

Alicja Wolny

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WSPOMAGANIE WYBORU WARTOŚCI REZERWY SZKODOWEJ

1. Wstęp

Każdy zakład ubezpieczeń zobligowany jest do tworzenia rezerwy na nie wypłacone odszkodowania i świadczenia (dalej zwanej rezerwą szkodową). Problem ustalania wartości rezerwy szkodowej może być postrzegany jako problem wielokryterialny. Z jednej strony wartość rezerwy determinowana jest przez wyniki uzyskane w analizie statystycznej szkodowości, a z drugiej strony istotny wpływ na ostateczny jej poziom ma kondycja finansowa zakładu ubezpieczeń. W pracy zaproponowano wielokryterialny model decyzyjny wspomagający wybór wartości rezerwy szkodowej z oszacowanego przedziału zmienności rezerwy, w którym kryteriami wyboru są odpowiednie wskaźniki finansowe opisujące ogólną sytuację finansową zakładu.

2. Ogólne założenia modelowe

W związku z tym, że w pracy przedmiotem zainteresowania jest jedynie rezerwa szkodowa, wskaźniki finansowe są tak dobrane, aby można było oceniać te obszary analizy finansowej zakładu, na które bezpośrednio wpływa wysokość tej rezerwy. Aby wskaźniki miały wartość poznawczą, należy znać normy, względem których mogłyby być oceniane. Dlatego w pierwszej kolejności każdy z wybranych wskaźników uznany jest jako jeden z trzech typów:

- stymulanta – pożądane są jak najwyższe wartości wskaźnika (oznaczenie *S*),
- destymulanta – pożądane są jak najniższe wartości wskaźnika (oznaczenie *D*),
- nominanta – pożądany jest pewien ustalony poziom wskaźnika, a odchylenia *in plus* lub *in minus* są zjawiskiem negatywnym (oznaczenie *N*).

Podział ten ma zasadnicze znaczenie w procesie ustalania wartości rezerwy szkodowej. Dla każdego wskaźnika podajemy ocenę jego poziomu:

- dla stymulant i destymulant w skali od bardzo dobrego do bardzo złego,
- dla nominant w skali od dobrego do złego.

System kryteriów zastosowanych w modelu przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Zestawienie wskaźników finansowych wraz z odpowiadającymi im celami

Wskaźnik	Kryteria oceny	Pomiar celu
$S_1^{(w)} = \frac{S_w}{MW}$	ocena pokrycia marginesu wypłacalności środkami własnymi	max
$N_2^{(w)} = \frac{F_u}{S_w}$	ocena stopnia zabezpieczenia funduszu ubezpieczeniowego	const
$S_2^{(w)} = \frac{L_f}{F_u}$	ocena pokrycia funduszu ubezpieczeniowego lokatami	max
$S_1^{(r)} = \frac{R_s^b}{S_z^b}$	ocena zabezpieczenia przyszłych wartości odszkodowań i świadczeń wartością zebranej składki	max
$N_1^{(r)} = \frac{R_s^b}{O_w^b}$	ocena stopy ostatecznego rozliczenia szkód	const
$S_1^{(i)} = \frac{W_i}{S_p^b}$	ocena rentowności działalności ubezpieczeniowej	max
$D_1^{(i)} = \frac{O_w^b}{S_z^b}$	ocena szkodowości	min

Źródło: opracowanie własne.

Zaprezentowany system kryteriów jest systemem otwartym i może być modyfikowany przez wprowadzenie lub usunięcie wskaźników finansowych.

3. Wielokryterialny model wspomagający wybór rezerwy szkodowej

Przejdziemy do budowy formalnego modelu wielokryterialnego wspomagającego wybór wartości rezerwy szkodowej z przedziału zmienności tej rezerwy.

Pierwszym etapem budowy modelu jest zdefiniowanie zmiennych decyzyjnych. Definiując te zmienne, przyjmuje się założenie, że zakład ubezpieczeń ma portfel zawierający n rodzajów ryzyka. Ponadto zakłada się, że aktuariusz, obliczając rezerwę szkodową, przeprowadza kalkulacje w rozbiciu na grupy ryzyka. Za zmienne decyzyjne przyjmuje się zatem wielkości rezerw szkodowych dla poszczególnych grup ryzyka, gdzie x_i – wartość rezerwy szkodowej brutto dla i -tej

grupy ryzyka, $i = 1, \dots, n$. Wektor decyzyjny \mathbf{x} należy do przestrzeni \mathfrak{R}^n i ma postać $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$.

Kolejnym etapem jest zdefiniowanie kryteriów. W modelu wprowadzamy dwie grupy kryteriów. Pierwsza grupa zawiera kryteria mierzące ogólne cele tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych, wynikające bezpośrednio ze specyfiki zarządzania finansami zakładu ubezpieczeń. Natomiast w skład grupy drugiej wchodzi wskaźniki finansowe mierzące bieżącą sytuację finansową zakładu. W obu grupach dopuszczamy możliwość, iż pewne cele mogą zostać nie w pełni osiągnięte. W takim przypadku wprowadza się dodatkowe zmienne, które reprezentują odchylenie dodatnie oraz odchylenie ujemne poziomu funkcji kryterium od wartości zamierzonej:

$$y_j^+ = \begin{cases} f_j(\mathbf{x}), & f_j(\mathbf{x}) \geq 0, \\ 0, & f_j(\mathbf{x}) < 0; \end{cases} \quad y_j^- = \begin{cases} 0, & f_j(\mathbf{x}) \geq 0, \\ -f_j(\mathbf{x}), & f_j(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Grupa I

1. Zagwarantowanie środków finansowych na wypłatę odszkodowań i świadczeń z zawartych umów ubezpieczeniowych.

W celu zagwarantowania środków finansowych na wypłatę przyszłych odszkodowań i świadczeń posługujemy się kryterium badającym, na ile wartości rezerw szkodowych dla poszczególnych grup ryzyka odbiegają od oszacowanych przez aktuarusza wartości rezerw. Funkcję kryterium definiujemy jako:

$$k_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i),$$

gdzie \hat{x}_i jest oszacowaną przez aktuarusza wartością rezerwy szkodowej dla i -tej grupy ryzyka. Cel mierzony przez tę funkcję będziemy traktowali jako osiągnięty, jeżeli zachodzi warunek punktowy $k_1(\mathbf{x}) = 0$. Dopuszczamy możliwość niezrealizowania celu, co wymaga wprowadzenia równania bilansującego:

$$\sum_{i=1}^n x_i - y_1^+ + y_1^- = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i$$

wraz z dodatkowym kryterium straty $y_1 = y_1^- + y_1^+ \rightarrow \min$.

2. Stabilizacja wskaźnika szkodowości brutto

Pożądaną sytuacją w zakładzie ubezpieczeń jest to, aby stosunek zebranej składki do wartości wypłaconych odszkodowań był na stałym poziomie w kolejnych okresach działalności ubezpieczeniowej. Stabilna szkodowość zakładu świad-

czy o poprawnym ustaleniu składek ubezpieczeniowych. Cel ten można zapisać w postaci następującej funkcji kryterium:

$$k_2(x) = D_s^b(x) - D_s^b(\text{rezerwa w poprzednim okresie}).$$

Mierzy się go przedziałowo, dopuszczając odchylenia od pożądanej wartości $k_1(x) = 0$:

$$D_s^b(x) - D_s^b(\text{rezerwa w poprzednim okresie}) - y_2^+ + y_2^- = 0,$$

przy czym wymaga się, aby spełnione było kryterium:

$$y_2 = y_2^- + y_2^+ - > \min.$$

3. Stabilizacja wartości rezerwy szkodowej w czasie

Wartość rezerwy szkodowej istotnie wpływa na wielkość funduszu ubezpieczeniowego, na poziom lokat czy na poziom wyniku technicznego. Wartość ta ma również wpływ na wysokość oraz terminowość zawieranych przez zakład ubezpieczeń umów reasekuracyjnych. Dlatego też dla osób zarządzających zakładem ważne jest, aby nie następowały gwałtowne zmiany wartości tej rezerwy w kolejnych okresach. Pozwala to na prowadzenie konsekwentnej polityki finansowej, która zapewnia stabilną sytuację finansową zakładu. Funkcja mierząca ten cel ma postać:

$$k_3(x) = \sum_{i=1}^r (x_i - x_{i,i-1}),$$

gdzie $x_{i,i-1}$ jest wartością rezerwy szkodowej dla i -tej grupy ryzyka w okresie poprzednim. Pożądaną sytuacją jest zajście warunku punktowego $k_3(x) = 0$. Uwzględniając możliwość wystąpienia pewnych odchyżeń od osiągnięcia celu, wprowadza się równanie

$$\sum_{i=1}^n x_i - y_3^+ + y_3^- = \sum_{i=1}^n x_{i,i-1}$$

oraz kryterium $y_3 = y_3^- + y_3^+ - > \min$.

Grupa II

Do modelu wprowadza się wskaźniki finansowe opisujące sytuację finansową zakładu ubezpieczeń, na które wpływa wartość rezerwy szkodowej. W dalszych rozważaniach posłużymy się systemem wskaźników zaproponowanym powyżej. Ze względu na różny charakter tych wskaźników jako funkcje kryteriów wprowadzamy stymulanty i destymulanty, natomiast nominanty – jako warunki ograniczające.

Tabela 2. Wskaźniki finansowe będące stymulantami lub destymulantami uwzględniane w modelu

Funkcja kryterium	Opis wskaźnika finansowego
$k_4(\mathbf{x}) = \frac{S_w}{MW(\mathbf{x})} \rightarrow \max$	$S_1^{(w)}$
$k_5(\mathbf{x}) = \frac{L_f}{F_u(\mathbf{x})} \rightarrow \max$	$S_2^{(w)}$
$k_6(\mathbf{x}) = \frac{R_x^b(\mathbf{x})}{S_z^b} \rightarrow \max$	$S_1^{(r)}$
$k_7(\mathbf{x}) = \frac{O_w^b(\mathbf{x})}{S_z^b} \rightarrow \min$	$D_1^{(r)}$

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku powyższych rozważań do modelu wprowadzamy jedną funkcję kryterium, $k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$, która wraz z systemem wskaźników finansowych bada finansową sytuację zakładu ubezpieczeń. W związku z tym, że wskaźniki finansowe wyróżniamy jako stymulanty oraz destymulanty w procesie rozwiązywania modelu, będziemy szukać minimum oraz maksimum funkcji k . Ostatecznie więc do modelu wprowadzamy dwa kryteria:

$$1) k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \min,$$

$$2) k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \max.$$

Jednocześnie daje to możliwość obserwacji wartości preferowanych przez inne osoby (właściciele, klienci, organ kontroli) zainteresowane wysokością rezerwy szkodowej.

Wszystkie wskaźniki będące nominantami mają z kolei charakter przedziałowy i dlatego będą występowały jedynie w układzie warunków ograniczających. Wprowadzamy je w dalszej części pracy.

Warunki ograniczające

Podstawowe ograniczenie modelu wynikające z obliczeń aktuarialnych

Wartości rezerw szkodowych dla poszczególnych grup ryzyka muszą przyjmować wartości z przedziału zmienności rezerw

$$\hat{x}_i^{\min} \leq x_i \leq \hat{x}_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie \hat{x}_i^{\min} oraz \hat{x}_i^{\max} oznacza odpowiednio dolną I górną granicę przedziału zmienności rezerwy szkodowej dla i -tego rodzaju ryzyka.

Kryteria mierzące cele przedziałowo

W ostatniej grupie ograniczeń wprowadza się wskaźniki finansowe będące nominantami. W równaniu bilansującym niezbędne jest wprowadzenie pewnego stałego poziomu danej nominanty określanego przez decydenta, podobnie jak w przypadku dyskretnym.

1. Ocena zabezpieczenia funduszu ubezpieczeniowego

$$\frac{F_u(x)}{S_w} - y_8^+ + y_8^- = \text{Const}_8, \quad y_8 = (y_8^+ + y_8^-) \rightarrow \min.$$

2. Ocena stopy ostatecznego rozliczenia szkód

$$\frac{R_x^h(x)}{O_w^h} - y_9^+ + y_9^- = \text{Const}_9, \quad y_9 = (y_9^+ + y_9^-) \rightarrow \min.$$

W modelu zakłada się, że przyjmowany poziom oceniany jest jako bardzo dobry lub najwyższy możliwy do osiągnięcia. Często jest sytuacja, w której poziom bardzo dobry nie jest możliwy do zrealizowania. Wynika to z ograniczenia wartości rezerwy szkodowej przez dolną i górną granicę przedziału zmienności aktuariusza.

Widać, iż w prezentowanym modelu wprowadzono dodatkowe zmienne decyzyjne reprezentujące odchylenia od zamierzonych wartości celów. Wektor decyzyjny ma zatem postać:

$$x = [x_1, \dots, x_7, y_8^-, y_8^+, y_9^-, y_9^+]^T.$$

Model ten można rozwiązać za pomocą interaktywnych metod wielokryterialnych.

4. Podsumowanie

Zaproponowane w artykule podejście wspomagania podejmowania decyzji w procesie ustalania rezerwy szkodowej pozwala na jednoczesne uwzględnienie statystycznej analizy szkodowości oraz kondycji finansowej zakładu ubezpieczeń. Stosując metody interaktywne do poszukiwania ostatecznej decyzji, możliwe jest uwzględnienie preferencji decydenta odnośnie do przyszłej sytuacji ekonomicznej zakładu ubezpieczeń, na którą bezpośrednio wpływa poziom ustalonej rezerwy. Niestety, zastrzeżenia co do jej stosowania w praktyce budzi to, iż istnieje możliwość manipulowania wskaźnikami finansowymi oraz danymi księgowymi powodująca zaciemnienie obrazu sytuacji finansowej firmy.

Literatura

- [1] Claims Reserving Manual, vol. I, The Institute of Actuaries, London 1989.
- [2] Claims Reserving Manual, vol. II, The Institute of Actuaries, London 1989.
- [3] Duchniewicz S., *System wczesnego ostrzegania w zakładzie ubezpieczeń*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe” 1999, nr 3-4.
- [4] Littmann M.W., *Using Utility Theory for Describing Best Estimate Reserves*, CAS Reserving Call Papers, vol. 1, Fall 1998.
- [5] *Metodyka analizy finansowej zakładu ubezpieczeń*, Departament Analiz Systemu Ubezpieczeniowego, Państwowy Urząd Nadzoru Ubezpieczeń, Wydawnictwo Edytor, Warszawa 2001.

MATHEMATICAL MODEL SUPPORTING THE LOSS RESERVE CALCULATION PROCESS

Summary

The loss reserves calculation is a very important problem in insurance corporations because this determines the future financial standing. There are many methods of loss reserves calculation proposed by practising insurers and academics it is not easy to say which method is the best one and which should be applied in practice.

We propose to consider loss reserves calculation as a multicriteria decision making problem. Such an approach enables to take into consideration the results obtained by various actuarial methods and also individual decision maker's preferences which come from corporation financial standing and market strategy.

In the first part of this paper we discuss the loss reserves calculation process as the multi-criteria decision making problem. In the second part the mathematical model supporting this process is presented.