \dots \varphi^{(l_1)}(x, t, a)]^T$.

L e m a t 2.4

Założmy, że dla danego u i φ stan obiektu ma ciągłe pochodne

względem parametrów $a^{(j)}$ $j = 1, 2, \dots, l_1$ w całym zbiorze \mathcal{A} , w danej chwili t_n i we wszystkich punktach pomiarowych $x_1 x_2 \dots x_I$. Jeżeli rząd macierzy $G(t_n, \bar{a}) \triangleq [\bar{\psi}(x_1, t_n, \bar{a}) \dots \bar{\psi}(x_I, t_n, \bar{a})]$ jest równy l_1 , dla każdego $\bar{a} \in \mathcal{A}$, to obiekt jest identyfikowalny na podstawie pomiaru w chwili t_n .

D o w ó d:

Przypuśćmy, że tak nie jest. Oznacza to, że istnieją $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \mathcal{A}$, $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$, dla których zachodzi:

$$q(x_i, t_n, \bar{a}_1) = q(x_i, t_n, \bar{a}_2) \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.74)$$

Rozwijając każde $q(x_i, t_n, \bar{a}_2)$ w szereg Taylora wokół \bar{a}_1 dostaniemy:

$$0 = q(x_i, t_n, \bar{a}_2) - q(x_i, t_n, \bar{a}_1) = \bar{\psi}^T(x_i, t_n, \bar{a}_3)(\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \quad (2.75)$$

$$i=1, 2, \dots, I$$

gdzie \bar{a}_3 jest pewnym punktem odcinka (\bar{a}_1, \bar{a}_2) .

Zauważmy, że na mocy założenia, wśród wektorów $\bar{\psi}(x_i, t_n, \bar{a}_3)$ $i = 1, 2, \dots, I$ jest l_1 wektorów liniowo niezależnych.

A zatem z (2.75) wynika, że wektor $\bar{a}_2 - \bar{a}_1$ jest ortogonalny do l_1 wektorów liniowo niezależnych. Ponieważ własność taką ma tylko wektor zerowy to dostajemy $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$, co prowadzi do sprzeczności.

c.b.d.o.

Warunek wystarczający identyfikowalności podanej w lemacie można zapisać w równoważnej postaci:

$$\min_{\bar{a} \in \mathcal{A}} \det[G(t_n, \bar{a})G^T(t_n, \bar{a})] > 0 \quad (2.76)$$

gdzie $\det[.]$ oznacza wyznacznik macierzy.

Ponieważ dla dowolnego $\bar{a} \in \mathcal{A}$ możliwe jest obliczenie numeryczne $\bar{\psi}(t, x, \bar{a})$ (por. rozdział IV) to do sprawdzenia warunku (2.76),

przy zadanych punktach pomiarowych i wymuszeniach, zastosować można bezgradientowe procedury poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych z ograniczeniami [33].

Spełnienie warunku (2.76) jest istotne także z punktu widzenia możliwości stosowania metody Gaussa-Newtona do maksymalizacji funkcji wiarygodności (por. rozdział IV).

W przypadku, gdy funkcje własne $v_1(x), v_2(x), \dots$ operatora $A(\bar{a})$ nie zależą od \bar{a} można podać jawne warunki wystarczające dla identyfikowalności.

T w i e r d z e n i e 2.3

Niech obiekt opisany równaniem (1.13) spełnia warunki PS1)-PS4). Jeżeli warunek początkowy jest równy 0 i wymuszenie o postaci

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \hat{u}^{(i)}(t) v_i(x) \quad (2.77)$$

ma następujące własności:

- W1) wśród funkcji $\hat{u}^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, m$ istnieje co najmniej $l = \dim \bar{a}$ funkcji $\hat{u}^{(i_1)}, \hat{u}^{(i_2)}, \dots, \hat{u}^{(i_l)}$, które w przedziale $(0, T)$ są niezerowe i mają stałe znaki (tzn. każda z nich przyjmuje stałe wartości dodatnie lub ujemne)
- W2) macierz $[\bar{\alpha}_{i_1}, \bar{\alpha}_{i_2}, \dots, \bar{\alpha}_{i_l}]$ utworzona z wektorów związanych z wartościami własnymi $\lambda_i(\bar{a}) = \bar{\alpha}_i^T \bar{a}$ o numerach i_1, i_2, \dots, i_l ma rząd l i prócz tego punkty pomiarowe x_1, x_2, \dots, x_I położone są tak, że rząd macierzy $[\bar{v}(x_1), \bar{v}(x_2), \dots, \bar{v}(x_I)]$ wynosi m , to obiekt jest identyfikowalny na podstawie pomiaru w dowolnej chwili $t \in (0, T)$.

D o w ó d:

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. istnieje pewna chwila $t_n > 0$

i takie $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$, że:

$$q(x_i, t_n; \bar{a}_1) = q(x_i, t_n; \bar{a}_2) \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.78)$$

Korzystając z postaci rozwiązania równania (1.13) przy wymuszeniu (2.77) i warunkach PS1)-PS4) a także z (2.78) dostajemy (por. [61], [45])

$$0 = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^{t_n} \left[e^{\lambda_j(\bar{a}_1)(t_n-\tau)} - e^{\lambda_j(\bar{a}_2)(t_n-\tau)} \right] \hat{u}_j(\tau) d\tau \right\} v_j(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (2.79)$$

Traktując powyższe zależności jako układ równań liniowych jednorodnych, którego niewiadomymi są wyrażenia w nawiasach klamrowych można stwierdzić, na podstawie założenia o rzędzie macierzy $[\bar{v}(x_1), \dots, \bar{v}(x_I)]$, że jest on spełniony wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\int_0^{t_n} \left[e^{\lambda_j(\bar{a}_1)\tau} - e^{\lambda_j(\bar{a}_2)\tau} \right] \hat{u}_j(t_n - \tau) d\tau = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.80)$$

Ze względu na W1 i stałość znaków funkcji w nawiasach kwadratowych wynika stąd, że:

$$\lambda_j(\bar{a}_1) = \lambda_j(\bar{a}_2) \quad \text{dla } j = i_1, i_2, \dots, i_l \quad (2.81)$$

co można inaczej zapisać:

$$\bar{\alpha}_j^T(\bar{a}_1 - \bar{a}_2) = 0 \quad j = i_1, i_2, \dots, i_l \quad (2.82)$$

Rozpatrując (2.82) jako układ równań liniowych jednorodny z niewiadomymi $(\bar{a}_1 - \bar{a}_2)$ dostajemy, na podstawie W2) i znanych własności układów równań jednorodnych [12], że (2.82) może zachodzić wtedy i tylko wtedy gdy $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$. Prowadzi to do sprzeczności dowodzącej tezy twierdzenia.

Korzystając z ortogonalności funkcji v_1, v_2, \dots, v_m można łatwo wykazać, że zawsze można dobrać punkty $x_i \in \Omega \cup \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, I$ tak by rząd macierzy $[\bar{v}(x_1), \bar{v}(x_2), \dots, \bar{v}(x_I)]$ równał się m .

Analogiczne twierdzenie można udowodnić dla przypadku, gdy badany obiekt znajduje się w stanie ustalonym. Należy wtedy warunek W1 zastąpić wymaganiami by w wymuszeniu $\check{u}(x) = \sum_{i=1}^m u^{(i)} v_i(x)$, 1, spośród liczb $u^{(i)}$ $i=1, 2, \dots, m$ było niezerowych.

3. ZAGADNIENIE JAKOŚCI ESTYMATORÓW I PLANOWANIE EKSPERYMENTU

Zgodność ciągu estymatorów nie może być jedynym kryterium jego jakości, gdyż cechą tę ma nieskończenie wiele ciągów, o ile tylko dla danego zadania istnieje zgodny ciąg estymatorów. Dodatkowe wymagania nakładane na estymatory związane są z różnymi miarami grupowania się ich realizacji wokół prawdziwej wartości parametrów. Znanych jest kilka sposobów formalizacji tak rozumianej efektywności estymatorów. Dyskusję wad i zalet różnych koncepcji efektywności znaleźć można w pracy [69].

W niniejszym rozdziale podamy warunki, przy których ciąg estymatorów największej wiarygodności wektora parametrów obiektu (1.13), (1.14) jest asymptotycznie normalny o średniej zero i macierzy kowariancji równej dolnej granicy Rao-Cramera. Podany zostanie wzór pozwalający obliczyć macierz kowariancji asymptotycznego rozkładu, przy danym wymuszeniu i danym położeniu punktów pomiarowych. Omówione zostanie także zadanie planowania eksperymentu i podane jego rozwiązanie w niektórych prostych przypadkach.

3.1. Asymptotyczna normalność i efektywność

Fakt, że ciąg estymatorów największej wiarygodności jest asymptotycznie normalny i efektywny, o ile obserwacje są niezależnymi realizacjami zmiennej losowej o danym rozkładzie, jest znany [64], [50]. Wydaje się celowe podanie warunków asymptotycznej normalności i efektywności dla zadania estymacji parametrów obiektu (1.13), (1.14) i wyrażenie ich w terminach własności obiektu identyfikacji i warunków eksperymentu, gdyż jak wynika z przykładów podanych w [50], [79] własność ta nie zawsze ma miejsce. Twierdzenie podające te warunki poprzedzimy dwoma lematami.

L e m a t 3.1

Założmy, że spełnione są warunki:

- A) Dla każdego x, t funkcje $q(x, t; \bar{a})$ i $u(x, t; \bar{b})$ są różniczkowalne odpowiednio względem składowych wektorów \bar{a} i \bar{b} , w każdym punkcie $\bar{a} \in \mathcal{A}$ i $\bar{b} \in \mathcal{B}$.
- B) Gęstości prawdopodobieństwa rozkładów zakłóceń pomiarowych $f_z(z; x)$ i $f_\xi(\xi; \xi)$ są różniczkowalne względem z i ξ przy dowolnych x i ξ i prócz tego zachodzą równości:

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{(j)}} \int_{-\infty}^{\infty} f_z(y - q(x, t; \bar{\theta}); x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta^{(j)}} f_z(y - q(x, t; \bar{\theta}); x) dy \quad (3.1)$$

dla $j=1, 2, \dots, l_1$, dowolnych $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ i $\bar{\theta} \in \Theta$,

$$\frac{\partial}{\partial b^{(i)}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(w - u(\xi, t; \bar{b}); \xi) dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial b^{(i)}} f_\xi(w - u(\xi, t; \bar{b}); \xi) dw \quad (3.2)$$

dla $i = 1, 2, \dots, l_2$, dowolnych $(\xi, t) \in \Omega \times (0, T)$ i $\bar{b} \in \mathcal{B}$,

- C) Istnieją i są skończone następujące wartości oczekiwane

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial z} \ln f_z(z; x) \right]^2 \text{ i } \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln f_\xi(\xi; \xi) \right]^2 \text{ dla dowolnych } x \text{ i } \xi \in \Omega \cup \Gamma$$

Jeżeli $\bar{e} \in \mathbb{R}^1$ jest dowolnym wektorem a przez $p_n(\bar{e}, \theta)$ oznaczyć zmienną losową:

$$p_n(\bar{e}; \bar{\theta}) = \bar{e}^T \nabla_{\bar{\theta}} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

to, przy powyższych założeniach, ma ona następujące własności:

$$\mathbb{E}^{\bar{\theta}^0} p_n(\bar{e}; \bar{\theta}^0) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

$$\mathbb{E}^{\bar{\theta}^0} p_n^2(\bar{e}; \bar{\theta}^0) = \bar{e}^T J_n(\bar{\theta}^0) \bar{e} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

gdzie macierz $J_n(\bar{\theta}^0)$ dana jest wzorem;

$$J_n(\bar{\theta}^0) = \sum_{i=1}^I r_z^{(i)} \nabla_{\bar{\theta}} q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0) \nabla_{\bar{\theta}}^T q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0) + \\ + \sum_{k=1}^K r_{\xi}^{(k)} \nabla_{\bar{\theta}} u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0) \nabla_{\bar{\theta}}^T u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0), \quad (3.6)$$

w którym: $r_z^{(i)} \triangleq E \left[\frac{\partial}{\partial z} \ln f_z(z; x_i) \right]^2 \quad i = 1, 2, \dots, I,$

$$r_{\xi}^{(k)} \triangleq E \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln f_{\xi}(\xi; \xi_k) \right]^2, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

D o w ó d:

Korzystając z określenia funkcji $f_n(\bar{s}_n; \theta)$ danego wzorami (2.10) i (2.12) otrzymujemy:

$$\underline{p}_n(\bar{\theta}, \bar{\theta}^0) = \bar{\theta}^T \sum_{i=1}^I \underline{h}_{ni}^y \nabla_{\bar{\theta}} q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0) + \sum_{k=1}^K \underline{h}_{nk}^w \nabla_{\bar{\theta}} u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0) \quad (3.7)$$

Dla zwartości zapisu wprowadzono oznaczenia:

$$\underline{h}_{ni}^y = \frac{f'_z(y_{ni} - q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0); x_i)}{f_z(y_{ni} - q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0); x_i)} \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (3.8)$$

$$\underline{h}_{nk}^w = \frac{f'_{\xi}(w_{nk} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0); \xi_k)}{f_{\xi}(w_{nk} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}^0); \xi_k)} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.9)$$

Zauważmy, że na mocy (3.1) i (3.2) zachodzi:

$$E \bar{\theta}^0 \underline{h}_{ni}^y = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I \\ E \bar{\theta}^0 \underline{h}_{nk}^w = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.10)$$

co w zestawieniu z (3.7) dowodzi równości (3.4).

Obliczmy teraz $E^{\bar{\theta}^0} p_n^2(\bar{e}, \bar{\theta}^0)$. Podniesienie obu stron wzoru (3.7) do kwadratu spowoduje, że w wyrażeniu $E p_n^2(\bar{e}, \bar{\theta}^0)$ pojawią się składniki o postaci:

$$\bar{e}^T \nabla_{\Theta} q(x_i, t_n, \bar{\theta}^0) \nabla_{\Theta}^T q(x_j, t_n, \bar{\theta}^0) \bar{e} \cdot E^{\bar{\theta}^0} (h_{ni}^y h_{nj}^y) \quad i, j=1, 2, \dots, I \quad (3.11)$$

$$\bar{e}^T \nabla_{\Theta} u(\xi_k, t_n, \bar{b}^0) \nabla_{\Theta}^T u(\xi_l, t_n, \bar{b}^0) \bar{e} \cdot E^{\bar{\theta}^0} (h_{nk}^w h_{nl}^w) \quad k, l=1, 2, \dots, K \quad (3.12)$$

$$\bar{e}^T \nabla_{\Theta} q(x_i, t_n, \bar{\theta}^0) \nabla_{\Theta}^T u(\xi_k, t_n, \bar{b}^0) E^{\bar{\theta}^0} (h_{ni}^y h_{nk}^w) \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, I \\ k=1, 2, \dots, K \end{matrix} \quad (3.13)$$

Wśród nich większość ma wartość zero gdyż:

- na mocy założenia P1) zmienne losowe

h_{ni}^y i h_{nj}^y są niezależne dla $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, I$

- na mocy założenia P3) zmienne losowe

h_{nk}^w i h_{nl}^w są niezależne dla $k \neq l$; $k, l = 1, 2, \dots, K$

- na podstawie założenia P5) zmienne losowe

h_{ni}^y , h_{nk}^w są niezależne, $i = 1, 2, \dots, I$, $k = 1, 2, \dots, K$

i prócz tego zachodzi (3.10). Niezerowe są tylko elementy sumy typu (3.11) przy $i = j$, $i = 1, 2, \dots, I$, i typu (3.12) przy $k = l$, $k = 1, 2, \dots, K$, które po uporządkowaniu dają wzór (3.6)

c.b.d.o.

Wniosek 3.1

cierń informacyjna Fishera zdefiniowana wzorem [69], [72]:

$$J^N(\bar{\theta}^0) = E_{S_N}^{\bar{\theta}^0} \nabla_{\bar{\theta}} \ln L_N(S_N; \bar{\theta}^0) \cdot \nabla_{\bar{\theta}}^T \ln L_N(S_N; \bar{\theta}^0) \quad (3.14)$$

w rozważanym zadaniu estymacji następującą postać:

$$J^N(\bar{\theta}^0) = \sum_{j=1}^N J_n(\bar{\theta}^0) \quad (3.15)$$

gdzie $J_n(\bar{\theta}^0)$ dane jest wzorem (3.6).

D o w ó d:

Ponieważ teza lematu 3.1 zachodzi dla dowolnego $\bar{e} \in R^1$ to:

$$E_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \nabla_{\bar{\theta}} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

$$E_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \nabla_{\bar{\theta}} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \cdot \nabla_{\bar{\theta}}^T \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) = J_n(\bar{\theta}^0) \quad n=1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

Na podstawie (2.11) mamy:

$$J^N(\bar{\theta}^0) = \sum_{n,j=1}^N E_{\bar{s}_j, \bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \nabla_{\bar{\theta}} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \nabla_{\bar{\theta}}^T \ln f_j(\bar{s}_j; \bar{\theta}^0) \quad (3.18)$$

Ale ponieważ zmienne losowe \bar{s}_n i \bar{s}_j są dla $n \neq j$, $n, j=1, 2, \dots, N$, niezależne to na podstawie (3.16), (3.17) i określenia $J_n(\bar{\theta}^0)$ dostajemy (3.15)

c.b.d.o.

Następny lemat, mówiący o zbieżności macierzy drugich pochodnych funkcji wiarygodności do macierzy informacyjnej, posłuży nie tylko dla dowodu twierdzenia o asymptotycznym rozkładzie estymatora ale także do budowy algorytmu numerycznej maksymalizacji funkcji wiarygodności (por. rozdział IV).

Jeżeli istnieją drugie pochodne względem $\bar{\theta}$ funkcji $\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})$ to macierz o elementach $\frac{\partial^2 \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}}$ $i, j=1, 2, \dots, l$ oznaczana będzie przez $H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})$; $n=1, 2, \dots$

L e m a t 3.2

Niech spełnione będą warunki:

- i) Dla każdego $\bar{\theta} \in \Theta$ szereg $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N J_n(\bar{\theta})$ jest zbieżny, przy $N \rightarrow \infty$, do pewnej macierzy, którą oznaczymy przez $J(\bar{\theta})$
- ii) Istnieją następujące wartości oczekiwane:

$$\mathbb{E}_z \left[\frac{f'_z(z; x_i)}{f_z(z; x_i)} \right]^4, \quad \mathbb{E}_z \left[\frac{f''_z(z; x_i)}{f_z(z; x_i)} \right]^2 \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$\mathbb{E}_z \left[\frac{f'_z(z; \xi_k)}{f_z(z; \xi_k)} \right]^4, \quad \mathbb{E}_z \left[\frac{f''_z(z; \xi_k)}{f_z(z; \xi_k)} \right]^2 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

przy założeniu istnienia drugich pochodnych gęstości prawdopodobieństwa $f_z(z; x)$ i $f_z(z; \xi)$ względem z i z .

- iii) Pierwsze i drugie pochodne stanu q względem parametrów $\theta^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, l$ istnieją i są ograniczone stałymi nie zależącymi od czasu, tzn.:

$$\exists c_{ij}(x, \bar{\theta}) > 0 \quad \left| \frac{\partial^2 q(x, t; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}} \right| \leq c_{ij}(x, \bar{\theta}) \quad i, j = 1, 2, \dots, l$$

$$\exists c'_i(x, \bar{\theta}) > 0 \quad \left| \frac{\partial q(x, t; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(i)}} \right| \leq c'_i(x, \bar{\theta}) \quad i = 1, 2, \dots, l$$

- iv) Pierwsze i drugie pochodne wymuszenia $u(\xi, t; \bar{b})$ względem parametrów \bar{b} istnieją i są ograniczone stałymi nie zależącymi od czasu tzn:

$$\exists \tilde{c}_{ij}(\xi, \bar{b}) > 0 \quad \left| \frac{\partial^2 u(\xi, t; \bar{b})}{\partial b^{(i)} \partial b^{(j)}} \right| \leq \tilde{c}_{ij}(\xi, \bar{b}) \quad i, j = 1, 2, \dots, l_2$$

$$\exists \tilde{c}'_i(\xi, \bar{b}) > 0 \quad \left| \frac{\partial u(\xi, t; \bar{b})}{\partial b^{(i)}} \right| \leq \tilde{c}'_i(\xi, \bar{b}) \quad i = 1, 2, \dots, l_2$$

v) Dopuszczalne jest dwukrotne różniczkowanie względem $\bar{\theta}$ pod znakiem wartości oczekiwanej następujących funkcji:

$$\mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}'} \left[\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) \right] \quad n=1,2,\dots \quad \bar{\theta}', \bar{\theta} \in \Theta$$

Przy powyższych założeniach istnieją drugie pochodne funkcji $\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})$ względem $\bar{\theta}$ a ciąg macierzy $H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})$ $n = 1, 2, \dots$ ma następującą własność

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) = -J(\bar{\theta}^0) \quad z P = 1$$

D o w ó d:

Istnienie drugich pochodnych funkcji $\ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})$ względem $\bar{\theta}$ dla wszystkich \bar{s}_n jest natychmiastową konsekwencją założeń o dwukrotnej różniczkowalności funkcji $f_z(z; x)$, $f_z(z; \xi)$, $u(x, t; \bar{b})$ i $q(x, t; \bar{\theta})$.

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że:

$$\mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \left[\frac{\partial^2 \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}} \right] = - \mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \left[\frac{\partial \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(i)}} \cdot \frac{\partial \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(j)}} \right]$$

$$i, j=1, 2, \dots, l; \quad n=1, 2, \dots$$

o ile spełniony jest warunek v).

Z drugiej strony założenia ii), iii), iv) pozwalają na oszacowanie:

$$\mathbb{E}_{\bar{s}_n}^{\bar{\theta}^0} \left[\frac{\partial^2 \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}} \right]^2 \leq F_{ij} \quad i, j=1, 2, \dots, l, \quad n=1, 2, \dots$$

gdzie F_{ij} jest stałą, której wartość zależy od $\bar{\theta}^0$ i wartości wszystkich funkcji wymienionych w założeniach iii), iv) obliczonych odpowiednio, w punktach x_i $i = 1, 2, \dots, I$, ξ_k $k = 1, 2, \dots, K$. Z oszacowania tego wyniku zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}_{\bar{s}_n, \bar{\theta}^0} \left[\frac{\partial^2 \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}} \right] \quad i, j=1, 2, \dots, l$$

co oznacza, że ciąg $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}} \right]$ spełnia założenia mocnego prawa wielkich liczb [58], z którego wynika, że:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial^2 \ln f_n(\bar{s}_n, \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}} + \mathbb{E}_{\bar{s}_n, \bar{\theta}^0} \left[\frac{\partial \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(i)}} \cdot \frac{\partial \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0)}{\partial \theta^{(j)}} \right] \right\} = 0$$

z prawdopodobieństwem 1. Ponieważ własność ta zachodzi dla wszystkich $i, j = 1, 2, \dots, l$ to także

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [H_n(\bar{s}_n, \bar{\theta}^0) + J_n(\bar{\theta}^0)] = 0 \quad \text{z P} = 1$$

skąd, ze względu na założenie i), wynika teza

c.b.d.o.

Twierdzenie o asymptotycznej efektywności i normalności estymatorów metody największej wiarygodności parametrów obiektu rozłożonego, które zostanie teraz sformułowane, stanowi wyjaśnienie przyczyn wysokiej jakości estymacji uzyskiwanej tą metodą. Równocześnie jest ono uogólnieniem analogicznego twierdzenia, które dotyczy przypadku losowania z populacji o jednakowych rozkładach [69], [79].

Twierdzenie 3.1

Niech będą spełnione założenia twierdzenia 2.1 oraz lematów 3.1

i 3.2 a oprócz tego niech $\Theta = R^l$ i spełnione będą warunki:

D) Funkcje $\frac{\partial q_i(x_i, t_{n_i}; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(j)}}$ $i=1, 2, \dots, l$, $n=1, 2, \dots, N$, $j=1, 2, \dots, l$ są

ciągłe względem $\bar{\theta}$, w każdym punkcie zbioru Θ i wspólnie ograniczone, tzn.

$$\exists c_{ij} > 0 \quad \forall n=1,2,\dots,N \quad \forall \bar{\theta} \in \Theta \quad \left| \frac{\partial q(x_i, t_n; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(j)}} \right| \leq c_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, I, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (3.19)$$

E) Funkcje $\frac{\partial u(\xi_k, t_n; \bar{b})}{\partial b^{(j)}}$ $k=1,2,\dots,K$, $n=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,l_2$ są ciągłe względem \bar{b} , w każdym punkcie zbioru \mathcal{B} i wspólnie ograniczone, tzn.:

$$\exists c'_{kj} > 0 \quad \forall n=1,2,\dots,N \quad \forall \bar{b} \in \mathcal{B} \quad \left| \frac{\partial u(\xi_k, t_n; \bar{b})}{\partial b^{(j)}} \right| \leq c'_{kj}$$

$$k = 1, 2, \dots, K, \quad j = 1, 2, \dots, l_2 \quad (3.20)$$

F) Macierze $J_n(\bar{\theta})$ $n = 1, 2, \dots, N$, określone wzorem (3.6), mają następującą własność:

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall n=1,2,\dots,N \quad \forall \bar{e} \in \mathbb{R}^l \quad \forall \bar{\theta} \in \Theta \quad \bar{e}^T J_n(\bar{\theta}) \bar{e} \geq \alpha \bar{e}^T \bar{e} \quad (3.21)$$

G) Istnieją i są skończone następujące wartości oczekiwane:

$$E \left[f'_z(z; x_i) / f_z(z; x_i) \right]^3 \quad i=1,2,\dots,I, \quad E \left[f'_z(z; \xi_k) / f_z(z; \xi_k) \right]^3$$

$$k=1,2,\dots,K$$

H) Dla dowolnego $\bar{\theta} \in \Theta$ i dowolnego ciągu $\bar{\theta}_N$ $N=1,2,\dots$ zbieżnego do $\bar{\theta}$ funkcje $\frac{\partial^2 \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}}$ $i, j=1,2,\dots,l$ spełniają warunek:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sup_{\bar{s}_n \in \mathbb{R}^{K+I}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}} \ln f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_N) / f_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}) \right| = 0$$

Przy powyższych założeniach macierz $J(\bar{\theta}^0)$ określona w lemacie 3.2 jest nieosobliwa i ciąg dystrybuant wektorów losowych $\sqrt{N}(\bar{\theta}_N^* - \bar{\theta}^0)$ jest zbieżny do dystrybuanty wielowymiarowego rozkładu normalnego o średniej zero i macierzy kowariancji $J^{-1}(\bar{\theta}^0)$.

D o w ó d:

Zbadamy asymptotyczny rozkład następującego ciągu zmiennych losowych:

$$\underline{\eta}_N \triangleq \frac{\bar{e}^T \nabla_{\bar{\theta}} L_N(\underline{s}_N; \bar{\theta}^0)}{(\bar{e}^T J_N(\bar{\theta}^0) \bar{e})^{1/2}} \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

przy dowolnym lecz ustalonym $\bar{e} \neq 0$.

Zauważmy, że

$$\underline{\eta}_N = \frac{1}{(\bar{e}^T J_N(\bar{\theta}^0) \bar{e})^{1/2}} \sum_{n=1}^N \underline{p}_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0) \quad (3.23)$$

i przy tym zmienne losowe $\underline{p}_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)$ $n=1, 2, \dots$ są niezależne i jak wykazano w lemacie 3.1 mają zerowe wartości oczekiwane.

Wykażemy, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\sum_{n=1}^N E^{\bar{\theta}^0} \underline{p}_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)^2)^{1/2}}{(\bar{e}^T J_N(\bar{\theta}^0) \bar{e})^{1/2}} = 0 \quad (3.24)$$

W tym celu oszacujemy wartości $E^{\bar{\theta}^0} |\underline{p}_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)|^2$.

Korzystając wielokrotnie z nierówności ([69] str. 135):

$$E|X + Y|^r \leq (E|X|^r + E|Y|^r) \cdot \tilde{c} \quad \tilde{c} > 0$$

i wyrażenia (3.7) dostaniemy:

$$\begin{aligned} E^{\bar{\theta}^0} |\underline{p}_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)|^2 &\leq \sum_{i=1}^I E^{\bar{\theta}^0} |h_{ni}^y|^2 |\bar{e}^T \nabla_{\bar{\theta}} q(x_i, t_n; \bar{\theta}^0)|^2 \tilde{c}_i + \\ &+ \sum_{k=1}^K E^{\bar{\theta}^0} |h_{nk}^w|^2 |\nabla_{\bar{\theta}}^T u(\xi_k, t_n; \bar{\theta}^0) \bar{e}|^2 \tilde{c}'_k \end{aligned} \quad (3.25)$$

gdzie \tilde{c}_i $i = 1, 2, \dots, I$, \tilde{c}'_k $k = 1, 2, \dots, K$ są pewnymi dodatnimi stałymi. Na podstawie założenia G) wartości oczekiwane $E^{\bar{\theta}^0} |h_{ni}^y|^2$

$i = 1, 2, \dots, I$, $E^{\bar{\theta}^0} |h_{nk}^w|^3$ $k = 1, 2, \dots, K$ istnieją, a ich wartości nie zależą od n , co można stwierdzić dokonując zamiany zmiennych w określających je całkach (por. (3.8) i (3.9)).

Dlatego można wprowadzić oznaczenia:

$$\mu_i \triangleq E^{\bar{\theta}^0} |h_{ni}^y|^3 \quad i=1, 2, \dots, I, \quad \mu_k \triangleq E^{\bar{\theta}^0} |h_{nk}^w|^3 \quad k=1, 2, \dots, K.$$

Po skorzystaniu z nierówności Schwartza i z założeń D), E) z (3.25) wynika, że:

$$E^{\bar{\theta}^0} |p_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)|^3 \leq \| \bar{e} \|^3 \left[\sum_{i=1}^I \mu_i \tilde{c}_i \left(\sum_{j=1}^I c_{ij}^2 \right)^{3/2} + \sum_{k=1}^K \mu_k \tilde{c}'_k \left(\sum_{j=1}^I (c'_{kj})^2 \right)^{3/2} \right] \quad (3.26)$$

W rezultacie otrzymujemy nierówność:

$$E^{\bar{\theta}^0} |p_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)|^3 \leq \| \bar{e} \|^3 \cdot C \quad (3.27)$$

w której C oznacza stałą określoną wyrażeniem w nawiasie kwadratowym wzoru (3.26).

Z drugiej strony, na podstawie założenia F) i wniosku (3.1), mamy:

$$\bar{e}^T J^N(\bar{\theta}^0) \bar{e} \geq N \alpha \| \bar{e} \|^2 \quad (3.28)$$

Uzyskane nierówności (3.27) i (3.28) pozwalają na oszacowanie:

$$\frac{\left(\sum_{n=1}^N E^{\bar{\theta}^0} |p_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)|^3 \right)^{1/3}}{\left(\bar{e}^T J^N(\bar{\theta}^0) \bar{e} \right)^{1/2}} \leq \frac{\sqrt[3]{C}}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{N^{1/6}}, \quad (3.29)$$

z którego wynika prawdziwość (3.24).

Udowodniona równość (3.24) oznacza, że ciąg zmiennych losowych $p_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)$ $n=1, 2, \dots$ spełnia założenia centralnego twierdzenia granicznego Lapunowa [69], [58] na podstawie którego ciąg zmiennych losowych:

$$\eta_N = \frac{\sum_{n=1}^N p_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0)}{(\bar{e}^T J_N(\bar{\theta}^0) \bar{e})^{1/2}} \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

ma, przy $N \rightarrow \infty$, rozkład normalny o średniej zero i wariancji 1. Po podzieleniu licznika i mianownika (3.30) przez $\frac{1}{N}$ i skorzystaniu z założenia i) lematu 3.2 wynika ^{stąd}, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p_n(\bar{e}, \bar{\theta}^0) \quad N=1, 2, \dots \quad (3.31)$$

ma, przy $N \rightarrow \infty$, rozkład normalny o średniej zero i wariancji $\bar{e}^T J(\bar{\theta}^0) \bar{e}$. Ponieważ własność powyższa zachodzi dla dowolnego $\bar{e} \neq 0$ to na podstawie znanego twierdzenia [69] ciąg wektorów losowych

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \nabla_{\bar{\theta}} \ln f_n(\bar{x}_n, \bar{\theta}^0) \sim N(0, J(\bar{\theta}^0)) \quad (3.32)$$

jest asymptotycznie normalny o średniej zero i macierzy kowariancji $J(\bar{\theta}^0)$. Należy zaznaczyć, że macierz ta jest nieosobliwa, co wynika z założenia F).

Przebieg dalszej części rozważań jest podobny do dowodu asymptotycznej normalności estymatorów największej wiarygodności w klasycznym zadaniu estymacji (por. [79], [50]) i dlatego podany zostanie w dużym skrócie.

Przy założeniu, że $\Theta = R^1$, $\bar{\theta}_N^*$ spełnia równanie:

$$\sum_{n=1}^N \nabla_{\bar{\theta}} \ln f_n(\bar{x}_n; \bar{\theta}_N^*) = 0, \quad (3.33)$$

które po rozwinięciu w szereg Taylora można zapisać w postaci:

$$0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \nabla_{\bar{\theta}} \ln f_n(\bar{x}_n; \bar{\theta}^0) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_n(\bar{x}_n; \bar{\theta}_N^*) (\bar{\theta}_N^* - \bar{\theta}^0) \cdot \sqrt{N}, \quad (3.34)$$

gdzie $\bar{\theta}_N$ jest pewnym wektorem z odcinka $(\bar{\theta}^0, \bar{\theta}_N)$.

Zbadajmy zachowanie się norm ciągu macierzy $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_N) + J(\bar{\theta}^0)$
 $N=1, 2, \dots$. Zachodzi oszacowanie:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_N) + J(\bar{\theta}^0) \right\| &\leq \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_N) - H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) \right\| + \\ &+ \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}^0) + J(\bar{\theta}^0) \right\| \end{aligned} \quad (3.34)$$

które pozwala stwierdzić, że:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_n(\bar{s}_n; \bar{\theta}_N) + J(\bar{\theta}^0) = 0 \quad \text{z P} = 1 \quad (3.35)$$

Fakt ten wynika z lematu 3.2, który zapewnia zbieżność do zera drugiego składnika po prawej stronie (3.34) i z twierdzenia 2.1, które wraz z założeniem H) gwarantuje zbieżność do zera pierwszego składnika.

Zestawienie (3.32), (3.34) i (3.35) ze znanym twierdzeniem o asymptotycznym rozkładzie ciągu ilorazów zmiennych losowych a właściwie jego uogólnieniu na przypadek wektorowy (por. [72]) kończy dowód.

c.b.d.o.

Z udowodnionego twierdzenia wynikają natychmiast dwa ważne wnioski.

W n i o s e k 3.2

Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.1 to estymator największej wiarygodności parametrów obiektu (1.13), (1.14) należy do klasy estymatorów najlepszych i asymptotycznie normalnych, tzn. takich, które są zgodne i mają macierz kowariancji asymptotycznego rozkładu równą odwrotności macierzy informacyjnej Fishera [79].

W n i o s e k 3.2

Niech $q(s, t; \bar{\theta}_N^*)$ i $q(x, t; \bar{\theta}^0)$ oznaczają stan obiektu w punkcie $(x, t) \in \mathcal{JL} \times (0, T)$ w przypadku gdy wartości parametrów są, odpowiednio, równe $\bar{\theta}_N^*$ i $\bar{\theta}^0$. Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.1 i pochodne $\frac{\partial q(x, t; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(i)}}$ $i=1, 2, \dots, l$ są ciągłe względem $\bar{\theta} \in \mathcal{C}$ w punkcie $(x, t) \in \mathcal{JL} \times (0, T)$ to ciąg zmiennych losowych:

$$\sqrt{N} [q(x, t; \bar{\theta}_N^*(\underline{S}_N)) - q(x, t; \bar{\theta}^0)] \quad N=1, 2, \dots \quad (3.36)$$

ma, przy $N \rightarrow \infty$, rozkład normalny o średniej zero i wariancji $\nabla_{\bar{\theta}}^T q(x, t; \bar{\theta}^0) J^{-1}(\bar{\theta}^0) \nabla_{\bar{\theta}} q(x, t; \bar{\theta}^0)$.

Praktyczne zastosowanie powyższego wniosku, jak również twierdzenia 3.1, polega na możliwości budowania testów i przedziałów ufności dla szacowanych parametrów i stanu obiektu.

Ze względu na nieznaną wartość $\bar{\theta}^0$ testy i przedziały ufności muszą być budowane w oparciu o macierz $J(\bar{\theta}_N^*)$, która jest dobrym przybliżeniem macierzy $J(\bar{\theta}^0)$ przy dużych N .

Obliczanie macierzy $J(\bar{\theta})$ z przybliżonego wzoru $J(\bar{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N J_n(\bar{\theta})$ jest nieefektywne. W związku z tym podany zostanie lemat pozwalający łatwo obliczać $J(\bar{\theta})$ i dający warunek wystarczający na to by spełnione było założenie i) lematu 3.2.

L e m a t 3.3

Niech wymuszenie $u(\xi, t; \bar{b})$ będzie takie, że istnieją granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(\xi, t_n; \bar{b}) = \tilde{u}(\xi, b) \quad (3.37)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_{\bar{b}} u(\xi, t_n; \bar{b}) = \nabla_{\bar{b}} u(\xi, \bar{b}) \quad (3.38)$$

w każdym punkcie $\xi \in \mathcal{R} \cup \Gamma$ i $\bar{b} \in \mathcal{B}$ i prócz tego stan $q(x, t; \bar{\theta})$ obiektu, przy tym wymuszeniu, posiada granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(x, t_n; \bar{\theta}) = \tilde{q}(x; \bar{\theta}) \quad x \in \Omega \cup \Gamma \quad \theta \in \Theta \quad (3.39)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_{\bar{\theta}} q(x, t_n; \bar{\theta}) = \nabla_{\bar{\theta}} \tilde{q}(x; \bar{\theta}) \quad (3.40)$$

i to takie, że między $\tilde{u}(\xi, \bar{b})$ i $\tilde{q}(x, \bar{\theta})$ zachodzi związek: $A(\bar{a})\tilde{q} = -\tilde{u}$. W tych warunkach spełnione jest założenie i) lematu 3.2 i macierz $J(\bar{\theta})$ ma postać:

$$J(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^I \nabla_{\bar{\theta}} \tilde{q}(x_i; \bar{\theta}) \nabla_{\bar{\theta}}^T \tilde{q}(x_i; \bar{\theta}) \cdot r_z^{(i)} + \sum_{k=1}^K \nabla_{\bar{\theta}} u(\xi_k; \bar{b}) \nabla_{\bar{\theta}}^T u(\xi_k; \bar{b}) \cdot r_z^{(k)} \quad (3.41)$$

gdzie $r_z^{(i)}$ $i=1, 2, \dots, I$, $r_z^{(k)}$ $k=1, 2, \dots, K$ mają takie samo znaczenie jak w tezie lematu 3.1.

Dowód jest elementarny i wynika ze wzoru (3.6) i własności granicy. Mówiąc niezbyt dokładnie, teza lematu stwierdza, że w rozważanej sytuacji na asymptotyczny rozkład estymatora wpływ ma tylko zachowanie się obiektu w stanie ustalonym. Podkreślić należy, że fakt ten wynika z założeń (3.37), (3.39).

Warto zauważyć że twierdzenie 3.1 i lemat 3.3 pozostają w mocy również dla przypadku gdy obiekt badany jest w stanie ustalonym. Oczywiście wtedy niektóre założenia są automatycznie spełnione. Z przedstawionych rezultatów łatwo także uzyskać wzory dla sytuacji gdy wymuszenie jest w pełni znane.

Warto zwrócić uwagę na założenie F) twierdzenia 3.1. Założenie to można interpretować jako wymaganie by pomiary w poszczególnych chwilach zawierały co najmniej pewną minimalną ilość informacji o nieznanymi parametrach. Zauważmy, że jeśli założenie to jest spełnione to obiekt jest identyfikowalny na podstawie pomiarów w chwilach t_n $n=1, 2, \dots$. Prawdziwość tego stwierdzenia wynika z porównania wzoru (3.6), dającego jawne wyrażenie na $J_n(0)$, z lematem 2.4 rozdziału II.

Pewnego komentarza wymaga także założenie H) twierdzenia 3.1.

Można udowodnić, że założenie to jest spełnione jeżeli funkcje $\frac{\partial^2 \ln f_n(\bar{z}_n; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(j)}}$ są ciągle względem $\bar{\theta}$ jednostajnie względem \bar{s}_n ; $n = 1, 2, \dots$; $i, j = 1, 2, \dots, l$.

Warto także zauważyć, że ważnym przypadkiem szczególnym, w którym spełnione są wszystkie założenia o gęstościach rozkładów zakłóceń pomiarowych jest sytuacja gdy zarówno $f_z(z; x)$ jak i $f_z(z; \xi)$ są gęstościami rozkładu normalnego.

3.2. Zadanie planowania eksperymentu

Rezultaty przedstawione w poprzednim podrozdziale pozwalają ocenić wpływ wymuszenia i położenia punktów pomiarowych na asymptotyczną jakość estymacji. Wynikające stąd wnioski, przedstawione w podpunkcie pierwszym, umożliwiają postawienie zadania planowania eksperymentu, który jest optymalny przy dużej liczbie pomiarów. W prostych przypadkach zadanie to może być rozwiązane analitycznie na co wskazują przykłady podane w podpunkcie 3.2.3

3.2.1. Czynniki wpływające na jakość estymacji

W całym podrozdziale zakładając będziemy, że spełnione są założenia twierdzenia 3.1 i lematu 3.3. Jak wynika z twierdzenia 3.1 asymptotyczna jakość estymatora, rozumiana jako "odległość" jego asymptotycznego rozkładu od rozkładu skupionego w punkcie $\bar{\theta}^0$, jest w pełni określona własnościami macierzy $J^{-1}(\bar{\theta}^0)$, która dalej oznaczana będzie przez $M(\bar{\theta}^0)$. Ponieważ porównywanie całych macierzy jest utrudnione w klasycznym zadaniu estymacji parametrów funkcji

regresji wprowadza się funkcjonały określone na zbiorze macierzy kowariancji ocen pozwalające porównywać jakość różnych planów eksperymentu [30]. Analogiczne podejście stosowane będzie w tej pracy, przy czym jako kryterium jakości estymacji wybrano wyznacznik macierzy $M(\bar{\theta}^0)$, gdyż plany optymalne w sensie tego kryterium są niezmiennicze względem liniowej, nieosobliwej transformacji zmiennych. Prócz tego kryterium to posiada dobrą interpretację statystyczną, gdyż jego wartość jest proporcjonalna do pierwiastka z objętości tzw. elipsoidy rozrzutu [30], [15] i jego minimalizacja prowadzi do zmniejszenia zarówno wariancji ocen poszczególnych parametrów jak i współczynników ich wzajemnej korelacji.

Przejdziemy teraz do zbadania niektórych własności funkcji $\det M(\bar{\theta}^0)$. Ze względu na równość $\det M(\bar{\theta}^0) = 1/\det J(\bar{\theta}^0)$ wystarczy badać funkcję $\det J(\bar{\theta}^0)$, którą oznaczymy przez $Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0)$ dla podkreślenia jej zależności od macierzy $X_I \hat{=} [x_1, x_2, \dots, x_I]$, $\Xi_K \hat{=} [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K]$ i od funkcji $\tilde{u}(x; \bar{b}^0)$ będącej granicą przy $t \rightarrow \infty$ wymuszenia $u(x, t, \bar{b}^0)$. Tak określona funkcja ma następujące własności:

W1) $Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) \gg 0$ dla dowolnych wartości swoich argumentów.

W2) $Q_{I+1,K}(X_{I+1}, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) \gg Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0)$ i jeżeli $Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) > 0$ to istnieje punkt $x_{I+1} \in \Omega \cup \Gamma$ taki, że:

$$Q_{I+1,K}(X_{I+1}, \Xi_K, u:0^0) > Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) \quad (3.42)$$

W3) $Q_{I,K+1}(X_I, \Xi_{K+1}, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) \gg Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0)$ i jeśli $Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) > 0$ to istnieje taki punkt ξ_{K+1} , że zachodzi:

$$Q_{I,K+1}(X_I, \Xi_{K+1}, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) > Q_{I,K}(X_I, \xi_{K+1}, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) \quad (3.43)$$

W4) Jeśli $|\alpha| > 1$ to

$$Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \alpha \cdot \tilde{u}; \bar{\theta}^0) > Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) \quad (3.44)$$

o ile $Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}, \bar{\theta}^0) > 0$.

Dowody własności W1) i W4) i pierwszych części W3) i W4) wynikają wprost ze znanych własności wyznacznika i zostaną pominięte. Dowody drugich części własności W3) i W4) są podobne. Dla przykładu udowodnimy drugą część W3). W tym celu skorzystamy ze wzoru (3.41) dla obliczenia $Q_{I+1,K}(X_{I+1}, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0)$.

$$Q_{I+1,K}(X_{I+1}, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) = \det \left[\sum_{i=1}^I \nabla_{\bar{\theta}} \tilde{q}(x_i, \bar{\theta}^0) \nabla_{\bar{\theta}}^T \tilde{q}(x_i, \bar{\theta}^0) r_z^{(i)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^K \nabla_{\bar{\theta}} \tilde{u}(\xi_k, \bar{b}^0) \nabla_{\bar{\theta}}^T \tilde{u}(\xi_k, \bar{b}^0) r_z^{(k)} + \nabla_{\bar{\theta}} q(x_{I+1}, \bar{\theta}^0) \nabla_{\bar{\theta}}^T q(x_{I+1}, \bar{\theta}^0) r_z^{(I+1)} \right]. \quad (3.45)$$

Zastosowanie do (3.45) znanej tożsamości prawdziwej dla dowolnej nieosobliwej macierzy C o wymiarach $m \times m$ i wektora $\bar{c} \in R^m$ [12]:

$$\det [C + c c^T]^{-1} = \frac{1}{1 + \bar{c}^T C^{-1} \bar{c}} \det C^{-1} \quad (3.46)$$

prowadzi do:

$$Q_{I+1,K}(X_{I+1}, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) = Q_{I,K}(X_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) \cdot \left[1 + \nabla_{\bar{\theta}}^T \tilde{q}(x_{I+1}, \bar{\theta}^0) \cdot \right. \\ \left. \cdot J^{-1}(\bar{\theta}^0) \nabla_{\bar{\theta}} \tilde{q}(x_{I+1}, \bar{\theta}^0) \cdot r_z^{(I+1)} \right] \quad (3.47)$$

Ponieważ, macierz $J(\bar{\theta}^0)$ jest dodatnio półokreślona a z założenia wynika, że jest dodatnio określona, to dla zakończenia dowodu wystarczy wskazać taki punkt x_{I+1} , w którym $\nabla_{\bar{\theta}} \tilde{q}(x_{I+1}, \bar{\theta}^0) \neq 0$ i $r_z^{(I+1)} \neq 0$. Punkt taki istnieje, gdyż w szczególności można jako x_{I+1} wybrać jeden z punktów x_1, x_2, \dots, x_I .

Z udowodnionych własności wynika praktycznie ważny, choć intuicyjnie oczywisty, wniosek, że dysponując dodatkowymi czujnikami pomiarowymi bądź wymuszeniem o większej amplitudzie można znacznie poprawić jakość estymacji.

Z drugiej strony na wymuszenie i ilość czujników pomiarowych nałożone są w praktyce ograniczenia i dlatego celowe jest postawienie zadania najlepszego, z punktu widzenia jakości estymacji, ich wykorzystania w czasie eksperymentu.

Jak wynika ze wzoru (3.41), istotny wpływ na jakość estymacji, wyrażoną wartością funkcji $Q_{I,K}(X_I, \bar{Z}_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0)$ ma wektor nieznanych parametrów $\bar{\theta}^0$. Z tego względu funkcja $Q_{I,K}(X_I, \bar{Z}_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0)$ nie może być, w ogólnym przypadku, użyta do wyboru optymalnego położenia punktów pomiarowych i wymuszenia \tilde{u} . W tej sytuacji możliwe są następujące podejścia:

- zastosowanie kryterium zastępczego o postaci:

$$\inf_{\bar{\theta} \in \Theta} Q_{I,K}(X_I, \bar{Z}_K, \tilde{u}; \bar{\theta}) \quad (3.48)$$

i wybranie takiego wymuszenia \tilde{u} i położenia punktów pomiarowych by maksymalizować funkcję (3.48);

- przeprowadzenie próbnego eksperymentu pozwalającego obliczyć oszacowanie $\bar{\theta}_e$ wartości nieznanych parametrów $\bar{\theta}^0$ i zaplanowanie eksperymentu na podstawie kryterium:

$$Q_{I,K}(X_I, \bar{Z}_K, \tilde{u}; \bar{\theta}_e) \quad (3.49)$$

(czynności planowania i przeprowadzania eksperymentu można wielokrotnie powtarzać)

- zastosowanie innych kryteriów zastępczych nie związanych wprost z funkcją $Q_{I,K}(X_I, \bar{Z}_K, \tilde{u}; \bar{\theta})$.

Wymienione podejścia mają jednak wady związane bądź z trudnościami w ocenie jakości uzyskanych na ich podstawie planów ekspe-

rymentu bądź też z koniecznością przeplatania czynności planowania i przeprowadzania eksperymentu. Dlatego też w rozprawie tej ograniczono się do zbadania problemu planowania eksperymentu w przypadku gdy funkcję $Q_{I,K}(x_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0)$ można przedstawić w postaci:

$$Q_{I,K}(x_I, \Xi_K, \tilde{u}; \bar{\theta}^0) = \Psi_1(\bar{\theta}^0) \cdot \Psi_2(x_I, \Xi_K, \tilde{u}) \quad (3.50)$$

gdzie Ψ_1 i Ψ_2 są pewnymi funkcjami takimi, że Ψ_1 nie zależy od położenia punktów pomiarowych i wymuszenia a Ψ_2 nie zależy od $\bar{\theta}^0$. Powyższa faktoryzacja nie zawsze jest możliwa. Udało się ją przeprowadzić w przypadku gdy równanie obiektu spełnia warunki PS1) - - PS4), a wymuszenie jest wybierane przez eksperymentatora ze ściśle określonej klasy funkcji. Warunki umożliwiające faktoryzację (3.50) i sformułowanie zadania planowania eksperymentu przedstawione zostaną w następnym paragrafie.

3.2.2. P o j ę c i e p l a n u e k s p e r y m e n t u i p o s t a w i e n i e z a d a n i a p l a n o - w a n i a

Przyjmujemy, że na plan eksperymentu składają się dwa elementy: plan pomiarów i wymuszenie, wybrane z pewnego zbioru wymuszeń dopuszczalnych U_e . Wybranie planu pomiarów oznacza podanie położenia punktów pomiarowych x_1, x_2, \dots, x_I w obszarze $\Omega \cup \Gamma$ lub pewnym jego podzbiorem Ω_e , przy czym dopuszcza się, że nie wszystkie punkty są różne (por. 3.2.1.) Zakłada się, że funkcja wymuszająca użyta w trakcie eksperymentu $u(x, t)$ $x \in \Omega$, $t \in (0, \infty)$ jest wynikiem wyboru eksperymentatora a więc nie zawiera nieznanych parametrów i pomiary wymuszenia są zbędne.

Ze względu na fakt, że dogodną do badań postać macierzy $J(\bar{\theta})$ udało się uzyskać tylko dla wymuszeń spełniających założenia le-

mtu 3.3 dalsze rozważania będą ograniczone tylko do tego przypadku. Przyjęcie tych założeń prowadzi do sytuacji, w której przyjęte kryterium jakości planu eksperymentu $\det M(\bar{\theta}^0)$ zależy tylko od $\tilde{u}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$. Dla uniknięcia tej niejednoznaczności można przyjąć, że optymalnych wymuszeń poszukuje się wśród sterowań stałych w czasie. Założenie takie może być uzasadnione względami technicznej łatwości realizacji wymuszeń stałych w czasie.

Biorąc pod uwagę przyczyny przedstawione w poprzednim podpunkcie ograniczymy się do zbadania własności optymalnych planów eksperymentu dla identyfikacji obiektów spełniających warunki PS1-PS4. W tym celu obliczymy macierz $J(\bar{\theta}^0)$ dla tej klasy obiektów. Korzystając z lematu 3.3 i faktu, że wymuszenie jest znane dostaniemy:

$$J(\bar{\theta}^0) = \sum_{i=1}^I \nabla_{\bar{\theta}} \tilde{q}(x_i; \bar{\theta}^0) \nabla_{\bar{\theta}}^T \tilde{q}(x_i; \bar{\theta}^0) r_z^{(i)} \quad (3.51)$$

gdzie $\tilde{q}(x, \bar{\theta}^0)$, $x \in \Omega$ jest rozwiązaniem równania

$$A(\bar{a}^0) \tilde{q} = -\tilde{u}. \quad (3.52)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że przy znanym wymuszeniu, $\bar{\theta}^0 = \bar{a}^0$ i dlatego do końca niniejszego rozdziału używane będzie oznaczenie $\tilde{q}(x; \bar{a}^0)$ dla rozwiązania równania (3.52).

Korzystając z założeń PS1-PS4 można podać jawną postać rozwiązania równania (3.52):

$$\tilde{q}(x, \bar{a}^0) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j(\bar{a}^0)} \langle u, v_j \rangle v_j(x) \quad (3.53)$$

przy zachowaniu znaczenia wszystkich symboli w (3.53) podanych w rozdziale I. Ponieważ $\lambda_j(\bar{a})$ można przedstawić w postaci $\lambda_j(\bar{a}) = \alpha_j^T \bar{a}$ to na podstawie (3.53), macierz $J(\bar{a}^0)$ daną wzorem (3.51) da się zapisać jako iloczyn macierzy:

$$J(\bar{a}^0) = F \cdot \mathcal{L}(\bar{a}^0, \bar{u}) \hat{V}(X_I) \mathcal{L}(\bar{a}^0, \bar{u}) F^T \quad (3.54)$$

gdzie:

$$\hat{V}(X_I) = \sum_{i=1}^I r_z^{(i)} \bar{v}(x_i) \bar{v}^T(x_i) \quad (3.55)$$

$$\bar{v}(x) \triangleq [v_1(x) \ v_2(x) \ \dots \ v_m(x)]^T. \quad (3.56)$$

Natomiast prostokątna macierz F składa się z kolumn $\bar{\alpha}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$:

$$F \triangleq [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m] \quad (3.57)$$

a $\mathcal{L}(\bar{a}^0, \bar{u})$ jest macierzą diagonalną o elementach na głównej przekątnej postaci:

$$- \frac{\langle u, v_j \rangle}{\lambda_j^2(\bar{a}^0)} \quad j=1, 2, \dots, m \quad (3.58)$$

Łatwo zauważyć, że przedstawienie wyznacznika macierzy (3.54) w postaci (3.50) jest możliwe w przypadku gdy $m = \dim \bar{a}$, tzn. wtedy gdy wymuszenie u można zapisać:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\dim \bar{a}} u^{(j)} v_j(x) \quad (3.59)$$

gdzie $u^{(j)}$ $j=1, 2, \dots, \dim \bar{a}$ są dowolnymi liczbami.

W dalszym ciągu niniejszego rozdziału ograniczymy się tylko do takich wymuszeń, zakładając dodatkowo, ze względu na warunek identyfikowalności, że $\det F \neq 0$.

Przy tych założeniach:

$$\det J(\bar{a}^0) = (\det F)^2 \prod_{j=1}^{\dim \bar{a}} \frac{1}{\lambda_j^2(\bar{a}^0)} \prod_{j=1}^{\dim \bar{a}} (u^{(j)})^2 \det \hat{V}(X_I) \quad (3.60)$$

Analiza wzoru (3.60) prowadzi do wniosku, że w tych warunkach zadanie planowania eksperymentu, polegające na maksymalizacji $\det J(\bar{a}^0)$ względem \tilde{u} i X_I , daje się rozdzielić na dwa, niezależne, zadania doboru wymuszenia \tilde{u} i planu pomiarów X_I . Sformułujemy te zadania z uwzględnieniem ograniczeń.

P r o b l e m o p t y m a l i z a c j i w y m u s z e n i a

W podzbiorze U_e zbioru $\hat{U} \triangleq \left\{ \tilde{u}(x) : \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{\dim \bar{a}} u^{(j)} v_j(x), \right.$
 $\left. u^{(j)} \neq 0, j = 1, 2, \dots, m \right\}$ znaleźć takie wymuszenie $\tilde{u}(x)$ dla którego:

$$Q_w(\tilde{u}) \triangleq \prod_{j=1}^{\dim \bar{a}} (u^{(j)})^2 \quad (3.61)$$

osiąga wartość maksymalną.

P r o b l e m o p t y m a l n e g o p l a n o w a n i a p o m i a r ó w

Mając dane I czujników pomiarowych należy znaleźć takie ich położenie $X_I = [x_1, x_2, \dots, x_I]$, $x_i \in \Omega \cup \Gamma$, by funkcja:

$$Q_p(X_I) \triangleq \det \hat{V}(X_I) \quad (3.62)$$

osiągnęła maksimum.

Sformułowane wyżej zadanie wyboru optymalnego wymuszenia nie jest zbyt trudne i dla zadanego zbioru $U_e \subset \hat{U}$ może być rozwiązane dowolną z metod optymalizacji z ograniczeniami (por. np. [33]).

W niektórych przypadkach można podać rozwiązanie w postaci analitycznej.

Rozważmy to zadanie przy ograniczeniu:

$$U_e = \left\{ \tilde{u} \in \hat{U} : \int_{\Omega} u^2(x) dx \leq E_e \right\} \quad (3.63)$$

gdzie $E_e > 0$ jest zadaną stałą.

Przy takim ograniczeniu optymalne wymuszenie ma postać:

$$\tilde{u}^*(x) = \sum_{i=1}^{\dim \bar{a}} \left(\pm \frac{E_e}{\dim \bar{a}} \right) v_i(x) \quad (3.64)$$

przy czym znak każdego ze składników sumy (3.64) może być wybrany dowolnie. Dowód powyższego stwierdzenia wynika wprost z faktu, że $\tilde{u} \in U_e$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\dim \bar{a}} \langle \tilde{u}, v_i \rangle^2 \leq E_e$ i ze znanej nierówności zachodzącej między średnią geometryczną i arytmetyczną.

Zadanie znajdowania optymalnych planów pomiarów jest znacznie trudniejsze i zostanie omówione w następnym paragrafie.

3.2.3. Uwagi o metodach znajdowania optymalnych planów pomiarów

Zauważmy, że problem wyboru optymalnego planu pomiarów X_I jest, z punktu widzenia obliczeniowego, taki sam jak zadanie planowania eksperymentu D-optymalnego przy estymacji współczynników funkcji regresji o postaci:

$$E(y/x) = \sum_{j=1}^p \beta_j v_j(x) \quad (3.65)$$

To ostatnie zadanie posiada bardzo bogatą literaturę [30], [46], [52]. Przy czym wymienione pozycje są monografiami zawierającymi podsumowanie najważniejszych wyników. Prezentowane w tych pracach metody numeryczne znajdowania planów D-optymalnych, oparte na zao-krągłaniu tzw. planów ciągłych [30], [77], bądź też na iteracyjnym poprawianiu zadanego planu początkowego [52], pozwalają znajdować optymalne plany pomiarów nawet w przypadku obszarów $\Omega \cup \Gamma$ o złożonym kształcie. Algorytmy znajdowania planów D-optymalnych są dok-

ładnie opisane w wymienionych pozycjach i dlatego nie będą tutaj przedstawione. Zwróćmy natomiast uwagę na możliwość analitycznego znalezienia optymalnych planów pomiarów w przypadku, gdy ilość punktów pomiarowych równa jest ilości nieznanymi parametrów tzn. $I = \dim \bar{a}$ i znana jest postać funkcji własnych $v_i(x)$ $i = 1, 2, \dots$, dla danego operatora.

W poniższej tabeli przedstawiono optymalne położenie czujnika pomiarowego dla zadania estymacji parametru a w równaniu przewodnictwa ciepła:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + \tilde{u}(x) \quad x \in (0, \pi) \quad (3.66)$$

przy różnych warunkach brzegowych i przy założeniu, że gęstość prawdopodobieństwa zakłóceń $f_z(z;x)$ nie zależy od x .

Warunek brzegowy dla $x=0$	Warunek brzegowy dla $x=\pi$	Wymuszenie $u(x)$	Optymalne położenie czujnika pomiarowego	Uwagi
$q(0,t)=0$	$q(\pi,t)=0$	$\sin x$	$\pi/2$	
$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Big _{x=0} = 0$	$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Big _{x=\pi} = 0$	$\cos x$	0 lub π	
$q(0,t)=0$	$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Big _{x=\pi} = 0$	$\sin \frac{1}{2} x$	π	
$q(0,t)=0$	$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Big _{x=\pi} = \alpha q(\pi,t), \alpha < 0$	$\sin \mu x$	$\pi/2\mu$	μ jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania $\mu \operatorname{ctg} \mu = \alpha$
$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Big _{x=0} = 0$	$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Big _{x=\pi} = \alpha q(\pi,t), \alpha < 0$	$\cos \mu x$	0 lub $\frac{\pi}{\mu}$	μ jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania $\mu \operatorname{tg} \mu = \alpha $

Warunek brzegowy dla $x=0$	Warunek brzegowy dla $x=\pi$	Wymuszenie $u(x)$	Optymalne położenie czujnika pomiarowego	Uwagi
$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Big _{x=0} = \beta q(0,t),$ $\beta > 0$	$\frac{\partial q(s,t)}{\partial x} \Big _{x=\pi} = \alpha q(\pi,t)$ $\alpha < 0$	$\frac{\beta}{\mu} \sin \mu x + \cos \mu x$	otrzymuje się z równania $\operatorname{tg} \mu x = \frac{\beta}{\mu}$	u jest pierwiastkiem równania $(\mu^2 + \alpha) \operatorname{tg} \mu \pi = (\beta - \alpha) \mu$

Łatwo zauważyć, że we wszystkich rozważanych przypadkach optymalne położenie czujnika pomiarowego odpowiada położeniu maksimum wymuszenia. Należy zaznaczyć, że nie jest to jednak prawidłowość ogólna.

Następujący, prosty lemat może ułatwić znalezienie optymalnego planu pomiarów.

L e m a t 3.4

Niech wymuszenie ma postać (3.60) a ilość czujników pomiarowych $I = \dim \bar{a}$. Jeśli istnieje I różnych punktów $x_1^*, x_2^*, \dots, x_I^*$, $x_i^* \in \Omega \cup \Gamma$ takich, że:

$$- \prod_{j=1}^{\dim \bar{a}} \left[\sum_{i=1}^I v_j^2(x_i^*) \right] \geq \prod_{j=1}^{\dim \bar{a}} \left[\sum_{i=1}^I v_j^2(x_i) \right] \text{ dla dowolnych}$$

$$x_i \in \Omega \cup \Gamma \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (3.67)$$

$$- \sum_{i=1}^I v_j(x_i^*) v_k(x_i^*) = 0 \text{ dla } j \neq k \quad j, k = 1, 2, \dots, \dim \bar{a} \quad (3.68)$$

to plan pomiarów $x_1^*, x_2^*, \dots, x_I^*$ jest optymalny, przy założeniu, że gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń pomiarowych $f_z(z; x)$ nie zależy od x .

Dowód wynika wprost ze znanej nierówności [12]:

$$\det C \leq \prod_{j=1}^m c_{jj}, \quad (3.69)$$

prawdziwej dla dowolnej dodatnio określonej macierzy C o wymiarach $m \times m$ i z faktu, że równość w (3.69) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy C jest macierzą diagonalną.

Powyższy lemat pozwala łatwo udowodnić, że w zadaniu estymacji parametrów $a^{(1)}, a^{(2)}$ równania:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = a^{(1)} \cdot \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} - a^{(2)} q(x,t) + \tilde{u}(x), \quad x \in (0, \pi) \quad (3.70)$$

optymalne są następujące plany pomiarów:

- $x_1 = 0, x_2 = \pi$ przy warunkach brzegowych II rodzaju i wymuszeniu $\tilde{u}(x) = \cos x + \cos 2x$
- x_1 spełniający równanie $\cos^2 x = \frac{1}{3}$ i $x_2 = \pi - x_1$ przy warunkach brzegowych I rodzaju i wymuszeniu $u(x) = \sin x + \sin 2x$.

Na zakończenie rozważań dotyczących planowania eksperymentu przedstawimy przykład numeryczny ilustrujący zależność dokładności estymacji od położenia punktów pomiarowych, w sytuacji gdy znane wymuszenie nie jest postaci (3.60).

Przykład 3

Badania symulacyjne przeprowadzono dla obiektu opisanego równaniem:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = a^{(1)} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} - a^{(2)} q(x,t) + u$$

$$x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1) \quad (3.71)$$

z warunkami brzegowymi:

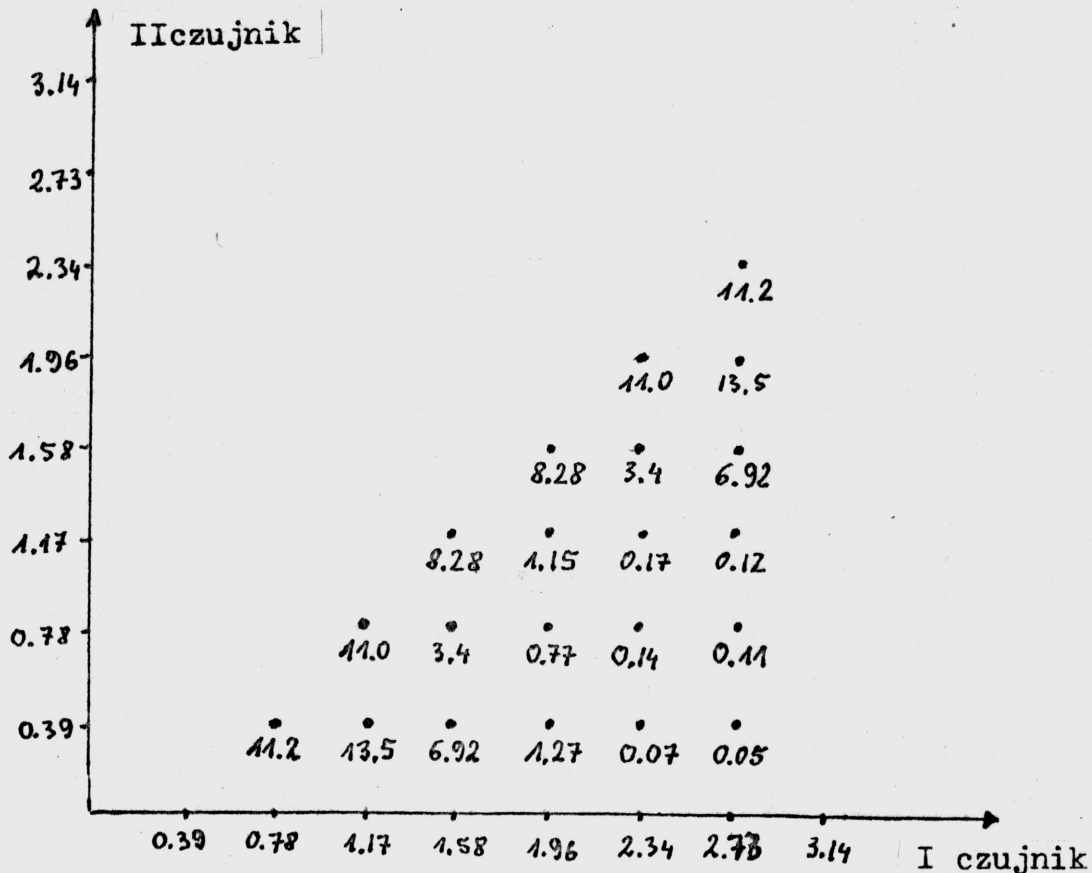
$$q(0,t) = 0, q(\pi,t) = 0 \quad (3.72)$$

i przy zerowych warunkach początkowych. Badanie przebiegało następująco:

- 1) rozwiązano równanie (3.71), (3.72) przy wartościach parametrów $a^{(1)} = 10$ i $a^{(2)} = 2$ i stałym wymuszeniu $\check{u} = 100$
- 2) do otrzymanych w 1) wartości stanu w punktach x_1 i x_2 i w chwilach $t_n = n \cdot 0.05, n = 1, 2, \dots, 20$ dodano zakłócenia pomiarowe, będące liczbami pseudolosowymi o rozkładzie $N(0., 0.5)$.
- 3) uzyskane w punkcie 2) wielkości potraktowano jako pomiary stanu obiektu (3.71), (3.72) z nieznanymi parametrami $a^{(1)}$ i $a^{(2)}$ i do oszacowania parametrów zastosowano metodę największej wiarygodności.

Punkty 1), 2), 3) powtarzano wielokrotnie dla różnych położzeń czujników pomiarowych x_1 i x_2 .

Rezultaty badań symulacyjnych ilustruje rysunek:



Rys.3.1. Zależność dokładności estymacji od położenia czujników.

na którym punktami oznaczono położenie czujników pomiarowych (x_1, x_2) , a liczby przy nich oznaczają dokładność estymacji obliczoną ze wzoru

$$(a_N^{(1)} - a^{(1)0})^2 + (a_N^{(2)} - a^{(2)0})^2$$

i uśrednioną dla trzech realizacji zmiennych losowych reprezentujących zakłócenia.

Analiza uzyskanych wyników wskazuje na fakt bardzo istotnej zależności jakości estymacji od położenia punktów pomiarowych. Uzasadnia to celowość badań nad planowaniem eksperymentu. Z drugiej strony istnienie kilku minimów lokalnych, widoczne na rysunku, świadczy o trudnościach jakie stwarza zadanie optymalizacji planu pomiarów.

Algorytm maksymalizacji funkcji wiarygodności, jak również wyniki badań symulacyjnych w bardziej złożonej sytuacji estymacji parametrów obiektu i wymuszenia przedstawione zostaną w następnym rozdziale.

4. ALGORYTM OBLICZENIOWY IDENTYFIKACJI I WYNIKI JEGO TESTOWANIA

Udowodnione w poprzednich rozdziałach własności probabilistyczne estymatorów największej wiarygodności parametrów obiektu rozłożonego uzasadniają ich teoretyczną przydatność do rozwiązania zadania identyfikacji. Możliwość praktycznego ich zastosowania zależy między innymi od szybkości zbieżności złożoności algorytmu numerycznego znajdowania maksimum funkcji wiarygodności. Dobór odpowiedniego algorytmu i zbadanie jego własności jest treścią tego rozdziału. Przedstawiono także wyniki komputerowych badań symulacyjnych proponowanego algorytmu.

4.1. Zadanie maksymalizacji funkcji wiarygodności

Badanie własności estymatorów w poprzednich rozdziałach oparte było na traktowaniu funkcji wiarygodności jako gęstości łącznego rozkładu prawdopodobieństwa pomiarów. W celu uzyskania wartości liczbowych oszacowań parametrów będziemy zakładać, że dane są pomiary obiektu, a funkcja wiarygodności rozpatrywana będzie jako funkcja nieznanych parametrów $\bar{\Theta}$. Zgodnie z zasadą maksymalnej wiarygodności, oszacowanie $\bar{\Theta}_N^*$, dla danej tablicy pomiarów S_N , uzyskuje się maksymalizując funkcję wiarygodności:

$$L_N(S_N; \bar{\Theta}_N^*) = \max_{\bar{\Theta} \in \Theta} \prod_{n=1}^N \left[\prod_{i=1}^I f_z(y_{in} - q(x_i, t_n; \bar{\Theta}); x_i) \right. \\ \left. \prod_{k=1}^K f_3(w_{kn} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}); \xi_k) \right], \quad (4.1)$$

przy czym funkcja $q \in W$ określona jest równaniem:

$$\frac{\partial q(x, t; \bar{\theta})}{\partial t} = A(\bar{a})q(x, t; \bar{\theta}) + u(x, t; \bar{b}) \quad (4.2)$$

$$q(x, 0; \bar{\theta}) = q^0(x). \quad (4.3)$$

Zauważmy, że równania (4.2), (4.3) stanowią ograniczenia równościowe dla zadania optymalizacji (4.1). Istotnym utrudnieniem w rozwiązaniu tego zadania jest brak znajomości analitycznej postaci rozwiązania równań (4.2), (4.3). Prowadzi to do konieczności numerycznego rozwiązywania równań (4.2), (4.3), dla danego θ , po to by otrzymać wartość funkcji wiarygodności w tym punkcie. Fakt ten nie pozwala stosować metod optymalizacji opartych tylko na wielokrotnym obliczaniu wartości funkcji celu. W związku z tym powstaje problem doboru jednej z metod gradientowych i to takiej, która pozwoli uwzględnić specyfikę ograniczeń (4.2), (4.3). Drugim istotnym problemem jest dobór efektywnej metody rozwiązywania równań (4.2), (4.3).

4.1.1. Dobór metody optymalizacji

W celu uproszczenia rozważań zastąpimy zadanie (4.1) równoważnym zadaniem minimalizacji minus logarytmu naturalnego funkcji wiarygodności i wprowadzimy oznaczenie $Q(\bar{\theta}) = -\ln L_N(S_N; \bar{\theta})$, podkreślając fakt, że tablica pomiarów S_N jest ustalona. Analogicznie, punkt, który zapewnia minimum globalne funkcji $Q(\bar{\theta})$ oznaczany będzie przez $\bar{\theta}^*$, a nie jak dotąd przez $\bar{\theta}_N^*$. Dla skupienia uwagi przyjmiemy, że nie ma ograniczeń na parametry $\bar{\theta}$, tzn. $\Theta = \mathbb{R}^1$ (problem ich uwzględnienia omówiony zostanie w paragrafie 4.2.1).

Zwróćmy uwagę na podobieństwo struktury zadania (4.1), (4.2), (4.3) i zadania identyfikacji metodą największej wiarygodności dynamicznych i statycznych obiektów o parametrach skupionych [14], [43]. Podobieństwo to pozwala skorzystać ze zdobytych dotąd doświad-

czeń w zakresie obliczeniowym i ograniczyć klasę rozważanych metod optymalizacji do szybko zbieżnych metod gradientowych rzędu drugiego o postaci:

$$\bar{\theta}_{k+1} = \bar{\theta}_k - \tau_k G_k(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k) \quad k=1,2,\dots \quad (4.4)$$

gdzie: $\bar{\theta}_{(k)}$ jest k -tym przybliżeniem wektora $\bar{\theta}$, τ_k ; $k=1,2,\dots$ jest pewnym ciągiem dodatnich współczynników.

Ogólna idea doboru ciągu macierzy G_k $k=1,2,\dots$ tak by przyspieszyć zbieżność algorytmu (4.4) prowadzi do następujących, znanych metod:

- a) $G_k(\bar{\theta}_{(k)}) = \hat{H}^{-1}(\bar{\theta}_{(k)})$, gdzie $\hat{H}(\bar{\theta}_{(k)})$ oznacza hesjan funkcji $Q(\bar{\theta})$ $k=1,2,\dots$ - metoda Newtona-Raphsona [5], [13],
- b) ciąg $G_k(\bar{\theta}_{(k)})$ dobierany na podstawie gradientów funkcji celu, tak by coraz lepiej aproksymować macierz $\hat{H}^{-1}(\bar{\theta}_{(k)})$ - grupa metod zmiennej metryki [13], [5], [33],
- c) $G_k(\bar{\theta}_{(k)})$ wybierana jako odwrotność macierzy informacyjnej Fishera - metoda Gaussa-Newtona [43].

Rozważmy możliwość zastosowania każdej z tych metod do rozwiązania zadania (4.1), (4.2), (4.3).

Konieczność obliczania drugich pochodnych funkcji $Q(\bar{\theta})$ w metodzie Newtona-Raphsona prowadzi do tak dużego nakładu obliczeń na rozwiązywanie równań określających wpływ zmian parametrów na stan obiektu, że uniemożliwia to jej stosowanie (por. także [43]).

Metody typu zmiennej metryki należą do najbardziej efektywnych [33] i istnieją realne możliwości stosowania ich do rozwiązania zadania (4.1), (4.2), (4.3). Jednakże rozważane zadanie jest na tyle specyficzne, że badania eksperymentalne identyfikacji statycznych obiektów nieliniowych przeprowadzone przez Barda [11] wskazują na wyższą efektywność metody Gaussa-Newtona. Można przypuszczać, że podobna sytuacja będzie mieć miejsce w rozważanym zadaniu.

Oprócz tego stosowanie metod typu zmiennej metryki może powodować także inne trudności związane z:

- 1) dużą złożonością algorytmu i dużą zajętością pamięci,
- 2) degenerowaniem się macierzy G_k do macierzy osobliwej [11], [5],
- 3) wymaganiami przez niektóre metody tej grupy dokładnej minimalizacji w kierunku [33].

Powyższe względy zadecydowały o wyborze metody Gaussa-Newtona jako podstawowego algorytmu stosowanego w tej pracy do znajdowania najbardziej wiarogodnych oszacowań parametrów obiektu (4.2), (4.3). Teoretyczną podstawę stosowania metody Gaussa-Newtona w rozważanym zadaniu daje lemat 3.2, z którego wynika, że macierz $\hat{H}(\bar{\theta})$ może być aproksymowana przez macierz $J_N(\bar{\theta})$ dla dużych N . Praktyczne zastosowanie algorytmu Gaussa-Newtona wymaga jeszcze podania sposobu konstruowania ciągu γ_k , $k=0,1,\dots$ i sposobu obliczania funkcji $q(x,t;\bar{\theta})$ i $\nabla_{\bar{\theta}} q(x,t;\bar{\theta})$, $x \in \Omega \cup \Gamma$, $t \in (0,T)$, potrzebnych zarówno do wyliczenia gradientu funkcji celu $Q(\bar{\theta})$ jak i macierzy $J_N(\bar{\theta})$. Opis metody rozwiązania drugiego z tych zagadnień podany zostanie w paragrafie 4.1.3.

Potrzeba starannego doboru ciągu γ_k $k=0,1,\dots$ spowodowana jest jego dużym wpływem na zbieżność algorytmu. Znany jest fakt szybkiej zbieżności metody Gaussa-Newtona, w bliskim otoczeniu optimum, gdy γ_k jest bliskie jedności. Z drugiej strony wybór taki może prowadzić do braku zbieżności jeśli punkt startowy $\bar{\theta}_{(0)}$ znajduje się daleko od optimum. Zastosowanie dokładnych metod poszukiwania minimum w kierunku tak, że nie jest korzystne ze względu na konieczność wielokrotnego rozwiązywania równań (4.2), (4.3). W tej sytuacji użyteczny staje się niżej podany algorytm, będący kombinacją znanych metod.

Niech $\bar{\theta}_0$ będzie przybliżeniem początkowym wektora $\bar{\theta}^*$ a kolejne przybliżenia tworzone są według wzoru:

$$\bar{\theta}_{k+1} = \bar{\theta}_k - \gamma_k \bar{d}_k \quad k=0,1,2,\dots, \quad (4.5)$$

w którym $\bar{d}_k \triangleq G(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k)$, gdzie przez $G(\bar{\theta})$ oznaczono macierz $J_N^{-1}(\bar{\theta})$. Zakłada się, że macierz informacyjna posiada odwrotną (indeks N pominięto zgodnie z konwencją obowiązującą w tym rozdziale). We wzorze (4.5) ciąg γ_k $k=1,2,\dots$ tworzony jest według przepisu:

Algorytm wyboru długości kroku

Założmy, że O_k zostało obliczone

$$1) \text{ Jeśli } Q(\bar{\theta}_k - \bar{d}_k) - Q(\bar{\theta}_k) \leq -\beta \nabla_{\bar{\theta}}^T Q(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k) \quad (4.6)$$

to $\gamma_k = 1$, w przeciwnym razie wykonaj krok 2

2) Oblicz $\tilde{\gamma}_k$ według wzoru:

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{\nabla_{\bar{\theta}}^T Q(\bar{\theta}_k) \bar{d}_k}{\lambda_M \bar{d}_k^T \bar{d}_k} \quad (4.7)$$

i jeżeli

$$Q(\bar{\theta}_k - \tilde{\gamma}_k \bar{d}_k) - Q(\bar{\theta}_k) \leq -\beta \nabla_{\bar{\theta}}^T Q(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k) \quad (4.8)$$

to $\gamma_k = \tilde{\gamma}_k$, jeśli nie to wykonaj 3

3) Oblicz a i b rozwiązując układ równań:

$$Q(\bar{\theta}_k - \bar{d}_k) - Q(\bar{\theta}_k) = a + b$$

$$Q(\bar{\theta}_k - \tilde{\gamma}_k \bar{d}_k) - Q(\bar{\theta}_k) = a \tilde{\gamma}_k^2 + b \tilde{\gamma}_k$$

i jeżeli $a > 0$ to połącz $\hat{\gamma}_k = -\frac{b}{2a}$ i przejdź do kroku 4; w przeciwnym razie $\gamma_k = \tilde{\gamma}_k$

4) Jeżeli

$$Q(\bar{\theta}_k - \hat{\gamma}_k \bar{d}_k) - Q(\bar{\theta}_k) \leq -\beta \nabla_{\bar{\theta}}^T Q(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k) \quad (4.9)$$

to $\gamma_k = \hat{\gamma}_k$, w przeciwnym razie $\gamma_k = \tilde{\gamma}_k$.

W powyższym algorytmie występują dwie stałe dodatnie λ_M i β . Zakładamy, że stałą λ_M można wybrać tak by:

$$\forall_{\bar{\theta}, \bar{\theta}'} \quad \bar{\theta}^T \hat{H}(\bar{\theta}') \bar{\theta} \leq \lambda_M \bar{\theta}^T \bar{\theta} \quad (4.10)$$

Dobór stałej β zostanie omówiony po dowodzie twierdzenia o zbieżności algorytmu.

T w i e r d z e n i e 4.1

Jeżeli funkcja $Q(\bar{\theta})$ ma w każdym punkcie $\bar{\theta} \in R^1$ ciągle drugie pochodne cząstkowe i prócz tego istnieją takie stałe dodatnie λ_m i λ_M , że dla hesjanu $H(0)$ spełnione jest (4.10) i warunek:

$$\forall_{\bar{\theta}, \bar{\theta}'} \quad \bar{\theta}^T H(\bar{\theta}') \bar{\theta} \geq \lambda_m \bar{\theta}^T \bar{\theta} \quad (4.11)$$

a dla macierzy $G(0)$ spełnione jest:

$$\begin{aligned} \exists \gamma_m > 0 \quad \forall_{\bar{\theta}, \bar{\theta}'} \quad \bar{\theta}^T G(\bar{\theta}') \bar{\theta} &\geq \gamma_m \bar{\theta}^T \bar{\theta} \\ \exists \gamma_M > 0 \quad \forall_{\bar{\theta}, \bar{\theta}'} \quad \bar{\theta}^T G^2(\bar{\theta}') \bar{\theta} &\leq \gamma_M \bar{\theta}^T \bar{\theta} \end{aligned} \quad (4.12)$$

to ciąg $\bar{\theta}_k$ $k = 1, 2, \dots$ utworzony według (4.5) z krokami γ_k $k = 0, 1, 2, \dots$ wybieranymi zgodnie z algorytmem 1)-4), jest zbieżny do $\bar{\theta}^*$ przy dowolnym punkcie startowym $\bar{\theta}_0$ i przy stałej β spełniającej warunek:

$$\beta > 0 \quad (4.13)$$

Co więcej zachodzą oszacowania:

$$Q(\bar{\theta}_k) - Q(\bar{\theta}^*) \leq (1-\alpha)^k (Q(\bar{\theta}_0) - Q(\bar{\theta}^*)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

$$\|\bar{\theta}_k - \bar{\theta}^*\|^2 \leq (1-\alpha)^k (Q(\bar{\theta}_0) - Q(\bar{\theta}^*)) 2/\lambda_m \quad k=1, 2, \dots \quad (4.15)$$

gdzie

$$\alpha \triangleq \min \left\{ \beta \frac{2\lambda_m^2}{\lambda_M}, \frac{\lambda_m^2 \gamma_m^2}{\lambda_M^2 \gamma_M^2} \right\} \quad (4.16)$$

D o w ó d:

W swej zasadniczej idei dowód nie odbiega od klasycznych sposobów badania zbieżności algorytmów optymalizacji (por. np. [65]) i polega na szacowaniu różnicy $Q(\bar{\theta}_k) - Q(\bar{\theta}^*)$ z użyciem rozwinięcia w szereg Taylora.

Na podstawie (4.5), (4.10) i wzoru Taylora dostajemy:

$$\chi_k \triangleq Q(\bar{\theta}_{k+1}) - Q(\bar{\theta}_k) \leq -\tau_k \bar{a}_k^T \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k) + \frac{1}{2} \tau_k^2 \lambda_M \bar{a}_k^T \bar{a}_k \quad (4.17)$$

i jeżeli krok τ_k wybrany został wg wzoru (4.7) to:

$$\chi_k \leq -\frac{1}{2} \frac{\gamma_m^2}{\lambda_M \gamma_M} \nabla_{\bar{\theta}}^T Q(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k) \quad (4.18)$$

W pozostałych przypadkach:

$$\chi_k \leq -\beta \nabla_{\bar{\theta}}^T Q(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k) \quad (4.19)$$

Nierówności (4.18) i (4.19) prowadzą do oszacowania:

$$\chi_k \leq -\alpha_1 \nabla_{\bar{\theta}}^T Q(\bar{\theta}_k) \nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k), \quad \alpha_1 \triangleq \min \left\{ \beta, \frac{1}{2} \frac{\gamma_m^2}{\lambda_M \gamma_M} \right\} \quad (4.20)$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz skorzystać z dwóch nierówności:

$$\lambda_m \|\bar{\theta}_k - \bar{\theta}^*\|^2 \leq 2 [Q(\bar{\theta}_k) - Q(\bar{\theta}^*)] \leq \lambda_M \|\bar{\theta}_k - \bar{\theta}^*\|^2 \quad (4.21)$$

$$\|\nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta}_k)\| \geq \lambda_m \|\bar{\theta}_k - \bar{\theta}^*\|, \quad (4.22)$$

które łatwo uzyskać rozwijając funkcje $Q(\bar{\theta})$ i $\nabla_{\bar{\theta}} Q(\bar{\theta})$ w szereg Taylora wokół punktu $\bar{\theta}^*$ (por. [65]).

Korzystając z (4.22) a następnie z prawej nierówności (4.21) otrzymamy z (4.20) oszacowanie:

$$Q(\bar{\theta}_{k+1}) - Q(\bar{\theta}_k) \leq -\alpha_1 \frac{\lambda_m^2}{\lambda_M} 2 [Q(\bar{\theta}_k) - Q(\bar{\theta}^*)] \quad (4.23)$$

Wprowadzając oznaczenie $\Delta_k \triangleq Q(\bar{\theta}_k) - Q(\bar{\theta}_{k-1})$ i uwzględniając (4.16) nierówność (4.23) można zapisać w postaci:

$$\Delta_{k+1} \leq (1 - \alpha) \Delta_k \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Otrzymana nierówność dowodzi zbieżności, przy $k \rightarrow \infty$, $Q(\bar{\theta}_k)$ do $Q(\bar{\theta}^*)$ i oszacowania (4.14) gdyż $\frac{\gamma_m^2 \lambda_m^2}{\gamma_M \lambda_M^2} < 1$, co powoduje, że $\alpha < 1$. Oszacowanie (4.15), z którego wynika także zbieżność $\bar{\theta}_k$ do $\bar{\theta}^*$ jest prostą konsekwencją (4.14) i lewej strony nierówności (4.21).

c.b.d.o.

Warto zwrócić uwagę na następujące fakty związane z działaniem algorytmu wyboru długości kroku:

- w trakcie każdej iteracji wartości funkcji celu obliczane są co najwyżej 3 razy (oznacza to, że co najwyżej trzy razy należy numerycznie rozwiązać równanie obiektu dla znalezienia długości kroku),
- wartość stałej $\beta > 0$ nie ma wpływu na fakt zbieżności algorytmu,
- dobór β ma istotny wpływ na szybkość zbieżności algorytmu i ilość dokonanych rozwiązań równania obiektu; zbyt duża wartość tej stałej powoduje, że warunki (4.6), (4.8), (4.9) nie są spełnione i algorytm wybiera $\gamma_k = \tilde{\gamma}_k$ po trzech obliczeniach wartości funkcji celu, zbyt mała wartość β nie jest korzystna w dużej odległości od optimum, gdyż jeśli nie zachodzi (4.6) to zwykle spełnione jest (4.8) i nigdy nie jest dokonywana aproksymacja paraboliczna przyspieszająca zbieżność w tych warunkach,
- drugim istotnym czynnikiem wpływającym na szybkość zbieżności jest wartość stałej λ_M ; korzystna jest jak najmniejsza wartość λ_M gdyż wtedy długość kroku $\tilde{\gamma}_k$, gwarantującego znalezienie punktu o mniejszej wartości funkcji celu, jest duża,
- ze względu na warunek (4.10) stała λ_M nie może być mniejsza niż

$\sup_{\bar{\theta}} \hat{\lambda}_M(\bar{\theta})$, gdzie $\hat{\lambda}_M(\bar{\theta})$ oznacza największą wartość własną macierzy $\hat{H}(\bar{\theta})$ (rzęd wielkości $\sup_{\bar{\theta}} \hat{\lambda}_M(\bar{\theta})$ może być oceniony na podstawie macierzy informacyjnej),

- w przypadku gdy macierz $G(0)$ dobrze przybliży macierz $H^{-1}(\bar{\theta})$ (duża ilość pomiarów) zbieżność jest dużo szybsza niż wynika to z oszacowań (4.14) i (4.15),
- znajomość wartości stałych $\lambda_m, \gamma_m, \gamma_M$ nie jest konieczna, jeśli nie chce się korzystać z oszacowań (4.14) i (4.15), dla zbieżności algorytmu ważne jest tylko ich istnienie,
- dodatnią określoność macierzy $G(\bar{\theta})$ i $\hat{H}(\bar{\theta})$ dla każdego $\bar{\theta}$ można uzyskać poprzez zaplanowanie eksperymentu (por. rozdział 3).

4.1.2. Dobór metody rozwiązywania równania obiektu i równań wrażliwości

Jak wcześniej stwierdzono, obliczenie wartości funkcji $q(\bar{\theta})$ wymaga znajomości rozwiązania równania (4.2), (4.3) w punktach pomiarowych. Niezbędna jest także znajomość wartości wektorów $\nabla_{\bar{\theta}} q(x_i, t_n; \bar{\theta})$ $i=1, 2, \dots, I$, $n=1, 2, \dots, N$, w celu obliczenia $\nabla_{\bar{\theta}} q(\bar{\theta})$ i $G(\bar{\theta})$. Równania różniczkowe dla funkcji $\frac{\partial q(x, t; \bar{\theta})}{\partial \theta^{(j)}}$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$ $j=1, 2, \dots, l$ można otrzymać przez formalne zróżniczkowanie względem $\theta^{(j)}$ równań:

$$\frac{\partial q(x, t; \bar{\theta})}{\partial t} = \sum_{j=1}^l \theta^{(j)} P_j q(x, t; \bar{\theta}) + u(x, t; \bar{\theta}) \quad (4.25)$$

$$q(x, 0; \bar{\theta}) = q^0(x), x \in \Omega \quad (4.26)$$

$$Bq(x, t; \bar{\theta}) = 0 \quad \text{dla } x \in \Gamma \quad \text{i } t \in (0, T) \quad (4.27)$$

w których $\sum_{j=1}^{l_1} \Theta^{(j)} P_j q(x, t; \bar{\Theta})$ oznacza operator różniczkowy $\Lambda(\bar{a})q$ z u-
 tożsamionymi wartościami $a^{(j)} = \Theta^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, l_1$. P_j , $j=1, 2, \dots, l_1$
 oznaczają operatory różniczkowe o postaci $\frac{\partial^2 q}{\partial x^{(i)} \partial x^{(k)}}$, $\frac{\partial q}{\partial x^{(i)}}$ ponume-
 rowane w ten sam sposób w jaki ponumerowano parametry a_{ik} oraz a_i
 w wektorze \bar{a} (por. rozdział I). Po wykonaniu różniczkowania i zambia-
 nie kolejności operacji różniczkowania po $\Theta^{(j)}$ i zmiennych przestrzen-
 nych i czasie otrzymuje się następujący układ równań pozwalający ob-
 liczyć funkcje $\varphi_j(x, t; \bar{\Theta}) \triangleq \frac{\partial q(x, t; \bar{\Theta})}{\partial \Theta^{(j)}}$ $j=1, 2, \dots, l_1$:

$$\frac{\partial \varphi_j(x, t; \bar{\Theta})}{\partial t} = \sum_{k=1}^{l_1} \Theta^{(k)} P_k \varphi_j(x, t; \bar{\Theta}) + P_j q(x, t; \bar{\Theta})$$

$$x \in \Omega, t \in (0, T) \quad j=1, 2, \dots, l_1 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \varphi_j(x, t; \bar{\Theta})}{\partial t} = \sum_{k=1}^{l_1} \Theta^{(k)} P_k \varphi_j(x, t; \bar{\Theta}) + \frac{\partial u(x, t; \bar{\Theta})}{\partial \Theta^{(j)}}, x \in \Omega, t \in (0, T)$$

$$j=l_1+1, \dots, l \quad (4.29)$$

z warunkami początkowymi

$$\varphi_j(x, 0; \bar{\Theta}) = 0 \quad x \in \Omega \quad j=1, 2, \dots, l \quad (4.30)$$

i brzegowymi:

$$B\varphi_j(x, t; \bar{\Theta}) = 0 \quad x \in \Gamma, t \in (0, T) \quad j=1, 2, \dots, l. \quad (4.31)$$

Poprawność powyższego, często stosowanego, postępowania nie jest o-
 czywista i wymaga każdorazowo uzasadnienia. Użytecznym narzędziem
 dowodzenia jest ogólna postać twierdzenia o funkcjach uwikłanych [74].
 Dowód istnienia pochodnych stanu względem parametrów dla równania
 przewodnictwa ciepła znaleźć można w pracy [23].

Ważną cechą otrzymanych równań jest to, że różnią się one tylko wymuszeniem. Fakt ten należy wykorzystać do zmniejszenia nakładu obliczeń. Inne cechy specyficzne rozważanego zadania, które trzeba uwzględnić przy wyborze metody jego numerycznego rozwiązania, to:

- 1) konieczność rozwiązywania równań układu dla różnych, apriori nieznanymi, wartości parametrów $\bar{\Theta}$,
- 2) potrzeba znajomości rozwiązania w kilku punktach przestrzennych i w wielu chwilach czasu,
- 3) występowanie w równaniach (4.28) członów o postaci $P_j q$, co zmusza do stosowania takich przybliżeń funkcji q , które łatwo zróżniczkować po zmiennych przestrzennych.

Rozważmy przydatność znanych metod rozwiązywania równań cząstkowych z punktu widzenia spełnienia wymagań 1), 2), 3). Stosowanie jakiegokolwiek schematu metody różnic skończonych jest bardzo utrudnione ze względu na wymaganie 3). Metody tej grupy nie spełniają także postulatu 2), gdyż obliczenie wartości rozwiązania w danym punkcie przestrzennym wymaga obliczenia rozwiązania we wszystkich punktach siatki (schematy niejawne [34]). Stosowanie jawnych schematów różnicowych [34] także nie jest korzystne, ponieważ warunki ich zbieżności (stabilności) mają postać związków między długością kroków wzdłuż współrzędnych czasowych i przestrzennych siatki a wartościami parametrów równania. Spełnienie tych warunków wymaga, wobec 1), stosowania siatek o zmiennym, lub bardzo małym, kroku wzdłuż współrzędnej czasowej i prowadzi do dużego nakładu obliczeń.

W tej sytuacji bardziej przydatne okazują się metody należące do grupy projekcyjno-wariacyjnych [54], a zwłaszcza dobrze zbadane metody Galerkina i Ritza. Dla celów obliczeniowych korzystać będziemy z przedstawionego niżej, szczególnego wariantu tej metody (opis metody Galerkina w pełnej jej ogólności znaleźć można w pracach [54], [31]).

Niech $H \subset L^2(\Omega)$ będzie przestrzenią Hilberta funkcji wśród których poszukujemy rozwiązania równania (4.25), (4.26). Zakładamy, że H jest dobrana odpowiednio do warunków brzegowych (4.27) (por. [61], [59]). Niech $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ będą liniowo niezależnymi funkcjami z przestrzeni H . Zgodnie z metodą Galerkiną przybliżonego rozwiązania $q_m(x, t)$ równania (4.25), (4.26) poszukujemy w postaci:

$$q_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \eta_i(t) \psi_i(x) \quad (4.31)$$

przy czym funkcje η_i $i=1, 2, \dots, m$ otrzymuje się z układu równań:

$$\left\langle \frac{\partial q_m}{\partial t} - A q_m + u_j \psi_i \right\rangle = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.32)$$

który po przekształceniach można zapisać w postaci:

$$M \dot{\bar{\eta}}(t) = R \bar{\eta}(t) + \bar{u}(t) \quad (4.33)$$

gdzie:

M - jest macierzą o elementach $\langle \psi_i, \psi_j \rangle$ $i, j=1, 2, \dots, m$

R - jest macierzą o elementach $\langle A \psi_i, \psi_j \rangle$ $i, j=1, 2, \dots, m$

$\bar{\eta}(t)$ - jest funkcją wektorową o elementach $\eta_i(t)$ $i=1, 2, \dots, m$

$\bar{u}(t)$ - jest funkcją wektorową o elementach $\langle u, \psi_i \rangle$ $i=1, 2, \dots, m$.

Wektor warunków początkowych dla równania (4.33) otrzymuje się z rozwinięcia w szereg funkcji ψ_i $i=1, 2, \dots, m$ warunku początkowego $q^0(x)$ i ma on postać:

$$\bar{\eta}(0) = [\langle q^0, \psi_1 \rangle \langle q^0, \psi_2 \rangle \dots \langle q^0, \psi_m \rangle]^T \quad (4.34)$$

Warto zwrócić uwagę na następujące własności metody Galerkiną i na ich związek z wymaganiami 1), 2), 3):

- można podać warunki wystarczające na to by ciąg przybliżeń q_m był, przy $m \rightarrow \infty$ zbieżny do q : [54] i warunki te nie zależą od wartości

parametrów $\bar{\theta}$ o ile tylko operator $A(\bar{a})$ jest dla tych parametrów dodatnio określony,

- w przypadku gdy operator A jest symetryczny znane są precyzyjne oszacowania szybkości zbieżności, a metoda elementów skończonych [31], [80] pozwala konstruować ciągi ψ_i $i=1,2,\dots$ zapewniające zbieżność dla obszarów Ω o skomplikowanych kształtach,
- postać przybliżonego rozwiązania pozwala obliczać je w dowolnym punkcie przestrzennym i nie ma związku między odległościami tych punktów a odległością między krokami czasowymi w przybliżonym rozwiązaniu równań (4.33),
- obliczanie pochodnych, przybliżonego rozwiązania po zmiennych przestrzennych może być wykonane dokładnie,
- przybliżone rozwiązania równań (4.28) i (4.29) mają analogiczną postać tylko w równaniu (4.33) zamiast $\bar{u}(t)$ występują wektory współczynniki rozwinięcia względem ψ_j $j=1,2,\dots,m$ funkcji $\frac{\partial u}{\partial \theta^{(i)}}$ i $P_i q_m$, a prócz tego warunek początkowy jest zerowy,
- powyższy fakt pozwala rozwiązać wszystkie równania (4.25), (4.28) i (4.29) przy nakładzie obliczeń zbliżonym do czasu rozwiązania pojedynczego równania; jedna z możliwych realizacji tej idei polega na obliczeniu macierzy fundamentalnej układu równań (4.33) (np. metodą sprowadzenia macierzy $M^{-1}R$ do postaci kanonicznej) i skorzystaniu ze znanego wzoru na rozwiązanie równań liniowych o stałych współczynnikach [12].
Podejście to jest efektywne w przypadku, gdy funkcje ψ_i $i=1,2,\dots$ \dots,m są ortonormalne, gdyż ze względu na symetrię macierzy R obliczenie jej wartości i wektorów własnych nie jest trudne.
- metoda Galerkina-Ritza staje się szczególnie prosta jeśli operator A jest samosprężony a jego funkcje własne są znane; przyjęcie ich jako układu ψ_i $i=1,2,\dots,m$ prowadzi do tego, że macierze M i R są diagonalne i układ (4.33) rozpada się na m niezwiązanych ze sobą równań które można łatwo scałkować.

Wszystkie powyższe rozważania można powtórzyć dla przypadku, gdy badany obiekt znajduje się w stanie ustalonym. W takiej sytuacji rozwiązanie równań analogicznych do (4.33) wymaga tylko odwrócenia macierzy R .

4.2. Opis algorytmu i wyników jego testowania

W poprzednim punkcie poddano analizie i wybrano poszczególne elementy składające się na algorytm identyfikacji obiektu o parametrach rozłożonych metodą największej wiarygodności w ogólnym przypadku. Obecnie przedstawiona zostanie uproszczona wersja algorytmu w takiej postaci jaka używana była do badań testowych na maszynie cyfrowej. Zasadnicze uproszczenie polega na założeniu, że funkcje własne operatora A są znane i nie zależą od nieznanymi parametrów. Przy założeniu tym algorytm jest bardzo efektywny pozostając jednocześnie przydatnym praktycznie dla wszystkich obiektów z jedną zmienną przestrzenną i niektórych obiektów wielowymiarowych o prostej geometrii obszaru

4.2.1. P r z e b i e g a l g o r y t m u i d e n t y f i k a c j i

Przedstawiając algorytm zakładać będziemy, że dane są funkcje gęstości prawdopodobieństwa zakłóceń $f_z(z;x)$ i $f_\xi(\xi;\xi)$, funkcje ψ_i $i=1,2,\dots,m$, które są równe funkcjom własnym $v_i(x)$ $i=1,2,\dots,m$ operatora A i warunek początkowy $q^0(x)$. Ponadto przyjmujemy, że wymuszenie jest kombinacją liniową znanych funkcji $\omega_j(x,t)$ $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ $j=1,2,\dots,l_2$ z nieznanymi współczynnikami $b^{(j)}$ $j=1,2,\dots,l_2$, tzn.

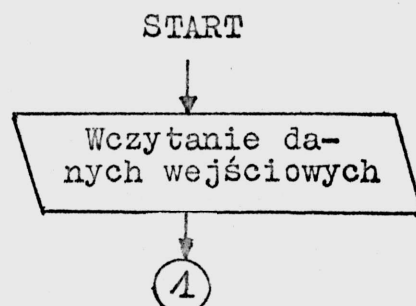
$$u(x, t; \bar{b}) = \sum_{j=1}^{l_2} b^{(j)} \omega_j(x, t) \quad (4.35)$$

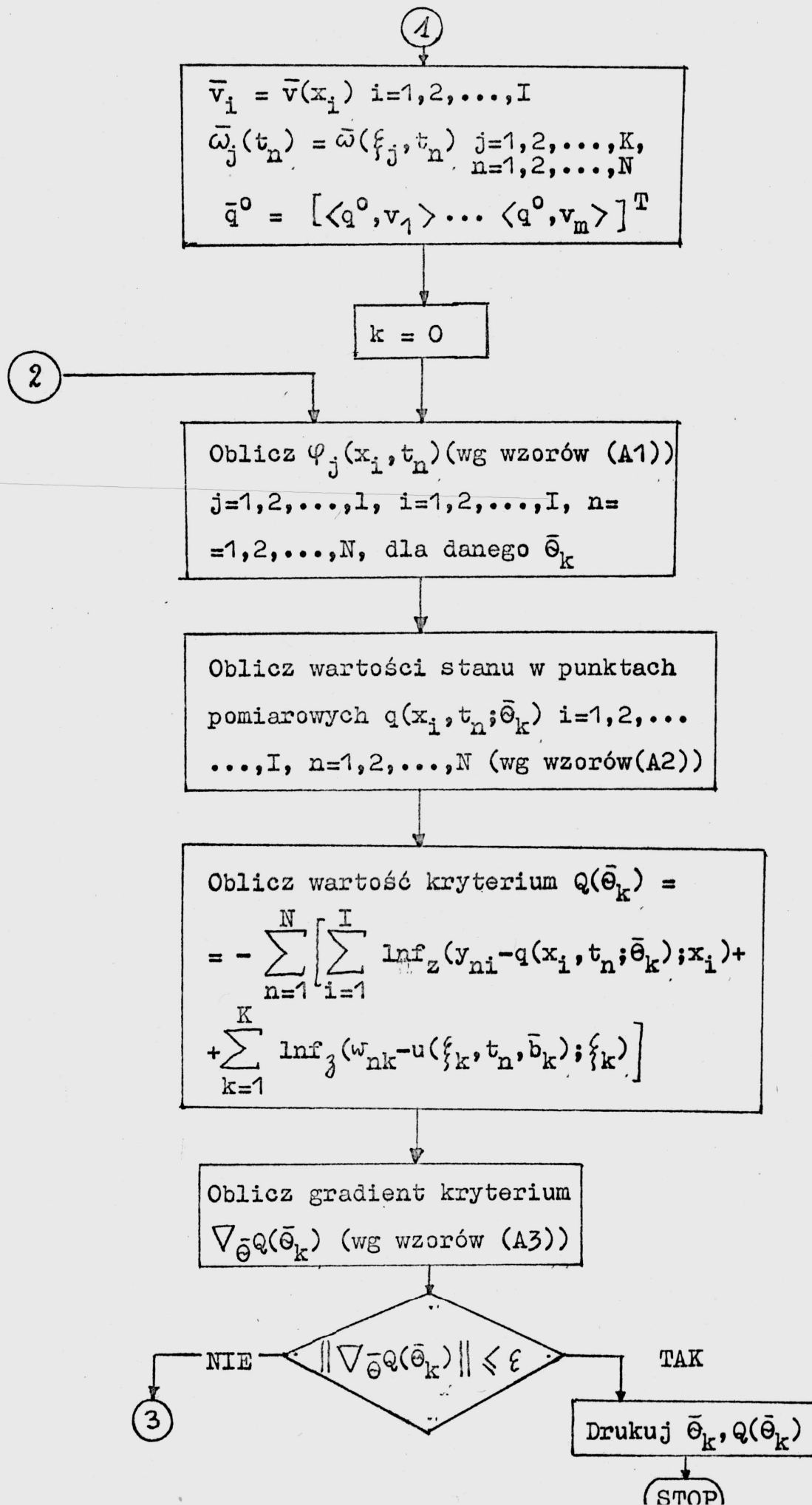
Ogólny schemat proponowanego algorytmu jest typowy dla gradientowych metod optymalizacji i można go przedstawić następująco:

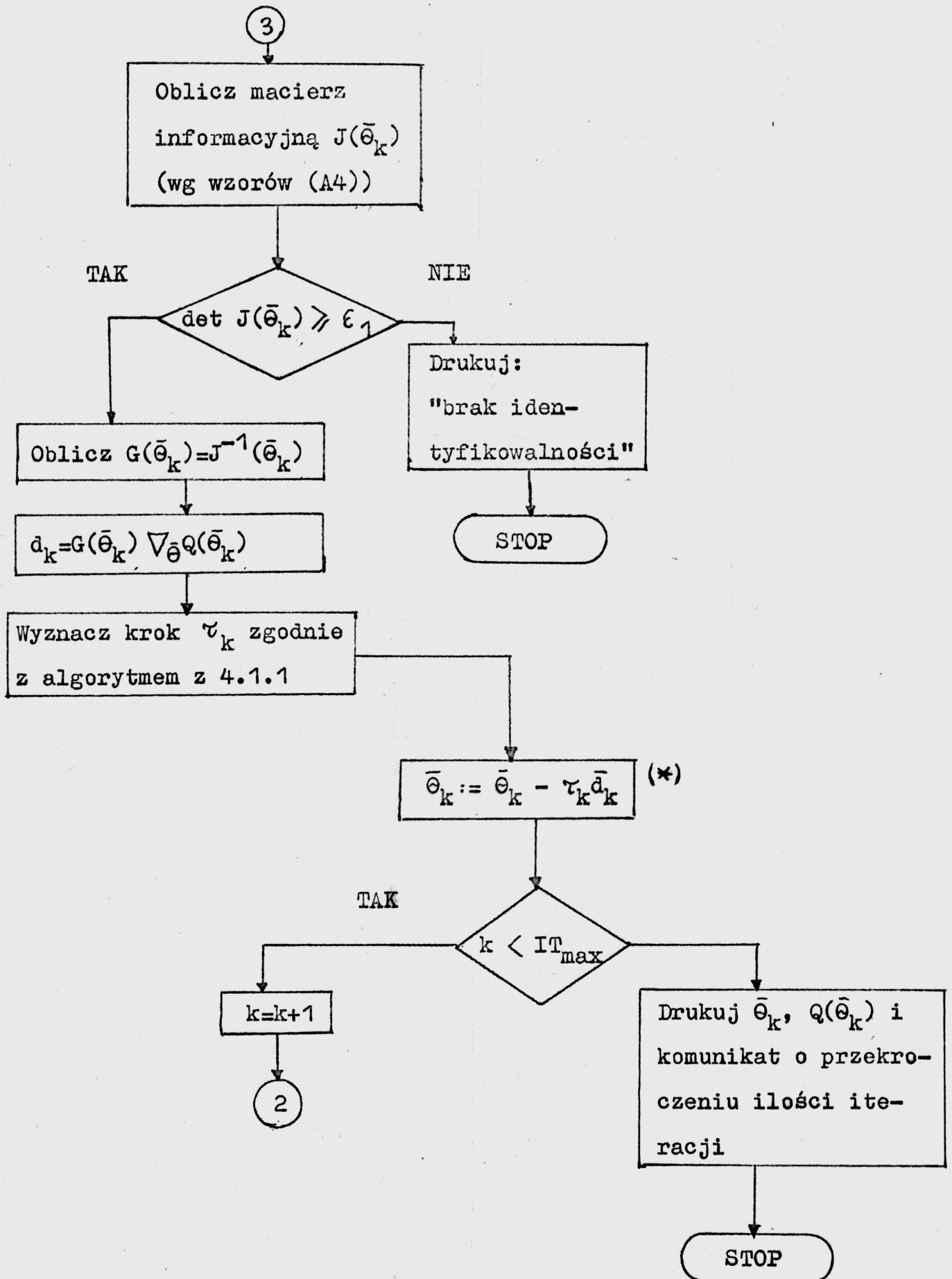
Algorytm identyfikacji

Dane wejściowe

- N ilość wykonanych pomiarów
- t_n $n=1, 2, \dots, N$ - chwile, w których dokonywano pomiarów
- I ilość punktów pomiaru stanu
- x_i , $i=1, 2, \dots, I$ położenie czujników pomiaru stanu
- K ilość punktów pomiaru wymuszenia
- ξ_j $j=1, 2, \dots, K$ położenie punktów pomiaru wymuszenia
- $\bar{\theta}_0$ wektor przybliżeń początkowych nieznanymi parametrów
- λ_M i β - stałe potrzebne do wyboru długości kroku
- ε i ε_1 dokładności obliczeń
- IT_{\max} - maksymalna ilość iteracji
- $\bar{\mathcal{L}}_j$ $j=1, 2, \dots, m$ wektory pozwalające obliczać wartości własne operatora A dla danych parametrów \bar{a} według wzoru $\lambda_j(\bar{a}) = \bar{\mathcal{L}}_j^T \bar{a}$ (por. rozdział 1)
- pomiary stanu y_{ni} $i=1, 2, \dots, I$, ω_{nj} $j=1, 2, \dots, K$, $n=1, 2, \dots, N$
- wektor funkcji własnych $\bar{v}(x) = [v_1(x) v_2(x) \dots v_m(x)]^T$
- wektor funkcji w wymuszeniu $\bar{\omega}(x, t) = [\omega_1(x, t) \dots \omega_{l_2}(x, t)]^T$
- warunek początkowy $q^0(x)$, $x \in \Omega$







Dla zwiększenia czytelności schematu blokowego bardziej złożone wzory obliczeniowe (oznaczone na schemacie przez (A1)-(A4)) podajemy osobno.

(A1) Wrażliwość stanu na zmiany parametrów:

$$\psi_j(x, t) = - \sum_{i=1}^m \left[\alpha_i^{(j)} \int_0^t e^{-\lambda_i(\bar{a}_k)(t-\tau)} \langle u(\cdot, \tau; \bar{b}_k), v_i \rangle (t-\tau) d\tau + \alpha_i^{(j)} e^{-\lambda_i(\bar{a}_k)t} \langle q^0, v_i \rangle \right] v_i(x) \quad j=1, 2, \dots, l_1$$

$$\psi_j(x, t) = \sum_{i=1}^m \left[\int_0^t e^{-\lambda_i(\bar{a}_k)(t-\tau)} \langle \omega_{j-1_1}(\cdot, \tau), v_i \rangle d\tau \right] v_i(x)$$

$$j=1_1+1, \dots, l_2$$

(A2) Stan obiektu w punkcie (x, t) :

$$q(x, t; \bar{\theta}_k) = \sum_{i=1}^m \left[e^{-\lambda_i(\bar{a}_k)t} \langle q^0, v_i \rangle + \int_0^t e^{-\lambda_i(\bar{a}_k)(t-\tau)} x \langle u(\cdot, \tau; \bar{b}_k), v_i \rangle d\tau \right] v_i(x)$$

(A3) Pochodne kryterium względem parametrów

$$\frac{\partial Q(\bar{\theta}_k)}{\partial \theta^{(j)}} = \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=1}^I \frac{f'_z(z_{ni}; x_i)}{f_z(z_{ni}; x_i)} \psi_j(x_i, t_n) + \sum_{k=1}^K \frac{f'_z(z_{nk}; \xi_k)}{f_z(z_{nk}; \xi_k)} x \omega_{j-1_1}(\xi_k, t_n) \Delta_{j-1_1} \right] \quad j=1, 2, \dots, l$$

gdzie: $z_{ni} = y_{ni} - q(x_i, t_n; \bar{\theta}_k)$ $i=1, 2, \dots, I$, $z_{nk} = w_{nk} - u(\xi_k, t_n; \bar{b}_k)$

$$k=1, 2, \dots, K; n=1, 2, \dots, N \text{ a funkcja } \Delta_{j-1,1} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 1 \\ 0 & \text{dla } j = 1_1 \end{cases}$$

(A4) Macierz informacyjna:

$$J(\bar{\theta}_k) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \bar{\varphi}(x_i, t_n) \bar{\varphi}^T(x_i, t_n) r_z^{(i)} + \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k(t_n) \hat{\omega}_k^T(t_n) r_z^{(k)}$$

gdzie: $\bar{\varphi}(x, t) \triangleq [\varphi_1(x, t) \varphi_2(x, t) \dots \varphi_m(x, t)]^T$

$$\hat{\omega}_k(t_n) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{\omega}_k^T(t_n) \\ \vdots \\ \bar{\omega}_k^T(t_n) \end{matrix} \quad k=1, 2, \dots, K, n=1, 2, \dots, N.$$

1_1 razy

Przebieg algorytmu dla przypadku gdy badany obiekt znajduje się w stanie ustalonym a wymuszenie ma postać $\tilde{u}(x; b) = \sum_{j=1}^{l_2} b^{(j)} \tilde{\omega}_j(x)$ gdzie $\tilde{\omega}_j, j=1, 2, \dots, l_2$ są danymi funkcjami, można łatwo otrzymać dokonując następujących zmian:

- w miejsce $q^0(x)$ podstawić funkcję równą tożsamościowo zero,
- obliczać wartości stanu $q(x; \bar{\theta}_k)$ w punktach x_i $i=1, 2, \dots, I$ według wzoru:

$$q(x; \bar{\theta}_k) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i(\bar{a}_k)} \langle \tilde{u}(\cdot, b_k), v_i \rangle v_i(x)$$

- obliczać wrażliwości $\tilde{\varphi}_j(x)$ następująco:

$$\tilde{\varphi}_j(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i^z(\bar{a}_k)} \langle \tilde{u}(\cdot, b_k), v_i \rangle v_i(x) \quad j=1, 2, \dots, l_1$$

$$\tilde{\varphi}_j(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i(\bar{a}_k)} \langle \tilde{\omega}_{j-1,1}, v_i \rangle \cdot v_i(x) \quad j=1_1, 1_1+1, \dots, l_1$$

- we wzorze (A4) przy obliczaniu macierzy informacyjnej zastąpić sumowanie po n pomnożeniem wewnętrznego nawiasu przez N i w miejsce $\Psi(x, t)$ wstawić $\tilde{\Psi}(x)$.

Rozważmy teraz krótko modyfikacje powyższego algorytmu w przypadku gdy zbiór dopuszczalnych wartości parametrów Θ nie jest całą przestrzenią R^1 . Bliższa analiza wykazuje, że nie każda ze znanych metod uwzględniania ograniczeń jest w rozważanym zadaniu dopuszczalna. Wynika to z faktu, że jeśli nie są spełnione ograniczenia na znak niektórych parametrów operatora różniczkowego to równanie o pochodnych cząstkowych może nie mieć rozwiązania lub rozwiązanie może być nieograniczone. Oznacza to, że zastosowanie takich metod uwzględniania ograniczeń, które dopuszczają wyjście poza obszar ograniczeń (np. metody kar zewnętrznych) może prowadzić do niebezpieczeństwa algorytmu (stwierdzenie to potwierdzają badania numeryczne). W tej sytuacji uniwersalną metodą uwzględniania nieliniowych ograniczeń może być dodanie do funkcji $Q(\bar{\Theta})$ członów kar wewnętrznych [5], [33]. Dla uwzględnienia często spotykanej w zadaniach identyfikacji postaci ograniczeń:

$$\mu_a^{(i)} \leq \theta^{(i)} \leq \mu_b^{(i)} \quad i=1,2,\dots,l \quad (4.36)$$

bardziej efektywna jest metoda rzutowania kierunku poszukiwań na zbiór ograniczeń (tzw. metoda rzutowania gradientu, której ogólne omówienie i dowód zbieżności można znaleźć w pracach [13], [65]).

Zgodnie z tą metodą ograniczenia typu (4.36) można uwzględnić w podanym algorytmie zmieniając w kroku (*) regułę obliczania nowego przybliżenia $\bar{\Theta}_{k+1}$ na następującą:

$$\theta_{k+1}^{(i)} = \begin{cases} \mu_a^{(i)} & \text{jeżeli } \theta_k^{(i)} - \tau_k d_k^{(i)} < \mu_a^{(i)} \\ \theta_k^{(i)} - \tau_k d_k^{(i)} & \text{jeżeli } \mu_a^{(i)} \leq \theta_k^{(i)} - \tau_k d_k^{(i)} \leq \mu_b^{(i)} \\ \mu_b^{(i)} & \text{jeżeli } \theta_k^{(i)} - \tau_k d_k^{(i)} > \mu_b^{(i)} \end{cases} \quad (4.37)$$

$i=1,2,\dots,l$.

W przypadku dużej ilości estymowanych parametrów użyteczne mogą być dalsze modyfikacje algorytmu polegające na:

- a) korzystaniu stale z macierzy $G(\bar{\Theta}_0)$ zamiast $G(\bar{\Theta}_k)$ (lub, ogólniej, "odnawianiu" jej co kilka iteracji)
- b) używaniu zamiast $G(\bar{\Theta}_k)$ macierzy powstałej przez odwrócenie macierzy diagonalnej o elementach na przekątnej równych odpowiednim elementom macierzy $J(\bar{\Theta}_k)$
- c) zastosowanie uproszczeń polegających na odrzuceniu "małych" składników przy rozwiązywaniu równań wrażliwości.

4.2.2. P r z y k ł a d y t e s t u j ą c e

Działanie algorytmu sprawdzano na przykładach obiektów opisanych równaniami typu parabolicznego i eliptycznego. Celem badań symulacyjnych było:

- zbadanie wpływu różnych modyfikacji algorytmu na jego szybkość zbieżności i dokładność
- ocena wpływu wybranych czynników na dokładność estymacji.

Dla przeprowadzenia badań uruchomiono cztery programy napisane w języku Fortran dla maszyn serii Odra 1300. Programy te, wraz ze szczegółowym opisem algorytmów, zostaną wydane w postaci odrębnego raportu.

Podsumowanie uzyskanych wyników prezentują kolejne przykłady.

P r z y k ł a d 4.1

Przykład ten jest kontynuacją przykładu 3.4. Równania (3.71) i (3.72) rozwiązywano metodą Galerkin-Ritza rozwijając rozwiązanie względem funkcji własnych $\sin ix$, $i=1,2,\dots$. Metodę symulacji opisano w przykładzie 3. Estymacji parametrów dokonywano zgodnie

z algorytmem opisanym w poprzednim podpunkcie, z uwzględnieniem faktu, że wymuszenie jest znane. Współczynnik β w algorytmie wyboru długości kroku wynosił 0.003. Współczynnik λ_M szacowano w programie na podstawie ^{naj-}większej wartości własnej macierzy informacyjnej.

Pierwszy eksperyment polegał na dokładnym (bez zakłóceń) pomiarze stanu w punktach 1.57 i 0.78 i dokonaniu estymacji przy pomocy zaproponowanego algorytmu, w którym przyjęto $-\ln_z(z;x) = \frac{1}{2} z^2$. Celem tego eksperymentu, przeprowadzonego w warunkach odbiegających od założeń przyjętych w pracy, było jakościowe ocenienie wpływu błędów zaokrągleń na osiągalną dokładność estymacji. Przebieg poszczególnych iteracji prezentuje tabela:

Numer iteracji	$a_k^{(1)}$	$a_k^{(2)}$	Wartość funkcji celu
0	5.	1.	1211.5
1	6.43	2.75	118.4
2	8.06	2.77	3.53
3	9.83	2.14	$0.5 \cdot 10^{-2}$
4	9.998	2.002	$0.3 \cdot 10^{-6}$
5	10.0000	2.0000	$0.95 \cdot 10^{-14}$
6	10.000000	2.000000	$0.79 \cdot 10^{-19}$

Tabela 4.1

Algorytm zatrzymał obliczenia w momencie gdy $\|\nabla Q(\bar{\theta}_k)\| \leq \varepsilon = 10^{-6}$. Jak wynika z tabeli algorytm charakteryzuje się dużą dokładnością w lokalizacji położenia minimum jak i w obliczaniu minimalnej wartości funkcji celu. Warto także zauważyć, że szybkość zbieżności jest większa niż wynika to z oszacowań od góry podanych w twierdzeniu 4.4.

Eksperyment drugi polegał na zbadaniu wpływu położenia punktów

rozważanych na dokładność estymacji. Uzyskane wyniki przedstawione

Numer iteracji	Położenie punktów pomiarowych $x_1=0.78, x_2=0,39$ det J=0.12			Położenie punktów pomiarowych $x_1=1.17, x_2=0,39$ det J=0.7			Położenie punktów pomiarowych $x_1=1.57, x_2 = 0,78$ det J=2.12			Położenie punktów pomiarowych $x_1=2.34$ $x_2=1.17$ det J=4.34		
	$a_k^{(1)}$	$a_k^{(2)}$	$Q(a_k)$	$a_k^{(1)}$	$a_k^{(2)}$	$Q(a_k)$	$a_k^{(1)}$	$a_k^{(2)}$	$Q(a_k)$	$a_k^{(1)}$	$a_k^{(2)}$	$Q(a_k)$
0	5.	1.	394.9	5.	1.	695.	5.	1.	1177	5.	1.	1383
1	2.58	5.79	24.36	2.33	6.25	42.7	5.78	3.33	119.17	7.43	1.82	143.4
2	5.43	5.63	7.79	5.58	5.76	7.72	7.60	3.65	10.7899	9.16	2.25	11.83
3	8.15	3.64	7.76	7.59	4.11	7.61	8.55	3.28	7.59885	9.67	2.29	7.681
4	6.69	4.61	7.61	6.995	4.524	7.563	8.624	3.226	7.59515	9.70	2.286	7.672
5	7.73	3.80	7.604	7.249	4.313	7.5625	8.62227	3.22835	7.59515	9.70	2.285	7.672
6	7.12	4.27	7.6008	7.159	4.386	7.56248						
7	7.52	3.96	7.59997	7.193	4.359	7.56247						
8	7.27	4.14	7.5937	7.180	4.369	7.56247						
9	7.43	4.02	7.59963	7.185	4.365	7.56247						
10	7.33	4.09	7.59959									
11	7.39	4.05	7.59958									
12	7.36	4.06	7.59957									
13	7.38	4.06	7.59957									
14	7.36	4.07	7.59957									
15	7.37	4.06	7.59957									

Tabela 4.2

zostały w rozdziale 3. Okazuje się, że położenie punktów pomiarowych ma także istotny wpływ na szybkość zbieżności algorytmu. Fakt ten ilustruje tabela 4.2.

W każdym eksperymencie algorytm zatrzymywał się po spełnieniu po raz pierwszy warunku $\|\nabla_{\theta} Q(\bar{\theta}_k)\| \leq 10^{-4}$. Jak wynika z powyższej tabeli ilość iteracji jaką trzeba było wykonać dla osiągnięcia zadanej dokładności zależy od wartości wyznacznika macierzy informacyjnej. Okazuje się więc, że planowanie pomiarów celowe jest nie tylko ze względu na dokładność estymacji ale także ze względu na efektywność algorytmu obliczania estymat.

Badania wykonywano na maszynie cyfrowej Odra 1305. Czas wykonania jednej iteracji algorytmu wynosił około 2 sek.. Symulowane zakłócenia pomiarowe miały rozkład normalny o średniej zero i wariancji 0.5. Wartości zakłóceń odczytywane były z tablic rozkładu normalnego.

P r z y k ł a d 4.2.

Przedmiotem badań był obiekt opisany równaniem eliptycznym:

$$a^{(1)} \left[\frac{\partial^2 q(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x,y)}{\partial y^2} \right] - a^{(2)} q(x,y) = -u \cdot \mathcal{J}(x - \xi^{(1)}) \mathcal{J}(y - \xi^{(2)}) \quad (4.38)$$

dla $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, z warunkiem brzegowym:

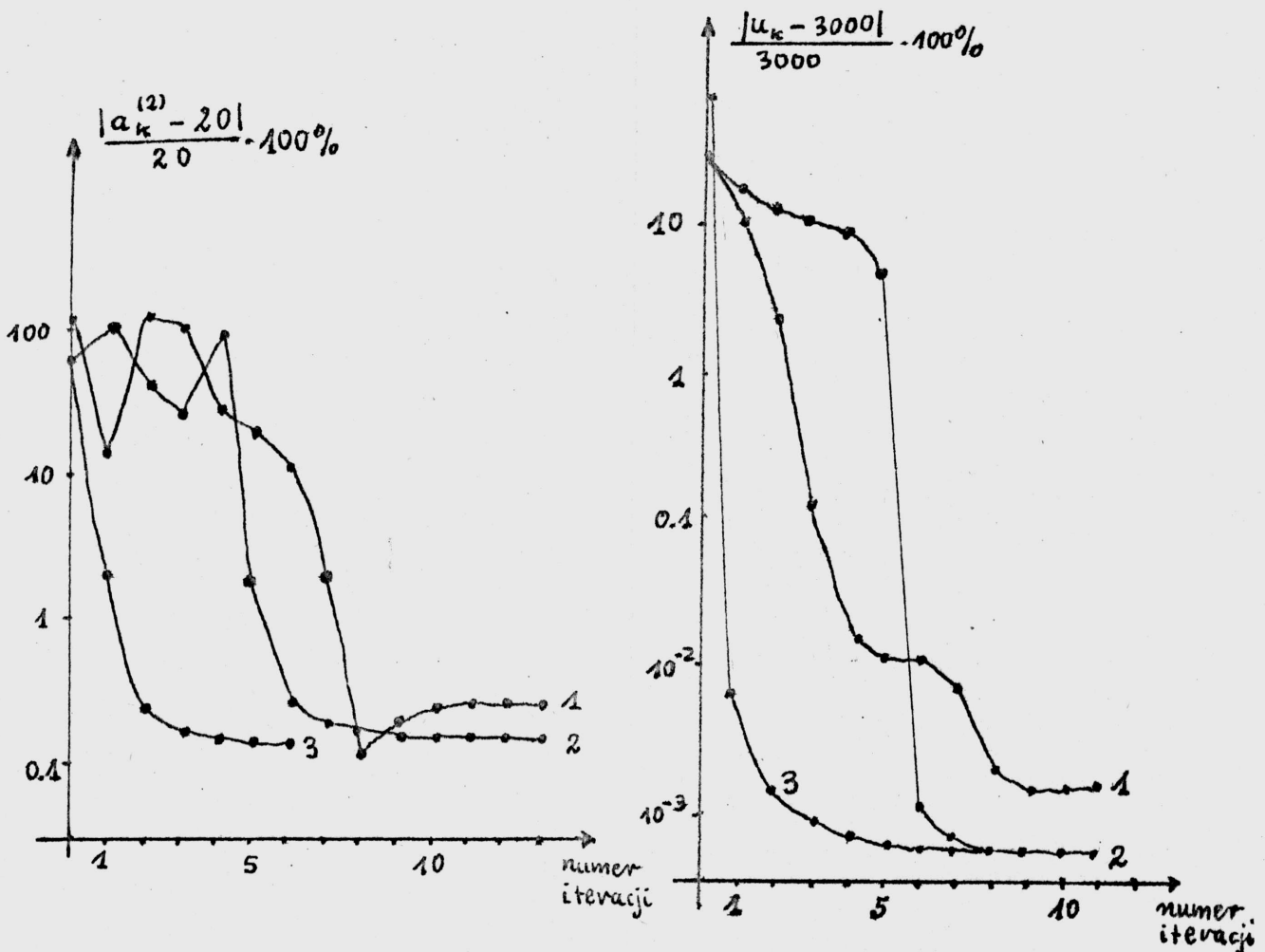
$$q(x,y) = 0 \text{ dla } (x,y) \in \Gamma \quad (4.39)$$

gdzie Γ jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach $(0,0)$; $(0,\pi)$; $(\pi,0)$; (π,π) . Przebieg eksperymentów był następujący:

- rozwiązano równania (4.38), (4.39) dla wartości parametrów $a^{(1)} = 5$, $a^{(2)} = 20$. i wartości wymuszenia $u = 3000$, przy różnych wartościach $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$;
- do otrzymanych wartości stanu w punktach pomiarowych dodano zakłócenia o rozkładzie normalnym o średniej zero i wariancji 0.5 i potraktowano jako pomiary stanu,

- do wartości $u=3000$. dodano zakłócenia $N(0,1)$ i otrzymane liczby potraktowano jako pomiar wymuszenia,
- wartość parametru $a^{(1)}$ przyjęto za znaną a do estymacji parametru $a^{(2)}$ i wartości wymuszenia u użyto opisanego w punkcie 4.1 algorytmu z modyfikacjami uwzględniającymi znajdowanie się obiektu w stanie ustalonym,
- równanie (4.38), (4.39) i równania wrażliwości rozwiązywane były metodą Ritza-Galerkina z rozwinięciem w 9 funkcji własnych o postaci $\sin x \cdot \sin y$ $i, j=1, 2, 3$.

Celem eksperymentu było ocenienie wpływu położenia wymuszenia punktowego na jakość estymacji i szybkość zbieżności algorytmu. Badania wykonano przy następującym położeniu punktów pomiaru stanu: $(0,78, 0,78)$, $(0,78, 1,57)$, $(1,57, 0,78)$, $(1,57, 1,57)$ dla ilości pomiarów stanu i wymuszenia równej 30. Przebieg obliczeń ilustrują wykresy:



Poszczególne przebiegi uzyskano przy następujących położeniach wymuszenia:

$$\text{krzywa 1 - } (1) = 2., \quad (2) = 2.$$

$$\text{krzywa 2 - } (1) = 1.5, \quad (2) = 1.2.$$

$$\text{krzywa 3 - } (1) = 1.57, \quad (2) = 1.57.$$

Analiza wykresów dowodzi, że położenie wymuszenia punktowego ma znaczący wpływ zarówno na jakość estymacji jak i szybkość zbieżności algorytmu. Interesujący jest także fakt, że pomimo bezpośredniego pomiaru wartości wymuszenia dokładność jego estymacji zależy także od położenia. Zjawisko to łatwo wytłumaczyć, gdyż o wartości wymuszenia zdobywa się informację nie tylko bezpośrednio ale także poprzez pomiar stanu, a wrażliwość stanu na zmiany u zależy od ξ . Warto zauważyć, że względna dokładność oceny wymuszenia jest we wszystkich przypadkach dużo wyższa od dokładności oceny parametru. Dużo szybsza jest także zbieżność oszacowania wymuszenia niż parametru. Wynika to z liniowej zależności stanu od wymuszenia i nieliniowej zależności od parametru.

Powyższe obliczenia powtórzono dokonując w programie zmiany metody rozwiązywania równań (4.38), (4.39). Zastosowano metodę różnic skończonych z siatką prostokątną o 100 węzłach i do rozwiązywania otrzymanego układu równań liniowych użyto iteracyjnej metody Seidela [71]. Przy zachowaniu zbliżonej dokładności obliczeń czas wykonania jednej iteracji wydłużył się około 5-krotnie w porównaniu z metodą Ritza-Galerkina.

5. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW REAKTORA KONTAKTOWEGO UTLENIANIA DWUTLENKU SIARKI

W poprzednim rozdziale przedstawiono algorytm identyfikacji i zbadano jego działanie na prostych przykładach testujących. Celem obecnego rozdziału jest zbadanie jego własności na przykładzie bardziej złożonego obiektu jakim jest reaktor kontaktowy utleniania SO_2 . Jednocześnie pokazano, że uogólnienie algorytmu na przypadek obiektu opisanego układem równań o pochodnych cząstkowych nie stwarza poważniejszych trudności, jeśli nie brać pod uwagę wzrostu nakładu obliczeń.

Identyfikacji parametrów równań opisujących reaktor dokonano na podstawie pomiarów wykonanych na jednym z ciągów technologicznych pracujących w Zakładach Chemicznych Police. Jednakże prezentowanego przykładu nie można traktować jako próby zbudowania adekwatnego modelu matematycznego dla tak złożonego procesu jak utlenianie SO_2 metodą kontaktową.

5.1. Ogólna charakterystyka procesu i jego model

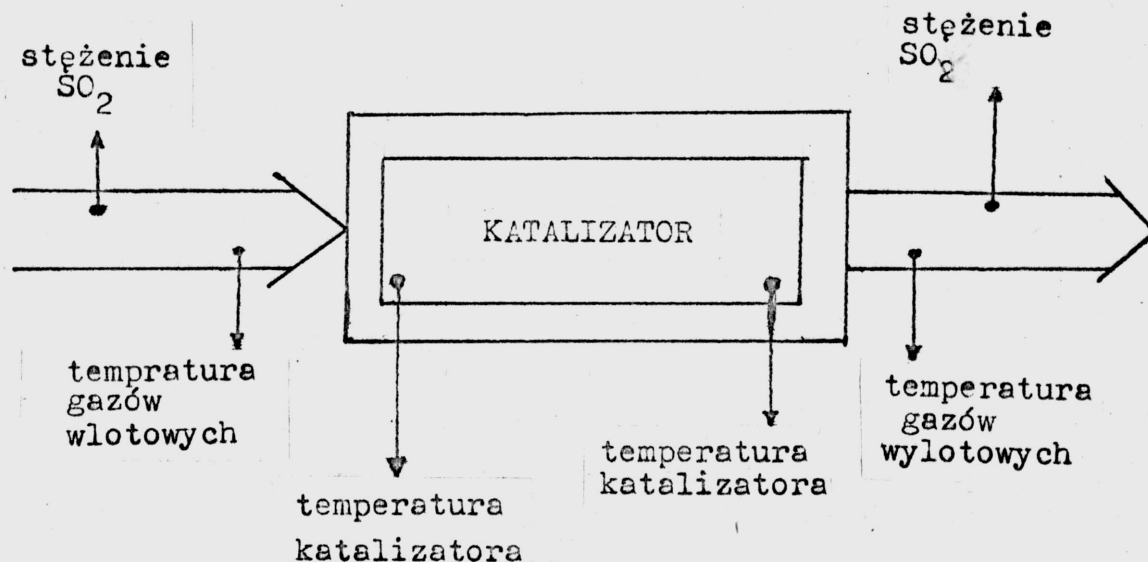
Produkcja kwasu siarkowego metodą kontaktową składa się z trzech głównych etapów: spalania siarki w wyniku którego uzyskuje się SO_2 , utleniania dwutlenku siarki do SO_3 i rozpuszczania trójtlenku siarki w wodzie. Przebieg utleniania SO_2 w reaktorze kontaktowym w znacznym stopniu decyduje o wydajności całego procesu [1] i dlatego podejmuje się wiele prób zbudowania modelu matematycznego tego zjawiska [55], [56], [32].

Prezentowany w tej pracy model reaktora kontaktowego nie ujmuje wielu zjawisk zachodzących w czasie utleniania SO_2 i jego identyfikacja ma stanowić ilustrację działania proponowanego algorytmu a nie

próbę stworzenia adekwatnego opisu dla tak skomplikowanego procesu.

Zgodnie z metodyką, przedstawioną w [17], postępowania przy budowie modelu procesu, dla którego zadanie sterowania nie zostało jeszcze sformułowane proponowany opis wynika z praw zachowania masy, energii itp. Nie wyróżnia się w nim także wielkości wejściowych i wyjściowych a tylko mierzone wymuszenia i mierzone odpowiedzi obiektu związane z jego stanem. Podejście takie umożliwia otrzymanie prostszych modeli odpowiadających różnym koncepcjom sterowania, bądź wykorzystanie modelu do innych celów [15].

Zestaw wielkości mierzonych w reaktorze kontaktowym, używanym w warunkach przemysłowych (Z.Ch.Police), przedstawia schematycznie rysunek:



Rys.5.1. Zestaw wielkości mierzonych w reaktorze.

Przy wyprowadzaniu równań opisujących stan reaktora przyjęto następujące założenia upraszczające:

- gradienty stężenia i temperatury wzdłuż promienia reaktora są zerowe,
- nie występuje wymiana ciepła z otoczeniem przez ściany reaktora,
- reakcja zachodzi na powierzchni cząstek katalizatora,

- nie występuje adsorbcja materiału na cząstkach katalizatora,
- w zakresie rozważanych temperatur i stężeń szybkość reakcji jest ich liniową funkcją,
- nie występuje dyfuzja gazu wzdłuż reaktora.

Stosując znane postępowanie [32] polegające na ułożeniu bilansów masy i ciepła dla elementarnych objętości gazu i katalizatora a następnie wykonaniu przejścia granicznego uzyskuje się następujące równania stanu dla reaktora:

$$\frac{\partial T_g(x,t)}{\partial t} = -v \frac{\partial T_g(x,t)}{\partial x} + \alpha [T_k(x,t) - T_g(x,t)] \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -v \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + \beta T_k(x,t) + \gamma C(x,t) + \delta (T^* - T_g(x,t)) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial T_k(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_k(x,t)}{\partial x^2} - \lambda (T_k(x,t) - T_g(x,t)) + g' T_k(x,t) + hC(x,t) \quad (5.3)$$

gdzie:

- x jest jednowymiarową współrzędną przestrzenną;
 $x \in (0,1)$ (1-długość reaktora),
- $T_g(x,t)$ jest temperaturą gazu w punkcie x w chwili t ,
- $T_k(x,t)$ oznacza temperaturę katalizatora w punkcie (x,t)
- $C(x,t)$ oznacza stężenie dwutlenku siarki w gazie znajdującym się w reaktorze,
- v jest stałą prędkością przepływu gazu,
- a oznacza współczynnik przewodnictwa cieplnego,
- α jest współczynnikiem wymiany ciepła pomiędzy gazem a katalizatorem,
- β, δ współczynniki charakteryzujące wpływ temperatury katalizatora i stężenia SO_2 na szybkość reakcji utleniania,

- g', h - współczynniki charakteryzujące wpływ temperatury katalizatora i stężenia SO_2 na ilość ciepła wydzielającą się w trakcie reakcji.

Powyższe równania zbliżone są do równań używanych do opisu reaktorów ze stałym wypełnieniem [56]. Dodatkowego wyjaśnienia wymaga tylko wprowadzenie ostatniego członu w równaniu (5.2). Człon ten charakteryzuje wpływ temperatury gazu na szybkość reakcji.

Przy założeniu, że współczynnik $\delta > 0$ wpływ ten jest następujący: dla temperatur $T_g(x, t) < T^*$ szybkość reakcji wzrasta, dla temperatur $T_g(x, t) \gg T^*$ szybkość reakcji maleje na skutek zachodzenia reakcji rozpadu SO_3 na SO_2 i tlen. Wartość stałej T^* dobrano na podstawie tabeli zamieszczonej w pracy [1] i przyjęto $T^* = 530^\circ C$.

U w a g a: Oznaczenia używane w tym rozdziale nie są zgodne z konwencją obowiązującą w rozdziałach 1) - 4).

Ze względu na bardzo dużą prędkość przepływu gazu v , powodującą bardzo krótki czas przebywania cząstek gazu w reaktorze, można uprościć równania (5.1) i (5.2) pomijając człony zawierające pochodne względem czasu. Prowadzi to do równań opisujących tzw. stan quasi-ustalony:

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = \beta_c T_k(x, t) + \gamma_c C(x, t) + \delta_c (T^* - T_g(x, t)) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial T_g(x, t)}{\partial x} = \alpha_g [T_k(x, t) - T_g(x, t)] \quad (5.5)$$

w których wprowadzono oznaczenia: $\beta_c \triangleq \frac{\beta}{v}$, $\gamma_c \triangleq \frac{\gamma}{v}$, $\delta_c = \frac{\delta}{v}$, $\alpha_g \triangleq \alpha/v$.

Podobne uproszczenie równania (5.3) nie jest możliwe gdyż istnienie katalizatora o bardzo dużej masie powoduje, że czas trwania przebiegów nieustalonych w reaktorze wynosi kilka godzin.

Pełny opis reaktora wymaga podania warunków początkowych i brzegowych dla równań (5.3), (5.4), (5.5). Przyjęto następujący zestaw tych warunków:

$$C(0, t) = C^W(t), \quad T_g(0, t) = T_g^W(t) \text{ dla każdego } t \quad (5.6)$$

$$T_k(0, t) = T_g^W(t), \quad \left. \frac{\partial T_k(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \text{ dla każdego } t \quad (5.7)$$

$$T_k(x, 0) = \psi(x) \text{ dla każdego } x \in (0, 1) \quad (5.8)$$

gdzie:

- $C^W(t)$ jest stężeniem SO_2 w gazie wlatującym do reaktora
- $T_g^W(t)$ jest temperaturą wlatującego gazu
- $\psi(x)$ oznacza początkowy rozkład temperatury katalizatora (spełniający warunek zgodności $\psi(0) = T_g^W(0)$).

W celu sprowadzenia równania (5.3) z warunkami brzegowymi (5.7) do postaci z jednorodnymi warunkami brzegowymi dokonamy zamiany zmiennych według wzoru:

$$T_k(x, t) = q(x, t) + T_g^W(t) \quad (5.9)$$

Prowadzi to do następującego równania na $q(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} - \alpha q(x, t) - \alpha (T_g^W(t) - T_g(x, t)) + g' q(x, t) + \\ + g' T_g^W(t) + hC(x, t) - \frac{\partial T_g^W(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.10)$$

z warunkami brzegowymi:

$$q(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \text{ dla każdego } t \quad (5.11)$$

i warunkiem początkowym:

$$q(x, 0) = \psi(x) - \psi(0) \text{ dla każdego } x \in (0, 1). \quad (5.12)$$

Warunki eksperymentu i wyniki estymacji parametrów równań (5.6), (5.7), (5.10) omówione zostaną w następnym podrozdziale.

5.2. Identyfikacja parametrów reaktora

Zastosowanie metody największej wiarygodności do identyfikacji parametrów równań podanych w poprzednim podrozdziale wymaga założenia, że równania te opisują dokładnie badany proces w zadanym przedziale stężeń i temperatur.

Równanie (5.10) zawiera różne nieznanne parametry przy tych samych zmiennych zależnych. Dlatego dokonano w nim zmiany parametryzacji według wzorów: $b = g' - \alpha$, $d = -\alpha$. Układ równań opisujących reaktor można teraz zapisać:

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + bq(x,t) + b T_g^w(t) + dT_g(x,t) + hC(x,t) - \frac{\partial T_g^w(t)}{\partial t} \quad (5.13)$$

$$q(x,0) = \varphi(x) - \varphi(0), \quad q(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad (5.14)$$

$$T_k(x,t) = q(x,t) + T_g^w(t) \quad (5.15)$$

wraz z równaniami (5.4), (5.5), (5.7). Nieznanymi parametrami tych równań są: $a, b, d, h, \alpha_g, \beta_c, \gamma_c, \delta_c$. Do ich estymacji użyto pomiarów wielkości zaznaczonych na rysunku (5.1), które zostały zdjęte w godzinnych odstępach w czasie 8 godzin normalnej pracy reaktora w Z. Ch. Police. Zestaw zmierzonych wartości prezentuje tabela:

Numer pomiaru	$C(l, t)$	$T_g^W(t)$	$T_k(x_1, t)$	$T_k(l, t)$	$C^W(t)$	$T_g(l, t)$
1	7.71	445	434	607	9.45	550
2	7.53	445	434	607	9.46	550
3	7.26	445	432	607	9.45	550
4	7.44	446	434	607	9.46	545
5	7.02	445	435	607	9.48	545
6	7.33	445	435	605	9.53	544
7	7.24	444	434	603	9.52	545
8	7.22	445	434	604	9.52	545

Ze względu na nieznajomość stanu początkowego temperatury katalizatora $\varphi(x)$ i niemożność jego zmierzenia, pomiary zamieszczone w tabeli rozpoczęto w chwili gdy wymuszenie zewnętrzne, w postaci zmiany temperatury gazów wlotowych, wytrąciły reaktor ze stanu ustalonego. Pozwoliło to na skorzystanie z równań opisujących przebieg temperatury katalizatora i gazu a także stężenia SO_2 w stanie ustalonym do wyznaczenia zależności $\varphi(x)$ od nieznanymi parametrów $a, b, d, h, \alpha_g, \delta_c, \beta_c, \delta_c$.

Równania takie łatwo uzyskać na podstawie (5.13), (5.4), (5.5), (5.7). Okres, w którym dokonywano pomiarów wybrano w ten sposób by po zmianie temperatury gazów wlotowych w chwili rozpoczęcia obserwacji nie następowały dalsze zmiany temperatury gazów wlotowych i stężenia SO_2 (przynajmniej w zakresie dokładności przyrządów pomiarowych). Wybór taki był potrzebny gdyż na skutek działania zakłóceń pomiarowych wartości wielkości wejściowych także muszą być estymowane.

O pomiarach wielkości wejściowych i stanu w poszczególnych założono, że są to pomiary "prawdziwych" wartości, do których dodaje

się zakłócenie o charakterze losowym. Przyjęto hipotezę, że rozkład zakłóceń jest normalny o średniej zero i wariancji wynoszącej 1 przy pomiarach temperatur i 0.5 przy pomiarach stężeń. W celu przetestowania tej hipotezy dokonywano pomiaru danej wielkości kilkakrotnie w kilkuminutowych odstępach czasu. Założono, że odstępy te są na tyle krótkie by nie nastąpiła zmiana "prawdziwej" wartości wielkości mierzonej. Wartości zakłóceń pomiarowych obliczano według wzoru:

$$z_n = s_n - \bar{s} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.16)$$

gdzie: s_n $n=1, 2, \dots, N$ zmierzone wartości (np. temperatury gazu), $\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s_n$, z_n $n=1, 2, \dots, N$ wartości zakłóceń pomiarowych. Dla testowania hipotezy o rozkładzie zakłóceń użyto nieparametrycznego testu zgodności χ^2 Pearsona [69]. We wszystkich przypadkach nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu o wariancjach odpowiednio 0.5 i 1 przy poziomie istotności 0.05.

Zakładamy także, że spełnione są założenia podane w rozdziale 1 niezależności zmiennych losowych reprezentujących zakłócenia pomiarowe. Założenia tego nie zweryfikowano przy pomocy testów statystycznych ze względu na małą ilość posiadanych pomiarów.

Korzystając z opisu warunków eksperymentu i poczynionych założeń minus logarytm funkcji wiarygodności można zapisać następująco (por. podrozdział 2.1):

$$Q(\hat{\theta}) = \sum_{n=1}^8 \frac{1}{2} (\hat{T}_k(x_1, t_n) - T_k(x_1, t_n))^2 + \frac{1}{2} (\hat{T}_k(1, t_n) - T_k(1, t_n))^2 + \\ + \frac{1}{2} (\hat{T}_g(1, t_n) - T_g(1, t_n))^2 + \frac{1}{2} (\hat{T}_g^w(t_n) - T_g^w)^2 + (\hat{C}(1, t_n) - C(1, t_n))^2 + \\ + (\hat{C}^w(t_n) - C^w)^2$$

gdzie:

$$- \bar{\theta}^T = [a, b, d, h, \delta_c, \beta_c, \mathcal{J}_c, T_g^W, C^W]$$

- t_n $n=1, 2, \dots, 8$ - chwile, w których dokonywano pomiarów odległe od siebie o 1 godzinę

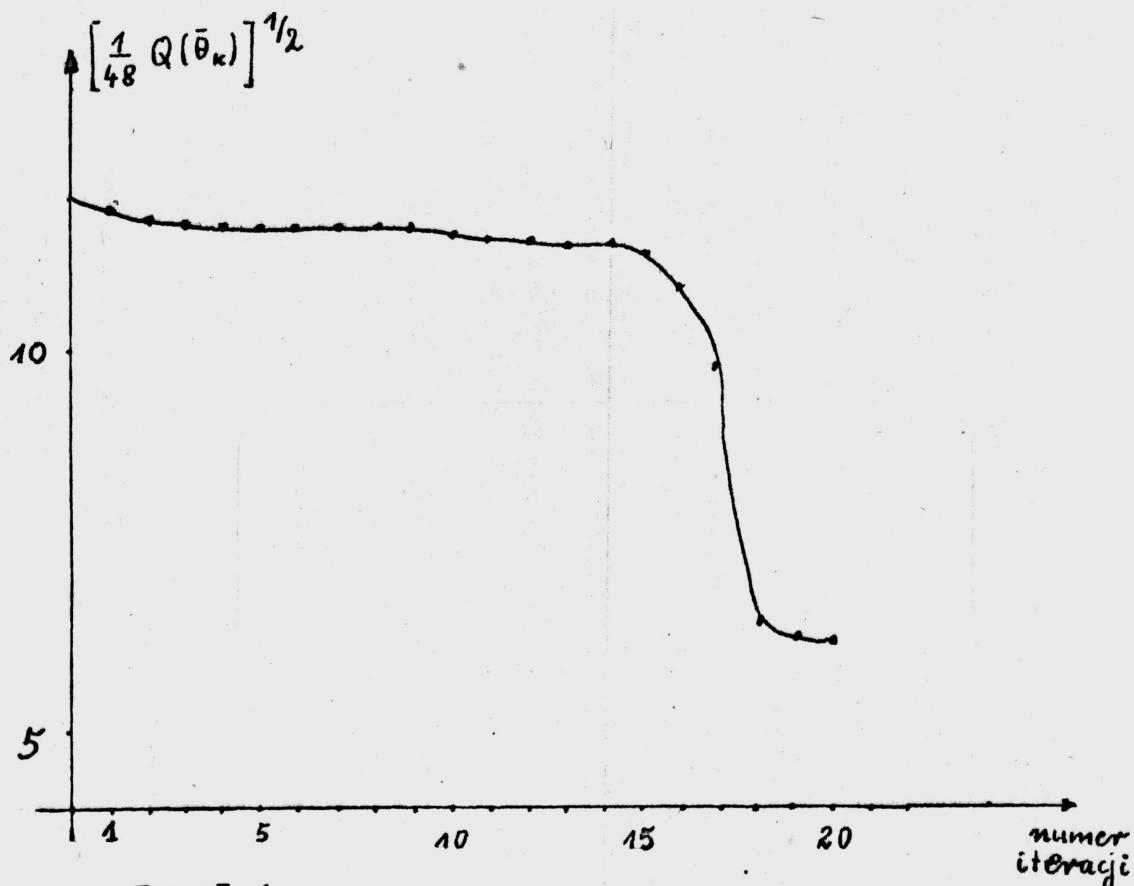
- x_1 - położenie czujnika pomiaru temperatury katalizatora przy wlocie $x_1 = 0.051$.

Dla obliczenia wartości $T_k(x, t)$, $T_g(x, t)$, $C(x, t)$ dla danego $\bar{\theta}$ rozwiązywano układ równań (5.13), (5.14), (5.4), (5.5), (5.6). Rozwiązanie równań (5.4), (5.5) znaleziono w postaci jawnej zależności T_g i C od T_k . Natomiast równanie (5.13), (5.14) rozwiązywane było metodą Ritza-Galerkina przy czym jako funkcji bazowych użyto funkcji własnych $\sin(j - \frac{1}{2})\frac{\pi}{L}x$ $j=1, 2, \dots, 5$ operatora eliptycznego występującego w równaniu (5.13). Otrzymane równania różniczkowe zwyczajne rozwiązywano najprostszą metodą różnicową. W podobny sposób rozwiązywano równania wrażliwości zmian temperatur i stężenia na zmiany parametru $\bar{\theta}$.

Do znajdowania minimum funkcji $Q(\bar{\theta})$ stosowano algorytm przedstawiony w rozdziale 4 z tym, że wprowadzono modyfikacje b) i c) opisane w punkcie 4.2.1, które w znacznym stopniu skracają czas trwania jednej iteracji.

Ze względu na to, że ilość punktów pomiarowych jest mniejsza od ilości nieznanymi parametrów obiekt nie jest identyfikowalny na podstawie pomiarów w każdej chwili t_n . Aby mimo tego algorytm był zbieżny oszacowano wstępnie wartości parametrów a, b, d, h i α_g na podstawie pomiarów temperatury innych niż te które zamieszczono w tabeli. Natomiast dane z tabeli użyte zostały do estymacji parametrów $\delta_c, \beta_c, \mathcal{J}_c$ i korekcji wstępnych oszacowań pozostałych parametrów.

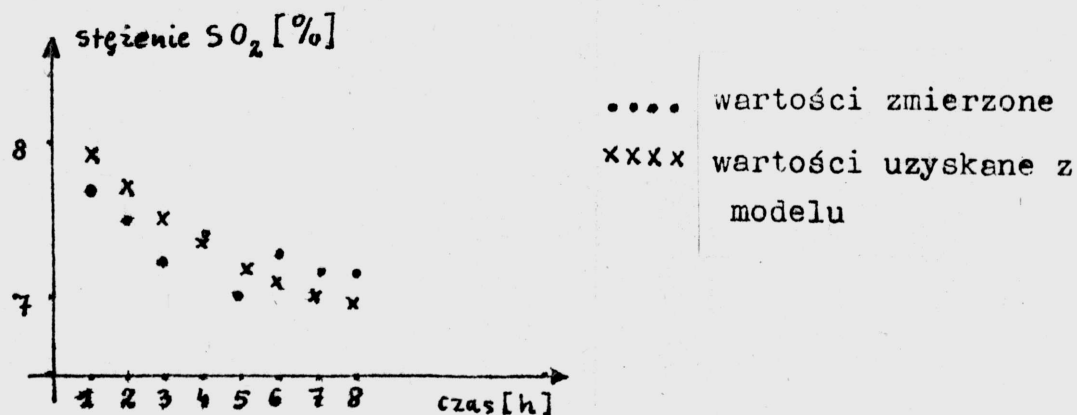
Obliczenia wykonano na maszynie Odra 1305. Czas trwania jednej iteracji wynosił ok. 30 sekund. Przebieg wielkości $(Q(\bar{\theta}_k)/48)^{\frac{1}{2}}$, którą można interpretować jako średnią odległość między pomiarami a wartościami obliczonymi z modelu, przedstawia wykres:



Rys.5.1.

Analiza tego wykresu wskazuje, że skutkiem zastosowania modyfikacji b) i c), opisanych w punkcie 4.2.1 jest zmniejszenie szybkości zbieżności algorytmu. Szybkość zbieżności przypadająca na jedną iterację jest mimo to wystarczająca jeśli wziąć pod uwagę wymiarowość zadania.

Następny wykres przedstawia rzeczywisty i uzyskany na podstawie modelu przebieg stężenia SO_2 na wylocie reaktora w poszczególnych godzinach:



Rys.5.2.

Podobne porównania przebiegów temperatury katalizatora i gazu na wylocie reaktora uzyskanych z modelu i zmierzonych na obiekcie wykazują różnicę nie przekraczającą, w żadnym punkcie, 3%. Dokładność taka wydaje się wystarczająca, tym bardziej, że parametry modelu dobierano na podstawie małej ilości pomiarów.

Uzyskany model jest zbyt skomplikowany by można go było zastosować do sterowania ciągiem reaktorów w czasie rzeczywistym. Może on natomiast służyć do badania jakości różnych koncepcji sterowania bądź jako podstawa do tworzenia modeli uproszczonych.

ZAKOŃCZENIE

W przedstawionej rozprawie zbadano niektóre własności estymatorów największej wiarygodności stałych parametrów obiektu opisanego równaniem typu parabolicznego lub eliptycznego i zaproponowano algorytm obliczeniowy identyfikacji.

Zestaw warunków wystarczających na to by ciąg estymatorów był, przy nieograniczonym wzroście ilości pomiarów, zgodny, nieobciążony, efektywny i miał rozkład normalny przedstawiono w rozdziałach II i III. Warto zwrócić uwagę na to, że o rozkładach prawdopodobieństwa zakłóceń pomiarowych nie zakładano normalności. Mocną zgodność i nieobciążoność asymptotyczną udało się udowodnić przy założeniu jedynie ciągłości funkcji gęstości zakłóceń a pozostałe własności, dla gęstości posiadających drugie pochodne. Przedstawione w pracy dowody, wymienionych wyżej, własności asymptotycznych ciągu estymatorów największej wiarygodności są uogólnieniami znanych twierdzeń. Potrzeba dokonania ich rozszerzeń wyniknęła z zależności rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji od czasu i warunków eksperymentu, podczas, gdy w klasycznym zadaniu badano estymatory parametrów stacjonarnego rozkładu. Potwierdzenie tej tezy stanowią przykłady, podane w rozdziale II, wskazujące na różne czynniki mogące wpływać na możliwość niezgodności ciągu estymatorów. Jak wykazano, jednym z najważniejszych warunków zapewniających zgodność jest identyfikowalność parametrów obiektu na podstawie pomiaru bez szumu. Udowodnione kryteria identyfikowalności nakładają na warunki eksperymentu niezbyt ostre wymagania. Dla zapewnienia asymptotycznej efektywności i normalności wymagania te należy wzmocnić (por. twierdzenie 3.1).

Wykazanie tych własności pozwala obliczyć asymptotyczną dokładność estymacji przy danych warunkach eksperymentu i sformułować zadanie optymalnego, ze względu na jakość estymacji, planowania eksperymentu. Przy ograniczeniu klasy dopuszczalnych wymuszeń udało się

pokazać ciekawe własności optymalnych planów eksperymentu dla obiektów rozłożonych w obszarach o regularnych kształtach i takich, w których nie ma makroskopowego przepływu badanej substancji.

W szczególności w ograniczonej klasie funkcji znaleziono jawną postać optymalnego wymuszenia rozłożonego i wykazano, że optymalne położenie punktów pomiarowych może być znalezione znanymi metodami.

Podkreślić należy, że przedstawione badania zagadnienia planowania eksperymentu mają charakter wstępny. Wskazują one na możliwość użycia wyznacznika macierzy informacyjnej jako kryterium asymptotycznie optymalnego planowania. Przeprowadzone eksperymenty symulacyjne wskazują na istotny wzrost jakości estymacji przy prawidłowym doborze położenia punktów pomiarowych.

Zagadnienie planowania przy skończonej liczbie pomiarów i rozszerzenie klasy dopuszczalnych wymuszeń wymagają dalszych badań.

Uogólnienie twierdzeń 2.1, 2.2 i 3.1 na klasy obiektów opisanych równaniami hiperbolicznymi i układami równań nie przedstawia większych trudności. Łatwo je rozszerzyć także na przypadek estymacji parametrów będących kombinacjami znanych funkcji zależnych od zmiennych przestrzennych z nieznanymi współczynnikami wagowymi. Nie podano szczegółowego opisu tych rozszerzeń gdyż zagadnienie identyfikowalności i planowania eksperymentu dla tych przypadków wymaga dalszych szczegółowych badań. Badania takie są na tyle ważne i złożone, że mogą stanowić przedmiot osobnych opracowań.

Dla bardzo ważnego problemu jakości estymacji przy skończonej liczbie pomiarów nie udało się uzyskać analitycznych oszacowań. Jednakże przeprowadzone badania symulacyjne pozwalają stwierdzić, że jakość estymacji jest bliska asymptotycznie osiągalnej już przy kilkunastu pomiarach w paru punktach przestrzennych.

Rozdziały IV i V prezentują algorytm identyfikacji i wyniki jego testowania. Przedstawiony algorytm, chociaż oparty jest na idei

metody Gaussa-Newtona, zawiera szereg modyfikacji dostosowujących go do znajdowania oszacowań parametrów obiektu rozłożonego. Udowodniono, że po wprowadzeniu modyfikacji, algorytm jest globalnie zbieżny, o ile funkcja wiarygodności jest ściśle wypukła. Wykazano też, że tę własność można zapewnić, przy dużej ilości pomiarów, poprzez właściwe zaplanowanie eksperymentu. Oszacowano szybkość zbieżności algorytmu i wskazano na jej zależność od warunków eksperymentu.

Opracowano programy użytkowe identyfikacji wybranych obiektów i przeprowadzono badania zarówno na przykładach testujących jak i na danych pochodzących z pomiarów reaktora kontaktowego konwersji SO_2 . Stosunkowo krótkie czasy obliczeń przy identyfikacji prostych obiektów wskazują na realną możliwość stosowania metody największej wiarygodności.

Ważnym aspektem praktycznym dalszych badań powinno być opracowanie hybrydowych algorytmów umożliwiających rozwiązywanie zadań identyfikacji obiektów o opisie nieliniowym.

Interesująca jest także możliwość skonstruowania rekurencyjnej wersji metody największej wiarygodności i zbadanie warunków zbieżności takiej procedury.

LITERATURA

- 1 Amelin A.G., *Obszczaja chemiczeskaja tehnologija*, Moskwa 1977.
- 2 Angel E., Bellman R., *Dynamic programming and partial differential equations*, Academic Press New York and London 1972.
- 3 Angel E., *Inverse boundary value problems for elliptic equations*, *J.Math.Anal.Appl.* 30(1970) str. 86-98.
- 4 Anton J.J., Tse E., *On the identifiability of parameters*, *IEEE* vol AC 17, No 5, 1972.
- 5 Aoki M., *Introduction to optimization techniques*, Macmillan 1974.
- 6 Aoki M., Yue P.C., *On certain convergence question in system identification*, *SIAM J.Contr.*, vol. 8, 1970, str. 239-256.
- 7 Astrom K.J., Bellman R., *On structural identifiability*, *Math. Biosci.*, vol.7, 1970, str. 313-328.
- 8 Balakrishnan A.V., *A new computing technique in system identification*, *J. of Computer and System Sci.*, vol. 2, 1968, str. 102-116.
- 9 Balakrishnan A.V., *Identification - inverse problems for partial differential equations; a stochastic formulation*, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 27, Springer-Verlag, 1975.
- 10 Balakrishnan A.V., *Identification of distributed parameter systems: non-computational aspects*, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 1, Springer-Verlag, 1978.
- 11 Bard Y., *Comparison of gradient methods for the solution of nonlinear estimation problems*, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.7, 1970.
- 12 Bellman R., *Introduction to matrix analysis*, Mc Graw-Hill, 1960.
- 13 Beltrani E., *An algorithmic approach to nonlinear analysis and optimization*.
- 14 Bohlin T., *On the maximum likelihood method of identification*, *IBM J.Res.Develop.* vol. 14, No 1, 1970, str. 41-51.

- 15 Bubnicki Z., Identyfikacja obiektów sterowania, PWN Warszawa, 1974.
- 16 Bubnicki Z., System identification via estimation of probability distributions and moments, Preprints of 2 nd IFAC Symposium on Identification and Process Parameter Estimation, Part II, Academia Praque, 1970.
- 17 Bubnicki Z., Kaczkowski A., Nitka K., Mathematical model and identification of CO-conversion process, Lecture Notes on Control and Information Sciences, vol.1, Springer-Verlag 1978.
- 18 Bubnicki Z., Global and local identification of complex systems with cascade structure, System Science vol. 1, No 1, 1975.
- 19 Bubnicki Z., On the multistage identification, System Science, vol. 3, No 2, 1977.
- 20 Bubnicki Z., Rafajłowicz E., Parameter identification in distributed systems using maximum likelihood approach, Komunikat No 571 Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, 1977.
- 21 Butkovskij A.C., Teorija optimalnogo upravlenija sistemami s raspredelonnymi parametrami, Moskwa 1965.
- 22 Butkovskij A.C., Metody upravlenija sistemami s raspredelonnymi parametrami, Moskwa 1975.
- 23 Chavent G., Identification of functional parameters in partial differential equations in Identification of Parameters in Distributed Systems, ASME Monogr., 1974.
- 24 Courant R., Hilbert D., Methods of Mathematical Physics, vol.II, Interscience 1965.
- 25 Curtain R.F., Ichikawa A., Ryan E., Optimal location of sensors for filtering for distributed systems, Report No 50, University of Warwick, Control Theory Centre, 1976.

- 26 Curtain R.F., Kubrusly C.S., Identification of noisy distributed parameter systems using stochastic approximation, *Int. J. Control*, vol. 25, No 3, 1977.
- 27 Di Pillo G., Grippo L., Application of the epsilon technique to the identification of distributed parameter systems, *J. Opt. Theory and Appl.*, vol. 11, No 1, 1973.
- 28 Douglas J., Dupont T., Galerkin methods for parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 7, No 4, 1970.

- 29 Eykhoff P., *System Identification*, Wiley 1974.
- 30 Fedorow V.V., *Teorija optimalnogo eksperimenta*, Nauka, Moskwa 1971.
- 31 Fiks G.J., Strang G., *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Inc., 1973.
- 32 Friedly J.C., *Analiza dynamiki procesów*, WNT, Warszawa 1975.
- 33 Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa 1977.
- 34 Godunow S.K., Rabinenki W.S., *Raznostnyje schemy*, Nauka, Moskwa 1977.
- 35 Goodson R.E., Polis M.P., Parameter identification in distributed systems: a synthesizing overview, *Proc. IEEE*, vol. 64, No 1, 1976.
- 36 Goodson R.E., Polis M.P., Wozny M.J., On parameter identification for distributed systems using Galerkin's criterion, *Automatica*, vol. 9, 1973, str. 53-64.
- 37 Goodson R.E., Klein R.E., A definition and some results for distributed systems observability, *IEEE vol. A.C.* 15, 1970, str. 165-174.

- 38 Goodson R.E., Perdreauxville F.J., Identification of systems described by partial differential equations, Trans. ASME J. Basic Eng. 1966, str. 463-468.
- 39 Greblicki W., Asymptotycznie optymalne algorytmy rozpoznawania i identyfikacji w warunkach probabilistycznych, Prace Naukowe ICT PWr, 18/3, 1974.
- 40 Gruszecki J., Trybus L., Zasada maksimum w identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych, t1, No3, 1972 - Podstawy Sterowania.
- 41 Gruszecki J., Adaptacyjne modele obiektów o stałych rozłożonych, Podstawy Sterowania No 4, 1973, str. 373-390.
- 42 Gruszecki J., Cyfrowy system stabilizacji temperatury w piecu szklarskim, Materiały Konferencji Zastosowanie komputerów w przemyśle, Szczecin 1978.
- 43 Gupta N.K., Mehra R.K., Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations, IEEE, vol. AC 19, No 6, 1974.
- 44 Homza H., Sheirah M., On line identification of distributed parameter systems, Automatica, vol. 9, 1973.
- 45 Jegorow A.I., Optymalnoje upravljenje tepłowymi i difuzionnymi procesami, Nauka, Moskwa, 1978.
- 46 Kacprzyński B., Planowanie eksperymentów - podstawy matematyczne, WNT, Warszawa 1974.
- 47 Kaiser K.W., A method of determining heater - sensor configuration in temperature distribution controllers, Preprints IFAC Symp. Control of Distributed Systems, 1971.
- 48 Kącki E., Termokinetyka, WNT, Warszawa 1967.
- 49 Kącki E., Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice, WNT, Warszawa 1971.
- 50 Kendall M.G., Stuart A., The advanced theory of statistics, vol. II, Griffin Co, London 1967.

- 51 Kitamura S., Nakagiri S., Identifiability of spatially varying and constant parameters in distributed systems of parabolic type, SIAM J. Control and Optimization, vol. 15, No 5, 1977.
- 52 Krug G.K., Sosulin J.A., Fatujew W.A., Planirowanie eksperymentu w zadaczach identyfikacji i ekstrapolacji, Nauka, Moskwa 1977.
- 53 Kubrusly C.S., Distributed parameter system identification. A survey, Int. J. Control vol 26, No 4, 1977.
- 54 Laszko I.I., Makarow W.L., Skorobogatko A.A., Metody wycislenij, Wiszcza Szkoła, Kijów 1977.
- 55 Le Letty L., Studies in modeling and identification of distributed parameter systems, Lecture Notes in Computer Science, vol. 27, Springer-Verlag 1975.
- 56 Lipatow L.N., Typowe procesy w technologii chemicznej jako obiekty sterowania, WNT, Warszawa 1977.
- 57 Lions J.L., Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles, Dunod, Paryż 1968.
- 58 Loeve M., Probability Theory, Springer-Verlag 1977.
- 59 Ładyżenskaja A., Krajewyje zadaczi matematycznej fiziki, Nauka, Moskwa 1973.
- 60 Marcinkowska H., Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych, PWN Warszawa 1972.
- 61 Michlin S.G., Variacyonnye metody w matematycznej fizyce, Nauka, Moskwa, 1970.
- 62 Mizochata S., Teorija urawnienij s czastnymi proizvodnymi, Mir, Moskwa 1977.
- 63 Nitka K., Analiza porównawcza metod identyfikacji przy modelach analitycznych i arbitralnych, Rozprawa doktorska, Komunikat NO 660 Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1978.

- 64 Norden R.H., A survey of maximum likelihood estimation, Int. Stat. Rev. vol. 40, No 3, 1972.
- 65 Polak E., Computational methods in optimization, Academic Press 1971.
- 66 Rafajłowicz E., Metody sterowania optymalnego obiektami o parametrach rozłożonych, Praca magisterska wykonana w Instytucie Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1977.
- 67 Rafajłowicz E., Sufleta Z., Two-level computational technique for distributed system parameter identification using maximum likelihood approach. Systems Science Vol. 4, No 2, 1978.
- 68 Rafajłowicz E., Design of experiments for parameter identification of the static distributed systems. Systems Science vol. 4, No 4, 1978.
- 69 Rao C.R., Linear statistical inference and its applications, Wiley 1965.
- 70 Rolewicz S., Analiza funkcjonalna i teoria sterowania, PWN, Warszawa 1974.
- 71 Samarski A.A., Andrejew W.B., Raznostnye metody dla eliptyczeskich urawnienij, Nauka, Moskwa 1976.
- 72 Schmetterer L., Einführung in die mathematische statistik, Springer-Verlag, 1966.
- 73 Sikorski R., Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych, PWN, Warszawa 1969.
- 74 Sobolew W.I., Lusternik L.A., Elementy funkcjonalnego analiza, Nauka, Moskwa 1965.
- 75 Spalding G.R., Wells W.R., Parameter estimation and identification of large scale control systems, Materiały Międzynarodowej Konferencji Systems Science V, Wrocław 1978.
- 76 Wald A. Note on the consistency of the maximum likelihood estimates, Ann. Math. Statist. 20, 1949

- 77 Wynn H.P., The sequential generation of D-optimum experimental designs, Ann. Math. Statistics vol. 41, 1970.
- 78 Yu T.K., Seinfeld J.H., Observability and optimal measurement location in linear distributed parameter systems, Int. J. Control vol. 18, No 4, 1973.
- 79 Zacks S., The theory of statistical inference, Wiley 1971.
- 80 Zlamal M., On the finite element method, Numer Math. vol. 12, 1968, str. 394-409.
- 81 Żiwogładow W.P., Adaptacja w awtomatizowanych systemach upravljenija technologiczeskimi procesami, Ibim, Frunze 1974.
- 82 Żiwogładow W.P. K sipow K. , Identification of distributed parameters plants in the presence of noises, IFAC Symp. on Identification in automatic control systems, Prague 1967.

Niniejszy raport otrzymują:

1. Biblioteka międzyinstytutowa I-6, I-25	1 egz.
2. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
3. Biblioteka Wydziału Informatyki U. J. w Krakowie	1 egz.
4. Z-ca Dyrektora I-6 d/s Kształcenia Kadry Naukowej	1 egz.
5. Z-ca Dyrektora I-6 d/s Współpracy z Przemysłem	1 egz.
6. Promotor	1 egz.
7. Recenzenci	2 egz.
8. Seminarium Systemów Sterowania	1 egz.
9. Seminarium Metodologii Projektowania	1 egz.
10. Seminarium Ogólnej Teorii Systemów	1 egz.
11. Seminarium Systemów Informatyki	1 egz.
12. Zespół Badawczy Systemów Sterowania	1 egz.
13. Instytut Lotnictwa , Politechnika Rzeszowska	1 egz.
14. Instytut Elektrotechniki WSI Opole	1 egz.
15. Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej	1 egz.
16. Instytut Automatyki Politechniki Poznańskiej	1 egz.
17 Instytut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej	1 egz.
18. Instytut Kompleksowych Systemów Sterowania Politechniki Śląskiej, Gliwice	1 egz.
19. Instytut Badań Systemowych PAN Warszawa	1 egz.
20. Zakład Systemów Automatyki Kompleksowej PAN, Gliwice	1 egz.
21. Autor	3 egz.

Razem: 24 egz.